

Verica Bakeva Smilkova

Goran Mihaylovski

MATEMATİK

Lise İkinci Sınıflar
İçin Ders Kitabı

II

$$P=?$$

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$



MATEMATİK

II

Lise İkinci Sınıflar
İçin Ders Kitabı



Üsküp, 2026
(Birinci baskı)

MATEMATİK II lise ikinci sınıflar için ders kitabı

Birinci baskı, 2026

Telif hakkı © 2026, Albi DOO

Yayınevi	Albi DOO, Üsküp 2026
Yazarlar	D-r. Verica Bakeva Smilkova prof. Goran Mihayloski
Mesleki iş ortağı	Aleksandra Popovska-Mitrović
Editör	Elena Stefanovska
Orjinal başlık	Математика II учебник за втора година гимназиско образование
Makedoncadan Türkçeye çeviri	M-r. Selsebil Karaağaç
Lektör	Önder Özgürlü
Tasarım ve grafik düzenleme	Mladen Yakimovski
Baskı	Branko Gapo – grafičko proizvodstvo, Üsküp 2026
Baskı adedi	200

Tüm hakları saklıdır. Bu kitabın hiçbir bölümü, yayıncının yazılı izni olmadan, fotokopi, kayıt veya bir veri depolama sisteminde saklanma dahil olmak üzere, elektronik veya mekanik herhangi bir yolla yeniden basılamaz veya iletilemez.

Bu ders kitabı, Kuzey Makedonya Cumhuriyeti Eğitim ve Bilim Bakanlığı tarafından 21.05.2026 tarihinde yayımlanan 26-644/1 sayılı " MATEMATİK II lise ikinci sınıflar için ders kitabı Onaylanması ve Kullanılması Hakkında Karar" ile ilköğretimde kullanım için onaylanmıştır.

Değerlendirme Kurulu: Prof. Dr. Alyit Ibraimi, Prof. Dr. Xhevair Beqiri, Suzana Nichota

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)=512.161

BAKEVA Smilkova, Verica

Matematik II lise ikinci sınıflar için ders kitabı / Verica Bakeva Smilkova, Goran Mihajloski ; Makedoncadan Türkçeye çeviri, Selsebil Karaağaç. - Üsküp : Albi, 2026. - 330 стр. : илустр. ; 30 см

Превод на делото: Математика II учебник за втора година гимназиско образование

ISBN 978-608-241-095-1

1. Mihayloski, Goran [автор]

COBISS.MK-ID 69371141

ÖN SÖZ

Bu ders kitabı, lise ikinci sınıf öğrencilerinin temel matematik kavramlarını ve yöntemlerini sistemli ve derinlemesine öğrenmeleri amacıyla hazırlanmıştır ve ileri öğrenim için olduğu kadar matematiğin fen ve teknik bilimlerde, ekonomide ve günlük yaşamda uygulanması için de temel oluşturmaktadır. Ders kitabında, bilim, teknoloji, mühendislik ve matematik (STEM) odaklı çağdaş eğitim yaklaşımlarına ve matematiğin gerçek yaşam problemlerini anlama, modelleme ve çözmede bir dil ve araç olarak üstlendiği role uygun etkinliklere yer verilmiştir. Ders kitabının amacı yalnızca biçimsel işlem yöntemlerini kazandırmak değil, aynı zamanda analitik, mantıksal ve eleştirel düşünmeyi geliştirmek ve matematiksel bilgileri farklı bağlamlarda uygulayabilme becerisini kazandırmaktır.

II. Sınıf Matematik ders kitabı, lise ikinci sınıf matematik öğretim programına göre düzenlenmiş altı temadan oluşmaktadır.

Birinci konuda, reel sayılar kümesi üzerindeki işlemleri genişletmek ve bu kümeyi karmaşık sayılar kümesine kadar genişletmek amacıyla köklü ifadeler ve karmaşık sayılar ele alınmaktadır. Bu içerikler, cebirsel işlemlerin daha derin anlaşılmasını sağlamakta ve matematikte, fizikte ve birçok başka alanda belirli türde denklemlerin ve problemlerin çözümü için gerekli bir araç oluşturmaktadır.

Sonraki iki konuda, ikinci dereceden denklemlere ve ikinci dereceden denklemlere dönüştürülebilen denklemlere, ayrıca ikinci dereceden fonksiyona, onun özelliklerine ve grafiksel gösterimine özel önem verilmiştir. Bu konular, cebirsel yaklaşım ile geometrik yaklaşım arasında açık bir ilişki kurulmasını sağlamakta ve fonksiyonların daha ileri düzeyde öğrenilmesi için temel oluşturmaktadır. Devamında, ikinci dereceden eşitsizlikler ve bir bilinmeyenli ikinci dereceden eşitsizlik sistemleri; mantıksal düşünme, çözüm analizi ve çözümlerin yorumlanması üzerinde durularak ele alınmaktadır.

Dördüncü konu olan "Olasılığın Temel Unsurları" bölümünde, kombinatorik ve olasılığın temel kavramları, yani temel sayma ilkeleri ve olasılık hesaplama yöntemleri tanıtılmaktadır. Bu içerikler, kombinatorik ve istatistiksel düşünmeyi geliştirmekte ve günümüzde bilim ve teknolojiye giderek daha fazla yer alan rastgele olayların modellenmesini ve analiz edilmesini sağlamaktadır.

Beşinci konunun ilk bölümü, açıların, üçgenlerin ve trigonometrik özdeşliklerin incelenmesinde; geometri, fizik ve mühendislikle açık bir ilişki kuran güçlü bir araç olarak trigonometriye ayrılmıştır. Trigonometrik fonksiyonlar tanıtılmakta ve bunların uygulamalı ve kuramsal problemlerin çözümündeki kullanımları ele alınmaktadır. Bu konunun doğru ve düzleme ayrılan ikinci bölümünde ise teorem ile aksiyom arasındaki fark açıklanmakta, uzay geometrisinin aksiyomları incelenmekte ve uzayda iki düzlemin, bir doğru ile bir düzlemin ya da iki doğrunun birbirleriyle olan konumu açıklanıp çizimlerle gösterilmektedir. Üçüncü konunun son bölümünde ise üç boyutlu cisimler ve bunların bir düzlemlerle oluşturdukları kesitler incelenmektedir. Bu içerikler aracılığıyla uzamsal düşünme, görselleştirme ve düzlem ile uzaydaki geometrik cisimleri analiz etme becerisi geliştirilmektedir.

Altıncı konuda, iki boyutlu cisimler, bunların çevresi ve alanı ile üç boyutlu cisimler, bunların yüzey alanı ve hacmi incelenmektedir. Bu kavramlar; ölçme, uzamsal analiz ve mimari unsurlar, teknik yapılar, ambalajlar ve doğal cisimler gibi gerçek nesnelerin modellenmesiyle ilişkili uygulamalı örnekler aracılığıyla ele alınmaktadır.

Ders kitabı, her konunun açık tanımlar, özellikler, açıklayıcı örnekler ve farklı zorluk düzeylerinde çeşitli alıştırmalarla desteklenecek şekilde düzenlenmiştir. Özellikle teoremin uygulamalarla ilişkilendirilmesine ve öğrencilerde matematiksel düşünme, mantık yürütme ve bağımsız çalışma becerisinin geliştirilmesine önem verilmiştir. Her dersin başında, öğrencilerin daha önce öğrendikleri ancak yeni bilgileri kavrayabilmeleri için hatırlamaları gereken konuların yer aldığı "Unutma!" bölümü bulunmaktadır. Ders kitabındaki bütün örnekler çözümleriyle birlikte verilmiştir. Örneklerden sonra, genellikle öğrencilerin derste edindikleri bilgileri ne ölçüde öğrendiklerini kontrol etmeye yönelik alıştırmalar yer almaktadır. Her dersin sonunda "Alıştırmalar", her konunun sonunda ise tekrar ve pekiştirme alıştırmaları bulunmaktadır.

Ders kitabının hazırlanması sırasında büyük emek verilmiş olmasına rağmen, hazırlık süresinin kısa olması nedeniyle bazı teknik hatalar bulunabilir. Bunları bize bildirirseniz hâlinde size teşekkür ederiz ve bu hatalar bir sonraki baskıda düzeltilecektir.

Bu ders kitabının, öğrenciler için matematik öğreniminde güvenilir bir rehber, öğretmenler için ise öğretim sürecinde yararlı bir destek olmasını umut ediyoruz.

İÇİNDEKİLER

ÖN SÖZ	3
--------------	---

KONU 1	KÖKLÜ İFADELER VE KARMAŞIK SAYILAR.....	8
1.1	Üslü ifadeler ve üslü ifadelerle işlemler.....	8
1.2	Kök kavramı	13
1.3	Rasyonel üslü ifade. Köklü ifadelerin üslü ifade biçiminde yazılması.....	18
1.4	Köklü ifadelerin genişletilmesi ve sadeleştirilmesi	25
1.5	Çarpım ve bölümün kökünü alma.....	29
1.6	Köklü ifadelerde toplama ve çıkarma	34
1.7	Köklü ifadelerin çarpılması, bölünmesi, üs alınması ve kökünün alınması.....	39
1.8	İrrasyonel ifadeler bir kesrin paydasını rasyonel yapma.....	44
1.9	Sayı kümelerinin genişletilmesi	50
1.10	Karmaşık sayıların toplanması ve çıkarılması.....	57
1.11	Karmaşık sayıların çarpılması. Karmaşık sayıların kuvveti	60
1.12	Karmaşık sayıların bölünmesi.....	64
1.13	Karmaşık sayıların uygulamalarına ilişkin sorular.....	66
	Tekrar ve pekiştirme soruları	72

KONU 2	İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER VE İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLERE İNDİRGENEN DENKLEMLER.....	74
2.1	İkinci dereceden denklem kavramı. İkinci dereceden denklem türleri. İkinci dereceden denklemin çözümü	74
2.2	Eksik ikinci dereceden denklemlerin çözümü.....	80
2.3	Tam ikinci dereceden denklemlerin çözümü.....	84
2.4	İkinci dereceden denklemin çözümlerinin incelenmesi.....	90
2.5	Vieta formülleri	94
2.6	Verilen çözümlerle ikinci dereceden denklem oluşturma. İkinci dereceden üç terimliyi çarpanlara ayırma	98
2.7	Kesirli rasyonel denklemler	103
2.8	Bikare denklemler	107
2.9	İki bilinmeyenli bir doğrusal denklem ve iki bilinmeyenli bir ikinci dereceden denklemden oluşan sistem	109
	Tekrar ve pekiştirme soruları	112

KONU 3	İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYON,İKİNCİ DERECEDEN EŞİTSİZLİK VE BİR BİLİNMEYENLİ İKİNCİ DERECEDEN EŞİTSİZLİK SİSTEMİ	114
3.1	İkinci dereceden fonksiyon. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği	
3.2	$f(x) = ax^2$ ve $f(x) = ax^2 + c$ fonksiyonlarının grafiği	118
3.3	İkinci dereceden fonksiyonun kanonik (tepe noktası) biçimi ve $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ grafiği	123
3.4	$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği	127
3.5	İkinci dereceden fonksiyonun özellikleri	131
3.6	İkinci dereceden fonksiyonun değişimi ve grafiği	138
3.7	İkinci dereceden eşitsizlikler	141
3.8	Bir bilinmeyenli ikinci dereceden eşitsizlik sistemi	145
	Tekrar ve pekiştirme soruları	152
KONU 4	OLASILIK İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR	154
4.1	Tekrarlı permütasyon	154
4.2	Tekrarsız permütasyon	159
4.3	Permütasyonlar	164
4.4	Kombinasyonlar	170
4.5	Bazı kombine sorular	176
4.6	Deneyler ve olaylar	181
4.7	Elementer (basit) olaylar kümesi. Rastgele olaylar	185
4.8	Olaylarda işlemler	188
4.9	Olasılığın klasik tanımı	193
4.10	Olasılığın özellikleri. Bağımsız olaylar	198
	Tekrar ve pekiştirme soruları	205
KONU 5	GEOMETRİ	210
5.1	Açılar ve açılarının ölçülmesi	208
5.2	Dar açının trigonometrik fonksiyonlarının tanımlanması	213
5.3	Tümler açılarının trigonometrik fonksiyonları	217
5.4	Aynı açının trigonometrik fonksiyonları arasındaki ilişki	220
5.5	Trigonometrik ifadelerin sadeleştirilmesi	223
5.6	Trigonometrik fonksiyonların uygulanması	227
5.7	Uzay geometrisinin aksiyomları	231
5.8	Doğru ile düzlemin, iki düzlemin ve iki doğrunun birbirlerine göre durumu	236
5.9	Prizma. Prizmanın düzlemlerle kesitleri	241
5.10	Piramit. Düzlemlerle piramidin kesitleri	247
5.11	Silindir. Silindirin düzlemlerle kesitleri	251
5.12	Koni. Düzlemlerle koninin kesitleri	255
	Tekrar ve pekiştirme soruları	261

KONU 6	ÖLÇME.....	262
6.1	Kare ve dikdörtgenin çevresi ve alanı	262
6.2	Paralelkenarın çevresi ve alanı	267
6.3	Üçgenin çevresi ve alanı	271
6.4	Trapez ve deltoidin çevresi ve alanı	278
6.5	Çemberin çevresi, dairenin alanı ve daire dilimleri	284
6.6	Piramidin yüzey alanı ve hacmi	290
6.7	Kesik piramidin yüzey alanı ve hacmi	296
6.8	Koninin yüzey alanı ve hacmi	302
6.9	Kesik koninin yüzey alanı ve hacmi	306
6.10	Kürenin yüzey alanı ve küre parçaları	312
6.11	Kürenin hacmi ve parçaları	319
	Tekrar ve pekiştirme soruları	325
PROGRAMDAN BEKLENEN ÖĞRENME SONUÇLARI.....	328	
İLGİLİ LİTERATÜR	330	

KÖKLÜ İFADELER VE KARMAŞIK SAYILAR

Gerçek hayatta karşılaşılan birçok durumda yalnızca temel aritmetik işlemleri; toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve üs alma işlemlerini kullanmak yeterli değildir. Çoğu zaman alan, hacim veya herhangi bir fiziksel büyüklük bilinmektedir ve buna karşılık gelen uzunluğun, kenarın ya da ölçünün belirlenmesi gerekmektedir. Örneğin, bir köşegenin uzunluğunu, iki nokta arasındaki uzaklığı, hızı, enerjiyi veya elektrik direncini hesaplarken kök alma işlemi ortaya çıkar. Bu işlemde, verilen A sayısı için, üssü alındığında A sayısını veren B sayısı belirlenir. Bu işleme kök alma denir ve geometri, fizik, teknik, mühendislik ve STEM uygulamalarındaki modelleme çalışmalarında önemli bir kullanım alanına sahiptir. Bu konuda kök kavramını, kökün özelliklerini ve hesaplama yöntemlerini, ayrıca köklü ifadelerin uygulamalı problemlerdeki kullanımını inceleyeceğiz.

1.1 ÜSLÜ İFADELER VE ÜSLÜ İFADELERLE İŞLEMLER

Hatırla!

- 16 sayısı $4 \cdot 4$ şeklinde yazılabilir.
- $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ ifadesi kısa olarak 5^4 biçiminde yazılabilir.

Unutma!

a herhangi bir reel (gerçek) sayı ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere, a sayısının n . kuvveti şu şekilde tanımlanır

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kere}}, \quad n \geq 2$$

a^n üslü ifadesinin a sayısına taban, n sayısına ise üs denir.

Soru 1

Aşağıdaki çarpma işlemlerini üslü ifade olarak göster:

- a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; b) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$; c) $x \cdot x \cdot x \cdot x$.

Soru 2

Aşağıdaki üslü ifadeleri eşit çarpanların çarpımı biçiminde göster.

- a) 4^6 ; b) $(-3)^2$; c) y^3 .

Soru 3

1 ve -1 sayılarının aşağıdaki üslü ifadelerinin değerlerini hesapla.

- a) 1^{34} ; b) $(-1)^{2005}$; c) 1^{2025} ; d) $(-1)^{2026}$.

Unutma!

a herhangi bir reel(gerçek) sayı, $a \neq 0$, ve n pozitif bir tam sayı ise: $a^0 = 1$ ve $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Örnek 1

- a) $5^0 = 1$; b) $(-4)^0 = 1$; c) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; d) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$.

Soru 4

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini hesapla.

- a) 10^0 ; b) $(-15)^0$; c) 1^{-5} ; d) $(-3)^{-4}$.

Unutma!

Eğer a ve b herhangi birer gerçek sayı, m ve n herhangi birer tam sayı ise, üslü ifadelerle ilgili aşağıdaki kurallar geçerlidir:

1. Aynı tabanlı üslü ifadelerin çarpımı

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

2. Aynı tabanlı üslü ifadelerin bölümü

$$a \neq 0, \text{ için } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. Bir üslü ifadenin üssünün alınması

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

4. Bir çarpımın üssü

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

5. Bir bölümün üssü

$$b \neq 0, \text{ için } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Örnek 2

Üslü ifadelerle ilgili kuralları kullanarak aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz:

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

$$y^4 \cdot y^{-2} = y^{4-2} = y^2$$

$$(3a)^4 = 3^4 a^4 = 81a^4$$

$$(c^3)^5 = c^{3 \cdot 5} = c^{15}$$

Soru 5

Aşağıdaki ifadeleri sadeleştir:

a) $b^{10}b^{-5}$; b) $\left(\frac{c}{3}\right)^3$; c) $\frac{d^6}{d^3}$.

Örnek 3

Aşağıdaki ifadelerde negatif üsler ortadan kaldırılın:

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$; b) $\frac{a^{-m}}{b^{-n}}$, $a, b \neq 0$.

Çözüm:

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$; b) $\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{b^n}{a^m}$.

Unutma!

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$; b) $\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}$.

Örnek 4

Negatif üs ortadan kaldırılın ve ifade sadeleştirilsin: $\left(\frac{x}{3y^4}\right)^{-2}$.

Çözüm:

$$\left(\frac{x}{3y^4}\right)^{-2} = \left(\frac{3y^4}{x}\right)^2 = \frac{(3y^4)^2}{x^2} = \frac{3^2(y^4)^2}{x^2} = \frac{9y^8}{x^2}.$$

Soru 6

Negatif üs ortadan kaldırılın ve ifade sadeleştirilsin: $\left(\frac{y}{5x^{-4}}\right)^{-3}$.

Örnek 5

Pasifik Okyanusu'nun ortalama derinliği 4280 m, yüzey alanı ise $1,7 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ 'dir. Hacim, okyanusun yüzey alanı ile derinliğinin çarpımı olarak hesaplanıyorsa okyanusun litre cinsinden toplam hacmi ne kadardır? (Bir metreküp 1000 litre içerir.)

Çözüm:

Ortalama derinliği $d = 4280 \text{ m}$, yüzey alanını ise $B = 1,7 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ ile gösterelim. Okyanusun hacmi $V = B \cdot d$ formülüyle hesaplanır. Buna göre

$$V = B \cdot d = 1,7 \cdot 10^{14} \cdot 4280 = 7276 \cdot 10^{14} = 7,276 \cdot 10^{17} \text{ m}^3.$$

1 metreküpün 1000 litre, yani $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ l}$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda litre cinsinden toplam hacmi

$$V = 7,276 \cdot 10^{17} \cdot 10^3 = 7,276 \cdot 10^{20} \text{ l elde ederiz.}$$

Örnek 6

Bir hastanedeki yalıtılmış odanın ölçüleri şöyledir: genişliği 5 m, uzunluğu 10 m ve yüksekliği 3 m'dir. Oda saf oksijenle doludur. Bir metreküp 1000 litre içerir ve herhangi bir gazın 22,4 litresi $6,02 \cdot 10^{23}$ molekül (Avogadro sayısı) içerir. Odada kaç oksijen molekülü vardır?

Çözüm:

Odanın hacmi $V = 5 \cdot 10 \cdot 3 = 150 \text{ m}^3 = 150 \cdot 10^3 \text{ l}$ 'dir. Herhangi bir gazın 22,4 litresinde $6,02 \cdot 10^{23}$ molekül bulunduğundan, bir litre gazda $\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4}$ molekül bulunur. Buna göre odada bulunan toplam

$$\text{oksijen molekülü sayısı } 150 \cdot 10^3 \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4} = 40,3 \cdot 10^{26} = 4,03 \cdot 10^{27} \text{ dir.}$$

Etkinlik

- Bir tahta parçası 600°C 'de bir saniyede tamamen yanmaktadır. Sıcaklık her 10°C azaldığında tahtanın yanması için gereken süre iki katına çıkmakta, sıcaklık her 10°C arttığında ise yarıya inmektedir. Bir tahta parçası aşağıdaki sıcaklıklarda kaç saniyede yanar:
 - a) 550°C ;
 - b) 650°C ?
- Aşağıdaki eşitlikler verilmiştir:
 - a) $2^{-2} - 2^{-3} : 2^{-4} = 2^1$;
 - b) $3^{-3} + 3^{-2} : 3^{-2} - 3^{-3} - 3^0 = 3^0$
 Doğru sayısal eşitlikleri elde etmek için parantezlerin hangi yerlere yazılması gerektiğini gruplar hâlinde tartışınız.

Alıştırma Soruları!

1. Her bir ifadeyi hesapla:

a) $(2^3)^2$; b) $(2^3)^0$; c) $\frac{10^6}{10^4}$; d) $\frac{6^6}{6^{-4}}$; e) $\left(\frac{1}{32}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{4}{9}\right)^{-3}$;
 f) $\frac{3^2 \cdot 4^{-2} \cdot 5^3}{2^{-4} \cdot 3^3 \cdot 25}$; g) $2^{-2} + 2^{-3}$; h) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 (-3)^5$.

2. Her bir ifade sadeleştirilsin:

a) $x^{-8}x^4$; b) $(3y^2)(4y^3)$; c) $z^5z^{-4}z^{-7}$; d) $\frac{a^8a^{-2}}{a^3}$; e) $(3z^2)(9z^2)^{-2}$;
 f) $b^4(3ab^3)(2a^2b^{-3})^{-4}$; g) $\left(\frac{x^4z^2}{3y^3}\right)^3 \left(\frac{6x^3z^{-2}}{2y^4}\right)^{-1}$; h) $\left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$.

3. Vücut kitle indeksi, tıp araştırmacılarının bir kişinin normal kiloda, fazla kilolu veya normal kilonun altında olup olmadığını belirlemek için kullandıkları bir ölçüdür. W kilogram ağırlığında ve H metre boyunda olan bir kişinin vücut kitle indeksi B aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$B = \frac{W}{H^2}.$$

$18,5 \leq B \leq 24,9$ koşulunu sağlıyorsa normal kabul edilir. Vücut kitle indeksi $B \geq 30$ olan bir kişi ise fazla kilolu kabul edilir.

a) Tabloda verilen her kişinin vücut kitle indeksini hesaplayın, ardından kişinin normal kiloda, normal kilonun altında veya fazla kilolu olup olmadığını belirleyin.

	Kilogram cinsinden ağırlık	Metre cinsinden boy	Vücut kitle indeksi	Sonuç
Petar	43	1,6		
Luka	47	1,54		
Miloş	95	1,84		
Vedran	105	1,55		

b) Kendi vücut kitle indeksini hesapla.

4. 5000 denarlık bir tutar yatırılırsa, n yıl sonraki faiz I aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$I = 5000 (1,0025^{12n} - 1).$$

Aşağıdaki tabloyu, verilen yıl sayısına göre faiz tutarıyla doldur.

Yıl	Denar cinsinden faiz
1	152,08
2	
3	
4	
5	

5. a, b ve c ; $a > 0, b < 0$ ve $c < 0$ olacak şekilde reel sayılar olsun. Her bir ifadenin işaretini belirle:

a) b^5 ; b) b^{10} ; c) ab^2c^3 ; d) $(b - a)^3$; e) $(b - a)^4$; f) $\frac{a^3c^3}{b^6c^6}$.

1.2 KÖK KAVRAMI

Örnek 1

Bir parkta alanı 64 m^2 olan kare biçiminde bir çiçek bahçesi tasarlanacaktır. Karenin bir kenarının uzunluğu kaç metre olmalıdır?

Çözüm:

Karenin bir kenarının uzunluğu x olsun. x sayısı aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde belirlenmelidir:

$$x^2 = 64.$$

Karenin bir kenarının uzunluğu negatif olmayan bir sayıdır. Buna göre, kendisiyle çarpıldığında 64 sonucunu veren negatif olmayan x sayısı hangisidir? Açıkça görülmektedir ki $8^2 = 64$, yani $x = 8$. $x = \sqrt{64} = 8$ yazılır.

Örnek 2

Serbest düşmede alınan yol s (metre cinsinden), yaklaşık olarak $s = t^2$ formülüyle verilir. Burada t zamanı saniye cinsindendir. Cisim 36 m yolu kaç saniyede alır?

Çözüm:

Bu durumda $t^2 = 36$ olacak şekilde negatif olmayan t zamanı aranır. $6^2 = 36$ olduğundan $t = 6$ sonucuna ulaşılır. Buna göre serbest düşen cisim 36 m yolu $t = 6$ saniyede alır. $t = \sqrt{36} = 6$ yazılır.

Unutma!

Negatif olmayan bir x gerçel sayısının **karekökü** (2. dereceden kökü); $y^2 = x$ eşitliğini sağlayan negatif olmayan y gerçel sayısıdır.

$y = \sqrt{x}$ yazılır ve " y , x 'in kareköküdür." diye okunur.

$\sqrt{x}$ ifadesinde x sayısına **kök içi ifade** (veya **kök içi büyüklük**) denir.

Üssü 2 olan üs alma işlemi ile karekök alma işleminin birbirinin tersi işlemler olduğuna dikkat edelim. Buna göre,

$$\sqrt{36} = 6, \text{ çünkü } 6^2 = 36;$$

$$\sqrt{225} = 15, \text{ çünkü } 15^2 = 225;$$

$$\sqrt{1} = 1, \text{ çünkü } 1^2 = 1;$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ çünkü } 0^2 = 0.$$

Soru 1

Aşağıdaki kareköklerin değerlerini hesapla:

a) $\sqrt{144}$; b) $\sqrt{196}$; c) $\sqrt{625}$.

Genel durumda, $x^2 = 25$ biçimindeki bir denklem çözülürken x 'in işaretiyle ilgili herhangi bir kısıtlama yoksa, denklemi sağlayan bütün reel x sayıları aranır. Bu denklemin iki çözümü vardır: $x = -5$ ve $x = 5$. Çünkü $(-5)^2 = 25$ ve $5^2 = 25$.

$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ yazılır. Ancak dikkat ediniz; tanım gereği $\sqrt{25} = 5$ tir. $\pm$ işareti kök işaretinin önüne yazılır.

Örnek 3

$x^2 = 100$ denklemini çöz.

Çözüm:

Yukarıdaki açıklamaya göre $x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$.

Soru 2

Aşağıdaki denklemleri çöz:

a) $x^2 = 324$; b) $x^2 - 36 = 64$; c) $289 - x^2 = 0$.

Örnek 4

İnşaatlarda küp biçiminde beton bloklar kullanılmaktadır. Böyle bir bloğun hacmi 64 m^3 'tür. Bu bloğun bir ayrıntının uzunluğu kaç metredir?

Çözüm:

Bir bloğun ayrıntı uzunluğu a ise, $a^3 = 64$ eşitliğini sağlayan a sayısı aranır. Bu eşitliği sağlayan tek a sayısı $a = 4$ 'tür. $a = \sqrt[3]{64} = 4$ yazılır.

Unutma!

Bir x reel sayısının **küpkökü (3. dereceden kökü)**, $y^3 = x$ eşitliğini sağlayan y reel sayısıdır.

$y = \sqrt[3]{x}$ yazılır ve " y , x 'in küpköküdür." diye okunur.

Üssü 3 olan üs alma işlemi ile küpkök alma işleminin birbirinin tersi olduğuna dikkat et. Buna göre,

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ çünkü } 2^3 = 8;$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3, \text{ çünkü } (-3)^3 = -27;$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1, \text{ çünkü } (-1)^3 = -1;$$

$$\sqrt[3]{0} = 0, \text{ çünkü } 0^3 = 0.$$

Soru 3

Aşağıdaki küpköklerin değerlerini hesapla:

a) $\sqrt[3]{-125}$; b) $\sqrt[3]{1000}$; c) $\sqrt[3]{-1000}$.

Şimdi, kök kavramının, n ($n \geq 2$) herhangi bir doğal sayı olmak üzere, kök derecesi n olan köklere genellenip genellenemeyeceği sorusu ortaya çıkar.

Unutma!

1. n çift bir sayı ise n . **dereceden kök**; her negatif olmayan reel x sayısına $y^n = x$ koşulunu sağlayan negatif olmayan y reel sayısını karşılık getiren fonksiyondur.
2. n tek bir sayı ise, n . **dereceden kök**; her reel x sayısına $y^n = x$ koşulunu sağlayan y reel sayısını karşılık getiren fonksiyondur.

Her iki durumda da $y = \sqrt[n]{x}$ yazılır ve " y , x 'in n .dereceden köküdür." diye okunur.

Kök derecesi n çift sayı olduğunda, bu fonksiyonun yalnızca negatif olmayan reel sayılar için tanımlı olduğuna dikkat edelim. Yani bu fonksiyonun tanım kümesi $D = [0, +\infty)$ 'dir. Bu fonksiyonun aldığı değerler de negatif olmayan sayılar olduğundan, değer kümesi $V = [0, +\infty)$ 'dir.

Buna karşılık, kök derecesi n tek sayı olduğunda fonksiyon bütün reel sayılar için tanımlıdır. Yani bu fonksiyonun tanım kümesi $D = \mathbb{R}$ 'dir. Bu fonksiyonun aldığı değerler de reel sayılar olup hem pozitif hem de negatif olabilir. Bu nedenle değer kümesi $V = \mathbb{R}$ 'dir.

Genel durumda, n . dereceden kök fonksiyonunun tanım kümesi ve değer kümesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D = \begin{cases} [0, +\infty), & n \text{ çift sayı ise} \\ \mathbb{R}, & n \text{ tek sayı ise} \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} [0, +\infty), & n \text{ çift sayı ise} \\ \mathbb{R}, & n \text{ tek sayı ise} \end{cases}$$

Örnek 5

- a) $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[4]{-64}$, $\sqrt{-25}$ ifadeleri tanımlı değildir. Çünkü n çift sayı olduğunda negatif sayılar n . dereceden kök fonksiyonunun tanım kümesinde yer almaz.
- b) $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-32}$ ifadeleri tanımlıdır. Çünkü n tek sayı olduğunda n . dereceden kök fonksiyonunun tanım kümesi bütün reel sayılardır. Buna göre, $\sqrt[3]{-8} = -2$ ve $\sqrt[3]{-32} = -2$.

Soru 4

İfadelerden hangilerinin tanımlı, hangilerinin tanımsız olduğunu belirle.

- a) $\sqrt[4]{-25}$; b) $\sqrt[4]{-49}$; c) $\sqrt[3]{30}$; d) $\sqrt[4]{100}$.

Örnek 6

Aşağıdaki köklerin değerlerini hesapla:

- a) $\sqrt[3]{3^3}$; b) $\sqrt[3]{(-3)^3}$; c) $\sqrt[4]{3^4}$; d) $\sqrt[4]{(-3)^4}$.

Çözüm:

- a) $\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27} = 3$;

$$b) \sqrt[3]{(-3)^3} = \sqrt[3]{-243} = -3;$$

$$c) \sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{81} = 3 = |3|;$$

d) Dikkat et ki $(-3)^6$ pozitif bir sayıdır; bu nedenle $\sqrt[4]{(-3)^6}$ tanımlıdır. Buna göre, $\sqrt[4]{(-3)^6} = \sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{729} = 3 = |-3|$. Demek ki, $\sqrt[4]{(-3)^6}$ değeri -3 değil, $3 = |-3|$ 'tür.

Unutma!

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ çift sayı ise} \\ |a|, & n \text{ tek sayı ise} \end{cases}$$

Soru 5

Verilen ifadelerin değerini belirle.

$$a) \sqrt[6]{6^6}; \quad b) \sqrt[4]{(-6)^6}; \quad c) \sqrt[3]{6^5}; \quad d) \sqrt[3]{(-6)^5}.$$

Örnek 7

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini hesapla:

$$a) (\sqrt{9})^2; \quad b) (\sqrt[4]{16})^4; \quad c) (\sqrt[3]{-27})^3.$$

Çözüm:

$$a) (\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9; \quad b) (\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16; \quad c) (\sqrt[3]{-27})^3 = (-3)^3 = -27.$$

Unutma!

$\sqrt[n]{a}$ ifadesi tanımlı ise, $(\sqrt[n]{a})^n = a$ olur.

$(\sqrt[4]{-16})^4 \neq -16$ olduğuna dikkat et. Çünkü -16 , dördüncü dereceden kök fonksiyonunun tanım kümesinde değildir.

Örnek 8

Polis, frenlere aniden basıldıktan sonra otomobil d metre kayarsa, otomobilin hareket ettiği v hızını (km/sa cinsinden) tahmin etmek için $v = \sqrt{254fd}$ formülünü kullanır (aşağıdaki resim). f sayısı, yolun "kayganlığı" gösteren yolun sürtünme katsayısıdır. Aşağıdaki tabloda f için bazı tipik değerler verilmiştir.

	Asfalt	Beton	Parke taşı
Islak	0,5	0,4	0,1
Kuru	1,0	0,8	0,2

- a) Otomobil ıslak beton üzerinde 10 metre kayarsa, frenlere basıldığı anda hangi hızla hareket ediyordu?
 b) Otomobil 20 km/sa hızla hareket ediyorsa, ıslak parke taşı üzerinde ne kadar uzağa kayar?



Çözüm:

- a) Otomobil ıslak beton üzerinde 10 metre kaydığına göre $d = 10$, ve $f = 0,4$ 'tür. Verilen formüle göre, $v = \sqrt{254fd} = \sqrt{254 \cdot 0,4 \cdot 10} = 31,87$ km/h.
 b) Otomobil kuru parke taşı üzerinde 20 km/sa hızla hareket ettiğine göre $v = 20$, ve $f = 0,22$ 'dir. Bu durumda d uzaklığı aranmaktadır. Verilen formülünden $v^2 = 254fd$ olduğu belirlenir, yani

$$d = \frac{v^2}{254f}$$

Değerler yerine yazıldığında:

$$d = \frac{20^2}{254 \cdot 0,2} = 7,87 \text{ m.}$$

Alıştırma Soruları!

- Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur:
 - 6 sayısı, 72'nin kareköküdür;
 - 7 sayısı, 49'un kareköküdür;
 - 243'ün beşinci dereceden kökü 3'tür;
 - 243'ün beşinci dereceden kökü -3'tür;
 - 16'nın dördüncü dereceden kökü -4'tür.
- Verilen ifadelerden hangileri tanımlıdır:
 - $\sqrt{-4}$;
 - $\sqrt[3]{-125}$;
 - $\sqrt[4]{64}$;
 - $-\sqrt{25}$.
- x değişkeninin hangi değerleri için aşağıdaki ifadeler tanımlıdır:
 - $\sqrt{2x-5}$;
 - $\sqrt[3]{x+4}$;
 - $\sqrt[4]{10-x}$;
 - $\sqrt[3]{x-1}$;
 - $\sqrt[4]{x^2+9}$.
- Aşağıdaki ifadelerin değerini hesapla:
 - $3\sqrt{\frac{1}{9}} + 2\sqrt{16} - \sqrt{\frac{1}{4}}$;
 - $\sqrt{196} - \sqrt[3]{-64} + \sqrt[4]{81}$;
 - $\sqrt[3]{-27} - \sqrt{49} - \sqrt[4]{-32}$.
- Verilen eşitliklerden hangileri doğrudur:
 - $\sqrt{4^2} = 4$;
 - $\sqrt{(-4)^2} = -4$;
 - $5 \cos 41^\circ - 2$;
 - $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$;
 - $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$;
 - $\sqrt[3]{1^3} = 1$.
- x değişkeninin hangi değerleri için eşitlik doğrudur?
 - $\sqrt{x^2} = x$;
 - $\sqrt[3]{x^3} = x$;
 - $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$;
 - $\sqrt[4]{(2-x)^4} = |2-x|$.
- Bir elektrik mühendisi güneş panelleriyle ilgili bir proje üzerinde çalışmaktadır. Mühendis, bir sisteme $n \times n$ panel, yani n sıra ve n sütun panel yerleştirmek istemektedir. Bir panel günde 40 vat-saat enerji üretmektedir. Sistemin günde 1000 vat-saat enerji üretmesini istiyorsa mühendisin kaç panele ihtiyacı olacaktır?

1.3 RASYONEL ÜSLÜ İFADE. KÖKLÜ İFADELERİN ÜSLÜ İFADE BİÇİMİNDE YAZILMASI

Hatırla!

- Eğer $n \in \mathbb{Z}^+$, o zaman
 - $a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n$, için $n \geq 2$;
 - $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, için $a \neq 0$;
 - $a^0 = 1$, için $a \neq 0$.
- $r \in \mathbb{Q}$ ise, r sayısı $r = \frac{m}{n}$, şeklinde yazılabilir. Burada $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ve $n \neq 0$ 'dır.

Rasyonel Üslü İfade

Doğal sayı ve tam sayı üslerle üs alma kavramını, rasyonel sayı üslerle üs alma kavramına genişleteceğiz. Bu genişletmenin amacı, doğal sayı veya tam sayı üslü ifadeler için geçerli olan üs alma kurallarının rasyonel sayı üslü ifadeler için de geçerli olmasını sağlamaktır.

Öncelikle, üs $\frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}$ olan üs alma işlemini tanımlayacağız.

Unutma!

- a negatif olmayan bir reel sayı ve n pozitif çift doğal sayı ise, $a^{\frac{1}{n}}$ aşağıdaki koşulu sağlayan negatif olmayan sayıdır: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.
- a bir reel sayı ve n pozitif tek doğal sayı ise, $a^{\frac{1}{n}}$, aşağıdaki koşulu sağlayan reel sayıdır: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

Örnek 1

- $9^{\frac{1}{2}} = 3$, çünkü $3^2 = 9$;
- $16^{\frac{1}{4}} = 2$, çünkü $2^4 = 16$;
- $(-27)^{\frac{1}{3}} = -3$, çünkü $(-3)^3 = -27$.

Soru 1

Hesapla: a) $27^{\frac{1}{3}}$; b) $81^{\frac{1}{4}}$; c) $(-243)^{\frac{1}{5}}$.

Devamında, üs $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olacak şekilde önceki üs alma tanımını genelleştireceğiz. Daha önce belirtildiği gibi, doğal sayı veya tam sayı üslü ifadeler için geçerli olan üs alma kuralları burada da geçerli olmalıdır.

Unutma!

1. a pozitif bir reel sayı ve $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, burada $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ve n çift sayı olsun. a sayısının $\frac{m}{n}$ rasyonel sayısı üslü ifadesi şu şekilde tanımlanır: $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.
2. a bir reel sayı ($a \neq 0$) ve $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, burada $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ve n tek sayı olsun. a sayısının $\frac{m}{n}$ rasyonel sayısı üslü ifadesi şu şekilde tanımlanır: $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Örnek 2

Hesapla: a) $27^{\frac{2}{3}}$; b) $81^{\frac{5}{4}}$; c) $(-125)^{\frac{4}{3}}$.

Çözüm:

$$\text{a) } 27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^2 = 9;$$

$$\text{b) } 81^{\frac{5}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^5 = 3^5 = 243;$$

$$\text{c) } (-125)^{\frac{4}{3}} = \left((-125)^{\frac{1}{3}}\right)^4 = (-5)^4 = 625.$$

Soru 2

Hesapla: a) $216^{\frac{5}{3}}$; b) $2401^{\frac{3}{4}}$; c) $(-64)^{\frac{7}{3}}$.

Rasyonel sayı üslü ifade tanımına göre, üs alma kuralları tam sayı üslerle yapılan üs alma işleminde olduğu gibi değişmeden kalır; ancak yalnızca üs alma işleminin tanımlı, yani anlamlı olduğu durumlarda geçerlidir.

Unutma!

$a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olan bütün reel a ve b sayıları ile $\frac{m}{n}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, burada $m, r \in \mathbb{Z}$, ve $n, s \in \mathbb{N}$, olmak üzere aşağıdaki kurallar geçerlidir:

1. Aynı tabanlı üslü ifadelerin çarpımı

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m+r}{n \cdot s}};$$

2. Aynı tabanlı üslü ifadelerin bölümü

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m-r}{n \cdot s}};$$

3. Üslü ifadenin üssü

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m \cdot r}{n \cdot s}};$$

4. Çarpımın üssü

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}};$$

5. Bölümün üssü

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

Bu kuralların tümünde n çift sayı ise a ve b pozitif olmalıdır.

Örnek 3

Hesapla:

a) $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}}$; b) $16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}}$; c) $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$

Çözüm:

Yukarıda verilen üs alma kurallarına göre aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

a) $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1+1}{2 \cdot 4}} = 16^{\frac{2}{4}} = 2^2 = 4;$

b) $16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1-1}{2 \cdot 4}} = 16^{\frac{0}{4}} = 1;$

c) $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2.$

Soru 3

Hesapla:

a) $256^{\frac{1}{4}} \cdot 256^{\frac{1}{8}}$; b) $256^{\frac{1}{2}} : 256^{\frac{1}{4}}$; c) $\left(256^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}.$

Örnek 4

$a, b > 0$ olsun. Verilen işlemleri yap.

a) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; b) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{1}{3}}$; c) $\left(a \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}}$.

Çözüm:

a) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3+2}{4}} = a^{\frac{5}{4}}$;

b) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{3+1}{4}} : a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{13}{12}} : a^{-\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{13}{12}}}{a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{13}{12}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}} = a^{\frac{13}{12}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{13+4}{12}} = a^{\frac{17}{12}}$;

c) $\left(a \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{4}{5}} \cdot b^{\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}} = a^{\frac{4}{5}} \cdot b^{\frac{8}{15}}$.

Soru 4

$a > 0$ olursa, hesapla:

a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{1}{2}}$; b) $a^{\frac{1}{5}} : a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; c) $\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Örnek 5

$\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3$ ve $\left(4^3\right)^{\frac{1}{2}}$ üslü ifadelerini hesapla ve karşılaştır.

Çözüm:

$\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$ ve $\left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = 8$, olduğundan, iki üslü ifadenin eşit olduğu sonucuna varabiliriz.

Yukarıdaki örnekte üslü ifadelerin eşitliği yalnızca bu özel durumda değil, genel olarak da geçerlidir. Buna göre aşağıdaki özellik geçerlidir.

Unutma!

Her reel a sayısı ve $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, burada $m \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$, olmak üzere,

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \text{ eşitliği geçerlidir.}$$

Ayrıca n çift sayı ise bu kural $a \geq 0$ için geçerlidir.

Rasyonel Sayı Üslü İfadelerin Kök Biçiminde, Köklü İfadelerin de Rasyonel Sayı Üslü İfade Biçiminde Yazılması

Daha önce, n . dereceden kökün; her reel x sayısına $y^n = x$ koşulunu sağlayan y reel sayısını karşılık getiren bir fonksiyon olduğunu tanımlamıştık. Buna göre, n çift sayı ise fonksiyon $x \geq 0$, için tanımlıdır; n tek sayı ise fonksiyonun tanım kümesi reel sayılar kümesidir. Dolayısıyla, fonksiyonun tanım kümesindeki x için aşağıdaki eşdeğerlik geçerlidir:

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^n.$$

Rasyonel sayı üslü ifadeler ile köklü ifadeler arasındaki ilişkiyi kurmak için $a^{\frac{1}{n}}$ tanımından hareket edelim. $a^{\frac{1}{n}}$ ifadesinin n . kuvvetini alırsak, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$

Dolayısıyla, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$, olduğundan, yukarıdaki eşdeğerlikten sonucu $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ elde edilir.

Unutma!

$n \in \mathbb{N}$ ise, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Buna göre, n çift sayı ise bu eşitlik $a \geq 0$, için; n tek sayı ise her reel a sayısı için geçerlidir.

Örnek 6

a) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4;$

b) $(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2.$

Soru 5

Hesapla: a) $64^{\frac{1}{3}}$; b) $(-27)^{\frac{1}{3}}$.

$m \in \mathbb{Z}$, ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $a^{\frac{m}{n}}$ ifadesinin n . kuvveti alınırsa,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$ olduğundan $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Unutma!

$m \in \mathbb{Z}$, ve $n \in \mathbb{N}$, ise, o zaman $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Buna göre, n çift sayı ise $a^{\frac{m}{n}}$ ifadesi $a \geq 0$, için tanımlıdır. n tek sayı ise $a^{\frac{m}{n}}$ ifadesi her reel a sayısı için tanımlıdır.

Örnek 7

- a) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9$;
- b) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 8$;
- c) $(-32)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(-32)^2} = -8$.

Örnek 8

Bir yelkenlinin ulaşabileceği hız üç etkene bağlıdır: teknenin su hattındaki uzunluğu L , yelkenin A alanı ve şekilde gösterildiği gibi teknenin yer değiştirdiği suyun V hacmi.

Genel olarak yelkenli; daha uzun olduğunda, yelken alanı daha büyük olduğunda veya daha az suyun yerini değiştirdiğinde daha yüksek hıza ulaşabilir. Bu üç etkenin de dikkate alınabilmesi için yelkenlilerin aynı yarıştta yarışmaya hak kazanıp kazanmadığını belirleyen bir "sınıf" sistemi kullanılmaktadır. Belirli bir yarış için teknelerin yarışmaya katılmaya hak kazanması aşağıdaki koşula bağlıdır:



$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} \leq 16,$$

burada L metre (m), A m² ve V m³ cinsinden ölçülür. Aşağıdaki soruları cevaplamak için bu eşitsizliği kullan.

- a) Yelkenlinin uzunluğu 18 m, yelken alanı 316 m² ve yer değiştirdiği suyun hacmi 19 m³'tür. Bu tekne yarışmaya katılmaya hak kazanır mı?
- b) Yelkenlinin uzunluğu 20 m ve yer değiştirdiği suyun hacmi 17 m³'tür. Teknenin yarışmaya katılmaya hak kazanmasını sağlayabilecek en büyük yelken alanı nedir?

Çözüm:

- a) Soruda verilenlere göre $L = 18$, $A = 316$ ve $V = 19$ 'dur. Soru, L , A ve V 'nin bu değerleri için yelkenlinin yarışmaya katılma koşulunu sağlayıp sağlamadığını. Buna göre,

$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} = 0,98 \cdot 18 + 1,25 \cdot \sqrt{316} - 9,84 \cdot \sqrt[3]{19} = 13,6 \leq 16,$$

yani yarışmaya katılma koşulu sağlanmaktadır.

- b) $L = 20$ ve $V = 17$ için, teknenin yarışmaya katılmasını sağlayabilecek en büyük yelken alanı aranır. Aslında, yarışmaya katılma eşitsizliğinin eşitlik durumunu sağlayan A alanının değeri aranır, yani

$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} = 16,$$

Burada $L = 20$ ve $V = 17$ 'dir. Değerler yerine yazıldığında,

$$0,98 \cdot 20 + 1,25 \cdot \sqrt{A} - 9,84 \cdot \sqrt[3]{17} = 16.$$

Buradan, $\sqrt{A} = \frac{16 - 0,98 \cdot 20 + 9,84 \cdot \sqrt[3]{17}}{1,25} = 17,36$, olur. Buna göre, $A = 17,36^2 = 301,37 \text{ m}^2$.

Soru 6

Bir yarış dronunun ulaşabileceği hız; dronun m kütlesine (kilogram cinsinden), pervanelerin toplam S alanına (metrekare cinsinden) ve bataryanın E kapasitesine (vat-saat cinsinden) bağlıdır. Dron; kütlesi daha küçük, pervane alanı daha büyük veya batarya kapasitesi daha düşük olduğunda daha yüksek bir hıza ulaşabilir. Dronun belirli bir yarışa katılabilmesi için performansının aşağıdaki eşitsizliği sağlaması gerekir:

$$0 \leq 0,6m + 4\sqrt{S} - 1,5E^{\frac{1}{3}} \leq 20,$$

burada m kilogram cinsinden kütle, $S \text{ m}^2$ cinsinden alan ve $E \text{ Wh}$ cinsinden batarya kapasitesidir.

- Bir dronun kütlesi 3 kg, pervanelerinin alanı $0,50 \text{ m}^2$ ve batarya kapasitesi 54 Wh'tir. Bu dron yarışmaya katılabilir mi?
- Bir dronun kütlesi 2,5 kg ve batarya kapasitesi 64 Wh'tir. Dronun bu yarışa katılabilmesi için kullanılacak en büyük pervane alanı nedir?

Alıştırma Soruları!

1. Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini hesapla:

a) $9^{\frac{5}{2}}$; b) $125^{\frac{7}{3}}$; c) $(-343)^{\frac{2}{3}}$.

2. Aşağıdaki ifadelerin değerini hesapla:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$; b) $\left(\frac{1}{512}\right)^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot \left(\frac{36}{81}\right)^{\frac{1}{2}} - 3$.

3. $a > 0$ olsun. Verilen şıkları hesapla:

a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}}$; b) $a^{\frac{1}{2}} : \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-1}\right)$; c) $\left(\left(a : a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{6}} : a^{\frac{1}{24}}$.

4. Aşağıdaki üslü ifadeleri köklü ifade biçiminde yaz.

a) $a^{\frac{1}{3}}$; b) $2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}$; c) $4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}$.

5. Aşağıdaki köklü ifadeleri üslü ifade biçiminde yaz.

a) $\sqrt{a^3}$; b) $\sqrt[3]{2a^2b^4}$; c) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b^4}$.

1.4 KÖKLÜ İFADELERİN GENİŞLETİLMESİ VE SADELEŞTİRİLMESİ

Hatırla!

- $k \neq 0$ için $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$,
- $k \neq 0$ için $\frac{m}{n} = \frac{m : k}{n : k}$,
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Devam eden örnek ve sorularda, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ifadesinde n çift sayı ise $a \geq 0$, n tek sayı ise $a \in \mathbb{R}$, olduğunu, yani $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ifadesinin her zaman tanımlı olduğunu kabul edeceğiz.

Örnek 1

$\sqrt[4]{16}$ ile $\sqrt[4]{256}$ 'nın değerlerini karşılaştır.

Çözüm:

$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ ve $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2$, olduğundan, bu iki kökün değerlerinin aynı olduğu sonucuna varılır.

$\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{16^2}$ olduğuna dikkat et. Yani, birinci kökte kök derecesi ile kök içi ifadedeki üs aynı sayı ile çarpılırsa ikinci kök elde edilir.

Genel durumda, $m, n, k \in \mathbb{N}$ ise,

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ olur.}$$

Bu özelliğe *köklü ifadelerin genişletilmesi* denir.

Unutma!

Kök derecesi ile kök içindeki ifadenin üssü sıfırdan farklı aynı sayı ile çarpılırsa köklü ifadenin değeri değişmez.

Örnek 2

$\sqrt{3}$ ve $\sqrt[3]{5}$ köklü ifadelerini 3 ile genişlet.

Çözüm:

Yukarıda açıklanan yöntemi uygulayarak, aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\sqrt{3} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27}$$

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{125}.$$

Soru 2

$\sqrt{7}$ ve $\sqrt[3]{4}$ köklü ifadelerini 4 ile genişlet.

Örnek 3

Aşağıdaki köklü ifadeleri 2 ile genişlet.

a) $\sqrt{x^2}$; b) $\sqrt{x^2 y^3}$; c) $\sqrt{x^3 y^2 z}$.

Çözüm:

a) $\sqrt{x^2} = \sqrt[2]{x^{2 \cdot 2}} = \sqrt{x^4}$;

b) $\sqrt{x^2 y^3} = \sqrt[2]{(x^2 y^3)^2} = \sqrt{x^4 y^6}$;

c) $\sqrt{x^3 y^2 z} = \sqrt[2]{(x^3 y^2 z)^2} = \sqrt{x^6 y^4 z^2}$.

Soru 3

Aşağıdaki köklü ifadeleri 3 ile genişlet.

a) $\sqrt{a^2 b^3}$; b) $\sqrt[4]{ab^3 c^3}$.

Örnek 4

$\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{3}$, köklü ifadelerini aynı kök derecesine getir.

Çözüm:

Köklü ifadeleri aynı kök derecesine getirirken, genellikle kök derecelerinin en küçük ortak katı (EKOK) seçilir. Bu durumda, $\text{EKOK}(2, 3, 4) = 12$ 'dir. Dolayısıyla bütün köklü ifadeler 12. dereceden köke dönüştürülür.

$$\sqrt{3} = \sqrt[2]{3} = \sqrt[12]{3^6};$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4};$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3}.$$

Soru 4

$\sqrt{a^2 b^3}, \sqrt[4]{ab^3 c^3}$, ve $\sqrt[3]{c^3}$ köklü ifadelerini aynı kök derecesine getir.

Örnek 5

$\sqrt[3]{2^4}$ ve $\sqrt[2]{2^2}$ köklü ifadelerinin değerlerini karşılaştır.

Çözüm:

Köklü ifadelerin değerlerini karşılaştırmak için önce bunları aynı kök derecesine getirmek gerekir. $\text{EKOK}(5, 3) = 15$ olduğundan, her iki köklü ifade de 15. dereceden köke dönüştürülür.

$$\sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[3]{4096} \quad \text{ve} \quad \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{2^{24}} = \sqrt[3]{1024} \text{ elde edilir:}$$

Aynı kök derecesine getirilen iki köklü ifadeden, kök içi ifadesi daha büyük olanın değeri daha büyüktür. Bu durumda bu ifade $\sqrt[3]{2^4}$ 'tür.

Soru 5

Aşağıdaki köklü ifadeleri büyüklüklerine göre sırala:

a) $\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{17}$; b) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{7}$.

Örnek 6

$\sqrt[6]{2^6}, \sqrt[3]{2^3}$ ve $\sqrt{2}$ köklü ifadelerini rasyonel üslü ifadeler biçiminde yaz ve karşılaştır.

Çözüm:

Köklü ifadeler ile rasyonel üslü ifadeler arasındaki ilişki kullanıldığında,

$$\sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}}, \quad \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}}, \quad \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

$\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olduğundan, üç köklü ifadenin de eşit olduğu sonucuna varılır.

Genel durumda, kök derecesi ile kök içi ifadenin üssünün k ortak çarpanı varsa,

$$\sqrt[k]{a^{nk}} = a^{\frac{nk}{k}} = a^{\frac{n}{1}} = \sqrt[k]{a^n}.$$

Bu işleme *köklü ifadelerin sadeleştirilmesi* denir.

Unutma!

Kök derecesi ile kök içi ifadenin üssü ortak bölenlerinden birine bölünürse köklü ifadenin değeri değişmez.

Örnek 7

Verilen köklü ifadeleri sadeleştir: a) $\sqrt[6]{x^6}$; b) $\sqrt[12]{x^3 y^9 z^6}$.

Çözüm:

a) Kök derecesi ile kök içi ifadenin üssünün en büyük ortak böleni EBOB(12, 6) = 6 olduğundan, 6 ile sadeleştirildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir: $\sqrt[12]{x^6} = \sqrt[12]{x^{6 \cdot 2}} = \sqrt{x}$.

b) $\sqrt[12]{x^3 y^9 z^6} = \sqrt[12]{(xy^3 z^2)^3}$ olduğundan ve EBOB(15, 3) = 3 olduğundan, 3 ile sadeleştirilebiliriz:

$$\sqrt[12]{x^3 y^9 z^6} = \sqrt[12]{(xy^3 z^2)^3} = \sqrt[12]{(xy^3 z^2)^{3 \cdot 3}} = \sqrt[4]{xy^3 z^2}.$$

Soru 6

Verilen köklü ifadeleri sadeleştir: a) $\sqrt[3]{y^4}$; b) $\sqrt[3]{a^{32}b^8}$; c) $\sqrt[18]{a^6b^{12}c^9}$.

Unutma!

Kök derecesi n kök içi ifadenin üssü m 'nin bir böleni ise, yani $m = n \cdot k$ ise $\sqrt[n]{a^m}$ ifadesi aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{n \cdot k}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = \begin{cases} n \text{ çift sayı ise } |a^k|, \\ n \text{ tek sayı ise } a^k \end{cases}$$

Örnek 8

Aşağıdaki ifadeleri sadeleştir:

a) $\sqrt[3]{x^6}$; b) $\sqrt{x^4y^2z^6}$.

Çözüm:

a) $\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{x^{2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{(x^2)^3} = x^2$; b) $\sqrt{x^4y^2z^6} = \sqrt{(x^2yz^3)^2} = |x^2yz^3|$.

Soru 7

Aşağıdaki ifadeleri sadeleştir:

a) $\sqrt[3]{2^6}$; b) $\sqrt{4^4 \cdot 3^6 \cdot 2^8}$; c) $\sqrt[3]{(x-2)^{12}}$.

Alıştırma Soruları!

- Aşağıdaki köklü ifadeleri 4 ile genişlet.

a) $\sqrt{3a}$; b) $\sqrt[3]{5b}$; c) $\sqrt[4]{4a^2b}$; d) $\sqrt[3]{2ab^2}$.
- Aşağıdaki köklü ifadeleri ortak kök derecesine getir.

a) $\sqrt[4]{a^3}$ ve $\sqrt[3]{a^5}$; b) $\sqrt[3]{3x^2}$ ve $\sqrt{x}$; c) $\sqrt{ab}$ ve $\sqrt[4]{a^3b}$;
 d) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{5}$ ve $\sqrt[4]{5}$; e) $\sqrt[4]{a^3b}$, $\sqrt[3]{a}$ ve $\sqrt{ab}$; f) $\sqrt[3]{2xy^3}$, $\sqrt{x}$ ve $\sqrt[4]{y^3}$.
- Aşağıdaki köklü ifadeleri sadeleştir.

a) $\sqrt[3]{4a^4b^2}$; b) $\sqrt[4]{a^6b^3}$; c) $\sqrt[3]{a^6b^4}$.
- Aşağıdaki köklü ifadeleri sadeleştir.

a) $\sqrt[3]{8a^3}$; b) $\sqrt[4]{16b^4}$; c) $\sqrt[3]{32x^5}$; d) $\sqrt{25a^2b^6}$.
- Aşağıdaki ifadeleri sadeleştir.

a) $\sqrt[4]{x^4}$; b) $\sqrt[4]{x^{12}}$; c) $\sqrt{x^9}$; d) $\sqrt[3]{x^{11}}$.

1.5 ÇARPIM VE BÖLÜMÜN KÖKÜNÜ ALMA

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.
- Verilen örneklerin üslerini al. $(x \cdot y)^2$; $(x : y)^2$; $(x \cdot y)^{(3/4)}$; $(x : y)^{(3/4)}$.

Örnek 1

Aşağıdaki eşitliklerin doğru olup olmadığını kontrol et:

a) $\sqrt{49 \cdot 81} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{81}$; b) $\sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$.

Çözüm:

a) Eşitliğin sol tarafı $\sqrt{49 \cdot 81} = \sqrt{3969} = 63$, değerine eşittir. Sağ taraf için ise:

$$\sqrt{49} \cdot \sqrt{81} = 7 \cdot 9 = 63.$$

Buna göre, eşitliğin iki tarafı da eşit olduğundan eşitlik doğrudur.

b) Aynı şekilde bu eşitliğin de doğru olduğunu göster.

Bu özellikler yalnızca bu özel durumlar için değil, genel durumda da geçerlidir.

Unutma!

1. Kök derecesi n çift sayı ise ($n \geq 2$).

Her $a, b \geq 0$ için $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,

Her $a \geq 0$ ve $b > 0$ için $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,

2. Kök derecesi n tek sayı ise ($n \geq 3$).

Her $a, b \in \mathbb{R}$; için $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,

Her $a \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0$ için $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,

Bu kurallar, çarpımın ve bölümün kökü kuralları olarak bilinir.

Soru 1

Verilenleri hesapla:

a) $\sqrt[4]{16 \cdot 256}$; b) $\sqrt[4]{\frac{64}{729}}$; c) $\sqrt[4]{(-64) \cdot 81}$; d) $\sqrt[4]{\frac{32}{-283}}$.

Örnek 2

İfadeleri sadeleştir.

$$\text{a) } \sqrt[5]{a^5 b^{15} c^{10}}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{\frac{x^6 y^3 z^9}{a^6 b^9}}, a, b \neq 0.$$

Çözüm:

$$\text{a) } \sqrt[5]{a^5 b^{15} c^{10}} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^{15}} \cdot \sqrt[5]{c^{10}} = ab^3 c^2.$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{\frac{x^6 y^3 z^9}{a^6 b^9}} = \frac{\sqrt[3]{x^6 y^3 z^9}}{\sqrt[3]{a^6 b^9}} = \frac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{z^9}}{\sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^9}} = \frac{x^2 y z^3}{a^2 b^3}.$$

Soru 2

İfadeleri sadeleştir.

$$\text{a) } \sqrt[4]{a^8 b^4 c^{12}}, \text{ eğer } a, b, c \geq 0;$$

$$\text{b) } \sqrt[6]{\frac{x^6 y^{18} z^{12}}{a^{24} b^6}}, \text{ eğer } x, y, z \geq 0, a, b > 0.$$

Örnek 3Verilen eşitlikler, x değişkeninin hangi değerleri için doğrudur?

$$\text{a) } \sqrt[3]{(x+3)(x-2)} = \sqrt[3]{x+3} \cdot \sqrt[3]{x-2}; \quad \text{b) } \sqrt[4]{\frac{x+3}{x-2}} = \frac{\sqrt[4]{x+3}}{\sqrt[4]{x-2}}.$$

Çözüm:a) Kök derecesi tek sayı olduğundan, eşitlik her reel x sayısı için doğrudur.b) Bu durumda kök derecesi çift sayıdır. Bu nedenle eşitlik, x 'in aşağıdaki doğrusal eşitsizlik sistemini sağlaması durumunda doğrudur:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases}.$$

Dolayısıyla, $x > 2$ olduğunda eşitlik doğrudur.**Soru 3**Eşitliklerin doğru olduğu x değişkeninin değerlerini bul.

$$\text{a) } \sqrt[3]{x(x-4)} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x-4}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{\frac{2x+4}{x-3}} = \frac{\sqrt[3]{2x+4}}{\sqrt[3]{x-3}}.$$

Örnek 4

İfadeyi sadeleştir: $\sqrt{25x^2y}$, eğer $x, y \geq 0$.

Çözüm:

$$\sqrt{25x^2y} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = 5x\sqrt{y}$$

Unutma!

Çarpımın kökü kuralına göre aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\sqrt[n]{\alpha^n \beta} = \sqrt[n]{\alpha^n} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \alpha \sqrt[n]{\beta}.$$

Bu işleme *kök dışına çarpan çıkarma* denir. Burada n çift sayı ise $\alpha, \beta \geq 0$ 'dır.

Örnek 5

Çarpanları kök işaretinin önüne çıkar.

a) $\sqrt{3a^2}$; b) $\sqrt[3]{8ab^3}$; c) $\sqrt[4]{a^4b}$, $a \geq 0$; d) $\sqrt[3]{5ab^3}$.

Çözüm:

a) $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2} = |a| \sqrt{3}$;

b) $\sqrt[3]{8ab^3} = \sqrt[3]{(2b)^3 a} = \sqrt[3]{(2b)^3} \cdot \sqrt[3]{a} = 2b\sqrt[3]{a}$;

c) $\sqrt[4]{a^4b} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b} = a\sqrt[4]{b}$. burada $\sqrt[4]{a^4} = a$, kullanılmıştır, çünkü $a \geq 0$.

d) $\sqrt[3]{5ab^3} = \sqrt[3]{b^3(5a)} = \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{5a} = b\sqrt[3]{5a}$.

Soru 4

Çarpanları kök dışına çıkar.

a) $\sqrt{5b^2c}$, $b, c \geq 0$; b) $\sqrt[3]{27x^2}$; c) $\sqrt[4]{a^4b^3}$, $a, b \geq 0$.

Kök işaretinin önüne yalnızca, kök içi ifadede üssü kök derecesine eşit veya ondan büyük olan çarpanların çıkarılabileceğine dikkat et. $\sqrt[n]{a^m}$ verilmiş olsun. $m \geq n$ ise, $m = nk + r$, olur. Burada k doğal sayı, $0 \leq r < n$ 'dir. Bu durumda,

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk+r}} = \sqrt[n]{a^{nk} \cdot a^r} = \sqrt[n]{(a^k)^n} \cdot \sqrt[n]{a^r} = a^k \sqrt[n]{a^r}.$$

Unutma!

Eğer $m = nk + r$, ise ($k \geq 1, 0 \leq r < n$), o zaman:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk+r}} = a^k \sqrt[n]{a^r}.$$

Burada köklü ifadelerin tanımlı olmasına dikkat edilmelidir. Yani, n çift sayı ise $a \geq 0$ olmalıdır.

Örnek 6

Çarpanları kök dışına çıkar.

- a) $\sqrt{12}$; b) $\sqrt[3]{24}$; c) $\sqrt[4]{a^9}$, $a \geq 0$;
 d) $\sqrt[3]{108a^5b^4}$; e) $\sqrt{\frac{a^4b}{cd^2}}$, $a, b \geq 0, c, d > 0$.

Çözüm:

- a) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;
 b) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$;
 c) $\sqrt[4]{a^9} = \sqrt[4]{(a^2)^4 \cdot a} = \sqrt[4]{(a^2)^4} \cdot \sqrt[4]{a} = a^2 \sqrt[4]{a}$;
 d) $\sqrt[3]{108a^5b^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 4 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b} = \sqrt[3]{(3ab)^3 \cdot 4a^2b} = \sqrt[3]{(3ab)^3} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} = 3ab\sqrt[3]{4a^2b}$;
 e) $\sqrt{\frac{a^4b}{cd^2}} = \frac{\sqrt{a^4b}}{\sqrt{cd^2}} = \frac{a^2\sqrt{b}}{d\sqrt{c}}$.

Soru 5

Çarpanları kök dışına çıkar.

- a) $\sqrt{32}$; b) $\sqrt[3]{54}$; c) $\sqrt[4]{b^7}$, $b \geq 0$; d) $\sqrt[3]{40x^2y^7}$.

$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ eşitliğini, soldan sağa doğru incele. Kök içindeki 2 çarpanının üs derecesinin 2 olduğu ve bunun kök derecesine eşit olduğu görülebilir. Bu nedenle kök işaretinin önüne yine 2 olarak çıkar. Yani, $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$. Bu işleme **çarpma (katsayını) kök içine alma** denir.

Unutma!

Bir çarpan kök işaretinin içine alınırken, kök derecesi kadar üssü alınır ve elde edilen ifade kök içindeki ifadeyle çarpılır. Yani $\alpha \geq 0$ ise,

$$\alpha \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha^n \beta}.$$

Ayrıca n çift sayı ise β negatif olmayan bir sayı olmalıdır.

Örnek 7

$x, y > 0$ olsun. Çarpanları kökün içine al.

a) $x\sqrt{x}$; b) $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^5}{x^5}}$; c) $\frac{x}{2y}\sqrt{\frac{y^2}{x}}$.

Çözüm:

a) $x\sqrt{x} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3}$;

b) $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^5}{x^5}} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^6 \frac{y^5}{x^5}} = \sqrt{\frac{x^6}{y^6} \cdot \frac{y^5}{x^5}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$;

c) $\frac{x}{2y}\sqrt{\frac{y^2}{x}} = \sqrt{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 \frac{y^2}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{4y^2} \cdot \frac{y^2}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{4x}} = \sqrt{\frac{x}{4}}$.

Soru 6

$a, b > 0$ olsun. Çarpanları kökün içine al.

a) $a^2\sqrt{a}$; b) $\frac{a^3}{b}\sqrt{\frac{b^4}{a^3}}$; c) $\frac{2a}{b^2}\sqrt{\frac{b^3}{4a}}$.

Örnek 8

Köklü ifadelerin değerlerini hesaplamadan, $3\sqrt{7}$ ile $2\sqrt{10}$ sayılarını karşılaştır.

Çözüm:

Önce her iki ifadede de çarpanları kök işaretinin içine alalım.

$$3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{63}, \quad 2\sqrt{10} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = \sqrt{40}.$$

$\sqrt{63} > \sqrt{40}$ olduğundan $3\sqrt{7} > 2\sqrt{10}$ sonucuna varılır.

Soru 7

Köklü ifadelerin değerlerini hesaplamadan, $4\sqrt[3]{6}$ ile $2\sqrt[3]{11}$ sayılarını karşılaştır.

Alıştırma Soruları!

1. Aşağıdaki köklü ifadelerin değerini hesapla.

a) $\sqrt{49 \cdot 81}$; b) $\sqrt[3]{64 \cdot (-125) \cdot 8}$; c) $\sqrt[4]{\frac{625 \cdot 16}{1296}}$.

2. $a, b \geq 0$ olsun. Köklü ifadeleri hesapla.

a) $\sqrt{a^2 b^4}$; b) $\sqrt[3]{a^6 b^9}$; c) $\sqrt[5]{\frac{a^{10} b^5}{c^{15}}}$, $c \neq 0$.

3. Çarpanları kök dışına (kök işaretinin önüne) çıkar.

a) $\sqrt{a^5b^3c^2}$, $a, b, c \geq 0$; b) $\sqrt[3]{a^7b^{11}}$; c) $\sqrt[3]{\frac{a^9b^4}{c^{12}}}$, $c \neq 0$.

4. Çarpanları kökün (işaretinin) içine al.

a) $3\sqrt{3}$; b) $x^2\sqrt{x^3y}$; c) $\frac{4x}{y}\sqrt{\frac{y^4}{x^2}}$.

5. Köklü ifadelerin değerlerini hesaplamadan sayıları karşılaştır.

a) $3\sqrt{11}$ ve $5\sqrt{8}$; b) $2\sqrt[3]{9}$ ve $4\sqrt[3]{3}$.

1.6 KÖKLÜ İFADELERDE TOPLAMA VE ÇIKARMA

Hatırla!

- $\sqrt[3]{a^7b^2c^9}$ ifadesinde çarpanları kökün dışına çıkar.
- $\sqrt[4]{a^4b^2c^6}$ köklü ifadesini sadeleştir.

Unutma!

Bir köklü ifade aşağıdaki koşulları sağlıyorsa *en sade biçimdedir*:

1. Kök içi ifadede 1'den farklı bir payda bulunmaz.
2. Kök içi ifadede kökün dışına çıkarılabilecek çarpan bulunmaz.
3. Kök derecesi ile kök içi ifadenin üssünün 1'den farklı ortak böleni yoktur.

Örnek 1

- a) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ köklü ifadesi en sade biçimde değildir. Çünkü kök içi ifade 1'den farklı bir payda içermektedir.
- b) $\sqrt{8}$ köklü ifadesi en sade biçimde değildir. Çünkü $\sqrt{8} = \sqrt{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$, olup, kök işaretinin önüne çıkarılabilecek bir çarpan içerir.
- b) $\sqrt[3]{a^3b^6c^9}$ köklü ifadesi en sade biçimde değildir. Çünkü $\sqrt[3]{a^3b^6c^9} = \sqrt[3]{(ab^2c^3)^3}$, yani kök derecesi ile kök içi ifadenin üssünün 3 ortak böleni vardır (1'den farklı).

Örnek 2

Bir önceki örnekte verilen köklü ifadeleri normal biçimde yaz.

Çözüm:

$$a) \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$b) \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2};$$

$$c) \sqrt[3]{a^3b^6c^9} = \sqrt[3]{(ab^2c^3)^3} = \sqrt[3]{(ab^2c^3)^{3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{(ab^2c^3)^9} = \sqrt[3]{(ab^2c^3)^3} = \sqrt[3]{ab^2c^3}.$$

Soru 1

Köklü ifadeleri normal biçimde yaz.

$$a) \sqrt{\frac{16}{3}}; \quad b) xy\sqrt{\frac{12}{xy}}, \quad x, y > 0; \quad c) \frac{x}{y}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}}, \quad x > y > 0.$$

Unutma!

Bir köklü ifade en sade biçime getirildiğinde, kök önündeki rasyonel çarpana **köklü ifadenin katsayısı** (veya kısaca **katsayısı**) denir.

Örnek 3

$2\sqrt{2}$, köklü ifadesinde köklü ifadenin rasyonel katsayısı 2'dir $3x^2\sqrt{xy}$, köklü ifadesinde ise köklü ifadenin rasyonel katsayısı $3x^2$ 'dir.

Örnek 4

Köklü ifadeleri en sade (normal) biçime getir ve rasyonel katsayılarını belirle.

$$a) \sqrt[3]{8x^3 - 16x^5}; \quad b) a\sqrt{\frac{1}{a}}, \quad a > 0.$$

Çözüm:

$$a) \sqrt[3]{8x^3 - 16x^5} = \sqrt[3]{8x^3(1 - 2x^2)} = 2x \cdot \sqrt[3]{1 - 2x^2}. \text{ Köklü ifadenin rasyonel katsayısı } 2x \text{ 'tir.}$$

$$b) a\sqrt{\frac{1}{a}} = a\sqrt{\frac{a}{a^2}} = \frac{a}{a}\sqrt{a} = \sqrt{a}. \text{ Köklü ifadenin rasyonel katsayısı } 1 \text{ 'dir.}$$

Soru 2

Köklü ifadeleri en sade (normal) biçime getir ve rasyonel katsayılarını belirle.

$$a) \sqrt[4]{64a^4 - 16a^8}; \quad b) b\sqrt{\frac{a^2}{b}}, \quad a, b > 0.$$

Unutma!

En sade biçimde yazılmış, yalnızca rasyonel katsayıları farklı olan iki veya daha fazla köklü ifadeye **benzer köklü ifadeler** denir.

Örnek 5

$\sqrt[3]{a^2b}$, $2a \cdot \sqrt[3]{a^2b}$ ve $\frac{a}{b^2} \sqrt[3]{a^2b}$ köklü ifadeleri benzer köklü ifadelerdir. Bunların rasyonel katsayıları sırasıyla 1, $2a$ ve $\frac{a}{b^2}$ 'dir.

Örnek 6

Aşağıdaki köklü ifadelerin benzer köklü ifadeler olup olmadığını kontrol et.

- a) $\sqrt{12}$ ve $\sqrt{48}$; b) $\sqrt[3]{a^4bc^5}$ ve $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}}$; c) $\sqrt[3]{a^5bc^7}$ ve $\sqrt[3]{a^7b^5c^9}$.

Çözüm:

Önce köklü ifadeleri en sade biçime getirir, ardından benzer köklü ifadeler olup olmadıklarını kontrol ederiz.

- a) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Buradan $\sqrt{12}$ ile $\sqrt{48}$ yalnızca rasyonel katsayıları bakımından farklı olduklarından benzer köklü ifadelerdir;
- b) $\sqrt[3]{a^4bc^5} = ac \cdot \sqrt[3]{abc^2}$, $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}} = a^2b^2c^3 \cdot \sqrt[3]{abc^2}$. Benzer şekilde, $\sqrt[3]{a^4bc^5}$ ve $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}}$ benzer köklü ifadelerdir.
- c) $\sqrt[3]{a^5bc^7} = ac \cdot \sqrt[3]{bc^2}$, $\sqrt[3]{a^7b^5c^9} = abc \cdot \sqrt[3]{a^2c^4}$. Buradan, $\sqrt[3]{a^5bc^7}$ ve $\sqrt[3]{a^7b^5c^9}$ benzer köklü ifadeler değildir.

Soru 3

Aşağıdaki köklü ifadelerin benzer köklü ifadeler olup olmadığını kontrol et.

- a) $\sqrt[3]{54}$ ve $\sqrt[3]{128}$; b) $\sqrt[3]{a^6b^3c^7}$ ve $\sqrt[3]{a^{10}b^3c^3}$.

Toplama ve çıkarma işlemi yalnızca benzer köklü ifadeler için tanımlanabilir.

Unutma!

a , b ve c reel sayılar (veya reel ifadeler) ise, benzer köklü ifadelerin toplanması ve çıkarılması aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c} = (a+b)\sqrt[n]{c}$$

$$a\sqrt[n]{c} - b\sqrt[n]{c} = (a-b)\sqrt[n]{c}$$

Eğer, n çift sayı ise $c \geq 0$, olmalıdır.

Örnek 7

Hesapla:

a) $\sqrt{3} + 2\sqrt{12}$; b) $\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$.

Çözüm:

Önce köklü ifadeleri en sade biçime getiririz. Daha sonra, benzer köklü ifadeler ise toplama ve çıkarma işlemlerini yapabiliriz.

a) $\sqrt{3} + 2\sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = (1+4)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$;
 b) $\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{2^3 \cdot 5} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} = (1+4-3)\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$.

Soru 4

Hesapla:

a) $\sqrt{72} - 2\sqrt{18} - \sqrt{8}$; b) $\sqrt[3]{250} - 3\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{2}$.

Örnek 8İfadeyi sadeleştir. $\sqrt[3]{125a} - \sqrt[3]{8a} - (\sqrt[3]{27a} - \sqrt[3]{64a})$.**Çözüm:**

$$\sqrt[3]{125a} - \sqrt[3]{8a} - (\sqrt[3]{27a} - \sqrt[3]{64a}) = 5\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a} - (3\sqrt[3]{a} - 4\sqrt[3]{a}) = 3\sqrt[3]{a} - (-\sqrt[3]{a}) = 4\sqrt[3]{a}.$$

Soru 5

İfadeyi sadeleştir.

a) $\frac{3}{a}\sqrt{a^3} - \frac{4}{b}\sqrt{ab^2}$, $a, b > 0$; b) $2x\sqrt{x^4y} - 3y\sqrt{xy^4} - x^2\sqrt{\frac{y^4}{x^2}} + 2y^3\sqrt{\frac{x}{y^2}}$.

Örnek 9

Bir çocuk oyun alanı, kenarları $(6\sqrt{3} + 8\sqrt{2})$ m ve $7\sqrt{2}$ m olan dikdörtgen biçimindedir.

- a) Bir kenar diğerinden kaç metre daha uzundur?
 b) Oyun alanının çevresini çitle çevirmek için kaç metre çit gereklidir?

Çözüm:

Dikdörtgenin kenarları $a = 6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$ ve $b = 7\sqrt{2}$ 'dir.

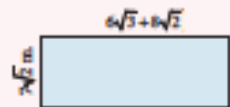
- a) a kenarı b kenarından daha uzundur.

$$a - b = (6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}) - 7\sqrt{2} = 6\sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ metre.}$$

- b) Dikdörtgenin çevresi:

$$L = 2a + 2b = 2 \cdot (6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}) + 2 \cdot 7\sqrt{2} = 12\sqrt{3} + 16\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 12\sqrt{3} + 30\sqrt{2}.$$

Sonuç olarak, oyun alanının çevresini çitle çevirmek için $12\sqrt{3} + 30\sqrt{2}$ metre uzunluğunda çit gereklidir.



Soru 6

Bir yapının taban uzunlukları $(10\sqrt{7} + 7\sqrt{3})\text{ m}$ ve $5\sqrt{7}\text{ m}$, yan kenar uzunluğu ise $10\sqrt{3}\text{ m}$ olan ikizkenar yamuk biçimindedir. Yamuğun çevresi kaç metredir?

Alıştırma Soruları!

- Aşağıdaki köklü ifadeleri en sade biçime getir.
 - $\sqrt{72}$; b) $\sqrt[3]{250}$; c) $\sqrt[4]{162}$; d) $\sqrt{75x^2y}$; e) $\sqrt[4]{125a^3b^6}$.
- Aşağıdaki köklü ifadeleri en sade (normal) biçime getir.
 - $\sqrt{50x^2y^3}$, $x, y > 0$; b) $\sqrt[3]{54a^4b^2}$; c) $\sqrt[4]{32x^2y^6}$, $x, y > 0$;
 - $\sqrt{108a^3}$, $a > 0$; e) $\sqrt[4]{125a^3b^6}$.
- Aşağıdaki köklü ifadelerin benzer olup olmadığını kontrol et.
 - $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{27}$; b) $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ ve $\sqrt{80}$; c) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, $\sqrt[3]{\frac{8x}{y}}$ ve $\sqrt[3]{\frac{x}{8y}}$, $y \neq 0$;
 - $\sqrt{a^2b^2}$, $\sqrt{16a^4b^2}$ ve $\sqrt[4]{\frac{a^2b^{18}}{81}}$, $a, b > 0$.
- Hesapla:
 - $7\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$; b) $20\sqrt{\frac{1}{2}} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{8}$; c) $\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{64} + 3\sqrt[4]{8}$;
 - $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \frac{1}{2}\sqrt{72}$; e) $(\sqrt{50} + \sqrt{2} - 2\sqrt{8}) - (\sqrt{32} - \sqrt{18})$.
- Hesapla:
 - $3\sqrt{16a} - 2\sqrt{9a} + \sqrt{25a}$, $a \geq 0$;
 - $3a \cdot \sqrt[3]{ab^4} - a^2 \cdot \sqrt{\frac{b^4}{a^2}} + 2b^2 \cdot \sqrt{\frac{a^4}{b^2}}$, $a, b \neq 0$.
- Hesapla:
 - $\sqrt[4]{16a} + \sqrt[4]{81a} - \sqrt[4]{625a} + \sqrt[4]{a}$, $a > 0$; b) $(\sqrt{12x} - \sqrt[3]{27y}) - (\sqrt[3]{81y} - \sqrt{3x})$, $x > 0$.
- Mühendisler, uzunlukları $3\sqrt{12}$, $2\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$ metre olan üç parçadan oluşan bir fiber optik kablo döşemelidir. Kablonun toplam uzunluğunu belirle.
- Bir ultrason cihazı, x (80 cm) uzaklığında bir konumu ölçmektedir. Kalibrasyon sırasında, ölçülen iki uzaklık bileşeninin toplamının toplam uzaklığa eşit olduğu belirlenmiştir: $\sqrt{2x} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$.
 - x uzaklığını belirle.
 - Elde edilen çözümün fiziksel olarak anlamlı olup olmadığını kontrol et.
- Bir robot, önce sağa doğru $s_1 = \sqrt{200}\text{ m}$ ilerlemektedir. Daha sonra sola dönerek sırasıyla $s_2 = \sqrt{50}\text{ m}$ ve $s_3 = 3\sqrt{8}\text{ m}$ uzaklıklarını geçmektedir. Robotun başlangıç konumuna göre net yer değiştirmesini belirle.

1.7 KÖKLÜ İFADELERİN ÇARPILMASI, BÖLÜNMESİ, ÜS ALINMASI VE KÖKÜNÜN ALINMASI

Hatırla!

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$;
- $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$;
- Köklü ifadeleri aynı kök derecesine getir. $\sqrt[3]{3}$ ve $\sqrt[3]{4}$

Çarpımı $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ve $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ bölümü hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}, \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.\end{aligned}$$

Unutma!

Kök derecesi aynı olan n ($n \geq 2$) iki köklü ifadenin çarpımı, kök içi ifadelerin çarpımının n . dereceden köküne; bölümü ise kök içi ifadelerin bölümünün n . dereceden köküne eşittir. Yani aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab}, \\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0.\end{aligned}$$

Ayrıca, kök derecesi n çift sayı ise, birinci eşitlik $a, b \geq 0$ için; ikinci eşitlik ise $a \geq 0$ ve $b > 0$ için geçerlidir.

Örnek 1

Hesapla:

$$\text{a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}; \quad \text{c) } \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0; \quad \text{d) } (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

Çözüm:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10};$

b) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^3};$

c) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x}} = \sqrt[3]{x};$

d) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
 $= \sqrt{3 \cdot 3} - \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} - \sqrt{2^2} = 3 - 2 = 1.$

Soru 1**Hesapla:**

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{11};$ b) $3 \cdot \sqrt{xy} \cdot \sqrt{x^2 y^3}, \quad x, y \geq 0;$ c) $\sqrt[3]{9a^2} : \sqrt[3]{\frac{a^2}{3}}.$

Köklü ifadelerin kök dereceleri farklı ise, önce aynı kök derecesine getirilerek çarpma ve bölme işlemleri yapılabilir.

Örnek 2**Hesapla:**

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{11};$ b) $3 \cdot \sqrt{x^2 y} \cdot \sqrt[3]{x^3 y^4};$ c) $\sqrt{4x^3} : \sqrt[4]{\frac{x^3}{2}}.$

Çözüm:

Önce köklü ifadeleri aynı kök derecesine getirir, daha sonra çarpma veya bölme işlemlerini yaparız.

a) EKOK(2, 3) = 6 olduğundan, iki köklü ifade de 6. dereceden köke dönüştürülür.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{121} = \sqrt[6]{8 \cdot 121} = \sqrt[6]{968}.$$

b) EKOK(3, 5) = 15'tir.

$$3 \cdot \sqrt{x^2 y} \cdot \sqrt[3]{x^3 y^4} = 3 \cdot \sqrt[15]{(x^2 y)^5} \cdot \sqrt[15]{(x^3 y^4)^3} = 3 \cdot \sqrt[15]{x^{10} y^5} \cdot \sqrt[15]{x^9 y^{12}} = 3 \cdot \sqrt[15]{x^{19} y^{17}} = 3xy \cdot \sqrt[15]{x^4 y^2}.$$

c) EKOK(2, 4) = 4'tür.

$$\sqrt{4x^3} : \sqrt[4]{\frac{x^3}{2}} = \sqrt[4]{(4x^3)^2} : \sqrt[4]{\frac{x^3}{2}} = \sqrt[4]{\frac{16x^6}{\frac{x^3}{2}}} = \sqrt[4]{32x^3} = 2\sqrt[4]{2x^3}.$$

Köklü ifadelerle ilgili sorular çözülürken, sonuçta köklü bir ifade kalırsa bu ifadenin en sade biçime getirilmesinin önerildiğini belirtelim.

Soru 2

Hesapla:

$$\text{a) } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}; \quad \text{b) } \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{a^2b}; \quad \text{c) } \frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[3]{x^5y}}.$$

Örnek 3

Bir mimar, kenarları $\sqrt{50}$ m ve $\frac{\sqrt{32}}{2}$ m olan dikdörtgen biçiminde bir park tasarlamaktadır. Bu parkın alanını belirle.

Çözüm:

Dikdörtgenin kenarları $a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ve $b = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Parkın alanı:

$$P = ab = \sqrt{50} \cdot \frac{\sqrt{32}}{2} = 5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2 \cdot 2} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ m}^2.$$

Soru 3

Taban uzunlukları $\sqrt[3]{24}$ ve $\sqrt[3]{192}$ yan kenar uzunluğu ise $\sqrt{6}$ olan ikizkenar yamuğun alanını hesapla.

Devamında, $m, n \geq 2$ olmak üzere $\sqrt[n]{a}$ ifadesinin m . kuvvetini alacağız. Aşağıdaki sonucu elde edeceğiz:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Unutma!

Bir köklü ifadenin m . kuvveti alınırken, kök içi ifadenin m . kuvveti alınır ve elde edilen üslü ifadenin aynı n . dereceden kökü alınır. Yani $m, n \geq 2$, için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Buna göre, n çift sayı ise $a \geq 0$ olmalıdır.

Örnek 4

Hesapla:

$$\text{a) } (\sqrt[3]{5})^2; \quad \text{b) } (\sqrt[3]{5a^2b})^3, b \geq 0; \quad \text{c) } \left(\frac{x}{y} \cdot \sqrt{xy}\right)^3, x \geq 0, y > 0.$$

Çözüm:

$$\text{a) } (\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25};$$

$$\text{b) } (\sqrt[3]{5a^2b})^3 = \sqrt[3]{(5a^2b)^3} = \sqrt[3]{125a^6b^3} = a \cdot \sqrt[3]{125a^2b^3};$$

$$\text{c) } \left(\frac{x}{y} \cdot \sqrt{xy}\right)^3 = \left(\frac{x}{y}\right)^3 \sqrt{(xy)^3} = \frac{x^3}{y^3} \sqrt{x^3y^3} = \frac{x^3}{y^3} \cdot xy \cdot \sqrt{xy} = \frac{x^4}{y^2} \cdot \sqrt{xy}.$$

Soru 4

Hesapla:

$$a) (\sqrt[3]{7})^3; \quad b) (\sqrt[3]{4ab^2})^3; \quad c) (a \cdot \sqrt{ab^2})^3, \quad a, b \geq 0.$$

Örnek 5

Bir şirket, fuarda kenar uzunluğu $\sqrt{8}$ m olan küp biçiminde bir stant kurmak istemektedir. Kiralanan alan 24 m^2 'tür. Bu stant kiralanan alana uygun mudur?

Çözüm:

Standın şekli, ayrıntı uzunluğu $a = \sqrt{8}$ olan bir küptür. Standın hacmi:

$$V = (\sqrt{8})^3 = \sqrt{8^3} = \sqrt{(2^3)^3} = \sqrt{2^9} = 2^4 \cdot \sqrt{2} \approx 22,63 \text{ m}^3.$$

Şirketin kurmayı planladığı stant, kiralanan alana uygundur.

Soru 5

Bir reklam şirketi, kenar uzunluğu $\sqrt{50}$ olan kare biçiminde bir reklam panosu yerleştirmektedir. Bu reklam panosunun alanı ne kadardır?

Son olarak, $\sqrt[n]{a}$ ifadesinin m . dereceden kökünün nasıl hesaplandığını görelim. Burada $m, n \geq 2$ 'dir.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a} \text{ elde edilir.}$$

Unutma!

Önce kök içindeki ifadenin n . dereceden kökü, ardından elde edilen sonucun m . dereceden kökü alınırsa; bu işlem, kök içindeki ifadenin nm . dereceden kökünü almakla aynıdır. Yani $m, n \geq 2$, için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Buna göre, n veya m çift sayı ise $a \geq 0$ olmalıdır.

Örnek 6

Hesapla:

$$a) \sqrt{\sqrt[3]{4}}; \quad b) \sqrt[3]{\sqrt{3x^2y}}, \quad x, y \geq 0; \quad c) \sqrt[3]{a\sqrt{2ab}}, \quad a, b \geq 0.$$

Çözüm:

$$a) \sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{4};$$

$$b) \sqrt[3]{\sqrt{3x^2y}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{3x^2y}} = \sqrt[6]{3x^2y};$$

$$c) \sqrt[3]{a\sqrt{2ab}} = \sqrt[3]{a\sqrt[2]{2ab}} = \sqrt[6]{2a^3b} = \sqrt[6]{2a^3b}.$$

Soru 6

Hesapla:

a) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt[3]{a}}$, $a \geq 0$; c) $\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}$, $a \geq 0$.

Örnek 7

Kare biçimindeki bir levhanın alanı $P = \sqrt{128} \text{ cm}^2$ dir. Levhanın köşegen uzunluğunu belirle.

Çözüm:

Levhanın bir kenarının uzunluğu a ise, o zaman $P = a^2 = \sqrt{128} = \sqrt{2^7}$. Buradan,

$$a = \sqrt{\sqrt{2^7}} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3} = 2\sqrt[4]{8} \text{ cm'dir}$$

Levhanın köşegeninin uzunluğu d 'dir. O zaman :

$$d = a\sqrt{2} = 2\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{4} = 2\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2^5} = 4\sqrt[4]{2} \text{ cm'dir}$$

Soru 7

Bir duvarda $90 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$ ölçülerinde boş bir alan bulunmaktadır ve bu alana kare biçiminde bir televizyon yerleştirilecektir. Televizyonun alanı $P = 1600\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ise televizyon duvara yerleştirilebilir mi?

Alıştırma Soruları

1. Köklü ifadelerin çarpımlarını hesapla.

a) $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3}$; b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{2}$; c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$; d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{5a}$, $a \geq 0$; e) $2\sqrt[3]{3a^2} \cdot 4\sqrt[3]{5a}$.

2. Köklü ifadelerin çarpımlarını hesapla.

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$, $a \geq 0$; b) $3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{2x^2} \cdot \sqrt[4]{x}$, $x \geq 0$.

3. Köklü ifadelerin bölümlerini hesapla.

a) $\sqrt{27} : \sqrt{3}$; b) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}$; c) $6 \cdot \sqrt{\frac{5}{9}} : \sqrt{\frac{5}{36}}$;

d) $\sqrt{6a} : \sqrt{a}$, $a > 0$ e) $\sqrt[3]{12a^2} : \sqrt[3]{3a}$; f) $\sqrt[4]{16a^3} : \sqrt[4]{a}$, $a > 0$.

4. Köklü ifadelerin bölümlerini hesapla.

a) $\sqrt[3]{8} : \sqrt{2}$; b) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$; c) $\sqrt[3]{8a^2} : \sqrt[4]{2a^3}$, $a > 0$; d) $4a\sqrt{a^2} : \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$.

5. Hesapla:

a) $(3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 2\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}$; b) $(4\sqrt{50} - 6\sqrt{8} + 2\sqrt{32}) : \sqrt{2}$.

6. Verilen köklü ifadelerin kuvvetlerini hesapla.

a) $\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{8}\right)^3$; b) $(\sqrt[3]{5x^2})^2$; c) $(\sqrt[3]{a^2b})^6$; d) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.

7. Hesapla:

a) $\sqrt{\sqrt{16a}}$, $a \geq 0$; b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}$, $a \geq 0$; c) $\sqrt{a\sqrt[4]{a}}$, $a \geq 0$;

d) $\sqrt{x^2 \sqrt{xy}} : \sqrt{y \sqrt{xy}}$, $x, y > 0$; e) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{a^2}$, $a \geq 0$.

1.8 İRRASYONEL İFADELER BİR KESRİN PAYDASINI RASYONEL YAPMA

Rasyonel cebirsel ifade; sayılardan ve/veya değişkenlerden oluşan, toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve üssü tam sayı olan üs alma işlemleriyle oluşturulmuş ifadedir. Bu işlemlere **rasyonel işlemler** de denir.

Rasyonel işlemlerin yanı sıra kök alma işlemini, yani üssü tam sayı olmayan rasyonel sayı ile üs alma işlemini içeren ifadelere **irrasyonel ifadeler** denir.

Örnek 1

İfadelerden hangileri rasyonel, hangileri irrasyonel cebirsel ifadelerdir?

- a) $\frac{1}{3}$; b) $\sqrt{3}$; c) $x^2 - 3xy$; d) $3 + \sqrt{x}$; e) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; f) $2a^{\frac{1}{3}}b^{-2}$.

Çözüm:

a) ve c) seçeneklerindeki ifadeler rasyoneldir. Diğerleri irrasyonel ifadelerdir.

Değişken içeren irrasyonel ifadeler, yalnızca ifadenin tanımlı, yani anlamlı olduğu değişken değerleri için ele alınacaktır.

Örnek 2

İrrasyonel ifade, değişkenin hangi değerleri için tanımlıdır?

- a) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x-4}$; b) $\sqrt{x^2+4} - (x-3)^{\frac{1}{3}}$; c) $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-5}}$.

Çözüm:

- a) $\sqrt{x^2}$ kökü her reel x sayısı için, yani $x \in (-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlıdır. $\sqrt{x-4}$ kökü ise $x-4 \geq 0$, yani $x \geq 4$ olan bütün x değerleri için tanımlıdır. Başka bir deyişle $x \in [4, +\infty)$ olur. Buna göre, $x \in (-\infty, +\infty) \cap [4, +\infty) = [4, +\infty)$.

- b) $\sqrt{x^2+4}$ ve $(x-3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x-3}$ köklerinin her ikisi de her reel x sayısı için, yani $x \in (-\infty, +\infty)$, aralığında tanımlıdır. Bu nedenle ifadenin tamamı da $x \in (-\infty, +\infty)$ için tanımlıdır.

- c) $\sqrt{x+3}$ kökü $x+3 \geq 0$, yani $x \geq -3$, için tanımlıdır. Başka bir deyişle $x \in [-3, +\infty)$ olur. İkinci kök paydada bulunduğundan sıfıra eşit olamaz, yani $\sqrt{x-5} \neq 0$ olmalıdır. Diğer taraftan kökün tanımlı olması için $x-5 \geq 0$. Buradan $x-5 > 0$, yani $x > 5$, elde edilir. Başka bir deyişle $x \in (5, +\infty)$.

olur. Buna göre, ifadenin tamamı $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-5}}$ için $x \in [-3, +\infty) \cap (5, +\infty) = (5, +\infty)$ olduğunda tanımlıdır.

Soru 1

İrrasyonel ifadeler, değişkenin hangi değerleri için tanımlıdır?

- a) $\sqrt[4]{x^3} - 2x$; b) $\sqrt{x-7} - (x+3)^{\frac{1}{5}}$; c) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+4}} + x^2$.

Köklü ifadeler üzerinde yapılan bazı işlemlerden (çarpma, bölme, üs alma, çarpanı kök işaretinin önüne çıkarma veya çarpanı kökün içine alma gibi) sonra, bazı irrasyonel ifadeler kök içermeyen, yani rasyonel ifadelere eşdeğer bir biçime dönüştürülebilir.

Örnek 3

Verilen irrasyonel ifadelerden hangileri rasyonel ifadelere dönüştürülebilir?

- a) $\sqrt{4}$; b) $\sqrt[3]{81}$; c) $\sqrt[3]{x^3 y^9}$;
d) $\sqrt{x^2 y}$, $x, y \geq 0$; e) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Çözüm:

- a) $\sqrt{4} = 2$ İfade rasyonel bir ifadedir.
b) $\sqrt[3]{81} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$ İfade rasyonel bir ifadeye dönüşmez. Çünkü ifadede köklü ifade kalmaktadır.
c) $\sqrt[3]{x^3 y^9} = xy^3$ İfade rasyonel bir ifadeye dönüşür.
d) $\sqrt{x^2 y} = x \cdot \sqrt{y}$. İfadede karekök kaldığından ifade rasyonel bir ifadeye dönüştürülemez.
e) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt[3]{x^3} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{x^{12}} = x^2$. Bu durumda ifade rasyonel bir ifadeye dönüşür.

Soru 2

Verilen irrasyonel ifadelerden hangileri rasyonel ifadelere dönüştürülebilir?

- a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt[3]{27}$; c) $\sqrt[3]{x^2 y^9 z^3}$; d) $\sqrt{x^2 y^2}$, $x, y \geq 0$.

Etkinlik

Hesapla:

- a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$, $a > 0$; b) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a}$; c) $\sqrt[4]{a^m} \cdot \sqrt[4]{a^{n-m}}$, $a > 0$, $m < n$.

Unutma!

Bir *kesrin paydasını rasyonel yapma*, kesrin değerini değiştirmeden paydasını irrasyonel bir ifadeden rasyonel bir ifadeye dönüştürme işlemidir.

Örnek 4

Verilen kesrin paydasını rasyonel yap $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Çözüm:

Kesrin paydasında $\sqrt{5}$ bulunmaktadır. Paydadaki kökü ortadan kaldırmak için kesri $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ ile çarpalım. Ve aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Böylece paydasında kök bulunmayan, yani paydası irrasyonel ifade olmayan bir kesir elde edilir. Kesri $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$, ile çarptığımıza dikkat et. Bu nedenle kesrin değeri değişmemiştir.

Örnek 5

Verilen kesirlerin paydasını rasyonel yap:

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{5^2}}$; b) $\frac{7}{\sqrt[3]{4^3}}$.

Çözüm:

a) Kesrin paydasında $\sqrt[3]{5^2}$ bulunmaktadır $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^3} = 5$, olduğundan, paydadaki kökü ortadan kaldırmak için kesri $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$ ile çarpalım. Böylece,

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5} \text{ elde ederiz.}$$

b) Bu durumda kesri $\frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}}$ ile genişletir ve aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\frac{7}{\sqrt[3]{4^3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^5}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{4}.$$

Soru 3

Kesirlerin paydasını rasyonel yap:

a) $\frac{6}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{9}{\sqrt[3]{3^3}}$; c) $\frac{-3}{\sqrt[3]{6^2}}$.

$m < n$, olmak üzere $\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}$, biçimindeki bir kesrin paydasını rasyonel yapma işlemini inceleyelim. Burada A ve $B \neq 0$ cverilen sayılar veya ifadelerdir. n çift sayı ise $B > 0$ olmalıdır. Paydadaki kökü ortadan kaldırmak için kesri $\frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}}$ ile genişletiriz. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{m+n-m}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^n}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{B}.$$

$m \geq n$, ise, önce kesir normal biçime getirilir, ardından elde edilen yeni kesrin paydası rasyonel yapılır.

Örnek 6

Kesrin paydasını rasyonel yap:

a) $\frac{10}{3\sqrt{7}}$; b) $\frac{x+2y}{\sqrt[3]{(x-2y)^2}}$, $x-2y > 0$; c) $\frac{-x+y}{x \cdot \sqrt[3]{y^2}}$, $y \neq 0$.

Çözüm:

a) $\frac{10}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{3\sqrt{7^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{21};$

b) $\frac{x+2y}{\sqrt[3]{(x-2y)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-2y)^5}}{\sqrt[3]{(x-2y)^5}} = \frac{(x+2y) \cdot \sqrt[3]{(x-2y)^5}}{\sqrt[3]{(x-2y)^7}} = \frac{(x+2y) \cdot \sqrt[3]{(x-2y)^2}}{x-2y};$

c) $\frac{-x+y}{x \cdot \sqrt[3]{y^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{y^5}}{\sqrt[3]{y^5}} = \frac{(-x+y) \cdot \sqrt[3]{y^5}}{x \cdot \sqrt[3]{y^7}} = \frac{(-x+y) \cdot \sqrt[3]{y^5}}{xy}.$

Soru 4

Kesirlerin paydasını rasyonel yap:

a) $\frac{8}{4\sqrt{a^2+1}}$; b) $\frac{5}{\sqrt[3]{3a}}$, $a > 0$; c) $\frac{3y}{4 \cdot \sqrt[3]{5y^2}}$, $y \neq 0$.

Etkinlik

Hesapla:

a) $(a+b)(a-b)$; b) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$; c) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

A , a ve b ($b \geq 0$) verilen sayılar veya ifadeler ve payda $a + \sqrt{b} \neq 0$ sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{A}{a + \sqrt{b}}$ kesri verilmiş olsun. Bu kesrin paydasını rasyonel yapmak için kesir, paydanın eşleniğinin kendisine oranı $\frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}}$ ile genişletilir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\frac{A}{a + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} = \frac{A \cdot (a - \sqrt{b})}{a^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{A \cdot (a - \sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

Payda fark biçiminde ise $a - \sqrt{b}$, kesir, paydanın eşleniğinin kendisine oranı $\frac{a + \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}}$ ile genişletilir.

Örnek 7

Verilen kesirlerin paydasını rasyonel yap:

a) $\frac{4}{2 + \sqrt{3}}$; b) $\frac{a}{a + \sqrt{3}}$, $a \neq -\sqrt{3}$; c) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - 1}$.

Çözüm:

$$a) \frac{4}{2 + \sqrt{3}} = \frac{4}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{3})}{1} = 4 \cdot (2 - \sqrt{3});$$

$$b) \frac{a}{a + \sqrt{3}} = \frac{a}{a + \sqrt{3}} \cdot \frac{a - \sqrt{3}}{a - \sqrt{3}} = \frac{a(a - \sqrt{3})}{a^2 - 3};$$

$$c) \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + 1)}{4}.$$

Soru 5

Verilen kesirlerin paydasını rasyonel yap:

a) $\frac{5}{\sqrt{3} - 1}$; b) $\frac{b + \sqrt{b}}{b - \sqrt{2}}$, $b \neq \sqrt{2}$; c) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{11} - 3}$.

Son olarak, A , a ve b ($a, b > 0$) verilen sayılar veya ifadeler, ayrıca $a \neq b$ olmak üzere, paydası iki karekökün farkı biçiminde olan bir kesrin $\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, paydasının nasıl rasyonel yapacağını görelim. $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0$, Bu kesrin paydasını rasyonel yapmak için kesir, paydanın eşleniğinin kendisine oranı paydasının nasıl rasyonel yapacağını görelim. Bu kesrin paydasını rasyonel yapmak için kesir, paydanın eşleniğinin kendisine oranı $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

$$\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{A \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}.$$

Payda iki karekökün toplamı biçiminde ise $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, kesir, paydanın eşleniğinin kendisine oranı ile genişletilir $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

Örnek 8

Verilen kesirlerin paydasını rasyonel yap:

a) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; c) $\frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$.

Çözüm:

a) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{7-5} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$;

b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2} = 13+2\sqrt{6}$;

c) $\frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \frac{54-23\sqrt{6}}{-6} = -9 + \frac{23}{6}\sqrt{6}$.

Alıştırma Soruları

1. İfade, x değişkeninin hangi değerleri için tanımlıdır?

a) $\sqrt{x+11}$; b) $\sqrt[3]{x-4} - \sqrt{x^2+12}$; c) $\frac{\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x+4}}{x}$; d) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}$;

2. Aşağıdaki ifadelerden hangileri rasyonel ifadelere dönüştürülebilir?

a) $\sqrt{a} - a$, $a \geq 0$; b) $\sqrt{a^2} - a$, $a \geq 0$;
c) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} - 3a$; d) $\sqrt[3]{64a^3} - \sqrt{9a^2}$, $a \geq 0$.

3. İfadeleri sadeleştir, ardından hangilerinin irrasyonel ifade olduğunu belirle.

a) $\sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^6}$, $x \geq 0$; b) $\sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{ab^5}$;
c) $\frac{3}{5}\sqrt{50} : \frac{5}{5}\sqrt{2}$; d) $\sqrt{a^4b} : \sqrt{ab}$, $a, b > 0$.

4-7. sorularda kesrin paydasını rasyonel yap.

4. a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}$; c) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$; d) $\frac{-7}{\sqrt[3]{4^3}}$.
5. a) $\frac{2x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$; b) $\frac{\sqrt{2}a^3}{\sqrt{a}}$, $a > 0$; c) $\frac{5}{\sqrt[3]{3a}}$, $a \neq 0$; d) $\frac{a-6}{\sqrt[4]{a^2}}$, $a > 0$.
6. a) $\frac{2(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, $x > 1$; b) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$, $a+b > 0$; c) $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a+b}}$, $a+b \neq 0$.
7. a) $\frac{5-\sqrt{7}}{7+\sqrt{5}}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17-4}}$; c) $\frac{\sqrt{5}-4}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$; d) $\frac{a-3}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}$, $a \neq 3$.

1.9 SAYI KÜMELERİNİN GENİŞLETİLMESİ

Doğal Sayılar Kümesi

Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ile gösterilir.

Bu küme toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Yani iki doğal sayının toplamı ve çarpımı yine bir doğal sayıdır.

Ancak çıkarma işlemi doğal sayılar kümesinde kapalı değildir. Örneğin, $2 - 5 \notin \mathbb{N}$ 'dir. Bu nedenle $6 + x = 3$, $x + 3 = 2$, gibi bazı denklemlerin $\mathbb{N}$ kümesinde çözümü yoktur.

Tam Sayılar Kümesi

Bu tür denklemleri de çözebilmek için doğal sayılar kümesi 0 ve negatif sayılarla genişletilir. Böylece

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

ile gösterilen *tam sayılar kümesi* elde edilir.

$\mathbb{Z}$ kümesinde toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri kapalıdır. Ancak bu kümede de çözümü olmayan denklemler vardır. Örneğin, $2x = 5$ denkleminin $\mathbb{Z}$ kümesinde çözümü yoktur. Çünkü 2 ile çarpıldığında 5 sonucunu veren bir tam sayı yoktur. Bunun nedeni, bölme işleminin tam sayılar kümesinde kapalı olmamasıdır. Yani iki tam sayının bölümü her zaman bir tam sayı değildir.

Rasyonel Sayılar Kümesi

Yukarıdaki sorunu çözmek için $\mathbb{Q}$ ile gösterilen *rasyonel sayılar kümesi* tanımlanır.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

$\mathbb{Q}$ kümesinde $2x = 5$ denkleminin çözümü $x = \frac{5}{2}$ olur.

İrrasyonel Sayılar

Buna rağmen, rasyonel sayılar kümesinde de çözümü olmayan denklemler vardır. Örneğin, $x^2 = 5$ denkleminin $\mathbb{Q}$ kümesinde çözümü yoktur. Bu tür denklemleri çözebilmek için *irrasyonel sayılar* tanımlanır. İrrasyonel sayılar, iki tam sayının bölümü biçiminde yazılamayan ve sonsuz, devirsiz ondalık açılıma sahip olan sayılardır. İrrasyonel sayılara örnek olarak:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots, \sqrt{3} = 1,7320508\dots, \pi = 3,14159265\dots,$$

İrrasyonel sayılar kümesi çoğunlukla $\mathbb{I}$.

Reel Sayılar Kümesi

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimi, $\mathbb{R}$ ile gösterilen reel (gerçek) sayılar kümesini verir ve $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ olur.

Reel sayılar kümesinde, $a > 0$ olmak üzere $x^2 = a$ biçimindeki bütün denklemler çözülebilir.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ olduğuna dikkat et. Bu kümelerin tümünde toplama ve çarpma işlemleri değişme ve birleşme özelliklerine sahiptir. Ayrıca çarpma işlemi, toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahiptir.

Karmaşık Sayılara Giriş

Yine de, her denklemin her sayı kümesinde çözümü yoktur. Bu nedenle, **verilen bir denklemin hangi kümede çözümü olduğu** sorusu sıkça sorulur.

Örnek 1

Denklemin hangi kümelerde çözümü olduğunu inceleyelim:

- a) $x + 3 = 5$; b) $x + 3 = 1$; c) $2x - 3 = 0$; d) $x^2 = 5$; e) $x^2 + 1 = 0$.

Çözüm:

- a) $x + 3 = 5$ denkleminin çözümü $x = 2$ 'dir. $2 \in \mathbb{N}$, olduğundan denklem $\mathbb{N}$, kümesinde çözüme sahiptir. Ayrıca $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinde de çözüme sahiptir.
- b) $x + 3 = 1$ denkleminin çözümü $x = -2$. $-2 \in \mathbb{Z}$, olduğundan denklem $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$, kümelerinde çözüme sahiptir, ancak $\mathbb{N}$ kümesinde çözümü yoktur.
- c) $2x - 3 = 0$ denkleminin çözümü $x = \frac{3}{2}$ 'dir. $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$, olduğundan denklem $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinde çözüme sahiptir.
- d) $x^2 = 5$ denkleminin $x_1 = \sqrt{5}$ ve $x_2 = -\sqrt{5}$ olmak üzere iki çözümü vardır. Bu çözümler $\mathbb{R}$ kümesine aittir, ancak $\mathbb{Q}$ kümesine ait değildir. Yani bu sayılar irrasyonel sayılardır.
- e) $x^2 + 1 = 0$ denklemi

$$x^2 = -1 \text{ biçiminde yazılabilir.}$$

Ancak hiçbir reel sayının karesi negatif olamaz. Bu nedenle bu denklemin reel sayılar kümesinde çözümü yoktur.

Soru 1

Denklemin hangi kümelerde çözümü olduğunu incele:

- a) $3x - 4 = 5$; b) $3 + x = 6$; c) $x + 2 = 0$; d) $x^2 - 4 = 5$; e) $x^2 + 4 = 0$.

Örnek 1'den görüldüğü gibi, reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ içinde de çözümü olmayan denklemler vardır. Bu tür denklemleri çözebilmek için reel sayılar kümesinin genişletilmesi gerekmiştir. Ancak bu genişletme yapılırken aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir:

1. Yeni küme bütün reel sayıları içermelidir.
2. Yeni kümede karesi -1 olan bir sayı bulunmalıdır.

3. Yeni kümede toplama ve çarpma işlemleri tanımlı olmalı; bu işlemler için değişme ve birleşme özellikleri ile çarpmanın toplama üzerine dağılıma özelliği geçerli olmalıdır.

İkinci koşulu sağlamak amacıyla, tanım gereği karesi -1 olan ve i ile gösterilen yeni bir sayı tanımlanır.

Unutma!

i sayısına **sanal sayı birim** denir ve karesi -1 'dir. Yani, $i^2 \stackrel{\text{def}}{=} -1$.

Sanal sayı birimin kuvvetleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned} i^1 &= i, \\ i^2 &= -1, \\ i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \\ i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1, \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i, \\ i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = -1, \\ i^7 &= i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \\ i^8 &= i^7 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1 \\ &\text{vb.} \end{aligned}$$

Her doğal sayı n için i^n kuvvetinin i , -1 , $-i$ ve 1 değerlerini aldığı ve bu dört değer belirli bir düzende periyodik olarak tekrarlandığı görülmektedir.

Tanım gereği, $n = 0$, için $i^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ 'dir.

Unutma!

n negatif olmayan bir tam sayı ise, $i^n \in \{i, -1, -i, 1\}$ olur ve bu dört değer periyodik olarak tekrar eder. Buna göre, $n = 4k + r$ ($0 \leq r \leq 3$) ise, yani r , n sayısının 4 ile bölümünden kalan ise, $i^n = i^r$ olur.

Örnek 2

Sanal sayı biriminin aşağıdaki kuvvetlerini hesapla:

- a) i^{21} ; b) i^{48} ; c) i^{27} ; d) i^{54} .

Çözüm:

- a) $i^{21} = i^{4 \cdot 5 + 1} = i^1 = i$;
b) $i^{48} = i^{4 \cdot 12 + 0} = i^0 = 1$;
c) $i^{27} = i^{4 \cdot 6 + 3} = i^3 = -i$;
d) $i^{54} = i^{4 \cdot 13 + 2} = i^2 = -1$.

Soru 2

Sanal sayı biriminin aşağıdaki kuvvetlerini hesapla.

- a) i^{101} ; b) i^{97} ; c) i^{84} ; d) i^{36} .

Karmaşık Sayılar Kümesi

a ve b reel sayılar, i ise sanal sayı birimi olmak üzere $a + ib$, biçimindeki sayıya **karmaşık sayı** denir. Bu biçimde yazılabilen bütün sayıların oluşturduğu kümeye **karmaşık sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Eğer

$$z = a + ib,$$

ise, a sayısına z sayısının reel kısmı denir ve $\text{Re}(z)$, ile gösterilir. b sayısına ise z sayısının sanal kısmı denir ve $\text{Im}(z)$ ile gösterilir. Tanım gereği,

$$0 \cdot i = 0, \quad 1 \cdot i = i, \quad a + 0i = a, \quad 0 + bi = bi.$$

Örnek 3

Reel ve sanal kısımları verilen karmaşık sayıları yaz.

- a) $\text{Re}(z) = 4, \text{Im}(z) = -3$; b) $\text{Re}(z) = 0, \text{Im}(z) = 4$;
c) $\text{Re}(z) = 3, \text{Im}(z) = 0$; d) $\text{Re}(z) = 0, \text{Im}(z) = 0$.

Çözüm:

- a) $z = 4 - 3i$; b) $z = 0 + 4i = 4i$; c) $z = 3 + 0i = 3$; d) $z = 0 + 0i = 0$.

Soru 3

Reel ve sanal kısımları verilen karmaşık sayıları yaz.

- a) $\text{Re}(z) = -2, \text{Im}(z) = -5$; b) $\text{Re}(z) = 5, \text{Im}(z) = 0$; c) $\text{Re}(z) = 0, \text{Im}(z) = 5$.

Verilen $z = a + bi$ karmaşık sayısı için aşağıdakilere dikkat edelim:

- Eğer $\text{Im}(z) = b = 0$ ise, $z = a + 0i = a \in \mathbb{R}$ olur. Buradan her reel sayının aynı zamanda bir karmaşık sayı olduğu, yani $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece reel sayılar kümesinin genişletilmesi için gerekli olan ilk koşul sağlanmış olur.
- Eğer $\text{Re}(z) = 0$ ise, $z = 0 + bi$, olur. $b \neq 0$, ise, bi sayısına **saf sanal sayı** denir.

Soru 4

Verilen karmaşık sayıların her birinin reel ve sanal kısmını belirle.

- a) $1 + 3i$; b) $-4 - 3i$; c) $7i$; d) 0 ; e) 4 .

Unutma!

$-z = -a - bi$ karmaşık sayısına, $z = a + bi$ karmaşık sayısının toplama işlemine göre *tersi* denir. $a - bi$ karmaşık sayısına, $z = a + bi$ sayısının *eşlenik karmaşık sayısı* denir ve $\bar{z}$ ile gösterilir. Yani $\bar{z} = a - bi$ 'dir.

Örnek 4

Aşağıdaki sayıların tersini ve eşlenik karmaşık sayısını yaz.

- a) $z = 3 - i$; b) $z = 2i$; c) $z = 3$; d) $z = 0 + 0i$.

Çözüm:

- a) $z = 3 - i$ sayısının tersi $-z = -3 + i$, eşlenik karmaşık sayısı ise $\bar{z} = 3 + i$ 'dir.
 b) $z = 2i = 0 + 2i$ sayısının tersi $-z = -0 - 2i = -2i$, eşlenik karmaşık sayısı ise $\bar{z} = 0 - 2i = -2i$ 'dir. Sadece sanal kısımdan oluşan (saf sanal) sayısının tersi ile karmaşık eşleniğinin birbirine eşit olduğu sonucuna varılabilir.
 c) $z = 3 = 3 + 0i$ sayısının tersi $-z = -3 - 0i = -3$, eşlenik karmaşık sayısı ise $\bar{z} = 3 - 0i = 3$ 'tür.
 d) $z = 0 = 0 + 0i$ sayısının tersi $-z = -0 - 0i = 0$, eşlenik karmaşık sayısı ise $\bar{z} = 0 - 0i = 0$ 'dir.

Soru 5

Tamamla: $z = 6i$ sayısının tersi _____, eşlenik karmaşık sayısı ise _____'dir.

Örnek 5

$z = a + bi$, ise aşağıdakileri göster: a) $\bar{\bar{z}} = z$; b) $\overline{(-z)} = -\bar{z}$.

Çözüm:

- a) $\bar{\bar{z}} = \overline{(a + bi)} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$;
 b) $\overline{(-z)} = \overline{(-a - bi)} = -a + bi = -(a - bi) = -\bar{z}$.

Reel sayılar kümesinde negatif bir sayının karekökünün bulunmadığını, yani tanımlı olmadığını biliyoruz. Çünkü her reel sayının karesi negatif olmayan bir sayıdır. Ancak $i^2 = -1$, koşulunu sağlayan sanal sayı biriminin tanımlanmasıyla,

$$\sqrt{-1} = i \text{ olduğu elde edilir.}$$

a negatif bir reel sayı, yani $a < 0$,

$$a = -|a| \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Şimdi $a < 0$ sayısının karekökü için aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\sqrt{a} = \sqrt{-|a|} = \sqrt{(-1)|a|} = \sqrt{-1}\sqrt{|a|} = \sqrt{|a|} i.$$

Bu şekilde her negatif sayının karekökü sanal sayı birimi yardımıyla ifade edilir. Ancak bu durumda karmaşık sayılar kümesinde çalışıldığının belirtilmesi gerekir.

Örnek 6

- a) $\sqrt{-4} = \sqrt{4} i = 2i$;
 b) $\sqrt{-9} = \sqrt{9} i = 3i$;
 c) $\sqrt{-81} = \sqrt{81} i = 9i$.

Soru 5

Sanal sayıyı yaz:

- a) $\sqrt{-225}$; b) $\sqrt{-196}$; c) $\sqrt{-121}$.

İki karmaşık sayı, reel kısımları ve sanal kısımları birbirine eşit olduğunda eşittir.

Unutma!

$a + bi$ ve $c + di$ karmaşık sayıları, $a = c$ ve $b = d$ olduğunda eşittir.

Örnek 7

Eşitlik, hangi reel x ve y sayıları için geçerlidir?

- a) $x + 3i = 5 - yi$; b) $(x + y) + (x - y)i = 3 + 5i$.

Çözüm:

- a) Karmaşık sayıların eşitliğinin sağlanması için $x = 5$ ve $-y = 3$, yani $y = -3$ olmalıdır.
 b) Bu durumda eşitlik, x ve y aşağıdaki doğrusal denklem sisteminin çözümü olduğunda geçerlidir:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Bu denklem sisteminin çözümü $x = 4$ ve $y = -1$ 'dir.

Soru 6

$(2x - y) + (3x + 2y)i = x + 12i$ eşitliği, hangi reel x ve y sayıları için geçerlidir?

Alıştırma Soruları!

- Aşağıdaki denklemlerin hangi sayı kümelerinde çözüme sahip olduğunu belirle.
a) $x^2 - 6 = 0$; b) $x - 10 = 5$; c) $x + 10 = 5$; d) $3x - 4 = 0$.
- Sanal sayı birimlerinin aşağıdaki kuvvetlerini hesapla.
a) i^{301} ; b) i^{199} ; c) i^{303} ; d) i^{551} .
- Reel ve sanal kısımları verilen karmaşık sayıları yaz.
a) $\text{Re}(z) = -2, \text{Im}(z) = 10$; b) $\text{Re}(z) = 5, \text{Im}(z) = 0$;
c) $\text{Re}(z) = 0, \text{Im}(z) = -4$; d) $\text{Re}(z) = 11, \text{Im}(z) = 12$.
- Verilen karmaşık sayıların reel ve sanal kısımlarını belirle.
a) $-1 + 5i$; b) $6 + 2i$; c) 6 ; d) $-8i$.
- Verilen sayıların tersini ve eşlenik karmaşık sayısını yaz.
a) $z = -10 - 2i$; b) $z = -3i$; c) $z = 4$
- $z = 4 - 5i$ olsun. $\bar{z}$ ve $(-z)$ sayılarını belirle.
- Sanal sayı birimini yaz.
a) $\sqrt{-324}$; b) $\sqrt{-625}$; c) $\sqrt{-10000}$.
- Aşağıdaki eşitlikler hangi reel a ve b sayıları için doğrudur?
a) $5 + ai = b - 4i$;
b) $2a - 9i = 8 + 3bi$;
c) $(a - 2b) - (3a + 4b)i = 3a + 2 + 3bi$.

1.10 KARMAŞIK SAYILARIN TOPLANMASI VE ÇIKARILMASI

Hatırla!

- i sayısına **sanal sayı birimi** denir ve $i^2 = -1$.
- $15 - 10i$ sayısının reel kısmı ve sanal kısmı nedir?
- $z = 5 + 13i$ sayısının eşlenik karmaşık sayısı nedir?

Bu derste iki karmaşık sayının toplamını ve farkını tanımlayacağız.

İki karmaşık sayının toplamı; reel kısmı bu sayıların reel kısımlarının toplamına, sanal kısmı ise sanal kısımlarının toplamına eşit olan karmaşık sayıdır.

İki karmaşık sayının farkı; reel kısmı, birinci sayının reel kısmından ikinci sayının reel kısmının çıkarılmasıyla; sanal kısmı ise birinci sayının sanal kısmından ikinci sayının sanal kısmının çıkarılmasıyla elde edilen karmaşık sayıdır.

Unutma!

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$, ise, bu iki sayının toplamı ve farkı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + e)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - e)i.$$

Örnek 1

Aşağıdaki sayıların toplamını ve farkını hesapla.

- $z_1 = 2 + 3i$ ve $z_2 = 3 - 2i$;
- $z_1 = 4 - 2i$ ve $z_2 = 2i$;
- $z_1 = 3 - 6i$ ve $z_2 = 5$.

Çözüm:

- $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + (3 + (-2))i = 5 + i,$
 $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (3 - 2i) = (2 - 3) + (3 - (-2))i = -1 + 5i.$
- $z_1 + z_2 = (4 - 2i) + 2i = (4 + 0) + (-2 + 2)i = 4 + 0i = 4,$
 $z_1 - z_2 = (4 - 2i) - 2i = (4 - 0) + (-2 - 2)i = 4 - 4i.$
- $z_1 + z_2 = (3 - 6i) + 5 = (3 + 5) + (-6i) = 8 - 6i,$
 $z_1 - z_2 = (3 - 6i) - 5 = (3 - 5) + (-6i) = -2 - 6i.$

Soru 1

Aşağıdaki sayıların toplamını ve farkını hesapla.

- a) $z_1 = 22 + 31i$ ve $z_2 = 21 - 25i$;
 b) $z_1 = 8 - 3i$ ve $z_2 = 10i$;
 c) $z_1 = 7 - 2i$ ve $z_2 = 29$.

Örnek 2

$z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 2 + 5i$ ve $z_3 = -1 - 7i$ olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğru olup olmadığını kontrol et.

- a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; b) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Çözüm:

$$a) \quad z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (-4 + 5)i = 5 + i,$$

$$z_2 + z_1 = (2 + 5i) + (3 - 4i) = (2 + 3) + (5 - 4)i = 5 + i.$$

İlk eşitliğin doğru olduğu, yani $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ olduğu sonucuna varabiliriz.

$$b) \quad (z_1 + z_2) + z_3 = ((3 - 4i) + (2 + 5i)) + (-1 - 7i) = (5 + i) + (-1 - 7i) = 4 - 6i,$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (3 - 4i) + ((2 + 5i) + (-1 - 7i)) = (3 - 4i) + (1 - 2i) = 4 - 6i.$$

Buna göre ikinci eşitlik de doğrudur. Yani, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Örnek 2'de verilen eşitlikler yalnızca z_1 , z_2 ve z_3 sayıları için değil, tüm karmaşık sayılar için geçerlidir.

Unutma!

Karmaşık sayılar kümesinde toplama işlemi değişme ve birleşme özelliklerine sahiptir. Yani herhangi üç karmaşık sayı z_1 , z_2 ve z_3 için,

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ (değişme özelliği) ve} \\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ (birleşme özelliği) eşitlikleri geçerlidir.}$$

Örnek 3

$z = 3 - 2i$ olsun. Aşağıdakileri hesapla:

- a) $z + \bar{z}$; b) $z - \bar{z}$.

Çözüm:

$$a) \quad z + \bar{z} = (3 - 2i) + (3 + 2i) = 6 + 0i = 6 \in \mathbb{R},$$

$$b) \quad z - \bar{z} = (3 - 2i) - (3 + 2i) = 0 - 4i = -4i.$$

Karmaşık bir sayı ile eşlenik karmaşık sayısının toplamının reel bir sayı, farkının ise saf sanal sayı olduğu elde edilir.

Bu özellikler her karmaşık sayı için geçerlidir. Yani, $z = a + bi$ bir karmaşık sayı ise,

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a + 0i = 2a$$

reel bir sayıdır,

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 0 + 2bi = 2bi$$

ise saf sanal sayıdır.

Örnek 4

$z_1 = 2 + i$ ve $z_2 = 3 - 4i$ sayıları verilmiştir. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ eşitliğinin doğru olup olmadığını kontrol et.

Çözüm:

Önce $z_1 + z_2$ toplamını hesaplarız $z_1 + z_2 = (2 + i) + (3 - 4i) = 5 - 3i$. Daha sonra bu toplamın eşleniğini buluruz $\overline{z_1 + z_2} = 5 + 3i$. Diğer taraftan, z_1 ve z_2 'nin eşleniklerini ayrı ayrı bulup toplarız $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (2 - i) + (3 + 4i) = 5 + 3i$. Buradan eşitliğin doğru olduğu sonucuna ulaşılır.

Bu eşitlik yalnızca verilen sayılar için değil, genel durumda da, $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ biçimindeki tüm karmaşık sayılar için geçerlidir. Gerçekten $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$. eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı için ise, $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$, elde edilir ve böylece eşitliğin doğru olduğu doğrulanmış olur.

Unutma!

Herhangi iki karmaşık sayı z_1 ve z_2 , için, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ eşitliği geçerlidir.

Alıştırma Soruları!

- Karmaşık sayıların toplamını ve farkını hesapla.
 - $z_1 = 5 - 6i$ ve $z_2 = -4 + 9i$;
 - $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$ ve $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$;
 - $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5}i$ ve $z_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{5}i$;
 - $z_1 = 3 - 9i$ ve $z_2 = 5 - 11i$.
- $z_1 = 7 - 6i$ olsun. $\bar{z} - z$ ve $z - \bar{z}$ işlemlerini hesapla.
- $z_1 = 3 - 2i$ ve $z_2 = 5 + 3i$ olsun. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ eşitliğinin doğru olup olmadığını kontrol et. Bu eşitlik genel durumda da geçerli midir?

1.11 KARMAŞIK SAYILARIN ÇARPILMASI. KARMAŞIK SAYILARIN KUVVETİ

Bu bölümde karmaşık sayıların çarpımını tanımlayacağız.

Öncelikle iki saf sanal sayının çarpımı durumunu inceleyelim. $z_1 = ai$, ve $z_2 = bi$ olsun. Bu durumda,

$$z_1 \cdot z_2 = ai \cdot bi = abi^2 = -ab.$$

Buna göre, iki saf sanal sayının çarpımı reel bir sayıdır.

Unutma!

İki saf sanal sayının çarpımı reel bir sayıdır.

Örnek 1

Saf sanal sayılar $z_1 = 3i$ ve $z_2 = -4i$ 'nin çarpımını hesapla.

Çözüm:

$$z_1 \cdot z_2 = 3i \cdot (-4i) = -12i^2 = (-12)(-1) = 12.$$

Soru 1

Verilen saf sanal sayıların çarpımını hesapla.

- a) $z_1 = 2i$ ve $z_2 = 3i$; b) $z_1 = -3i$ ve $z_2 = -5i$; c) $z_1 = -10i$ ve $z_2 = 2i$.

Genel durumda karmaşık sayıların çarpımı, iki binomun çarpımına indirgenir.

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olsun. Bu durumda z_1 ile z_2 'nin çarpımı için aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Unutma!

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ ise, bu iki sayının çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Bu formülü ezberlemek gerekli değildir. Karmaşık sayıların çarpımını iki binomun çarpımı şeklinde yapmak çok daha kolaydır.

Örnek 2

$z_1 = 3 - 2i$ ve $z_2 = 2 + 4i$ karmaşık sayılarının çarpımını hesapla.

Çözüm:

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 2i)(2 + 4i) = 6 + 12i - 4i - 8i^2 = 6 + 12i - 4i + 8 = 14 + 8i.$$

Soru 2

Aşağıdaki karmaşık sayıların çarpımını hesapla.

a) $z_1 = -4 - 3i$ ve $z_2 = 5 - 3i$; b) $z_1 = -2 + 3i$ ve $z_2 = 1 - i$; c) $z_1 = 4 + 3i$ ve $z_2 = -7 - 2i$.

Örnek 3

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -8i$ ve $z_3 = 3 - 4i$ olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğru olup olmadığını kontrol et.

a) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$; b) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$; c) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Çözüm:

a) $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(-8i) = -16i - 24i^2 = 24 - 16i$.

$z_2 \cdot z_1 = (-8i)(2 + 3i) = -16i - 24i^2 = 24 - 16i$.

Sağ tarafların eşit olmasından, sol tarafların da eşit olduğu sonucu çıkar. Yani verilen karmaşık sayılar için $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ eşitliği geçerlidir.

b) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = ((2 + 3i)(-8i)) \cdot (3 - 4i) = (24 - 16i)(3 - 4i) = 72 - 96i - 48i + 64i^2 = 8 - 144i$.

$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (2 + 3i) \cdot ((-8i)(3 - 4i)) = (2 + 3i)(-32 - 24i) = -64 - 48i - 96i - 72i^2 = 8 - 144i$.

demek, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

c) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = ((2 + 3i) + (-8i)) \cdot (3 - 4i) = (2 - 5i) \cdot (3 - 4i) = 6 - 8i - 15i + 20i^2 = -14 - 23i$.

$z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = (2 + 3i)(3 - 4i) + (-8i)(3 - 4i) = (18 + i) + (-32 - 24i) = -14 - 23i$.

Buna göre üçüncü eşitlik de doğrudur.

Bu üç eşitliğin yalnızca verilen sayılar için değil, tüm karmaşık sayılar için de geçerli olduğu gösterilebilir.

Unutma!

Karmaşık sayılar kümesinde çarpma işleminin *değişme* ve *birleşme* özelliklerine sahiptir. Yani z_1 , z_2 ve z_3 herhangi üç karmaşık sayı ise,

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \text{ (değişme özelliği)}$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \text{ (birleşme özelliği) eşitlikleri geçerlidir.}$$

Ayrıca karmaşık sayılar kümesinde çarpma işleminin toplama üzerine *dağılma* özelliğine sahiptir. Yani z_1 , z_2 ve z_3 herhangi üç karmaşık sayı ise,

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 \text{ (dağılma özelliği) eşitliği geçerlidir.}$$

Örnek 4

$z \cdot \bar{z}$, ise, $z = a + bi$ çarpımını hesapla.

Çözüm:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

$z \cdot \bar{z}$ çarpımının reel bir sayı olduğuna dikkat et.

Unutma!

Herhangi bir $z = a + bi$ karmaşık sayısı için $z \cdot \bar{z}$ çarpımı reel bir sayıdır. Bu sayının karekökü $|z|$ ile gösterilir ve z karmaşık sayısının modülü veya mutlak değeri olarak adlandırılır.

Buna göre:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Örnek 5

Karmaşık sayının modülünü hesapla.

- a) $1 + i$; b) $2 - i$; c) $4 - 3i$; d) $-3i$.

Çözüm:

- a) $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$
 b) $|2 - i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5};$
 c) $|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5;$
 d) $|-3i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$

Soru 3

Karmaşık sayıların modülünü hesapla.

- a) $8 + 6i$; b) $3 - 4i$; c) $12i$.

Örnek 6

$z_1 = -5 + 3i$ ve $z_2 = 4 - 2i$ karmaşık sayıları verilmiştir. Bu sayılar için $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ eşitliğinin doğru olup olmadığını kontrol et.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(-5 + 3i)(4 - 2i)} = \overline{(-14 + 22i)} = -14 - 22i, \\ \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 &= (-5 - 3i)(4 + 2i) = -14 - 22i.\end{aligned}$$

Böylece iki eşitliğin sağ taraflarının eşit olduğu görülür. Buradan sol tarafların da eşit olduğu, yani $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ sonucu elde edilir.

Bu özellik genel durumda da, yani $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ biçimindeki tüm karmaşık sayılar için geçerlidir. Gerçekten,

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

Diğer taraftan, $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i.$

Unutma!

z_1 ve z_2 herhangi iki karmaşık sayı ise, o zaman $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ eşitliği geçerlidir.

Devamında, birleşme özelliğinin geçerli olduğu karmaşık sayılarda çarpma işlemini kullanarak karmaşık sayının kuvvetini tanımlayacağız.

Unutma!

Herhangi bir z karmaşık sayısı ve herhangi bir n doğal sayısı için z^n kuvveti aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ defa}}$$

Örnek 7

Aşağıdaki kuvvetleri hesapla:

a) $(2 - 3i)^3$; b) $(1 - i)^8$.

Çözüm:

a) $(2 - 3i)^2 = (2 - 3i)(2 - 3i) = -5 - 12i$

$(2 - 3i)^3 = (2 - 3i)^2(2 - 3i) = (-5 - 12i)(2 - 3i) = -46 - 9i$.

b) $(1 - i)^2 = (1 - i)(1 - i) = -2i$.

$(1 - i)^8 = ((1 - i)^2)^4$ olduğu kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$(1 - i)^8 = (-2i)^4 = (-2)^4 i^4 = 16.$$

Soru 4

Aşağıdaki kuvvetleri hesapla:

a) $(1 + i)^4$; b) $(2 - i)^3$; c) $(1 - 3i)^5$.

Alıştırma Soruları!

- z_1 ve z_2 karmaşık sayılarının çarpımını hesapla.
 - $z_1 = 5 - 6i$ ve $z_2 = 4 - 9i$;
 - $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$ ve $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$;
 - $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ ve $z_2 = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}i$;
 - $z_1 = 3 - 9i$ ve $z_2 = 5 - 11i$.
- Aşağıdaki kuvvetleri hesapla.
 - $(2 + 5i)^3$; b) $(2 - 6i)^4$; c) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}i)^4$.
- z karmaşık sayısının modülünü hesapla.
 - $z = 4 + 7i$; b) $z = 3 - 8i$; c) $z = -7i$.
- Verilen denklemleri çöz ve çözümlerin doğruluğunu kontrol et.
 - $x^2 - 16 = 0$; b) $x^2 + 16 = 0$.

1.12 KARMAŞIK SAYILARIN BÖLÜNMESİ

Hatırla!

Herhangi bir z karmaşık sayısı için $z \cdot \bar{z}$ çarpımı reel bir sayıdır.

Bu bölümde iki karmaşık sayının bölümünü tanımlayacağız. $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ ($z_2 \neq 0$) olsun. Herhangi bir karmaşık sayının eşlenik karmaşık sayısıyla çarpımının reel bir sayı olduğu göz önünde bulundurularak, $\frac{z_1}{z_2}$ ifadesi $\frac{\bar{z}_2}{z_2}$ ile çarpılır. Böylece paydada $z_2 \cdot \bar{z}_2$ reel sayısı elde edilir. Yani,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

Unutma!

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ ($z_2 \neq 0$), ise, bu iki sayının bölümü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Örnek 1

z_1 ve z_2 sayılarının bölümünü hesapla.

- $z_1 = 3 - i$ ve $z_2 = 2 + 3i$;
- $z_1 = 2 + 3i$ ve $z_2 = 3 - 4i$;
- $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ ve $z_2 = \sqrt{3} - 2i$.

Çözüm:

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-i}{2+3i} = \frac{3-i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{(3-i)(2-3i)}{2^2+3^2} = \frac{3-11i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{11}{13}i;$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{3-4i} = \frac{2+3i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(2+3i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{-6+17i}{25} = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i;$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i} \cdot \frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+2i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+2i)}{(\sqrt{3})^2+2^2} =$
 $= \frac{(\sqrt{6}-2\sqrt{3})+(2\sqrt{2}+3)i}{7} = \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{7} + \frac{2\sqrt{2}+3}{7}i.$

Soru 1

Bölümleri hesapla.

- $\frac{1-3i}{1+3i};$
- $\frac{2-5i}{6+8i};$
- $\frac{1-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}.$

Örnek 2

$z = \frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i}$ karmaşık sayının reel ve sanal kısmını hesapla.

Çözüm:

$$z = \frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i} = \frac{2-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} + \frac{2+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{2^2+1^2} + \frac{(2+i)^2}{2^2+1^2} = \frac{3-4i}{5} + \frac{3+4i}{5} = \frac{6}{5}.$$

$\operatorname{Re}(z) = \frac{6}{5}$, ve $\operatorname{Im}(z) = 0$ olduğunu elde ederiz.

Soru 2

$z = \frac{1-2i}{2+i} + \frac{2+3i}{2-i}$ karmaşık sayının reel ve sanal kısmını hesapla.

Örnek 3

$z_1 = 1 - 2i$, ve $z_2 = 3 + 4i$ olsun $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ eşitliğin doğru olup olmadığını kontrol et.

Çözüm:

Önce aşağıdakini hesaplarız:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{3+4i} = \frac{1-2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{(1-2i)(3-4i)}{3^2+4^2} = \frac{-5-10i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Şimdi, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$

Diğer taraftan, $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$

Böylece verilen z_1 ve z_2 sayıları için eşitliğin doğru olduğu gösterilmiş olur.

Bu eşitlik genel durumda da, z_1 ve z_2 ($z_2 \neq 0$) olmak üzere, tüm karmaşık sayılar için doğrudur.

Unutma!

z_1 ve z_2 ($z_2 \neq 0$) herhangi iki karmaşık sayı ise, o zaman $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$

Alıştırma Soruları!

1. z_1 ve z_2 karmaşık sayılarının bölümünü hesapla.
 - a) $z_1 = 5 - 6i$ ve $z_2 = 4 - 9i$;
 - b) $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$ ve $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$;
 - c) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ ve $z_2 = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}i$;
 - d) $z_1 = 3 - 9i$ ve $z_2 = 5 - 11i$.
2. z_1 ve z_2 ($z_2 \neq 0$) herhangi karmaşık sayılar olmak üzere, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ eşitliğin doğru olduğunu göster.
3. İfadeleri sadeleştir.
 - a) $\frac{(2+i)(3-i)}{1+i}$;
 - b) $\frac{(1+2i)^2}{2-i} \cdot \frac{(3-i)^2 + 2i}{1+i}$.

1.13 KARMAŞIK SAYILARIN UYGULAMALARINA İLİŞKİN SORULAR

Karmaşık sayıların uygulamalarına ilişkin soruları çözmeye geçmeden önce, bir büyüklüğün hangi durumlarda karmaşık sayı değerini alabileceğini açıklamak gerekir. Bunun için karmaşık sayıların geometrik olarak nasıl gösterildiğini inceleyeceğiz.

Karmaşık Sayıların Geometrik Gösterimi

Her $z = a + bi$ karmaşık sayısı, reel kısmı a ve sanal kısmı b ile tamamen belirlenir. Burada $a, b \in \mathbb{R}$. Buna göre $z = a + bi$ karmaşık sayısı, (a, b) sıralı ikilisi ile gösterilebilir. Tersine, her (a, b) sıralı ikilisi de $z = a + bi$ biçiminde bir karmaşık sayı olarak yazılabilir. Dolayısıyla karmaşık sayılar ile reel sayıların sıralı ikilileri arasında bire bir eşleme vardır. Örneğin:

$$z = 3 - 2i = (3, -2);$$

$$z = 5i = (0, 5);$$

$$z = 3 = (3, 0).$$

Ayrıca, $z = (2, 3) = 2 + 3i$, $z = (1, 0) = 1$, $z = (0, 2) = 2i$.

Diğer taraftan, koordinat düzleminde (a, b) sıralı ikilisine tam olarak bir $M(a, b)$ noktası karşılık gelir. Tersine, koordinat düzlemindeki her $N(x, y)$ noktasına da tam olarak bir (x, y) sıralı ikilisi karşılık

gelir. Yani reel sayıların sıralı ikilileri ile koordinat düzlemindeki noktalar arasında da bire bir eşleme vardır. Buradan, karmaşık sayılar ile koordinat düzlemindeki noktalar arasında da bire bir eşleme olduğu sonucuna ulaşılır. Başka bir deyişle, her $z = a + bi$ karmaşık sayısına koordinat düzleminde bir $M(a, b)$ noktası karşılık gelir. Tersine, koordinat düzlemindeki her $N(x, y)$ noktasına da tam olarak $z = x + yi$ karmaşık sayısı karşılık gelir.

Örnek 1

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 3$ ve $z_4 = -3i$ karmaşık sayıları koordinat düzleminde göster.

Çözüm:

Yukarıdaki açıklamaya göre,

$$z_1 = 2 + 3i = (2, 3),$$

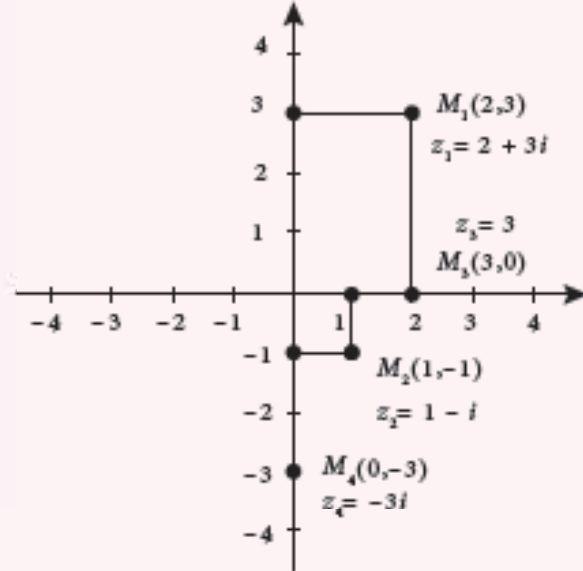
$$z_2 = 1 - i = (1, -1),$$

$$z_3 = 3 = (3, 0),$$

$$z_4 = -3i = (0, -3)$$

Bu noktalar Çizim 1'de koordinat düzleminde gösterilmiştir.

$z_3 = 3$ reel sayısına x ekseninde bulunan $M_3(3, 0)$, noktasının; $z_4 = -3i$ sanal sayısına ise y ekseninde bulunan $M_4(0, -3)$, noktasının karşılık geldiğine dikkat ediniz.



Çizim 1

Soru 1

$z_1 = 3 + i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 2i$ ve $z_4 = -4$ karmaşık sayılarını koordinat düzleminde göster.

Noktaları karmaşık sayıları temsil eden düzleme *karmaşık düzlem* veya **Gauss düzlemi** denir. Bu düzlemin yatay eksenine **reel eksen**, düşey eksenine ise **sanal eksen** denir.

Geometride, başlangıç noktası koordinat sisteminin başlangıç noktası, bitiş noktası $M(a, b)$ noktası olan vektöre M noktasının **konum vektörü** denir ve $\vec{OM}$ ile gösterilir. Konum vektörünün koordinatları, M noktasının koordinatlarıyla aynıdır. Buna göre düzlemdeki her nokta, konum vektörüyle tamamen belirlenir.

Daha önce her karmaşık sayıya düzlemde tam olarak bir noktanın karşılık geldiğini ve düzlemdeki her noktanın konum vektörüyle belirlendiğini gösterdiğimizden, karmaşık sayılar ile konum vektörleri arasında bire bir eşleme olduğu sonucuna varılabilir.

Örnek 2

$\vec{a} = (2, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1)$, $\vec{c} = (1, 0)$ ve $\vec{d} = (0, -2)$ konum vektörlerini koordinat düzleminde göster.

Bu konum vektörleri hangi karmaşık sayıları belirler?

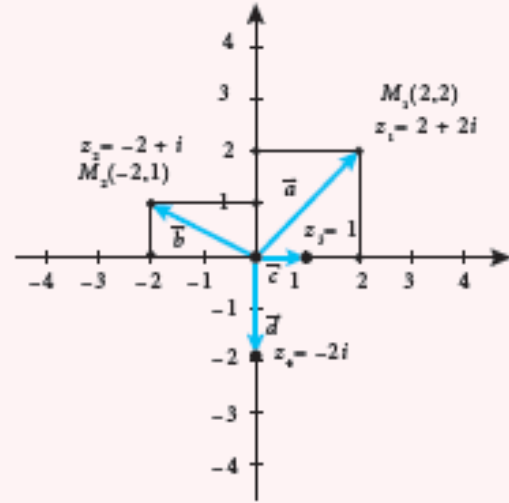
Çözüm:

Çizim 2'de ilgili konum vektörleri gösterilmiştir.

$\vec{a} = (2, 2)$ konum vektörü $z_1 = 2 + 2i$, karmaşık sayısını,

$\vec{b} = (-2, 1)$ konum vektörü $z_2 = -2 + i$, karmaşık sayısını,

$\vec{c} = (1, 0)$ vektörü $z_3 = 1$ sayısını, $\vec{d} = (0, -2)$ vektörü ise $z_4 = -2i$ sayısını belirler.



Çizim 2

Soru 2

$\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (-2, -4)$, $\vec{c} = (0, -3)$ ve $\vec{d} = (5, 0)$ konum vektörlerini koordinat düzleminde göster.

Bu konum vektörleri hangi karmaşık sayıları belirler?

Bazı büyüklükler neden karmaşık sayılarla gösterilir?

Karmaşık sayıları gerçek yaşamla ilgili uygulama sorularında kullanabilmek için cevaplanması gereken temel soru budur.

Fizik, teknik, robotik ve daha birçok alanda bazı büyüklükler yalnızca bir sayıyla açıklanamaz, iki önemli bilgi içerir. Örneğin kuvvette yalnızca büyüklüğün ne kadar olduğu değil, hangi yönde etki ettiği de önemlidir. Bu nedenle kuvvetin bir vektörel büyüklük olduğunu söyleriz. Kuvvetin:

- büyüklüğü,
- yönü vardır.

Kuvvet ile karmaşık sayı arasında nasıl bir ilişki kurulabilir?

$z = a + bi$ karmaşık sayısı iki bileşenden oluşur: reel kısım a ve sanal kısım b . Bu iki bileşen, birbirine dik iki yön olarak yorumlanabilir. Örneğin bunlardan biri yatay, diğeri düşey yön olabilir. Bu nedenle kuvvet, karmaşık sayı biçiminde şöyle yazılabilir:

$$F = F_x + iF_y$$

burada:

- F_x kuvvetin yatay bileşenidir,
- F_y kuvvetin düşey bileşenidir.

Bu gösterimde kuvvet aslında bir konum vektörü olarak gösterilmektedir. Çünkü karmaşık sayılar ile konum vektörleri arasında bire bir eşleme bulunduğunu gördük.

Kuvvetin ve aynı şekilde birçok başka vektörel büyüklüğün bu biçimde gösterilmesi oldukça yararlıdır. Çünkü bu yolla:

- kuvvetlerin toplanması, vektörlerin toplanması yerine karmaşık sayıların sıradan toplama işlemine dönüşür;
- hesaplamalar kolaylaşır;
- salınımlar, dalgalar, alternatif akım ve değişkenlerin vektör olduğu daha birçok örnekle ilgili sorular daha kolay çözülür.

Buna göre karmaşık sayıların “yeni” bir fiziksel büyüklüğü temsil etmediği, iki bileşene sahip büyüklükleri daha kolay açıklamamızı sağlayan matematiksel bir araç olduğu söylenebilir.

Örnek 3

Bir elektrik devresi için hesaplanan temel büyüklükler şunlardır: amper cinsinden ölçülen elektrik akımı şiddeti I (sembolü A), ohm cinsinden ölçülen görünür elektrik direnci Z , (sembolü Ω) ve volt cinsinden ölçülen gerilim U (sembolü V). Bu büyüklükler $U = I \cdot Z$ formülüyle ilişkilidir.

Elektrik akımı şiddetinin I sembolüyle karıştırılmasını önlemek için mühendisler sanal sayı birimini j ile gösterirler.

- Bir elektrik devresinde elektrik akımı şiddeti $(8 + 3j)$ A, direnç ise $(4 - j)$ Ω 'dur. Gerilim kaç voltur?
- Gerilimi 110 V olan bir elektrik devresinde elektrik akımı şiddeti $(4 + 3j)$ A'dır. Direnç kaç ohmdur?

Çözüm:

- Soruda verilenlere göre $I = 8 + 3j$, ve $Z = 4 - j$ 'dir. Elektrik gerilimi $U = I \cdot Z$ formülüyle hesaplanır. I ve Z değerleri yerine yazıldığında:

$$U = I \cdot Z = (8 + 3j)(4 - j) = (35 + 4j) \text{ V.}$$

Elde edilen sonuca aşağıdaki fiziksel yorum yapılabilir. U gerilimi, $\vec{u} = (35, 4)$ konum vektörüyle belirlenir. Buna göre:

- reel kısım (35 V) aktif gerilimdir;
- sanal kısım (4j V) reaktif gerilimdir.

$$b) \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{110}{4 + 3j} = \frac{110}{4 + 3j} \cdot \frac{4 - 3j}{4 - 3j} = \frac{110(4 - 3j)}{4^2 + 3^2} = 4,4 \cdot (4 - 3j) = 17,6 - 13,2j.$$

Etkinlik

Gerilimi 110 V olan bir elektrik devresinde direnç $(6 - 2j) \Omega$ 'dur. Elektrik akımı şiddeti kaç amperdir?

Örnek 4

Bir elektrik devresinde iki kaynak $U_1 = (6 + 4j)$ V ve $U_2 = (3 - 2j)$ V karmaşık gerilimlerini oluşturmaktadır. Devredeki toplam gerilim U , U_1 ve U_2 gerilimlerinin toplamına eşit olduğuna göre toplam gerilimi hesapla.

Çözüm:

$$U = U_1 + U_2 = (6 + 4j) + (3 - 2j) = (9 + 2j) \text{ V.}$$

Örnek 5

Bir robot, $z_1 = 2 + j$ karmaşık sayısıyla gösterilen bir dönüşümle hareket etmektedir. Daha sonra $z_2 = 1 - j$ biçiminde ek bir döndürme ve ölçeklendirme uygulanmaktadır. Toplam dönüşümün $z = z_1 \cdot z_2$ sonucunu belirle.

Çözüm:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + j)(1 - j) = 3 - j.$$

Etkinlik

Bir telekomünikasyon kanalı üzerinden $S = 10 + 6j$ sinyali gönderilmiş, kanaldaki gürültü ise $N = 2 - j$ olarak verilmiştir. Kanal çıkışında, gönderilen sinyal ile gürültünün toplamı olan bir sinyal elde edilmektedir

- Alınan $R = S + N$ sinyalini belirle.
- Alınan sinyalden gürültüyü çıkararak temiz sinyali belirle.

Örnek 6

Düzlemdeki bir nokta $z = 3 + 2j$ karmaşık sayısıyla verilmiştir. Bu, noktanın koordinatlarının $(3, 2)$ olduğu anlamına gelir. Noktaya $z' = (1 + j) \cdot z$ dönüşümü uygulanmaktadır. Noktanın yeni konumunu belirle.

Çözüm:

Noktanın yeni konumu:

$$z' = (1 + j) \cdot z = (1 + j) \cdot (3 + 2j) = 1 + 5j \text{ olacaktır.}$$

Alıştırma Soruları!

- Verilen karmaşık sayıları karmaşık düzlemde göster.
 $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = 1 - 5i$, $z_3 = 2 - 6i$ ve $z_4 = -i$.
- Verilen reel sayı sıralı ikililerine karşılık gelen karmaşık sayıları belirle ve bunları koordinat düzleminde göster $(2, 1)$, $(-2, 4)$, $(-3, -2)$, $(0, 4)$, $(2, 0)$.
- Verilen karmaşık sayılara karşılık gelen konum vektörlerini belirle ve bunları koordinat düzleminde göster. $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 2 - 4i$, $z_3 = 3 - 5i$ ve $z_4 = -2i$.
4. Bir konum, karmaşık sayı ile verilmiştir $z = -2 + 4i$.
 - Konumu koordinatlarıyla yaz.
 - Noktanın koordinat başlangıcının kuzeyinde mi yoksa güneyinde mi olduğunu belirle.
 - Noktanın koordinat başlangıcının doğusunda mı yoksa batısında mı olduğunu belirle.
 Koordinat düzleminde sol tarafın batıyı, sağ tarafın doğuyu, üst tarafın kuzeyi, alt tarafın ise güneyi gösterdiğini kabul et.
5. Düzlemde bir uydunun konumu karmaşık sayı ile verilmiştir $z = 9 - 6i$.
 - Reel ve sanal kısmını belirle.
 - Uydunun yatay eksenin üstünde mi yoksa altında mı olduğunu belirle.
 - y eksenine olan uzaklığını belirle.
6. Küçük bir teknenin düzlemdeki hareketi karmaşık sayılarla verilmiştir $z_1 = 6 + 2i$. Akıntı nedeniyle ek bir yer değiştirme gerçekleşmektedir e $z_2 = -1 + 3i$.
 - Teknenin toplam yer değiştirmesini belirle.
 - Etkinin hangi yönde daha büyük olduğunu belirle: yatay mı, dikey mi?

TEKRAR VE PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıdaki ifadelerin her birini sadeleştir.

a) $x^{-2} \cdot x^{-4} \cdot x^6$; b) $\left(\frac{3x^2}{4x^4}\right)^3$; c) $\left(\frac{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}{y^{-2}zx^{-3}}\right)^{-1}$.

2. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

- a) 0'ın karekökü yoktur.
b) 0'ın karekökü 0'dır.
c) $\sqrt{15}$ ifadesi anlamsızdır.
d) $\sqrt[3]{-15}$ ifadesi tanımlıdır, anlamlıdır.
e) $\sqrt[3]{-343} = -7$ midir?

3. x değişkeninin hangi değerleri için ifade tanımlıdır?

a) $\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{x}$; b) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{2x^2+4}$.

4. İfadelerin değerini hesapla.

a) $\sqrt{25} - 3\sqrt[3]{64} + 4\sqrt[4]{-32}$; b) $9^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}}$.

5. Verilen işlemleri yap.

a) $x^3 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 : x^{\frac{1}{4}} \quad x > 0$; b) $2a^2b^{\frac{1}{2}} : \left(a^{-1}b^{\frac{2}{3}}\right)^2, \quad a \neq 0, b > 0$.

6. Kuvveti kök biçiminde yaz.

a) $5^{\frac{1}{2}}$; b) $2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}, \quad x \geq 0$; c) $2x+3y^{\frac{1}{2}}, \quad y \geq 0$.

7. Kökü rasyonel üslü kuvvet biçiminde yaz.

a) $\sqrt{21}$; b) $\sqrt[3]{18}$; c) $\sqrt[4]{a^2b^4}, \quad a, b \geq 0$.

8. Meteorologlar, şiddetli fırtınaların $D = 9,4 \cdot t^{\frac{2}{3}}$, formülüyle ifade edilebileceğini belirlemiştir. Burada D fırtınanın çapını, t ise fırtınanın süresini göstermektedir. Süresi 18 saat olan bir fırtınanın çapı kaçtır?

9. Kökleri ortak kök derecesine dönüştür.

a) $\sqrt[3]{x^2}, \sqrt[4]{xy^2}, \sqrt[5]{xy}, \quad x, y \geq 0$; b) $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a^2b}, \sqrt[5]{a^5b^5}, \quad a, b \geq 0$.

10. Kökleri büyüklüklerine göre sırala.

a) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[4]{45}$; b) $\sqrt[3]{16}, \sqrt[4]{250}, \sqrt[5]{150}$.

11. Kökü en sade - normal biçime getir.

a) $\sqrt{250}$; b) $\sqrt[3]{8a^6b^5}$; c) $\frac{b}{a^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{2b^4}}, \quad a \geq 0, b > 0$.

12. Verilen işlemleri yap.

a) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{12}) \cdot \sqrt{3}$; b) $(\sqrt[3]{x^4y^2} - 3\sqrt[3]{x^6y^7}) : \sqrt[3]{x^2y^2}, \quad x, y > 0$;
c) $(\sqrt[3]{ab^2})^2 \cdot \sqrt[3]{ab}$; d) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^3}$; e) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}$; f) $\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{b^2}$.

13. Verilen ifadelerden hangileri rasyonel ifadeye dönüştürülebilir?

- a) $a + \sqrt{a}$, $a \geq 0$; b) $\frac{2}{a} + \sqrt{a^4}$, $a > 0$; c) $a - \sqrt[5]{64a^5}$.

14. Kesrin paydasını rasyonel yap.

- a) $\frac{23}{6 - \sqrt{5}}$; b) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$; c) $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, $a, b > 0$.

15. İfadeyi sadeleştir. $\left(\frac{16}{\sqrt{6} + 1} + \frac{3}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}} \right) (\sqrt{6} + 11)$.

16. Fibonacci dizisi, Binet formülü kullanılarak hesaplanabilir. Buna göre dizinin n 'inci terimi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \text{ ile gösterilir. Bu formülü kullanarak dizinin ilk dört terimini belirle.}$$

17. Reel ve sanal kısımları verilen karmaşık sayıları yaz.

- a) $\text{Re}(z) = 15$, $\text{Im}(z) = -13$; b) $\text{Re}(z) = -99$, $\text{Im}(z) = 1$; c) $\text{Re}(z) = 0$, $\text{Im}(z) = -21$.

18. z_1 ve z_2 karmaşık sayılarının toplamını ve farkını hesapla.

- a) $z_1 = 14 - 5i$, $z_2 = -12 + 6i$; b) $z_1 = 4 - 9i$, $z_2 = -11 + 9i$; c) $z_1 = 12 - 3i$, $z_2 = -12 + 8i$.

19. z_1 ve z_2 karmaşık sayılarının çarpımını ve bölümünü hesapla.

- a) $z_1 = 7 - 6i$, $z_2 = -1 + 5i$; b) $z_1 = -1 - 4i$, $z_2 = -10 + 4i$; c) $z_1 = -7 + 3i$, $z_2 = 2 - 5i$.

20. İfadelerin değerini hesapla.

- a) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{24}$; b) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \dots + \frac{1}{i^{24}}$.

21. Kuvvet alma işlemini yap ve elde edilen karmaşık sayının modülünü belirle.

- a) $(2 + i)^2$; b) $(1 - 4i)^3$; c) $(\sqrt{3} + 3i)^2$.

22. İfadeleri sadeleştir.

- a) $\frac{2 - 3i}{6 + 8i} + (2 + i)(4 - i) - (1 - i)^2$; b) $\frac{(1 + 2i)^3 + (3 + 3i) \cdot 5i}{(3 - 4i)^2}$.

23. $z_1 = 1 - 2i$ karmaşık sayısı verilmiştir. $\text{Re}(z \cdot z_1) = -4$, ve $\text{Im}\left(\frac{z}{z_1}\right) = -\frac{7}{5}$ olacak şekilde $z = x + yi$ karmaşık sayısını belirle.

24. $(\sqrt{3} - i)^6 + (\sqrt{3} + i)^6 = -128$ eşitliğin doğru olup olmadığını kontrol et.

25. $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 1 + 6i$, $z_3 = 4 - 2i$, $z_4 = -3$ ve $z_5 = -5i$ karmaşık sayılarını karmaşık düzlemde:

- a) nokta olarak,
b) konum vektörü olarak göster.

26. Rüzgâr vektörü $z = -4 + 5i$ karmaşık sayısı ile ifade edilmiştir.

- a) Sayıyı sıralı ikili olarak yaz.
b) Rüzgârın batıya mı yoksa kuzeye mi daha fazla estiğini belirle.
c) Karşılık geldiği noktanın hangi bölgede bulunduğunu belirle.

27. Bir teknik sistemin durumu $z_0 = 3 - i$ karmaşık sayısı ile ifade edilmektedir. Müdahale sonrasında durum $\Delta z = -2 + 4i$ kadar değişmektedir.

- a) Sistemin yeni durumunu belirle.
b) Değişimin hangi kısmının daha büyük olduğunu belirle: reel kısmı mı, sanal kısmı mı?

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER VE İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLERE İNDİRGENEN DENKLEMLER

İkinci dereceden denklemler, cebirdeki en önemli denklem türlerinden biridir ve birçok matematik dalının daha ileri düzeyde incelenmesi, doğrusal olmayan bağıntıların ve problemlerin modellenmesi ve çözülmesi için temel oluşturur. Bunlar, ikinci dereceden denklemlere indirgenen denklemlerle birlikte, farklı bilim alanlarında ortaya çıkan doğrusal olmayan bağıntıların anlaşılması ve analiz edilmesi ile uygulamalı bilimlerde çeşitli gerçek problemlerin modellenmesi açısından büyük önem taşır. İkinci dereceden denklemlerin ve bunların çözüm yöntemlerinin öğrenilmesi önemlidir, çünkü bu denklemler birçok matematiksel ve gerçek problemde karşınıza çıkar ve çeşitli olayların modellenmesine olanak sağlar.

İkinci dereceden denklemler birçok farklı bilim dalında kullanılır. Fizikte cisimlerin hareket yollarının hesaplanmasında, ekonomide maliyetlerin ve kârların en uygun duruma getirilmesinde, biyolojide popülasyonların büyümesinin modellenmesinde, mühendislikte ise biçim değiştirmelerin doğrusal olmadığı yapılardaki yüklerin analizinde kullanılır.

2.1 İKİNCİ DERECEDEN DENKLEM KAVRAMI. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEM TÜRLERİ. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

Hatırla!

- $ax + b = 0$ biçimindeki denklem, birinci dereceden bir bilinmeyenli doğrusal denklemlerdir. Örneğin, $3x - 1 = 0$, $5 - 2y = 0$, $4x = 6$ denklemleri birinci dereceden bir bilinmeyenli doğrusal denklemlerdir.
- İki veya daha fazla tek teriminin toplamına polinom (çok terimli) denir.
- Bir polinomun derecesi, polinomdaki terimlerin üslerinden katsayısı sıfır olmayan tek terimlerinin derecelerinden en büyüğüdür.

Etkinlik

Aşağıdaki $7x + x^2 - 2x^3 - 1$, $5x^2 - 2x - 1$, $-3x + 2$, $4x^4 - x^2$, $-3x^2 + 2$, $x^2 - x$ polinomlarından hangileri ikinci dereceden polinomlardır?

Unutma!

- $ax^2 + bx + c = 0$, biçimindeki denkleme, burada x değişken, a, b, c gerçel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere, *bir bilinmeyenli ikinci dereceden denklem* denir.
- ax^2 tek terimlisi *ikinci dereceden terim*, bx *doğrusal terim*, c ise ikinci dereceden denklemin *sabit terimidir*.
- a sayısı ikinci dereceden terimin katsayısı, b doğrusal terimin katsayısı, c ise sabit katsayıdır.

Örneğin, $x^2 = 5$, $x^2 - 16 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $2 = x^2 + 3x$ denklemleri ikinci dereceden denklemlerdir.

Fizikteki bazı formüller ikinci dereceden denklemlerdir. Örneğin, düzgün hızlanan doğrusal harekette alınan yol, t değişkenine göre ikinci dereceden bir denklemle ifade edilir, yani

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$5x^2 - 2x - 1 = 0$ denklemi, katsayıları $a = 5$, $b = -2$ ve $c = -1$ olan ikinci dereceden bir denklemdir.

Örnek 1

$(x-1)^2 = 3x - 2$ denklemi ikinci dereceden bir denklemdir. Katsayıları belirlemek için aşağıdaki işlemlerle denklemi $ax^2 + bx + c = 0$ biçimine dönüştürürüz.

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= 3x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 3x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 - 3x + 2 &= 0 \\ x^2 - 5x + 3 &= 0\end{aligned}$$

Buna göre, $a = 1$, $b = -5$ ve $c = 3$.

Soru 1

Aşağıdaki denklemlerden hangileri ikinci dereceden denklemdir? İkinci dereceden olan denklemlerin katsayılarını belirle.

- a) $x^2 - 1 = 0$; b) $2x + 3 = 0$; c) $5x^2 - 2x^2 + 1 = 0$; d) $(2x+1)^2 + 1 = 0$; e) $(2x+2)^2 = (x+3)^2$.

Unutma!

- $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ biçimindeki denkleme, *bir bilinmeyenli ikinci dereceden denklemin genel biçimi* denir.
- $a \neq 0$ koşulu sağlanmalıdır, çünkü $a = 0$, olursa denklem ikinci dereceden olmaz.

Soru 2

Denklemleri genel biçime(formuna) dönüştür:

- a) $2x(x-1) = x-3$; b) $\frac{x-3}{2} + \frac{x(x-3)}{3} = 1$; c) $(3-2x)^2 - 5 = (2-x)^2$.

Unutma!

- $a = 1$ olan ikinci dereceden denklemin **normal biçimde** olduğunu söyleriz ve genellikle $x^2 + px + q = 0$ biçiminde yazarız.
- Her ikinci dereceden denklemi normal biçime dönüştürebiliriz. Bunun için önce denklemi genel biçime(formuna) dönüştürür, ardından denklemin tamamını a katsayısına böleriz.

Örnek 2

$-2x^2 - 5x + 4 = 0$ denklemini $a = -2$ katsayısına bölersek normal biçimde bir ikinci dereceden denkleme dönüştürürüz:

$$-2x^2 - 5x + 4 = 0 \quad / : (-2)$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - 2 = 0 \quad \text{veya} \quad x^2 + 2,5x - 2 = 0$$

Burada, $p = \frac{5}{2} = 2,5$, $q = -2$.

Soru 3

Denklemi normal biçimde yaz(dönüştür).

- | | |
|--|-------------------------------|
| a) $4x^2 - 8x + 3 = 0$; | b) $(3 - 2x)^2 - 5 = x$; |
| c) $-2x(x + 3) + (x - 3)(x + 1) = 6$; | d) $(3x - 2)^2 = (x + 3)^2$. |

Unutma!

- $b \neq 0$ ve $c \neq 0$ ise (elbette $a \neq 0$), $ax^2 + bx + c = 0$ denklemine **tam ikinci dereceden denklem** denir. Buna göre, genel biçimindeki üç katsayının tümü sıfırdan farklıysa denklem tam ikinci dereceden denklemdir.
- $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$; $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$ ve $ax^2 = 0$ biçimindeki denklemlere **eksik ikinci dereceden denklemler** denir.
- $ax^2 + bx + c = 0$ denklemindeki a , b veya c katsayılarından biri herhangi bir parametreye bağlıysa bu denkleme **parametrelili ikinci dereceden denklem** (parametre içeren veya genel katsayılı ikinci dereceden denklem) denir. Parametre, değeri soruda verilen koşula bağlı olan bir sabittir.

Örnek 3

$(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 5 = 0$ parametrelili denkleminin katsayılarını belirle.

Çözüm:

$(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 5 = 0$ denklemi, katsayıları m parametresine bağlı olan parametrelili bir ikinci dereceden denklemdir. Denklemin katsayıları: $a = m - 1$, $b = -2(m + 2)$ ve $c = m - 5$.

Örnek 4

m parametresinin hangi değerleri için $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$ denklemi:

- tam ikinci dereceden denklem,
- eksik ikinci dereceden denklem olur?

Çözüm:

Denklemin katsayıları $a = 2m - 1$, $b = -3(m + 2)$ ve $c = 5$ 'tir

- $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$ denkleminin ikinci dereceden denklem olması için $a \neq 0$ olmalıdır.

$$2m - 1 \neq 0, \text{ yani } m \neq \frac{1}{2} \text{ elde ederiz.}$$

Tam ikinci dereceden denklem olması için doğrusal terimin katsayısı b ve sabit terim c de sıfırdan farklı olmalıdır. Sabit terim $c = 5 \neq 0$ dır.

$b \neq 0$ koşulundan:

$$-3(m + 2) \neq 0$$

$$m + 2 \neq 0$$

$$m \neq -2 \text{ elde ederiz.}$$

Buna göre, $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$ denklemi, m 'nin $\frac{1}{2}$ 'den ve -2 'den farklı olan tüm değerleri için tam ikinci dereceden denklem olur.

- Bu denklemde sabit katsayı sıfırdan farklı olduğundan, denklem yalnızca doğrusal terimin katsayısı b sıfıra eşit olduğunda eksik ikinci dereceden denklem olur, yani

$$-3(m + 2) = 0,$$

$$m + 2 = 0$$

$$m = -2$$

Buna göre, $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$ denklemi $m = -2$ için eksik ikinci dereceden denklem olur.

Soru 4

k 'nin hangi değerleri için $(k + 2)x^2 - 3x - k + 1 = 0$ denklemi:

- tam ikinci dereceden denklem,
- eksik ikinci dereceden denklem olur?

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

Hatırla!

- $x = 2$ için $3x - 6 = 0$ denklemi doğru bir sayısal eşitliğe dönüşür. Yani, $x=2$ değeri için $3x-6=0$ denklemi sağlanır.
- $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Polinomları çarpanlarına ayırma:

$$4x^2 + 2x = 2x(2x + 1)$$

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$
- Negatif bir sayının çift dereceli kökü karmaşık sayıdır. Örneğin, $\sqrt{-9} = 3i$; $\sqrt[4]{-16} = 2i$

Etkinlik

$x \in \{-2, -1, 0, 1, 3\}$ değerlerinden hangileri için $x^2 - x - 6 = 0$ denklemi doğru bir sayısal eşitliğe dönüşür (denklemini sağlar)?

Unutma!

İkinci dereceden denklemi sağlayan (doğru bir sayısal eşitliğe dönüştüren) gerçek sayılara denklemin **kökü** veya **çözüm**, bu köklerin oluşturduğu kümeye ise denklemin çözüm kümesi denir.

Örnek 5

$x = 4$ 'ün $2x^2 - 6x - 8 = 0$ denkleminin çözümü olup olmadığını kontrol et.

Çözüm:

$x = 4$ 'ün $2x^2 - 6x - 8 = 0$ denkleminin çözümü olup olmadığını kontrol etmek için bu değeri denklemde yerine koyarız. Buna göre,

$$2 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 8 = 0$$

$$2 \cdot 16 - 24 - 8 = 0$$

$$32 - 32 = 0$$

$$0 = 0$$

$x = 4$ değeri yerine yazıldığında denklemin doğru bir sayısal eşitliğe dönüştüğünü görürüz.

Buna göre, $x = 4$, $2x^2 - 6x - 8 = 0$ denkleminin çözümüdür.

Örnek 6

k parametresinin hangi değeri için 2 sayısı $(k + 2)x^2 - 3x - k + 1 = 0$ denkleminin çözümüdür?

Çözüm:Denklemden x yerine 2 yazarsak

$$2^2 \cdot (k+2) - 3 \cdot 2 - k + 1 = 0$$

$$4(k+2) - 6 - k + 1 = 0$$

$$3k + 3 = 0$$

$$k = -1 \text{ elde ederiz.}$$

Buna göre, $k = -1$ için denklem $x^2 - 3x + 2 = 0$ olur ve $x = 2$ bu ikinci dereceden denklemin bir köküdür veya çözümüdür.**Soru 5** $(2m-1)y^2 - 3(m+2)y + 5 = 0$, $m \neq \frac{1}{2}$ denklemi verilmiştir. $y = 1$ 'in denklemin çözümü olması için m parametresinin değerini belirle.**Alıştırma Soruları!**

- Verilen denklemlerden hangileri ikinci dereceden denklemdir?
 - $7x^2 - 3 = 3x$;
 - $0 \cdot x^2 + 2x - 3 = 0$;
 - $(x^2 + 5)^2 - 1 = 0$;
 - $\frac{1}{2}x^2 = 0$.
- Aşağıdaki denklemlerin a , b ve c katsayılarını belirle:
 - $8x^2 - 3x + 9 = 0$;
 - $-9x = 8x^2$;
 - $\sqrt{3}x^2 - 5 = 8x$.
- Aşağıdaki denklemleri genel biçime dönüştür:
 - $2(x+5)(x-2) = 3$;
 - $(4x+3)(2x-1) = (x+1)(x+3)$;
 - $\frac{3x-4}{2} + \frac{(x-1)(x+2)}{3} = 1$;
 - $(2x-1)(x+3) = \frac{x-2}{4}$.
- Aşağıdaki denklemleri normal biçimde yaz:
 - $-2x^2 - 4x + 16 = 0$;
 - $3x^2 = 9x$;
 - $3(x+2)^2 - 24 = 0$;
 - $\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3 = 0$.
- Aşağıdaki ikinci dereceden denklemlerden hangileri tam, hangileri eksik ikinci dereceden denklemdir?
 - $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$;
 - $(x+5)(x+2) = 10$;
 - $\sqrt{2}x^2 = 8x$.
- m 'nin hangi değeri için verilen denklem ikinci dereceden denklem olur?
 - $(3m-1)x + (2m+1)x^2 = 5m$;
 - $(m+1)x^2 + (2m+3) = 0$
 - $(m-3)x^2 + (m-3)x + (m-3) = 0$.
- k parametresinin hangi değerleri $(k-3)t^2 - (2k+1)t = 2k-1$ denklemi:
 - ikinci dereceden denklem;
 - tam ikinci dereceden denklem;
 - $at^2 + c = 0$ biçiminde eksik ikinci dereceden denklem;
 - $at^2 + bt = 0$ biçiminde eksik ikinci dereceden denklem olur?
- $2x^2 - 4x + 1 = 0$ denklemi verilmiştir. $0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ sayılarından herhangi birinin denklemin çözümü olup olmadığını kontrol et.
- k parametresinin hangi değeri için $(k+2)y^2 + (2k-3)y - 5 = 0$ denkleminin çözümü vardır:
 - $y = -1$
 - $y = \frac{1}{2}$?

2.2 EKSİK İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Unutma!

- Bir denklemi çözmek, bütün çözümlerini yani onun çözüm kümesini bulmak demektir.
- İki veya daha fazla gerçel sayının çarpımı sıfıra eşitse bu sayılardan en az biri sıfırdır.

Etkinlik

$(3x + 6)(x - 1) = 0$ denklemini çöz.

Verilen $3x + 6$ ve $x - 1$ denkleminin çözüm kümesini bulmak için iki gerçel sayının çarpımının sıfır olması durumunda çarpanlardan en az birinin sıfıra eşit olması özelliğini kullanırız. Buna göre denklem, $3x + 6 = 0$ veya $x - 1 = 0$, olduğunda sağlanır. Buradan $x = -2$ veya $x = 1$, değerleri elde edilir. O hâlde denklemin kökleri $x_1 = -2$ ve $x_2 = 1$ çözüm kümesi ise $\mathbb{C} = \{-2, 1\}$ olarak bulunur.

Soru 1

Aşağıdaki denklemlerin çözümlerini belirle:

- a) $(x + 2)(3x - 5) = 0$; b) $2(6x - 3)(2x - 5) = 0$;
c) $(x + 3)(2x - 1)(5x - 8) = 0$; d) $(x + 3)(x - 3)(2x - 5)(4x - 10) = 0$.

Örnek 1

Eksik ikinci dereceden denklemi çöz.

- a) $ax^2 + bx = 0$; b) $ax^2 = 0$.

Çözüm:

- a) $ax^2 + bx = 0$ denklemini $x(ax + b) = 0$ biçiminde yazabiliriz ve bu denklemin çözümlerinin $x_1 = 0$ ve $x_2 = -\frac{b}{a}$ olduğu açıktır.
- b) $ax^2 = 0$ denklemi, $x^2 = 0$, olduğunda doğru bir sayısal eşitlik olur. Buna göre bu denklem için $x_1 = x_2 = 0$.

Unutma!

İkinci dereceden denklem, x , değişkeninin yalnızca bir değeri için sağlanıyorsa, örneğin $x = d$, için doğru bir sayısal eşitlik oluyorsa, yani $x_1 = x_2 = d$, ise $x_1 = x_2 = d$ 'nin ikinci dereceden denklemin **çift katlı (çakışık) kökü** vardır deriz.

Örnek 2

Denklemleri çöz:

a) $3x^2 + 8x = 0$;

b) $(2x - 1)^2 = 1$;

c) $(x - 2)(2x - 3) = 6$.

Çözüm:

a) $3x^2 + 8x = 0$

$x(3x + 8) = 0$

$x = 0$ veya $3x + 8 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3}$

b) $4x^2 - 4x + 1 = 1$

$x(4x - 4) = 0$

$x = 0$ veya $4x - 4 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 1$

c) $2x^2 - 3x - 4x + 6 = 6$

$x(2x - 7) = 0$

$x = 0$ veya $2x - 7 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{2}$

Unutma!

- $ax^2 + bx = 0, a \neq 0, b \neq 0$ denkleminin çözümleri (kökleri) $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$ dır.
- $ax^2 = 0, a \neq 0$ denkleminin çözümleri (kökleri) $x_1 = x_2 = 0$ dır.

Soru 2

Aşağıdaki denklemlerin çözümlerini belirle:

a) $(x + 3)(x - 5) = -15$;

b) $(x - 1)(3x + 2) = x - 2$;

c) $\frac{x(x-2)}{2} - \frac{1-4x}{3} = \frac{x-1}{3}$.

Örnek 3

 $ax^2 + c = 0, a \neq 0, c \neq 0$ eksik ikinci dereceden denklemini çöz.

Çözüm:

$ax^2 + c = 0$ denklemini $ax^2 = -c$, yani $x^2 = -\frac{c}{a}$, $\left(|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ biçiminde yazabiliriz. Şimdi denklemin çözümleri için iki farklı durum vardır:

1. Eğer $-\frac{c}{a} > 0$ ise (a ve c farklı işaretli), denklemin birbirinin tersi olan iki farklı gerçekte sayı

$$\text{çözümü vardır: } x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \text{ yani } x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

2. Eğer $-\frac{c}{a} < 0$ ise (a ve c aynı işaretli), denklemin çözümleri gerçekte sayı değildir, yani denklemin

$$\text{çözümleri } x_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}} \text{ karmaşık sayılardır.}$$

Unutma!

$ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$ eksik ikinci dereceden denklemin çözümleri:

1. Eğer $-\frac{c}{a} > 0$ ise (a ve c farklı işaretli), o zaman

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \text{ yani } x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

2. Eğer $-\frac{c}{a} < 0$ ise (a ve c aynı işaretli), o zaman

$$x_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Örnek 4

Denklemleri çöz:

a) $6x^2 - 30 = 0$;

b) $3x^2 + 12 = 0$;

c) $(x+3)^2 - 3 - 5x = x$.

Çözüm:

a) $6x^2 - 30 = 0$

$$6x^2 = 30$$

$$x^2 = 5$$

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_2 = -\sqrt{5}$$

b) $3x^2 + 12 = 0$

$$3x^2 = -12$$

$$x^2 = -4$$

$$x_1 = 2i, \quad x_2 = -2i$$

c) $(x+3)^2 - 3 - 5x = x$

$$x^2 + 6x + 9 - 3 - 5x = x$$

$$x^2 = -6$$

$$x_1 = \sqrt{6}i, \quad x_2 = -\sqrt{6}i.$$

Soru 3

Denklemlerin çözümlerini (çözüm kümelerini) belirle:

a) $2x^2 - 18 = 0$;

b) $(x+2)(x-1) = x$;

c) $(2x-1)^2 = 2 - 4x$.

Örnek 5

m parametresinin hangi değerleri için $(3m-6)x^2 + m + 4 = 0$ denkleminin gerçek çözümleri vardır?

Çözüm:

$$(3m-6)x^2 + m + 4 = 0$$

$$(3m-6)x^2 = -m-4$$

$$x^2 = \frac{-m-4}{3m-6}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{-m-4}{3m-6}}$$

Gerçek çözümlerinin olması için $\frac{-m-4}{3m-6} \geq 0$ olmalıdır, yani $3m-6$ ile $-m-4$ aynı işaretli olmalıdır.

Buradan m değerlerini belirlemek için aşağıdaki eşitsizlik sistemlerini elde ederiz:

$$\begin{cases} -m-4 \geq 0 \\ 3m-6 > 0 \end{cases} \text{ veya } \begin{cases} -m-4 \leq 0 \\ 3m-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m > 2 \end{cases} \text{ veya } \begin{cases} m \geq -4 \\ m < 2 \end{cases}.$$

Birinci sistemin çözümü yoktur, ikinci sistemden ise $[-4, 2)$ aralığını elde ederiz. Buna göre, $m \in [-4, 2)$ olduğunda denklemin gerçek kökleri vardır.

Soru 4

k parametresinin hangi değerleri için $(2k-4)x^2 - k + 6 = 0$ denkleminin gerçek çözümleri vardır?

Alıştırma Soruları!

Denklemin çözümlerini, çözüm kümelerini belirle (1-7):

1. a) $(2x+5)(4-3x)=0$; b) $\left(2-\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{5}{4}x-1\right)=0$.
2. a) $x(x+4)=x(2x-5)$; b) $(x-2)^2-4=0$.
3. a) $8x^2+3x=0$; b) $9x^2-\frac{5}{2}x=0$.
4. a) $(3-\sqrt{3})x^2=0$; b) $-\frac{5\sqrt{5}}{2}x^2=0$.
5. a) $3x^2-27=0$; b) $\frac{1}{3}x^2=\frac{3}{4}$.
6. a) $36+x^2=0$; b) $-\frac{5}{2}x^2-4=0$.
7. a) $x(x-3)-x+16=-2x(2-x)$; b) $\frac{3x^2-5x}{2}-\frac{2(x^2-3)}{3}=\frac{5x^2+8}{4}$.
8. k parametresinin hangi değerleri için $(k+1)x^2+k-3=0$ denkleminin gerçek çözümleri vardır?

2.3 TAM İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Etkinlik

Polinomları çarpanlarına ayır:

a) $x^2 + x - 12$; b) $x^2 - 6x + 8$.

Çözüm:

a) $x^2 + x - 12 = x^2 + 4x - 3x - 12 = x(x + 4) - 3(x + 4) = (x + 4)(x - 3)$.

b) Önce 9 eklenip çıkarılarak tam kareye tamamlanır ve böylece aşağıdaki sonuç elde edilir
 $x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x - 4)(x - 2)$.

Örnek 1

$x^2 + 5x + 6 = 0$ denklemini iki yöntemle çöz:

a) çarpanlara ayırarak; b) tam kareye tamamlayarak.

Çözüm:

a) $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) + 2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$.

$(x + 3)(x + 2)$ çarpımı, $x + 3 = 0$ veya $x + 2 = 0$ olduğunda sıfıra eşit olur. Buna göre denklemin çözümleri $x_1 = -3$ ve $x_2 = -2$.

b) $5x$ doğrusal terimini $2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x$ biçiminde yazabilir ve $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ ekleyip çıkararak tam kareye tamamlayabiliriz.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0.$$

a) şıkkındaki gibi, çözümlerin $x_1 = -3$ ve $x_2 = -2$ olduğu sonucuna varırız.

Soru 1

Denklemleri iki yöntemle çöz:

1) çarpanlara ayırarak 2) tam kareye tamamlayarak.

a) $x^2 - 8x = 0$; b) $x^2 + 7x = 0$; c) $x^2 - ax = 0$; d) $x^2 + \frac{b}{a}x = 0, a \neq 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, tam ikinci dereceden denkleminin çözümlerini belirlemek için önce denklemini a 'ya böler ve $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, yani $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ elde ederiz. Şimdi sol taraftaki ifadeyi tam kareye tamamlamak için eşitliğin her iki tarafına $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ekleriz. Böylece şu denklemini elde ederiz:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}, \text{ veya } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Eşitliğin her iki tarafının karekökünü alarak $\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, yani $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ elde ederiz. Böylece $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümleri (kökleri) $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, olup, bunları birlikte $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ formülüyle yazabiliriz.

Unutma!

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ denkleminin çözümlerini şu formülle belirleriz: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Örnek 2

İkinci dereceden denklemleri çöz:

- a) $x^2 - 2x - 8 = 0$; b) $2x^2 = 4x + 1$.

Çözüm:

- a) $a = 1$, $b = -2$, $c = -8$ katsayılarının değerlerini formülde yerine yazalım,

$$x_{1/2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2},$$

yani $x_1 = 4$ ve $x_2 = -2$.

- b) Önce denklemini genel biçimde yazalım: $2x^2 - 4x - 1 = 0$. Sonra $a = 2$, $b = -4$, $c = -1$ katsayılarının değerlerini formülde yerine yazalım ve

$$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 6}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

elde ederiz. Denklemin çözümleri $x_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$ ve $x_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$ dir.

Unutma!

İkinci dereceden denklemlerin genel çözüm formülü, eksik ikinci dereceden denklemleri çözmek için de kullanılabilir.

Örnek 3

İkinci dereceden denklem çözme formülünü kullanarak denklemleri çöz:

a) $9x^2 = 0$; b) $3x^2 - 12x = 0$; c) $5x^2 - 10 = 0$.

Çözüm:

a) $a = 9, b = 0$, na $x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0+0}}{2 \cdot 9} = 0$, yani $x_1 = x_2 = 0$.

b) $a = 3, b = -12, c = 0$, $x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-0}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 12}{6}$, $x_1 = \frac{12+12}{6} = 4$, $x_2 = \frac{12-12}{6} = 0$.

c) $a = 5, b = 0, c = -10$, $x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0+200}}{2 \cdot 5} = \frac{\pm \sqrt{2 \cdot 100}}{10} = \frac{\pm 10\sqrt{2}}{10} = \pm \sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

Formülün kullanılmasıyla şunlara dikkat et:

- Eğer $b = c = 0$ ise, $ax^2 = 0$ eksik denkleminin çözümleri $x_1 = x_2 = 0$ 'dir.
- Eğer $b = 0$ ise, $ax^2 + c = 0$ eksik denkleminin çözümleri $x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ 'dir.
- Eğer $c = 0$ ise, $ax^2 + bx = 0$ eksik denkleminin çözümleri $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$ 'dir.

Soru 2

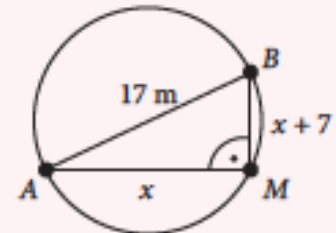
Denklemin çözümlerini belirle:

a) $4x^2 - 4x - 24 = 0$; b) $5x^2 + 2x - 1 = 0$.

Örnek 4

Çapı 17 metre olan dairesel bir parkta, çapın karşılıklı uçlarında bulunan A ve B adlı iki kapı vardır. Parkın kenarına, direğin A ve B kapılarına olan uzaklıkları arasındaki fark 7 metre olacak biçimde bir direk yerleştirilmelidir.

- Böyle bir direk yerleştirmek mümkün müdür?
- Mümkünse, direk A kapısından hangi uzaklıkta ve B kapısından hangi uzaklıkta bulunacaktır?



Çözüm:

Daha kolay çözmek için bir çizim yapacağız. AB , uç noktalarında iki kapının bulunduğu dairesel parkın çapı olsun. Aranan direğin konumunu M ile gösterelim. AM uzaklığını x ile gösterelim.

Direğin A ve B kapılarına olan uzaklıkları arasındaki fark 7 metredir. Buna göre: $\overline{AM} - \overline{BM} = 7$ m olur. Buradan $\overline{BM} = x + 7$ elde ederiz.

AMB üçgeni, yarım çember içine yerleştirilmiş bir üçgendir (bir kenarı çemberin çapıdır, karşısındaki köşe ise çemberin üzerindedir). Thales teoremine göre bu üçgen dik üçgendir. Pisagor teoremini uygulayarak şunu elde ederiz:

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 17^2$$

$$x^2 + (x+7)^2 = 289$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 - 289 = 0$$

$$2x^2 + 14x - 240 = 0 : 2$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-120)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-7 \pm 23}{2}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 23}{2} = 8, x_2 = \frac{-7 - 23}{2} = -15$$

8 ve -15 çözümlerini elde ettik.

Denklemin çözümü iki nokta arasındaki uzaklığı vermesi gerektiğinden, bu değer negatif sayı olamaz, yani -15 sayısı çözüm olmayacaktır.

Çözüm 8 sayıdır.

Dolayısıyla direk, A kapısından 8 m ve B kapısından $8 + 7 = 15$ m uzaklıkta yerleştirilecektir.

İkinci Dereceden Denklemin Diskriminantı

Etkinlik

a, b ve c ; $x^2 - 4x + 3 = 0$ denkleminin katsayıları olduğuna göre, $b^2 - 4ac$ ifadesinin değerini belirle.

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$) ikinci dereceden denkleminin çözümlerini

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ formülüyle belirlediğimizi gördük.}$$

Unutma!

Kök içindeki $b^2 - 4ac$ ifadesi D ile gösterilir, yani $D = b^2 - 4ac$ 'tir ve ikinci dereceden denklemin **diskriminantı** olarak adlandırılır.

Diskriminant gösterimini kullanarak çözümleri belirleme formülünü $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ biçiminde yazabiliriz.

1. İkinci dereceden denklemin a, b, c katsayıları gerçekte sayılar ise çözümleri belirlemek için

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ formülünü kullan.}$$

2. a, b veya c katsayılarından biri parametre ya da ifade ise önce $D = b^2 - 4ac$ diskriminantını belirlemek,

$$\text{ardından } x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ formülünü kullanmak daha kolaydır.}$$

Örnek 7

$x^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{3})x + \sqrt{21} = 0$ denklemini önce diskriminantı belirleyerek çözeceğiz.

$$D = (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{21} = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{21} = (\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{21} + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2.$$

Daha sonra elde edilen diskriminantı $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ formülünde yerine yazarsak ve denklemin çözümleri

$$\text{için } x_{1/2} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} \pm (\sqrt{7} - \sqrt{3})}{2} \text{ elde ederiz, yani } x_1 = \sqrt{7}, x_2 = \sqrt{3}.$$

Soru 3

Denklemleri çöz:

a) $x^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{5})x + \sqrt{35} = 0;$ b) $x^2 + 2x - 7 = 2x - 1.$

Alıştırma Soruları

1. $3x^2 + 5x + m - 4 = 0$ denkleminde, $x = 0$ denklemin çözümlerinden biri ise m parametresini belirle. Elde edilen m değeri için denklemin diğer çözümünü belirle.

Denklemlerin çözümlerini belirle (2-7):

2. a) $4x^2 - 4x - 24 = 0;$ b) $5x^2 + 2x - 1 = 0.$
 3. a) $3(2 - y) + y(y + 3) = 5y;$ b) $6t^2 - 7t + 2 = 0.$
 4. a) $5x^2 + 2x = 0;$ b) $6x^2 - 25 = 0;$ c) $16x^2 + 1 = 0.$
 5. a) $1 + \frac{x-3}{2} = \frac{x(x-2)}{4};$ b) $\frac{x(x+4)}{2} - \frac{7x}{4} = 3 - \frac{5x-4}{6}.$
 6. a) $x^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{3})x + \sqrt{18} = 0;$ b) $x^2 - 4\sqrt{3}x - 1 = 0.$
 7. a) $x^2 - 5kx + 6k^2 = 0;$ b) $mx^2 - (m + 1)x = 1.$
 8. x 'in hangi değerleri için $2x^2 + x - 8$ üç terimli $7x + 1$ iki terimlisine eşittir?
 9. Ardışık iki çift doğal sayının çarpımı 224'tür. Bu sayılar hangileridir?
 10. Bir dikdörtgenin uzunluğu, genişliğinden 6 cm fazladır. Alanı 112 cm^2 olan dikdörtgenin kenarlarını belirle.

2.4 İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

İkinci Dereceden Denklemın Diskriminantı

Hatırla!

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ formülündeki kök içi ifade $b^2 - 4ac$, D ile gösterilir, yani $D = b^2 - 4ac$ 'tir ve ikinci dereceden denklemin diskriminantı olarak adlandırılır.

Örnek 1

Aşağıdaki denklemler için önce diskriminantı, ardından çözümleri belirle:

- a) $x^2 + 2x - 15 = 0$;
- b) $x^2 + 2x + 1 = 0$;
- c) $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Çözüm:

$$\text{a) } D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0, \quad x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}, \quad x_1 = 3, x_2 = -5.$$

Buna göre, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq x_2$ 'dir.

$$\text{b) } D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0, \quad x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}, \quad x_1 = -1, x_2 = -1.$$

Buna göre, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 = x_2$ 'dir.

$$\text{c) } D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0. \text{ Denklemin gerçık çözümü yoktur.}$$

Unutma!

- $D > 0$ ise ikinci dereceden denklemin çözümleri gerçık ve birbirinden farklıdır.
- $D = 0$ ise ikinci dereceden denklemin çözümleri gerçık ve birbirine eşittir, yani denklemin çift katlı kökü vardır.
Buna göre, $D \geq 0$ ise ikinci dereceden denklemin çözümleri gerçık sayılardır.
- $D < 0$ ise ikinci dereceden denklemin gerçık çözümü (gerçık kökü) yoktur.

Örnek 2

Çözmeden, denklemlerin çözümlerinin türünü belirle:

a) $-2x^2 + x + 10 = 0$; b) $-x^2 + 3x - 10 = 0$; c) $4x^2 + 12x + 9 = 0$.

Çözüm:

- a) $D = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 10 = 81 > 0$. Buna göre, denklemin birbirinden farklı iki gerçektek çözümlü vardır.
 b) $D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10) = -31 < 0$. Buna göre, denklemin gerçektek çözümlü yoktur.
 c) $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$. Buna göre, denklemin birbirine eşit iki gerçektek çözümlü vardır.

Soru 1

Çözmeden, aşağıdaki denklemlerin çözümlerinin türünü belirle:

a) $x^2 - 5x + 7 = 0$; b) $-x^2 + x + 4 = 0$.

İkinci dereceden denklemlerde, diskriminant yardımıyla parametrenin hangi değeri için denklemin birbirine eşit (çakışık/çift katlı) iki gerçektek çözümlü (kökü), birbirinden farklı iki gerçektek çözümlü olacağını ya da gerçektek sayılar kümesinde çözümlü (gerçektek kökü) olmayacağını belirleyebiliriz.

Örnek 3

m parametresinin değeri bağli olarak, aşağıdaki denklemlerin çözümlerinin türünü belirle:

a) $4x^2 - 2x + m = 0$; b) $(m - 1)x^2 + 2x + 4 = 0$.

Çözüm:

a) $D = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot m = 4 - 16m$.

- Denklem, $D = 4 - 16m > 0$ ise birbirinden farklı iki gerçektek çözümlü sahip olur. Yani bu, m 'nin $m < \frac{1}{4}$, eşitsizliğini sağliyan tüm değeri için geçerlidir; başka bir deyişle $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$.
- Denklem $D = 4 - 16m = 0$ ise birbirine eşit gerçektek çözümlü sahip olur. Yani $m = \frac{1}{4}$ olduğunda.
- Denklem, $D = 4 - 16m < 0$, ise gerçektek çözümlü sahip olmaz. Yani bu, m 'nin $m > \frac{1}{4}$, eşitsizliğini sağliyan tüm değeri için geçerlidir; başka bir deyişle $m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

b) $D = 2^2 - 4 \cdot (m - 1) \cdot 4 = 20 - 16m$.

- Denklem, $D = 20 - 16m > 0 \Rightarrow m < \frac{5}{4}$ ise birbirinden farklı iki gerçektek çözümlü sahip olur. Yani $m \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$ olan tüm değeri için.
- Denklem, $D = 20 - 16m = 0$ ise birbirine eşit gerçektek çözümlü sahip olur. Yani $m = \frac{5}{4}$ olduğunda.
- Denklem, $D = 20 - 16m < 0 \Rightarrow m > \frac{5}{4}$ ise gerçektek çözümlü sahip olmaz. Yani $m \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$ olan tüm değeri için.

İkinci Dereceden Denklemlerin Uygulanması

Bilim ve tekniğin farklı alanlarındaki çok sayıda problemin çözümü, ikinci dereceden denklemlerin çözümüne indirgenir. Aşağıdaki örneklerde, bazı problemlerin ikinci dereceden denklemler kullanılarak nasıl çözüldüğünü göstereceğiz.

Örnek 4

Hangi çokgende bütün köşegenlerin sayısı, kenar sayısının yedi katıdır?

Çözüm:

n kenarlı bir çokgendeki bütün köşegenlerin sayısı $\frac{n(n-3)}{2}$ dir. Köşegenlerin sayısı $7n$ 'ye eşit olacak biçimde n 'yi belirlememiz gerekir, yani

$$\frac{n(n-3)}{2} = 7n \Leftrightarrow n^2 - 17n = 0 \Leftrightarrow n(n-17) = 0.$$

Bu denklemin çözümleri $n_1 = 0$ ve $n_2 = 17$ 'dir. n , çokgenin kenar sayısı olduğundan sıfırdan büyük olmalıdır. Buna göre, aranan çokgen 17 kenarlıdır.

Örnek 5

Çarpımları 1173, toplamı 74 olan iki sayıyı bul.

Çözüm:

Toplanan sayılardan biri x olsun. Bu durumda diğer sayı $74 - x$ olur. İki sayının çarpımı 1173 olmalıdır. Buna göre x 'in değerini

$$x(74 - x) = 1173,$$

yani $x^2 - 74x + 1173 = 0$ denklemini çözerek belirleyeceğiz. Elde edilen ikinci dereceden denklemin çözümleri 23 ve 51'dir. Buna göre aranan sayılar 23 ve 51'dir.

Örnek 6

Yovan'ın yaşı kaçtır? Eğer Yovan'ın üç yıl sonraki yaşı, üç yıl önceki yaşının karesine eşit olacaksa bugün kaç yaşındadır?

Çözüm:

x , Yovan'ın şimdiki yaşı olsun. Bu durumda Yovan üç yıl önce $x - 3$ yaşındaydı ve üç yıl sonra $x + 3$ yaşında olacaktır. Soruda verilen koşula göre

$$x + 3 = (x - 3)^2,$$

yani $x^2 - 7x + 6 = 0$ denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümleri 1 ve 6'dır. Ancak Yovan şimdi 1 yaşında olsaydı, üç yıl önce -2 yaşında olurdu ve bunun bir anlamı yoktur. Buna göre Yovan 6 yaşındadır.

Örnek 7

Tabanının çevresi 60 m ve taban alanı 150 m^2 olacak biçimde dikdörtgen tabanlı bir bina yapılabilir mi?

Çözüm:

Tabanın kenarları a ve b olsun (metre cinsinden). Bu durumda çevre $2(a + b)$, alan ise ab olur. Binanın taban çevresi $2(a + b) = 60$ olmalıdır. Buradan $b = 30 - a$, elde ederiz. Taban alanı koşulundan ise

$$a(30 - a) = 150,$$

yani $a^2 - 30a + 150 = 0$ denklemini elde ederiz. Binanın yapılabilmesi için bu denklemin gerçek çözümlerinin olması gerekir. Denklemin diskriminantı $D = 30^2 - 4 \cdot 1 \cdot 150 = 300 > 0$ 'dır. Bu da gerçek çözümlerinin olduğunu, yani böyle bir tabana sahip bir binanın yapılabileceğini gösterir. Denklem çözülerek taban kenarlarının uzunlukları da belirlenebilir. İkinci dereceden denklemin çözümlerini belirleme formülü kullanılarak taban kenarlarının $a = 5(3 - \sqrt{3}) \approx 6,34 \text{ m}$, $b = 5(3 + \sqrt{3}) \approx 23,66 \text{ m}$ olması gerektiği elde edilir

Alıştırma Soruları

- Denklemleri çözmeden, çözümlerinin türünü belirle:
 - $x^2 + x - 12 = 0$;
 - $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
 - $x^2 - 6x + 25 = 0$.
- Denklemin çift katlı köke sahip olması için m parametresini belirle:
 - $x^2 + 3x + m = 0$;
 - $3x^2 - 2mx + 3 = 0$;
 - $x^2 + 2(3 - m)x + 2k - 3 = 0$.
- m parametresinin hangi değerleri için denklemin gerçek ve farklı kökleri vardır?
 - $x^2 - 2x + 3m = 0$;
 - $2x^2 - 8x + m + 6 = 0$;
 - $mx^2 - (2m + 3)x + m - 2 = 0$.
- k parametresinin hangi değerleri için denklemin gerçek kökleri yoktur?
 - $x^2 + 2x + k = 0$;
 - $kx^2 + (2k - 3)x + k - 1 = 0$;
 - $(k - 2)x^2 - 4x - 1 = 0$.
- m parametresinin hangi değerleri için $x^2 - 2ax + m^2 - m + 3 = 0$ denkleminin gerçek çözümleri vardır?
- a parametresinin hangi değeri için üç terimli ifade tam kare olur?
 - $ax^2 + 6x + 1$;
 - $ax^2 - 8x + 9a$.
- m parametresine bağlı olarak aşağıdaki ikinci dereceden denklemlerin çözümlerinin türünü belirle:
 - $x^2 - 2x + m - 3 = 0$;
 - $3mx^2 + 8x - 5 = 0$;
 - $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 3 = 0$.
- Çarpımları 3710, toplamaları 123 olan iki sayıyı bulunuz.
- Hangi çokgende toplam 170 köşegen çizilebilir?
10. Bir üçgenin kenar uzunlukları 5 cm, 9 cm ve 13 cm'dir. Üç kenarın her biri aynı uzunluk kadar uzatılıyor. Yeni elde edilen üçgenin dik üçgen olması için bu uzunluk kaç olmalıdır?

2.5 VİETA FORMÜLLERİ

Hatırla!

- $a = 1$ olan $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denkleminin normal biçimde olduğunu söyleriz ve genellikle $x^2 + px + q = 0$ biçiminde yazarız.
- $x^2 + 7x - 9 = 0$ denkleminin p ve q değerlerini belirle.

Örnek 1

$x^2 - 4x - 21 = 0$ denkleminin çözümlerinin toplamını ve çarpımını belirle.

Çözüm:

Denklem normal biçimdedir ve katsayıları $p = -4$, $q = -21$ 'dir. Denklemin çözümleri için

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = 2 \pm 5 \text{ elde ederiz, yani } x_1 = 7, x_2 = -3. \text{ 'tür.}$$

Çözümlerin toplamı $x_1 + x_2 = 7 - 3 = 4$, çarpımı ise $x_1 \cdot x_2 = 7 \cdot (-3) = -21$ 'dir.

Çözümlerin toplamı $x_1 + x_2 = 4$ 'ün $-p$ 'ye, çarpımı $x_1 \cdot x_2 = -21$ 'in ise q 'ya eşit olduğuna dikkat edelim.

Soru 1

$3x^2 - 7x + 2 = 0$ ikinci dereceden denklemini normal biçime dönüştür, ardından p ve q katsayılarını, çözümlerinin toplamını ve çarpımını belirle.

Önceki örneklerde gördüğümüz, ikinci dereceden denklemin çözümleri ile denklemin normal biçimindeki katsayılar arasındaki ilişkinin her ikinci dereceden denklem için geçerli olduğunu göstereceğiz

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \text{ ikinci dereceden denkleminin çözümlerinin } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olduğunu biliyoruz. Çözümlerin toplamı ve çarpımı için aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{(2a)^2} = \frac{c}{a}$$

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ denklemini normal biçimde yazarsak $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ olur. Buna göre çözümlerin toplamı $-p$ 'ye, çözümlerin çarpımı ise denklemin normal biçimindeki q katsayısına eşittir.

Unutma!

- x_1 ve x_2 , $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ikinci dereceden denkleminin çözümleri ise.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \text{ formülleri geçerlidir.}$$

- Bu formüllere **Vieta formülleri** denir.
- Normal biçimdeki $x^2 + px + q = 0$ denklemi için Vieta formülleri:
 $x_1 + x_2 = -p$ ve $x_1 \cdot x_2 = q$ 'dur.

Örnek 2

Denklemi çözmeden, çözümlerinin toplamını ve çarpımını belirle.

a) $4x^2 - 3x + 9 = 0$; b) $x^2 - (m-1)x + 2m + 5 = 0$.

Çözüm:

- a) Denklem, $a = 4$, $b = -3$ ve $c = 9$ katsayılarıyla genel biçimdedir. Vieta formüllerine göre, x_1 ve x_2 denklemin çözümleri ise

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad \text{ve} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{9}{4} \text{ tür.}$$

- b) Denklem, $p = -(m-1)$, $q = 2m + 5$ katsayılarıyla normal biçimdedir. Vieta formüllerinden

$$x_1 + x_2 = -p = m - 1 \quad \text{ve} \quad x_1 \cdot x_2 = q = 2m + 5.$$

olduğu sonucuna varılır.

Şimdi, x_1 ve x_2 sayıları için $x_1 + x_2 = -p$ ve $x_1 \cdot x_2 = q$ eşitlikleri geçerliyse x_1 ve x_2 'nin $x^2 + px + q = 0$ denkleminin çözümleri olduğunu göstereceğiz.

$x_1 + x_2 = -p$ eşitliğinden $p = -(x_1 + x_2)$, olduğu sonucuna varılır. Buna göre denklem $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ olur. Bu denklemde $x = x_1$ alırsak, $x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_1^2 - x_1x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0$, yani $0 = 0$ elde ederiz. Buna göre, $x = x_1$ için denklem doğru bir sayısal eşitliğe dönüşür, yani $x = x_1$ denklemin bir çözümüdür. Benzer biçimde, $x = x_2$, için $x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 - x_2^2 - x_1x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0$, yani $0 = 0$ elde ederiz. Bu da $x = x_2$ 'nin de denklemin bir çözümü olduğu anlamına gelir.

Bununla ve Vieta formüllerinin önceki elde edilişyle aşağıdaki önermeyi (teoremi) kanıtlamış olduk.

Unutma!

x_1 ve x_2 sayıları, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ikinci dereceden denkleminin kökleridir ancak ve ancak

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{ve} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

olduğunda.

Denklem $x^2 + px + q = 0$ normal biçiminde ise $x_1 + x_2 = -p$ ve $x_1 \cdot x_2 = q$ 'dur.

Örnek 3

Vieta formüllerini kullanarak

- a) 2 ve -3'ün $x^2 + 7x - 12 = 0$ denkleminin;
 b) $1+\sqrt{2}$ ve $1-\sqrt{2}$ 'nin $x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin çözümleri olup olmadığını kontrol et.

Çözüm:

Verilen sayı çiftinin denklemin çözümleri olması için sayıların Vieta formüllerini sağlaması gerekir.

- a) $x^2 + 7x - 12 = 0$ denklemi için $x_1 + x_2 = -p = -7$ ve $x_1 \cdot x_2 = q = -12$ olmalıdır.
 $2 + (-3) = -1 \neq -7$ olduğundan 2 ve -3'ün $x^2 + 7x - 12 = 0$ denkleminin çözümleri olmadığı sonucuna varırız.

- b) Bu denklem için $x_1 + x_2 = -p = 2$ ve $x_1 \cdot x_2 = q = -1$ olmalıdır. $(1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2 = -p$ ve $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1 - 2 = -1 = q$ olduğundan $1+\sqrt{2}$ ve $1-\sqrt{2}$, $x^2 - 2x - 1 = 0$ denkleminin çözümleridir.

Örnek 4

x_1 ve x_2 , $x^2 + px + q = 0$ ikinci dereceden denkleminin çözümleri olsun. $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ olduğunu kanıtla.

Çözüm:

$x_1^2 + x_2^2$ ifadesini $2x_1x_2$ ekleyip çıkararak tam kareye tamamlarız ve $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ elde ederiz. Vieta formüllerine göre $x_1 + x_2 = -p$ ve $x_1 \cdot x_2 = q$ olduğundan, önceki eşitlikten $x_1^2 + x_2^2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$ elde ederiz.

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$, yani $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ formülünü unutma.

Soru 2

x_1 ve x_2 , $3x^2 - 2x + 6 = 0$ ikinci dereceden denkleminin çözümleri olsun. Denklemi çözmeden aşağıdaki ifadelerin değerlerini belirle:

- a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; b) $3x_1 - 5x_1^2 + 3x_2 - 5x_2^2$.

Alıştırma Soruları!

- Denklemi normal biçimde yaz ve p ile q değerlerini belirle:
 - $2x^2 + 3x - 5 = 0$;
 - $mx^2 - (m+3)x + 2m = 0$.
- Aşağıdaki denklemler için Vieta formüllerini yaz:
 - $3x^2 - 8x + 6 = 0$;
 - $2x^2 - 7x = 0$
 - $x^2 + 6 = 0$;
 - $(m-3)x^2 - (3m+1)x + 2 = 0$;
 - $4mx^2 - x + 2m - 3 = 0$.
- Denklemleri Vieta formüllerini kullanarak çöz:
 - $x^2 - 8x + 15 = 0$;
 - $x^2 + 7x + 12 = 0$;
 - $x^2 + 8x + 15 = 0$;
 - $2x^2 - 7x + 5 = 0$.
- Vieta formüllerini uygulayarak verilen sayı çiftinin ilgili denklemin çözümü olup olmadığını belirle:
 - 2 ve 6, $x^2 - 8x + 12 = 0$;
 - 3 ve 5, $x^2 - 2x - 15 = 0$;
 - $3 + \sqrt{2}$ ve $3 - \sqrt{2}$, $x^2 + 6x + 7 = 0$;
 - 3 ve 7, $x^2 - 9x + 12 = 0$.
- $x^2 + (2k+1)x - 5 = 0$ denkleminin çözümlerinin toplamının 4'e eşit olması için k parametresinin değerini belirle. Elde edilen k değeri için denklemin çözümlerini belirle.
- Vieta formüllerini kullanarak k parametresinin değerini ve denklemin diğer çözümünü belirle:
 - $2kx^2 + kx - 1 = 0$, eğer $x_1 = \frac{3}{2}$;
 - $x^2 - 5x + k = 0$, eğer $x_1 = -2$;
 - $x^2 - 2bx + k = 0$, eğer $x_1 = b - a$.
- m parametresinin hangi değeri için $x^2 + 6x - m + 3 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 - x_2 = 0$ koşulunu sağlar?
- $4x^2 - 3x + 2 = 0$ denklemini çözmeden, ifadenin değerini belirle:
 - $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$;
 - $x_1^2 + x_2^2$;
 - $\frac{5}{x_1} + \frac{5}{x_2}$;
 - $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

2.6 VERİLEN ÇÖZÜMLERLE İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEM OLUŞTURMA.

İKİNCİ DERECEDEKİ ÜÇ TERİMLİYİ ÇARPANLARA AYIRMA

Verilen Çözümlerle İkinci Dereceden Denklem Oluşturma

Hatırla!

- $x_1 = 3$ ve $x_2 = 4$, $x^2 - 7x + 12$ üç terimlisinin sıfırlarıdır. Bu nedenle bu ifade $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$ biçiminde yazılabilir.
- $x_1 = -3$ ve $x_2 = 4$, $x^2 - x - 12 = 0$ denkleminin çözümleridir. $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$ eşitliğinin doğru olup olmadığını kontrol et.

Vieta formüllerini kullanarak kökleri x_1 ve x_2 olan bir denklem oluşturabiliriz. Buna göre Vieta formüllerine göre, x_1 ve x_2

$$x^2 + px + q = 0, p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2 \text{ denkleminin çözümleridir.}$$

Örnek 1

Çözümleri $x_1 = -3$, $x_2 = 5$ olan ikinci dereceden bir denklem oluştur.

Çözüm:

Vieta formülleriyle p ve q katsayılarını belirleriz:

$$p = -(x_1 + x_2) = -((-3) + 5) = -2,$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot 5 = -15.$$

Aranan denklem $x^2 - 2x - 15 = 0$ 'dır.

Örnek 2

Çözümleri verilen ikinci dereceden bir denklem oluştur.

$$\text{a) } x_1 = 3 - 4i, x_2 = 3 + 4i; \quad \text{b) } x_1 = 2 - \sqrt{3}, x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Çözüm:

Vieta formülleriyle p ve q katsayılarını belirleriz:

$$\text{a) } p = -(x_1 + x_2) = -((3 - 4i) + (3 + 4i)) = -6, q = x_1 \cdot x_2 = (3 - 4i) \cdot (3 + 4i) = 25.$$

Aranan denklem $x^2 - 6x + 25 = 0$ 'dır.

$$\text{b) } p = -((2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})) = -4, q = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1,$$

Aranan denklem $x^2 - 4x + 1 = 0$ 'dır.

Soru 1

Çözümleri verilen ikinci dereceden denklemleri oluştur.

a) $x_1 = 0,75$, $x_2 = -\frac{1}{3}$; b) $x_1 = a - b$, $x_2 = a + b$.

Unutma!

x_1 ve x_2 sayıları ikinci dereceden bir denklemin çözümleri ise denklem $x^2 + px + q = 0$, biçimindedir. Burada $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 \cdot x_2$ 'dir.

$p = -(x_1 + x_2)$ ve $q = x_1 \cdot x_2$ değerlerini, çözümleri x_1 ve x_2 olan $x^2 + px + q = 0$ denkleminde yerine yazarsak $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ denklemini, yani

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \text{ denklemini elde ederiz.}$$

Buna göre, x_1 ve x_2 sayıları ikinci dereceden denklemin çözümleri ise denklem $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ eşitliği uygulanarak da oluşturulabilir.

Örneğin, $x_1 = -3$, $x_2 = 5$ ikinci dereceden denklemin çözümleri ise denklem $(x + 3)(x - 5) = 0$, yani $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Örnek 3

Köklerinin toplamı -5 , köklerinin çarpımı 6 olan ikinci dereceden bir denklem oluştur.

Çözüm:

Köklerin toplamı -5 , çarpımı 6 ise denklemin normal biçimindeki katsayılar için $p = -(x_1 + x_2) = 5$ ve $q = x_1 \cdot x_2 = 6$ elde ederiz. Aranan denklem $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Örnek 4

$x^2 - 9x + m = 0$ denkleminin bir kökünün diğerinin iki katı olması için m parametresinin değeri kaçtır?

Çözüm:

Vieta formüllerine göre $x_1 + x_2 = 9$ 'dur. $x_1 = 2 \cdot x_2$ yazarsak $2 \cdot x_2 + x_2 = 9$, yani $x_2 = 3$, ve $x_1 = 2 \cdot 3 = 6$ elde ederiz. Şimdi denklemde $q = m$ 'dir, Vieta formüllerine göre ise $q = x_1 \cdot x_2 = 18$ 'dir. Buradan m değerinin 18 olduğu sonucu çıkar.

Örnek 5

$mx^2 - (2m + 2)x + 1 = 0$ denkleminin çözümlerinin $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4$ eşitliğini sağlaması için m parametresinin değerini belirle.

Çözüm:

Vieta formüllerinden $x_1 + x_2 = -\frac{-(2m+2)}{m}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m}$, $m \neq 0$ elde ederiz. $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4$ eşitliğinden

$x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = 4$ sonucu çıkar. Yerine yazarsak $\frac{1}{m} \cdot \frac{2m+2}{m} = 4$ veya $4m^2 - 2m - 2 = 0$, yani $2m^2 - m - 1 = 0$, elde edilir. Bunun çözümleri $m = 1$ ve $m = -\frac{1}{2}$.

İkinci Dereceden Üç Terimliyi Doğrusal Çarpanlara Ayırma

Hatırla!

- İkinci dereceden bir denklem için Vieta formülleri nasıldır?
- $2x^2 - 4x + 3 = 0$ denklemi için:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}.$$

Etkinlik

$x^2 - 7x + 12$ ikinci dereceden üç terimlisini doğrusal çarpanlara ayır:

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = x(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 4).$$

$x_1 = 3$ ve $x_2 = 4$ ün verilen ikinci dereceden üç terimlinin sıfırları, yani $x^2 - 7x + 12 = 0$ denkleminin çözümleri olduğuna dikkat et.

x_1 ve x_2 , $ax^2 + bx + c$, ikinci dereceden üç terimlisinin sıfırları, yani $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, ikinci dereceden denkleminin çözümleri ise Vieta formüllerine göre $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, olduğundan,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 \right) = \\ &= a \left(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 \right) = a \left(x(x - x_1) - x_2(x - x_1) \right) = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Unutma!

x_1 ve x_2 , $ax^2 + bx + c$, ikinci dereceden üç terimli denklemin sıfırları ise bu ifade çarpanlarına $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ biçiminde ayrılır.

Örnek 6

Üç terimli denklemi çarpanlara ayır:

a) $2x^2 + 6x - 8$; b) $2x^2 - 3x - 5$.

Çözüm:

a) Üç teriminin sıfırlarını belirleriz. $x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm 10}{4}$, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Buna göre, $2x^2 + 6x - 8 = 2(x + 4)(x - 1)$ elde edilir.

b) $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 7}{4}$, $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -1$, olduğundan

$$2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1) = (2x - 5)(x + 1).$$

Soru 2

Üç terimli denklemi doğrusal çarpanlara ayır:

a) $2x^2 + 7x - 15$; b) $x^2 - 2x - 2$.

İkinci dereceden üç terimliyi doğrusal çarpanlara ayırma eşitliğini, verilen çözümlerle ikinci dereceden denklem oluşturmak için de kullanabiliriz. Gerçekten $ax^2 + bx + c = 0$ eşitliğinden $a \neq 0$ olduğundan $a(x - x_1)(x - x_2)$ elde edilir. Örneğin, çözümleri $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -3$ olan denklemi $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 0$ eşitliğiyle belirleyebiliriz, yani $x^2 + 3x - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$ olur. Buna göre aranan denklem $2x^2 + 5x - 3 = 0$ olur.

Hatırla!

Verilen bir cebirsel kesri sadeleştirmek için payı ve paydayı çarpanlarına ayırmamız gerekir.

Örnek 7

Kesri sadeleştir: $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 12}$

Çözüm:

Pay için $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ olur. Paydayı çarpanlarına ayırmak için $x^2 - x - 12 = 0$ denkleminin çözümlerini belirleyeceğiz.

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \text{ elde ederiz.}$$

Buradan $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$ elde edilir.

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 12} = \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 4)} = \frac{x + 3}{x - 4}.$$

Kesrin yalnızca $x + 3$ sıfırdan farklı olduğunda sadeleştirilebileceğine dikkat edelim.

Soru 3

Kesirleri sadeleştir: a) $\frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$; b) $\frac{x^2-x-6}{x^2-8x+15}$.

Alıştırma Soruları!

(1-5) sorularında kökleri verilen ikinci dereceden bir denklem oluşturun:

1. a) -2 ve 3 ; b) 7 ve -1 ; c) -5 ve -1 .
2. a) $-\frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$ ve $-\frac{3}{4}$; c) $-\frac{3}{4}$ ve $-\frac{1}{3}$.
3. a) $-\sqrt{2}$ ve $\sqrt{5}$; b) $-4\sqrt{3}$ ve $-\sqrt{3}$; c) $6-\sqrt{2}$ ve $6+\sqrt{2}$.
4. a) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; b) $3-2i$ ve $3+2i$; c) $\frac{1-2i}{3}$ ve $\frac{1+2i}{3}$.
5. a) $\frac{a}{b}$ ve $\frac{b}{a}$; b) $\frac{a}{a+b}$ ve $\frac{b}{a-b}$.
6. Çözümlerinin toplamı -1 , çözümlerinin çarpımı $-2\frac{1}{2}$ olan ikinci dereceden bir denklem oluşturun.
7. $2x^2 - 3x + m - 2 = 0$ denkleminin bir kökünün diğerinden iki kat küçük olması için m parametresinin değeri kaçtır?
8. $2x^2 - 4x + k = 0$ denkleminin köklerinin $x_1^2 + x_2^2 = 12$ eşitliğini sağlaması için k parametresinin değerini belirle.
9. Köklerinden biri verilen, gerçekte katsayılı ikinci dereceden bir denklem oluşturun:
 - a) $2-3\sqrt{2}$; b) $2-3i$.
10. Üç terimli denklemleri doğrusal çarpanlara ayır:
 - a) $x^2 - 4x - 21$; b) $3x^2 + 5x - 2$; c) $x^2 - 4x + 1$.
11. Kesirleri sadeleştir:
 - a) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$; b) $\frac{x^2+8x+16}{x^2+7x+12}$; c) $\frac{3x^2+21x}{x^2+3x-28}$.

2.7 KESİRLİ RASYONEL DENKLEMLER

Hatırla!

- Sayıların ve polinomların en küçük ortak katının nasıl belirlendiğini hatırla.
- $\text{EKOK}(x-2, x^2-4) = (x-2)(x+2)$.
- $\text{EKOK}(x+3, x-1, x^2-9) = (x+3)(x-3)(x-1)$.
- Kesirli rasyonel ifade $\frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindedir. Burada $P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinomdur $Q(x) \neq 0$ dır.

Etkinlik

$x^2 + 2x - 1$ ve $x^2 - 1$ ifadelerinin EKOK'unu belirle.

İkinci dereceden denklemlerin çözülmesi, belirli dönüşümlerle ikinci dereceden denklemlere indirgenen denklemlerin çözülmesini sağlar.

Unutma!

Değişkenin, yani bilinmeyenin kesirli rasyonel bir ifadenin paydasında da bulunduğu denkleme *kesirli rasyonel denklem* denir. Paydasında değişkenin de (bilinmeyen de) yer aldığı denklemlere rasyonel denklemler denir. Bu denklemler, paydayı sıfır yapan değerler dışındaki tüm gerçekte sayılar için tanımlıdır.

Örnek 1

$\frac{3(x-5)}{x-1} = 3x+8$ kesirli rasyonel bir denklemdir ve $x-1 \neq 0$, yani $x \neq 1$ olan bütün x değerleri için tanımlıdır. Buna göre denklemin tanım kümesi (izin verilen değerler kümesi) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ olur.

Kesirli rasyonel denklemleri çözme işlemi genellikle aşağıdaki adımlar izlenerek bulunur:

- Kesirlerin paydaları çarpanlarına ayrılır.
- Denklemin tanım kümesi belirlenir.
- Kesirlerin paydalarının EKOK'u ile çarpılır.
- Elde edilen denklemin çözümleri belirlenir.
- Elde edilen çözümlerden hangilerinin başlangıçtaki (kesirli rasyonel) denklemin çözümleri olduğu, yani elde edilen çözümlerden hangilerinin denklemin tanım kümesine ait olduğu kontrol edilir.

Örnek 2

Denklemleri çöz:

a) $\frac{3}{x-1} + \frac{5}{x} = 3;$

b) $\frac{-2x+7}{x-2} = x-2;$

c) $\frac{3x}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = \frac{2x^2-6x}{x^2-1}.$

Çözüm:

- a) Denklem $x - 1 \neq 0$ ve $x \neq 0$ için tanımlıdır, yani $x \neq 1$ ve $x \neq 0$ olmalıdır. Buna göre denklemin tanım kümesi $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ olur. Bu denklemdeki paydalar $x - 1$ ve x 'tir; bunların EKOK'u $x(x - 1)$ 'dir. Denklemi paydaların EKOK'u ile çarpalım ve

$$\begin{aligned}\frac{3}{x-1} + \frac{5}{x} &= 3 / \cdot x(x-1) \\ 3x + 5(x-1) &= 3x(x-1) \\ 3x^2 - 11x + 5 &= 0 \text{ elde ederiz.}\end{aligned}$$

Elde edilen denklemin çözümleri $x_1 = \frac{11-\sqrt{61}}{6}$, $x_2 = \frac{11+\sqrt{61}}{6}$ olup, her iki çözüm de D kümesine ait olduğundan, bu iki çözüm verilen kesirli rasyonel denklemin çözümleridir.

- b) Denklem $x - 2 \neq 0$ için tanımlıdır, yani $x \neq 2$ olmalıdır. Buna göre denklemin tanım kümesi $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ olur. Denklemde yalnızca bir payda vardır, bu nedenle denklemi $x - 2$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}\frac{-2x+7}{x-2} &= x-2 / \cdot (x-2) \\ -2x+7 &= (x-2)^2 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0\end{aligned}$$

Elde edilen ikinci dereceden denklemin çözümleri -1 ve 3 'tür. Her iki çözüm de kesirli rasyonel denklemin tanım kümesinde bulunduğundan, bu iki çözüm verilen denklemin çözümleridir.

- c) Denklem $x - 1 \neq 0$ ve $x + 1 \neq 0$ için tanımlıdır, yani $x \neq 1$ ve $x \neq -1$ olmalıdır. Buna göre denklemin tanım kümesi $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ olur. Denklemi EKOK($x - 1, x + 1, x^2 - 1$) = $x^2 - 1$ ile çarpalım ve

$$\begin{aligned}\frac{3x}{x-1} + \frac{4x}{x+1} &= \frac{2x^2-6x}{x^2-1} / \cdot (x^2-1) \\ 3x(x+1) + 4x(x-1) &= 2x^2-6x \\ 5x^2 + 5x &= 0 \text{ elde ederiz.}\end{aligned}$$

Elde edilen ikinci dereceden denklemin çözümleri $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ 'dir. $x_2 = -1$, kesirli rasyonel denklemin tanım kümesine ait olmadığından, denklemin tek çözümü $x = 0$ dır.

Soru 1

Denklemleri çöz:

a) $\frac{6}{x^2-1} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{2}{x-1};$

b) $\frac{3x-5}{2x-1} = \frac{2x-3}{x+1}.$

Örnek 3

Denklemi çöz $\frac{2x+1}{x^2+x-6} - \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{6}{x^2-9}$.

Çözüm:

Önce paydaları çarpanlarına ayırırız:

$x^2 + x - 6 = 0$ denkleminin çözümleri -3 ve 2 'dir; $x^2 - 5x + 6 = 0$ denkleminin çözümleri ise 2 ve 3 'tür.

Buradan paydaların çarpanlara ayrılmış biçimi şöyledir:

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3), \quad x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3), \quad x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Denklem $x \neq 2$, ve $x \neq -3$, ve $x \neq 3$ için tanımlıdır. Buna göre denklemin tanım kümesi $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2, 3\}$ olur. Denklemi EKOK $((x-2)(x+3), (x-2)(x-3), (x-3)(x+3)) = (x-2)(x-3)(x+3)$ ile çarpalım ve

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^2+x-6} - \frac{x-1}{x^2-5x+6} &= \frac{6}{x^2-9} \\ \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} - \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} &= \frac{6}{(x-3)(x+3)} \quad / \cdot (x-2)(x-3)(x+3) \\ (2x+1)(x-3) - (x-1)(x+3) &= 6(x-2) \\ x^2 - 13x + 12 &= 0 \text{ elde ederiz:} \end{aligned}$$

Elde edilen ikinci dereceden denklemin çözümleri $x_1 = 1$, ve $x_2 = 12$ 'dir. Her iki çözüm de kesirli rasyonel denklemin tanım kümesinde olduğundan, 1 ve 12 verilen denklemin çözümleridir.

Soru 2

Denklemi çöz $\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} - \frac{x-4}{2x-4} = 0$.

Örnek 4

Motorlu bir teknenin durgun sudaki hızı 15 km/h 'tir. Tekne nehrin akıntısı yönünde hareket ederse 72 km 'lik yolu, akıntıya karşı hareket ettiğinden 2 saat daha kısa sürede alır. Nehrin hızını belirle.

Çözüm:

Nehrin hızı $x \text{ km/h}$, olsun. Bu durumda teknenin nehir akıntısı yönündeki hızı $15 + x$, akıntıya karşı hızı

ise $15 - x$ olur. $s = v \cdot t$ formülünden $72 = (15 + x) \cdot t_1$ ve $72 = (15 - x) \cdot t_2$ elde edilir. Buradan $t_1 = \frac{72}{15+x}$

ve $t_2 = \frac{72}{15-x}$ elde ederiz. $t_2 - t_1 = 2$, olduğundan $\frac{72}{15-x} - \frac{72}{15+x} = 2$ elde edilir.

Denklem, paydaların EKOK'u ile çarpıldıktan sonra

$$72(15+x) - 72(15-x) = 2(15+x)(15-x),$$

Yani

$$x^2 + 72x - 225 = 0 \text{ elde edilir:}$$

Bu denklemin çözümleri $x_1 = 3$ ve $x_2 = -75$ 'tir. Ancak $x_2 = -75$ problemin çözümü olamaz, çünkü x hızdır ve negatif değeri alamaz. Buna göre nehrin hızı 3 km/h 'tir.

Örnek 5

Bir yatırımcı, bir yıl vadeli olarak yatırdığı belirli bir ana para için 15 avro faiz geliri elde etmiştir. Daha sonra bu tutara 85 avro daha ekleyip aynı faiz oranıyla bir yıl daha vadeli olarak yatırmıştır. Bu yılın sonunda yatırımcının hesabında toplam 420 avro vardır. Başlangıçtaki para tutarı ne kadardı ve yıllık faiz yüzde kaçtır?

Çözüm:

Yatırılan başlangıç para tutarı K , faiz oranı $x\%$ olsun. Bu durumda $\frac{K \cdot x}{100} = 15$, yani $K = \frac{100 \cdot 15}{x}$ olur.

Buna göre, ikinci yılın başında tasarruf sahibinin hesabında $\frac{1500}{x} + 15 + 85 = \frac{1500}{x} + 100$ avro vardı.

İkinci yılın sonunda ise $\left(\frac{1500}{x} + 100\right) + \left(\frac{1500}{x} + 100\right) \cdot \frac{x}{100}$ avro vardı. İkinci yılın sonunda tasarruf

sahibinin hesabında 420 avro olduğunu bildiğimiz için aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\left(\frac{1500}{x} + 100\right) + \left(\frac{1500}{x} + 100\right) \cdot \frac{x}{100} = 420.$$

Bu kesirli rasyonel denklemden $x^2 - 305x + 1500 = 0$ ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümleri $x_1 = 5$, $x_2 = 300$ 'dür. Buna göre faiz oranı %5, başlangıçta yatırılan tutar ise $\frac{1500}{5} = 300$ avrodur. İkinci çözüm problemin çözümü olamaz, çünkü faiz oranı %300 olamaz.

Alıştırma Soruları!

1. Denklemleri çöz:

a) $8x + 11 + \frac{7}{x} = \frac{21 + 65x}{7};$

b) $\frac{6}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} = 2 - \frac{x + 4}{x + 1};$

c) $\frac{3x + 5}{x - 2} - \frac{x - 2}{x + 2} = -\frac{3}{2};$

d) $\frac{2x}{x + 1} + \frac{2x}{x - 1} = \frac{16}{3};$

e) $\frac{2x - 3}{x + 1} = \frac{3x - 5}{2x - 1};$

f) $\frac{5x}{2x^2 - x - 1} + \frac{5}{2x + 1} = \frac{4x - 5}{x^2 - 1};$

2. Ardışık iki tam sayının ters değerlerinin farkı $\frac{1}{30}$ 'dir. Bu sayılar hangileridir?

3. Bir öğrenci grubu, her biri eşit miktarda para vererek 6000 denar toplamalıdır. İçlerinden ikisi vazgeçtiği için kalanlar kişi başına 150 denar daha fazla ödemek zorunda kalmıştır. Grupta kaç öğrenci vardı?

4. Bir tren 650 km'lik yolu, hızı birinci trenin hızından 15 km/h daha az olan başka bir trenden üç saat daha kısa sürede almaktadır. İki trenin hızlarını belirle.

2.8 BİKARE DENKLEMLER

Hatırla!

- $x^4 - 9x^2 = 0$ denkleminin derecesini belirle?
- Bu denklemin kaç çözümü vardır?
- $-3, 3, 4, -4, 0$ sayılarından hangilerinin denklemin çözümü olduğunu kontrol et!

Etkinlik

$x^4 - 9x^2 = 0$ denkleminin bütün çözümlerini belirle.

Örnek 1

Denklemlerin çözümlerini belirle:

- a) $x^4 = 0$; b) $x^4 - 81 = 0$; c) $x^4 - 16x^2 = 0$.

Çözüm:

- a) $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ olduğundan, bu denklemin çözümleri $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ 'dır. Başka bir deyişle, denklemin 0'a eşit dört katlı bir kökü vardır.
- b) $x^4 - 81 = 0$ denklemini $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$ yani $(x - 3)(x + 3)(x - 3i)(x + 3i) = 0$ biçiminde yazabiliriz. Buna göre denklemin çözümleri $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 3i, x_4 = -3i$ 'dir. Başka bir deyişle, denklemin ikisi gerçek ve ikisi karmaşık olmak üzere birbirinden farklı 4 kökü vardır.
- c) $x^4 - 16x^2 = x^2(x^2 - 16)$ olduğundan $x \cdot x(x - 4)(x + 4) = 0$ denklemini elde ederiz. Denklemin çözümleri $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = -4$ 'tür. Buna göre denklemin bir çift katlı kökü ve birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır.

Unutma!

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^4 + bx^2 + c = 0$ biçimindeki denkleme bikare denklem denir.

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ bikare denkleminin çözümlerini belirlemek için denklemini $a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$ biçiminde yazarak ve $y = x^2$ değişken dönüşümünü yaparız. Bu şekilde y 'ye göre $ay^2 + by + c = 0$ ikinci dereceden denklemini elde ederiz. Bu denklemin y_1 ve y_2 çözümlerini ikinci dereceden denklem çözme formülüyle belirleyebiliriz. Daha sonra bikare denklemin çözümlerini belirlemek için değişken dönüşümüne geri döner, yani $x^2 = y_1$ ve $x^2 = y_2$ denklemlerini çözeriz. Böylece $x_{1/2} = \pm\sqrt{y_1}$, $x_{3/4} = \pm\sqrt{y_2}$ elde ederiz.

Örnek 2

$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ denklemini çöz.

Çözüm:

Denklemi $(x^2)^2 - 7x^2 + 12 = 0$ biçiminde yazar ve $y = x^2$ değişken dönüşümünü yaparız. Böylece $y^2 - 7y + 12 = 0$ ikinci dereceden denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümleri $y_1 = 3$ ve $y_2 = 4$ 'tür. Değişken dönüşümüne geri dönerek $x^2 = 3$ ve $x^2 = 4$ elde ederiz. $x^2 = 3$ eşitliğinden $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$; $x^2 = 4$ eşitliğinden ise $x_3 = 2$, $x_4 = -2$ sonucu çıkar. Buna göre denklemin birbirinden farklı 4 gerçektek çözümleri vardır.

Soru 1

Verilen denklemi çöz $x^4 - 13x^2 + 12 = 0$.

Soru 2

Verilen kesri sadeleştir $\frac{x^2 - 9}{x^4 - 13x^2 + 36}$.

Alıştırma Soruları

- Denklemleri çöz:
 - $10x^4 = 0$;
 - $4x^4 - 64 = 0$;
 - $x^4 - 9x^2 = 0$.
- Denklemlerin çözümlerini belirle:
 - $\frac{30 - 2x^2}{x^2 - 6} + \frac{5x^2 - 16}{10} = \frac{2x^2 + 3}{5}$;
 - $(x^2 - 5)(4x^2 + 5) = 6x^2$.
- Bir dikdörtgenin alanı 60 cm^2 , köşegeni ise 13 cm 'dir. Dikdörtgenin kenar uzunluklarını belirle.
- Çözümleri $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$, $x_3 = 4$, $x_4 = -4$ olan bikare denklem oluşturun.
- Verilen kesri sadeleştir $\frac{x^4 - 20x^2 + 64}{x^2 + 2x - 8}$.

2.9 İKİ BİLİNMEYENLİ BİR DOĞRUSAL DENKLEM VE İKİ BİLİNMEYENLİ BİR İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMDEN OLUŞAN SİSTEM

Hatırla!

- Doğrusal denklem sistemi, yerine koyma yöntemiyle nasıl çözülür?
- Sistemi yerine koyma yöntemiyle çöz $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Etkinlik

$(x, y) \in \left\{ (1, 1), (0, 2), (2, 0), \left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5} \right) \right\}$ verilen sıralı ikililerden hangisinin $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ denklem sisteminin çözümü olduğunu kontrol ediniz.

Örnek 1

Sistemi çöz $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Çözüm:

$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ Sistemin iki bilinmeyenli bir doğrusal denklem ve aynı iki bilinmeyeni içeren bir ikinci dereceden denklemden oluştuğuna dikkat edelim. Bu sistem, iki bilinmeyenli iki doğrusal denklem sistemi gibi yerine koyma yöntemiyle çözülebilir. Bunun için doğrusal denklemden değişkenlerden birini yalnız bırakırız. Örneğin, verilen denklem sisteminde birinci denklemden y co $y = 2 - 2x$ biçiminde ifade edebiliriz. Bunu ikinci dereceden denklemde yerine yazarsak elde ederiz:

$$x^2 + (2 - 2x)^2 = 4,$$

yani

$$5x^2 - 8x = 0.$$

İkinci dereceden denklemin çözümleri $x_1 = 0$ ve $x_2 = \frac{8}{5}$ 'tir. $x_1 = 0$ için $y_1 = 2 - 2 \cdot 0 = 2$, $x_2 = \frac{8}{5}$ için ise $y_2 = 2 - 2 \cdot \frac{8}{5} = -\frac{6}{5}$ elde ederiz. Buna göre denklem sisteminin çözümleri $(0, 2)$ ve $\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5} \right)$ sıralı ikilileridir.

Unutma!

- En az bir a , b , veya c katsayısının sıfırdan farklı olduğu sistem $\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \end{cases}$ iki bilinmeyenli bir doğrusal denklem ve iki bilinmeyenli bir ikinci dereceden denklemden oluşan sistemin genel biçimidir.
- Bu tür denklem sistemleri yerine koyma yöntemiyle çözülür ve çözümleri sıralı ikililerdir.

Örnek 2

Sistemi çöz $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ x^2 + xy + y^2 = 9 \end{cases}$

Çözüm:

Doğrusal denklemden $x = 6 - 3y$ elde ederiz ve bunu ikinci dereceden denkleme yerine yazarsak $(6 - 3y)^2 + (6 - 3y)y + y^2 = 9$,

yani

$$7y^2 - 30y + 27 = 0 \text{ elde ederiz.}$$

İkinci dereceden denklemin çözümleri $y_1 = 3$ ve $y_2 = \frac{9}{7}$ 'dir. $y_1 = 3$ için $x_1 = 6 - 3 \cdot 3 = -3$, $y_2 = \frac{9}{7}$ için

ise $x_2 = 6 - 3 \cdot \frac{9}{7} = \frac{15}{7}$ elde ederiz. Buna göre denklem sisteminin çözümleri $(-3, 3)$ ve $(\frac{15}{7}, \frac{9}{7})$ sıralı

ikilileridir.

Soru 1

Verilen denklem sistemlerini çöz:

a) $\begin{cases} x \cdot y = 6 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x^2 + 4y + y^2 = 1 \end{cases}$

Örnek 3

İki çokgenin toplam 15 kenarı ve toplam 40 köşegeni vardır. Bu çokgenler hangileridir?

Çözüm:

Çokgenlerden birinin kenar sayısı x , diğerinin kenar sayısı y olsun. Soruda verilen koşullara göre

denklemlerden biri $x + y = 15$. x kenarlı bir çokgendeki köşegen sayısı $\frac{x(x-3)}{2}$ olduğundan, ikinci

denklem $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{y(y-3)}{2} = 40$ olur.

Çokgenlerdeki kenar sayılarını belirlemek için aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x(x-3) + y(y-3) = 80 \end{cases} \text{ veya } \begin{cases} x + y = 15 \\ x^2 - 3x + y^2 - 3y = 80 \end{cases}$$

Doğrusal denklemden $x = 15 - y$ elde ederiz ve bunu ikinci dereceden denklemde yerine yazarsak

$$(15 - y)^2 - 3(15 - y) + y^2 - 3y = 80,$$

yani

$$y^2 - 15y + 50 = 0 \text{ elde ederiz.}$$

Bu ikinci dereceden denklemin çözümleri $y_1 = 5$ ve $y_2 = 10$ 'dur. $y_1 = 5$ için $x_1 = 10$, $y_2 = 10$ için ise $x_2 = 5$ elde edilir. Buna göre çokgenlerden biri 5 kenarlı, diğeri 10 kenarlıdır.

Alıştırma Soruları

1. Sistemleri çöz:

a) $\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 3x^2 + 2x + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - x = 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = \frac{9}{10} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ \frac{y+3}{x} + \frac{x-4}{y} = 1 \end{cases}$

2. Sistemi çöz: $\begin{cases} x \cdot y = 3m^2 \\ x + y = 4m \end{cases}$

3. Bir kesrin kendisi ile ters değerinin toplamı $\frac{29}{10}$, kesrin payı ile paydasının toplamı ise 7'dir. Kesrin ne olduğunu belirle.

4. Bir çiftçi, dikdörtgen biçiminde bir bahçeyi çevirmek istemektedir; ancak kenarlardan yalnızca biri çitle çevrilmeyecektir. Çiftçinin çit için 40 metre teli vardır. Ayrıca bahçenin alanının 150 m² olmasını istemektedir. Bahçenin boyutlarını bul.

TEKRAR VE PEKİŞTİRME SORULARI

1. m 'nin hangi değeri için $(2m - 1)x^2 - 4mx + 3 = 0$ denklemi ikinci dereceden denklem olur?
2. Aşağıdaki denklemleri normal biçimde yaz:
 - a) $3x^2 - 9x + 36 = 0$;
 - b) $2x^2 = 8x$;
 - c) $\frac{2}{3}x^2 - 4x + 1 = 0$.
3. m parametresinin hangi değerleri için $(m + 2)x^2 + m - 5 = 0$ denkleminin gerçek çözümleri vardır?
4. Denklemlerin çözümlerinin türünü belirle:
 - a) $x^2 + x - 3 = 0$;
 - b) $3x^2 + 2x + 1 = 0$;
 - c) $4x^2 - 40x + 25 = 0$;
 - d) $x^2 - 8x + 15 = 0$.
5. Denklemleri çöz:
 - a) $(x + 1)^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 1)$;
 - b) $x^2 - 10 = 3(x^2 - 4)$;
 - c) $\frac{x^2}{4} - 6x = 0$;
 - d) $\frac{2x^2 - 9x}{2} = \frac{5x^2 + 7x}{4}$;
 - e) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
 - f) $x^2 - 2x - 15 = 0$.
6. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ denklemini çöz.
7. k parametresinin hangi değerleri için $kx^2 + 2kx + k + 1 = 0$ denklemi.
 - a) çift katlı köke sahip olur
 - b) birbirinden farklı iki gerçekte çözüme sahip olur
 - c) gerçekte çözüme sahip olmaz.
8. Vieta formüllerini uygulayarak çözümleri verilen ikinci dereceden bir denklem oluştur:
 - a) $x_1 = -2$ ve $x_2 = -7$;
 - b) $x_1 = 3 + \sqrt{5}$ ve $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.
9. x_1 ve x_2 , $3x^2 - 2x + 6 = 0$ ikinci dereceden denkleminin çözümleri olsun. Denklemi çözmeden $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ ifadesinin değerini belirle.
10. Üç terimliyi doğrusal çarpanlara ayır:
 - a) $2x^2 - \frac{22}{3}x + 4 = 0$;
 - b) $2x^2 + 5x - 3 = 0$.
11. Vieta formüllerini kullanmadan çözümleri -2 ve 6 olan ikinci dereceden bir denklem oluştur.
12. Kesirleri sadeleştir:
 - a) $\frac{x^2 - x - 12}{(x + 3)^2}$;
 - b) $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1}$.
13. Denklemleri çöz:
 - a) $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+2} = 1$;
 - b) $\frac{x+5}{5-x} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{100}{25-x^2}$;
 - c) $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = 2\frac{1}{6}$.
14. Denklemleri çöz:
 - a) $12x^4 = 0$;
 - b) $5x^4 = 125$;
 - c) $x^4 - 36x^2 = 0$.
15. Denklemlerin çözümlerini belirle:
 - a) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$;
 - b) $(x^2 - 4x + 3)^2 + 8x(x^2 + 3) + 12 = 0$.

16. Kesri sadeleştir: $\frac{x^4 - 1}{x^4 - 5x^2 + 4}$.

17. Denklem sistemlerini çöz:

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 - 29 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x^2 + 2y^2 + 3x - 4y = -2xy \end{cases}$

18. Sırna el yapımı şapkalar yapıp satmaktadır. Şapkaların satışından elde ettiği günlük gelirini $x(x - 47)$ formülüyle hesaplamaktadır. Burada x , bir şapkanın avro cinsinden fiyatıdır. Sırna günlük 150 avro gelir elde etmek istemektedir. Şapkaları hangi fiyattan satmalıdır?

19. Genişliği 6 m ve uzunluğu 4 m olan dikdörtgen biçimindeki bir arsanın etrafında bir yol vardır. Yolun genişliği her yerde aynıdır. Yol ile arsanın alanları eşitse, yolun genişliği kaçtır?

20. Küçük ev aletleri üreten bir üretici, haftada x mikrodalga fırın üretimiyle elde edilen P kârını (dolar cinsinden), $0 \leq x \leq 200$ koşuluyla $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$ formülüyle hesaplayabileceğini belirlemiştir. 1250 dolar kâr elde etmek için verilen bir haftada kaç fırın üretilmelidir?

21. Direk, karşılıklı taraflardan iki çelik halatla sabitlenmiştir. Halatların her biri direkten 2 metre daha uzundur. Halatların yere sabitlendiği noktalar arasındaki uzaklık, bir halatın uzunluğuna eşittir. Direğin yüksekliği kaçtır?



22. Bir sınıftaki öğrencilerin bir kısmı satranç turnuvasına katılmıştır. Oynanan toplam maç sayısı 253'tür.

a) Turnuvaya kaç öğrenci katılmıştır?

b) İkinci dereceden denklemden elde edilen hangi çözüm elenir ve neden?

23. Bir gezgin satıcı, aralarında 120 km uzaklık bulunan A şehrinden B şehrine sabit hızla gider. Sonra hızını 10 km/h artırır ve bu hızla B şehrinden Üsküp'e 150 km gider. Yolculuğunun ikinci aşaması, birinci aşamasından 6 dakika daha uzun sürdüysen, A'dan B'ye giderken hangi hızla gitmiştir?

24. Toplamları 20, karelerinin toplamı 272 olan iki sayıyı belirle.

25. İki basamaklı bir sayının rakamlarının çarpımı 8'dir ve bu sayı rakamlarının toplamına bölündüğünde 4 elde edilir. Sayıyı belirle.

İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYON,İKİNCİ DERECEDEN EŞİTSİZLİK VE BİR BİLİNMEYENLİ İKİNCİ DERECEDEN EŞİTSİZLİK SİSTEMİ

İkinci dereceden fonksiyon, cebirdeki en önemli fonksiyonlardan biridir ve ikinci dereceden denklemlerin öğrenilmesinin doğal bir devamıdır. Bu konuda, bu fonksiyonun özelliklerini, grafiğinin biçimini, ayrıca ikinci dereceden eşitsizlikleri ve bunların çözümünü öğreneceğiz. İkinci dereceden fonksiyonlar ve ikinci dereceden eşitsizlikler, parabolik modellerin grafiksel ve sayısal olarak incelenmesinde temel unsurlardır ve doğrusal olmayan olayların derinlemesine anlaşılmasını sağlar. İkinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesi, parabolün (bu fonksiyonların grafiğidir) ve onun dönüşümlerinin anlaşılmasını sağlarken, ikinci dereceden eşitsizliklerin çözülmesi, ikinci dereceden fonksiyonun belirli bir değerden büyük veya küçük olduğu aralıkları belirlememizi sağlar.

İkinci dereceden fonksiyon ve ikinci dereceden eşitsizliklerin çözümü, birçok uygulamalı problemin çözümünde geniş bir kullanım alanına sahiptir. Örneğin fizikte, cisimlerin hareket yollarının ve düşme yüksekliğinin zamana bağlı bir fonksiyon olarak modellenmesinde; ekonomide, maliyetlerin analizinde ve en büyük ve en küçük maliyetlerin ve kazançların belirlenmesinde; farmakolojide ise ikinci dereceden davranış gösteren ilaç etkilerinin modellenmesinde kullanılır.

3.1 İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYON. $f(x) = x^2$ FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ

Hatırla!

- $y = ax + b$ biçimindeki fonksiyona, a ve b gerçel sayılar ve x bağımsız değişken olmak üzere, doğrusal fonksiyon denir.
- Doğrusal fonksiyonun tanım kümesi D , gerçel sayılar kümesidir, yani $D = \mathbb{R}$ 'dir.
- Doğrusal fonksiyonun değer kümesi V de gerçel sayılar kümesidir, yani $V = \mathbb{R}$ 'dir.
- Doğrusal bir fonksiyonun grafiği bir doğrudur ve doğrusal fonksiyonun grafiğini çizmek için bu fonksiyonun grafiğine ait iki noktayı belirlemek yeterlidir.

Etkinlik

$x \in D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ için $f(x) = x^2$ fonksiyonunun değerlerini tablo hâlinde göster. Elde edilen sıralı ikilileri $(x, f(x))$ koordinat sisteminde grafiksel olarak göster.

Unutma!

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki fonksiyona, a , b ve c gerçekte sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere *ikinci dereceden (bir değişkenli) fonksiyon* denir.
- İkinci dereceden fonksiyonun tanım kümesi $D_f = \mathbb{R}$ 'dir.
- Çoğu zaman $f(x) = ax^2 + bx + c$, yerine $y = ax^2 + bx + c$ yazarız.
- İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği, $G_f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = ax^2 + bx + c\}$ noktalar kümesidir.
- İkinci dereceden fonksiyonun grafiğiyle elde edilen eğriye *parabol* denir.

Örnek 1

$f(x) = ax^2 + bx + c$, ise $f(0) = 0$, $f(1) = 5$, $f(2) = 16$ fonksiyonunun a , b ve c katsayılarını belirle.

Çözüm:

Fonksiyonun formülünde x yerine uygun değerleri yazarak $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$, $f(2) = 4a + 2b + c$, eşitliklerini, yani aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 16 \end{cases} \quad \text{Bu sistemin çözümü } a = 3, b = 2 \text{ ve } c = 0 \text{ 'dır. Aranan fonksiyon } f(x) = 3x^2 + 2x \text{ 'tir.}$$

Soru 1

Grafiği $A(-1, 0)$ ve $B(4, 0)$ noktalarını içeren $f(x) = x^2 + bx + c$, ikinci dereceden fonksiyonunu belirle.

Örnek 2

m parametresinin hangi değerleri için verilen fonksiyon ikinci dereceden bir fonksiyon olur?

a) $f(x) = 4x^2 + (m - 3)x$; b) $f(x) = (m + 5)x^2 - 2x - 7$.

Çözüm:

Fonksiyonun ikinci dereceden olması için $a \neq 0$ koşulunun sağlanması gerekir.

a) $f(x) = 4x^2 + (m - 3)x$, fonksiyonunda $a = 4 \neq 0$ 'dır.

Buna göre m parametresinin değeri, fonksiyonun ikinci dereceden olup olmamasını etkilemez. Dolayısıyla $m \in \mathbb{R}$ 'dir.

b) $f(x) = (m + 5)x^2 - 2x - 7$ fonksiyonunda $a = (m + 5)$ 'tir.

İkinci dereceden fonksiyon için $a \neq 0$ koşuluna göre $m + 5 \neq 0$, yani $m \neq -5$ 'tir.

- Eğer $b = c = 0$ ise ikinci dereceden fonksiyon $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$ biçimini alır.
- Eğer $a = 1$, $b = c = 0$ ise en basit ikinci dereceden fonksiyon olan $y = x^2$ elde edilir.

Örnek 3

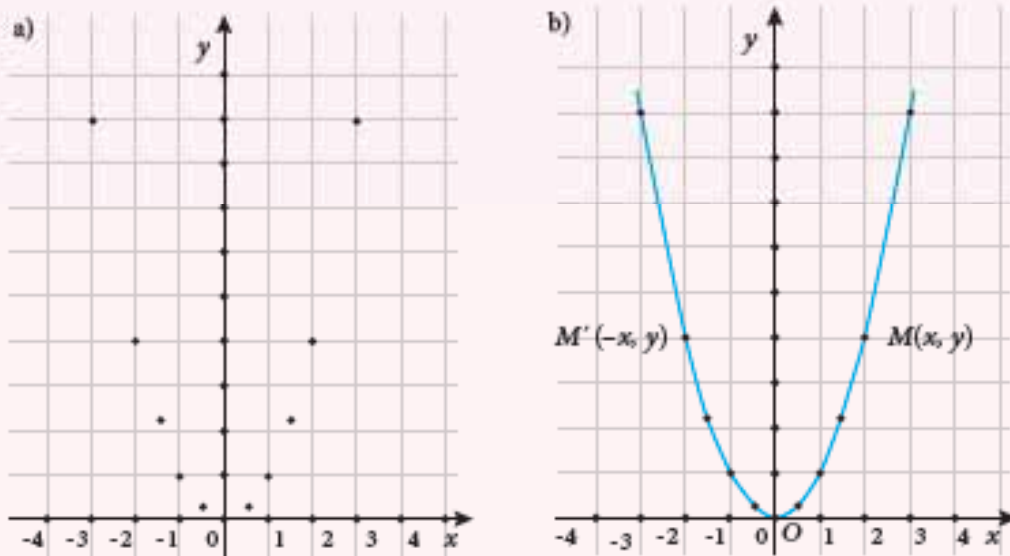
$y = x^2$ fonksiyonu için $x \in \{-3; -2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 3\}$. değerlerine göre fonksiyonun değer tablosunu oluştur. Grafiğe ait karşılık gelen noktaları koordinat sisteminde çiz ve fonksiyon grafiğinin geometrik görünümünü elde etmek için bu noktaları birleştir.

Çözüm:

İstenen tablo şöyledir:

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
x^2	9	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	9

Tablodan $(-3, 9)$, $(-2, 4)$, $(-1,5; 2,25)$, $\dots$, $(1,5; 2,25)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$ noktalarının $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğine ait noktalar olduğu sonucuna varabiliriz. Bu noktalar, Çizim 1 a)'da verilen koordinat sisteminde gösterilmiştir. Fonksiyonun grafiğine ait ne kadar çok noktayı koordinat sisteminde gösterirsek, grafiğin geometrik görünümü hakkında o kadar iyi bir görüntü elde ederiz.



Çizim 1

- $y = x^2$ grafiğine ait $x \in \mathbb{R}$ için tüm (x, x^2) noktaları koordinat sisteminde gösterilirse, bu noktalar bir parabol oluşturur (Çizim 1 b).
- Koordinat başlangıcı $O(0, 0)$ grafiğin en alt noktasıdır. Bu nokta parabolün **tepe** noktasıdır.
- Parabolün $\{(x, y) \mid y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$ her $M(x, y)$ noktası için, M noktasının y eksenine göre simetriği olan $M'(-x, y)$, noktasının da parabol üzerinde olduğunu görebiliriz. Bu, y ekseninin bu parabolün simetri eksenini olduğu anlamına gelir.

Alıştırma Soruları!

- Verilen fonksiyonlardan hangisi ikinci dereceden fonksiyondur:
 - $f(x) = x^2 - 2x^2$;
 - $f(x) = 5x^2$;
 - $f(x) = x(2x - 3)$;
 - $f(x) = 2 - 3x - x^2$;
 - $f(x) = -2x + 3x^2 - 5$
- m parametresinin hangi değerleri için verilen fonksiyon ikinci dereceden fonksiyon olur:
 - $f(x) = 2x^2 - (m + 1)x + 7$;
 - $f(x) = (m - 3)x^2 + x + 1$;
 - $f(x) = (m^2 - 9)x^2 - 4x - 5 + m$.
- $f(x) = 2x^2$ olsun.
 - Defterine geçir ve tabloyu doldur:

x	-2,5	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	2,5
x^2									
 - Fonksiyonun grafiğini çiz ve grafiği kullanarak fonksiyonun aşağıdaki değerlerini karşılaştıır:
 - $f(-4)$ ve $f(-2)$;
 - $f(-4)$ ve $f(2)$;
 - $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ eğer $x_1 < x_2 < 0$;
 - $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ eğer $0 < x_1 < x_2$.
- $f(x) = -x^2 + bx + c$ fonksiyonu verilmiştir. b ve c değerlerini belirle, eğer
 - $f(1) = -3, f(0) = 1$;
 - $f(-2) = -10, f(2) = -6$.
- $f(x) = ax^2 + bx + c$, ise $f(1) = 2, f(-2) = 29, f(2) = 5$ fonksiyonunu belirle.
- $f(x) = 2x^2 - (m + 1)x + 1$ fonksiyonunun grafiği $(-1, 5)$ noktasından geçecek şekilde m parametresini belirle.
- $f(x) = x^2 + x + k$ fonksiyonu için $f(k - 1) = k^2$ olduğunu kanıtla.
- $f(x) = ax^2 + c$ fonksiyonunu belirle, eğer
 - $f(1) = 0$ ve $f(-2) = 3$;
 - $f(0) = -1$ ve $f(4) = 12$.

3.2 $f(x) = ax^2$ VE $f(x) = ax^2 + c$ FONKSİYONLARININ GRAFİĞİ

Hatırla!

- $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği olan eğrinin adı nedir?
- $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ parabolünün tepe noktası hangi noktadır?
- $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ parabolünün simetri eksenini hangi doğrudur?

Örnek 1

Verilen fonksiyonların grafiğini aynı koordinat sisteminde çiz:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x^2$, $h(x) = \frac{1}{3}x^2$ b) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = -3x^2$.

Çözüm:

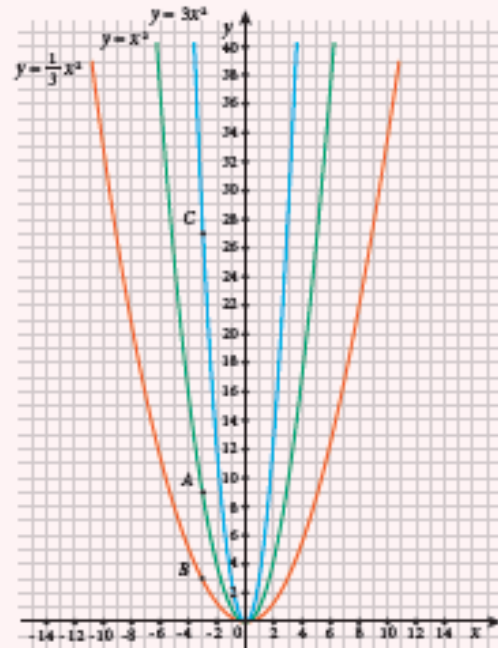
- a) Değişken x için birkaç değer seçeriz ve grafiklerinden birkaç nokta belirlemek için fonksiyonların değerlerini hesaplarız.

x	-3	-1	0	1	3
x^2	9	1	0	1	9
$3x^2$	27	3	0	3	27
$\frac{1}{3}x^2$	3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3

Tablodaki verileri kullanarak ve bu üç fonksiyonun grafiklerinden elde edilen noktaları birleştirerek fonksiyonları grafiksel olarak gösteririz (Çizim 1'e bakınız).

A, B ve C noktası, $x = -3$ için elde edilen bu üç fonksiyonun grafiklerine ait noktalardır (üç noktada da x koordinatı -3 'tür).

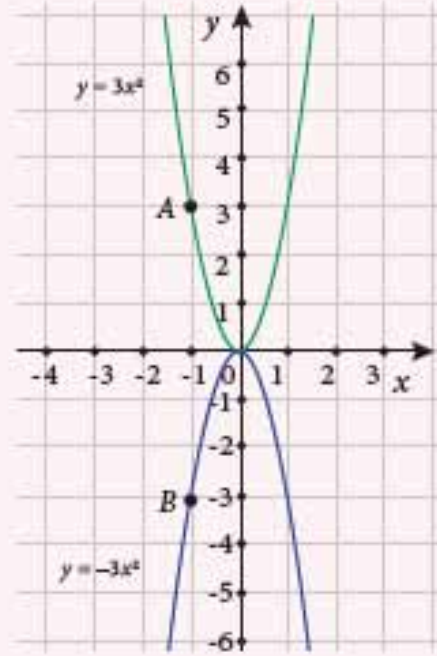
Bu üç noktanın y koordinatlarından, x^2 'nin önündeki katsayısının (ikinci dereceden fonksiyondaki a katsayısı) pozitif değerleri büyüdükçe, sıfırdan farklı aynı x ($x \neq 0$) için daha büyük y değerleri elde edildiğini görebiliriz.



b) Bu iki fonksiyon için aynı x değerlerine göre değer tablosu şöyledir.

x	-3	-1	0	1	3
$3x^2$	27	3	0	3	27
$-3x^2$	-27	-3	0	-3	-27

Çizimde fonksiyonlar grafiksel olarak gösterilmiştir. A ve B noktalarının ordinatlarının birbirine zıt sayılar olduğunu görebiliriz. Bu, $x \neq 0$ olan grafiklerdeki tüm noktalar için geçerlidir. Bu sonuç, $y = -3x^2$ fonksiyonunun grafiğinin, $y = 3x^2$ fonksiyonunun grafiğinden x eksenine göre yansıma (simetri) ile elde edilebileceğini gösterir.



Unutma!

- $y = ax^2$, $a \neq 0$ fonksiyonunun grafiği, *parabol* adı verilen bir eğridir.
- Grafiğin en alçak noktası ($a > 0$ olduğunda), yani grafiğin en yüksek noktası ($a < 0$ olduğunda) *parabolün tepe noktası* olarak adlandırılır.
- $y = ax^2$ grafiği olan parabolün tepe noktası koordinat başlangıcıdır.
- Eğer $a > 0$, ise a katsayısının değeri arttıkça, aynı x değişkeni değeri için $y = ax^2$ grafiğindeki noktaların ordinatları da artar; yani a değeri arttıkça grafik giderek daha dik olur, başka bir deyişle y eksenine giderek daha yakın olur.
- Eğer $a > 0$, ise parabolün açıklığı yukarı yönlüdür; eğer $a < 0$ ise parabolün açıklığı aşağı yönlüdür.
- $y = ax^2$, $a \neq 0$ fonksiyonu için $f(-x) = f(x)$ geçerlidir. Bu, fonksiyonun grafiğinin y eksenine göre simetrik olduğu anlamına gelir.

Soru 1

Verilen fonksiyonların grafiğini aynı koordinat sisteminde çiz.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \frac{1}{2}x^2$;

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

Hatırla!

A, koordinatları (1, 2) olan bir nokta ise, A noktasının 2 birim yukarı ötelenmesiyle elde edilen B noktasının ve A noktasının 5 birim aşağı ötelenmesiyle elde edilen C noktasının koordinatlarını belirle.

Örnek 2

Fonksiyonların grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiz ve grafikler arasındaki ilişkiyi fark et.

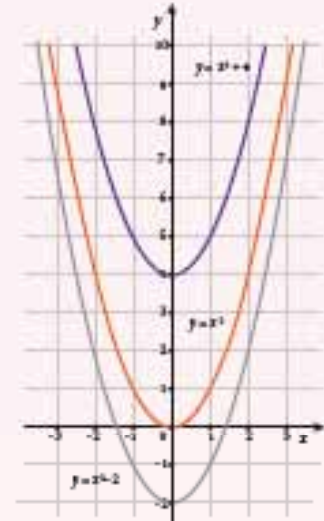
$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 4, \quad h(x) = x^2 - 2,$$

Çözüm:

Önce verilen fonksiyonlar için değer tablosu oluştururuz.

Sonra elde edilen noktaların yardımıyla, fonksiyonların grafikleri olan parabolleri çizeriz (Çizim 2).

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 4$	$h(x) = x^2 - 2$
-2	4	$4 + 4 = 8$	$4 - 2 = 2$
-1	1	$1 + 4 = 5$	$1 - 2 = -1$
0	0	$0 + 4 = 4$	$0 - 2 = -2$
1	1	$1 + 4 = 5$	$1 - 2 = -1$
1,5	2,25	$2,25 + 4 = 6,25$	$2,25 - 2 = 0,25$
3	9	$9 + 4 = 13$	$9 - 2 = 7$



$f(x) = x^2$ VE $g(x) = x^2 + 4$, değerlerini karşılaştırsak, x 'in her değeri için $g(x)$ değerinin $f(x)$ değerinden 4 fazla olduğunu görebiliriz. Benzer şekilde $h(x)$, $f(x)$ 'ten 2 küçüktür.

Buradan, $g(x) = x^2 + 4$ fonksiyonunun grafiğinin, $f(x) = x^2$ grafiğinin 4 birim yukarı kaydırılması, yani ötelenmesiyle elde edilebileceği sonucu çıkar.

Yani $g(x) = x^2 + 4$ fonksiyonunun grafiği, y eksenine göre simetrik olan bir paraboldür ve grafiğin en alçak noktası (0, 4) noktasıdır; bu nokta parabolün tepe noktasıdır.

Benzer şekilde $h(x) = x^2 - 2$ fonksiyonunun grafiği de y eksenine göre simetrik bir paraboldür ve $f(x) = x^2$ grafiğinin 2 birim aşağı kaydırılması, yani ötelenmesiyle elde edilir. Bu parabolün tepe noktası (0, -2) noktasıdır.

Soru 2

$g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$, $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ ve $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiz ve bazı özelliklerini incele.

Unutma!

$y = ax^2 + c$ fonksiyonunun grafiği, tepe noktası $T(0, c)$ olan bir paraboldür. Bu parabol, $c > 0$ ise $y = ax^2$ parabolünün c birim yukarı, $c < 0$ ise $|c|$ birim aşağı ötelenmesiyle elde edilir.

 $f(x) = ax^2 + c, a \neq 0$ Fonksiyonunun Özellikleri:

- Fonksiyon tüm gerçel sayılar için tanımlıdır, yani $D_f = \mathbb{R}$ 'dir.
- Parabolün tepe noktası $T(0, c)$ noktasıdır.
- Eğer $a > 0$ ise $T(0, c)$ tepe noktası grafiğin en alçak noktasıdır, yani $f(0) = c$ fonksiyonun en küçük değeridir. Buradan, fonksiyonun değer kümesinin $V_f = [c, +\infty)$ olduğu sonucu çıkar. Eğer $a < 0$ ise tepe noktası grafiğin en yüksek noktasıdır, yani $f(0) = c$ fonksiyonun en büyük değeridir. Buna göre, fonksiyonun değer kümesi $V_f = (-\infty, c]$ 'dir.
- Yukarıdakilerden, $f(x) = ax^2 + c, a \neq 0$ fonksiyonunun grafiğinin (parabolün) tepe noktasında en küçük veya en büyük değere, yani ekstrem değere sahip olduğu sonucu çıkar.

Yani,

eğer $a > 0$, ise $x=0$ için $y_{\min} = c$,

eğer $a < 0$, ise $x=0$ için $y_{\max} = c$ 'dir.

- Fonksiyon grafiğinin (parabolün) simetri eksen y eksenidir.

Örnek 3

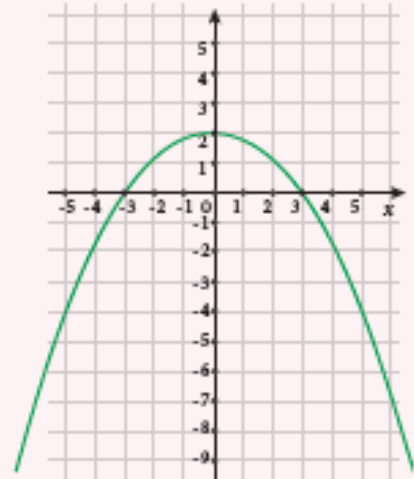
$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$ fonksiyonunun özelliklerini yaz.

Çözüm:

- Fonksiyonun tanım kümesi $D_f = \mathbb{R}$ 'dir
- Fonksiyonun değer (görüntü) kümesi $V_f = (-\infty, 2]$ 'dir
- Parabolün tepe noktası $T(0, 2)$ 'dir
- $a = -\frac{1}{4} < 0$ olduğundan, fonksiyon $x = 0$ için $y_{\max} = 2$ maksimum değerine sahiptir.
- Fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetriktir.

Fonksiyonun grafiği çizimde verilmiştir. Buradan, bu grafiğin

$y = \frac{1}{4}x^2$ grafiğinin x eksenine göre yansıtılması ve elde edilen parabolün 2 birim yukarı ötelenmesiyle elde edildiği görülebilir.

**Soru 3**

$y = -x^2 - 2$ fonksiyonunun özelliklerini yaz. $y = -x^2 - 2$ fonksiyonunun grafiğini hangi fonksiyonun grafiğini yansıtarak ve öteleyerek elde edebilirsin?

Soru 4

- a) Bağımsız değişken x 'in 5 farklı değeri için $y = \frac{1}{2}x^2$ fonksiyonunun değer tablosunu oluştur.
- b) Tabloyu kullanarak $y = \frac{1}{2}x^2$ grafiğini taslak olarak çiz.
- c) $y = \frac{1}{2}x^2$ grafiğini kullanarak $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ grafiğini taslak olarak çiz ve $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ fonksiyonunun özelliklerini yaz.

Alıştırma Soruları!

Verilen fonksiyonların grafiklerini çiz. Bunun için önce birinci fonksiyonun grafiğini taslak olarak çiz, diğer iki fonksiyonun grafiklerini ise birinci fonksiyonun grafiğinden elde et. (1-3)

1. $y = x^2$, $y = x^2 - 2$, $y = x^2 + 2$;
2. $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 1$;
3. $y = -x^2$, $y = 3 - x^2$, $y = -4 - x^2$.

Verilen fonksiyon için değer kümesini, grafiğin tepe noktasını ve ekstrem değerini belirle. (4-6)

4. a) $y = x^2 + 5$; b) $y = -x^2 + 1$.
5. a) $y = 3x^2 - 1$; b) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$.
6. a) $y = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}$; b) $y = \frac{4}{3}x^2 - 2$.
7. $y = -\frac{2}{3}x^2$ fonksiyonunun grafiğindeki her noktanın ordinatı.
 - a) 3 azaltılırsa; b) 4 artırılırsa; hangi fonksiyon elde edilir?
8. $y = ax^2 + 2$ parabolünün, verilen parabole dönüşmesi için kaç birim ve hangi yönde ötelenmesi gerekir?
 - a) $y = ax^2$; b) $y = ax^2 + 7$; c) $y = ax^2 - 4$?

3.3 İKİNCİ DERECEDEKİ FONKSİYONUN KANONİK (TEPE NOKTASI) BİÇİMİ VE $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ GRAFİĞİ

Hatırla!

- A , koordinatları $(1, 4)$ olan nokta olsun. A_1 noktası, A noktasının 4 birim sola ötelenmesiyle; A_2 noktası ise A noktasının 2 birim sağa ötelenmesiyle elde edilmişse A_1 ve A_2 noktalarının koordinatları nedir?
- $f(x) = ax^2 + bx + c$, fonksiyonuna, a , b ve c gerçekte sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere, ikinci dereceden fonksiyon denir.
- Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri ikinci dereceden fonksiyondur?
a) $y = -(x - 3)^2$; b) $y = 4(x - 1)^2 + 3$; c) $y = 2(x - 1)^2 - x^2 + 1$.

Örnek 1

$f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 3)^2$, $h(x) = (x - 2)^2$.
fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiz ve elde edilen grafikler arasındaki ilişkiyi incele.

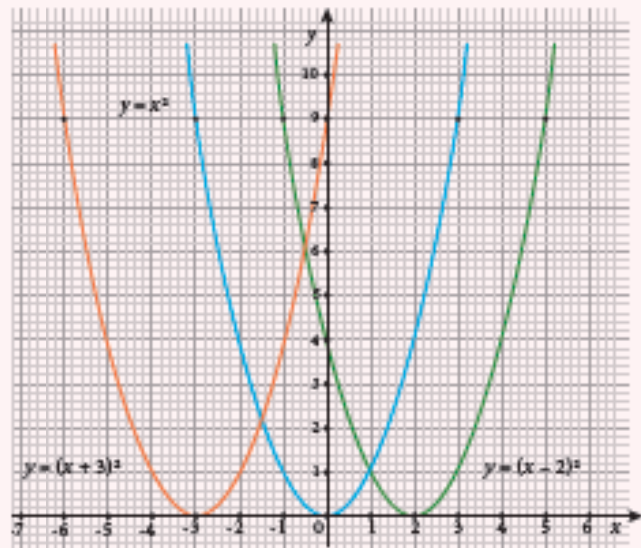
Çözüm:

Bu üç fonksiyonun grafikleri olan parabolleri elde etmek için x 'in birkaç değeri için fonksiyonların değer tablosunu oluşturacağız.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 3)^2$	$h(x) = (x - 2)^2$
-2	4	1	16
-1	1	4	9
0	0	9	4
1	1	16	1
2	4	25	0

Fonksiyonların grafiklerinden aşağıdakileri görebiliriz:

- $y = (x + 3)^2$ fonksiyonunun grafiği, $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine boyuncası 3 birim sola ötelenmesiyle elde edilir;
- $y = (x - 2)^2$ fonksiyonunun grafiği, $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine boyuncası 2 birim sağa ötelenmesiyle elde edilir.
- Parabollerin her birinin simetri eksenini, parabolün tepe noktasından geçen ve y eksenine paralel olan doğrudur.



Unutma!

- $f(x) = a(x - \alpha)^2$ fonksiyonunun grafiği, tepe noktası $T(\alpha, 0)$ olan bir paraboldür. Bu parabol, $\alpha > 0$ ise $f(x) = ax^2$ parabolünün x eksenini boyunca α birim sağa $\alpha < 0$ ise $|\alpha|$ birim sola ötelenmesiyle elde edilir.
- $f(x) = a(x - \alpha)^2$ parabolünün simetri eksenini, parabolün tepe noktasından geçen ve y eksenine paralel olan $x = \alpha$, doğrusudur.

Soru 1

$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2$ ve $g(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^2$ fonksiyonlarının grafiklerini çiz.

Örnek 2

$y = -3x^2 + 12x - 12$ fonksiyonunun grafiğini çiz ve özelliklerini incele.

Çözüm:

Fonksiyonu $y = -3(x^2 - 4x + 4)$, yani

$y = -3(x - 2)^2$ biçiminde yazabiliriz.

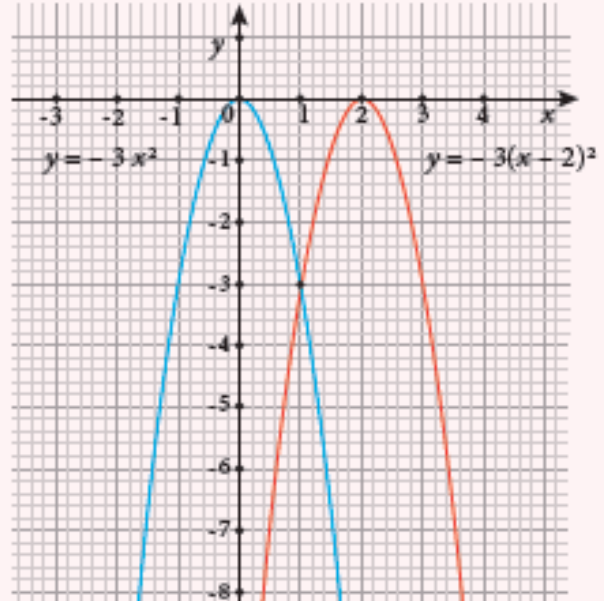
Önce $y = -3x^2$ fonksiyonu için birkaç değere göre tablo oluşturur ve bu fonksiyonun grafiği olan parabolü çizeriz.

$y = -3(x - 2)^2$ grafiğini, $y = -3x^2$ grafiğinin x eksenini boyunca 2 birim sağa ötelenmesiyle elde ederiz.

$y = -3(x - 2)^2$ grafiğinden fonksiyonun aşağıdaki özelliklerini görebiliriz:

- Tanım kümesi $D_f = \mathbb{R}$ 'dir. Fonksiyonun değer kümesi $V_f = (-\infty, 0]$ 'dir.
- Parabolün tepe noktası $T(2, 0)$ noktasındadır.
- Parabol aşağı doğru dönüktür ($a = -3 < 0$), bu nedenle fonksiyon $x = 2$ için $y_{\max} = 0$ maksimum değerine sahiptir.
- Grafiğin simetri eksenini $x = 2$ doğrusudur.

x	-2	-1	0	1	2
$-3x^2$	-12	-3	0	-3	-12



Soru 2

$y = 2(x - 1)^2$ fonksiyonunun grafiğini çiz ve fonksiyonun özelliklerini yaz.

Hatırla!

$A(x, y)$ noktasının 3 birim sağa ve 2 birim aşağı ötelenmesiyle elde edilen noktanın koordinatları nasıl değişir?

Örnek 3

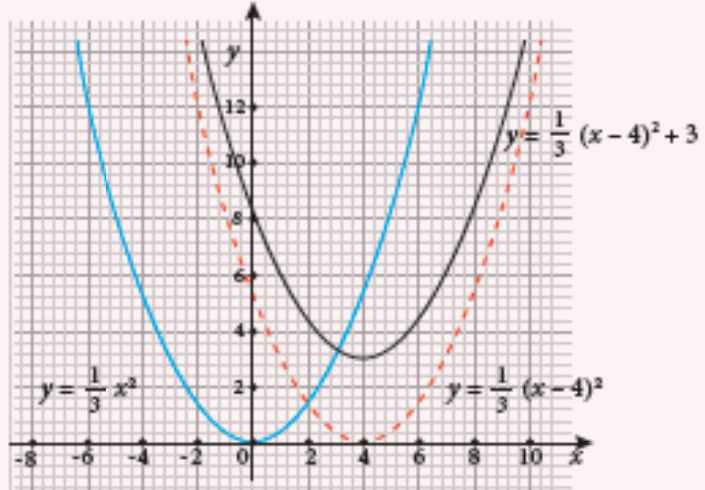
$y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3$ grafiğini çiz.

Çözüm:

Önce değer tablosunu kullanarak $y = \frac{1}{3}x^2$ parabolünü taslak olarak çizeceğiz (çizimdeki mavi parabol). Sonra $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2$ grafiğini x eksenini boyunca 4 birim sağa öteleyerek $y = \frac{1}{3}x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizeceğiz (çizimdeki kesik kırmızı çizgili parabol).

Son olarak, $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2$ grafiğini 3 birim yukarı öteleyerek $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3$ grafiğini elde edeceğiz.

$y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3$ grafiğinin, yukarı doğru dönük (çünkü $a = \frac{1}{3} > 0$), tepe noktası $T(4, 3)$ ve simetri eksenini $x = 4$ olan bir parabol olduğunu görebiliriz.

**Unutma!**

- $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ biçimine ikinci dereceden fonksiyonun kanonik biçimi denir.
- Fonksiyonun grafiği, tepe noktası $T(\alpha, \beta)$ ve simetri eksenini $x = \alpha$ olan bir paraboldür.

Örnek 4

$y = (x + 2)^2 - 3$ grafiğini çiz.

Çözüm:

Fonksiyon kanonik biçimde verilmiştir:

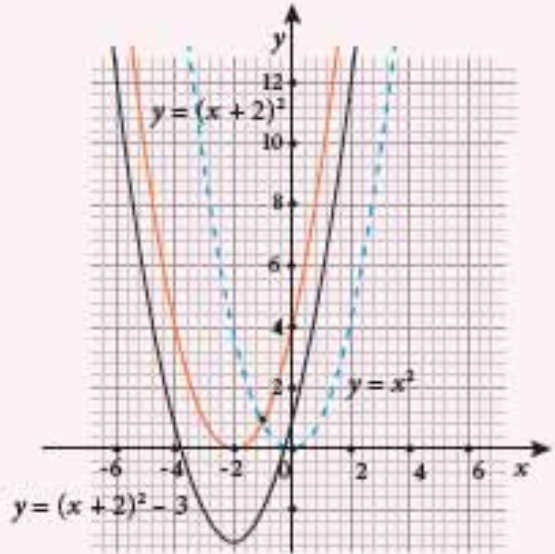
$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

burada

$$a = 1, \alpha = -2, \beta = -3.$$

Buna göre parabolün tepe noktası $T(-2, -3)$ olacaktır.

Önce $y = x^2$ parabolünü çizeriz (mavi kesik çizgi). Sonra 2 birim sola öteleme ile ($\alpha = -2$) $y = (x + 2)^2$ grafiğini elde ederiz (sarı çizgi) ve son olarak ikinci grafiği 3 birim aşağı öteleyerek ($\beta = -3$) verilen fonksiyonun grafiğini elde ederiz (siyah çizgi).



Alıştırma Soruları

- Parabolün tepe noktasının hangi nokta olduğunu belirle:
 - $y = 4(x + 1)^2$;
 - $y = 4(x + 2)^2 - 3$;
 - $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$.
- Fonksiyonun grafiğini çiz:
 - $f(x) = 3(x + 2)^2$;
 - $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$;
 - $f(x) = -5(x - 3)^2$.
 - $f(x) = x^2 + 6x + 9$;
 - $f(x) = -4x^2 + 24x - 36$;
 - $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$.
- Fonksiyonların grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiz.
 - $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 4)^2$, $h(x) = (x + 2)^2$;
 - $f(x) = -x^2$, $g(x) = -(x - 4)^2$, $h(x) = -(x + 2)^2$.
- Verilen fonksiyonla belirlenen parabolün tepe noktasını, simetri eksenini ve ekstrem değerini belirle.
 - $f(x) = -4(x + 2)^2$;
 - $y = \frac{1}{5}(x + 1)^2 - 3$;
 - $y = \frac{2}{3}(x - 6)^2 + \frac{1}{2}$.
- $y = 3(x - 2)^2$ parabolünün, verilen parabole dönüşmesi için kaç birim ve hangi yönde ötelenmesi gerekir?
 - $y = 3(x + 2)^2$;
 - $y = 3(x - 5)^2 - 2$;
 - $y = 3(x + 1)^2 + 4$;
- $y = a(x - \alpha)^2$ parabolü $A(-3, 2)$ noktasından geçecek ve parabolün tepe noktası $T(4, 0)$ noktasında olacak şekilde a ve α değerlerini belirle.
- Grafiği, verilen fonksiyonun grafiğine x eksenine göre simetrisi olan fonksiyonu belirle.
 - $f(x) = (x - 5)^2$;
 - $f(x) = -(x + 1)^2$;
 - $f(x) = 3x^2 - 4$.

3.4 $f(x) = ax^2 + bx + c$ FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ

Hatırla!

- $f(x) = a(x - \alpha)^2$ fonksiyonunun grafiği, tepe noktası $T(\alpha, 0)$ olan bir paraboldür.
- $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ biçimine ikinci dereceden fonksiyonun kanonik biçimi denir. Fonksiyonun grafiği, tepe noktası $T(\alpha, \beta)$ ve simetri eksenini $x = \alpha$ olan bir paraboldür.

Etkinlik

$y = x^2 - 6x$ fonksiyonunu $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ biçimine dönüştür.

Örnek 1

$y = 3x^2 - 24x + 12$ fonksiyonunu kanonik biçime dönüştür ve grafiğinin tepe noktasını belirle.

Çözüm:

Kareli terimin önündeki katsayıyı parantez dışına alırsak ve $y = 3(x^2 - 8x + 4)$ elde ederiz. Parantezin içinde tam kareye tamamlarız:

$$y = 3(x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 + 4)$$

$$y = 3((x - 4)^2 - 12)$$

$$y = 3(x - 4)^2 - 36$$

Bununla fonksiyonu kanonik biçime dönüştürdük. Kanonik biçimden, fonksiyonun grafiğinin tepe noktasının $T(4, -36)$ noktası olduğu sonucu çıkar.

Genel durumda, $y = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyonunu kanonik biçime aşağıdaki şekilde dönüştürürüz.

- İlk iki terimde a katsayısını parantez dışına alırsak ve $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$ elde ederiz.

- Parantez içindeki doğrusal terimi $\frac{b}{a}x = 2 \cdot \frac{b}{2a}x$ biçiminde yazarız ve

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c \text{ elde ederiz.}$$

- Parantez içindeki ifadeyi, $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ekleyip çıkararak tam kareye tamamlarız ve

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ elde ederiz.}$$

Bununla ikinci dereceden fonksiyonu $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ kanonik biçimine dönüştürdük ve a ile β parametreleri için $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$ değerlerini elde ettik. İkinci dereceden fonksiyonun kanonik biçiminden, grafiğin tepe noktasının $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ noktası olacağı açıktır.

Unutma!

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği, tepe noktası $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ olan bir paraboldür.
- Her ikinci dereceden fonksiyon $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ kanonik biçiminde yazılabilir.
- Açıklanan yöntemle $y = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyonu kanonik biçime dönüştürülür

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünü daha doğru çizmek için parabolün *karakteristik noktalarının* belirlenmesi gerekir. Bunlar, tepe noktası ile parabolün koordinat eksenleriyle kesişme noktalarıdır.

Örnek 2

$y = 3x^2 - 12x + 7$ fonksiyonunu kanonik biçime dönüştür ve grafiğini çiz.

Çözüm:

Fonksiyonun kanonik biçimini, a , b ve c katsayılarının değerlerini elde edilen formüllerde doğrudan yerine yazarak belirleyebilir veya kanonik biçimi elde etmek için tam kareye tamamlama yöntemini uygulayabiliriz.

Yöntem 1 (dönüştürme yöntemiyle)

$$\begin{aligned} y &= 3(x^2 - 4x) + 7 \\ y &= 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 7 \\ y &= 3((x - 2)^2 - 4) + 7 \\ y &= 3(x - 2)^2 - 12 + 7 \\ y &= 3(x - 2)^2 - 5 \end{aligned}$$

Yöntem 2 (α ve β için elde edilen formülleri kullanarak)

Verilen fonksiyonun katsayıları $a = 3$, $b = -12$ ve $c = 7$ 'dir.

$$\text{Buradan, } \alpha = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = 2, \beta = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7 - (-12)^2}{4 \cdot 3} = -5, \text{ yani } y = 3(x - 2)^2 - 5 \text{ tir.}$$

Fonksiyonun kanonik biçiminden, fonksiyon grafiğinin tepe noktasının $T(2, -5)$ olduğu ve grafiğin $x = 2$ doğrusuna göre simetrik olduğu sonucuna ulaşırız.

Grafiği daha doğru taslak olarak çizmek için koordinat eksenleriyle kesişme noktalarını da belirleriz. y eksenine kesişme noktasını belirlemek için $x = 0$ olduğunda fonksiyonun değerini buluruz $x = 0$ için, $x = 0, y = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 7 = 7$ olduğundan, kesişme noktası $A(0, 7)$ 'dir.

$A_1(4, 7)$ noktası, $x = 2$ simetri eksenine göre $A(0, 7)$ noktasıyla simetriktir. x eksenine kesişme noktalarını belirlemek için $y = 0$ olduğu x değerlerini belirleriz.

$$3x^2 - 12x + 7 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{6}$$

$$x_1 \approx 0,71, x_2 \approx 3,29 \text{ elde ederiz.}$$

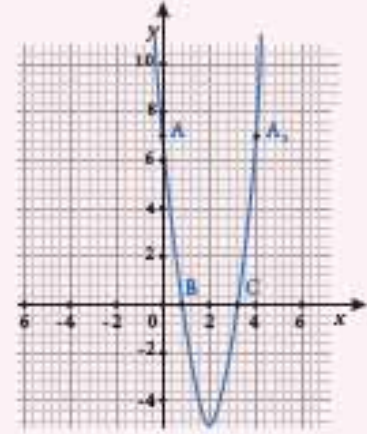
Kesişme noktaları $B(0,71, 0)$ ve $C(3,29, 0)$ 'dir.

Grafik çizimde gösterilmiştir.

Parabolü çizmek için en az 5 noktasını belirlememiz gerektiğini görebiliriz. Eğer $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek çözümü yoksa,

bu parabolün x eksenini kesmediği anlamına gelir. Bu durumda, isteğe bağlı seçilen x değerleri için en az iki başka nokta daha belirleriz.

$y = 3x^2 - 12x + 7$ yani $y = 3(x - 2)^2 - 5$ fonksiyonunun grafiğini, $y = 3x^2$ grafiğinin ötelenmeleriyle de elde edebiliriz. Bu durumda, $y = 3x^2$ grafiğini taslak olarak çizmek için önce grafikten birkaç nokta belirlememiz gerekir. Sonra elde edilen parabolü 2 birim sağa ötelemeliyiz ($\alpha = 2$) böylece $y = 3(x - 2)^2$ parabolünü elde ederiz. Son olarak, $y = 3(x - 2)^2$ parabolünü 5 birim aşağı öteriz ($\beta = -5$) ve $y = 3x^2 - 12x + 7$ grafiğini elde ederiz.



Örnek 3

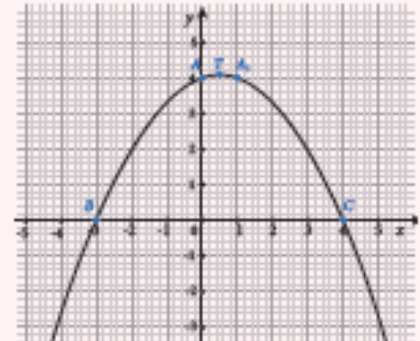
Parabolün karakteristik noktalarını belirleyerek fonksiyonun grafiğini çiz:

a) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$; b) $y = 2x^2 + 3x + 5$.

Çözüm:

a) Katsayılar $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 4$.

- Tepe noktası $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot (-\frac{1}{3})} = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot 4 - (\frac{1}{3})^2}{4 \cdot (-\frac{1}{3})} = \frac{49}{12}$, $T(\frac{1}{2}, \frac{49}{12})$.
- y eksenine kesişme: $f(0) = 4$, kesişme noktası $A(0, 4)$ 'tür.
- x eksenine kesişmeler: $y = 0$ için $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4 = 0$ elde ederiz. Bunun çözümleri $x_1 = -3$ ve $x_2 = 4$ 'tür. Parabol x eksenini $B(-3, 0)$ ve $C(4, 0)$ noktalarında keser.
- Simetri eksen $x = \frac{1}{2}$, doğrusudur. Bu nedenle $A_1(1, 4)$ noktası, bu eksene göre $A(0, 4)$ noktasıyla simetriktir.
- $a = -\frac{1}{3} < 0$, olduğundan, parabolün açıklığı aşağı yönlüdür. Grafik çizimde gösterilmiştir.



b) Katsayılar $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ 'tir.

• Tepe noktası $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5 - 3^2}{4 \cdot 2} = \frac{31}{8} = 3,875$, $\left(-\frac{3}{4}, \frac{31}{8}\right)$.

• Simetri eksenini $x = -\frac{3}{4}$ doğrusudur.

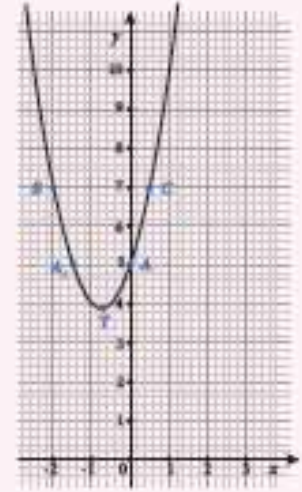
• y eksenine kesişme: $f(0) = 5$, kesişme noktası $A(0, 5)$ 'tir. $A_1\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$ noktası, $x = -\frac{3}{4}$ doğrusuna göre $A(0, 5)$ noktasıyla simetriktir.

• x eksenine kesişmeler: $2x^2 + 3x + 5 = 0$ denkleminin gerçek çözümleri yoktur, çünkü diskriminant $D = -31 < 0$ 'dır. Yani parabol x eksenini kesmez.

• Parabolü daha doğru çizmek için grafikten iki nokta daha belirleyeceğiz.

$x = -2$, için $f(-2) = 7$, olduğundan, grafikten bir nokta $B(-2, 7)$ 'dir. $x = \frac{1}{2}$ için $f\left(\frac{1}{2}\right) = 7$, olduğundan, $C\left(\frac{1}{2}, 7\right)$ noktasını elde ederiz.

• $a = 2 > 0$ olduğundan, parabolün açıklığı yukarı yönlüdür. Grafik çizimde gösterilmiştir.



Alıştırma Soruları!

1. Fonksiyonları kanonik biçimde yaz:

a) $f(x) = x^2 + 4x$;

b) $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$;

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

2. Fonksiyonların tepe noktasını belirle:

a) $f(x) = 4x^2 + 5x - 3$;

b) $f(x) = -5x^2 + 6x$;

c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 2x - 1$.

3. Fonksiyonların grafiğini çiz:

a) $y = -(x + 1)^2 + 2$;

b) $y = 2(x - 2)^2 + 1$;

c) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + \frac{3}{2}$.

4. Grafikleri karakteristik noktaların yardımıyla çiz:

a) $f(x) = x^2 + x - 2$;

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$;

c) $f(x) = x^2 - 4x$.

5. Fonksiyonların grafiğini çiz:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$;

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$;

c) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$.

6. p ve q 'nin hangi değerleri için $T(-3, 2)$ noktası $y = x^2 + px + q$ parabolünün tepe noktası olur?

7. $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ parabolü $A(8, 5)$ noktasından geçiyor ve tepe noktası $T(6, 3)$ 'tür. a , α ve β değerlerini belirle.

8. $f(x) = ax^2 + bx + c$, fonksiyonunun katsayıları a , b ve c 'yi, fonksiyon x eksenini $A(3, 0)$, noktasında kesecek, $x = 1$ için ekstrem değere sahip olacak ve $f(1) = -4$ olacak şekilde belirle.

3.5 İKİNCİ DERECE DEN FONKSİYONUN ÖZELLİKLERİ

Hatırla!

$f(x) = -3x^2 + 2x$ fonksiyonunun en büyük değerini belirle.

$f(x) = ax^2 + c$ ikinci dereceden fonksiyonunun özelliklerini hatırla.

$y = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyonunun özelliklerini inceleyelim.

1) Tanım kümesi

İkinci dereceden fonksiyon tüm gerçek sayılar için tanımlıdır, yani $D_f = \mathbb{R}$ 'dir.

2) Parabolün tepe noktası

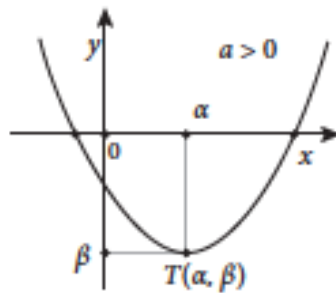
Fonksiyonun grafiği olan parabolün tepe noktasını belirlemek için fonksiyonu $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$, kanonik

biçiminde yazarsınız. Burada $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$ olduğundan, tepe noktası $T(\alpha, \beta)$ 'dir.

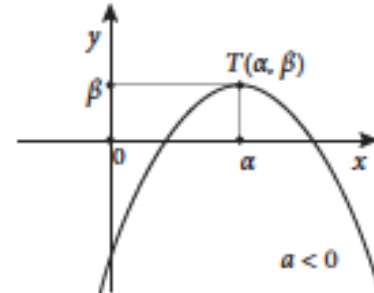
3) Uç Değerler (En Büyük ve En Küçük Değer - Ekstrem değer)

Fonksiyon, tepe noktasında uç değere sahiptir. Bu değer, a katsayısının işaretine bağlı olarak maksimum veya minimum olur.

- Eğer $a > 0$ ise parabolün açıklığı yukarı yönlü olur ve tepe noktasında minimum değere sahip olur.
- Eğer $a < 0$ ise parabolün açıklığı aşağı yönlü olur ve tepe noktasında maksimum değere sahip olur.



$$x = -\frac{b}{2a} \text{ için, } y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$



$$x = -\frac{b}{2a} \text{ için, } y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Örnek 1

$y = 3x^2 - 5x - 4$ fonksiyonu için verilenleri belirle:

- a) tanım kümesini; b) tepe noktasının koordinatlarını; c) uç değeri.

Çözüm:

a) $D_f = \mathbb{R}$

b) Tepe noktasının koordinatlarını formüllere göre belirleyeceğiz: $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$,

İkinci dereceden fonksiyonun katsayıları $a = 3$, $b = -5$, $c = -4$ 'tür.

$$\alpha = \frac{-5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6} \quad \beta = \frac{4 \cdot 3 \cdot (-4) - (-5)^2}{4 \cdot 3} = \frac{-48 - 25}{12} = -\frac{73}{12}$$

Parabolün tepe noktası $T\left(\frac{5}{6}, -\frac{73}{12}\right)$ 'dir.

- c) $a > 0$, olduğundan, parabolün açığı yukarı yönlü olur ve tepe noktasında minimuma sahip olur.

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 3 \cdot (-4) - (-5)^2}{4 \cdot 3} = -\frac{73}{12}, \quad \text{şö } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

Örnek 2

m parametresinin hangi değeri için $y = mx^2 - 3x + 2$ fonksiyonunun maksimumu 4'e eşit olur?

Çözüm:

İkinci dereceden fonksiyonun maksimuma sahip olması için $m < 0$ olmalıdır ve bu durumda

$$y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot m \cdot 2 - (-3)^2}{4 \cdot m}$$

Maksimum 4 olmalıdır, bu nedenle aşağıdaki denklemi elde ederiz: $\frac{4 \cdot m \cdot 2 - (-3)^2}{4 \cdot m} = 4$.

Denklemi çözerek $m = -\frac{9}{8}$ elde ederiz.

Örnek 3

Aralarındaki farkın 12 olduğu biliniyorsa, iki gerçekte sayının mümkün olan en küçük çarpımını bul.

Çözüm:

Sayılardan birini x ile gösterelim.

İki sayı arasındaki fark 12 olduğundan, diğer sayı $x - 12$ veya $x + 12$ olabilir.

Diğer sayının $x + 12$ olduğunu kabul edelim.

İki sayının çarpımını fonksiyon olarak yazacağız:

$$y = x \cdot (x + 12)$$

$$y = x^2 + 12x, \text{ burada } a = 1, b = 12 \text{ ve } c = 0.$$

$y_{\min}$ değerini belirlemeliyiz.

Fonksiyonun tepe noktası formülünden elde ederiz.

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad x_{\min} = -\frac{b}{2a}$$

$$y_{\min} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 0 - 12^2}{4 \cdot 1} = \frac{-144}{4} \quad x_{\min} = -\frac{12}{2 \cdot 1}$$

$$y_{\min} = -36 \quad x_{\min} = -6$$

Buradan sayılardan birinin -6 olduğu sonucuna varırız.

Diğer sayı $-6 + 12 = 6$ olacaktır.

Farkı 12 olan iki sayının en küçük çarpımı $-6 \cdot 6 = -36$ 'dır.

Soru 1

Tabanı ile bu tabana ait yüksekliğinin toplamı 8 cm olan üçgenin en büyük alanını belirle.

4) Fonksiyonun değer kümesi

Uç değer, V_f ile gösterdiğimiz fonksiyonun değer kümesini belirler.

- Eğer $a > 0$, ise $V_f = [\beta, +\infty)$.
- Eğer $a < 0$, ise $V_f = (-\infty, \beta]$.

Örnek 4

$y = -2x^2 - 4x - 5$ fonksiyonunun değer kümesini belirle.

Çözüm:

$a < 0$ katsayısı, parabolün açıklığının aşağı yönlü olduğunu ve maksimuma sahip olduğunu gösterir.

$$y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -3. \text{ Buna göre değer kümesi } V_f = (-\infty, -3] \text{ tür.}$$

5) Fonksiyonun sıfırları (Kökleri)

$y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun sıfırları, $y = 0$ olduğu x değerleridir. Yani fonksiyonun sıfırları, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümleridir.

Fonksiyonun sıfırlarıyla, grafiğin x eksenini kestiği noktaların x koordinatlarını belirleriz. Eğer $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek çözümleri yoksa, grafik x eksenini kesmez.

Soru 2

Fonksiyonların sıfırlarını belirle:

$$a) y = 2x^2 - 2x + 5; \quad b) y = 2x^2 + 3x - 2; \quad c) y = x^2 - 4x + 4.$$

Ne fark ediyorsun?

Unutma!

$D = b^2 - 4ac$, $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denkleminin diskriminantı olsun.

- Eğer $D > 0$, ise $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun iki gerçek sıfırı vardır, yani $y = ax^2 + bx + c$ parabolü x eksenini iki noktada keser.
- Eğer $D = 0$, ise $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun sıfırı $x = -\frac{b}{2a}$, olur, yani $y = ax^2 + bx + c$ parabolü x eksenine $T\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ noktasında teğet olur.
- Eğer $D < 0$, ise $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun gerçek sıfırı yoktur, yani $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün x eksenine ortak noktası yoktur.

Soru 3

$y = x^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyonunun grafiği x eksenini $A(3, 0)$ ve $B(1, 0)$ noktalarında kestiğine göre b ve c 'nin değerlerini belirle.

6) Fonksiyonun Monotonluğu (Fonksiyonun Artan ve Azalan Olduğu Aralıklar)

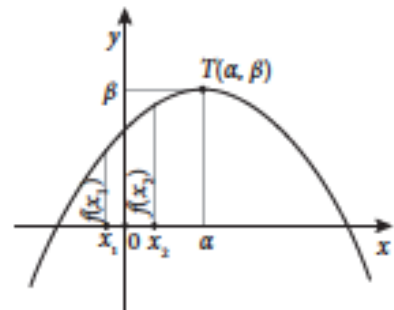
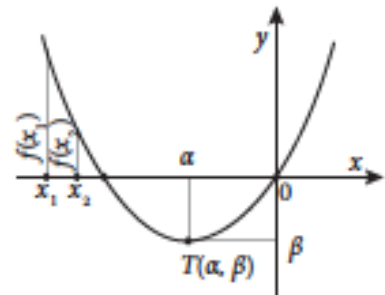
Bir fonksiyonun monotonluğunu (artan, azalan) incelemek, x değeri arttığında fonksiyonun değerlerine ne olduğunu incelemek anlamına gelir.

- Eğer $a > 0$ ise fonksiyonun minimumu vardır. Parabolün simetri eksenini $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$, $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun tanım kümesini $(-\infty, \alpha)$ ve $(\alpha, +\infty)$ olmak üzere iki aralığa ayırır. Fonksiyon $x = \alpha$ noktasında minimuma sahip olduğundan, birinci aralıkta (minimumun solunda) fonksiyon azalır (x arttıkça fonksiyonun değerleri azalır), ikinci aralıkta ise (minimumun sağında) fonksiyon artar (x arttıkça fonksiyonun değerleri artar).

Çizimde, $x_1 < x_2 < \alpha$, $f(x_1) > f(x_2)$ olduğunu görebiliriz. Yani fonksiyon $x \in (-\infty, \alpha)$ için monoton azalırken, $x \in (\alpha, +\infty)$ için monoton artar.

- Eğer $a < 0$ ise fonksiyon $x = \alpha$ noktasında maksimuma sahiptir. Bu nedenle birinci aralıkta (maksimumun solunda) fonksiyon artar, ikinci aralıkta ise (maksimumun sağında) fonksiyon azalır.

Çizimde, bu durumda $x_1 < x_2 < \alpha$ için $f(x_1) < f(x_2)$ olduğunu görebiliriz. Yani fonksiyon $x \in (-\infty, \alpha)$ için monoton artarken, $x \in (\alpha, +\infty)$ için monoton azalır.



Örnek 4

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun monotonluğunu incele.

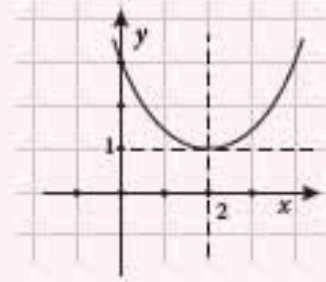
Çözüm:

Bir fonksiyonun monotonluğunu incelemek, fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirlemek anlamına gelir.

$a = \frac{1}{2} > 0$ olduğundan, fonksiyonun minimumu vardır:

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = 1, \quad x = -\frac{b}{2a} = 2 \text{ için.}$$

Buna göre monotonluğun incelenmesi gereken aralıklar $(-\infty, 2)$ ve $(2, +\infty)$ 'dir (resme bakınız). $x = 2$ için fonksiyonun değeri en küçük olduğundan, fonksiyon $(-\infty, 2)$ aralığında monoton azalır, $(2, +\infty)$ aralığında ise monoton artar.

**Soru 3**

Fonksiyonların artan ve azalan olduğu aralıkları belirle:

- a) $y = -x^2 + x$; b) $y = x^2 + 4$; c) $y = 3x^2 - 2x + 7$

7) Fonksiyonun işareti

İkinci dereceden bir fonksiyonun işaretini belirlemek, fonksiyonun pozitif olduğu x değerlerinin aralıklarını ve negatif olduğu x değerlerinin aralıklarını belirlemek anlamına gelir.

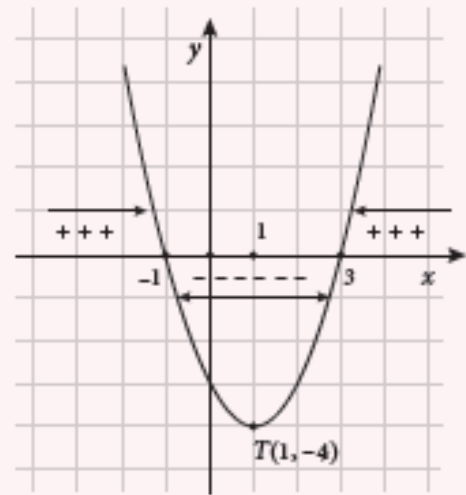
Örnek 5

$y = x^2 - 2x - 3$ ikinci dereceden fonksiyonunun işaretini belirle.

Çözüm:

Önce parabolü taslak olarak çizebilmek için fonksiyon grafiğinin tepe noktasını ve x eksenine kesişme noktalarını belirleriz. $y = x^2 - 2x - 3$ parabolünün tepe noktası $T(1, -4)$ 'tür. $x^2 - 2x - 3 = 0$ denkleminin çözümleri $x_1 = -1$ ve $x_2 = 3$, olduğundan, parabol x eksenini $(-1, 0)$ ve $(3, 0)$ noktalarında keser. Bu üç noktayı kullanarak çizimde gösterilen fonksiyon grafiğini çizeriz.

Fonksiyonun grafiğinden, fonksiyonun $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ için pozitif, yani $x \in (-1, 3)$ için ise negatif, yani $f(x) < 0$ olduğunu görürüz.



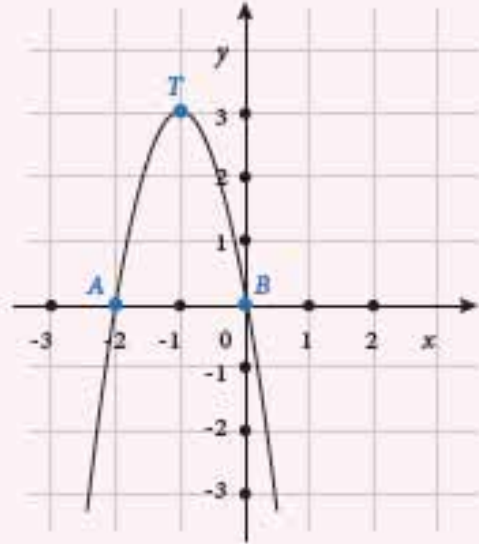
Örnek 6

Fonksiyonların işaretini belirle:

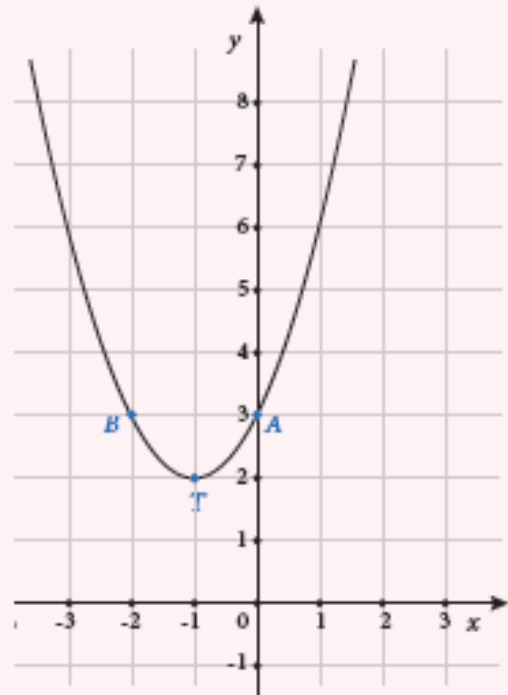
a) $y = -3x^2 - 6x$; b) $y = x^2 + 2x + 3$

Çözüm:

- a) Parabolün tepe noktası $T(-1, 3)$ 'tür. $y = 0$ için $-3x^2 - 6x = 0$ denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümleri $x_1 = -2$ ve $x_2 = 0$, olduğundan, parabol x eksenini $(-2, 0)$ ve $(0, 0)$ noktalarında keser. Bu üç noktayı kullanarak, $a = -3 < 0$ olduğundan açıklığı aşağı yönlü olan parabolü taslak olarak çizeriz. Fonksiyonun grafiği çizimde verilmiştir. Fonksiyonun grafiğinden, fonksiyonun $x \in (-2, 0)$, için pozitif, $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, için ise negatif olduğunu görürüz.



- b) $y = x^2 + 2x + 3$ parabolünün tepe noktası $T(-1, 2)$ 'dir. $T(-1, 2)$ 'dir. $y = 0$, için $x^2 + 2x + 3 = 0$, denklemini elde ederiz. Bu denklemin gerçek çözümleri yoktur, yani parabol x eksenini kesmez. $x = 0$, için $y = 3$, elde ederiz. Buna göre parabol y eksenini $A(0, 3)$ noktasında keser. A noktasına simetrik olan nokta $B(-2, 3)$ 'tür. Bu üç noktayı kullanarak, $a = 1 > 0$ olduğundan açıklığı yukarı yönlü bir parabol olan fonksiyonun grafiğini çizeriz. Parabolün x eksenine kesişme noktası olmadığından ve açıklığı yukarı yönlü olduğundan, parabolün tamamı x ekseninin üzerindedir. Yani fonksiyon her gerçek sayı için pozitifdir; başka bir deyişle, her $x \in (-\infty, +\infty)$, için $f(x) > 0$ 'dır.



Örnek 7

Bir basketbol takımı, 15 000 seyirci kapasiteli bir arenada oynamaktadır. Bilet fiyatı 14 dolardır ve son maçlardaki ortalama seyirci sayısı 9500 kişi olmuştur. Pazar araştırması, bilet fiyatındaki her 1 dolarlık indirim için ortalama seyirci sayısının 1000 kişi arttığını göstermektedir.

- Bilet fiyatına bağlı olarak satılan biletlerden elde edilen geliri hesaplayan fonksiyonu belirle.
- Bilet satışından elde edilen gelirin en büyük olacağı bilet fiyatını belirle.
- Bilet fiyatının, hiç kimsenin maçlara katılmayacağı ve gelir elde edilmeyeceği kadar yüksek olacağı değeri belirle.

Çözüm:

- x bilet fiyatı olsun. Verilen bir bilet fiyatı değeri için satılan biletlerden elde edilen geliri hesaplayacak $f(x)$ fonksiyonunu belirlememiz gerekir. n seyirci sayısı (satılan bilet sayısı) ise $f(x) = n \cdot x$ olduğu açıktır.

Bir biletin fiyatı 14 dolar olduğunda (ortalama) 9500 bilet satılacağını ve fiyattaki her 1 dolarlık indirim için satılan bilet sayısının 1000 artacağını biliyoruz (fiyat 3 dolar azalırsa, seyirci sayısı $9500 + 3000$ olacaktır).

x bilet fiyatı ise, $14 - x$ ile bu fiyatın 14 dolardan kaç dolar düşük olduğunu hesaplarız. Buna göre, bilet fiyatı x dolar ise satılan bilet sayısı $1000(14 - x)$ kadar artacaktır, yani toplam satılan bilet sayısı $n = 9500 + 1000(14 - x)$ olacaktır.

Şimdi $f(x)$ fonksiyonu için elde ederiz:

$$f(x) = x \cdot (9500 + 1000(14 - x))$$

$$f(x) = x \cdot (23500 - 1000x)$$

$$f(x) = -1000x^2 + 23500x$$

- $f(x)$ fonksiyonunun maksimumunu belirlemek gerekir. Fonksiyon, $a = -1000 < 0$ katsayısına sahip ikinci dereceden bir fonksiyondur. Bu, grafiğin açıklığı aşağı yönlü bir parabol olduğunu ve tepe noktasında maksimuma sahip olduğunu gösterir. Bu maksimum $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23500}{2(-1000)} = 11,75$ için elde edilir. Buna göre, bilet fiyatı 11,75 dolar olursa gelir en büyük olur.

- $f(x) = 0$ olacak şekilde bilet fiyatı x 'i belirlemek gerekir.

$$-1000x^2 + 23500x = 0$$

$$x(23500 - 1000x) = 0$$

Elde edilen denklemin çözümleri $x = 0$ ve $x = 23,5$ 'tir. Buna göre 23,5 dolar, bilet için çok yüksek bir fiyat olurdu ve hiç kimse bilet satın almazdı. 0 dolarlık fiyat için de gelirin sıfır olacağı açıktır, fakat soruda hiç kimsenin maçlara katılmayacağı kadar yüksek fiyatın belirlenmesi istendiği için sorunun cevabı 23,5 dolardır.

Alıştırma Soruları!

Fonksiyonların özelliklerini belirle (tepe noktası, uç değer, değer kümesi, sıfırları, artan ve azalan olduğu aralıklar). (1-5)

1. $y = x^2 - 4x + 1$
2. $y = -x^2 + x + 6$
3. $y = 2x^2 - 7x + 3$
4. $y = 5x^2 + 7x + 3$
5. $y = -2x^2 + 4x$
6. $y + 16 = -x^2 + 8x$
7. Fonksiyonun işaretini belirle:
a) $y = x^2 - 5x + 6$; b) $y = x^2 + 2$; c) $y = -2x^2 - 6x$.
8. $f(x) = ax^2 + 3x + c$, fonksiyonunda $x_1 = -1$ ve $x_2 = 2$ fonksiyonun sıfırları ise a ve c katsayılarını belirle.
9. $\frac{4}{6x^2 - 5x - 3}$ ifadesi hangi x değeri için en büyük değere sahip olur?
10. Popüler bir plajda alkolsüz içecek satan bir satıcı, satış kayıtlarını analiz eder ve bir günde x kutu gazlı içecek satarsa kârının (dolar olarak) $P(x) = -0,001x^2 + 3x - 1800$ ile verildiğini bulur. Maksimum günlük kâr ne kadardır ve maksimum kâr elde etmek için kaç kutu satmalıdır?
11. Bir televizyon reklamının etkililiği, izleyicinin onu kaç kez izlediğine bağlıdır. Birkaç deneyden sonra, bir reklam ajansı etkililiğin E değerinin aşağıdaki formülle belirlenebileceğini bulmuştur:

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2,$$

burada n , izleyicinin verilen reklamı kaç kez izlediğidir. Reklamın maksimum etkililiğe sahip olması için izleyici reklamı kaç kez izlemelidir?

3.6 İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONUN DEĞİŞİMİ VE GRAFİĞİ

Hatırla!

- $x_1 = 2$ ve $x_2 = -2$; $y = x^2 - 4$ fonksiyonunun sıfırlarıdır ve $T(0, -4)$ tepe noktasında fonksiyonun minimumu vardır. $(0, +\infty)$ aralığında fonksiyon artar, $(-\infty, 0)$ aralığında ise azalır.
- $y = x^2 - 4$ fonksiyonunun diğer özelliklerini de belirle.

Çok sık şu yönergeyle karşılaşılır: "Grafığı çiz ve ikinci dereceden fonksiyonun değişimini incele..."

Bu isteğe cevap vermek için şunları belirlemen gerekir:

- 1) fonksiyonun tanım kümesi;
- 2) fonksiyonun grafiği olan parabolün tepe noktası;
- 3) parabolün koordinat eksenleriyle kesişme noktaları;
- 4) parabolün simetri eksen.

Bu bilgilerle fonksiyonun grafiğini çizebilir, sonra ayrıca şunları belirleyebilirsiniz:

- 5) fonksiyonun uç değeri;
- 6) fonksiyonun değer kümesi;
- 7) fonksiyonun monotonluğu;
- 8) fonksiyonun işareti.

Cevapları (fonksiyonun özelliklerini) hangi sırayla yazacağın önemli değildir.

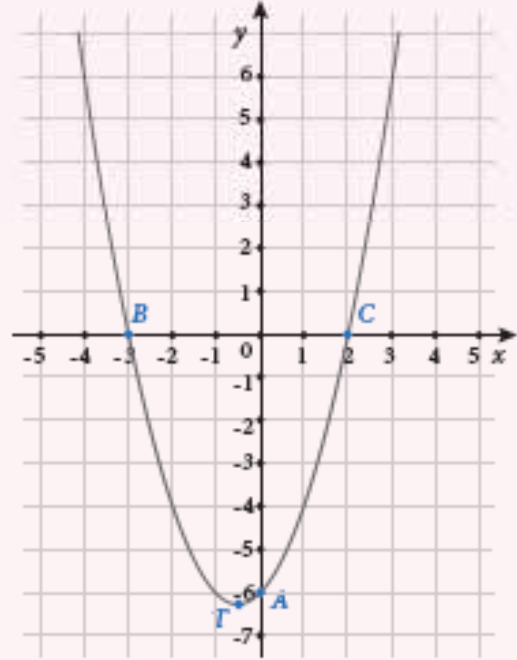
Örnek 1

$$y = x^2 + x - 6.$$

fonksiyonunun grafiğini çiz ve değişimini incele.

Çözüm:

- Tanım kümesi $D_f = \mathbb{R}$ 'dir ve parabolün tepe noktası
- $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{25}{4} = -6,25$, $(-0,5; -6,25)$ 'tir.
- Koordinat eksenleriyle kesişme noktaları şunlardır:
 - y eksenine kesişme: $f(0) = -6$, $A(0, -6)$
 - x eksenine kesişme (fonksiyonun sıfırları): $x^2 + x - 6 = 0$ denkleminin çözümleri $x_1 = -3$ ve $x_2 = 2$ 'dir, $B(-3, 0)$, $C(2, 0)$.
- Simetri eksen $x = -\frac{1}{2}$ doğrusudur.



Bu özelliklerle, çizimde verilen fonksiyon grafiğini çizebiliriz.

- Uç değeri: $a = 1 > 0$, olduğundan, fonksiyon $x = -0,5$ için $y_{\min} = -6,25$ minimumuna sahiptir.
- Değer kümesi $V_f = [-6,25; +\infty)$ 'dir.
- Fonksiyonun monotonluğu: fonksiyon $x \in (-\infty; -0,5)$ için monoton azalır, fonksiyon $x \in (-0,5; +\infty)$ için monoton artar.
- Fonksiyonun işareti: fonksiyon $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ için pozitif, $x \in (-3, 2)$ için negatiftir.

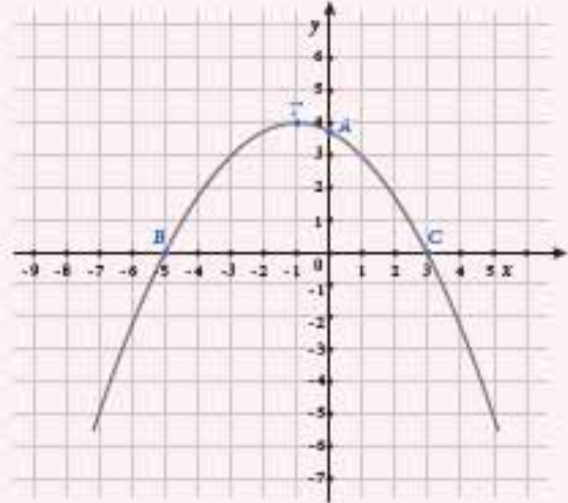
Örnek 2

$y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$ fonksiyonunun grafiğini çiz ve fonksiyonun değişimini incele.

Çözüm:

Önce fonksiyonun grafiğini belirleriz:

- Tanım kümesi $D_f = \mathbb{R}$ 'dir.
- $\alpha = -1$, $\beta = 4$ olduğundan, parabolün tepe noktası $T(-1, 4)$ 'tür.
- Koordinat eksenleriyle kesişme noktaları şunlardır:
 - y eksenine kesişme:
 $f(0) = \frac{15}{4} = 3,75$, $A(0, 3,75)$
 - x eksenine kesişme (fonksiyonun sıfırları):
 $-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4} = 0$ denkleminin
 çözümleri $x_1 = -5$ ve $x_2 = 3$, $B(-5, 0)$, $C(3, 0)$.



- Simetri eksenini $x = -1$ 'dir.
Fonksiyonun grafiği çizimde verilmiştir.

Grafikten fonksiyonun değişimini inceleriz:

- Uç değer: $a = 1 < 0$ olduğundan, fonksiyon $x = -1$ için $y_{\max} = 4$ maksimumuna sahiptir.
- Değer kümesi $V_f = (-\infty, 4]$ 'tür.
- Fonksiyonun monotonluğu: fonksiyon $x \in (-\infty, -1)$ için monoton artar, $x \in (-1, +\infty)$ için monoton azalır.
- Fonksiyonun işareti: $f(x) < 0$ için $x \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$, $f(x) > 0$ için $x \in (-5, 3)$.

Soru 1

Fonksiyonun grafiğini çiz ve değişimini incele.

- a) $y = x^2 + 2x$; b) $y = -x^2 + 2x$; c) $y = -x^2 - 2x$

Alıştırma Soruları!

Fonksiyonların grafiğini çiz ve değişimlerini incele. (1-5)

1. $y = x^2 - 3$
2. $y = -2(x - 1)^2$
3. $y = 2x^2 - 4x - 3$
4. $y = (x + 2)^2$
5. $y = \frac{1}{4}(x + 4)^2 - \frac{1}{4}$
6. $y = -4x^2 + 25$

3.7 İKİNCİ DERECEDE EŞİTSİZLİKLER

Hatırla!

- $x \in \{-3, -2, 0, 1\}$, değerlerinden hangileri için $x - 3 > 0$ eşitsizliği doğru bir sayısal ifadeye dönüşür?
- x_1 ve x_2 , $ax^2 + bx + c$, ikinci dereceden üç terimlisinin sıfırları ise, üç terimlinin doğrusal çarpanlara ayrılması $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ biçimindedir.
- $a \cdot b$ çarpımı, her iki çarpan da pozitifse veya her iki çarpan da negatifse pozitiftir.
- $a \cdot b$ çarpımı, çarpanlardan biri pozitif, diğeri negatifse negatiftir.
- $x + 3 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

Etkinlik

$x(x - 2)$ çarpımının hangi x değerleri için pozitif olacağını belirle.

Unutma!

- $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$
 $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$
 biçimindeki eşitsizliklere; $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere **ikinci dereceden eşitsizlikler** denir.
- İkinci dereceden eşitsizliğin bu biçimi, **ikinci dereceden eşitsizliğin genel biçimidir**.

Örnek 1

$x^2 + 2x - 8 < 0$ ikinci dereceden eşitsizliğini çöz.

Çözüm:

Eşitsizliğin doğru bir sayısal ifade olacağı x değerleri kümesini belirlememiz gerekir.

İki şekilde ilerleyebiliriz.

Birinci yöntem:

Eşitsizliğin sol tarafındaki ikinci dereceden üç terimliyi doğrusal çarpanlara ayırırız. Üç terimlinin

sıfırlarını belirleriz $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-8)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$, yani $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

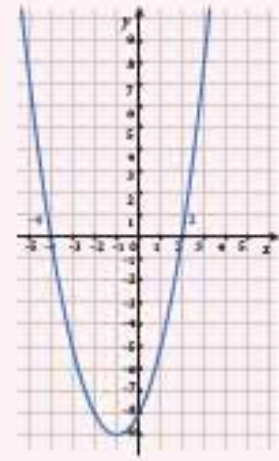
Buradan $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$ olduğundan, eşitsizliği $(x + 4)(x - 2) < 0$ biçiminde yazabiliriz. $(x + 4)(x - 2)$ çarpımının negatif olması için çarpanların zıt işaretli olması gerekir. Bu nedenle aşağıdaki iki doğrusal eşitsizlik sistemini elde ederiz:

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \quad \text{ya da} \quad \begin{cases} x+4 < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}, \quad \text{yani} \quad \begin{cases} x > -4 \\ x < 2 \end{cases} \quad \text{ya da} \quad \begin{cases} x < -4 \\ x > 2 \end{cases}$$

Birinci eşitsizlik sisteminin çözümü $M_1 = (-4, 2)$, ikinci eşitsizlik sisteminin çözümü ise $M_2 = \emptyset$ 'dir. Verilen eşitsizliğin çözümü, iki sistemin çözüm kümelerinin birleşimi olacaktır. Buna göre ikinci dereceden eşitsizliğin çözüm kümesi $M = M_1 \cup M_2 = (-4, 2) \cup \emptyset = (-4, 2)$ olur.

İkinci yöntem:

İkinci dereceden eşitsizliğin çözüm kümesini belirlemek için karşılık gelen ikinci dereceden fonksiyonun grafiğini kullanabiliriz. Bu durumda ikinci dereceden eşitsizliğin çözümü, $y = x^2 + 2x - 8$ ikinci dereceden fonksiyonunun negatif değerlere sahip olduğu x değerlerini belirlemeye dönüşür. Bu fonksiyonun sıfırları $x_1 = -4$ ve $x_2 = 2$ 'dir. İkinci dereceden terimin önündeki a katsayısı pozitif olduğundan, parabolün açıldığı yukarı yönlüdür. Fonksiyonun grafiğinden (çizimde verilmiştir), fonksiyonun negatif olduğu, yani grafiğinin x ekseninin altında bulunduğu x değerlerini okuruz. Bu şekilde, $x^2 + 2x - 8 < 0$ eşitsizliğinin $x \in (-4, 2)$ için sağlandığını elde ederiz.



Örnek 2

$\frac{x^2 - 5}{4} - \frac{3x^2 + 1}{2} \geq -2$ eşitsizliğini çöz. Sonra eşitsizliğin tam sayı çözümlerini belirle.

Çözüm:

Önce eşitsizliği genel biçime dönüştürürüz. Paydaların EKOK'u olan 4 ile çarptıktan sonra

$$x^2 - 5 - 2(3x^2 + 1) \geq -8 \text{ elde ederiz.}$$

Düzenleme sonucunda $5x^2 - 1 \leq 0$ eşitsizliğini elde ederiz. Karşılık gelen ikinci dereceden fonksiyonun sıfırlarını $5x^2 - 1 = 0$ denklemini çözerek bu-

luruz. Buradan $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ elde ederiz. $a = 5$ pozitif olduğundan, $y = 5x^2 - 1$ parabolünün açıldığı yukarı yönlüdür ve $f(x) \leq 0$ için $x \in \left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$ olur.

Eşitsizliğin tam sayı çözümleri, $\left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$ çözüm kümesine ait tam sayılar olacaktır. Buradan, verilen eşitsizliğin tam sayı çözümleri kümesi e

$M = \{0\}$ 'dir.



Soru 1

Eşitsizlikleri çöz:

- a) $2x^2 + 6x - 8 > 0$; b) $2x^2 - 3x \leq 5$; c) $(2x - 1)^2 > 2 - 4x$; d) $2x^2 - 18 \leq 0$.

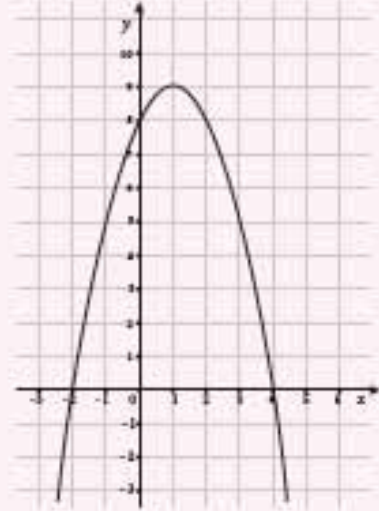
Örnek 3

$f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesini belirle.

Çözüm:

Karekök, yalnızca kökün altındaki ifade negatif olmayan bir sayı olduğunda gerçek sayı olur. Buna göre fonksiyonun tanım kümesi, $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi olacaktır.

$-x^2 + 2x + 8 = 0$ denkleminin çözümleri $x_1 = -2$ ve $x_2 = 4$ 'tür. $a = -1 < 0$ olduğundan, parabolün açıklığı aşağı yönlüdür. Buna göre $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$ için $x \in [-2, 4]$ olur, yani $D_f = [-2, 4]$ 'tür.

**Soru 2**

Fonksiyonların tanım kümesini belirle:

- a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 6}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$.

Örnek 4

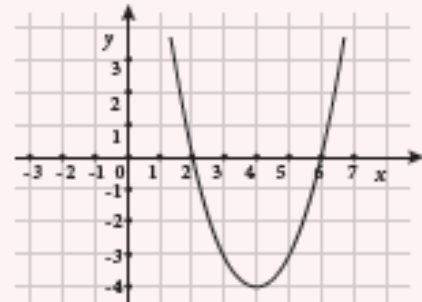
m parametresinin hangi değerleri için $x^2 + (2 - m)x - 2 + m = 0$ denkleminin gerçek çözümleri olur?

Çözüm:

Denklemin diskriminantı

$$D = (2 - m)^2 - 4(-2 + m) = m^2 - 8m + 12 \text{ dir.}$$

Gerçek çözümlerinin olması için $D \geq 0$, olmalıdır, yani $m^2 - 8m + 12 \geq 0$. $m^2 - 8m + 12 = 0$ denkleminin çözümleri $m_1 = 2$ ve $m_2 = 6$ 'dır ve parabolün açıklığı yukarı yönlüdür. Buradan $m^2 - 8m + 12 \geq 0$ için $m \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$ olduğu sonucu çıkar.

**Soru 3**

$m < 0$ ise, $mx^2 + 2(m + 2)x + 2m + 4 = 0$ denkleminin gerçek çözümlerinin olmaması için m parametresinin hangi değeri gerekir?

Örnek 5

Bir grup öğrenci konsere gitmek istiyor. Onları konsere götürecek otobüs kiralama ücreti 450 dolardır ve öğrenciler arasında eşit olarak paylaşılmalıdır. Konser organizatörleri, otobüsle gelecek gruplara konser bileti için indirim sunmaktadır. Bir biletin normal fiyatı 50 dolardır, fakat otobüsle gelecek kişiler için bilet fiyatı, gruptaki her kişi için 10 sent azalır (yani grupta 10 kişi varsa, her biri 100 sent indirim alır). Öğrenci başına toplam masrafın 54 dolardan az olması için kaç öğrenci toplanmalıdır?

Çözüm:

Grupdaki öğrenci sayısı x olsun. O hâlde her öğrenci otobüs için $\frac{450}{x}$ dolar ve bilet için $50 - 0,1 \cdot x$ dolar ödemelidir. Her öğrenci için toplam masraf 54 dolardan az olmalıdır, bu nedenle aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} \frac{450}{x} + (50 - 0,1x) &< 54 \quad (x \text{ ile çarparsanız, } x > 0, \text{ olduğundan eşitsizliğin yönü değişmez}) \\ 450 + 50x - 0,1x^2 &< 54x \\ -0,1x^2 - 4x + 450 &< 0 \end{aligned}$$

$-0,1x^2 - 4x + 450 = 0$ denkleminin çözümleri (yani $y = -0,1x^2 - 4x + 450$ fonksiyonunun sıfırları) $x_1 = -90$ ve $x_2 = 50$. Ayrıca $a = -0,1 < 0$ olduğundan, parabolün açığı aşağı yönlüdür. Buradan $-0,1x^2 - 4x + 450 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesinin $(-\infty, -90) \cup (50, +\infty)$ olduğu sonucu çıkar. Ancak x , gruptaki öğrenci sayısıdır ve negatif bir sayı olamaz. Bu yüzden çözüm $x \in (50, +\infty)$ olur. Yani her birinin masrafının 54 dolardan az olması için 50'den fazla öğrenci toplanmalıdır.

Alıştırma Soruları!

İkinci dereceden eşitsizlikleri çöz. (1-4)

1. a) $x^2 - 9 < 0$; b) $16 - x^2 \geq 0$; c) $x^2 - 2x > 0$.
2. a) $(3x + 1)(x - 1) \geq 0$; b) $x^2 - 3x - 18 \leq 0$; c) $x^2 + 2x > 3$.
3. a) $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$; b) $x^2 < x + 2$; c) $(x + 2)(x - 3) \geq 0$.
4. a) $(x + 4)^2 \geq 0$; b) $(x + 4)^2 > 0$; c) $(x + 4)^2 < 0$; d) $(x + 4)^2 \leq 0$.
5. Eşitsizliği ikinci dereceden eşitsizliğe dönüştürerek çöz: $\frac{(x-1)^2}{4} \leq 1 - \frac{3-x}{2}$.
6. $f(x) = \sqrt{24 - x - 3x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesini belirle.
7. m parametresinin hangi değerleri için $(m + 1)x^2 + 2(1 - m)x + 2m - 5 = 0$ denkleminin gerçek çözümleri olmaz?
8. Üretici belirli bir üründen x adet satarsa, gelir R ve maliyet C (dolar olarak) şu şekilde verilir:

$$R = 20x$$

$$C = 2000 + 8x + 0,0025x^2$$

Buna göre elde edilen kâr, gelirden maliyetin çıkarılmasıyla bulunur. Üreticinin en az 2400 dolar kâr elde etmesi için kaç adet satması gerektiğini belirle.

3.8 BİR BİLİNMEYENLİ İKİNCİ DERECEDEKİ EŞİTSİZLİK SİSTEMİ

Hatırla!

Sistemin çözüm kümesini grafiksel olarak göster: $\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 3 \end{cases}$.

$M_1 = (-3, 10]$ ve $M_2 = (-\infty, -1] \cup (5, +\infty)$ kümelerinin kesişimini belirle.

$\frac{a}{b}$ ifadesi hangi a ve b değerleri için negatiftir?

Etkinlik

Doğrusal eşitsizlik sistemini çöz: $\begin{cases} x - 5 \geq -1 \\ 5 - 2x < 3 \end{cases}$.

Örnek 1

Bir bilinmeyenli doğrusal eşitsizlik ve ikinci dereceden eşitsizlik sisteminin çözümünü belirle:

$$\begin{cases} 3x + 5 \leq 10 \\ x^2 + 3x - 10 < 0 \end{cases}$$

Çözüm:

$3x + 5 \leq 10$ doğrusal eşitsizliğini çözeriz.

$x \leq \frac{5}{3}$ elde ederiz, yani doğrusal eşitsizliğin çözüm kümesi $M_1 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ 'tür.

$x^2 + 3x - 10 < 0$ ikinci dereceden eşitsizliğinin çözüm kümesini belirleriz.

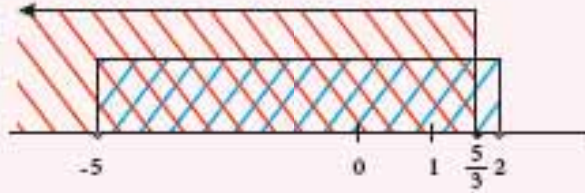
$x^2 + 3x - 10 = 0$ denkleminin çözümleri $x_1 = -5$ ve $x_2 = 2$, ve $a = 1 > 0$, olduğundan, parabolün açıklığı yukarı yönlüdür. Buna göre, $x^2 + 3x - 10 < 0$ için $x \in (-5, 2)$, yani çözüm kümesi $M_2 = (-5, 2)$ 'dir.

Sistemin çözüm kümesi, sistemdeki eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimidir. Buradan sistemin

çözümü olarak $M = M_1 \cap M_2 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \cap (-5, 2) = \left(-5, \frac{5}{3}\right]$ elde edilir.

İki eşitsizliğin çözüm kümelerinin kesişimini, iki kümeyi gerçek sayı doğrusu üzerinde göstererek grafiksel olarak da belirleyebiliriz (çizime bakınız). Kesişim, iki renkte eğik çizgilerin bulunduğu kısımdadır. M_1 kümesi kırmızı çizgilerle, M_2 ise mavi çizgilerle gösterilmiştir; iki renkten çizgilerin bulunduğu yer bu iki kümenin kesişimidir, yani kesişim iki kez taranmış bölgedir. Ayrıca, bir aralık uç noktalarından birinde kapalı ise, bu gerçek sayı doğrusunda dolu daire ile gösterilir.

$M_1 = \left[-\infty, \frac{5}{3}\right]$ kümesi, sağdan kapalı bir aralıktır. Bu, $\frac{5}{3}$ 'ün kümeye ait olduğu anlamına gelir ve bu nedenle çizimde bu noktada dolu daire vardır. Eğer bir aralık uç noktalarından birinde açıksa, gerçek sayı doğrusu üzerinde bu durum aralığın açık olduğu noktada boş daire ile gösterilir. Bu örnekte -5 ve 2 noktaları $M_2 = (-5, 2)$ kümesine ait değildir ve bu nedenle çizimde bu noktalarda boş daire vardır.



Soru 1

Eşitsizlik sistemini çöz.
$$\begin{cases} 2x+5 \leq 0 \\ x^2+2x-3 < 0 \end{cases}$$

Örnek 2

Bir bilinmeyenli ikinci dereceden eşitsizlik sistemini çöz.
$$\begin{cases} x^2-7x+10 \leq 0 \\ x^2-8x+7 > 0 \end{cases}$$

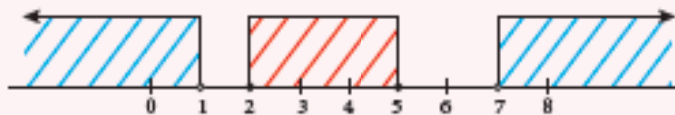
Çözüm:

Bir bilinmeyenli iki ikinci dereceden eşitsizlikten oluşan bir sistemimiz vardır. Önce sistemdeki her eşitsizliğin çözüm kümesini belirleriz, sonra sistemin çözümünü belirlemek için elde edilen iki çözüm kümesinin kesişimini ararız.

$x^2 - 7x + 10 = 0$ denkleminin çözümleri $x_1 = 2$ ve $x_2 = 5$ 'tir. $a = 1 > 0$ olduğundan, parabolün açıklığı yukarı yönlüdür. Buna göre $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ için $x \in [2, 5]$, yani çözüm kümesi $M_1 = [2, 5]$ olur.

$x^2 - 8x + 7 = 0$ denkleminin çözümleri $x_1 = 1$ ve $x_2 = 7$ 'dir. $a = 1 > 0$, olduğundan, bu parabolün de açıklığı yukarı yönlüdür. Buna göre $x^2 - 8x + 7 > 0$ için $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$, yani çözüm kümesi $M_2 = (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ olur.

İki eşitsizliğin elde edilen çözüm kümeleri çizimde grafiksel olarak gösterilmiştir.



Elde edilen iki çözüm kümesinin kesişiminin boş küme olduğunu görürüz. Bu nedenle verilen eşitsizlik sisteminin çözümü yoktur.

Örnek 3

Bir bilinmeyenli ikinci dereceden eşitsizlik sistemini çöz.

$$\begin{cases} (x-1)^2 - 2x > -3 \\ x(x-3) \leq x+5 \end{cases}$$

Çözüm:

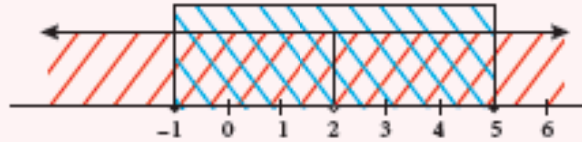
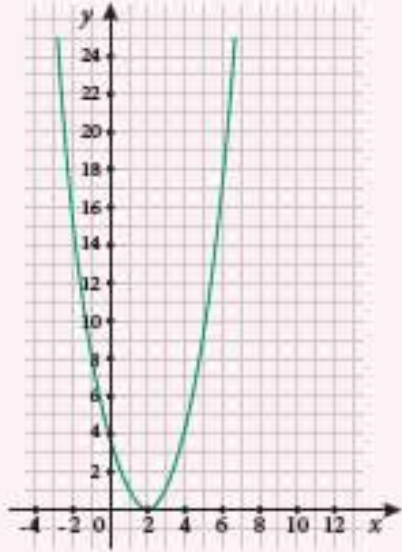
Önce iki eşitsizliği de genel biçime dönüştürürüz.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - 2x + 3 > 0 \\ x^2 - 3x - x - 5 \leq 0 \end{cases}, \text{ yani } \begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x^2 - 4x - 5 \leq 0 \end{cases} \text{ elde ederiz.}$$

$x^2 - 4x + 4 = 0$ denkleminin bir çözümü vardır: $x = 2$. Parabolün açığı yukarı yönlü olduğundan, $y = x^2 - 4x + 4$ grafiğinin tamamı x ekseninin üzerindedir ve tepe noktası $(2, 0)$ 'dır (çizime bakınız). Buna göre $x^2 - 4x + 4 > 0$ için $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ olur. Yani çözüm kümesi $M_1 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ 'dir.

$x^2 - 4x - 5 = 0$ denkleminin çözümleri $x_1 = -1$ ve $x_2 = 5$ 'tir. Buna göre $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ için $x \in [-1, 5]$, yani çözüm kümesi $M_2 = [-1, 5]$ olur.

İki eşitsizliğin elde edilen kümeleri çizimde grafiksel olarak gösterilmiştir.



Sistemin çözüm kümesi $M = M_1 \cap M_2 = ((-\infty, 2) \cup (2, +\infty)) \cap [-1, 5] = [-1, 2) \cup (2, 5]$.

Soru 2

Bir bilinmeyenli ikinci dereceden eşitsizlik sistemini çöz. $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0 \end{cases}$

Örnek 4

Eşitsizliği çöz $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} < 0$.

Çözüm:

Bölümün negatif olduğunu, payda ile payın zıt işaretli olduğu durumda biliriz. Buradan, bu eşitsizliğin çözüm kümesi, aşağıdaki iki ikinci dereceden eşitsizlik sisteminin çözüm kümelerinin birleşimi olacaktır:

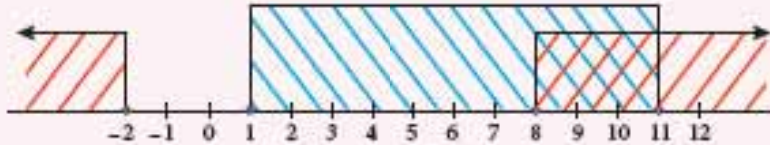
$$\begin{cases} x^2 - 6x - 16 > 0 \\ x^2 - 12x + 11 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0 \\ x^2 - 12x + 11 > 0 \end{cases}$$

$x^2 - 6x - 16 = 0$ denkleminin çözümleri $x_1 = -2$ ve $x_2 = 8$ 'dir. $x^2 - 12x + 11 = 0$ denkleminin çözümleri ise $x_1 = 1$ ve $x_2 = 11$ 'dir.

Birinci sistemin çözümü.

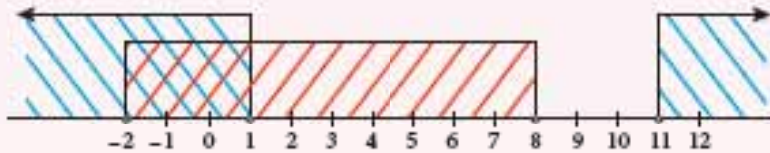
- $x^2 - 6x - 16 > 0$ için $x \in (-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$ yani çözüm kümesi $(-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$ 'dir.
- $x^2 - 12x + 11 < 0$ için $x \in (1, 11)$ yani çözüm kümesi $(1, 11)$ 'dir.

Birinci eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, bu iki kümenin kesişimidir, yani $M_1 = (8, 11)$ olur (çizime bakınız).

**İkinci sistemin çözümü.**

- $x^2 - 6x - 16 < 0$ için $x \in (-2, 8)$ yani çözüm kümesi $(-2, 8)$ 'dir.
- $x^2 - 12x + 11 > 0$ için $x \in (-\infty, 1) \cup (11, +\infty)$, yani çözüm kümesi $(-\infty, 1) \cup (11, +\infty)$ 'dir.

İkinci eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, bu iki kümenin kesişimidir, yani $M_2 = (-2, 1)$ olur (çizime bakınız).



$$\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} < 0 \text{ 'in çözümü } M = M_1 \cup M_2 = (-2, 1) \cup (8, 11) \text{ olur}$$

Örnek 5

Eşitsizliği çöz $\frac{x^2 + 2x + 1}{-x^2 - 2x + 3} \geq 0$.

Çözüm:

Bölüm, payda ve pay aynı işaretli olduğunda negatif olmayan olur ve bu durumda pay sıfıra da eşit olabilir. Buradan, bu eşitsizliğin çözüm kümesi, aşağıdaki iki ikinci dereceden eşitsizlik sisteminin çözüm kümelerinin birleşimi olacaktır:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 1 \leq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 < 0 \end{cases}$$

$x^2 + 2x + 1 = 0$ denkleminin çözümleri $x_1 = x_2 = -1$ 'dir (ve $y = x^2 + 2x + 1$ parabolünün açıklığı yukarı yönlüdür). $-x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin çözümleri ise $x_1 = -3$ ve $x_2 = 1$ 'dir (ve $y = -x^2 - 2x + 3$ parabolünün açıklığı aşağı yönlüdür).

Birinci sistemin çözümü.

- $x^2 + 2x + 1 \geq 0$ için $x \in \mathbb{R}$, yani çözüm kümesi $(-\infty, +\infty)$ 'dir.
- $-x^2 - 2x + 3 > 0$ için $x \in (-3, 1)$, yani çözüm kümesi $(-3, 1)$ 'dir.

Birinci eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, bu iki kümenin kesişimidir, yani $M_1 = (-3, 1)$ 'dir.

İkinci sistemin çözümü.

- $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ için $x = -1$, yani çözüm kümesi $\{-1\}$ 'dir.
- $-x^2 - 2x + 3 < 0$ için $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ yani çözüm kümesi $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ 'dir.

İkinci eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, bu iki kümenin kesişimidir, yani $M_2 = \emptyset$ 'dir.

Verilen eşitsizliğin çözümü $M = M_1 \cup M_2 = (-3, 1)$ 'dir.

Soru 3

$(x^2 - 3x - 10)(x^2 + 3x - 4) \leq 0$ eşitsizliğini çöz.

Soru 4

$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 12}}$ fonksiyonunun tanım kümesini belirle.

Örnek 6

Eşitsizliği çöz $\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} < 3$.

Çözüm:

$$\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} - 3 < 0$$

3 sayısını eşitsizliğin sol tarafından sağ tarafına geçiririz.

$$\frac{-x^2 + 2x - 3 - 3(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 4x + 3} < 0 \quad \text{Sol taraftaki ifadeyi düzenleriz.}$$

$$\frac{-4x^2 + 14x - 12}{x^2 - 4x + 3} < 0$$

Elde edilen eşitsizliğin çözüm kümesi, aşağıdaki iki ikinci dereceden eşitsizlik sisteminin çözüm kümelerinin birleşimi olacaktır:

$$\begin{cases} -4x^2 + 14x - 12 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x^2 + 14x - 12 < 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases}$$

$-4x^2 + 14x - 12 = 0$ denkleminin çözümleri $x_1 = \frac{3}{2}$ ve $x_2 = 2$ 'dir (ve $y = -4x^2 + 14x - 12$ parabolünün

açıklığı aşağı yönlüdür). $x^2 - 4x + 3 = 0$ denkleminin çözümleri ise $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$ 'tür (ve $y = x^2 - 4x + 3$ parabolünün açıklığı yukarı yönlüdür).

Birinci sistemin çözümü

- $-4x^2 + 14x - 12 > 0$ için $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.
- $x^2 - 4x + 3 < 0$ için $x \in (1, 3)$.

Birinci eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, bu iki kümenin kesişimidir, yani $M_1 = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

İkinci sistemin çözümü.

- $-4x^2 + 14x - 12 < 0$ için $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty)$.
- $x^2 - 4x + 3 > 0$ için $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

İkinci eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, bu iki kümenin kesişimidir, yani $M_2 = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

Verilen ikinci dereceden eşitsizliğin çözümü $M = M_1 \cup M_2 = (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (3, +\infty)$.

Soru 5

$\frac{2x^2 + x - 13}{x^2 - 2x - 3} > 1$ eşitsizliğini çöz.

Örnek 7

Bir 3B yazıcı, t saatte $P(t) = -t^2 + 16t$ nesne üretir. Yazıcı t saat çalışırsa, hatalı nesne sayısı $D(t) = t^2 - 9t + 23$ fonksiyonu ile verilir. Yazıcının en az 48 nesne ve en fazla 5 hatalı nesne üretmesi için kaç saat çalışması gerekir?

Çözüm:

Yazıcının çalışma süresi olan t değerleri aralığını, $P(t) \geq 48$ ve $D(t) \leq 5$ olacak şekilde belirlememiz gerekir; yani aşağıdaki eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini belirlemeliyiz:

$$\begin{cases} -t^2 + 16t \geq 48 \\ t^2 - 9t + 23 \leq 5 \end{cases}$$

Birinci eşitsizlik $-t^2 + 16t - 48 \geq 0$ için çözüm $M_1 = [4, 12]$, ikinci eşitsizlik $t^2 - 9t + 18 \leq 0$ için çözüm $M_2 = [3, 6]$ 'dir.

Sistemin çözümü bu iki kümenin kesişimidir: $M = [4, 6]$,

Buna göre yazıcı, en az 48 nesne ve en fazla 5 hatalı nesne üretmek için 4 ile 6 saat arasında çalışmalıdır.

Soru 6

Çarpımları 90'dan küçük, kareleri toplamı 113'ten büyük olan ardışık iki doğal sayıyı belirle.

Alıştırma Soruları!

1. Eşitsizlik sistemini çöz.

a) $\begin{cases} x^2 - x - 30 \leq 0 \\ x^2 - 4x - 32 > 0 \end{cases};$

b) $\begin{cases} -2x^2 + 3x + 5 > 0 \\ 2x^2 + x - 6 < 0 \end{cases};$

c) $\begin{cases} 4x^2 > 4x - 1 \\ (3x - 2)^2 + (x - 2)^2 < 2 \end{cases}.$

2. Eşitsizliği çöz.

a) $\frac{x^2 - 3x + 4}{1 - x^2} > 0;$

b) $\frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x - 8} \leq 0.$

c) $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > -3;$

d) $\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} < -1.$

3. Eşitsizliği çöz. $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x - 3) < 0.$

4. $f(x) = \sqrt{\frac{4x - x^2}{x^2 - x + 1}}$ fonksiyonunun tanım kümesini belirle.

5. Otomobil yakıtının verimliliği (litre başına km olarak), v km/sa hızında

$$E(v) = -0,01v^2 + 1,2v - 10.$$

Çevresel nedenlerle verimlilik en az 20 km/l olmalıdır; motor güvenliği için ise verimlilik en fazla 30 km/l olmalıdır. Verimliliğin çevreye uygun ve motor için güvenli olması amacıyla izin verilen hız aralığını belirle.

TEKRAR VE PEKİŞTİRME SORULARI

- Verilen fonksiyonlardan hangisi ikinci dereceden fonksiyondur?
a) $f(x) = x - x^3$; b) $f(x) = x^2$; c) $f(x) = (x + 3)(3x - 1)$; d) $f(x) = 1 + x - x^2$.
- $f(x) = -3x^2$ olsun.
a) Tabloyu doldur.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$-3x^2$									

- Fonksiyonun grafiğini çiz.
- $f(x) = 2mx^2 - (m + 3)x + 2$ fonksiyonunun grafiği $(-2, 3)$ noktasından geçecek şekilde m değerini belirle.
- a) Bağımsız değişken x 'in 5 farklı değeri için $y = \frac{1}{4}x^2$ fonksiyonunun değer tablosunu oluştur.
b) Tabloyu kullanarak $y = \frac{1}{4}x^2$ grafiğini taslak olarak çiz.
c) $y = \frac{1}{4}x^2$ grafiğini kullanarak $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3$ grafiğini taslak olarak çiz.
- Fonksiyonların değer kümesini, grafiğin tepe noktasını ve uç değerini belirle.
a) $y = x^2 - 3$; b) $y = -x^2 + 5$; c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$; d) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}$.
- $y = 3x^2 - 2$ parabolünün $y = 3x^2 + 5$ elde edilecek şekilde kaç birim ve hangi yönde ötelenmesi gerekir?
- Fonksiyonların tepe noktasını, simetri eksenini, uç değerini belirle ve grafiğini çiz.
a) $f(x) = -2(x + 1)^2$; b) $f(x) = 4(x - 2)^2 + 1$; c) $f(x) = 2x^2 + 12x + 9$.
d) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$; e) $f(x) = \frac{1}{3}(x - 2)^2 + 1$; f) $y = \frac{1}{5}(x - 3)^2 + \frac{1}{2}$.
- $y = 2(x + 1)^2$ parabolünün $y = 2(x - 5)^2 + 2$ parabolü elde edilecek şekilde kaç birim ve hangi yönde ötelenmesi gerekir?
- $y = -2(x + 1)^2$ parabolüne x eksenine göre simetrik olan grafiğin fonksiyonunu belirle.
- Fonksiyonları kanonik biçimde yaz:
a) $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$; b) $f(x) = x^2 - 2x$; c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$.
- $y = -\frac{1}{3}(x - 1)^2 + \frac{2}{3}$ grafiğini çiz.
- Fonksiyonların grafiğini karakteristik noktaların yardımıyla çiz.
a) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$; b) $f(x) = x^2 - 2x - 8$.
- p ve q 'nin hangi değerleri için $T(2, -5)$ noktası $y = x^2 + px + q$ parabolünün tepe noktası olur?
- $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ parabolünün $(2, 3)$ noktasından geçmesi ve tepe noktasının $(3, 4)$ olması için a , α ve β hangi değerleri alır?
- Fonksiyonların özelliklerini belirle: tepe noktası, uç değer, değer kümesi, sıfırları, artan ve azalan olduğu aralıklar.
a) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$; b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$; c) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

16. Fonksiyonların işaretini belirle.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$; b) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

17. Bir elma bahçesinde her ağaçtan elde edilen elma sayısı, ağaçların ne kadar sık dikildiğine bağlıdır. Bir hektar araziye n ağaç dikilirse, her ağaç $900 - 9n$ elma üretir. Maksimum elma verimi elde etmek için bir hektar bahçeye kaç ağaç dikilmelidir?

18. Fonksiyonların grafiğini çiz ve değişimini incele.

a) $f(x) = -x^2 + x + 6$; b) $f(x) = x^2 - 9$.
c) $f(x) = (x+2)^2$; d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$.

19. İkinci dereceden eşitsizlikleri çöz.

a) $x^2 + 3x - 4 < 0$; b) $x^2 + x - 6 > 0$;
c) $6x^2 + x - 1 \geq 0$; d) $x^2 - 25 \leq 0$.

20. Eşitsizlikleri ikinci dereceden eşitsizliğe dönüştürerek çöz.

a) $\frac{(x+2)^2}{3} - 3 \geq \frac{1-x}{4}$; b) $\frac{(x+2)^2}{3} + 2 \leq \frac{1-x}{4}$.

21. $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x + 6}$ fonksiyonunun tanım kümesini belirle.

22. Stefan'ın otomobili için, araç v km/sa hızla hareket ediyorsa durması için gereken mesafe d (santimetre olarak) şu formülle verilir:

$$d = v + \frac{v^2}{2}.$$

Stefan, aracın durması için gereken mesafenin 760 santimetreyi aşmamasını istiyor. Hangi hız aralığında araç kullanması gerektiğini belirle.

23. Bir bahçıvanın toplam uzunluğu 120 metre olan bir çiti vardır. Bu çitle bahçesinde dikdörtgen biçiminde bir sebze bahçesini çevirmek istiyor ve çevrilen alanın en az 800 m² olmasını istiyor. Bahçesinin uzunluğu için mümkün değerler aralığı nedir?

24. $x \in \{-5, -1, 0, 5\}$ değerlerinden hangileri $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -x^2 + 3x + 4 \leq 0 \end{cases}$ sistemin çözümleridir?

25. Verilen sistemi çöz $\begin{cases} 4x - 1 > 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$.

26. Sistemleri çöz.

a) $\begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 > 0 \\ 3x^2 + 2x - 1 > 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ -x^2 - 3x + 4 \geq 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases}$.

27. Eşitsizliği çöz $(2x^2 - 4x - 6)(-x^2 + 3x + 4) \geq 0$.

28. Fonksiyonun tanım kümesini belirle. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}}$.

29. Eşitsizliği çöz. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$.

30. Karenin alanı ile çevresinin toplamının 21'den küçük ve 5'ten büyük olması için, karenin kenar uzunluğu hangi aralıkta olmalıdır?

OLASILIK İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Kombinatorik ve olasılık, birbiriyle yakından ilişkili iki matematik alanıdır. Kombinatorik, belirli kurallara göre elemanları sayma, sıralama ve seçme ile ilgilenen matematik dalıdır. Bütün olasılıkları tek tek saymadan, “Kaç farklı şekilde yapılabilir?” türündeki sorulara cevap vermemize yardımcı olur. Olasılık ise deterministik olmayan, içinde rastgelelik ögesini barındıran doğa ve toplum olaylarının matematiksel olarak açıklanmasını sağlar. Olasılık teorisinin başlangıçları şans oyunları ile ilişkilidir. Ancak günümüzde olasılık teorisi; doğa bilimlerinde, teknikte, ekonomide ve yaşamın bütün alanlarında uygulama bulmaktadır.

4.1 TEKRARLI PERMÜTASYON

Hatırla!

A ve B kümelerinin Kartezyen (doğrudan) çarpımı, sıralı ikililerden (a, b) oluşan $A \times B$ kümesidir; burada $a \in A$ ve $b \in B$ ’dir, yani

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Etkinlik

$A \times B$ kümesini belirle,

a) $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{3, 4\}$;

b) $C = \{0, 1, 2\}$ ve $D = \{1, 2, 3, 4\}$

Örnek 1

$A = \{1, 2, 3\}$ ise $A \times A$ Kartezyen çarpımını tanımla. Bu Kartezyen çarpımın kaç elemanı vardır?

Çözüm:

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Eleman sayısı şurada $A \times A$ ’dır, $9 (= 3 \cdot 3 = 3^2)$.

Unutma!

A , n elemanlı bir küme olsun. $A \times A$ Kartezyen çarpımının her elemanına **n elemandan 2. sınıftan tekrarlı permütasyon** denir.

- A , n elemanlı bir küme ise $A \times A$ Kartezyen çarpımında kaç eleman vardır, yani a ve b , A kümesinin elemanları olmak üzere kaç tane sıralı ikili (a, b) vardır?

Şuna dikkat et:

- a elemanı, A kümesinin herhangi bir elemanı olabilir. A 'da toplam n eleman vardır; bu nedenle a , n farklı şekilde seçilebilir.
- a 'yı sabitlersek b elemanı yine A kümesinin herhangi bir elemanı olabilir, yani b de n farklı şekilde seçilebilir.
- Buradan $A \times A$ doğrudan çarpımındaki eleman sayısı $n \cdot n = n^2$ olur.

Unutma!

n elemandan 2. sınıf tekrarlı permütasyonların sayısı $\bar{V}_n^2$ ile gösterilir ve bu sayı $\bar{V}_n^2 = n^2$ 'ye eşittir.

$\bar{V}_n^2$ gösterimindeki çizgi, tekrarı, yani tekrarlı permütasyon söz konusu olduğunu gösterecektir

A verilmiş bir küme olsun. Kartezyen çarpım $a_1, a_2, a_3 \in A$, olmak üzere bütün sıralı üçlülere (a_1, a_2, a_3) içeren $A \times A \times A$ kümesidir, yani:

$$A \times A \times A = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in A\}.$$

Örnek 2

$A = \{1, 2\}$ olsun. $A \times A \times A$ Kartezyen çarpımını bul. Bu kümede kaç eleman vardır?

Çözüm:

$$A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}.$$

$A \times A \times A$ kümesinin 8 elemanı vardır $(= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3)$.

Soru 1

$A = \{3, 5, 7\}$ olmak üzere $A \times A \times A$, Kartezyen çarpımını bul. Bu kümede kaç eleman vardır?

Unutma!

A , n elemanlı bir küme ise $A \times A \times A$ Kartezyen çarpımının her elemanına, **n elemandan 3. sınıf tekrarlı permütasyon** denir.

n elemandan 3. sınıf tekrarlı permütasyonların sayısı $\bar{V}_n^3$ ile gösterilir ve bu sayı $\bar{V}_n^3 = n^3$ 'e eşittir

Unutma!

Kartezyen çarpım $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ defa}}$ $a_1, a_2, \dots, a_k$ elemanlarının A kümesinin elemanları olduğu sıralı k 'lilerden $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ oluşan kümedir, yani:

$$A \times A \times \dots \times A = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in A\}.$$

Örnek 3

$A = \{c, d\}$ olsun. $A \times A \times A \times A$ kümesini yaz. Bu kümede kaç eleman vardır?

Çözüm:

$$A \times A \times A \times A = \{(c, c, c, c), (c, c, c, d), (c, c, d, c), (c, c, d, d), (c, d, c, c), (c, d, c, d), (c, d, d, c), (c, d, d, d), (d, c, c, c), (d, c, c, d), (d, c, d, c), (d, c, d, d), (d, d, c, c), (d, d, c, d), (d, d, d, c), (d, d, d, d)\}$$

A kümesindeki eleman sayısı, $A \times A \times A \times A$ e $16 = 2^4$, 4'ün ise Kartezyen çarpımda A kümesinin yer alma sayısı olduğuna dikkat et.

Unutma!

- A , n elemanlı bir küme ise $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ defa}}$, Kartezyen çarpımının her elemanına, *n elemandan k sınıf tekrarlı permütasyon* denir.
- n elemandan k sınıf tekrarlı permütasyonların sayısı $\bar{V}_n^k$ ile gösterilir ve bu sayı $\bar{V}_n^k = n^k$ değerine eşittir.
- (1, 2, 3) ve (1, 3, 2) sıralı üçlülerinin, aynı elemanlardan oluşsalar da farklı olduğuna dikkat et. Buradan, bir k 'lide elemanların sıralanışının önemli olduğu, yani elemanların farklı dizilişlerinin farklı k 'liler verdiği sonucuna varılabilir.

Unutma!

n elemandan k . sınıf tekrarlı permütasyonda elemanların dizilişi (sırası) önemlidir; yani bir tekrarlı permütasyonda elemanların sırası değiştirildiğinde başka bir permütasyon elde edilir.

Anlaşma: Metnin bundan sonraki bölümünde, daha kolay yazmak için tekrarlı permütasyonları parantez ve virgül kullanmadan yazacağız. Böylece (c, d, c, e) permütasyonunu $cdcd$ olarak yazacağız. Bununla birlikte, yine de söz konusu olanın sıralı bir n 'li olduğunu ve elemanların dizilişinin önemli olduğunu unutmayacağız.

Örnek 4

1, 2, 3, 4 rakamlarıyla kaç tane üç basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çözüm:

- Bir rakamın çok basamaklı bir sayıdaki konumunun önemli olduğuna dikkat et. Nitekim 321 ve 213, aynı rakamlardan oluşur; ancak farklı sayılardır.
- O hâlde, konumsal sayı sisteminde bir sayıdaki rakamın konumu önemlidir. Bu nedenle her k basamaklı sayı, sıralı bir k 'li, yani k . sınıf tekrarlı permütasyon olarak ele alınabilir.
- Buradan, 1, 2, 3, 4 rakamlarından oluşan üç basamaklı sayıların sayısı, aslında 4 elemandan 3. sınıf tüm tekrarlı permütasyonların sayısıdır ve bu sayı $\bar{V}_4^3 = 4^3 = 64$ 'tür.

Etkinlik

1, 2, 3, 4 rakamlarıyla oluşturulabilecek tüm üç basamaklı sayıları yaz.

Örnek 5

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rakamlarından kaç tane dört basamaklı sayı oluşturulabilir?
- Bunlardan kaç 5 rakamı ile başlar?
- Bunlardan kaç çifttir?

Çözüm:

- İstenen dört basamaklı sayılar, aslında 9 elemandan 4. sınıf tekrarlı permütasyonlardır. Bunların sayısı $\bar{V}_9^4 = 9^4 = 6561$ 'dir.
- İlk konuma (binler basamağına) 5 rakamı sabitlenirse kalan üç konum, 9 elemandan 3. sınıf tekrarlı permütasyon olarak ele alınabilir. Bunların sayısı $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$ 'dur.
- Bir sayı, çift rakamla bitiyorsa çift sayıdır. Son konuma (birler basamağına) 2 sayısı sabitlenirse ilk üç konum, 9 elemandan 3. sınıf tekrarlı permütasyon olarak ele alınabilir. Önceki gibi bunların sayısı $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$ 'dur.

Aynı sayıda permütasyon, son konuma 4 veya 6 veya 8 sabitlendiğinde de elde edilir. O hâlde birler basamağındaki rakam 2, 4, 6 veya 8 rakamlarından biri olabilir; yani bu rakamın seçimi için 4 yol vardır. Bu rakamlardan hangisi birler basamağına sabitlenirse sabitlensin, kalan üç rakam $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$, yolla doldurulabilir. Buradan, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rakamlarından oluşan çift dört basamaklı sayıların toplam sayısı $4 \cdot \bar{V}_9^3 = 4 \cdot 9^3 = 2916$ 'dır.

Soru 2

1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamlarından kaç tane tek beş basamaklı sayı oluşturulabilir?

Örnek 6

Duvarda 3 askılık vardır. Bir askılığa birden fazla palto da asılabilirse 4 palto bu askılıklara kaç farklı şekilde asılabilir?

Çözüm:

- Her paltoya, hangi askılığa asılacağına bağlı olarak 1, 2, 3 etiketlerinden birinin verilebileceğine dikkat et.
- Buradan, 4 paltonun 3 askılığa her yerleştirilişi, 3 elemandan 4. sınıf tekrarlı permütasyon olarak ele alınabilir.
- Örneğin 1132, birinci ve ikinci paltonun birinci askılığa, üçüncü paltonun üçüncü askılığa, dördüncü paltonun ise ikinci askılığa asılacağını gösterir
- Böylece 4 palto 3 askılığa $V_3^4 = 3^4 = 81$ farklı şekilde asılabilir.

Alıştırma Soruları!

1. $A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ kümeleri verilmiştir. $A \times B$ Kartezyen çarpımını oluşturun.
2. $A = \{a, b\}$ kümesi verilmiştir. A kümesinin elemanlarından 5. sınıf tüm tekrarlı permütasyonları yaz.
3. 0 ve 3 rakamlarının yer almadığı tüm üç basamaklı sayıların sayısı kaçtır?
4. 1, 3, 4, 6 ve 8 rakamlarıyla yazılabilecek tüm dört basamaklı sayıların sayısını belirle.
5. 10 maçtan oluşan bir spor tahmin kuponu kaç farklı şekilde doldurulabilir? (Her maç için üç olasılık vardır: 1 – birinci takımın galibiyeti, 2 – ikinci takımın galibiyeti, 0 – beraberlik).
6. Dört katlı bir binada, zemin katta asansöre 6 kişi binmiştir. Bu kişiler asansörden kaç farklı şekilde çıkabilir? Her biri dört kattan birinde inebilir.
7. 6 mektup 3 farklı posta kutusuna kaç farklı şekilde yerleştirilebilir? Her posta kutusuna birden fazla mektup konulabilir.
8. a) Rakamlar tekrar edebiliyorsa 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 rakamlarıyla kaç farklı beş basamaklı PIN kodu oluşturulabilir?
b) Bunlardan kaç 0 ile biter?
c) Bunlardan kaç tek sayı ile başlar?

4.2 TEKRARSIZ PERMÜTASYON

Hatırla!

A , n elemanlı bir küme ise $A \times A \times \dots \times A$ Kartezyen çarpımının her elemanına (A çarpan olarak k defa yer alır), n elemandan k . sınıf tekrarlı permütasyon denir.

Örnek 1

1, 2, 3, 4 rakamlarından, rakamları farklı olan kaç tane üç basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çözüm:

Sayıları (artan sırayla) şu şekilde oluştururuz:

123, 124, 132, 134, 142, 143,
213, 214, 231, 234, 241, 243,
312, 314, 321, 324, 341, 342,
412, 413, 421, 423, 431, 432.

1, 2, 3 ve 4 rakamlarından oluşturulan, tüm rakamları farklı olan üç basamaklı sayıların toplam sayısı 24'tür.

Önceki derste, 1, 2, 3, 4 rakamlarından oluşan ve rakamların tekrar edebildiği her üç basamaklı sayının, 4 elemandan 3. sınıf tekrarlı permütasyon olarak adlandırıldığını söylemiştik. Ancak bir permütasyonda tüm elemanlar farklı ise böyle bir permütasyona tekrarsız permütasyon diyeceğiz.

Unutma!

- Tüm elemanları farklı olan n elemandan k sınıf permütasyona, **n elemandan k . sınıf tekrarsız permütasyon** denir.
- O hâlde n elemandan k . sınıf tekrarsız permütasyon, n elemanlı bir kümeden alınan birbirinden farklı elemanlardan oluşan her sıralı k 'lidir.

n elemandan k . sınıf tekrarsız permütasyonda tüm elemanların farklı olabilmesi için $k \leq n$ koşulunun sağlanması gerektiğine dikkat et. Ayrıca tekrarlı permütasyonlarda olduğu gibi elemanların dizilişi önemlidir; yani farklı bir diziliş, farklı bir olasılık verir.

Soru 1

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elemanlarından 3. sınıf tüm tekrarsız permütasyonları bul.

A , n elemanlı bir küme olsun ve bu kümeden k . sınıf tekrarsız permütasyonlar oluşturulsun. Böyle her permütasyon, $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ defa}}$, kümesinin bir elemanı olarak, $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ olmak üzere sıralı bir k 'li $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ biçimindedir. n elemandan k . sınıf tüm bu tekrarsız permütasyonların sayısı V_n^k ile gösterilir ve bu sayı aşağıdaki şekilde belirlenir:

- Birinci konumdaki a_1 elemanı, A kümesinin herhangi bir elemanı olabilir. O hâlde a_1 elemanı n şekilde seçilebilir.
- Birinci konum için seçilen her a_1 elemanına karşılık, ikinci konumdaki a_2 elemanı kalan $n - 1$ elemandan seçilebilir (a_1 'den farklı olmalıdır).
- O hâlde ilk iki rakam $n(n - 1)$ şekilde seçilebilir.
- İlk iki konumdaki a_1 ve a_2 elemanları seçildikten sonra, üçüncü konumdaki a_3 elemanı kalan $n - 2$ elemandan seçilebilir (a_1 'den ve a_2 'den farklı olmalıdır). O hâlde $n - 2$ şekilde seçilebilir.
- Buradan, ilk üç eleman $n(n - 1)(n - 2)$ şekilde seçilebilir.
- Tüm k konum dolduruluncaya kadar işlem aynı şekilde sürdürülür. Buradan, olası seçimlerin toplam sayısının, yani n elemandan k . sınıf tekrarsız permütasyonların toplam sayısının

$$V_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) \text{ olduğu sonucuna varılabilir.}$$

Unutma!

- İlk n doğal sayının çarpımına " n -faktöriyel" denir ve $n!$ ile gösterilir.
- O hâlde,

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Burada, $1! \stackrel{\text{def}}{=} 1$, $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$ 'dir.

Örneğin $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Bu gösterim kullanılarak tekrarsız permütasyon sayısını belirleme formülü aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} V_n^k &= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) \\ &= \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) \cdot (n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n - k)!} \end{aligned}$$

Unutma!

n elemandan k sınıf tekrarsız permütasyonların toplam sayısı ($k \leq n$) aşağıdaki formülle hesaplanabilir:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Örnek 2

1'den 9'a kadar olan rakamlar kullanılarak, rakamları farklı olan kaç tane dört basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çözüm:

Sayıların farklı rakamlardan oluşması gerektiği için 1'den 9'a kadar olan rakamlardan oluşturulan bu tür dört basamaklı sayıların toplam sayısı, aslında 9 elemandan 4. sınıf tüm tekrarsız permütasyonların sayısıdır, yani

$$V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

Soru 2

1'den 9'a kadar olan rakamlardan, rakamları farklı olan kaç tane beş basamaklı sayı oluşturulabilir?

Örnek 3

Sayılar farklı rakamlardan oluşacaksa 0, 1, 2, ..., 9 rakamlarından kaç tane beş basamaklı sayı oluşturulabilir?

Çözüm:

- Bu durumda sayının 0 ile başlamayacağına dikkat edilmelidir. Örneğin 01234 beş basamaklı değil, dört basamaklı bir sayıdır. Bu nedenle 0, 1, 2, ..., 9 rakamlarından oluşan tüm beş basamaklı sayıları elde etmek için 10 elemandan 5. sınıf tekrarsız permütasyonların toplam sayısından, 0 ile başlayan permütasyonların sayısı çıkarılmalıdır.
- 10 elemandan 5. sınıf tekrarsız permütasyonların toplam sayısı şöyledir: $V_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 30240$.
- 0 ile başlayan tekrarsız permütasyonların sayısı, birinci konuma 0 sabitlenerek, kalan dört konumun 1'den 9'a kadar olan sayılarla doldurulmasıyla belirlenebilir. Bu tür permütasyonların toplam sayısı şudur: $V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 3024$.
- Buradan, rakamları farklı olan beş basamaklı sayıların sayısı şudur:

$$V_{10}^5 - V_9^4 = 30240 - 3024 = 27216.$$

Soru 3

0, 1, 2, ..., 9 rakamlarından, rakamları farklı olan ve 1 veya 2 ile başlamayan kaç tane altı basamaklı sayı oluşturulabilir?

Örnek 4

9 kartın üzerine 1'den 9'a kadar olan rakamlar yazılmıştır; her kartta bir rakam vardır. Kartlar iyice karıştırılır, sonra bu kartlardan 4 kart birer birer çekilir ve çekilme sırasına göre dizilir. Çekme işlemi, çift bir dört basamaklı sayı elde edilecek şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?

Çözüm:

- 4 kartın her çekilişinde ve çekilme sırasına göre dizilişinde, 9 elemandan 4. sınıf bir tekrarsız permütasyon elde edilir. Ancak yalnızca çift sayı veren, yani 2, 4, 6 veya 8 çift rakamlarından biriyle biten permütasyonlar gereklidir.
- Son konuma 2 rakamı sabitlenirse önceki 3 konum, kalan 8 rakamla (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

$$V_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$
 şekilde doldurulabilir.
- Son konuma 4 rakamı sabitlenirse önceki üç konum, kalan 8 rakamla yine 336 şekilde doldurulabilir.
- Son konuma 6 veya 8 rakamı sabitlendiğinde de aynı sayı elde edilir.
- O hâlde son konumdaki rakamın seçimi için 4 olasılık vardır (birler basamağı) ve bu rakamın her seçimi için önceki üç konum 336 şekilde doldurulabilir. Buradan, 1'den 9'a kadar olan rakamlardan oluşturulan çift dört basamaklı sayıların toplam sayısı $4 \cdot V_3^8 = 4 \cdot 336 = 1344$.

Soru 4

2'den 8'e kadar olan rakamlardan kaç farklı üç basamaklı sayı oluşturulabilir, eğer:

- a) rakamlar tekrar edebiliyorsa;
- b) sayılar farklı rakamlardan oluşuyorsa?

Örnek 5

7 boş yeri olan bir otobüse 5 kişi biniyor. Bu kişiler boş yerlere kaç farklı şekilde oturabilir?

Çözüm:

- Kişilerden her biri oturacağı 1'den 7'ye kadar bir konum seçer. Bu durumda iki veya daha fazla kişi aynı oturma yerini seçemez.
- Bu nedenle 7 elemandan 5. sınıf tekrarsız permütasyon söz konusudur. Buna göre istenen olası diziliş sayısı $V_5^7 = \frac{7!}{(7-5)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ 'dir.

Alıştırma Soruları!

- Hesapla: a) $7!$; b) $4!$; c) $\frac{8!}{4!}$.
- Hesapla: a) V_{11}^3 ; b) V_{14}^4 .
- Denklemi bilinmeyen n 'ye göre çöz:
a) $V_n^2 = 72$; b) $9 \cdot V_n^3 = 5 \cdot \bar{V}_n^3$; c) $V_n^{10} + V_n^8 = 9 \cdot V_n^4$; d) $5 \cdot V_n^2 = \bar{V}_n^2$.
- Bir coğrafya haritasında 4 ülke gösterilmiştir ve bunların her biri verilen 9 renkten biriyle boyanabilir. Her ülke farklı bir renkle boyanacaksa boyama işlemi kaç farklı şekilde yapılabilir?
- 67 ile biten ve farklı rakamlardan oluşan tüm beş basamaklı sayıların sayısı kaçtır?
- Her delegasyon başkan, sekreter ve saymandan oluşacaksa 12 kişiden kaç tane üç kişilik delegasyon oluşturulabilir?
- Rakamlar tekrar edemeyecekse 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 rakamlarıyla yazılabilecek tüm çift dört basamaklı sayıların sayısını belirle.
- Bir kütüphanede 5 okuyucu ve 8 farklı kitap vardır. Her okuyucu bir kitap seçer ve bir kitabı yalnızca bir okuyucu seçebilir.
Kitapların dağıtımı kaç farklı şekilde yapılabilir?

4.3 PERMÜTASYONLAR

Hatırla!

n elemandan k . sınıf tekrarlı permütasyon nedir, n elemandan k . sınıf tekrarsız permütasyon nedir?

Etkinlik

1, 2 ve 3 rakamlarıyla oluşturulabilecek, rakamları farklı olan tüm üç basamaklı sayıları yaz. Bunların sayısı kaçtır?

İstenen üç basamaklı sayıların aslında 3 elemandan 3. sınıf tüm tekrarsız permütasyonlar olduğuna dikkat et. Bunların sayısı $V_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 3! = 6$. Bunlar şu sayılardır: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Unutma!

n elemandan n sınıf tekrarsız permütasyona, n elemanın tekrarsız permütasyonu denir.

Örnek 1

a, b, c ve d elemanlarından tüm tekrarsız permütasyonları oluşturalım. Permütasyonların oluşturulma yöntemini incele:

$abcd$	$abdc$	$acbd$	$acdb$	$adbc$	$adcb$
$bacd$	$badc$	$bcad$	$bcda$	$bdac$	$bdca$
$cabd$	$cadb$	$cbad$	$cbda$	$cdab$	$cdba$
$dabc$	$dacb$	$dbac$	$dbca$	$dcab$	$dcba$

Permütasyonların alfabetik (leksikografik) sıraya göre dizildiğine dikkat et. Ayrıca verilen elemanların her biriyle başlayan eşit sayıda (6'şar) permütasyon vardır.

Unutma!

Permütasyonlar, varyasyonların özel bir türüdür. Bu nedenle permütasyonlarda elemanların dizilişi (sırası) önemli olduğundan, bu diziliş permütasyonlarda da önemlidir; yani elemanların farklı dizilişleri farklı permütasyonlar verir.

n elemandan tekrarsız varyasyonların sayısı P_n ile gösterilir. n elemandan tekrarsız permütasyonun, n elemandan tekrarsız permütasyon aracılığıyla yapılan tanımına göre P_n için şu elde edilir:

$$P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Unutma!

n elemandan tekrarsız permütasyonların sayısı $n!$ 'dir.

Örnek 2

Raftaki kitapların dizilişi önemliyse 4 farklı kitap bir rafa kaç farklı şekilde dizilebilir?

Çözüm:

Dört kitabın her dizilişi, 4 elemandan tekrarsız bir permütasyon olarak düşünülebilir. Buradan, istenen diziliş sayısı $P_4 = 4! = 24$.

Soru 1

Bir sepette 7 meyve vardır: bir elma, bir armut, bir şeftali, bir muz, bir ananas, bir limon ve bir portakal. Meyveler kesilmeden 7 çocuğa kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

Örnek 3

- 2, 3, 4 ve 5 rakamlarından, rakamları farklı olan kaç tane dört basamaklı sayı oluşturulabilir?
- Bunlardan kaç tanesi 4 rakamıyla başlar?
- Bunlardan kaç tanesinde 4 birinci, 3 ise ikinci rakamdır?

Çözüm:

- Verilen dört rakamdan oluşturulan, rakamları farklı olan dört basamaklı sayıların sayısı, aslında 4 elemanlı tüm tekrarsız permütasyonların sayısıdır. Bu sayı $P_4 = 4! = 24$ 'tür.
- 4 rakamı birinci konuma (binler basamağı konumuna) sabitlenirse kalan üç konum, kalan üç rakamla doldurulmalıdır. Bu durumda olasılık sayısı $P_3 = 3! = 6$ 'dır.
- 4 birinci konuma, 3 ise ikinci konuma sabitlenirse kalan iki konum, kalan iki rakamla doldurulmalıdır. Buradan olasılık sayısı $P_2 = 2! = 2$ 'dir.

Örnek 4

a, b, c, d, e ve f elemanlarından oluşan 243. sıradaki permütasyon hangisidir?

Çözüm:

- Daha önce permütasyonların leksikografik sıraya göre oluşturulduğunu ve belirtilen 6 elemanın her biriyle eşit sayıda permütasyon başladığını fark etmiştik.
- Toplam permütasyon sayısı $P_6 = 6! = 720$ 'dir. Demek ki her elemanla tam olarak 120 permütasyon başlar.
- Buna göre ilk 120 permütasyon a ile başlar; sonraki 120 permütasyon b ile başlar, yani sıra numarası 121'den 240'a kadar olan permütasyonlar.
- c ile başlayan ilk permütasyon, sıra numarası 241 olan permütasyondur. Bu permütasyon $cabdef$ 'tir. Ondan sonra $cabdfe$ (242. sırada) ve $cabedf$ (243. sırada) gelir. Demek ki istenen permütasyon $cabedf$ 'tir.

Etkinlik

a_1, a_2, a_3, b elemanlarıyla tüm tekrarsız permütasyonları yaz. Sonra her permütasyonda $a_1 = a_2 = a_3$ olacak şekilde değiştir. Aynı eleman dizilişi, yani aynı permütasyon kaçar kez ortaya çıkacaktır?

Unutma!

$a_1, a_2, \dots, a_k$ birbirinden farklı k eleman olsun. a_1 'in n_1 kez, a_2 'nin n_2 kez, $\dots$, a_k 'nin n_k kez görüldüğü her farklı dizilişe $(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$ **n elemandan $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ tipinde tekrarlı permütasyon** denir.

n elemandan tekrarlı permütasyonların sayısını belirleyelim. Bu permütasyonda bir eleman (örneğin a elemanı) m kez, diğer tüm elemanlar ise birer kez görünür; yani n elemandan $(m, 1, \dots, 1)$ tipinde tekrarlı permütasyonların sayısı söz konusudur.

- Öncelikle a 'nın m kez görünmesinin her birini farklı bir eleman olarak ele alalım; yani permütasyonda $a_1, a_2, \dots, a_m$ elemanlarının bulunduğunu ve bunların hem kendi aralarında hem de permütasyondaki diğer elemanlardan farklı olduğunu kabul edelim. Bu durumda n elemandan tekrarsız permütasyonlar elde ederiz. Bunların sayısı $n!$ 'dir.
- Daha sonra $a_1 = a_2 = \dots = a_m = a$, olacak şekilde değiştirirsek bazı permütasyonlar eşit olur. Aslında her permütasyon $m!$ kez tekrarlanır (m tane a elemanı m konumda permütasyona tabi tutulduğunda).
- Buradan, n elemandan $(m, 1, \dots, 1)$ tipindeki tekrarlı permütasyonların toplam sayısı, $n!$ 'in $m!$ 'e bölünmesiyle elde edilir.

Unutma!

n elemandan, bir elemanın m kez tekrar ettiği, diğer elemanların ise tam olarak birer kez görüldüğü tekrarlı permütasyonların sayısı $P_n(m, 1, \dots, 1)$ ile gösterilir ve bu sayı aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$P_n(m, 1, \dots, 1) = \frac{n!}{m!}.$$

Soru 2

1, 2, 2, 2, 2, 3, 4 elemanlarından oluşan beş basamaklı sayıların sayısını belirle.

Öncekine benzer bir düşünmeyle, n elemandan $(m, 1, \dots, 1)$ tipinde tekrarlı permütasyonların sayısı için verilen formül, n elemandan $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ tipinde tekrarlı permütasyonların sayısı için genel bir formüle dönüştürülebilir.

Unutma!

$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ olmak üzere, $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ tipindeki n elemanlı tekrarlı permütasyonların sayısı aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Örnek 5

BABATA kelimesinden kaç farklı permütasyon yapılabilir?

Çözüm:

Bu kelimedede B harfi 2 kez, A harfi 3 kez, T harfi ise bir kez yer alır. Buradan, 6 elemandan $(2, 3, 1)$ tipindeki farklı tekrarlı permütasyonların sayısı şöyledir:

$$P_6(2, 3, 1) = \frac{6!}{2!3!1!} = 60.$$

Örnek 6

- 1, 4 ve 8 rakamlarından, 1 rakamı 4 kez, 4 rakamı 2 kez, 8 rakamı ise bir kez yer alacak şekilde kaç tane yedi basamaklı sayı oluşturulabilir?
- Bunlardan kaç tanesi 4 rakamıyla başlar?
- Bunlardan kaç tanesi 41 ile başlar?

Çözüm:

- a) 4 tane bir, 2 tane dört ve 1 tane sekizden oluşan altı basamaklı sayıların toplam sayısı şudur:

$$P_7(4,2,1) = \frac{7!}{4!2!1!} = 105.$$

- b) Birinci konuma 4 rakamı sabitlenirse kalan 6 konum, 4 tane bir, 1 tane dört ve 1 tane sekiz ile doldurulmalıdır. Bu tür yedi basamaklı sayıların toplam sayısı şudur:

$$P_6(4,1,1) = \frac{6!}{4!1!1!} = 30.$$

- c) Öncekine benzer şekilde, ilk iki konum '41' ile doldurulursa kalan 5 konum, 3 tane bir, 1 tane dört ve 1 tane sekiz ile doldurulmalıdır. Buna göre istenen yedi basamaklı sayıların sayısı şudur:

$$P_5(3,1,1) = \frac{5!}{3!1!1!} = 20.$$

Soru 3

PARALELA kelimesinden yapılabilecek farklı tekrarlı permütasyonların sayısını belirle.

Soru 4

Bir giyim mağazasında tişörtler dört bedende satılmaktadır: küçük (S), orta (M), büyük (L) ve ekstra büyük (XL).

Depoda S beden 2 tişört, M beden 3 tişört, L beden 4 tişört ve XL beden 2 tişört vardır. Aynı bedendeki tişörtler eşit kabul edilirse tüm tişörtlerin satış sırası kaç farklı şekilde gerçekleşebilir?

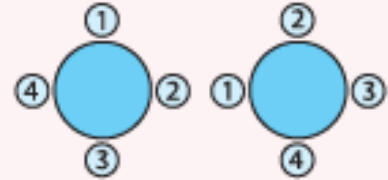
Örnek 7

k kişi yuvarlak bir masaya, kimin hangi sandalyede oturduğu değil, yalnızca hangi sırayla dizildikleri önemli olacak şekilde kaç farklı biçimde yerleştirilebilir?

Çözüm:

Şekilde verilen iki dizilişin eşit olduğuna dikkat et.

Tüm farklı dizilişleri elde etmek için bir kişiyi bir sandalyeye sabitlemek, kalan kişileri ise diğer sandalyelere mümkün olan tüm şekillerde yerleştirmek yeterlidir. 3 elemanlı tüm permütasyonların sayısı $P_3 = 3! = 6$.



k kişinin yuvarlak bir masa etrafında $(k - 1)!$ şekilde yerleştirilebileceğine dikkat et. Yani bir kişi bir sandalyeye sabitlenir, diğerleri ise mümkün olan tüm şekillerde yerleştirilir.

Alıştırma Soruları!

1. Beş misafir, 5 odası bulunan bir otelde gecelemeaktadır. Hiçbir odada birden fazla misafir bulunmayacaksa bu misafirler odalara kaç farklı şekilde yerleşebilir?
2. Bir okul gösterisinin birinci sırasında, okulun müdürü ve yönetim ekibinden 6 öğretmen için 7 oturma yeri ayrılmıştır. Müdür her zaman ortadaki sandalyede oturacaksa ayrılmış sandalyelere kaç farklı şekilde oturabilirler?
3. Bir masada 4 mumun (beyaz, kırmızı, yeşil ve mavi) soldan sağa doğru her dizilişi bir sinyal belirtmektedir. Kaç farklı sinyal belirtilebilir?
4. Aşağıdaki kelimelerin harflerinden kaç farklı kelime oluşturulabilir:
a) KNİGA; b) MATEMATİKA.
5. KNİGA kelimesinin harflerinden oluşan permütasyonlarda, başlangıç permütasyonu bu kelimeden harflerinin alfabetik olarak sıralanmasıyla elde ediliyorsa 51. sıradaki permütasyonu bul.
6. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4 sayılarından kaç tane sekiz basamaklı sayı oluşturulabilir?
7. 1, 1, 0, 0, 0, 2 rakamlarından kaç tane altı basamaklı sayı oluşturulabilir?
8. Her çocuğun alacağı balonun rengi de önemliyse 4 kırmızı, 3 mavi ve 3 beyaz balon 10 çocuğa kaç farklı şekilde dağıtılabilir?
9. 6 kişilik bir grupta yalnızca iki kişi birbirini tanımaktadır. Tanıdıklar her zaman yan yana oturacak şekilde bu grup yuvarlak bir masaya kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?
10. Bir fabrikada a, b, v, g, d işaretli 15 etiket basılmaktadır. Şunların basılması gerekir: a işaretli 5 etiket, b işaretli 3 etiket, v işaretli 3 etiket, g işaretli 2 etiket ve d işaretli 2 etiket. Etiketler bir sıra hâlinde dizilmektedir. Etiketler kaç farklı şekilde dizilebilir?

4.4 KOMBİNASYONLAR

Etkinlik

A, B, C, D ve E öğrencilerinden, satranç yarışmasına katılacak iki kişilik bir takım oluşturulmalıdır. Takım kaç farklı şekilde oluşturulabilir? $\{A, B\}$ ve $\{B, A\}$ farklı takımlar mıdır?

Örnek 1

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesi verilmiştir. Bu kümenin 3'er elemanlı tüm alt kümelerini belirle. Bir alt kümede elemanların dizilişi önemli midir, yani farklı bir diziliş farklı bir alt küme verir mi?

Çözüm:

A 'nın 3'er eleman içeren alt kümeleri şunlardır:

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

Elemanların dizilişinin önemli olmadığına dikkat et. Örneğin, $\{a, b, c\}$ ve $\{b, a, c\}$ aynı kümedir.

Unutma!

n elemanlı bir kümenin k elemanlı her alt kümesine *n elemandan k . sınıf tekrarsız kombinasyon* denir.

Önemli!

- n elemandan k . sınıf her kombinasyon, n elemanlı verilen bir kümenin k elemanlı bir alt kümesidir.
- Bir kombinasyonda elemanların dizilişi (sırası) önemli değildir; yani aynı elemanların bir alt küme içinde farklı dizilişi aynı kombinasyonu verir.
- Tekrarsız kombinasyon bir küme olduğundan, kombinasyonların gösterimi için küçük parantezler (.) yerine küme parantezlerini $\{\}$ kullanacağız.

Örnek 2

Gül, lale, kala, gerbera ve krizantem çiçeklerinden, her türden en fazla bir çiçek içermek koşuluyla 3'er çiçekli kaç farklı buket düzenlenebilir?

Çözüm:

Bir bukette çiçeklerin dizilişi önemli değildir ve buketler 3 farklı çiçek içermelidir. Bu nedenle 5 elemandan 3. sınıf tekrarsız kombinasyon söz konusudur. Kısa gösterimleri kullanırsak: G (gül), L (lale), K (kala), Ge (gerbera) ve Kr (krizantem), aşağıdaki buketleri elde ederiz:

[G, L, K], [G, L, Ge], [G, L, Kr], [G, K, Ge], [G, K, Kr], [G, Ge, Kr], [L, K, Ge], [L, K, Kr], [L, Ge, Kr],
[K, Ge, Kr].

Farklı buketlerin toplam sayısı, yani 5 elemandan 3. sınıf tekrarsız kombinasyonların toplam sayısı 10'dur.

n elemandan k . sınıf tekrarsız kombinasyonların sayısını belirleyelim.

- n elemandan k . sınıf tüm tekrarsız permütasyonların sayısı V_n^k 'tir.
- Öte yandan, n elemandan k . sınıf bir tekrarsız kombinasyon seçilirse buna, elemanların farklı dizilişleriyle elde edilen n elemandan k . sınıf $k!$ farklı tekrarsız permütasyon karşılık gelir. Örneğin, $\{a, b, c\}$ kombinasyonuna (a, b, c) , (a, c, b) , (b, a, c) , (b, c, a) , (c, a, b) , (c, b, a) permütasyonları karşılık gelir (toplam $6 = 3!$ permütasyon).
- Buradan, n elemandan k . sınıf tekrarsız kombinasyonların toplam sayısı, n elemandan k . sınıf tekrarsız permütasyonların toplam sayısının $k!$ 'e bölünmesiyle elde edilir.

Unutma!

n elemandan k sınıf tekrarsız kombinasyonların toplam sayısı C_n^k ile gösterilir ve şu formülle belirlenir:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Örnek 3

5 erkek ve 7 kızdan 6 üyeli bir ekip oluşturulmalıdır. Seçim kaç farklı şekilde yapılabilir, eğer:

- a) her cinsiyetten aday sayısı için bir sınırlama yoksa;
- b) ekipte tam olarak 2 erkek bulunması gerekiyorsa;
- c) ekipte en az 4 kız bulunması gerekiyorsa?

Çözüm:

Ekipteki tüm üyeler aynı düzeydedir, bu nedenle üyelerin sıralanışı önemli değildir. Demek ki kombinasyon söz konusudur.

a) Cinsiyet için bir sınırlama yoksa bunlar 12 elemandan 6. sınıf kombinasyonlardır. Bu nedenle sayıları $C_{12}^6 = \frac{12!}{6!(12-6)!} = 924$ olup ekip oluşturmak için farklı olanakların sayısı 924'tür.

b) Ekipteki erkek sayısı tam olarak 2 olacaksa kız sayısı 4 olmalıdır. 5 erkekten 2'si $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ şekilde seçilebilir.

2 erkekten oluşan her seçim için 4 kız, toplam 7 kız arasından $C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$ şekilde seçilebilir. Buradan, olası seçimlerin toplam sayısı

$$C_5^2 \cdot C_7^4 = 10 \cdot 35 = 350.$$

c) Ekipte en az 4 kız aşağıdaki üç durumda bulunur:

- 4 kız ve 2 erkek (olanak sayısı $C_7^4 \cdot C_5^2 = 35 \cdot 10 = 350$);
- 5 kız ve 1 erkek (olanak sayısı $C_7^5 \cdot C_5^1 = 21 \cdot 5 = 105$);
- 6 kız ve 0 erkek (olanak sayısı $C_7^6 \cdot C_5^0 = 7 \cdot 1 = 7$).

Demek ki en az 4 kız bulunan farklı ekiplerin toplam sayısı

$$C_7^4 \cdot C_5^2 + C_7^5 \cdot C_5^1 + C_7^6 \cdot C_5^0 = 350 + 105 + 7 = 462 \text{ dir.}$$

Soru 1

Ana'nın kütüphanesinde okunmamış 10 kitap vardır. Tatile bu kitaplardan 3'ünü götürmek istiyor. Seçimini kaç farklı şekilde yapabilir?

Unutma!

C_n^k kombinasyon sayısı, $\binom{n}{k}$ ile gösterilir ve " n 'nin k 'li kombinasyonu" diye okunur. Yani, $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Her doğal sayı için aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$C_n^0 = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1, \quad C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1, \quad C_n^1 = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n.$$

Örnek 4

Gösterin $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Çözüm:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}.$$

Örnek 5

Bir çiçekçide gül ve krizantem çiçekleri vardır. Buketlerde aynı türden birden fazla çiçek bulunabilirse 3'er çiçekli kaç farklı buket oluşturulabilir? Bu buketler hangileridir?

Çözüm:

Her buket 3 çiçekten oluşan bir grup olarak incelenebilir. Olası gruplar şunlardır:

G G G G G K G K K K K K.

Demek ki bu tür grupların (buketlerin) toplam sayısı 4'tür.

Unutma!

Elemanların tekrarlanabildiği, n elemanlı bir kümeden alınan k elemanlı her gruba, *n elemandan k sınıf tekrarlı kombinasyon* denir.

Bir grupta elemanların dizilişinin önemli olmadığına dikkat et. Buradan, n elemandan k sınıf tekrarlı kombinasyonda da elemanların dizilişi önemli değildir. Bu, verilen elemanların farklı dizilişinin aynı tekrarlı kombinasyonu verdiği anlamına gelir.

Unutma!

n elemandan k sınıf tüm farklı tekrarlı kombinasyonların sayısı $\bar{C}_n^k$ ile gösterilir ve bu sayı aşağıdaki formülle belirlenir:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Önceki soruda, çiçekçide bulunan 2 tür çiçekten yapılabilecek 3 çiçekli farklı buketlerin sayısı şudur

$$\bar{C}_2^3 = C_{2+3-1}^3 = \binom{4}{3} = 4.$$

Örnek 6

Bir pastanede çikolata, vanilya, çilek, ceviz, fındık ve limonlu dondurma vardır. Üçer top dondurmadan oluşan kaç farklı porsiyon yapılabilir, eğer:

- bir porsiyondaki tüm toplar farklı tatta ise;
- porşiyonda aynı tatta toplar da bulunabiliyorsa.

Çözüm:

Bir porsiyondaki dondurma toplarının sırası önemli değildir; bu nedenle 6 elemandan 3. sınıf kombinasyon söz konusudur. Birinci durumda bunlar tekrarsız kombinasyonlar, ikinci durumda ise tekrarlı kombinasyonlardır.

$$\text{a) } C_6^3 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20. \quad \text{b) } \bar{C}_6^3 = C_{6+3-1}^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$$

Soru 2

Bir çeşitten birden fazla şeker seçebiliyorsak 5 farklı tattan 4 şeker kaç farklı şekilde seçilebilir?

Örnek 7

Bir yarışma için 6 aday arasından üç kişiden oluşan bir jüri seçilmelidir. Bunların arasından bir jüri başkanı ve ayrıca iki üye seçilmelidir. Bu iki üye aynı düzeydedir.

Böyle bir jüri kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

Çözüm:

- Öncelikle jüri başkanı için seçim sayısı $C_6^1 = 6$.
- Başkan için yapılan her seçimden sonra, kalan 5 aday arasından iki üye seçilmelidir. Üyeler aynı düzeyde olduğundan elemanların dizilişi önemli değildir ve 5 elemandan 2. sınıf tekrarsız kombinasyon söz konusudur. Bu tür seçimlerin toplam sayısı $C_5^2 = 10$ 'dur.
- Demek ki jüri başkanı ve iki üyenin (aynı düzeyde) toplam seçim sayısı

$$C_6^1 \cdot C_5^2 = 6 \cdot 10 = 60.$$

Soru 3

Bir şirketteki iki boş yer için yedi aday arasında üç erkek ve dört kadın vardır. Bu iki yer kaç farklı şekilde doldurulabilir:

- herhangi iki adayla?
- iki kadınla?
- bir erkek ve bir kadınla?

Alıştırma Soruları!

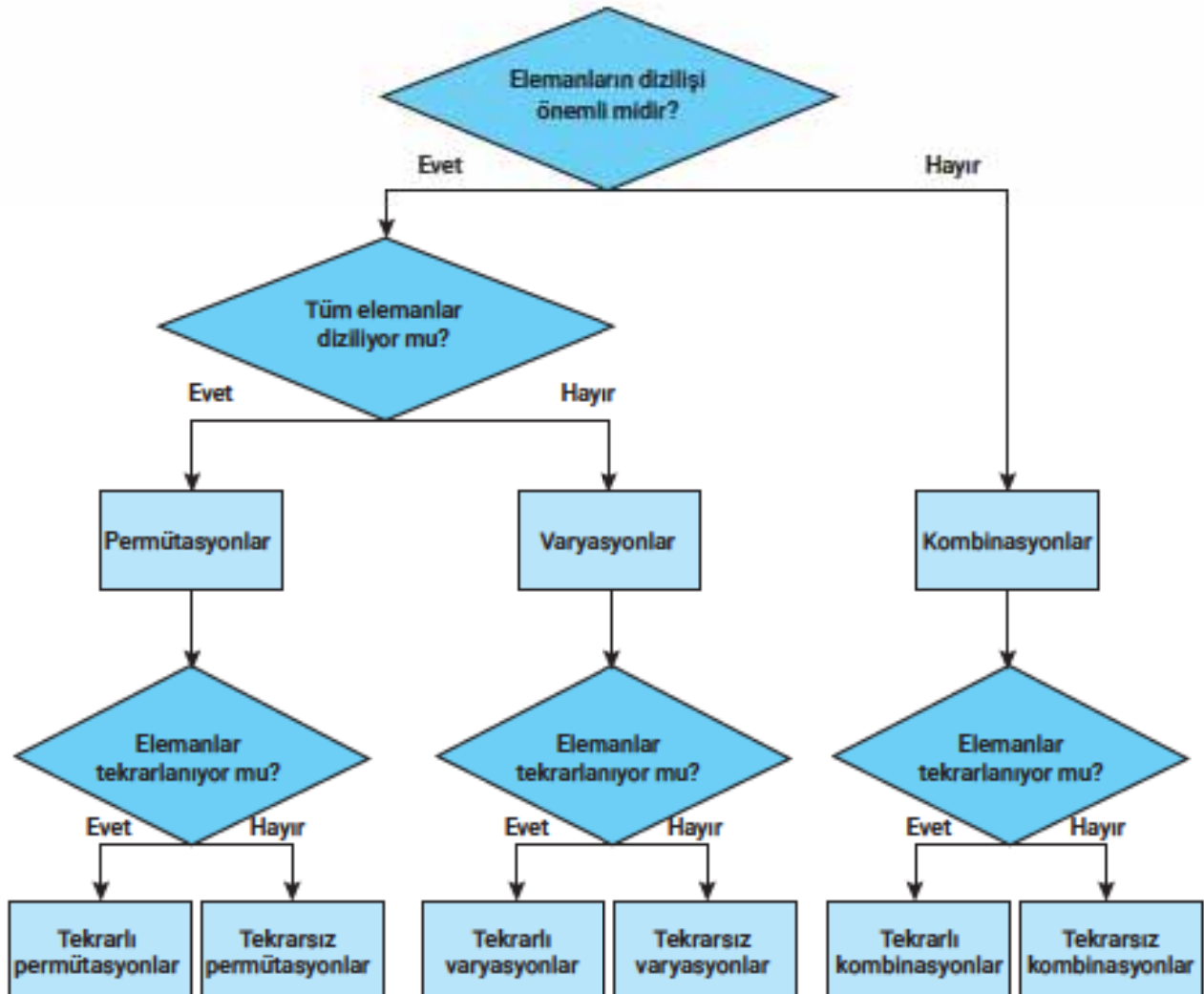
1. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin elemanlarından 4. sınıf tüm tekrarsız kombinasyonları yaz.
2. Hesapla: a) C_7^4 ; b) C_5^5 ; c) $C_8^3 \cdot C_5^2$; d) $\frac{C_{11}^9}{C_8^4}$.
3. 8 kitaptan 5'i kaç farklı şekilde seçilebilir?
4. 24 kişi, 12'şer kişilik iki gruba kaç farklı şekilde ayrılabilir?
5. 16 erkek öğrenci ve 20 kız öğrenci, her sınıfta 8 erkek öğrenci ve 10 kız öğrenci olacak şekilde iki sınıfa kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?
6. Bir mezuniyet partisinde miss ve mister seçimi için beş kız ve altı erkek aday gösterilmiştir. Eşlik edenler herhangi bir cinsiyetten olabiliyorsa miss, mister ve iki eşlik eden kişi kaç farklı şekilde seçilebilir?
7. Bir depoda 7 farklı renkte keçeli kalem vardır. Çalışanlar, üç kalemin de renkleri farklı olacak şekilde bunları 3'er kalemlik kutulara paketlemelidir. Kaç farklı keçeli kalem paketi yapılabilir?
8. Bir antrenörün oyununda 11 oyuncusu vardır ve berabere biten maçın sonunda penaltı atacak 5 oyuncuyu seçmelidir. Seçimi kaç farklı şekilde yapabilir?
9. Kesin kazanç sağlamak için 37'den 7 loto kombinasyonundan kaç tanesi yatırılmalıdır?
10. $A = \{a, b, c\}$ kümesinin elemanlarından 4. sınıf tüm tekrarlı kombinasyonları yaz.
11. Bir çiçekçide beş farklı renkte çiçek vardır: kırmızı, beyaz, mavi, pembe ve sarı. 5 çiçekli bir buket kaç farklı şekilde oluşturulabilir, eğer:
 - a) tüm çiçekler farklı renkte ise
 - b) tüm çiçekler farklı renkte ise

4.5 BAZI KOMBİNE SORULAR

Hatırla!

- Permütasyon, varyasyon, kombinasyon nedir?
- Kombinasyonlarda elemanların dizilişi (sırası) önemli değildir; varyasyonlarda ve permütasyonlarda ise elemanların dizilişi önemlidir.

Kombinatorik sorularını çözerken en büyük problem, hangi kategorinin (kombinasyon, varyasyon veya permütasyon) söz konusu olduğunu belirlemektir. Bu sorunun cevabı, aşağıdaki diyagramda verilen algoritma izlenirse elde edilebilir.



Şematik olarak gösterilen algoritma izlenirse kombinasyonları, varyasyonları ve permütasyonları ayırt etme işlemi şu şekilde gerçekleşir:

- Öncelikle şu soru sorulur: Elemanların dizilişi önemli midir?
- Bu sorunun cevabı "hayır" ise, hemen kombinasyonların söz konusu olduğu sonucuna varılabilir.
- Bu sorunun cevabı "evet" ise, tüm elemanların dizilip dizilmediğine bağlı olarak ya varyasyonlar ya da permütasyonlar söz konusudur. Bu nedenle şu soru sorulur: Tüm elemanlar diziliyor mu?
- Bu sorunun cevabı "evet" ise permütasyonlar söz konusudur; aksi durumda varyasyonlar söz konusudur.
- Hangi kategorinin (kombinasyonlar, varyasyonlar veya permütasyonlar) söz konusu olduğu belirlendikten sonra sıradaki soru şudur: Elemanlar tekrarlanıyor mu? Buradan, örneğin tekrarlı mı yoksa tekrarsız mı varyasyonların olacağı belirlenir.

Örnek 1

15 kalem bulunan bir kutudan 9 kalem kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm:

Elemanların dizilişi önemli midir? Hayır!

Demek ki kombinasyon söz konusudur. Elemanlar tekrarlanmaz (bir kalem birden fazla kez seçilemez), bu nedenle 15 elemandan 9. sınıf tekrarsız kombinasyonların sayısı istenir. Bu sayı şöyledir

$$C_{15}^9 = \binom{15}{9} = \frac{15!}{9!(15-9)!} = 5005.$$

Soru 1

Bir piyangoda farklı ödüllere sahip 10 bilet yer almaktadır. Bir katılımcı 3 bilet çeker. 3 farklı ödülü kaç farklı şekilde kazanabilir?

Örnek 2

Matematik öğretmeni dört öğrenciyi sözlüye kaldırmış ve onlara 2, 3, 4 ve 5 notlarını vermiştir. Notlar kaç farklı şekilde dağıtılabilir, eğer:

- a) herkes farklı bir notla değerlendirilmişse;
- b) öğrenciler sadece 4 veya 5 ile değerlendiriliyorsa.

Çözüm:

Elemanların (notların) dizilişinin önemli olduğuna dikkat edelim. Notların öğrenciler üzerindeki farklı dizilişi farklı bir olanak verir. Demek ki varyasyonlar veya permütasyonlar söz konusudur.

- a) Bu durumda 4 farklı not dört öğrenciye dağıtılır, bu nedenle 4 elemanlı tekrarsız permütasyonlar söz konusudur. Bunların sayısı $P_4 = 4! = 24$ 'tür.
- b) Eğer tüm öğrenciler sadece 4 veya 5 ile değerlendiriliyorsa, bu tür değerlendirmelerin sayısı, 2 elemandan (elemanlar 4 veya 5'tir) 4. sınıf tekrarlı varyasyonların sayısıdır ve bu sayı $V_2^4 = 2^4 = 16$.

Soru 2

Bir kişi elektronik bankacılığa giriş için kullanılan altı basamaklı PIN'i unutmuştur. PIN'in 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamlarından oluştuğunu ve 1 ile 6 rakamlarının ne ilk ne de son konumda olmadığını hatırlamaktadır. Unutulan PIN'i bulmak için kaç deneme gerekir?

Örnek 3

Birinci Futbol Ligi'nde şampiyonanın sonuna kadar bir takımın daha 7 maç oynaması gerekmektedir. Antrenörün hesabına göre ligde kalmak için gerekli minimum puan 8 puandır. Galibiyet 3 puan, beraberlik 1 puan ve mağlubiyet 0 puan getiriyorsa bu minimum kaç farklı şekilde sağlanabilir? Tam olarak 8 puanın kazanılmasının istendiğini, bundan daha fazlasının istenmediğini belirtelim.

Çözüm:

Gerekli minimum puan aşağıdaki şekillerde kazanılabilir:

- 2 galibiyet, 2 beraberlik ve 3 mağlubiyet;
- 1 galibiyet, 5 beraberlik ve 1 mağlubiyet.

Elemanların dizilişinin önemli olduğuna dikkat edelim. Galibiyetlerin, beraberliklerin ve mağlubiyetlerin farklı dizilişi farklı bir olanak verir. Bu durumda 7 eleman 7 konuma dizilir ve elemanlardan bazıları (galibiyetler, beraberlikler, mağlubiyetler) aynıdır. Demek ki tekrarlı permütasyonlar söz konusudur; birinci durumda (2, 2, 3) tipinde, ikinci durumda ise (1, 5, 1) tipindedir. Buradan, olası sonuçların toplam sayısı şudur

$$P_7(2,2,3) + P_7(1,5,1) = \frac{7!}{2!2!3!} + \frac{7!}{1!5!1!} = 252.$$

Soru 3

Bir direğe 9 bayrakçık dizilmiştir. Bayrakçıkların her dizilişi belirli bir sinyali temsil etmektedir. Aralarında 4 beyaz, 3 kırmızı ve 2 mavi bayrakçık varsa bayrakçıklarla kaç sinyal gösterilebilir?

Örnek 4

Bir turnuvada 36 satranç partisi oynanmıştır. Turnuva kurallarına göre her satranççı, herkesle birer satranç partisi oynamıştır. Turnuvada kaç katılımcı vardır?

Çözüm:

Turnuvaya katılan satranççı sayısı n 'nin bilinmediğine dikkat edelim. Bu durumda her satranç partisi iki satranççı arasında oynanır ve her iki satranççı yalnızca birer parti oynar; bu nedenle satranççıların sırası (her partide) önemli değildir. Bu yüzden n elemandan 2. sınıf tekrarsız kombinasyonlar söz konusudur. Buradan turnuvada oynanan partilerin toplam sayısı C_n^2 'dir ve sorunun koşullarına göre bu sayı 36'dır. Elde ederiz

$$C_n^2 = 36 \quad \binom{n}{2} = 36 \quad \frac{n(n-1)}{2} = 36$$

Son eşitlik $n^2 - n - 72 = 0$ ikinci dereceden denklemine indirgenir. Bu denklemin çözümleri için

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-72)}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2}$$

elde edilir, yani $n_1 = 9$, $n_2 = -8$. Turnuvadaki katılımcı sayısı söz konusu olduğundan bu sayı negatif olamaz. Demek ki turnuvadaki katılımcı sayısı 9'dur.

Soru 4

Makedonya Birinci Futbol Ligi'nin son sezonunda 132 maç oynanmıştır. Lig kurallarına göre her takım, diğer her takımla ikişer maç oynar (biri kendi sahasında, diğeri deplasmanda). Makedonya Birinci Futbol Ligi'nde kaç takım oynamaktadır?

Örnek 5

0, 1, 2 rakamlarından oluşan altılılar incelenmektedir. Sonuncu (altıncı) konumda 2 rakamı bulunan altılıların sayısı belirlensin.

Çözüm:

Altılılar söz konusu olduğundan, her altılıdaki elemanların sırasının önemli olduğu açıktır. Altılılar 0, 1, 2 olmak üzere üç rakamdan oluşur; bu nedenle her altılı, 3 elemandan 6. sınıf tekrarlı varyasyondur. Soruda son konumunda 2 rakamı bulunan varyasyonlar istenmektedir. Bunların sayısı şu şekilde belirlenebilir: Son konuma 2 sabitlenirse, ilk beş konum $\bar{V}_5^2 = 3^5 = 243$ farklı şekilde doldurulabilir.

Soru 5

0, 1, 2, 3, 4 rakamlarından oluşan yedililer incelenmektedir. 1 ve 2 rakamlarının sırasıyla birinci ve ikinci konumda bulunduğu yedililerin sayısı belirlensin.

Örnek 6

Bir ongende kaç köşegen çizilebilir?

Çözüm:

Ongenin köşeleri kümesini ele alalım. Her köşe diğer tüm köşelerle birleştirilirse ongenin tüm köşegenleri ve tüm kenarları elde edilir. İki köşenin her birleştirilmesi, 10 elemandan 2. sınıf bir kombinasyon olarak incelenebilir (köşelerin sırası önemli değildir; iki köşe tam olarak bir köşegen veya tam olarak bir kenar belirler). Köşegenlerin ve kenarların toplam sayısı $C_{10}^2 = \binom{10}{2} = 45$. Ongenin 10 kenarı olduğundan, köşegenlerin toplam sayısı $C_{10}^2 - 10 = 45 - 10 = 35$ olur.

Soru 6

Bir onikigende kaç köşegen çizilebilir?

Örnek 7

Bir rafa, aralarında bir romanın iki cildi de bulunan 7 kitap dizilmelidir. Romanın iki cildi herhangi bir sırayla yan yana duracaksa diziliş kaç farklı şekilde yapılabilir?

Çözüm:

Romanın iki cildi bir kitap gibi ele alınabilir (yani 6 kitap dizilecektir) ve bu durumda iki olasılık vardır: 1 – 2 sırasıyla veya 2 – 1 sırasıyla olmaları. Eğer 1 – 2 sırasıyla yerleştirilirlerse raftaki altı kitabın diziliş sayısı $P_6 = 720$ 'dir. Aynı sayı, iki kitap 2 – 1 sırasıyla yerleştirildiğinde de elde edilir. Buradan, kitapların toplam diziliş sayısı şudur

$$2 \cdot P_6 = 2 \cdot 720 = 1440.$$

Alıştırma Soruları!

- Beş tek rakamdan dört basamaklı sayılar oluşturulmaktadır.
 - Kaç dört basamaklı sayı oluşturulabilir?
 - Bunların kaçında rakamlar farklıdır?
 - Kaçı 3 ile bölünebilen bir rakamla biter?
 - Kaçı aynı rakamla başlar ve biter?
- Dünya hentbol şampiyonasına 16 millî takım katılmaktadır. Üç madalya (altın, gümüş ve bronz) kaç farklı şekilde verilebilir?
- Bir cihazın kumanda panelinde 8 farklı düğme vardır. Bu düğmelerden 5'ine (sırayla) basılması, cihazda bir etkinliğin çalışmasını sağlar. Bu cihazda kaç etkinlik çalıştırılabilir?
- 0, 1, 2, ..., 9 rakamlarından, 2, 3 ve 4 rakamlarının herhangi bir dizilişle yan yana bulunduğu kaç farklı permütasyon oluşturulabilir?
- Üç erkek ve üç kız sıraya dizilmektedir. Dizilme kaç farklı şekilde yapılabilir, eğer:
 - üç erkek yan yana durmak zorundaysa;
 - belirli iki kız birlikte oturmak zorundaysa.
- Standart bir iskambil destesinden yalnızca resimli kartlar (valeler, kızlar ve papazlar) alınmıştır. Ayrılan kartlardan 3'ü seçilir. En az iki kırmızı kart kaç farklı şekilde seçilebilir?
- Bir kitapçıdaki rafta 9 kitap bulunmaktadır; bunların 7'si matematik, 2'si bilişim kitabıdır. Seçilenler arasında en az bir bilişim kitabı bulunacak şekilde bu kitaplardan 4'ü kaç farklı şekilde seçilebilir?
- Bir dükkânda 4 çeşit çörek vardır. Çeşitler tekrarlanabiliyorsa 6 çörek kaç farklı şekilde satın alınabilir?

4.6 DENEYLER VE OLAYLAR

Etkinlik

1. Oyun zarı atma deneyi yap ve 2 sayısının gelmesini gözlemle. Zar atıldığında 2 sayısının geleceğini kesin olarak söyleyebilir misin?
2. Oyun zarı atma deneyini birkaç kez tekrarla ve 2 sayısının kaç kez geldiğini say. 2 sayısının gelme sayısından nasıl bir sonuç çıkarabilirsin?

Unutma!

Deney bir olguyu, bir sistemin veya sürecin davranışını gözlemlemek, ölçmek ya da incelemek ve daha sonraki analiz için veri elde etmek amacıyla gerçekleştirilen işlem veya etkinliktir.

Birkaç deney örneği:

1. Bir madeni para havaya atılır ve yere düştükten sonra üst yüzünde “yazı” veya “tura” gelebilir. Madeni paranın atılmasıyla bir deney gerçekleştirmiş oluruz ve bu deneyin sonucu olarak şu sonuçlardan biri elde edilebilir: “madeni paranın üst yüzünde yazı geldi” veya “madeni paranın üst yüzünde tura geldi”.
2. Su 100 °C’ye kadar ısıtılırsa kaynamaya başlar. Burada bir deney gerçekleştirilmiştir (suyun ısıtılması) ve bu deneyin sonucu olarak “su kaynıyor” sonucu ortaya çıkar.
3. Bir fabrikadaki ürünlerin sağlamlığı, bir ürün alınarak, kalitesi kontrol edilerek ve sağlam olup olmadığı belirlenerek incelenir. Demek ki bir deney gerçekleştirilmiştir (kalite kontrolü) ve olası sonuçlar şunlardır: “ürün sağlamdır” ve “ürün sağlam değildir”.
4. Bir öğrencinin bilgisini kontrol etmek için bir test uygulanır. Testin değerlendirilmesi 0’dan 100’e kadar puanlarla yapılır. Bu durumda deney, öğrencinin değerlendirilmesidir; olası sonuçlar ise “öğrenci i puan aldı” biçimindedir; burada $i = 0, 1, \dots, 100$.

S deneyinin her sonucu, S deneyiyle ilgili olay olarak adlandırılır. Olayları alfabenin başındaki büyük harflerle göstereceğiz: $A, B, C, \dots$

Bir deney deterministik veya deterministik olmayan olabilir. Bir deneyin sonucu önceden biliniyorsa bu deney *deterministiktir*; aksi durumda, yani sonucu önceden kesin olarak bilinmiyorsa bu deney *deterministik olmayan* bir deneydir

Soru 1

1, 2, 3, 4 örneklerindeki her deney için deterministik mi yoksa deterministik olmayan mı olduğunu belirle.

Olasılık teorisi, deterministik olmayan deneylerin incelenmesiyle ilgilenir. Amacı, tek anlamlı sonucu olmayan deneylerde bir düzenlilik bulmaktır. Aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 1

Madeni para atma deneyini ve A : “yazı geldi” olayını inceleyelim. Deney bir kez gerçekleştirilirse sonucunun ne olacağı kesin olarak söylenemez.

Bu nedenle, eşit koşullar altında $n = 1000$ deneyden oluşan 10 seri gerçekleştirilmiş olsun. $n_i(A)$ ile i 'inci seride A olayının gerçekleştiği deneylerin sayısı gösterilir. Bu on serinin sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

i	$n_i(A)$	$\frac{n_i(A)}{n}$
1	502	0,502
2	504	0,504
3	492	0,492
4	498	0,498
5	500	0,500
6	510	0,510
7	505	0,505
8	490	0,490
9	493	0,493
10	509	0,509

Son sütunda $\frac{n_i(A)}{n}$, bölümünün değerleri verilmiştir; burada n , bir seride gerçekleştirilen deneylerin sayısıdır. Bizim durumumuzda $n = 1000$ 'dir. Bu sütundaki değerlerin 0,5'e yakın olduğu görülebilir. Ayrıca bir serideki deney sayısı arttıkça bu bölüm 0,5'e giderek daha fazla yaklaşır. Demek ki madeni para atma deneyinin tek bir gerçekleştirilmesinde hangi sonucun ortaya çıkacağını kesin olarak tahmin edemesek de, daha çok deneyden oluşan bir seri gerçekleştirildiğinde “yazı geldi” olayının ortaya çıkmasında belirli bir düzenlilik görülür. Bu düzenlilik, deneylerin yaklaşık yarısında bu olayın gerçekleşeceğini gösterir.

Unutma!

- $\frac{n_i(A)}{n}$ sayısına, i 'inci deney serisinde A olayının *görelî frekansı* denir.
- Bu görelî frekansların etrafında toplandığı gerçek sayıya, A olayının *istatistiksel (veya ampirik) olasılığı* denir.
- n deneyden oluşan bir seri incelenirse, A olayının gerçekleşme sayısı $n(A)$ en az 0, en çok n olur; yani $0 \leq n(A) \leq n$. Buradan, $\frac{0}{n} \leq \frac{n(A)}{n} \leq \frac{n}{n}$, $0 \leq \frac{n(A)}{n} \leq 1$, elde edilir. A olayının gerçekleşmesine ait görelî frekansın 0 ile 1 arasında bir sayı olduğu sonucuna varabiliriz. Dolayısıyla A olayının istatistiksel olasılığı da 0 ile 1 arasındadır.
- A olayının istatistiksel olasılığı, bu olayın gerçekleşme olasılığı için nesnel bir ölçüdür.
- Önceki madeni para atma örneğinde A : “yazı geldi” olayının istatistiksel olasılığı 0,5'tir. Bu, önceki tabloda son sütunda verilen görelî frekansların etrafında toplandığı sayıdır.

Soru 2

Önceki etkinlikte gerçekleştirdiğin oyun zarı atma deneyleri serisinde B : “2 sayısı geldi” olayının gerçekleşmesine ait göreceli frekans kaçtır?

Unutma!

Verilen bir A olayı için olasılığın istatistiksel tanımı, aşağıdaki iki koşul sağlandığında uygulanabilir:

1. S deneyi, aynı koşullar altında istediğimiz kadar tekrar edilebilir;
2. Birden fazla deney serisinin her birinde A , olayının göreceli frekansları yaklaşık olarak eşit sayılardır. Bu, $n_1, n_2, \dots, n_k$ deneyden oluşan seriler gerçekleştirilirse şu anlama gelir

$$\frac{n_1(A)}{n_1} \approx \frac{n_2(A)}{n_2} \approx \dots \approx \frac{n_k(A)}{n_k}.$$

Koşul 2 istatistiksel kararlılığı sağlar, koşul 1 ise koşul 2'nin kontrol edilmesini sağlar. Verilen bir deneyle ilgili olarak koşul 1 ve koşul 2'nin sağlandığı A olayına **rastgele olay** denir.

Örnek 2

Aşağıdaki deneyleri ve bunlarla ilgili olayları inceleyelim.

- a) Deney, oyun zarı atmaktır. Aşağıdaki olaylar incelenmektedir:
 A_1 : 1'den 6'ya kadar bir sayı geldi;
 A_2 : 7 sayısı geldi.
- b) Deney, içinde 5 beyaz top bulunan bir kutudan top çekmektir. Aşağıdaki olaylar incelenmektedir:
 B_1 : beyaz top çekildi;
 B_2 : siyah top çekildi.
- c) Deney, rastgele seçilen bir öğrencinin değerlendirilmesidir. Aşağıdaki olaylar incelenmektedir:
 C_1 : öğrenci 1'den 5'e kadar bir not aldı;
 C_2 : öğrenci 10 notunu aldı.

A_1, B_1, C_1 olaylarının ilgili deneyin her gerçekleştirilmesinde ortaya çıktığı; A_2, B_2, C_2 olaylarının ise ilgili deneyin gerçekleştirilmesinde hiçbir zaman ortaya çıkmadığı görülebilir.

Unutma!

- Verilen bir deneyle ilgili **kesin olay**, bu deneyin her gerçekleştirilmesinde ortaya çıkan olaydır.
- Verilen bir deneyle ilgili **imkânsız olay**, verilen deneyin gerçekleştirilmesinde hiçbir zaman ortaya çıkmayan olaydır.

Demek ki örnek 2'de A_1, B_1, C_1 olayları kesin olaylardır; A_2, B_2, C_2 olayları ise imkânsız olaylardır.

- n deneyden oluşan bir seri gerçekleştiriliyorsa, kesin olay n kez ortaya çıkar, imkânsız olay ise 0 kez ortaya çıkar. Buradan, kesin olayın görelî frekansı $\frac{n}{n} = 1$, imkânsız olayın görelî frekansı ise $\frac{0}{n} = 0$ olur. Demek ki kesin olay ve imkânsız olay koşul 1 ve koşul 2'yi sağlar; bu nedenle onlar da rastgele olaylardır.

Alıştırma Soruları!

1. Deney, oyun zarı atmaktır. 50'şer deneyden oluşan 4 seri yap ve aşağıdaki olayların gerçekleşmesine ait istatistiksel olasılığı belirle:
A: zarın üst yüzünde çift sayı geldi;
B: zarın üst yüzünde 4'ten büyük bir sayı geldi.
2. Deney, 52 kartlık standart bir desteden kart çekmektir. 100'er deneyden oluşan 5 seri yap. Her çekilişten sonra kartın sayısını ve sembolünü kaydet ve kartı desteye geri koy. Aşağıdaki olayların istatistiksel olasılığının ne kadar olduğunu belirle:
A: 5 sayılı kart çekildi;
B: yaprak sembolü kart çekildi;
C: sinek sembolü onlu çekildi.
3. Dijital termometre ile sınıftaki sıcaklık ölçülmektedir. Sensör -10°C ile 50°C arasındaki sıcaklıkları gösterebilir. Aşağıdaki olayların her biri için kesin olay mı, imkânsız olay mı yoksa bunlardan hiçbiri mi olduğunu belirle.
A: Ölçülen sıcaklık -10°C ile 50°C arasındadır.
B: Ölçülen sıcaklık 100°C 'dir.
C: Ölçülen sıcaklık negatiftir.
4. Laboratuvarında bir çözelti turnusol kâğıdı ile test edilmektedir. Çözelti ya asidik ya nötr ya da baziktir. Aşağıdaki olayların her biri için kesin olay mı, imkânsız olay mı yoksa bunlardan hiçbiri mi olduğunu belirle.
A: Çözeltinin nötr olması.
B: Çözeltinin aynı anda hem asidik hem bazik olması.
C: Çözeltinin belirtilen üç durumdan birine sahip olması.

4.7 ELEMANTER (BASİT) OLAYLAR KÜMESİ. RASTGELE OLAYLAR

Örnek 1

Oyun zarı atma deneyini inceleyelim. Bu deneyle ilgili olası olaylardan bazıları şunlardır:

A : çift sayı geldi;	E_3 : 3 sayısı geldi;
B : 3 ile bölünebilen sayı geldi;	E_4 : 4 sayısı geldi;
E_1 : 1 sayısı geldi;	E_5 : 5 sayısı geldi;
E_2 : 2 sayısı geldi;	E_6 : 6 sayısı geldi.

Bir yandan A ve B olaylarını, diğer yandan E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ve E_6 olaylarını inceleyelim. A olayının, E_2, E_4 veya E_6 olaylarından biri ortaya çıkarsa gerçekleştiği; B olayının ise E_3 olayı ortaya çıkarsa veya E_6 ortaya çıkarsa gerçekleştiği görülebilir. Demek ki A olayı E_2, E_4 ve E_6 olaylarına ayrılabilir; B olayı ise E_3 ve E_6 olaylarına ayrılabilir.

Öte yandan E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ve E_6 olayları başka olaylara ayrılamaz. Bu nedenle bu olaylara elemanter olaylar denir. Elemanter olayları, indeksi 1, 2, ... olan E sembolüyle göstereceğiz.

Unutma!

- Verilen bir deneyle ilgili elemanter olay, deneyin başka olaylara ayrılamayan her mantıksal sonucudur. Bununla birlikte, deneyin her gerçekleştirilmesinde bir ve yalnız bir elemanter olay ortaya çıkar.
- Bir deneyle ilgili bu tür olayların tümünün oluşturduğu kümeye *elemanter olaylar kümesi* denir ve Ω ile gösterilir.

Örnek 2

Deney oyun zarı atma olduğunda elemanter olaylar kümesini belirleyelim. Deneyin her gerçekleştirilmesinde, örnek 1'de tanımlanan E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ve E_6 olaylarından birinin ve yalnız birinin ortaya çıktığına dikkat edelim. Bu nedenle bu deneyle ilgili elemanter olaylar kümesi $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$.

Soru 1

Madeni para atma deneyi için elemanter olaylar kümesini belirle.

Örnek 3

Deney iki madeni para atmaktan oluşsun. Bir madeni para atıldığında olası sonuç "yazı geldi" veya "tura geldi" olabilir (kısaca "yazı" veya "tura" yazacağız). Ancak deney iki madeni paranın birlikte atılmasından oluştuğu için olası sonuçlar sıralı ikililer olacaktır. Her ikilide birinci eleman birinci madeni paranın sonucunu, ikinci eleman ise ikinci madeni paranın sonucunu gösterecektir. Elemanter olaylar kümesi şöyledir:

$$\Omega = \{(tura, tura), (tura, yazı), (yazı, tura), (yazı, yazı)\}.$$

Örnek 1'de A olayının, E_2, E_4 veya E_6 olaylarından biri ortaya çıkarsa gerçekleşeceği; B olayının ise E_2 olayı ortaya çıkarsa veya E_6 ortaya çıkarsa gerçekleşeceği sonucuna vardık. Buradan A ve B olayları şu şekilde yazılabilir: $A = \{E_2, E_4, E_6\}$, $B = \{E_2, E_6\}$. A ve B olaylarının, elemanter olaylar kümesi Ω 'nın alt kümeleri olarak gösterildiğine dikkat edelim.

Unutma!

- **Rastgele olay**, elemanter olaylar kümesi Ω 'nın herhangi bir alt kümesidir.
- A olayına karşılık gelen elemanter olaylar alt kümesine ait elemanter olaylardan biri ortaya çıkarsa, A olayı gerçekleşmiş deriz.

Örnek 4

Deney iki oyun zarı atmaktan oluşur. Elemanter olaylar kümesini ve aşağıdaki rastgele olayları açıkla:

A : iki zarda da çift sayı geldi;

B : birinci zarda çift, ikinci zarda tek sayı geldi.

Çözüm:

Bu deney için elemanter olaylar kümesi, (x, y) , sıralı ikililerinden oluşacaktır; burada x birinci zarın sonucunu, y ise ikinci zarın sonucunu gösterir ve $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Buradan,

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

A olayı için aşağıdaki elde edilir:

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \{2, 4, 6\}\},$$

veya açık biçimde:

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}.$$

B olayı için ise şuna sahibiz:

$$B = \{(x, y) \mid x \in \{2, 4, 6\}, y \in \{1, 3, 5\}\}.$$

Ya da

$$B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}.$$

- Kesin olay, deney her gerçekleştirildiğinde ortaya çıkar; yani her elemanter olay onun gerçekleşmesine yol açar. Bu nedenle Ω ile gösterilir.
- İmkânsız olay ise deney gerçekleştirildiğinde hiçbir zaman ortaya çıkmaz; yani hiçbir elemanter olay onun gerçekleşmesine yol açmaz. Buradan, imkânsız olayı $\emptyset$ ile göstereceğiz.

Alıştırma Soruları

1. Deney önce madeni para atmaktan oluşur. Sonra, yazı gelirse zar atılır ve zarın üst yüzündeki noktaların sayısı kaydedilir; tura gelirse madeni para bir kez daha atılır. Elemanter olaylar kümesini açıkla.
2. Bir kutuda 1'den 5'e kadar sayılarla numaralandırılmış 5 top vardır. Rastgele bir şekilde, geri koymadan, tek sayılı top çekilinceye kadar toplar birer birer çekilir. Çekilen topların sayıları kaydedilirse elemanter olaylar kümesini açıkla.
3. Deney üç oyun zarı atmaktan oluşur. Elemanter olaylar kümesini ve aşağıdaki rastgele olayları açıkla:
 - A: ilk iki zarda çift sayı, üçüncü zarda tek sayı geldi;
 - B: üç zarda da tek sayı geldi;
 - C: üç zarın noktalarının toplamı çift sayıdır;
 - D: ilk iki zarda aynı değer geldi;
 - E: üç zarda hiçbir beşlik gelmedi;
 - F: üç zarda en az bir beşlik geldi.
4. Bir atıcının 4 mermisi vardır ve hedefe, art arda iki isabet sağlayıncaya kadar ya da bu koşulu yerine getirme şansını kaybedinceye kadar ateş eder. Elemanter olaylar kümesini ve aşağıdaki rastgele olayları açıkla:
 - A: hedef en az iki kez vuruldu;
 - B: bir mermi kullanılmadan kaldı;
 - C: isabet sayısı iskalama sayısından fazlaydı.
5. Bir dart tahtasında 7, 8, 9, 10 bölgeleri bulunmaktadır. Bir oyuncu dart oklarıyla üç kez nişan alır. Elemanter olaylar kümesini ve aşağıdaki rastgele olayları belirle:
 - A: üç kez çift sayı vuruldu;
 - B: iki kez çift, bir kez tek sayı vuruldu;
 - C: ilk iki atışta çift, üçüncü atışta tek sayı vuruldu;
 - D: vurulan sayıların toplamı 27'dir.

4.8 OLAYLARDA İŞLEMLER

Hatırla!

- Verilen bir deneyle ilgili elemanter olay, deneyin başka olaylara ayrılamayan her mantıksal sonucudur. Bununla birlikte, deneyin her gerçekleştirilmesinde bir ve yalnız bir elemanter olay ortaya çıkar.
- Bir düzgün dörtyüzlünün yüzleri 1, 2, 3, 4 ile işaretlenmiştir. Dörtyüzlü düz bir yüzeye atılır ve yüzey üzerinde durduğu yüz gözlemlenir. Bu deney için elemanter olaylar kümesi nedir?
- Önceki deney için A: tek sayı geldi olayını Ω 'nın bir alt kümesi olarak açıkla.

Örnek 1

Deney, 52 kartlık bir desteden kart çekmekten oluşsun. Olayları şöyle gösteriyoruz:

A: 10 sayılı kart çekildi;

B: pik kart çekildi.

C: 10 sayılı pik kart çekildi.

C olayının, A ve B olayları aynı anda gerçekleştiğinde ortaya çıkacağına dikkat edelim.

Unutma!

- **A ve B olaylarının çarpımı**, A ve B olaylarının ikisi aynı anda gerçekleştiğinde ve yalnızca bu durumda gerçekleşen olaydır. Bu olay, A olayının ve B olayının elemanter olaylar kümelerinin kesişimi olan elemanter olaylar kümesiyle belirlenir.
- A ve B iki olayının çarpımı $A \cap B$ ile gösterilir.

Örnek 2

Deney oyun zarı atma olsun. Aşağıdaki olayları inceliyoruz:

A: 3'ten küçük veya 3'e eşit bir sayı geldi;

B: 3 ile bölünebilen bir sayı geldi;

C: 4'ten büyük bir sayı geldi.

A ve B olaylarının çarpımını, ayrıca A ve C olaylarının çarpımını belirle.

Çözüm:

Bu deney için elemanter olaylar kümesi $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, olur; burada E_i "i sayısı geldi" elemanter olaydır, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. A, B ve C olayları, oğ Ω Ω 'nın alt kümeleri olarak aşağıdaki şekilde

açıklanır: $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_6\}$, $C = \{E_3, E_4\}$. $A \cap B$ olayı, 3'ten küçük veya 3'e eşit ve 3 ile bölünebilen bir sayının geldiğini gösterir; bu nedenle $A \cap B = \{E_3\}$. $A \cap C$ olayı, 3'ten küçük veya 3'e eşit ve 4'ten büyük bir sayının geldiğini gösterir; bu ise imkânsızdır. Demek ki A ve C olayları aynı anda gerçekleşemez, yani $A \cap C = \emptyset$.

Soru 1

Örnek 2'deki B ve C olaylarının çarpımını belirle.

Unutma!

İki A ve B olayı aynı anda gerçekleşemiyorsa bu olaylara ayrık olaylar denir. Bunların çarpımı (kesişimi) **imkânsız olaydır**, yani $A \cap B = \emptyset$.

Örnek 2'de A ve C olayları ayrık olaylardır.

Unutma!

- A ve B olaylarının toplamı, A veya B olaylarından en az biri gerçekleştiğinde ve yalnızca bu durumda gerçekleşen olaydır.
- A ve B olaylarının toplamı, A olayının ve B olayının elemanter olaylar kümelerinin birleşimi olan elemanter olaylar kümesiyle belirlenir.
- A ve B iki olayının toplamı, genel durumda $A \cup B$ ile gösterilir.
- A ve B olayları ayrık ise bunların toplamını $A + B$ ile göstereceğiz.

- A veya B olaylarından en az birinin gerçekleştiği söylendiğinde, yalnızca A olayının ya da yalnızca B olayının ya da iki olayın aynı anda gerçekleştiği anlaşılır.
- A ve B olayları ayrık ise iki olayın aynı anda gerçekleşmesi imkânsızdır. Bu nedenle $A \cup B$ olayının gerçekleşmesi, yalnızca A olayının ya da yalnızca B olayının gerçekleşmesi anlamına gelir.
- Bu yüzden bu durumda iki olayın toplamı için $A + B$ gösterimi kullanılır. Demek ki

$$A + B = A \cup B \text{ ako } A \cap B = \emptyset.$$

Örnek 3

A , B ve C olayları örnek 2'deki olaylar ise A ve B olaylarının toplamını, ayrıca A ve C olaylarının toplamını belirle.

Çözüm:

A , B ve C olayları şöyle belirlenmiştir: $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_6\}$, $C = \{E_3, E_4\}$. $A \cup B$ olayı, 3'ten küçük veya 3'e eşit bir sayının ya da 3 ile bölünebilen bir sayının geldiğini gösterir ve $A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_6\}$ şeklinde açıklanabilir. $A \cup C$ olayı, 3'ten küçük veya 3'e eşit bir sayının ya da 4'ten büyük bir sayının geldiğini gösterir. Örnek 2'de A ve C olaylarının aynı anda gerçekleşemeyeceğini, yani ayrık olaylar olduklarını gördük. Buradan $A \cup C = A + C = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$.

Soru 2

Örnek 2'deki B ve C olaylarının toplamını belirle..

Unutma!

- A olayının karşıt olayı, A olayı gerçekleşmediğinde ve yalnızca bu durumda gerçekleşen olaydır. Bu olay $\bar{A}$ ile gösterilir. $\bar{A}$ olayının elemanter olaylar kümesi, A olayına karşılık gelen elemanter olaylar kümesinin Ω 'ya göre **tümleyenidir**.
- Her A olayı için şu geçerlidir:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad A + \bar{A} = \Omega.$$

Örnek 4

Örnek 1'deki A ve B olaylarının karşıt olaylarını belirle.

Çözüm:

A olayı, 3'ten büyük bir sayı geldiğinde, yani E_4, E_5 veya E_6 elemanter olaylarından biri ortaya çıktığında gerçekleşmez. Bu nedenle $\bar{A} = \{E_1, E_2, E_3\}$ olur. B olayının karşıt olayı için ise $\bar{B} = \{E_1, E_2, E_4, E_5\}$ elde edilir.

Soru 3

Örnek 2'deki C olayının karşıt olayını belirle.

Unutma!

A olayı B olayını gerektirir ($A \subseteq B$ yazarız), eğer A olayı her gerçekleştiğinde B olayı da gerçekleşiyorsa.

Örnek 5

İki madeni para atma deneyini yeniden inceleyelim.

A : tam olarak bir tura gelmesi olayı

B : en az bir tura gelmesi olayı.

A olayının her gerçekleştiğinde B olayının da gerçekleştiği görülebilir; yani $A \subseteq B$.

Unutma!

Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise A ve B olaylarına **eşit olaylar** denir.

İki olayın çarpımı ve toplamı için verilen tanımlar, sonlu sayıda çok olayın çarpımı ve toplamı için de genelleştirilebilir.

Unutma!

- $A_1, A_2, \dots, A_n$ olaylarının toplamı, $A_1, A_2, \dots, A_n$ olaylarından en az biri gerçekleştiğinde ve yalnızca bu durumda gerçekleşen olaydır.
- Bu olay $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ ile gösterilir ve bu olayın elemanter olaylar kümesi, $A_1, A_2, \dots, A_n$ olaylarının her birine karşılık gelen elemanter olaylar kümelerinin birleşimidir.

Unutma!

- $A_1, A_2, \dots, A_n$ olaylarının çarpımı, $A_1, A_2, \dots, A_n$ olaylarının tümü aynı anda gerçekleştiğinde ve yalnızca bu durumda gerçekleşen olaydır.
- Bu olay $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ile gösterilir ve bu olayın elemanter olaylar kümesi, $A_1, A_2, \dots, A_n$ olaylarının her birine karşılık gelen elemanter olaylar kümelerinin kesişimidir.

Örnek 6

Hedefe üç kez atış yapılır. Sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü atışta hedefi vurmayı gösteren A_1, A_2 ve A_3 olayları incelenmektedir. Bu olaylar yardımıyla aşağıdaki rastgele olayları açıklayınız:

- B : üç isabet sağlandı;
 C : hedef üç kez ıskalandı;
 D : en az bir isabet sağlandı;
 E : en az bir ıskalama gerçekleşti.

Çözüm:

- B olayı A_1, A_2 ve A_3 olaylarının üçü aynı anda gerçekleşirse ortaya çıkar. Buradan, $B = A_1 A_2 A_3$.
- C olayı, A_1, A_2 ve A_3 olaylarından hiçbirisi gerçekleşmezse, yani bunların karışık olayları gerçekleşirse ortaya çıkar. Böylece, $C = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$.
- D olayı, A_1, A_2 veya A_3 olaylarından en az biri gerçekleşirse ortaya çıkar. Bu nedenle $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Benzer şekilde, $F = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$.

Örnek 7

Bir gemide bir dümen mekanizması, dört buhar kazanı ve iki türbin vardır. Aşağıdaki olayları gösteriyoruz:

- A : dümen mekanizması sağlamdır
 B_k : k 'inci buhar kazanı sağlamdır, $k = 1, 2, 3, 4$
 C_j : j 'inci türbin sağlamdır, $j = 1, 2$

D olayı, geminin hareket edebilir durumda olduğunu gösterir ve dümen mekanizması, en az bir kazan ve en az bir türbin sağlam olduğunda gerçekleşir. D olayını A , B_1 ve C_j olayları aracılığıyla ifade ediniz.

Çözüm:

$$D = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \cap (C_1 \cup C_2).$$

Alıştırma Soruları

- Deney üç madeni para atmaktan oluşur. A_1 , A_2 ve A_3 olayları sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü madeni parada yazı gelmesini göstermektedir. Bu olayları kullanarak aşağıdaki rastgele olayları açıklayınız:
 B : yazı yalnızca birinci madeni parada geldi;
 C : yazı birinci ve ikinci madeni paralarda geldi;
 D : yazı üç madeni paranın hepsinde geldi;
 E : yazı en az iki madeni parada geldi;
 F : yazı yalnızca bir madeni parada geldi;
 G : yazı tam olarak iki madeni parada geldi;
 H : yazı en çok iki madeni parada geldi.
- A ve B adlı iki satranççı bir satranç turnuvası oynar. Turnuva 4 partiden oluşur; beraberlikle biten partiler dikkate alınmaz. Daha fazla galibiyet elde eden kişi kazanır. Beraberlik durumu olursa (2 : 2), beşinci belirleyici parti de oynanır. Aşağıdaki olayları açıklayınız:
 D : A satranççısı kazanacak;
 E : B satranççısı kazanacak;
 F : beşinci parti de oynanacak.
- Bir matematik testinde bir öğrenciye üç soru verilir. A_i ile öğrencinin i 'inci soruyu çözmediği olayı gösteriyoruz, $i = 1, 2, 3$. Bu olaylar yardımıyla aşağıdaki olayları açıklayınız:
 B : öğrenci bütün soruları çözmediği biliyor;
 C : öğrenci en az bir soruyu çözmediği biliyor;
 D : öğrenci en az iki soruyu çözmediği biliyor;
 E : öğrenci en çok iki soruyu çözmediği biliyor;
 F : öğrenci üç sorunun tamamını çözmediği bilmiyor;
 G : öğrenci hiçbir soruyu çözmediği bilmiyor.
- Deney, bir üretim serisinden üç ürün seçmekten oluşur. Aşağıdaki olayları gösteriyoruz:
 A : üç üründen en az biri kusurludur;
 B : üç ürünün hepsi sağlamdır.
Aşağıdaki olaylar neye eşittir:
a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $\bar{A}$; d) $\bar{B}$.

4.9 OLASILIĞIN KLASİK TANIMI

Hatırla!

Elemanter olaylar kümesi nedir?
Rastgele olay A nasıl tanımlanır?
Verilen bir A olayının istatistiksel olasılığı nasıl tanımlanır?

Daha önce belirttiğimiz gibi, deterministik (belirlenimci) olmayan deneylerde sonuç tek anlamlı değildir. Bu nedenle, bu deneyler gerçekleştirildiğinde hangi sonucun ortaya çıkacağını önceden bilemeyiz. Bu yüzden, incelediğimiz deneyle ilgili belirli bir olayın gerçekleşme olasılığı için nesnel bir ölçü bulmak gerekir. Bu amaçla, belirli bir olayın gerçekleşme olasılığının ölçüsü olarak olasılık kavramını tanıtacağız.

Burada yalnızca tüm elemanter olayların ortaya çıkma şansının eşit olduğu, yani eş olasılıklı olduğu deneyler üzerinde duracağız. Örneğin,

- oyun zarı atıldığında her yüzün ortaya çıkma şansı eşittir;
- madeni para atıldığında yazı ve tura gelme şansı eşittir;
- toplar bulunan bir kutudan top çekildiğinde her topun çekilme şansı eşittir vb.

Daha önce tanımladığımız gibi, her rastgele olay A , elemanter olaylar kümesi Ω 'nın bir alt kümesidir. Buradan, A 'daki eleman sayısı her zaman Ω 'daki eleman sayısından küçük veya ona eşittir; yani $|A| \leq |\Omega|$.

Unutma!

Olasılığın klasik tanımı. $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ verilen sonlu bir elemanter olaylar kümesi olsun ve bunların her birinin ortaya çıkma şansı eşit olsun. A , verilen deneyle ilgili k elemanter olay içeren bir rastgele olay ise A olayının (teorik) olasılığı şu şekilde belirlenir:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{'daki eleman sayısı}}{\Omega\text{'daki eleman sayısı}},$$

- Her elemanter olayı, verilen deneyle ilgili "olası durum" olarak yorumlayabiliriz.
- Öte yandan k , A olayının içerdiği elemanter olayların sayısıdır; yani $k = |A|$ olur ve A 'daki her elemanter olayı, A olayının gerçekleşmesi için "elverişli durum" olarak yorumlayacağız.
- Klasik tanıma göre, verilen bir A rastgele olayının olasılığı, A olayının gerçekleşmesi için elverişli durumların sayısının, verilen deney için tüm olası durumların sayısına bölümüne eşittir; yani

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Örnek 1

Oyun zarı atıldığında çift sayı gelme olasılığını belirle.

Çözüm:

Deney oyun zarı atma ise elemanter olaylar kümesi $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ olur; burada E_i "zarın üst yüzünde i sayısı geldi" olayıdır, $i = 1, 2, \dots, 6$. Tüm elemanter olayların eş olasılıklı olduğuna, yani zar atıldığında her yüzün ortaya çıkma şansının eşit olduğuna dikkat edelim. A : çift sayı geldi olayı, $A = \{E_2, E_4, E_6\}$ şeklinde açıklanabilir. Demek ki A olayının gerçekleşmesi için elverişli durumların sayısı 3, deneyin gerçekleştirilmesindeki tüm olası durumların sayısı ise 6'dır. Buradan, olasılığın klasik tanımına göre A olayının olasılığı için $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$ elde edilir.

Soru 1

Oyun zarı atıldığında 4'ten büyük bir sayı gelme olasılığını belirle.

Örnek 2

Deney üç madeni para atmaktan oluşur. Elemanter olaylar kümesini ve aşağıdaki rastgele olayların olasılığını belirle:

A : tam olarak iki yazı geldi;

B : hiç yazı gelmedi

Çözüm:

Bir madeni paranın üst yüzünde tura gelirse kısaca "T", üst yüzünde yazı gelirse "Y" ile göstereceğiz. Bu deney için elemanter olaylar kümesi, üçlüdeki i 'inci elemanın i 'inci madeni paranın sonucu olduğu sıralı üçlülerden oluşur, $i = 1, 2, 3$. Böylece,

$$\Omega = \{(Y, Y, Y), (Y, Y, T), (Y, T, Y), (T, Y, Y), (Y, T, T), (T, Y, T), (T, T, Y), (T, T, T)\}.$$

O hâlde A olayı

$$A = \{(Y, Y, T), (Y, T, Y), (T, Y, Y)\} \text{ olur;}$$

bu nedenle olasılığın klasik tanımına göre,

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

B olayı için şunu elde ederiz

$$B = \{(T, T, T)\}.$$

Bu olayın olasılığı $P(B) = \frac{1}{8}$.

Örnek 3

Standart 52 kartlık bir desteden rastgele 5 kart çekilir. Çekilen kartların hepsinin pik kart olma olasılığını belirle.

Çözüm:

A: beş pik kart çekildi olayını gösterelim. Ω 'daki eleman sayısı, 52 elemandan 5. sıvıftüm olası kombinasyonların sayısıdır; yani

$$|\Omega| = C_{52}^5 = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2598960.$$

Benzer şekilde, 13 pik kart vardır; bu nedenle A olayındaki elemanlar sayısının sayısı şöyledir

$$|A| = C_{13}^5 = \frac{13!}{5!(13-5)!} = 1287. \text{ Şimdi:}$$

$$P(A) = \frac{1287}{2598960} = 0,0005.$$

Soru 2

Standart 52 kartlık bir desteden rastgele 3 kart çekilir. Çekilen kartların iki kız ve bir onlu olma olasılığını belirle.

Örnek 4

Bir kutuda 4'ü kusurlu olan 20 tenis topu vardır. Bu kutudan rastgele iki top seçilir. Bir kusurlu ve bir sağlam top çekilme olasılığını belirle.

Çözüm:

A: bir kusurlu ve bir sağlam top çekildi olayını gösterelim.

Ω 'daki eleman sayısı şöyledir:

$$|\Omega| = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = 190.$$

A olayı, bir kusurlu top (toplam 4'ten) ve bir sağlam top (toplam 16'dan) çekilirse gerçekleşir; bu nedenle A'daki eleman sayısı şöyledir $|A| = C_4^1 \cdot C_{16}^1 = 4 \cdot 16 = 64$. Şimdi,

$$P(A) = \frac{64}{190} = 0,337.$$

Soru 3

Bir kutuda 5 beyaz ve 4 siyah top vardır. Kutudan aynı anda üç top çekilir. Çekilen üç topun beyaz olma olasılığını belirle.

Örnek 5

Birçok genetik özellik iki gen tarafından kontrol edilir: biri baskın, diğeri çekiniktir. Gregor Mendel'in bezelyelerle yaptığı özgün deneylerde, bitkinin boyunu kontrol eden genler T (uzun) ve t (kısa) ile gösterilmiştir. T geni baskındır; bu nedenle genotipi (genetik yapısı) TT veya Tt olan bir bitki uzun, genotipi tt olan bir bitki ise kısadır. Deneylerindeki yavruların istatistiksel analiziyle Mendel, yavrunun her veliden bir gen kalıtsal olarak aldığını ve iki genin her olası kombinasyonunun eşit olasılıklı olduğunu sonucuna varmıştır. Her velinin genotipi Tt ise aşağıdaki tablo yavrunun olası genotiplerini verir:

		Veli 1	
		T	t
Veli 2	T	TT	Tt
	t	tT	tt

Çözüm:

A: genotipi Tt olan velilerden rastgele seçilen bir yavrunun uzun olması olayını gösterelim. A olayı, TT, Tt, tT genotiplerinden biri ortaya çıkarsa gerçekleşir; yani $A = \{TT, Tt, tT\}$. Demek ki A olayının gerçekleşmesi için 3 elverişli durum vardır. Buradan, A olayının olasılığı için $P(A) = \frac{3}{4}$ elde edilir.

Rastgele seçilen bir yavrunun kısa olma olasılığı, aslında A olayının karşıt olayının olasılığıdır; bu nedenle

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Önemli!

Olasılığın klasik tanımına göre hesaplanan olasılık teorik olasılıktır; deneysel olarak hesaplanan ampirik olasılık olan istatistiksel olasılıktan farklıdır. Ancak, gerçekleştirilen deney sayısı n büyük olduğunda göreceli frekansın teorik olasılığa yaklaştığı gösterilebilir.

Soru 4

Bir şans çarkı, 1'den 8'e kadar numaralandırılmış 8 eş parçaya bölünmüştür. Çark bir kez çevrilmiştir. Okun aşağıdakiler üzerinde durma olasılığını belirle:

- tek sayı;
- 4 ile bölünebilen sayı;
- 3'ten küçük sayı.

Soru 5

Bir kutuda aynı biçime sahip 12 top vardır. Bunlardan 3'ü kırmızı, kalanları ise yeşildir. Kutudan bir top çekilir. Çekilen topun aşağıdaki özellikte olma olasılığını belirle:

- a) kırmızı;
- b) kırmızı veya yeşil;
- c) yeşil;
- d) beyaz.

Alıştırma Soruları!

1. Bir kutuda 10 top vardır; bunların 6'sı beyaz, 3'ü kırmızı ve 1'i siyahtır. Rastgele aynı anda 3 top seçilir. Aşağıdaki olasılıkları belirle:
 - a) çekilen topların hepsi beyazdır;
 - b) 2 kırmızı ve 1 siyah top çekilmiştir.
2. Bir sınıfta 40 öğrenci vardır; bunların 10'u pekiyidir. Sınıf, 20'şer öğrenciden oluşan iki gruba ayrılır. Her iki grupta da 5'er pekiyi öğrenci bulunma olasılığını belirle.
3. Bir oyunda üç zar atılır ve üç zarda gelen sayıların toplamı 11 veya 12 olursa kazanç elde edilir. Aşağıdaki olayların olasılığını belirle:
 - A: gelen sayıların toplamı 11'dir;
 - B: gelen sayıların toplamı 12'dir;
 - C: kazanç elde edilmiştir.
4. Uzunlukları 2, 3, 4, 7 ve 9 cm olan beş doğru parçası verilmiştir. Rastgele seçilen üç doğru parçasından üçgen oluşturulabilme olasılığını belirle.
5. Bir kişi 40 W'lık 7 ampul, 60 W'lık 5 ampul ve 100 W'lık 3 ampul satın almıştır. Yolda üç ampul kırmıştır. Kırılan ampullerin toplam gücünün 180 W olma olasılığı kaçtır?
6. On kitap rastgele bir rafa dizilir. Aşağıdaki olayların olasılığını belirle:
 - A: A: belirli bir kitap her zaman sıranın başında olacaktır;
 - B: bir romanın üç cildi her zaman artan sırada yan yana olacaktır;
 - C: bir romanın üç cildi her zaman herhangi bir sırayla yan yana olacaktır.
7. Bir pakette 5'i sağlam, 3'ü kusurlu olan 8 sensör vardır. Paketten, bir robot kolun yapımında gerekli olan 3 sensör seçilir. 2 sağlam ve 1 kusurlu sensör seçilme olasılığını belirle.
8. Bir yatırımcı, 5 güvenli ve 3 riskli hisseden oluşan bir portföyden rastgele 3 hisse seçer. Riskli hisselerden daha fazla güvenli hisse seçme olasılığını belirle.

4.10 OLASILIĞIN ÖZELLİKLERİ. BAĞIMSIZ OLAYLAR

Hatırla!

Olasılığın klasik tanımını nasıl ifade edilir? Ne zaman uygulanabilir?

Bu bölümde olasılığın temel özelliklerini inceleyeceğiz.

- Her A olayı, elemanter olaylar kümesi Ω 'nın bir alt kümesidir; bu nedenle $0 \leq |A| \leq |\Omega|$ olur. Buradan, $\frac{0}{|\Omega|} \leq \frac{|A|}{|\Omega|} \leq \frac{|\Omega|}{|\Omega|}$, yani $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Kesin olayın olasılığı için $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$ elde edilir; imkânsız olayın olasılığı için ise $P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = 0$ olur.
- $A = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ ve $B = \{E_{k+1}, E_{k+2}, \dots, E_{k+m}\}$ iki ayrık olay olsun; yani $A \cap B = \emptyset$. O hâlde A ve B olaylarının toplamı $A + B = \{E_1, E_2, \dots, E_k, E_{k+1}, E_{k+2}, \dots, E_{k+m}\}$ olur ve bu toplam $k + m$ elemanter olay içerir. Buradan,

$$P(A + B) = \frac{k+m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = P(A) + P(B).$$

Unutma!

A olayının olasılığı için aşağıdaki temel özellikler geçerlidir:

1. Her A olayı için $0 \leq P(A) \leq 1$ geçerlidir;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(\emptyset) = 0$;
4. A ve B ayrık kümeler ise $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Örnek 1

Bir kutuda 4 beyaz, 6 kırmızı ve 5 siyah top vardır. Kutudan rastgele bir top çekilir. Beyaz veya siyah top çekilme olasılığını belirle.

Çözüm:

Aşağıdaki olayları gösteriyoruz:

A : beyaz top çekildi;

B : siyah top çekildi.

A ve B olaylarının ayrık olduğuna dikkat edelim. Yani A olayının gerçekleşmesi, B olayının gerçekleşmesini dışlar ve bunun tersi de geçerlidir. $A + B$ olayının olasılığını arıyoruz. 4. özellikten şunu elde ederiz

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Soru 4

52 kartlık bir desteden bir kart çekilir. Çekilen kartın pik veya kupa kartı olma olasılığını belirle.

4 özellik aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

Unutma!

5. $A_1, A_2, \dots, A_k$ ayrık olaylar olsun; yani $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$. O hâlde

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k).$$

- A olayı B olayını gerektiriyorsa, yani $A \subseteq B$, ise $|A| \leq |B|$, olur; bu nedenle $\frac{|A|}{|\Omega|} \leq \frac{|B|}{|\Omega|}$. Buradan $P(A) \leq P(B)$ elde edilir.

Unutma!

6. $A \subseteq B$, ise $P(A) \leq P(B)$.

- $A + \bar{A} = \Omega$ olduğundan, 2. ve 4. özelliklerden $P(A + \bar{A}) = P(\Omega)$, yani $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ elde edilir. Buradan $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ olur.

Unutma!

7. Verilen bir A , olayının karşıt olayının olasılığı için $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ geçerlidir.

Örnek 2

Bir kutuda 5 beyaz ve 4 siyah top vardır. Kutudan aynı anda 3 top çekilir. En az bir beyaz top çekilme olasılığını belirle.

Çözüm:

A: en az bir beyaz top çekildi olayını gösterelim. O hâlde karşıt olay $\bar{A}$, hiçbir beyaz top çekilmediğini, yani çekilen üç topun siyah olduğunu gösterir. Bu nedenle,

$$P(\bar{A}) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84} = \frac{1}{21}.$$

Şimdi A olayının olasılığı için şunu elde ederiz:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}.$$

- A ve B, bir deneyle ilgili iki olay ise $A \cup B$ 'deki eleman sayısı $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ eşitliğine sahiptir. Bu ifade $|\Omega|$ ile bölünürse aşağıdaki özelliğin doğruluğu ortaya çıkar.

Unutma!

8. Bir deneyle ilgili iki keyfî olayın toplamının olasılığı şu şekilde hesaplanır:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Örnek 3

Bir işletmede 100 çalışan vardır. Bunlardan 40'ı İngilizce, 30'u Almanca bilmektedir; 15'i ise her iki dili de bilmektedir. Rastgele bir kişi seçilir. Aşağıdaki rastgele olayların olasılığını belirle:

B: seçilen kişi en az bir dil biliyor;

C: seçilen kişi hiçbir dil bilmiyor.

Çözüm:

Aşağıdaki olayları gösterelim:

A: seçilen kişi İngilizce biliyor;

G: seçilen kişi Almanca biliyor.

Sorunun koşullarından şunu elde ederiz

$$P(A) = \frac{40}{100} = 0,4, \quad P(G) = \frac{30}{100} = 0,3, \quad P(A \cap G) = \frac{15}{100} = 0,15.$$

B olayının A ve G olaylarının birleşimi olarak yazılabileceğine dikkat edelim; yani $B = A \cup G$. Buradan,

$$P(B) = P(A \cup G) = P(A) + P(G) - P(A \cap G) = 0,4 + 0,3 - 0,15 = 0,55.$$

Öte yandan C olayı, B olayının karşıt olayıdır; yani $C = \bar{B}$. Buradan,

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,55 = 0,45.$$

Soru 5

Bir oyuncu, sağdaki şekilde verilen şans çarkını çevirir. Aşağıdaki olayların olasılığını belirle:

- A: Çark turuncu alanda duracaktır;
- B: Çark çift sayıda duracaktır;
- C: Çark turuncu alanda veya çift sayıda duracaktır.

**Olayların bağımsızlığı**

İki A ve B olayından birinin gerçekleşmesi diğer olayın gerçekleşmesini etkilemiyorsa ve bunun tersi de geçerliyse, bu iki olaya bağımsız olaylar denir. Örneğin, iki zar atılıyorsa, birinci oyun zarının sonucu ikinci zarın sonucunu etkilemez. Bu nedenle, olayları

- A: birinci zarda beş geldi ve
- B: ikinci zarda üç geldi

şeklinde tanımlarsak, A ve B olayları bağımsız olaylardır.

Ancak iki olayın bağımsız olup olmadığı her zaman yalnızca sorunun koşullarından belirlenemez. Bu durumda bağımsızlık koşulunun sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmelidir.

Unutma!

İki A ve B olayı ancak ve ancak $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ise **bağımsızdır**.

Örnek 4

52 kartlık bir desteden bir kart çekilir. Aşağıdaki olayları inceleyelim:

- A: üzerinde beş sayısı bulunan bir kart çekildi;
- B: çekilen kart sinek kartıdır.

A ve B olaylarının bağımsız olup olmadığını kontrol et.

Çözüm:

A olayının gerçekleşmesi için elverişli durum sayısı 4'tür (destede 4 tane beşli vardır); bu nedenle

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ olur. Öte yandan B olayının gerçekleşmesi için elverişli durum sayısı 13'tür (destede 13 sinek kartı vardır). Buradan $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ olur. $A \cap B$ olayı, sinek beşli kartı çekilirse gerçekleşir.

Bu olayın gerçekleşmesi için yalnızca bir elverişli durum vardır. Şunu elde ederiz:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = P(A)P(B).$$

Bağımsızlık koşulunun sağlandığı sonucuna varabiliriz; dolayısıyla A ve B olayları bağımsız olaylardır. Bu durum sezgisel olarak böyle görünmese de böyledir (sinek işaretli kartlar arasında bir beşli vardır ve dört beşli arasında da sinek beşli vardır).

Örnek 5

Bir kutuda 6 beyaz ve 4 siyah top vardır. Kutudan bir top çekilir, rengi kaydedilir ve top tekrar kutuya konur. Sonra bir top daha çekilir. Çekilen iki topun da beyaz olma olasılığını belirle.

Çözüm:

Aşağıdaki olayları gösterelim:

A: ilk çekilen top beyazdır;

B: ikinci çekilen top beyazdır.

A ve B olaylarının bağımsız olduğuna dikkat edelim. Yani ilk çekilen top kutuya geri konur; bu nedenle birinci çekilişin sonucu ikinci çekilişin sonucunu etkilemez. $A \cap B$ olayının olasılığını arıyoruz. Bağımsızlığı kullanırsak şunu elde ederiz:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{25}.$$

Soru 6

Bir öğrenciye testte EVET veya HAYIR şeklinde cevaplaması gereken iki soru verilir. Öğrenci teste hazırlanmamıştır; bu nedenle soruların cevaplarını tahmin eder. Bir soruya verilen cevap, diğer soruya verilen cevabı etkilemez ve bunun tersi de geçerlidir. Aşağıdaki olayların olasılığını belirle:

A: öğrenci iki soruya da doğru cevap vermiştir;

B: öğrenci yalnızca bir soruya doğru cevap vermiştir;

C: öğrenci iki soruya da yanlış cevap vermiştir.

İki ayrık olay bağımsız olabilir mi ve bunun tersi geçerli midir?

- A ve B ayrık olaylar olsun. O hâlde $A \cap B = \emptyset$ olur; dolayısıyla $P(A \cap B) = 0$ 'dır. Buradan,

$$P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$$

eşitliği yalnızca $P(A) = 0$ veya $P(B) = 0$ ise geçerli olur. Demek ki A ve B ayrık olaylar ve $P(A) > 0$ ve $P(B) > 0$ ise A ve B bağımsız olamaz.

- Bunun tersi de geçerlidir. A ve B bağımsız olaylar ve $P(A) > 0$ ve $P(B) > 0$ olsun. O hâlde $P(A) \cdot P(B) > 0$ olur. Bağımsızlıktan $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$ sonucu çıkar; bu nedenle A ve B ayrık olaylar değildir.

Unutma!

- İki olayın bağımsızlığı ve ayrıklığı farklı kavramlardır!
- İki ayrık A ve B olayı, ancak ve ancak $P(A) = 0$ veya $P(B) = 0$ ise bağımsızdır.

Örnek 6

Petar aynı anda bir madeni para ve bir oyun zarı atar.

- Elemanter olaylar kümesini belirle.
- Aşağıdaki olayların olasılığını belirle:
 A : madeni parada yazı ve zarda çift sayı geldi;
 B : madeni parada tura ve zarda 4'ten büyük sayı geldi.
- A ve B olayları ayrık mıdır?
- A ve B olayları bağımsız mıdır?

Çözüm:

- Madeni paranın atılması sonucunda ortaya çıkan sonuçları "Y" (yazı) ve "T" (tura) ile, zarın atılması sonucunda ortaya çıkan sonuçları ise 1, 2, 3, 4, 5, 6 ile gösterirsek, elemanter olaylar kümesi şöyledir:

$$\Omega = \{(Y, 1), (Y, 2), (Y, 3), (Y, 4), (Y, 5), (Y, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}.$$

Demek ki Ω 'daki eleman sayısı $|\Omega| = 12$ 'dir.

- A olayı $A = \{(Y, 2), (Y, 4), (Y, 6)\}$ şeklinde açıklanabilir; bu nedenle,

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Öte yandan, } B = \{(T, 5), (T, 6)\} \text{ ve } P(B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

- $A \cap B = \emptyset$ olduğu görülebilir; bu nedenle A ve B ayrık olaylardır.
- Daha önce $P(A) > 0$ ve $P(B) > 0$ olduğunu ve bu olayların ayrık olduğunu elde ettik. Önceki tartışmaya göre, bu olaylar bağımsız olamaz.

Soru 7

52 kartlık bir desteden rastgele bir kart çekilir. Şunlar olsun:

- A : çekilen kart kupa kartıdır;
 B : çekilen kart pik kartıdır;
 C : çekilen kart kızdır.

- $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ değerlerini belirle.
- A ve B olayları bağımsız olaylar mıdır? Bu olaylar ayrık olaylar mıdır?
- A ve C olayları bağımsız olaylar mıdır? Bu olaylar ayrık olaylar mıdır?
- $D = A \cap B$ olsun. C ve D olayları bağımsız olaylar mıdır?

Alıştırma Soruları!

1. $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$, ve $P(A \cap B) = 0,3$ olsun. Aşağıdaki olayların olasılıklarını belirle: $\bar{A}, \bar{B}, A \cup B, \bar{A} \cap \bar{B}, \bar{A} \cup \bar{B}$.
2. $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,7$, ve $P(A \cup B) = 0,5$ ise $A \cap B$ olayının olasılığını belirle.
3. Bir kutuda 4 beyaz, 6 siyah ve 5 mavi top vardır. Kutudan rastgele bir top çekilir. Aşağıdaki rastgele olaylar verilmiştir:
 A : çekilen top beyazdır;
 B : çekilen top siyahtır.
 A ve B olaylarının toplamının olasılığını belirle.
4. İki oyun zarı atılır. Aşağıdaki rastgele olaylar verilmiştir:
 A : iki zardaki sayıların toplamı 9'dan büyüktür;
 B : birinci zarda 5 sayısı gelmiştir.
Aşağıdakilerin olasılığını belirle:
a) A ve B olaylarının;
b) $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ olaylarının;
c) $A \cap B$ ve $A \cup B$ olaylarının.
5. A ve B adlı iki çark (aşağıdaki şekilde verilmiştir) aynı anda çevrilir.



A



B

- a) " A çarkı turuncu alanda duracaktır" ve " B çarkı sarı alanda duracaktır" olayları bağımsız olaylar mıdır?
 - b) A çarkının kırmızıda ve B çarkının sarıda durma olasılığını belirle.
6. Bir zar iki kez atılır. Birinci atışta bir gelmesi veya ikinci atışta tek sayı gelmesi olasılığını belirle.
 7. Deney, iki cismin atılmasından oluşur: düzgün tetrahedron ve düzgün dodekahedron. Tetrahedronun 1, 2, 3, 4 sayılarıyla numaralandırılmış dört yüzü vardır (bu yüzler eşkenar üçgenlerdir); dodekahedronun ise 1'den 12'ye kadar sayılarla numaralandırılmış 12 yüzü vardır (bu yüzler düzgün beşgenlerdir). Tetrahedronda 3 ile bölünebilen bir sayı, dodekahedronda ise 4 ile bölünebilen bir sayı gelme olasılığını bulun.

TEKRAR VE PEKİŞTİRME SORULARI

1. Rakamlar tekrar edebiliyorsa 1, 3, 5, 7, 9 rakamlarından kaç tane dört basamaklı sayı oluşturulabilir?
2. 0, 2, 4, 6, 8 rakamlarından, sayılardaki tüm rakamlar farklı olmak şartıyla kaç tane üç basamaklı sayı oluşturulabilir?
3. Bir şirketteki 12 çalışan, grup fotoğrafı çekilmek için bir sıraya kaç farklı şekilde dizilebilir?
4. Bir flütçü, konserde 7 beste seslendirecektir. Besteleri konserde kaç farklı şekilde sıralayabilir?
5. Stefan ilk sandalyede oturmakta ısrar ederse, 6 öğrenci birinci sıradaki 6 yere kaç farklı şekilde oturabilir?
6. PARALOPİPED sözcüğündeki harflerden kaç farklı diziliş yapılabilir?
7. Bir öğrenci 3 vanilyalı, 5 çikolatalı, 4 çilekli ve 8 ahududulu dondurma almıştır. Doğum günü için ikram etmek üzere bu dondurmaları 20 arkadaşına kaç farklı şekilde dağıtabilir?
8. Geziye çıkan yedi arkadaş, boş olarak 2 tek kişilik, 1 iki kişilik ve 1 üç kişilik odası bulunan bir otele yerleşecektir. Arkadaşlar boş odalara kaç farklı şekilde yerleşebilir?
9. 12 malzeme mevcutsa, pizza için 3 farklı malzeme kaç farklı şekilde seçilebilir?
10. Bir öğrenci tarih testindeki 9 sorudan 7'sini seçip cevaplamalıdır. Soruları kaç farklı şekilde seçebilir?
11. Bir kümenin 7 elemanı vardır. Bu kümenin 5 elemanlı kaç alt kümesi vardır?
12. Okul futbol takımının antrenörü hazırlık çalışmalarına birinci sınıftan 4, ikinci sınıftan 6, üçüncü sınıftan 8 ve dördüncü sınıftan 10 öğrenci çağırmıştır. Hazırlıklardan sonra futbol kupasına katılacak 11 öğrenciden oluşan bir takım kurmalıdır. Takımda birinci sınıftan 2, ikinci sınıftan 2, üçüncü sınıftan 3 ve dördüncü sınıftan 4 öğrenci bulunması gerekiyorsa, takımı kaç farklı şekilde kurabilir?
13. Deney, 52 kartlık bir desteden kart çekme olsun. Her biri 50 çekilişten oluşan 10 seri gerçekleştiriniz. Her çekilişten sonra kartın sayısını kaydediniz ve kartı yeniden desteye koyunuz. Aşağıdaki olayların gerçekleşmesi için istatistiksel olasılığı belirle:
A: üzerinde 10 sayısı bulunan pik kart çekildi;
B: tek sayılı bir kart çekildi (kız kartı da tek sayı olarak kabul edilir).
14. Deney, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sayılarının her birinden 4 kart bulunan 28 kartlık bir desteden kart çekme olsun. Her biri 100 deneyden oluşan 4 seri yapınız ve aşağıdaki olayların göreceli frekanslarını belirle:
A: sayısı 5'ten küçük olmayan bir kart çekildi;
B: sayısı 3'ten büyük veya 3'e eşit olan bir kart çekildi;
C: çift sayılı bir kart çekildi.
15. Bir madeni para ve yüzleri a , b , c ve d ile gösterilen bir tetrahedron aynı anda atılır. Bu deney için elemanter olaylar kümesini açıkla.
16. Bir kutuda 1, 2, 3 ve 4 sayılarıyla numaralandırılmış 4 top vardır. Toplar kutuya geri konmadan, rastgele birer birer çekilir. Çekiliş, 1 numaralı top çekilinceye kadar yapılır. Bu deney için elemanter olaylar kümesini açıkla.
17. Bir atıcı hedefe üç kez ateş eder; her atışta hedefi vurduğu ya da ıskaladığı kaydedilir. Elemanter olaylar kümesini ve aşağıdaki rastgele olayları açıkla:
A: birinci atışta hedef vurulmuştur;
B: hedef iki kez ıskalanmıştır;

- C: üç atışın tamamında aynı sonuç elde edilmiştir;
D: ilk iki atışta hedef iskanmıştır.
18. Bir kutuda 3'ü bozuk olan 10 pil vardır. Kutudan aynı anda 5 pil seçilir. Bunların arasında 3 sağlam pil bulunma olasılığını belirle.
19. Bir oyun zarı bir kez atılır. Aşağıdaki olayların olasılığını belirle:
A: 3'ten büyük bir sayı geldi;
B: tek sayı geldi;
C: 3 sayısı veya 4 sayısı geldi.
20. Bir yarışa 8 at katılmaktadır ve atların bitişteki tüm olası sıralanışları eş olasılıklıdır. Yarış başlamadan önce Miloş, yarış bittikten sonra atların sıralamasını tahmin ettiği bir kupon doldurur. Sıralamayı doğru tahmin etme olasılığı nedir?
21. Bir kutuda toplam 8 siyah ve beyaz top vardır. Kutudan iki top çekilir. Kutudan 2 beyaz top çekilme olasılığı $15/28$ 'dir. Kutudaki beyaz top sayısını belirle.
22. Rastgele seçilen bir yılda ağustos ayında tam olarak 4 pazartesi olma olasılığını belirle.
23. n elemandan tekrarsız permütasyonlar inceleniyor. Rastgele seçilen bir permütasyonda sabit iki a ve b elemanın yan yana olma olasılığı kaçtır?
24. Bir deste 52 karttan oluşur. Kartlar rastgele sırayla bir dizi halinde dizilir. Aşağıdaki olayların olasılığını belirle:
A: dört asın tamamı yan yana olacaktır;
B: aslar ilk dört konuma veya son dört konuma yerleştirilmiş olacaktır.
25. Bir küpün bütün yüzleri kırmızı renge boyanmıştır. Küp, 100 eş küçük küpe bölünmüş ve bu küçük küpler iyice karıştırılmıştır. Bunlardan rastgele bir küçük küp seçilir. Aşağıdaki olayların olasılığını belirle:
A: küçük küpün tam olarak iki yüzü kırmızıya boyanmış olacaktır;
B: küçük küpün en az iki yüzü kırmızıya boyanmış olacaktır.
26. Bir oyuncu, art arda iki çekilişte loto 7/37 için birer kombinasyon yatırır. Aşağıdaki olasılıkları belirle:
a) birinci çekilişte yedili tutturması;
b) art arda iki çekilişte en az bir yedili tutturması.
27. **Düşünme problemi.** 17. yüzyılın sonunda İngiliz matematikçiler, insanların farklı yaşlarda kaçının öldüğünü gösteren ölüm tabloları hazırlayıp analiz etmişlerdir. Bu tablolardan, bir kişinin gelecekte belirli bir tarihte hayatta olma olasılığını tahmin edebilmişlerdir. Bu durum, 1699 yılında ilk hayat sigortası şirketinin kurulmasına yol açmıştır.
Hayat sigortası şirketleri, kendilerinde sigorta yaptıran kişilerden almaları gereken primleri hesaplamak için beklenen yaşam süresi istatistiklerini ve ölüm oranlarını kullanır.
- Gösterilen yaşam tablosu (life table) Avustralya'ya aittir. Bu tablo, doğan 100 000 kişiden kaçının farklı yaşlara kadar hayatta kaldığını ve her yaş için kalan beklenen yaşam yılını göstermektedir.

Erkekler			Kadınlar		
Yaş	Hayatta kalanların sayısı	Beklenen yaşam süresi	Yaş	Hayatta kalanların sayısı	Beklenen yaşam süresi
0	100000	73,03	0	100000	79,46
5	98809	68,90	5	99307	75,15
10	98698	63,97	10	99125	70,22
15	98555	59,06	15	98965	65,27
20	98052	54,35	20	98758	60,40
25	97325	49,74	25	98516	55,54
30	96688	45,05	30	98278	50,67
35	96080	40,32	35	98002	45,80
40	95366	35,60	40	97615	40,97
45	94323	30,95	45	96997	36,22
50	92709	26,45	50	95945	31,59
55	89891	22,20	55	94285	27,10
60	85198	18,27	60	91774	22,76
65	78123	14,69	65	87923	18,64
70	67798	11,52	70	81924	14,81
75	53942	8,82	75	72656	11,36
80	37532	6,56	80	58966	8,38
85	20998	4,79	85	40842	5,97
90	8416	3,49	90	21404	4,12
95	2098	2,68	95	7004	3,00
99	482	2,23	99	1953	2,36

Örneğin, 100 000 doğandan 98 052 erkeğin 20 yaşına kadar hayatta kalmasının beklendiğini ve bu yaştan itibaren hayatta kalanların 54,35 yıl daha yaşamasının beklendiğini görebiliriz.

- Avustralya'da yeni doğmuş bir erkek ve yeni doğmuş bir kız çocuğu kaç yıl yaşayabilir?
- Yeni doğmuş bir erkek çocuğun 60 yaşına ulaşma olasılığı kaçtır? Kız çocuk için bu olasılık kaçtır?
- Tabloya göre, ortalama olarak hangi cinsiyet daha uzun yaşar? Açıkla.
- Bir sigorta şirketi, 30 yıl geçerli olan hayat sigortası sunmaktadır. Böyle bir sigorta, 50 yaşındaki bir kişiye göre 30 yaşındaki bir kişi için neden daha ucuzdur?

GEOMETRİ

Bu konuda trigonometrik fonksiyonlar ve bunlar arasındaki ilişkiler, doğru ile düzlem arasındaki ilişki, iki düzlem veya iki doğru arasındaki ilişki ile üç boyutlu (3B) şekillerin bir düzlemle kesitleri ele alınmaktadır. Bu konular, uzaydaki cisimlerin konumunun, yönünün ve eğiminin doğru bir şekilde tanımlanmasını ve incelenmesini sağlar. Trigonometri, uzaklıkların ve açıların ölçülmesi ile hesaplanması için temel bir araçtır; doğru, düzlem ve kesit ilişkilerinin incelenmesi ise karmaşık uzaysal durumların geometrik olarak modellenmesini sağlar. Bu konudaki bilgiler; mimarlık, mühendislik, inşaat, teknik çizim, fizik ve bilişim gibi alanlarda yapıların incelenmesi, görünen kesit biçimlerinin belirlenmesi, kara rıhık ve uzaysal yönelimin değerlendirilmesi için yaygın olarak kullanılmaktadır.

5 ve 6. konularda, örneklerin ve soruların bir kısmını GeoGebra bilgisayar yazılımında görselleştirmeniz ve kontrol etmeniz gerekecektir. GeoGebra; geometri, cebir, fonksiyonlar, istatistik ve analiz konularının görselleştirilmesi ve öğrenilmesi için geliştirilmiş etkileşimli bir matematik yazılımıdır. Bu yazılımı aşağıdaki bağlantıdan çevrim içi olarak kullanabilirsiniz: <https://www.geogebra.org/classic> veya aşağıdaki bağlantı üzerinden bilgisayarınıza indirip kurabilirsiniz: <https://www.geogebra.org/download>.

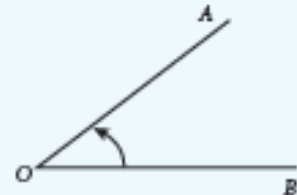
5.1 AÇILAR VE AÇILARIN ÖLÇÜLMESİ

Hatırla!

- Hangi açı türleri vardır?
- Açılar hangi ölçü birimiyle ölçülür?
- Açılar; mimarlık, fizik, haritacılık, jeodezi, navigasyon, tasarım, spor ve daha birçok alanda günlük yaşamda karşınıza çıkar.

Unutma!

- Ortak başlangıç noktasına sahip iki ışının oluşturduğu iki boyutlu (2B) geometrik şekle bu ışınların sınırladığı düzlem bölgesine *açı* denir.
- Işınların ortak başlangıç noktasına açının *köşesi*, açırı oluşturan ışınlara ise açının *kolları* (*kenarları*) denir.
- Çizim 1'de köşesi O, kolları OA ve OB olan AOB açısı gösterilmiştir.



Çizim 1

Hatırla!

- Dar açı, 0° den büyük ve 90° den küçük olan açıdır (çizim 2).
- Geniş açı, 90° den büyük ve 180° den küçük olan açıdır (çizim 3).
- Ölçüsü tam olarak 90° olan açıya dik açı (çizim 4), ölçüsü 180° olan açıya ise doğru açı denir (çizim 5).
- İç bükey açı (refleks açı), 180° den büyük ve 360° den küçük olan açıdır (çizim 6).
- Tam açı, 360° olan açıdır (çizim 7).



Çizim 2



Çizim 3



Çizim 4



Çizim 5



Çizim 6



Çizim 7

- Derece, bir tam çemberin 360 eşit parçaya bölünmesiyle elde edilen açı ölçü birimidir. Bu parçalardan her birine derece denir ve 1° ile gösterilir. Dereceden daha küçük ölçü birimleri dakika ve saniyedir. Dakika $1'$, saniye ise $1''$ ile gösterilir. Buna göre, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Örnek 1

Verilen açıları dakikaya dönüştür. a) 23° b) $31^\circ 15'$.

Çözüm:

$$\text{a) } 23^\circ = (23 \cdot 60)' = 1380'; \quad \text{b) } 31^\circ 15' = (31 \cdot 60 + 15)' = 1875'.$$

Örnek 2

Verilen açıları dereceye dönüştür. a) $493'$; b) $78^\circ 15'$.

Çözüm:

$$\text{a) } \frac{493}{60} = 8,2167^\circ; \quad \text{b) } 78^\circ 15' = 78 + \frac{15}{60} = 78 + 0,25 = 78,25^\circ.$$

Unutma!

Bir çemberde yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsüne 1 *radyan* denir.

$\varphi = \frac{l}{r}$ (l yarıçapı r olan bir çemberde merkez açığa karşılık gelen yayın uzunluğu.)

Radyan cinsinden ifade edilen açılar genellikle φ (fi diye okunur) veya θ (teta diye okunur) ile gösterilir. Bu ders kitabında φ gösterimi kullanılacaktır.

Yayın uzunluğu yarıçapa eşit olduğunda, 1 radyan (1 rae)

$$\varphi = \frac{l}{r} = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad elde edilir.}$$

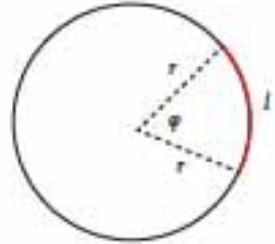
Bir açıyı dereceden radyana ve radyandan dereceye dönüştürmek için bir tam çemberin 360° veya 2π rad olduğu bilgisi kullanılır. Eğer α derece cinsinden, φ ise aynı açının radyan cinsinden ölçüsü ise, α 'nın 360° 'ye oranı, φ açısının 2π oranına eşittir; yani, $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\varphi}{2\pi}$. Buradan aşağıdaki formüller elde edilir:

$$\alpha = 360^\circ \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi, \quad \varphi = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha.$$

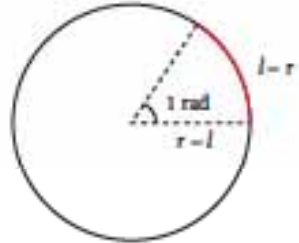
Açının radyan cinsinden yazılışında genellikle π sayısı bulunur.

Unutma!

- Dereceyi radyana dönüştürme formülü: $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$.
- Radyanı dereceye dönüştürme formülü: $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi$.
- Radyanı göstermek için kullanılan rad simgesi genellikle yazılmaz, ancak var olduğu kabul edilir. Buna göre, eğer $\varphi = \frac{\pi}{6}$ yazılmışsa, bunun $\varphi = \frac{\pi}{6}$ anlamına geldiği kabul edilir.



Çizim 8



Çizim 9

Örnek 3

Dik açıyı, doğru açıyı ve tam açıyı dereceden radyana dönüştür.

Çözüm:

Dereceden radyana dönüştürme formülü kullanılarak elde edilir:

- dik açı için: $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{2}$;
- doğru açı için: $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 180^\circ = \pi$;
- tam açı için: $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 360^\circ = 2\pi$.

Unutma!

- $\alpha = 90^\circ$ olan dik açının radyan cinsinden karşılığı $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad dir.
- $\alpha = 180^\circ$ olan doğru açının radyan cinsinden karşılığı $\varphi = \pi$ rad dir.
- $\alpha = 360^\circ$ olan tam açının radyan cinsinden karşılığı $\varphi = 2\pi$ rad dir.

Radyan ölçüsünün büyüklüğü hakkında daha iyi bir fikir edinmek için aşağıdaki bilgiyi bilmek gerekir.

$$1 \text{ rad} = 57,296^\circ \text{ ve } 1^\circ = 0,01745 \text{ rad.}$$

Örnek 4

135° lik açıyı radyana dönüştür.

Çözüm:

$\alpha = 135^\circ$ için formül uygulanırsa $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$ rad elde edilir.

Soru 1

150° lik açıyı radyana dönüştür.

Örnek 5

$\frac{\pi}{12}$ rad açısını dereceye dönüştür.

Çözüm:

$\varphi = \frac{\pi}{12}$, için formül uygulanırsa $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\pi}{12} = 15^\circ$ elde edilir.

Soru 2

$\frac{4\pi}{3}$ rad açısını dereceye dönüştür.

Örnek 6

3,2 rad olan açıyı dereceye dönüştür.

Çözüm:

$\varphi = 3,2$ için formül uygulanırsa $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi = \frac{180^\circ}{3,14} \cdot 3,2 = 183,44^\circ$ elde edilir.

Soru 3

29° 'lik açıyı radyana dönüştür.

Unutma!

- Açılar derece veya radyan cinsinden ölçülür.
- 360° , 2π radyana karşılık gelir.
- Derece, günlük yaşamda daha kullanışlıdır; radyan ise daha çok trigonometri ve matematiksel analizlerde kullanılır.

Alıştırma Soruları!

1. Açıları dakikaya dönüştür.

- a) $78^\circ 32' 50''$; b) $13^\circ 40'$. c) $12^\circ 13' 25''$.

2. Açıları dereceden radyana dönüştür.

- a) $\alpha = 225^\circ$; b) $\alpha = 315^\circ$; c) $\alpha = 210^\circ$; d) $\alpha = 75^\circ$.

3. Radyan cinsinden verilen açıları derece cinsinden ifade et.

- a) $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ rad; b) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ rad; c) $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ rad; d) $\varphi = 3,5$ rad.

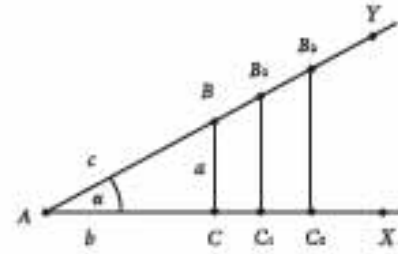
5.2 DAR AÇININ TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARININ TANIMLANMASI

Hatırla!

- Benzer üçgenleri tanımla!
- Oran ve orantıyı tanımla!

$\alpha = \angle XAY$ olan bir dar açı verilmiş olsun (çizim 1). AY kolu üzerinde rastgele $B, B_1, B_2, \dots$ noktaları seçilsin. Daha sonra $B, B_1, B_2, \dots$ noktalarından AX koluna dikmeler çizilsin. Böylece $ACB, AC_1B_1, AC_2B_2, \dots$ dik üçgenleri elde edilir. Bu üçgenlerin hepsinde ortak açı α 'dır ve her birinin bir dik açısı vardır. Bu da bütün üçgenlerin üç açısının da eşit olduğu anlamına gelir. Buradan bütün üçgenlerin birbirine benzer olduğu sonucu çıkar. Bu üçgenlerin benzerliğinden, karşılık gelen kenarlarının orantılı olduğu sonucu elde edilir; yani

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \dots \quad \text{ve} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \dots$$



Çizim 1

Buradan şu sonuç elde edilir: α , dar açısına sahip bütün dik üçgenlerde, bu açığa ait karşı dik kenarın üçgenin hipotenüsüne oranı aynı değere sahiptir: $a : c$, burada $a = BC$, $c = AB$ 'dir. Aynı şekilde şu sonuca da ulaşılır: α dar açısına sahip bütün dik üçgenlerde, bu açığa ait komşu dik kenarın üçgenin hipotenüsüne oranı aynı değere sahiptir: $b : c$, burada $b = AC$, $c = AB$ 'dir.

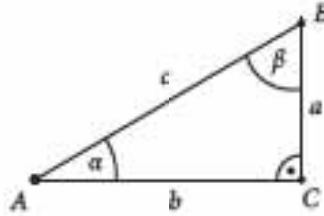
Unutma!

- Bir dik üçgende dar bir açının *sinüsü*, o açığa ait karşı dik kenarın hipotenüse oranıdır.
- Bir dik üçgende dar bir açının *kosinüsü*, o açığa ait komşu dik kenarın hipotenüse oranıdır.

$$\sin \alpha = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{hipotenüs}}.$$

Eğer standart olarak çizim 2'de gösterildiği gibi adlandırılmış bir üçgen verilmişse, Tanım 1'e göre aşağıdakiler elde edilir:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c}.$$



Çizim 2

Sinüs ve kosinüsün tanımlanmasına benzer şekilde, bir açının tanjant ve kotanjant fonksiyonları da tanımlanır. Burada, α dar açısına sahip bütün dik üçgenlerde, bu açığa ait karşı dik kenarın komşu dik kenara oranının aynı değere sahip olduğu gerçeği kullanılır. Benzer şekilde, herhangi bir dik üçgende α , açısına ait komşu dik kenarın karşı dik kenara oranı da aynı değere sahiptir.

Unutma!

- Bir dik üçgende dar bir açının **tanjantı**, o açığa ait karşı dik kenarın komşu dik kenara oranıdır ve $\text{tg} \alpha$ ile gösterilir.
- Bir dik üçgende dar bir açının **kotanjantı**, o açığa ait komşu dik kenarın karşı dik kenara oranıdır ve $\text{ctg} \alpha$ ile gösterilir.

$$\text{tg} \alpha = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}}; \quad \text{ctg} \alpha = \frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}}.$$

Unutma!

- **Temel trigonometrik fonksiyonlar** $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\text{tg} \alpha$ ve $\text{ctg} \alpha$ 'dır.
- Herhangi bir α dar açısı için temel trigonometrik fonksiyonların değerleri, bir dik üçgendeki kenar uzunluklarının oranı olarak elde edilir. Bu kenar uzunlukları pozitif sayılar olduğundan, trigonometrik fonksiyonların değerleri de pozitiftir.
- Trigonometrik fonksiyonları inceleyen matematik dalına **trigonometri** denir.
- Trigonometri adı, Yunanca trigonum (üçgen) ve metria (ölçüm) sözcüklerinden gelmektedir.

Örnek 1

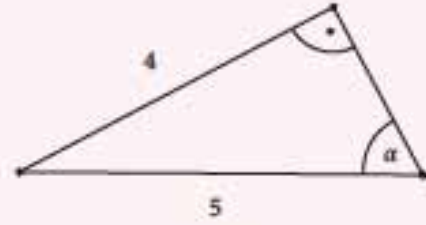
Tanıma göre çizim 3'te verilen üçgen için α açısının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini belirle.

Çözüm:

Çizimden, dik üçgenin dik kenarlarından birinin uzunluğunun $a = 4$, hipotenüsünün uzunluğunun ise $c = 5$ olduğu görülür. Üçgenin bilinmeyen dik kenarının uzunluğunu b ile gösterelim. Pisagor teoremi uygulanırsa $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ olur ve buradan $b = \sqrt{9} = 3$, elde edilir.

Trigonometrik fonksiyonların tanımları kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

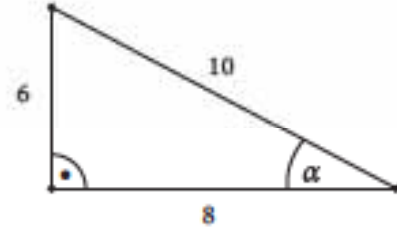
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}.$$



Çizim 3

Soru 1

Çizim 4'te verilen üçgen için α açısının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini belirle.



Çizim 4

Örnek 2

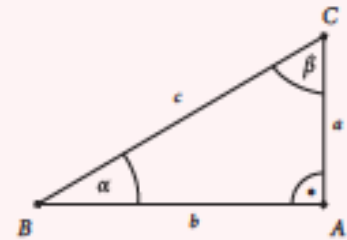
Dik kenarlarının uzunlukları arasındaki oran 8 : 15 olan çizim 5'teki dik üçgenin iki dar açısının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini belirle.

Çözüm:

Soruda dik kenarların uzunlukları arasındaki oran için $a : b = 8 : 15$ verilmiştir. Buradan $a = 8k$, $b = 15k$ elde edilir. Daha sonra a ve b için elde edilen değerler $c^2 = a^2 + b^2$ eşitliğinde yerine yazılırsa $c^2 = a^2 + b^2 = (8k)^2 + (15k)^2 = 64k^2 + 225k^2 = 289k^2$, eşitliğinde yerine yazılırsa $c = \sqrt{289k^2} = 17k$ elde edilir.

Trigonometrik fonksiyonların tanımına göre aşağıdakiler elde edilir:

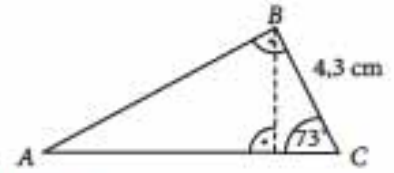
$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}, & \cos \alpha &= \frac{b}{c} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}, & \sin \beta &= \frac{b}{c} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}, & \cos \beta &= \frac{a}{c} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{8k}{15k} = \frac{8}{15}, & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{b}{a} = \frac{15k}{8k} = \frac{15}{8}, & \operatorname{tg} \beta &= \frac{b}{a} = \frac{15k}{8k} = \frac{15}{8}, & \operatorname{ctg} \beta &= \frac{a}{b} = \frac{8k}{15k} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$



Çizim 5

Soru 2

Verilen üçgenin alanını ve çevresini bul.

**Hesap Makinesinde Açılarla Çalışma**

Hesap makineleri farklı açı modlarında çalışır:

- DEG – derece
- RAD – radyan

Girilen aynı sayı, seçilen moda bağlı olarak farklı şekilde yorumlanır.

1. 1. DEG (derece) modunda çalışma

- 1) Hesap makinesini DEG moduna ayarla.
- 2) Girdiğin her açının derece cinsinden olduğu kabul edilir.
- 3) Sonuçlar derece cinsinden açılar olarak hesaplanır.

Mod: DEG

Giriş: 60
 $\sin(60) = 0.866$
 (açı derece cinsindedir)

2. RAD (radyan) modunda çalışma

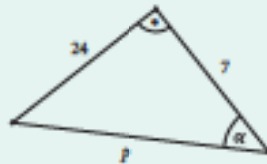
- 1) Hesap makinesini RAD moduna ayarla.
- 2) Girdiğin her açının radyan cinsinden olduğu kabul edilir.
- 3) Sonuçlar radyan cinsinden açılar olarak hesaplanır.

Mod: RAD

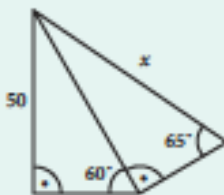
Giriş: $\pi/3$
 $\sin(\pi/3) = 0.866$
 (açı radyan cinsindedir)

Alıştırma Soruları!

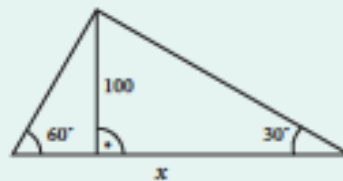
1. a ve b üçgenin dik kenarları, c ise hipotenüsü olmak üzere, dik üçgenin α ve β açılarının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini belirle:
 - a) $a = 3, b = 4;$
 - b) $b = 6, c = 10;$
 - c) $a = 12, c = 37;$
 - d) $b = 15, c = 17.$
2. Bilinenlere göre, dik üçgenin bir dar açısının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini belirle:
 - a) $a : c = 5 : 13;$
 - b) $b : c = 8 : 17;$
 - c) $a : c = 7 : 25;$
 - d) $a : b = 7 : 24.$
3. Çizimde verilen dik üçgenin α açısının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini belirle.

4. x 'in değerini belirle:

a)



b)

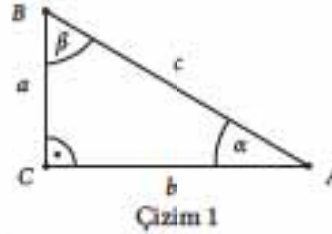


5.3 TÜMLER AÇILARIN TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI

Hatırla!

- Tümler (komplementer) açılar nedir?
- Derece ve radyan cinsinden ifade edilmiş iki komplementer açı çifti örneği ver.
- Bir üçgende dar açılar toplamı kaçtır?

Çizim 1'de verilen ABC üçgenini inceleyelim.



Üçgenden aşağıdaki sonuç çıkarılabilir:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} = \cos \beta, & \cos \alpha &= \frac{b}{c} = \sin \beta, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta, & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Bu eşitliklerde $\beta = 90^\circ - \alpha$ yazılırsa, eşitlikler aşağıdaki biçimi alır:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha, & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Eğer α açısı radyan cinsinden verilmişse, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ olur. Bu durumda tümler açılar arasındaki bağıntılar aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned}$$

Unutma!

Herhangi bir dar açının trigonometrik fonksiyonu, onun tümler açısının karşılık gelen kofonksiyonuna eşittir.

Kofonksiyonlar, bir dar açı için değerleri, onun tümler açısındaki başka bir trigonometrik fonksiyonun değerlerine eşit olan trigonometrik fonksiyon çiftleridir. Buna göre sinüs ve kosinüs ile tanjant ve kotanjant birer kofonksiyon çiftidir.

Örnek 1

Aşağıdaki koşullara göre α dar açısını belirle.

a) $\sin(\alpha - 12^\circ) = \sin 28^\circ$; b) $\sin \alpha = \cos 38^\circ$; c) $\operatorname{ctg}(\alpha + 28^\circ) = \operatorname{tg} 21^\circ 40'$.

Çözüm:

- a) $\sin(\alpha - 12^\circ) = \sin 28^\circ$ olduğundan $\alpha - 12^\circ = 28^\circ$ olur ve buradan $\alpha = 40^\circ$ elde edilir.
 b) $\sin \alpha = \cos 38^\circ$ eşitliğinden hareketle, $\cos 38^\circ = \sin(90^\circ - 38^\circ) = \sin 52^\circ$ olduğu için $\sin \alpha = \sin 52^\circ$ elde edilir. Buradan $\alpha = 52^\circ$.
 c) $\operatorname{tg} 21^\circ 40' = \operatorname{ctg}(90^\circ - 21^\circ 40') = \operatorname{ctg} 68^\circ 20'$ yazılır. Buradan $\alpha + 28^\circ = 68^\circ 20'$ yani $\alpha = 40^\circ 20'$ elde edilir.

Soru 1

Aşağıdaki koşullara göre α dar açısını belirle.

a) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 49^\circ$; b) $\cos(\alpha - 25^\circ) = \sin 64^\circ 10'$; c) $\operatorname{tg}(\alpha + 15^\circ) = \operatorname{ctg}(2\alpha - 8^\circ)$.

Örnek 2

Aşağıdaki koşullara göre radyan cinsinden α dar açısını belirle.

a) $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{4})$; b) $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4})$.

Çözüm:

- a) Öncelikle, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$ olur. Bu sonuç $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{4})$ eşitliğinde yerine yazılırsa, $\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{4})$ yani $\alpha = \frac{\pi}{4}$ elde edilir.
 b) Önceki örneğe benzer şekilde, $\operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - (2\alpha - \frac{\pi}{4})) = \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$ elde edilir. Sonuç, $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4})$ eşitliğinde yerine yazılırsa, $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$ elde edilir. Buradan, $\alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} - 2\alpha$, yani $3\alpha = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ olur. Sonuç olarak $\alpha = \frac{11\pi}{36}$ elde edilir.

Soru 2

Aşağıdaki koşullara göre radyan cinsinden α dar açısını belirle.

a) $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{6})$; b) $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{8}) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{6})$.

Örnek 3

İfadeleri sadeleştir.

a) $2 \sin 42^\circ - 3 \cos 48^\circ$; b) $\frac{4 \operatorname{tg} 58^\circ + 6 \operatorname{ctg} 32^\circ}{-2 \operatorname{ctg} 32^\circ + 3 \operatorname{tg} 58^\circ}$.

Çözüm:

a) $2 \sin 42^\circ - 3 \cos 48^\circ = 2 \sin 42^\circ - 3 \sin(90^\circ - 48^\circ) = 2 \sin 42^\circ - 3 \sin 42^\circ = -\sin 42^\circ$.

$$b) \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{ctg} 32^{\circ}}{-2 \operatorname{ctg} 32^{\circ} + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{tg}(90^{\circ} - 32^{\circ})}{-2 \operatorname{tg}(90^{\circ} - 32^{\circ}) + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{tg} 58^{\circ}}{-2 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{10 \operatorname{tg} 58^{\circ}}{\operatorname{tg} 58^{\circ}} = 10.$$

Örnek 4

İfadeleri sadeleştir.
$$\frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \cos(\frac{\pi}{6})}{2 \cos(\frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})}$$

Çözüm:

Açıların radyan cinsinden verildiğine dikkat et. Bu nedenle $\sin \alpha$ ile $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ arasındaki bağıntı kullanılacaktır.

$$\frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \cos(\frac{\pi}{6})}{2 \cos(\frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{2 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \sin(\frac{\pi}{3})}{2 \sin(\frac{\pi}{3}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{-2 \sin(\frac{\pi}{3})}{9 \sin(\frac{\pi}{3})} = -\frac{2}{9} \text{ elde edilir.}$$

Soru 3

İfadeleri sadeleştir.

a) $2 \operatorname{ctg} 59^{\circ} - 6 \operatorname{ctg} 31^{\circ}$; b) $\frac{7 \sin 18^{\circ} - 3 \cos 72^{\circ}}{-\cos 72^{\circ} + 5 \sin 18^{\circ}}$; c) $\frac{2 \operatorname{tg} 65^{\circ} - 7 \operatorname{ctg} 25^{\circ}}{2 \operatorname{tg} 65^{\circ} + 3 \operatorname{ctg} 25^{\circ}}$; d) $\frac{-5 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{12}) + 9 \operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{12})}{2 \operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{12}) - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{12})}$

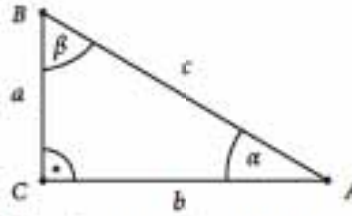
Alıştırma Soruları!

- Aşağıdaki koşullara göre α dar açısını belirle.
 - $\sin(\alpha - 14^{\circ}) = \cos 29^{\circ} 20'$; b) $\cos(27^{\circ} - \alpha) = \sin 61^{\circ} 50'$;
 - $\operatorname{tg}(\alpha + 30^{\circ}) = \operatorname{ctg} 65^{\circ} 40'$; d) $\operatorname{ctg}(\alpha - 18^{\circ}) = \operatorname{tg} 52^{\circ} 38'$.
- Aşağıdaki koşullara göre radyan cinsinden α dar açısını belirle.
 - $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{5})$; b) $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{10}) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - 3\alpha)$; c) $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3})$.
- İfadeleri sadeleştir.
 - $5 \cos 41^{\circ} - 2 \sin 49^{\circ} - \sin 49^{\circ} + 3 \cos 41^{\circ}$; b) $4 \sin 32^{\circ} - 3 \cos 58^{\circ} + 2 \sin 32^{\circ}$.
 - $\frac{4 \operatorname{tg} 35^{\circ} + 6 \operatorname{ctg} 55^{\circ}}{-3 \operatorname{ctg} 55^{\circ} + 2 \operatorname{tg} 35^{\circ}}$; d) $3 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}) - 4 \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{8}) + 5 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}) + \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{8})$.
- $\alpha + \beta = 90^{\circ}$. olduğu biliniyorsa ifadeleri sadeleştir.
 - $\cos \beta + \sin \alpha$; b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta$ c) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$ d) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta$

5.4 AYNI AÇININ TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

Hatırla!

- Bir dik üçgende, kenar oranları kullanılarak dar açının trigonometrik fonksiyonları nasıl tanımlanır?
- Pisagor teoremi nasıl ifade edilir?



Pisagor teoreminden elde edilen $a^2 + b^2 = c^2$, eşitliği c^2 'ye bölünürse

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \text{ yani } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \text{ elde edilir:}$$

Bu eşitlikte $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ ve $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ yerine yazılırsa, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ elde edilir.

Ayrıca, $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$ olduğundan, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ elde edilir.

Benzer şekilde, $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$ olduğundan, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ elde edilir.

Son iki eşitlikten, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ sonucu elde edilir.

Unutma!

Herhangi bir α dar açısı için temel trigonometrik eşitlikler (özdeşlikler) şunlardır:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Trigonometrik özdeşliklerin kullanım alanlarından biri, trigonometrik fonksiyonlardan birinin değeri verildiğinde diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini bulmaktır.

Örnek 1

α dar açısı için $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ verildiğine göre diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini belirle.

Çözüm:

$\sin \alpha$ veya $\cos \alpha$ değerlerinden biri verildiğinde, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ özdeşliği kullanılır ve verilen fonksiyonun değeri yerine yazılır. Bizim durumumuzda, $\sin^2 \alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ olur. Buradan, $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ elde edilir. Sonuç olarak, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ olur. $\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$ eşitliğinin $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ için de sağlandığına dikkat ediniz. Ancak α dar açı olduğundan her zaman pozitiftir

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Soru 1

α dar açısı için $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ verildiğine göre diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini belirle.

Örnek 2

α dar açısı için $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ verildiğine göre diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini belirle.

Çözüm:

Bu tür sorular iki farklı yöntemle çözülebilir.

Birinci yöntem

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{12}$ eşitliğinden, $\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \cos \alpha$ elde edilir. Bu eşitlik, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ özdeşliğinde yerine yazılırsa, $\left(\frac{5}{12} \cdot \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ elde edilir. Buradan, $\frac{25}{144} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ olur.

Dolayısıyla, $\left(\frac{25}{144} + 1\right) \cos^2 \alpha = 1$ ve $\frac{169}{144} \cos^2 \alpha = 1$ elde edilir.

Buradan, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\frac{169}{144}} = \frac{144}{169}$, ve $\cos \alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$ elde edilir.

$\cos \alpha = \frac{12}{13}$ değeri, $\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \cos \alpha$, eşitliğinde yerine yazılırsa, $\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13} = \frac{5}{13}$ elde edilir.

Son olarak, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, olduğundan, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}$.

İkinci yöntem

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ eşitliğinin her iki tarafı $\cos^2 \alpha$ ile bölünürse, $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, yani $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, elde edilir. Buradan, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$, yani $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}$, olur; çünkü

her α dar açısı için $\cos \alpha$ pozitif bir sayıdır. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ değeri yerine yazılırsa şu sonuç elde edilir.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{144} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25 + 144}{144}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{169}{144}}} = \frac{12}{13}.$$

Elde edilen $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ değeri $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ eşitliğinde yerine yazılır ve $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ elde edilir.

$\tan \alpha$ değeri verilmişse, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ eşitliği $\sin \sin^2 \alpha$ ile bölünmelidir. Böylece, $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, yani $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, elde edilir. Buradan, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$, yani $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$ olur; çünkü her α dar açısı için $\sin \alpha$ pozitif bir sayıdır.

Unutma!

Her α dar açısı için aşağıdaki eşitlikler doğrudur: $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}$ ve $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$.

Soru 2

α dar açı ve $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ olduğuna göre diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini belirle.

Alıştırma Soruları!

- α dar açı ve aşağıdaki eşitlik verildiğine göre diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini belirle:
a) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$; b) $\cos \alpha = \frac{20}{29}$.
- α dar açı ve aşağıdaki eşitlik verildiğine göre diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini belirle:
a) $\tan \alpha = \frac{9}{40}$; b) $\cot \alpha = \frac{8}{15}$.
- α dar açı ve aşağıdaki eşitlik verildiğine göre diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini belirle:
a) $\sin \alpha = \frac{2a}{a^2 + 1}$; b) $\cos \alpha = \frac{10a}{a^2 + 25}$.
- α dar açı ve aşağıdaki eşitlik verildiğine göre $4 \tan \alpha + 5 \cos \alpha$ ifadesinin değerini hesapla: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

5.5 TRİGNOMETRİK İFADELERİN SADELEŞTİRİLMESİ

Hatırla!

- Tümler açılarının trigonometrik fonksiyonlarının tanımı.
- Temel trigonometrik özdeşlikleri yaz.

Unutma!

Temel trigonometrik özdeşliklerin en önemli kullanım alanlarından biri *trigonometrik ifadelerin sadeleştirilmesidir*.

Bir trigonometrik ifadeyi sadeleştirmek için aşağıdaki adımları izle:

1. **Kesirler ve EKOK.** Eğer ifadeye birden fazla kesir varsa, paydalar çarpanlarına ayrılır ve en küçük ortak kat (EKOK) belirlenir. İfade tek bir kesir hâlinde yazılır.
2. **Ortak çarpan.** Birden fazla terim içeren ifadelerde, parantez önüne ortak çarpan alma ve uygun gruplandırma yapıp yapılamayacağı kontrol edilir.
3. **Temel trigonometrik özdeşlikler.** Aşağıdaki özdeşlikler kullanılır:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

4. **tg ve ctg dönüşümü.** tg α ve ctg α ifadeleri, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ve $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ şeklinde değiştirilerek yazılır.
 - İfadeye iki veya daha fazla terim varsa, parantez önüne ortak çarpan almayı dene.
 - $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ ve $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ özdeşliklerini kullan.
 - İfadeye tg α ve/veya ctg α varsa, bunları $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ve $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ özdeşliklerine göre yaz.

Örnek 1

İfadeleri sadeleştir:

$$\text{a) } 4 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha; \quad \text{b) } (1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha); \quad \text{c) } \frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha}.$$

Çözüm:

- $4 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 4 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4 - 1 = 3;$
- $(1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha;$
- $1 - \sin \alpha$ ile $1 + \sin \alpha$ ortak böleni olmadığı için

EKOK = $(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, olur. Buradan elde edilir:

$$\frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} = \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}.$$

Soru 1

İfadeleri sadeleştir:

a) $7 - 7 \cos^2 \alpha$ b) $(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)$; c) $\frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 - \cos \alpha}$.

Örnek 2

İfadeleri sadeleştir:

a) $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$; b) $\sqrt{1 - \sin \alpha} \cdot \sqrt{1 + \sin \alpha}$; c) $\frac{(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha}$.

Çözüm:

a) İki kesir ortak paydada yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha - (1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) $\sqrt{1 - \sin \alpha} \cdot \sqrt{1 + \sin \alpha} = \sqrt{(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos^2 \alpha} = \cos \alpha$.

c) $\frac{(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha} = \frac{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}$

$$= \frac{1 + 2 \sin \alpha + 1}{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 + 2 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{2(1 + \sin \alpha)}{2 \sin \alpha(1 + \sin \alpha)}$$

$$= \frac{1}{\sin \alpha} \text{ elde edilir.}$$

Unutma!

- Bir eşitliğin doğru olduğunu ispatlamanın iki yöntemi vardır:
- Birinci yöntem, eşitliğin her iki tarafını aynı ifadeye ulaşıncaya kadar dönüştürmektir.
- İkinci yöntem ise eşitliğin bir tarafından başlayıp gerekli dönüşümler yaparak diğer tarafa ulaşmaktır. (Genellikle daha karmaşık olan taraftan başlanır.)

Örnek 3

Eşitliğin doğruluğunu ispatla:

$$a) \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha; \quad b) \frac{\sin \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}; \quad c) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

Çözüm:

a) **Birinci yöntem:**

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha. \quad (\text{eşitliğin sol tarafındaki kesirlerin EKOK'u bulunur})$$

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha \quad (\text{ortak çarpan parantez dışına alınır})$$

$$\frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad (1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \text{ eşitliği uygulanır})$$

$$\frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

Sol tarafın sağ tarafa eşit olduğu elde edildi: $\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$. Böylece eşitliğin doğruluğu ispatlanmış oldu.

İkinci yöntem:

Eşitliğin sağ tarafını $D = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$, sol tarafını ise $L = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ile gösterelim. Sol taraftan başlayıp onu sağ tarafın biçimine getirmek istiyoruz.

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = D \end{aligned}$$

Böylece trigonometrik özdeşlikler kullanılarak sol taraf sağ tarafa dönüştürüldü ve eşitliğin doğruluğu ispatlandı.

b) Sol taraftan başlanır. Öncelikle $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ve $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ özdeşlikleri kullanılır. Böylece sol taraf aşağıdaki biçime getirilir:

$$L = \frac{\sin \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}.$$

Daha sonra bileşik kesirler basit kesirlere dönüştürülür ve $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, özdeşliği kullanılarak

$$L = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = D \text{ elde edilir}$$

Böylece eşitliğin doğruluğu ispatlanmış olur.

- c) Bu durumda eşitliğin iki tarafının karmaşıklığı aynıdır. Bu nedenle hangi taraftan başlanacağını önemi yoktur. Hangi taraftan başlanırsa başlansın, $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ özdeşliği kullanılarak diğer tarafa en kolay şekilde ulaşılır. Sol taraftan başlanır ve bu özdeşlikten $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$, azılırsa

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{1 + \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} \text{ elde edilir.}$$

Soru 2

Eşitliğin doğruluğunu ispatla:

a) $(1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha};$ b) $\frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$

Soru 3

Özdeşliği ispatla: $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = 2 \operatorname{ctg} \alpha.$

Alıştırma Soruları!

1. İfadeleri sadeleştir:

a) $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha;$ b) $(1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha;$ c) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha.$

2. İfadeleri sadeleştir:

a) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\sin^2 \alpha};$ b) $\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha};$ c) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{3 \sin \alpha - 1}{1 - \sin \alpha} - \frac{2}{1 + \sin \alpha}.$

3. Eşitliğin doğruluğunu ispatla:

a) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}, \sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0;$

b) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha, \sin \alpha \neq 0.$

5.6 TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN UYGULANMASI

Hatırla!

- Bir dikdörtgen, yamuk ve üçgen çiz; elemanlarını doğru şekilde göster.
- Dar açının trigonometrik fonksiyonlarının tanımı.

Unutma!

- Cisim yatay düzlemin üzerinde olduğunda, cismin görüldüğü açıya **yükselme açısı** denir.
- Cisim yatay düzlemin altında olduğunda, cismin görüldüğü açıya **alışma açısı** denir.



Örnek 1

Bir kenarı $a = 14$ cm olan dikdörtgende, bu kenar ile köşegen arasındaki açı $\alpha = 28^\circ 40'$ ise dikdörtgenin çevresini hesapla.

Çözüm:

Soruda dikdörtgenin bir kenarının uzunluğu verilmiştir. Çevresini belirlemek için diğer kenarın b uzunluğunu bulmamız gerekir.

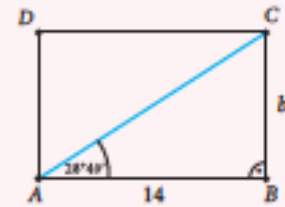
Çizim 1'den, verilen açı ve $a = 14$ kenarından yararlanarak bilinmeyen b uzunluğunu hesaplamak için karşı dik kenar ile komşu dik kenar arasındaki oranı kullanan trigonometrik fonksiyonu seçmemiz gerektiği görülür. Bu trigonometrik fonksiyonun tanjant olduğu açıktır, yani

$\tan 28^\circ 40' = \frac{b}{14}$. Buradan, $b = 14 \cdot \tan 28,67^\circ = 14 \cdot 0,547 = 7,7$ cm elde edilir.

($\tan 28^\circ 40'$ değeri hesap makinesiyle hesaplanır.)

Dikdörtgenin çevresi için

$$L = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 7,7 = 43,4 \text{ cm elde edilir.}$$



Çizim 1

Soru 1

Eş kenarlarından biri 40 cm ve tepe açısı 44° olan ikizkenar üçgenin çevresini ve yüksekliğini hesapla.

Örnek 2

İkizkenar yamuğun tabanları 18 cm ve 13,4 cm'dir. Alt taban ile yan kenar arasındaki açı $\frac{\pi}{3}$ 'tür.

Yamuğun yan kenar uzunluğunu ve yüksekliğini belirle.

Çözüm:

Çizim 2'de ikizkenar yamuk verilmiştir.

Öncelikle ikizkenar yamuğa özgü x uzunluğunu hesaplayalım:

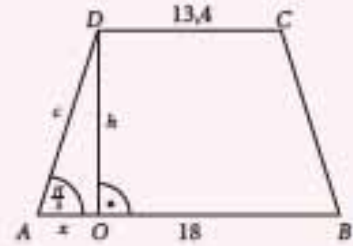
$$x = \frac{18 - 13,4}{2} = \frac{4,6}{2} = 2,3 \text{ cm. Yamuğun bilinmeyen yan kenar}$$

uzunluğu c ile bilinmeyen yüksekliği h 'yi belirlemek için $\triangle AOD$

üçgenini inceleriz. Buradan

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{x}{c} = \frac{2,3}{c}, \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{x} = \frac{h}{2,3} \text{ elde edilir:}$$

$$\text{Buradan da: } c = \frac{2,3}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{2,3}{0,5} = 4,6 \text{ cm, veya } h = 2,3 \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,3 \cdot \sqrt{3} \approx 2,3 \cdot 1,73 = 3,979.$$



Çizim 2

Örnek 3

İkizkenar yamuğun tabanları 18 cm ve 13,4 cm, yan kenarı ise 5 cm'dir. Yamuğun açılarını belirle.

Çözüm:

Önceki örneğe benzer şekilde, önce çizim 3'e göre x uzunluğunu

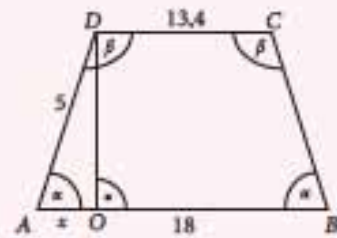
$$\text{hesaplarız } x = \frac{18 - 13,4}{2} = \frac{4,6}{2} = 2,3 \text{ cm elde edilir.}$$

$\triangle AOD$ üçgeninden, kosinüs trigonometrik fonksiyonu yardımıyla

$$\alpha \text{ açısını hesaplarız. Buna göre, } \cos \alpha = \frac{2,3}{5} = 0,46, \text{ Buradan,}$$

$\alpha = \cos^{-1} 0,46 = 62,61^\circ$ elde edilir. (Kosinüs fonksiyonunun ters fonksiyon değeri hesap makinesiyle hesaplanır.)

İkizkenar yamukta aynı tabana ait açılar eşit olduğu ve her dörtgenin iç açılar toplamının 360° olduğu bilgisi kullanılırsa, $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$ olur. α açısının değeri yerine yazılırsa, $2 \cdot 62,61^\circ + 2\beta = 360^\circ$ elde edilir. Buradan, $2\beta = 360^\circ - 125,22^\circ$ yani $\beta = 117,39^\circ$ elde edilir.



Çizim 3

Soru 2

Köşegeni 15 cm olan ve köşegen ile uzun kenarı arasındaki açı 36° olan dikdörtgenin çevresini hesapla.

Örnek 4

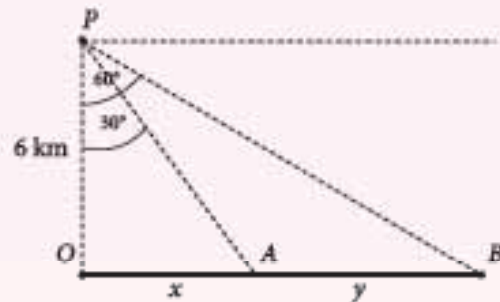
Bir uçak deniz seviyesinden 6 km yükseklikte uçmakta ve iki gemi görmektedir. Uçaktan A ve B gemilerine olan alçalma açıları sırasıyla 60° ve 30° 'dir. İki gemi arasındaki uzaklığı hesapla.

Çözüm:

Uçağın P noktasında bulunduğunu ve onun dikey olarak altında bulunan noktayı O ile gösterelim. Gemiler deniz yüzeyindeki A ve B noktalarındadır. (çizim 6)



Çizim 6



Çizim 7

Uçağın bulunduğu yükseklik PO ile gösterilmiştir. Uçaktan gemilere olan alçalma açılarından, $\angle OPA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ve $\angle OPB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ elde edilir.

O noktasından A noktasına olan uzaklığı x ile, yani $x = \overline{OA}$ ve A noktasından B noktasına olan uzaklığı y ile, yani $y = \overline{AB}$ gösterelim. (çizim 7)

$\triangle POA$ üçgeni ve $\angle OPA = 30^\circ$ açısı incelendiğinde, $\tan 30^\circ = \frac{x}{6}$ elde edilir.

Buradan, $x = 6 \cdot \tan 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6 \cdot 0,577 = 3,46 \text{ km}$ olur.

Benzer şekilde, $\triangle POB$ üçgeninden, $\angle OPB = 60^\circ$ açısı ve $\overline{OB} = x + y$, kenarı için, $\tan 60^\circ = \frac{x+y}{6}$ elde edilir. Buradan, $x + y = 6 \cdot \tan 60^\circ = 6 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 1,732 = 10,39 \text{ km}$ olur.

Buradan A ve B gemileri arasındaki uzaklık, $y = 10,39 - 3,46 = 6,93 \text{ km}$ olarak elde edilir.

Soru 3

Bir kişi, nehrin karşı kıyısında bulunan bir ağacı 48° 'lik açıyla görmektedir. Daha sonra kişi kıyı boyunca 10 m ilerleyip durur. Bu noktadan aynı ağacı 36° 'lik açıyla görmektedir. Nehrin genişliğini belirle.

Örnek 5

Boy 1,8 m olan bir kişi, bir sokak lambasından 4,5 m uzaklıkta durmaktadır ve gölgesinin uzunluğu 2,8 m'dir. Sokak lambasının yüksekliğini belirle.

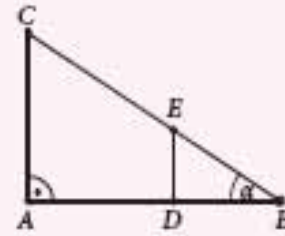
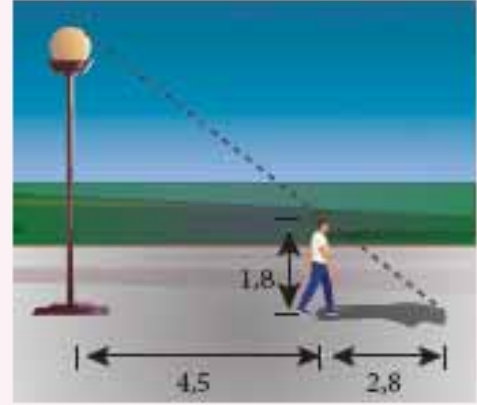
Çözüm:

Resimden çizim 8 elde edilir. Gölgeyi $x = \overline{DB} = 2,8$ m kişinin boyunu ise $y = \overline{DE} = 1,8$ m ile gösterelim. Buna göre α açısı, $\triangle DBE$, dik üçgeninden $\tan \alpha = \frac{1,8}{2,8} = 0,643$, eşitliğiyle elde edilir, yani $\alpha = \tan^{-1} 0,643 = 32,74^\circ$.

Dik kenarları $\overline{AC}$ ve $\overline{AB} = 4,5 + 2,8 = 7,3$ m, olan

$\triangle ABC$ dik üçgeninden $\tan 32,74^\circ = \frac{\overline{AC}}{7,3}$, elde edilir, yani $\overline{AC} = 7,3 \cdot \tan 32,74^\circ \approx 4,7$ m.

Buna göre sokak lambasının yüksekliği 4,7 m'dir.



Çizim 8

Soru 4

Bir dağcı, yatay zeminle 12° açı yapan 2 km uzunluğundaki bir patikada tırmanmaktadır. Patikanın sonuna ulaştığında hangi yükseklikte olacaktır? Bir çizim yap.

Alıştırma Soruları!

1. Uzunluğu 25 m olan itfaiye merdiveni 70° açıyla eğilmişse hangi yüksekliğe ulaşır?
2. Büyük tabanı 42 cm, bu tabana ait açısı $47^\circ 20'$ ve yan kenarı $c = 25$ cm olan ikizkenar yamuk verilmiştir. Diğer tabanı ve yamukun yüksekliğini hesapla.
3. $4^\circ 10'$ açıyla eğimli, 2 km uzunluğundaki düz bir yolda yürüyen yolcu hangi yüksekliğe çıkmıştır?
4. Yüksekliği 150 m olan bir deniz fenerinin tepesinden bir gemi 9° lik açıyla görülmektedir. Deniz feneri ile gemi arasındaki uzaklık kaç metredir?
5. Bir kamera, bir cisim 35° lik alçalma açısıyla görececek şekilde yerleştirilmiştir. Kameranin yöneldiği cisim yatay olarak 20 m uzaklıktadır. Kameranin cisme göre yükseklik farkını hesapla.
6. Yüksekliği 56 m olan bir binanın tepesinden yerde park etmiş bir otomobili olan alçalma açısı 30° dir. Yeni alçalma açısının 15° olması için otomobil binadan kaç metre uzaklaşmalıdır?

5.7 UZAY GEOMETRİSİNİN AKSİYOMLARI

Uzay geometrisinde; nokta, doğru ve düzlem gibi temel geometrik kavramlar arasındaki ilişkiler incelenir. Bu kavramların özellikleri ve birbirlerine göre konumları, ispatlanmayan, doğru kabul edilen başlangıç önermeleri olan uzay geometrisi aksiyomlarına (uzay belirtme durumları) dayanılarak belirlenir. Bu aksiyomatik temel üzerinde; nokta ile doğru, iki doğru, doğru ile düzlem ve iki düzlem arasındaki olası ilişkiler ele alınır. Böylece uzay geometrisi sistemli ve mantıksal olarak tutarlı bir biçimde incelenebilir.

Uzay geometrisinin aksiyomları ile nokta, doğru ve düzlem arasındaki ilişkilerin geniş bir uygulama alanı vardır. Bunlar; geometrik problemlerin çözümünün, teoremlerin ispatının ve uzaydaki geometrik yapıların doğru yorumlanmasının temelini oluşturur. Bu kavramlar; mimarlıkta, inşaat mühendisliğinde, teknik çizimde, mühendislikte ve fizikte, uzaydaki cisimlerin konum ve yönelimlerinin doğru belirlenmesinin gerekli olduğu durumlarda kullanılır.

Geometri; düzlemde ve uzayda bulunan cisimlerin biçimini, büyüklüğünü ve konumunu inceleyen matematik dalıdır. Geometrinin ortaya çıkışı; ölçme, yapı inşa etme, uzayda yön bulma ve benzeri konulardaki insanların pratik ihtiyaçlarına dayanmaktadır.

Şimdiye kadarki eğitim sürecinde; nokta, doğru, üçgen, küp, iç boyutlu (3B) şekil ve daha birçok geometrik kavram öğrenilmiştir. Bu kavramların bazıları, daha önce bilinen başka kavramlar yardımıyla tanımlanırken, bazıları tanımlanmaz. Tanımlanmayan, yalnızca örnekler verilerek açıklanan kavramlara **temel kavramlar** denir. Diğer bütün kavramlar bu temel kavramlar yardımıyla tanımlanır.

Unutma!

- Tanımlanmayan kavramlara **temel kavramlar** denir.
- Temel kavramlar yardımıyla tanımlanan kavramlara **türetilmiş** veya **tanımlı kavramlar** denir.
- Geometride temel kavramlar; **nokta, doğru ve düzlemdir**.

Örnek 1

Açı, ortak bir başlangıç noktasına sahip iki ışından oluşan iki boyutlu (2B) şekildir.

Buna göre açı kavramı; nokta, ışın ve 2B şekil kavramlarının mantıksal olarak ilişkilendirildiği bir cümleyle tamamen açıklanmıştır.

Unutma!

- **Tanım:** bir kavramın içeriğini, başka bilinen kavramlar yardımıyla açık ve kesin bir şekilde açıklayan ifadedir.
- **2B şekil:** düzlemde belirli bir konuma, biçime ve büyüklüğe sahip noktalardan oluşan kümedir.
- **Temel önermeler** veya **aksiyomlar**, ispatlanmadan doğru kabul edilen önermelerdir.
- **Türetilmiş önermeler** veya **teoremler** ise ispatlanan diğer bütün önermelerdir.

Bir teorem, **önerme** biçiminde (**koşullu biçim**) veya **kesin ifade** biçiminde söylenebilir. Örneğin: Eğer bir dörtgen kare ise, kenarlarının uzunlukları eşittir. Bu, önerme biçiminde ifade edilmiş bir teoremdir. Aynı teorem kesin ifade biçiminde şöyle söylenir: Karenin bütün kenarlarının uzunlukları eşittir.

Her teoremde şu iki unsur bulunmalıdır:

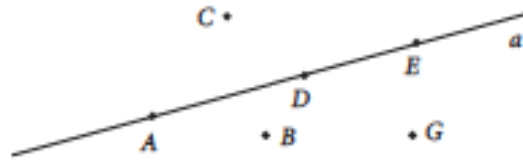
- İncelenen cisim için gerekli koşullar (bu koşullara **varsayımlar** denir).
- Bu cisimlerle ilgili ifade edilen hüküm (bu hükme teoremin **sonucu** denir).

Aşağıda uzay geometrisinin bazı önemli aksiyomları ve teoremleri verilmiştir. Aksiyomlar $A_1, A_2, A_3, \dots$; teoremler ise $T_1, T_2, T_3, \dots$ ile gösterilecektir.

A_1 : Her doğru üzerinde sonsuz sayıda nokta bulunur ve bu doğru üzerinde bulunmayan da sonsuz sayıda nokta vardır.

A_2 : Herhangi iki farklı noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.

A noktasının a doğrusuna ait olduğunu veya a doğrusu üzerinde bulunduğunu ya da a doğrusunun A noktasından geçtiğini belirtmek için $A \in a$ gösterimi kullanılır. Benzer şekilde, B noktasının a doğrusuna ait olmadığını veya a doğrusu üzerinde bulunmadığını ya da a doğrusunun B noktasından geçmediğini belirtmek için $B \notin a$ gösterimi kullanılır. (Çizim 1).



Çizim 1

Unutma!

Aynı doğru üzerinde bulunan noktalara **doğrusal noktalar** denir.

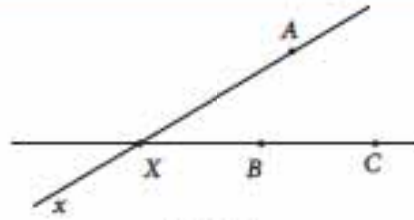
Şimdi verilen aksiyomlardan elde edilen bazı teoremler gösterilecektir.

T_1 : Uzayda en az doğrusal olmayan üç nokta vardır.

İspat: A ve B olmak üzere iki farklı noktadan geçen p doğrusu verilmiş olsun. A_1 aksiyomuna göre, a doğrusu üzerinde bulunmayan bir C noktası vardır. Buna göre A , B ve C noktaları doğrusal değildir.

T_2 : Her noktadan sonsuz sayıda doğru geçer.

İspat: A herhangi bir nokta, B ve C ise A , B ve C doğrusal olmayacak şekilde seçilmiş noktalar olsun. A_1 aksiyomuna göre, B ve C noktalarından yalnız bir doğru geçer. A_1 aksiyomuna göre ise bu doğru üzerinde sonsuz sayıda nokta bulunur. BC doğrusu üzerindeki her X noktası ile A noktasından (çizim 2) yalnız bir doğru geçer. BC doğrusu üzerinde sonsuz sayıda nokta bulunduğundan, A noktasından da sonsuz sayıda doğru geçer.



Çizim 2

Örnek 2

A , B , C ve D olmak üzere dört noktadan kaç doğru geçer?

Çözüm:

A_2 aksiyomuna göre, iki farklı noktadan tam olarak bir doğru geçer. A , B , C ve D noktalarından geçen doğru sayısı, bu noktaların birbirlerine göre konumuna bağlıdır. Bu nedenle birkaç durumu inceleyelim. Dört noktanın tamamı doğrusaldır:

Bu durumda bu noktalardan geçen yalnız bir doğru vardır.

Üç nokta doğrusal, dördüncü nokta ise bu doğru üzerinde değildir:

Doğrusal olan üç nokta bir doğru belirler. Dördüncü nokta ise bu üç noktanın her biriyle birlikte yeni bir doğru belirler. Toplam doğru sayısı $1 + 3 = 4$ 'tür.

Herhangi üç nokta doğrusal değildir:

Her iki nokta yeni bir doğru belirler. Toplam doğru sayısı $\binom{4}{2} = 6$ doğrudur. Bu sayı şu şekilde elde

edilir. Dört noktadan oluşan kümeden rastgele ikili alt kümeler seçilir ve her iki nokta bir doğru

belirler. Dört elemanlı bir kümeden iki elemanlı alt kümelerin sayısı $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$ olduğundan, farklı doğru sayısı da 6'dır.

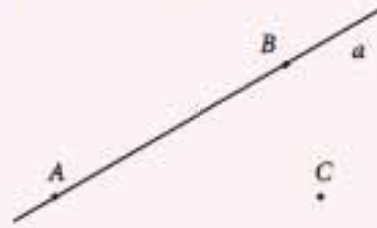
Sonuç olarak, dört noktadan; noktaların konumuna bağlı olarak bir, dört veya altı farklı doğru geçebilir.

Örnek 3

Uzayda herhangi bir A noktası, rastgele verilmiş olsun. A , B ve C noktaları doğrusal olmayacak şekilde B ve C noktalarının bulunduğu göster.

Çözüm:

B , A 'dan farklı bir nokta olsun. Buna göre A_2 aksiyomuna göre, A ve B noktalarından bir ve yalnız bir a doğrusu geçer. A_1 aksiyomuna göre, a doğrusu üzerinde bulunmayan noktalar vardır C bu noktalardan biri olsun (çizim 3). Buna göre A , B ve C noktaları doğrusal değildir.



Çizim 3

Soru 1

A, B, C, D ve E noktalarından üçü doğrusal ise bu noktalar kaç doğru belirler?

Soru 2

Bir düzlemde n nokta verilmişse, bu noktaların belirlediği doğru sayısının en fazla $\binom{n}{2}$ olduğunu göster. Eşitlik hangi durumda sağlanır?

Aşağıdaki aksiyomlarla bir nokta ile bir düzlemin birbirlerine göre konumu belirlenir.

A_3 : Her düzlem üzerinde sonsuz sayıda nokta bulunur ve bu düzleme ait olmayan noktalar da vardır.

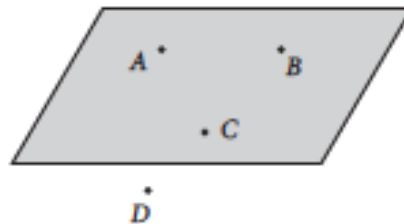
A_4 : Doğrudaş olmayan üç noktadan bir ve yalnız bir düzlem geçer.

Aşağıda verilen teoremin doğruluğunu göstereceğiz.

T_3 : Uzayda aynı düzlem üzerinde bulunmayan en az dört nokta vardır.

İspat: T_1 teoremine göre, uzayda doğrudaş olmayan en az üç nokta vardır. Bu noktalar A, B ve C olsun.

A_4 aksiyomuna göre, bu noktalar yalnız bir düzlem belirler. A_3 aksiyomuna göre, bu düzlem üzerinde bulunmayan noktalar vardır. D , bu noktalardan biri olsun. Buna göre A, B, C ve D noktaları aynı düzlem üzerinde bulunmaz.



Çizim 4

Unutma!

Aynı düzlem üzerinde bulunan noktalara **düzlemsel noktalar** denir.

Örnek 4

Verilen p doğrusu ile $A \notin p$ noktasından tam olarak bir düzlem geçtiğini göster.

İspat: p doğrusu üzerinde en az iki farklı B ve C noktası vardır. A noktası p doğrusu üzerinde bulunmadığından A, B ve C noktaları doğrusal değildir. A_4 aksiyomuna göre, bu üç noktadan bir ve yalnız bir düzlem geçer.

Örnek 5

A, B, C ve D olmak üzere dört noktadan kaç farklı düzlem geçer?

Çözüm:

Bu sorunun cevabı, noktaların birbirlerine göre konumuna bağlıdır. A_4 aksiyomuna göre, doğrusal olmayan üç noktadan bir düzlem geçer. Dört noktanın konumuyla ilgili bütün olası durumları inceleyelim.

Dört noktanın tamamı aynı düzlem üzerinde değildir; yani en az bir nokta, diğer üç noktanın belirlediği düzlemin dışındadır:

Bu durumda 4 noktadan 4 farklı üçlü seçebiliriz. Her üçlü farklı bir düzlem belirler. Buna göre 4 noktadan 4 düzlem geçer.

Dört nokta aynı düzlem üzerinde bulunur, ancak hepsi doğrusal değildir:

Bu durumda herhangi üç nokta aynı düzlem üzerinde bulunur ve bütün olası düzlemler çıkarılır. Yani dört noktadan tam olarak bir düzlem geçer.

Dört nokta doğrusaldır; yani hepsi aynı doğru üzerinde bulunur:

Bu durumda bir doğrudan sonsuz sayıda düzlem geçirilebilir. Buna göre doğrusal olan 4 noktadan sonsuz sayıda düzlem geçer.

Sonuç olarak, dört farklı noktadan, noktaların konumuna bağlı olarak bir, dört veya sonsuz sayıda düzlem geçebilir.

Soru 3

A, B, C, D ve E olmak üzere beş noktadan kaç farklı düzlem geçer?

Alıştırma Soruları!

1. Verilen bir noktadan kaç doğru geçer?
2. Verilen doğrusal olmayan üç nokta kaç doğru belirler?
3. Üç farklı nokta kaç doğru parçası belirler?
4. Beş farklı noktanın bir, beş, altı, sekiz veya on doğru belirlediğini göster.
5. A rastgele bir nokta olsun. B, C ve D noktaları düzlemsel olmayacak şekilde A, B, C ve D noktalarının bulunduğu göster.

5.8 DOĞRU İLE DÜZLEMİN, İKİ DÜZLEMİN VE İKİ DOĞRUNUN BİRBİRLERİNE GÖRE DURUMU

Hatırla!

- Nokta ile doğrunun birbirlerine göre konumu nasıl olabilir?
- Bir nokta, a bir doğru ve Σ bir düzlem olmak üzere $A \in a$ ve $A \in \Sigma$ gösterimleri neyi ifade eder?
- İki şeklin birbirlerine göre durumu, bu iki şeklin ortak noktalarının sayısıyla belirlenir.

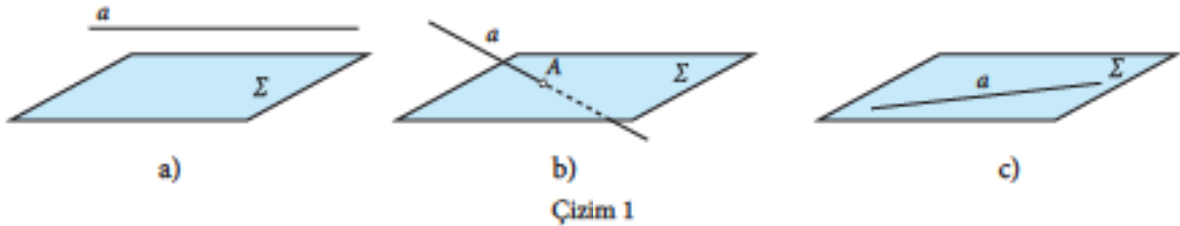
Bir Doğru ile Bir Düzlemin Birbirlerine Göre Durumu

Eğer a doğrusunun her noktası Σ düzlemi üzerinde bulunuyorsa, a doğrusu Σ düzlemi üzerinde bulunur ya da Σ düzlemi a doğrusundan geçer denir.

A_3 : Eğer a doğrusunun iki noktası Σ düzlemi üzerinde bulunuyorsa, a doğrusu da bu düzlem üzerinde bulunur.

Bir doğru ile bir düzlem yalnızca aşağıdaki durumlardan birinde bulunabilir:

- Ortak noktaları yoktur, yani $a \cap \Sigma = \emptyset$ (Çizim 1, a);
- Yalnızca bir ortak noktaları vardır, yani $a \cap \Sigma = \{A\}$ (Çizim 1, b);
- a doğrusunun her noktası Σ düzlemi üzerinde bulunur, yani $a \cap \Sigma = a$ (Çizim 1, c).



Unutma!

- Eğer a doğrusu ile Σ düzleminin ortak noktası yoksa, bunların paralel olduğu söylenir ve $a \parallel \Sigma$ biçiminde gösterilir. Ayrıca a doğrusu Σ düzlemi üzerinde bulunuyorsa da a doğrusu ile Σ düzleminin paralel olduğu söylenir.
- Eğer a doğrusu ile Σ düzleminin A ortak noktası varsa, bunların A noktasında kesiştiği söylenir; yani a düzlemi A noktasında deler.
- Eğer a doğrusu ile Σ düzleminin iki ortak noktası varsa, doğru düzlem üzerinde bulunur.

Aşağıda doğru ile düzlemin birbirlerine göre durumuna ilişkin bazı teoremleri ispatlayacağız.

T_4 : Her düzlem Σ üzerinde en az bir doğru bulunur.

İspat: A_1 aksiyomuna göre, Σ düzlemi üzerinde en az iki nokta bulunur. Bunlar A ve B noktaları olsun. A_2 aksiyomuna göre A ve B noktalarından yalnız bir a doğrusu geçer. A ve B noktaları hem a doğrusu hem de Σ düzlemi üzerinde bulunduğundan, A_3 aksiyomuna göre a doğrusu Σ düzlemi üzerinde bulunur.

T_5 : a doğrusu üzerinde bulunmayan her A noktası için, A noktasından ve a doğrusundan geçen bir ve yalnız tek bir Σ düzlemi vardır.

İspat: A_1 aksiyomuna göre a doğrusu üzerinde en az iki nokta vardır. Bunlar B ve C olsun. $A \notin a$ olduğundan A, B ve C noktaları doğrudan doğruya değildir. A_4 aksiyomuna göre bu üç nokta yalnız bir Σ düzlemi belirler. Buna göre A noktasından ve a doğrusundan tam olarak bir düzlem geçer.

Örnek 1

Her Σ düzlemi üzerinde en az üç farklı doğru bulunduğunu göster.

Çözüm:

A_3 aksiyomuna göre her Σ düzlemi sonsuz sayıda nokta içerir. Buradan Σ üzerinde bulunan doğrudan doğruya olmayan üç farklı A, B ve C noktası seçebiliriz. Bu noktalar doğrudan doğruya olmadıklarından aynı doğru üzerinde bulunmazlar. A_2 aksiyomuna göre bu noktalardan her iki tanesinden yalnız bir doğru geçer. Böylece $p_1 = AB$, $p_2 = AC$ ve $p_3 = BC$ doğruları elde edilir. A_3 aksiyomuna göre bu doğruların her biri düzlemle iki ortak noktaya sahip olduğundan p_1 , p_2 ve p_3 doğrularının tamamı Σ düzlemi üzerinde bulunur.

İki Düzlemin Birbirlerine Göre Durumu

İki düzlemin birbirlerine göre durumunu aşağıdaki teoremle inceleyeceğiz.

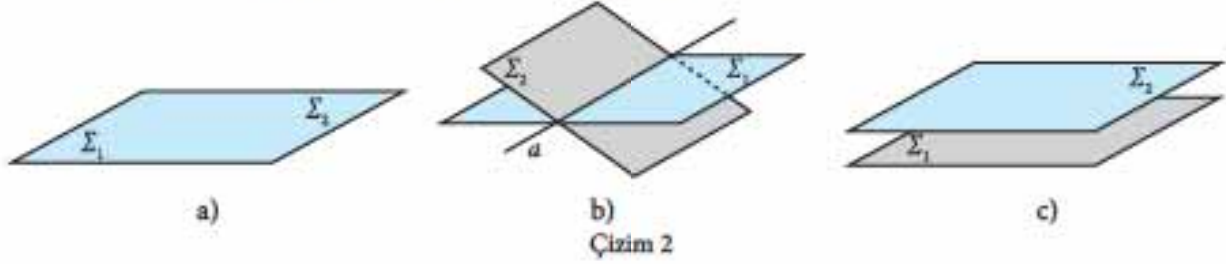
T_6 : Ortak bir doğruya sahip en az iki düzlem vardır.

İspat: T_3 teoremine göre uzayda aynı düzlem üzerinde bulunmayan dört nokta vardır. Bunlar A, B, C ve D olsun. A_4 aksiyomuna göre A, B ve C noktaları Σ_1 düzlemini, A, B ve D noktaları ise Σ_2 düzlemini belirler. Σ_2 A ve B noktaları Σ_1 düzlemi üzerinde bulunduğundan $a = AB$ doğrusu Σ_1 düzlemiyle iki ortak noktaya sahiptir. Aynı şekilde A ve B noktaları Σ_2 düzlemi üzerinde de bulunduğundan a doğrusu Σ_2 düzlemiyle de iki ortak noktaya sahiptir. A_3 aksiyomuna göre a doğrusu her iki düzlem üzerinde de bulunur. Σ_1 ve Σ_2 farklı düzlemler olduğundan, A_4 aksiyomuna göre a doğrusu üzerindeki noktalar dışında başka ortak noktaları olamaz. Aksi hâlde Σ_1 ve Σ_2 aynı düzlem olurdu. Buna göre Σ_1 ve Σ_2 düzlemlerinin ortak doğrusu a 'dır; yani $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$.

A_6 : Eğer iki düzlemin bir ortak noktası varsa, en az bir ortak noktaları daha vardır.

Buna göre iki düzlem Σ_1 ve Σ_2 :

- Çakışabilir, yani $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ (Çizim 2, a))
- Ortak bir doğruya sahip olabilir, yani $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$ (Çizim 2, b))
- Ortak noktaları olmayabilir, yani $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ (Çizim 2, c))



Unutma!

- Σ_1 ve Σ_2 düzlemleri ortak noktaya sahip değilse paraleldir. $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ şeklinde gösterilir.
- Kesişen düzlemlerin yalnız bir ortak doğrusu vardır.
- Σ_1 ve Σ_2 düzlemleri doğrudan olmayan üç ortak noktaya sahipse çakışiktır. $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ şeklinde gösterilir.

Soru 1

İki düzlemin yalnızca bir ortak noktası olabilir mi? Cevabını gerekçelendir.

Örnek 2

A, B ve C noktaları hem Σ_1 düzlemi hem de Σ_2 düzlemi üzerinde bulunuyorsa, buradan bu iki düzlemin çakışık olduğu sonucu çıkar mı? Cevabını gerekçelendir.

Çözüm:

Bu sonuç her zaman geçerli değildir. Çünkü A, B ve C noktaları doğrusal ise düzlemler çakışmaz, kesişir.

Soru 2

ABC ve ABD noktalarının belirlediği düzlemler birbirlerine göre hangi konumlarda bulunabilir?

İki Doğrunun Birbirlerine Göre Durumu

İki doğru a ve b :

- Ortak noktaya sahip olmayabilir, yani $a \cap b = \emptyset$;
- Yalnızca bir ortak noktaya sahip olabilir, yani $a \cap b = \{A\}$;
- Sonsuz sayıda ortak noktaya sahip olabilir, yani $a \cap b = \{A, B, C, \dots\}$.

Aşağıdaki teoremler iki doğrunun birbirlerine göre durumunu belirler:

T_7 : Eğer iki doğrunun en az iki ortak noktası varsa, bu doğrular çakışık doğrulardır. (nokta kümeleri olarak aynıdır diye de adlandırılır)

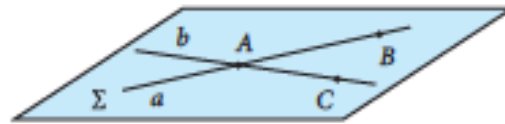
İspat: A ve B , hem a doğrusu hem de b doğrusu üzerinde bulunan iki farklı nokta olsun. A_3 aksiyomuna göre bu iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer. Bu doğru ne a doğrusundan ne de b doğrusundan farklı olabilir. Buna göre a ve b doğruları çakışık doğrulardır.

T_8 : İki farklı doğrunun birden fazla ortak noktası olamaz.

İspat: Eğer a ve b doğrularının birden fazla ortak noktası varsa, T_7 teoremine göre çakışık olurlar. Buna göre iki farklı a ve b doğrusunun kesişimi ya boş kümedir ya da yalnızca bir noktadan oluşur. İkinci durumda a ve b doğrularının kesiştiği söylenir ve $a \cap b = \{A\}$ şeklinde gösterilir.

T_9 : Kesişen iki doğru tek bir düzlem belirtir.

İspat: a ve b doğruları A noktasında kesişsin. A_1 aksiyomuna göre a doğrusu üzerinde A noktasından başka bir B noktası, b doğrusu üzerinde ise A noktasından başka bir C noktası vardır. A , B ve C noktaları doğrusal değildir. A_4 aksiyomuna göre bu üç nokta yalnız bir Σ düzlemi belirler (çizim 3). Eğer A , B ve C noktalarından geçen başka bir Σ_1 düzlemi de varsa, A_4 aksiyomuna göre Σ_1 ve Σ aynı nokta kümesini oluşturur; yani çakışık olurlar.



Çizim 3

Unutma!

Kesişen iki doğru her zaman aynı düzlem üzerinde bulunur.

Örnek 3

Bir doğru ile bu doğru üzerinde bulunmayan iki noktanın bir veya iki düzlem belirlediğini göster.

Çözüm:

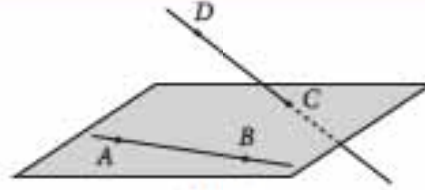
Verilen iki noktanın belirlediği doğru, verilen doğruyu kesiyorsa T_9 teoremine göre bu iki doğru bir düzlem belirler. Aksi durumda ise T_8 teoremine göre verilen doğru ile her bir nokta bir düzlem belirler. Böylece toplam iki düzlem elde edilir.

Soru 3

a ve b doğruları A noktasında kesişmektedir. a doğrusu Σ_1 düzlemi üzerinde, b doğrusu ise Σ_2 düzlemi üzerindedir. Σ_1 ve Σ_2 düzlemleri çakışık mıdır?

T_{10} : Aynı düzlem üzerinde bulunmayan doğrular vardır.

İspat: T_3 teoremine göre, aynı düzlem üzerinde bulunmayan en az dört A, B, C ve D noktası vardır. AB ve CD doğruları kesinlikle aynı düzlem üzerinde bulunmaz. Çünkü bu doğrulardan geçen bir düzlem olsaydı A, B, C ve D noktalarının tamamı bu düzlem üzerinde bulunurdu (çizim 4).



Çizim 4

Unutma!

- Kesişmeyen iki doğru ya paraleldir ya da aynı düzlem üzerinde bulunmaz.
- Aynı düzlem üzerinde bulunmayan iki doğruya *aykırı doğrular* denir.
- Aynı düzlem üzerinde bulunan, kesişmeyen ve çakışmayan (ortak noktası olmayan farklı iki doğru) a ve b doğrularına *paralel doğrular* denir ve $a \parallel b$ biçiminde gösterilir.

Soru 4

Σ düzlemi ile a ve b doğruları verilmiştir. a ve b doğruları A noktasında kesişiyor ve a doğrusu Σ düzlemi üzerinde bulunuyorsa, b doğrusu da Σ düzlemi üzerinde bulunabilir mi?

Soru 5

A ve B Σ düzleminin iki farklı noktası olsun. A noktasından geçen, Σ düzlemi üzerinde bulunan ve AB doğrusundan farklı sonsuz sayıda doğru olduğunu ispatla.

Soru 6

a doğrusu Σ düzlemi üzerinde bulunmasın ve $a \cap \Sigma = \emptyset$ olsun. a doğrusunun Σ düzlemine paralel olduğunu ispatla ve a doğrusunu içeren, Σ düzlemine paralel bir Π düzleminin bulunduğunu göster.

Alıştırma Soruları!

1. Her Σ düzlemi üzerinde en az bir a doğrusu ve $A \notin a$ olacak şekilde en az bir A noktası bulunduğunu ispatla.
2. Her Σ düzlemi için, bu düzlemi delen en az bir doğrunun bulunduğunu göster.
3. Σ düzlemi üzerinde bulunan A noktasından, Σ düzlemi üzerinde bulunan sonsuz sayıda doğru geçtiğini ispatla.
4. Σ_1 ve Σ_2 iki farklı düzlem ve $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ olsun. Her iki düzlemi de delen en az bir doğru bulunduğunu ispatla.
5. a doğrusu ve Σ düzlemi verilmiştir. $a \cap \Sigma = \Sigma$ olmasının mümkün olup olmadığını belirle.
6. a doğrusu Σ düzlemini delmektedir. Σ düzlemi üzerinde a doğrusuna paralel bir doğru bulunur mu?
7. İki farklı paralel doğrunun bir ve yalnız bir düzlem belirlediğini göster.
8. ABM ve ADN noktalarının belirlediği düzlemler birbirlerine göre hangi konumlarda bulunabilir?
9. Verilen bir a doğrusundan sonsuz sayıda düzlem geçtiğini ispatla.

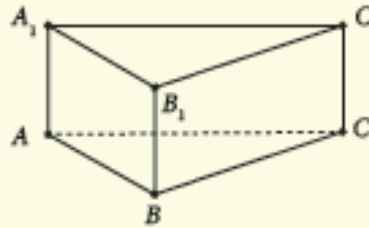
5.9 PRİZMA. PRİZMANIN DÜZLEMLE KESİTLERİ

Üç boyutlu geometrik cisimlerin ve bunların bir düzlemle oluşturduğu kesitlerin incelenmesi büyük önem taşır ve geniş uygulama alanına sahiptir. Bir uzay cisminin (prizma, piramit, silindir, koni vb.) bir düzlemle kesiti, cismin ve düzlemin ortak kısmından oluşan düzlemsel şekildir. Bu kesitlerin incelenmesi, uzay cisminin iç yapısının, biçiminin ve özelliklerinin daha iyi anlaşılmasını sağlar.

Düzlem kesitlerinin bilinmesi; mimarlıkta, inşaat mühendisliğinde, makine mühendisliğinde ve teknik çizimde önemli bir uygulama alanına sahiptir. Kesitler sayesinde cisimlerin görünmeyen bölümleri gösterilir, yapılar incelenir ve doğru teknik çizimler hazırlanır.

Hatırla!

- Çizim 1'de dik üçgen prizma gösterilmiştir.
- Tabanların bulunduğu düzlemlerin birbirlerine göre konumu nasıldır?
- Prizmanın taban ayrıtları hangileridir, yan ayrıtları hangileridir?
- Prizmanın yan yüzleri neyi oluşturur?



Çizim 1

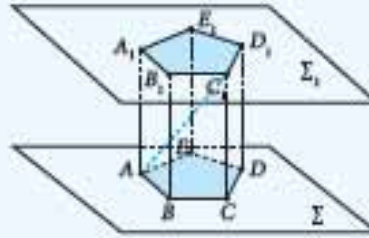
Unutma!

- Yalnızca çokgenlerden oluşan yüzlerle sınırlanmış üç boyutlu cisimlere *ayrıtlı üç boyutlu (3B) cisimler* veya *çokyüzlüler* denir.
- Çokyüzlünün yüzeyini oluşturan bölgelere *yüz*, bunların kenarlarına *ayrıt*, köşelerine ise çokyüzlünün *köşeleri* denir.

Her çokyüzlünün her köşesinde en az üç ayrıt birleşir ve her ayrıt, çokyüzlünün yalnız iki yüzünün ortak kenarındır.

Unutma!

- **Prizma**; iki paralel düzlem üzerinde bulunan eş çokgenlerle sınırlanmış ve diğer yüzleri, bu iki çokgenin her biriyle birer ortak kenara sahip paralelkenarlardan oluşan çokyüzlüdür. (çizim 2)
- Paralel düzlemler üzerinde bulunan iki yüze **tabanlar**, diğer yüzlere ise **yan yüzler** denir. Bütün yan yüzler birlikte prizmanın **yan yüzeyini** oluşturur. Tabanların kenarlarına **taban ayrıtları**, diğer bütün ayrıtlara ise prizmanın **yan ayrıtları** denir.
- Tabanlar arasındaki uzaklığa prizmanın **yüksekliği** denir.
- Uç noktaları, prizmanın aynı yüzü üzerinde bulunmayan iki köşesi olan doğru parçasına **uzay köşegeni** veya kısaca **prizmanın köşegeni** denir.
- Tabanındaki kenar (köşf) sayısına bağlı olarak prizma; üçgen prizma, dörtgen prizma, beşgen prizma vb. olabilir.



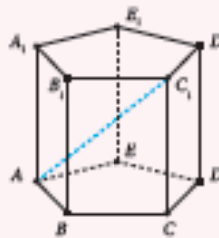
Çizim 2

Örnek 1

Çizim 3'te verilen beşgen prizmanın tabanlarını, yan yüzlerini, taban ayrıtlarını, yan ayrıtlarını ve uzay köşegenlerini yaz.

Çözüm:

- Prizmanın tabanları, Σ ve Σ_1 paralel düzlemleri üzerinde bulunan $ABCDE$ ve $A_1B_1C_1D_1E_1$ beşgenleridir.
- Diğer yüzler yan yüzlerdir: ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , CDD_1C_1 , DEE_1D_1 , EAA_1E_1 .
- Taban ayrıtları şunlardır: AB , BC , CD , DE , EA , A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , D_1E_1 , E_1A_1 .
- Yan ayrıtlar şunlardır: AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , EE_1 .
- Prizmanın uzay köşegenleri şunlardır: AC_1 , AD_1 , BD_1 , BE_1 , CE_1 , CA_1 , DA_1 , DB_1 , EB_1 , EC_1 .



Çizim 3

Unutma!

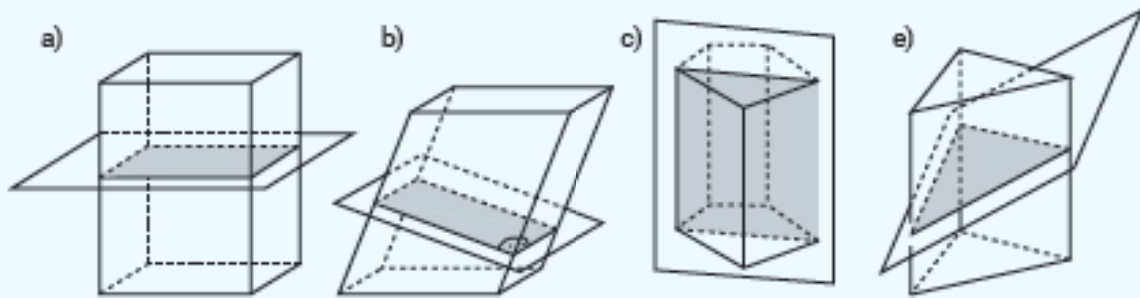
- Bir prizmanın yan ayrıtları taban düzlemine dik ise bu prizmaya *dik prizma*, taban düzlemine dik olmayan prizmalara ise *eğik prizma* denir.
- Tabanları düzgün çokgenlerden oluşan dik prizmaya *düzgün prizma* denir.

Soru 1

- Dik prizmanın yan yüzleri hangi tür dörtgenlerdir?
- Düzgün prizmanın yan yüzleri birbirleriyle nasıl bir ilişki içindedir?
- Bir prizmanın yan yüzlerinden biri dikdörtgen ise, diğer yan yüzleri de dikdörtgen olmak zorunda mıdır?

Unutma!

- Bir 3B cisim ile bir düzlemin ortak kısmı, cismin iç noktalarını da içeriyorsa bu ortak kısma *3B cismin düzlemle kesiti* denir.
- Düzlem Σ 'nın *prizmaya göre konumuna* bağlı olarak aşağıdaki kesit türleri ayrıt edilir:
 - *Paralel kesit*: Σ düzlemi prizmanın tabanlarına paralel ise (çizim 4a).
 - *Normal kesit*: Σ düzlemi prizmanın yan ayrıtlarına dik ise (çizim 4b).
 - *Köşegen kesit*: Σ düzlemi prizmanın komşu olmayan iki yan ayrıtından geçiyorsa (çizim 4c).
 - *Eğik kesit*: Σ düzlemi prizmanın bütün yan ayrıtlarını kesiyor ve tabanlara paralel değilse (çizim 4e).



Çizim 4

Soru 2

- Altıgen prizmanın paralel kesiti nasıl bir çokgendir? Bu kesit ile tabanlar arasındaki ilişki hakkında ne söylenebilir?
- Dik altıgen prizmanın köşegen kesiti nasıl bir çokgendir? Peki, bu kesit herhangi bir dik n -gen prizma için nasıl bir çokgendir?
- Herhangi bir eğik prizmanın köşegen kesiti nasıl bir çokgendir?
- Dik altıgen prizmanın normal kesiti nasıl bir çokgendir?

Örnek 2

Boyutları $a = 2$ cm, $b = 3$ cm ve $c = 6$ cm olan dikdörtgenler prizmasının köşegen uzunluğunu belirle. Sonucu GeoGebra yazılımında doğrula.

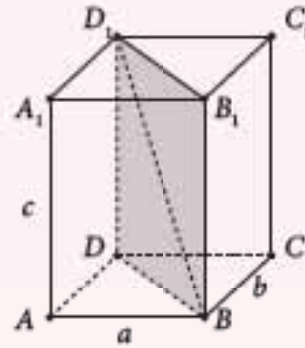
Çözüm:

Dikdörtgenler prizmasının dört uzay köşegeni birbirine eşittir, tek bir noktada kesişir ve bu nokta tarafından iki eş parçaya ayrılır.

Çizim 5'te BD_1 uzay köşegeni gösterilmiştir. Bu köşegen, BB_1D_1D köşegen kesitinin köşegenidir. Bu nedenle $\triangle BDD_1$ dik üçgeninde Pisagor Teoremine göre, $\overline{BD_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DD_1}^2$ elde edilir.

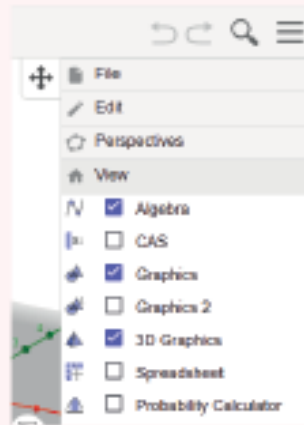
Ayrıca $\triangle ABD$ dik üçgeninden $\overline{BD}^2 = a^2 + b^2$ ve $\overline{DD_1}^2 = c^2$ olduğundan, bunlar $\overline{BD_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DD_1}^2$ eşitliğinde yerine yazılırsa, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Buna göre, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$ cm.

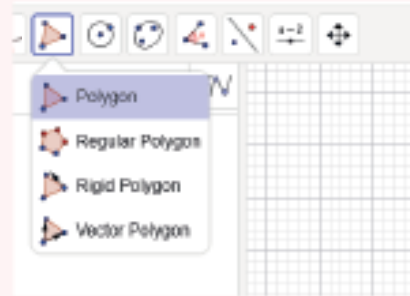


Çizim 5

Öncelikle ana menüden (sağ üst köşedeki üç çizgi) "View" seçilir, ardından "3D Graphics" etkinleştirilir (resim 1a). Daha sonra 2B çalışma alanı seçilerek 2B araçları etkinleştirilir ve "Polygon" seçilir (resim 1b).



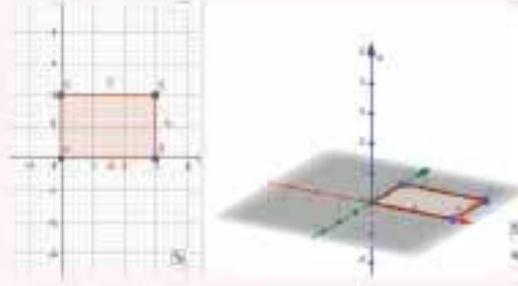
a)



b)

Resim 1

Kenar uzunlukları 3 cm ve 2 cm olan bir dikdörtgen oluşturacak şekilde dört nokta seçilir (resim 2).



Resim 2

Daha sonra 3B penceresi seçilerek 3B araçları etkinleştirilir ve "Extrude to Prism" seçilir (resim 3a). 3B penceresinde dikdörtgen (taban) seçilir. Açılan pencerede prizmanın yüksekliği girilir (resim 3b).



a)



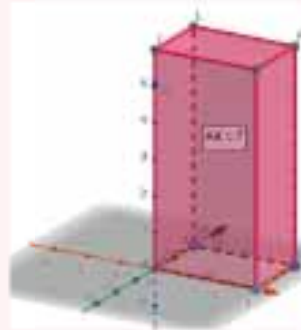
b)

Resim 3

Son olarak köşegen uzunluğunu ölçmek için "Distance or Length" seçilir (resim 4a). Önce A, ardından K köşesi seçilir ve prizmanın köşegen uzunluğunun $AK = 7$ cm olduğu elde edilir (resim 4b).



a)



b)

Resim 4

Unutma!

Kenar uzunlukları a , b ve c olan dikdörtgenler prizmasının köşegen uzunluğu $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ formülüyle hesaplanır.

Soru 3

Taban ayrıtı 7 cm olan bir küpün köşegen uzunluğunu belirle. Sonucu GeoGebra ile doğrula.

Örnek 3

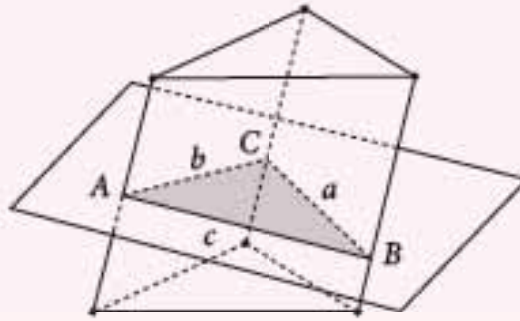
Eğik üçgen prizmanın yan ayrıtları arasındaki uzaklıklar 13 cm, 14 cm ve 15 cm ise normal bir kesitinin alanını hesapla.

Çözüm:

Eğik üçgen prizmada normal kesit, kenarları yan ayrıtlar arasındaki uzaklıklara eşit olan $\triangle ABC$ üçgenidir (çizim 6). Üçgen çeşitkenar olduğundan alanı Heron formülü kullanılarak hesaplanacaktır.

Öncelikle $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$, hesaplanır. Daha sonra bu değer alan formülünde yerine yazılır ve

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2 \text{ elde edilir:}$$



Çizim 6

Soru 4

Düzgün dörtgen prizmanın uzay köşegeni 25 cm, yan yüzünün köşegeni ise 20 cm'dir. Prizmanın yüksekliğini bul.

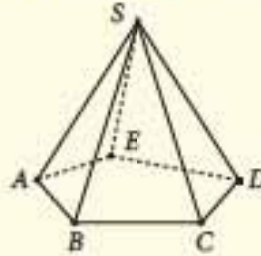
Alıştırma Soruları!

- Aşağıdaki prizmaların kaç köşesi, yüzü, taban ayrıtı ve yan ayrıtı vardır?
a) Üçgen prizma b) Dörtgen prizma c) n -gen prizma
- Boyutları 4 cm, 6 cm ve 12 cm olan dikdörtgenler prizmasının köşegen uzunluğunu belirle. Sonucu GeoGebra ile doğrula.
- Düzgün dörtgen prizmanın yüksekliği 12 cm, yan yüzünün köşegeni ise 20 cm'dir. Taban ayrıtının uzunluğunu belirle.
- Düzgün dörtgen prizmanın uzay köşegeni $\sqrt{194}$ cm, yan yüzünün köşegeni ise 13 cm'dir. Prizmanın yüksekliğini belirle.
- Eğik prizmanın tabanı, köşegenleri 24 cm ve 10 cm olan bir eşkenar dörtgendir. Prizmanın bir paralel kesitinin çevresini ve alanını belirle.

5.10 PİRAMİT. DÜZLEMLE PİRAMİDİN KESİTLERİ

Hatırla!

Çizim 1'de gösterilen beşgen piramidin tabanı hangi 2B şekildir, yan yüzleri hangi 2B şekillerdir?

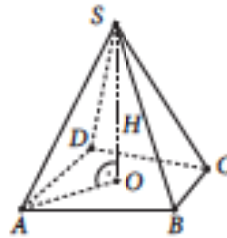


Çizim 1

Unutma!

- Piramit; bir dışbükey çokgen ve diğer yüzleri ortak bir köşeye sahip üçgenlerden oluşan çokyüzlüdür.
- Çokgene **taban**, üçgenlere **yan yüzler**, bunların ortak köşesine ise piramidin **tepesi** denir.
- Piramidin tepesinden taban düzlemine bir dikme çizildiğinde, piramidin tepesi ile dikmenin ayağı arasındaki doğru parçasının uzunluğuna piramidin yüksekliği denir ve H ile gösterilir.

Çizim 2'de tabanı $ABCD$ ve tepesi S olan $SABCD$ piramidi verilmiştir. Piramidin yüksekliği $H = \overline{SO}$.



Çizim 2

Unutma!

- Tabanının türüne göre piramit; üçgen piramit, dörtgen piramit, beşgen piramit, ... olabilir.
- Üçgen piramide **tetrahedron** da denir ve bu cisimde herhangi bir yüz taban olarak alınabilir. Yüzleri eşkenar üçgenlerden oluşan tetrahedrona **düzgün dörtyüzlü (tetrahedron)** denir.

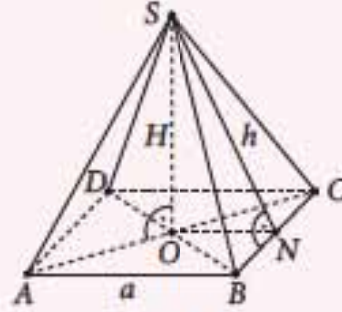
Unutma!

Tabanı düzgün çokgen olan ve yan ayrıtları birbirine eşit olan piramide **düzgün piramit** denir.

Örnek 1

Çizim 3'te düzgün dörtgen piramit $SABCD$ gösterilmiştir.

- Yan yüzler nasıl üçgenlerdir ve birbirleriyle nasıl bir ilişki içindedir?
- Düzgün piramidin tepesi S 'nin taban üzerindeki dik izdüşümü O neyi ifade eder?



Çizim 3

Çözüm:

- Yan yüzler birbirine eş olan ikizkenar üçgenlerdir.
- Tepe noktasının dik izdüşümü, tabanın köşegenlerinin kesişim noktasıdır; yani $ABCD$ karesinin çevrel çemberinin merkezi ile içteğet çemberinin merkezini ifade eder.

Unutma!

Düzgün piramidin yan yüzünde, tepeden indirilen yüksekliğe **yan yüz yüksekliği** veya **piramidin apotemi** denir.

Çizim 3'te verilen $\triangle SON$ dik üçgeninden yükseklik H , apotem h ve taban ayrıtı a arasındaki ilişki bulunabilir.

Buna göre $\triangle SON$ üçgeninin dik kenarları $\overline{ON} = \frac{a}{2}$ ve $\overline{SO} = H$, hipotenüsü ise $\overline{SN} = h$ olur. Pisagor Teoremi

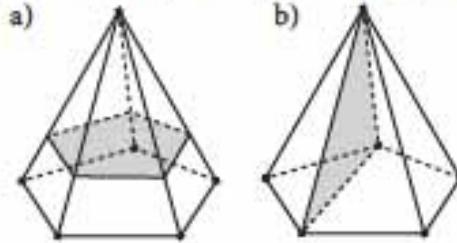
uygulanırsa $h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$ elde edilir.

Unutma!

Düzgün dörtgen piramitte yükseklik H , apotem h ve taban ayrıtı a arasındaki ilişki $h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$ şeklindedir.

Σ düzleminin piramide göre konumuna bağlı olarak aşağıdaki kesit türlerini ayırt ederiz:

- **paralel kesit**, Σ düzlemi piramidin tabanına paralel ise (çizim 4a)
- **köşegen kesiti**, Σ düzlemi piramidin komşu olmayan iki yan ayrıtındandır (çizim 4b).



Çizim 4

Piramidin bir düzlemle paralel kesitleri için aşağıdaki teorem geçerlidir.

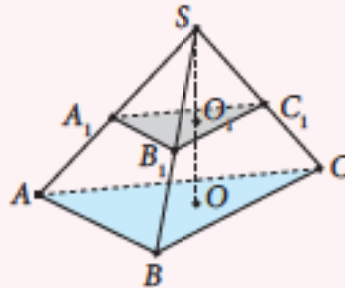
- 1) Her paralel kesit, piramidin yan ayrıtlarını ve yüksekliğini orantılı doğru parçalarına ayırır.
- 2) Her paralel kesit ile piramidin tabanı benzer çokgenlerdir.
- 3) Verilen paralel kesitin alanı ile tabanın alanı, bunların piramidin tepesine olan uzaklıklarının kareleri oranındadır.

Örnek 2

Bir üçgen piramidin yüksekliği 20 cm, tabanının alanı ise 600 cm^2 'dir. Tabandan 4 cm uzaklıkta bulunan paralel kesitin alanı kaçtır?

Çözüm:

Piramidin yüksekliğini $H = \overline{SO}$, paralel kesitin piramidin tepesine olan uzaklığını $H_1 = \overline{SO_1}$, tabanın alanını Q , paralel kesitin alanını ise Q_1 ile gösterelim (çizim 5'e bakınız). Sorunun koşullarına göre $H = 20 \text{ cm}$, $Q = 600 \text{ cm}^2$ ve piramidin tabanı ile paralel kesiti arasındaki uzaklık $H - H_1 = 4 \text{ cm}$ 'dir. Buradan H_1 için $H_1 = H - 4 = 20 - 4 = 16 \text{ cm}$ elde edilir. Önceki teoremin 3. maddesine göre $Q_1 : Q = H_1^2 : H^2$ olur. Son eşitlikte Q , H ve H_1 değerleri yerine yazılırsa $Q_1 : 600 = 16^2 : 20^2$ elde edilir ve buradan $400 \cdot Q_1 = 256 \cdot 600$, yani $Q_1 = \frac{256 \cdot 600}{400} = 384 \text{ cm}^2$.



Çizim 5

Örnek 3

Taban ayrıtı 18 cm ve yan ayrıtı 15 cm olan düzgün dörtgen piramidin köşegen kesitinin alanını ve apotemini hesapla.

Çözüm:

Aşağıdaki elemanları gösterelim: Q – köşegen kesitinin alanı, a – taban ayrıtı, s – yan ayrıt. Sorunun koşullarına göre $a = 18$ cm, $s = 15$ cm'dir.

$\triangle SNC$ dik üçgeninden Pisagor Teoremine göre apotem için

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm elde edilir.}$$

Benzer şekilde, $\triangle SON$ dik üçgeninden

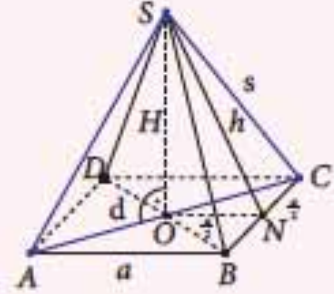
$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{144 - 81} = \sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = 3\sqrt{7} \text{ cm elde edilir.}$$

Köşegen kesiti, alanı $Q = \frac{d \cdot H}{2}$, formülüyle hesaplanacak olan $\triangle SAC$ üçgenidir. Burada d taban köşegeninin uzunluğudur. d uzunluğunu $\triangle ABC$ dik üçgeninden belirleyeceğiz. Buna göre,

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2 \cdot a^2} = \sqrt{2 \cdot 18^2} = \sqrt{2 \cdot 324} = 18\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Son değer, köşegen kesitinin alan formülünde yerine yazılırsa

$$Q = \frac{18\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{7}}{2} = \frac{54\sqrt{14}}{2} = 27\sqrt{14} \text{ cm}^2 \text{ elde edilir.}$$



Soru 1

Bir üçgen piramidin yüksekliği 15 cm, tabanının alanı ise 450 cm^2 'dir. Tabandan 5 cm uzaklıkta bulunan paralel kesitin alanı kaçtır?

Alıştırma Soruları!

1. Taban ayrıtı 20 cm ve köşegen kesitinin alanı 200 cm^2 olan düzgün dörtgen piramit verilmiştir. Piramidin yüksekliğini belirle.
2. Yüksekliği 24 cm olan bir piramidin taban alanı 800 cm^2 'dir. Alanı 200 cm^2 olan paralel kesit, tabandan hangi uzaklıkta bulunur?
3. Yüksekliği 12 cm ve taban ayrıtı 10 cm olan düzgün dörtgen piramidin apotemini hesapla.
4. Yüksekliği 15 cm ve apotemi 17 cm olan düzgün dörtgen piramidin taban ayrıtını hesapla.

5.11 SİLİNDİR. SİLİNDİRİN DÜZLEMLE KESİTLERİ

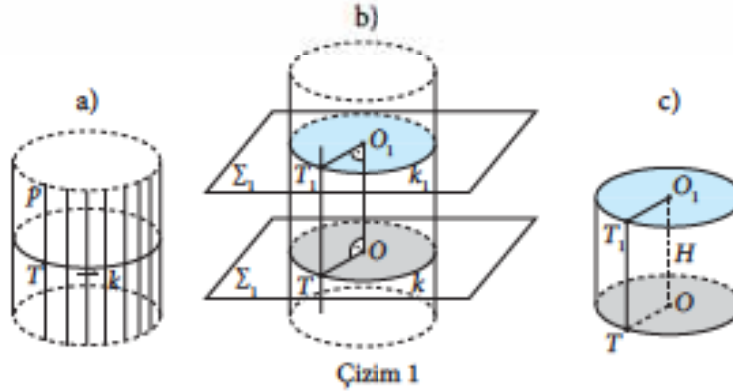
Hatırla!

- Silindir biçiminde olan birkaç nesne say.
- Bir silindirin bir düzlemle kesilmesi sonucunda hangi 2B şekil elde edilebilir?

k çemberi ve bu çember üzerinde rastgele bir T noktası verilmiş olsun. T noktasından, çemberin bulunduğu düzleme dik olan p doğrusu çizilsin ve bu doğrunun, bulunduğu düzleme dik kalacak şekilde çember boyunca hareket ettiğini düşünelim (çizim 1a).

Bu şekilde hareket eden p doğrusu, **silindirik yüzey** adı verilen eğri bir yüzey oluşturur. Hareket eden p doğrusuna **ana doğru** (*generatris-olusturucu doğru*), üzerinde hareket ettiği çembere ise silindirik yüzeyin **taban çemberi** (*doğrultucu - taban eğrisi*) denir.

Silindirik yüzey, çemberin bulunduğu düzleme paralel olan Σ ve Σ_1 düzlemleriyle kesilirse (çizim 1b), merkezleri O ve O_1 olan iki daire elde edilir. Bu daireler ile silindirik yüzeyin iki düzlem arasında kalan kısmı birlikte **dik dairesel silindir** veya kısaca **silindir** adı verilen bir 3B cisim oluşturur (çizim 1c).



Silindirin elemanları şunlardır:

Tabanlar – iki daire.

Yanal yüzey (*yan yüz*) – silindirik yüzeyin tabanlar arasında kalan kısmı.

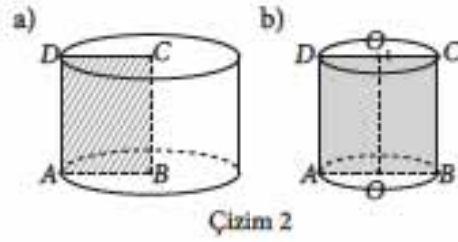
Eksen – O ve O_1 taban merkezlerinden geçen doğru.

Yükseklik – tabanlar arasındaki uzaklıktır ve H ile gösterilir.

Taban yarıçapları – OT ve O_1T_1 doğru parçalarıdır ve uzunlukları eşittir.

Ana doğru- Generatris (*olusturucu doğru*) – TT_1 doğru parçasıdır ve silindirin yan yüzeyini oluşturur.

Silindir, bir dikdörtgenin kenarlarından biri etrafında veya simetri eksenlerinden biri etrafında döndürülmesiyle de elde edilebilir. Bu nedenle silindir, **dönel bir 3B cisimdir**. Çizim 2a'da silindir, $ABCD$ dikdörtgeninin BC kenarı etrafında döndürülmesiyle; çizim 2b'de ise $ABCD$ dikdörtgeninin OO_1 simetri eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilmiştir.



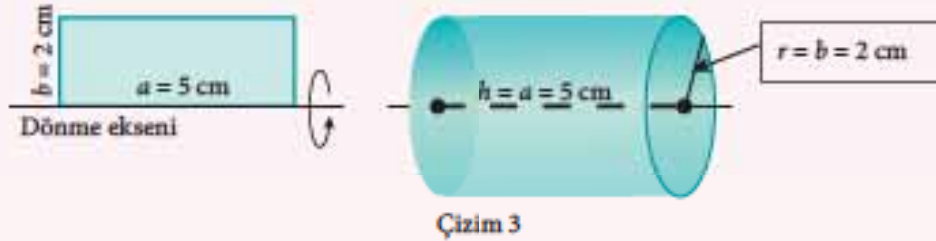
Örnek 1

Kenarları $a = 5$ cm ve $b = 2$ cm olan bir dikdörtgen, a kenarı etrafında dönmektedir. Bu dönme sonucunda hangi 3B cisim elde edilir?

Çözüm:

Bir dikdörtgenin kenarlarından biri etrafında döndürülmesiyle silindir elde edilir (çizim 3).

Dikdörtgen a kenarı etrafında döndüğünden, çizim 3'ten silindirin taban yarıçapının $r = b = 2$ cm, silindirin yüksekliğinin ise $h = a = 5$ cm olduğu görülür.



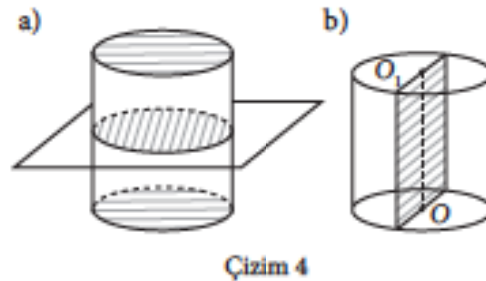
Soru 1

Kenarları $a = 3$ ve $b = 5$ olan bir dikdörtgen aşağıdakiler etrafında döndürüldüğünde elde edilen silindirin taban yarıçapı ve yüksekliği kaç olur?

- a kenarı;
- b kenarı;
- a kenarına dik olan ve bu kenarın orta dikmesi olan eksen.

Bir silindirin bir düzlemle kesiti aşağıdaki gibi olabilir:

- **Paralel kesit** – düzlem tabanlara paralel ise (çizim 4a),
- **Eksenel kesit** – düzlem silindirin ekseninden geçiyorsa (çizim 4b).



Çizim 4

Unutma!

- Bir silindirin düzlemle yapılan her paralel kesiti, yarıçapı silindirin taban yarıçapına eşit olan bir dairedir.
- Bir silindirin düzlemle yapılan her eksenel kesiti, kenar uzunlukları taban çapına ve silindirin yüksekliğine eşit olan bir dikdörtgendir.

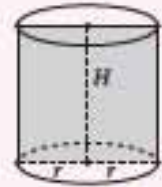
Örnek 2

Yüksekliği 6 cm ve taban yarıçapı 5 cm olan bir silindir verilmiştir. Silindirin eksenel kesitinin alanını belirle.

Çözüm:

Silindirin eksenel kesiti, kenarları taban çapı $d = 2 \cdot r = 2 \cdot 5 = 10$ cm ve yükseklik $H = 6$ cm olan bir dikdörtgendir. Buna göre eksenel kesitin alanı Q için

$$Q = d \cdot H = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2.$$



Çizim 5

Soru 2

Eksenel kesiti alanı 64 cm^2 olan bir kare ise, silindirin yarıçapını ve yüksekliğini belirle.

Unutma!

Eksenel kesiti kare olan, yani taban çapının uzunluğu, yüksekliğine eşit olan dik dairesel silindire eşkenar silindir denir.

Örnek 3

Bir eşkenar silindirin eksenel kesitinin alanı 16 cm^2 'dir. Silindirin yüksekliğini ve yarıçapını belirle.

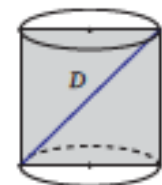
Çözüm:

Silindirin eşkenar olduğu koşulundan, eksenel kesitinin kare olduğu, yani $2r = H$ olduğu elde edilir. Buna göre eksenel kesitin alanı $P = H^2$ şeklinde ifade edilebilir. $P = 16 \text{ cm}^2$ yazılırsa $H^2 = 16$ elde edilir.

Buna göre $H=4\text{cm}$ olur. Diğer taraftan, $r = \frac{H}{2}$ eşitliğinden yarıçap $r = \frac{H}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$ olarak bulunur.

Soru 3

Yarıçapı 9 cm ve yüksekliği 24 cm olan bir silindirin eksenel kesitinin köşegen uzunluğunu D belirle (çizim 6).



Çizim 6

Örnek 4

Bir silindirin yüksekliği 7 cm, taban yarıçapı ise 13 cm'dir. Silindir, eksenine paralel ve eksenden 5 cm uzaklıkta bulunan bir düzlemle kesilmiştir. Elde edilen kesitin alanını belirle.

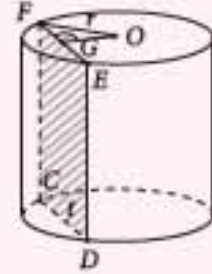
Çözüm:

Çizim 7'de düzlemle elde edilen kesit, kenarları $DE = H = 7$ cm ve $t = \overline{CD}$ olan $CDEF$ dikdörtgenidir.

FOG dik üçgeninde Pisagor Teoremi uygulanırsa $\overline{FO}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GO}^2$. Co elde edilir. $\overline{FO} = r = 13$ cm, $\overline{FG} = \frac{t}{2}$ ve $\overline{GO} = 5$ cm, değerleri yerine yazılırsa

$$13^2 = \left(\frac{t}{2}\right)^2 + 5^2 \text{ elde edilir.}$$

Buradan $\frac{t}{2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm, yani $t = 2 \cdot 12 = 24$ cm. Dikdörtgenin alan formülünden kesitin alanı $Q = t \cdot H = 24 \cdot 7 = 168$ cm elde edilir.



Çizim 7

Soru 4

Yüksekliği 12 cm olan bir silindir, eksenine paralel ve eksenden 6 cm uzaklıkta bulunan bir düzlemle kesilmiştir. Bu kesitin alanı 192 cm^2 olduğuna göre silindirin taban alanını hesapla.

Soru 5

Yüksekliği 8 cm olan bir silindir, eksenine paralel ve eksenden 4 cm uzaklıkta bulunan bir düzlemle kesilmiştir. Bu kesitin alanı 48 cm^2 olduğuna göre silindirin taban alanını hesapla.

Alıştırma Soruları!

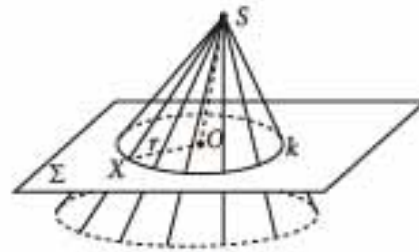
1. Yüksekliği 12 cm olan bir silindirin eksenel kesitinin alanı 96 cm^2 ise yarıçapını belirle.
2. Bir silindirin eksenel kesitinin alanı 196 cm^2 'dir. Taban yarıçapı 7 cm ise silindirin yüksekliğini belirle.
3. Yarıçapı 8 cm ve yüksekliği 15 cm olan bir silindirin eksenel kesitinin köşegenini belirle.
4. Yüksekliği 6 cm olan bir silindir, eksenine paralel ve eksenden 6 cm uzaklıkta bulunan bir düzlemle kesilmiştir. Bu kesitin alanı 96 cm^2 olduğuna göre silindirin taban alanını hesapla.
5. Bir silindirin taban alanı ile eksenel kesitinin alanı arasındaki oran $\pi : 4$ 'tür. Eksenel kesitin köşegenleri arasındaki açıyı bul.

5.12 KONİ. DÜZLEMLE KONİNİN KESİTLERİ

Hatırla!

Bir koninin bir düzlemle kesilmesi sonucunda hangi 2B şekil elde edilebilir?

Silindirin elde edilmesine benzer şekilde, 3B koni de oluşturulabilir.



Çizim 1

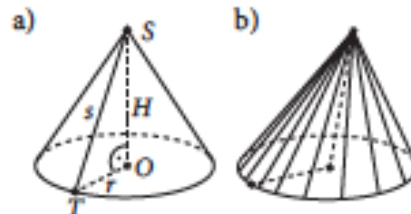
Σ düzleminde yarıçapı r olan k çemberi ve Σ düzlemi üzerinde bulunmayan S noktası verilmiş olsun. Çember üzerinde X noktası seçilsin ve SX ışını çizilsin. X noktasının, çizim 1'de gösterildiği gibi çember boyunca hareket ederek tüm çemberi dolaştığını düşünelim.

Bu şekilde eğri bir yüzey oluşur ve buna **konik yüzey** denir. Hareket eden SX ışınına **ana doğru (generatris-olusturucu doğru)**, çembere **taban çemberi (doğrultucu eğri)**, S noktasına **tepe**, SO doğrusuna ise konik yüzeyin **ekseni** denir.

Koni, konik yüzeyin düzlem tarafından kesilen daire ile bu daireye kadar uzanan konik yüzey parçasının sınırladığı uzay cisimidir.

Daireye **taban**, konik yüzeyin bu kısmına ise **koninin yanal yüzeyi** denir.

SO eksenini tabana dik ise bu cisme **dik koni** (çizim 2a), tabana dik değilse **eğik koni** (çizim 2b) denir.



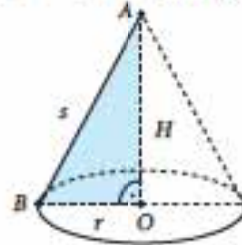
Çizim 2

Uygulamada yalnızca "koni" denildiğinde, bunun dik koni olduğu kabul edilir. Eğik koniden söz ediliyorsa bunun özellikle belirtilmesi gerekir.

Koninin **yüksekliği**, tepeden tabana olan en kısa (dik) uzaklıktır.

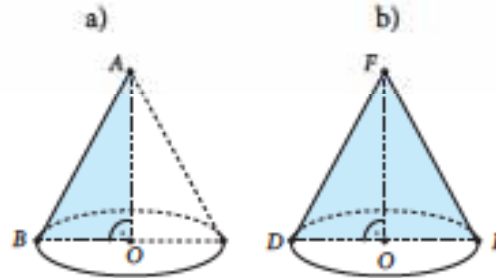
Ana doğru (Generatris), uç noktaları tepe S ile taban çemberi üzerindeki herhangi bir T noktası olan doğru parçasıdır. Dik konide bütün ana doğrular birbirine eşittir. Eğik konide ise ana doğrular birbirine eşit değildir. Taban yarıçapı r , yüksekliği H ve ana doğrusu (generatrisi) s , olan bir dik koni verildiğinde, çizim 3'te gösterildiği gibi karakteristik bir dik üçgen oluşur.

$\triangle BOA$ üçgeninden Pisagor Teoremine göre $s^2 = r^2 + H^2$ eşitliği elde edilir.



Çizim 3

Koni ayrıca bir dik üçgenin dik kenarlarından biri etrafında veya bir ikizkenar üçgenin simetri eksenini etrafında döndürülmesiyle de elde edilebilir. Bu nedenle koni de silindir gibi dönel bir cisimdir. Buna göre, çizim 4a'daki koni, $\triangle BOA$ dik üçgeninin OA dik kenarı etrafında döndürülmesiyle; çizim 4b'deki koni ise $\triangle DEF$ ikizkenar üçgeninin simetri eksenini olan OF doğru parçası etrafında döndürülmesiyle elde edilmiştir.



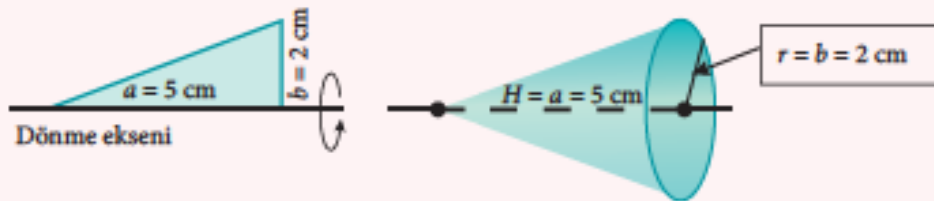
Çizim 4

Örnek 1

Dik kenarları $a = 5$ cm ve $b = 2$ cm olan bir dik üçgen, a kenarı etrafında dönmektedir. Bu dönme sonucunda hangi 3B cisim elde edilir?

Çözüm:

Bir dik üçgenin dik kenarlarından biri etrafında döndürülmesiyle koni elde edilir (çizim 5). Dik üçgen a kenarı etrafında döndüğünden, çizim 5'ten koninin taban yarıçapının $r = b = 2$ cm, yüksekliğinin ise $H = a = 5$ cm olduğu görülür.



Çizim 5

Soru 1

Dik kenarları $a = 3$ ve $b = 4$ olan bir dik üçgen aşağıdakiler etrafında döndürüldüğünde elde edilen koninin taban yarıçapı ve yüksekliği kaç olur?

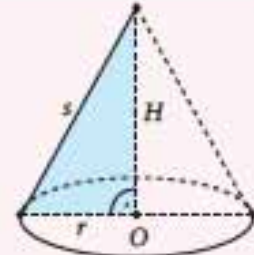
- a) a kenarı;
- b) b kenarı.

Örnek 2

Taban yarıçapı 16 cm ve generatrişi 34 cm olan bir koninin yüksekliğini belirle.

Çözüm:

Sorunun koşuluna göre $r = 16$ cm ve $s = 34$ cm'dir. $s^2 = r^2 + H^2$ eşitliğinden $H^2 = s^2 - r^2 = 34^2 - 16^2 = 1156 - 256 = 900$ elde edilir. Buradan yükseklik $H = \sqrt{900} = 30$ cm olur.



Çizim 6

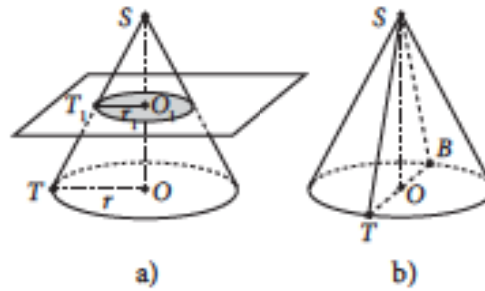
Soru 2

Yüksekliği 6 cm ve taban yarıçapı 8 cm olan bir koninin ana doğru (generatriş) uzunluğunu belirle.

Koninin bir düzlemle kesit türleri şunlardır:

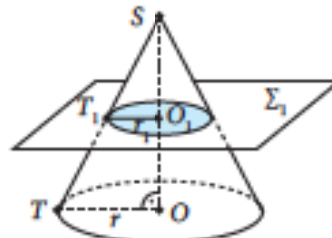
- **Paralel kesit** - düzlem koninin tabanına paralel ise (çizim 7 a);
- **Eksenel kesit** - düzlem koninin ekseninden geçiyorsa (çizim 7 b).

Çizim 7'den görülebileceği gibi, koninin düzlemle paralel kesitleri daire, eksenel kesitleri ise üçgendir.



Çizim 7

Çizim 8'de, tabanına paralel bir düzlemle kesilmiş dik koni gösterilmiştir.



Çizim 8

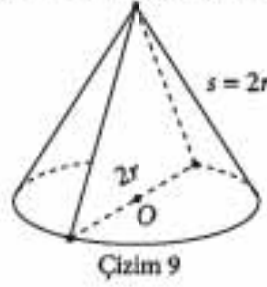
ΔTOS ve ΔT_1O_1S üçgenlerinin benzerliğinden $\overline{TO} : \overline{T_1O_1} = \overline{SO} : \overline{SO_1}$ oranı elde edilir. Her iki tarafın karesi alınırsa $\overline{TO}^2 : \overline{T_1O_1}^2 = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$ olur. Son eşitlikte $\overline{TO} = r^2$ ve $\overline{T_1O_1} = r_1^2$ yazılır ve sol taraftaki pay ile payda π ile çarpılırsa $r^2\pi : r_1^2\pi = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$ elde edilir.

Taban alanı B , paralel kesitin alanı B_1 ile gösterilirse $B = r^2\pi$, ve $B_1 = r_1^2\pi$ olur. Bunlar son eşitlikte yerine yazılırsa $B : B_1 = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$ elde edilir.

Koninin bir düzlemle paralel kesitleri için aşağıdaki teorem geçerlidir.

Taban alanı B ile paralel kesitin alanı B_1 , bunların koninin tepesine olan uzaklıklarının kareleri oranındadır. Bir koninin yüksekliği ve ana doğrusu (generatrisi), kesit tarafından aynı oranda bölünür.

Koninin eksenel kesiti eşkenar üçgen ise, yani $s = 2r$ ise bu koniye *eşkenar koni* denir (çizim 9).

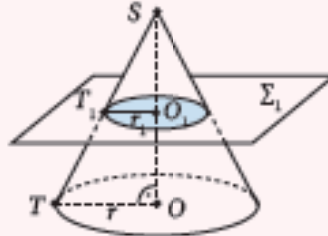


Çizim 9

Örnek 3

Yüksekliği 16 cm olan bir koninin taban alanı 64 cm^2 'dir. Tepe noktasından 6 cm uzaklıkta bulunan paralel kesitin alanını belirle.

Çözüm:



Çizim 10

Çizim 10'da $H = \overline{SO}$ ve $H_1 = \overline{SO_1}$ ile gösterilsin. Sorunun koşuluna göre $B = 64 \text{ cm}$, $H = 16 \text{ cm}$ ve $H_1 = 6 \text{ cm}$ 'dir. $B : B_1 = H^2 : H_1^2$ bağıntısı kullanılırsa $64 : B_1 = 16^2 : 6^2$ elde edilir. Buradan

$$B_1 = \frac{64 \cdot 36}{256} = 9 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Soru 3

Bir koninin yüksekliği 10 cm, taban yarıçapı ise $r = 8 \text{ cm}$ 'dir. Koninin paralel kesiti, yarıçapı 2 cm olan bir dairedir. Bu kesitin koninin tepesinden ne kadar uzaklıkta olduğunu belirle.

Örnek 4

Yüksekliği 24 cm ve generatrişi 26 cm olan bir koninin eksenel kesitinin alanını hesapla.

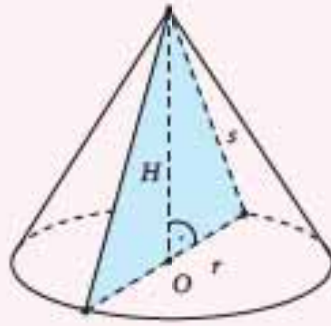
Çözüm:

Sorunun koşuluna göre $s = 26$ cm ve $H = 24$ cm'dir. Buna göre Pisagor Teoreminden (çizim 11)

$$r^2 = s^2 - H^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100 \text{ elde edilir.}$$

Buradan $r = \sqrt{100} = 10$ cm bulunur. Eksenel kesitin alanı Q

$$Q = \frac{2r \cdot H}{2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 24}{2} = 240 \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$



Çizim 11

Soru 4

Taban yarıçapı 5 cm olan bir dik koninin eksenel kesiti, dik açısı koninin tepe noktasında bulunan bir dik üçgendir. Eksenel kesitin alanını hesapla.

Alıştırma Soruları!

1. Eşkenar bir koninin eksenel kesitinin çevresi 30 cm'dir. Bu eksenel kesitin alanını hesapla.
2. Bir koninin taban alanı 50 cm^2 , tepe noktasından 10 cm uzaklıkta bulunan paralel kesitinin alanı ise 18 cm^2 'dir. Koninin yüksekliğini belirle.
3. Yüksekliği 15 cm ve eksenel kesitinin çevresi 60 cm olan koninin yarıçapını belirle.
4. Yüksekliği 18 cm ve taban yarıçapı 6 cm olan bir koninin paralel kesitlerinden birinin alanı $16\pi \text{ cm}^2$ 'dir. Kesitin tabana olan uzaklığını belirle.
5. Taban yarıçapı 9 cm olan bir koninin paralel kesiti, yüksekliği tepeden tabana doğru 3 : 2 oranında bölmektedir. Paralel kesitin alanını hesapla.

TEKRAR VE PEKİŞTİRME SORULARI

1. Aşağıdaki açıları dereceden radyana dönüştür:
a) 300° ; b) 150° .
2. Aşağıdaki açıları radyandan dereceye dönüştür:
a) $\frac{7\pi}{6}$ rad; b) 1,7 rad.
3. Aşağıda verilen değerlere göre diğer trigonometrik fonksiyonların değerlerini bul:
a) $\cos \alpha = \frac{24}{25}$; b) $\sin \alpha = \frac{7}{24}$; c) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$.
4. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$ olduğuna göre $\frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha}$ ifadesinin değerini belirle.
5. $a : c = 9 : 41$ olduğuna göre, dik üçgenin dar açısının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini belirle.
6. Aşağıdakiler verildiğine göre α 'nın değerini belirle:
a) $\sin(\alpha + 50^\circ) = \cos(\alpha + 10^\circ)$; b) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \operatorname{ctg}(3\alpha - \frac{\pi}{3})$.
7. İfadeyi sadeleştir: $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{4 - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2 \cos \alpha - \sin \alpha - 1}{1 - \cos \alpha} + \frac{3 \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.
8. Bir spor sahasında çocuk festivali düzenlenmektedir. Fotoğraf çekimi için sahanın üzerinde büyük ve renkli bir balon yükselmektedir. Bir kişinin bulunduğu yerden balon $47^\circ 15'$ açıyla görülmektedir ve kişi ile balonun tam altındaki yer noktası arasındaki uzaklık 3 km'dir. Balonun yerden hangi yükseklikte bulunduğunu hesapla.
9. Bir uçak, yatayla 6° açı yaparak havaalanına doğru alçalmaya başlamaktadır. Piste olan yatay uzaklığı 950 metre ise uçağın yüksekliği kaçtır?
10. Bir erişim rampasının yatayla yapmasına izin verilen en büyük açı 6° 'dir. 0,6 m'lik yükseklik farkını aşmak için rampanın uzunluğu ne kadar olmalıdır?
11. Yerden 12 m yüksekliğindeki dik bir direğin tepesi ile zemin arasına bir kablo gerilmiştir. Kablo yatay zeminle 30° açı yapıyorsa uzunluğu kaçtır?
12. Beş farklı noktadan tam üçü doğrusal, diğer ikisi ise bu doğru üzerinde değildir. Kaç farklı doğru belirlenir?
13. Uzayda bulunan beş noktayla belirlenen düzlem sayısının 1, 5, 7 veya 10 olabileceğini göster.
14. Yüksekliği 20 dm, taban alanı 32 dm^2 ve kesit alanı 8 dm^2 olan bir piramitte paralel kesit, piramidin tepesinden hangi uzaklıkta yapılmıştır?
15. Düzgün dörtgen prizmanın taban köşegeninin uzunluğu cm, yan yüzünün köşegeninin uzunluğu ise 5 cm'dir. Prizmanın uzay köşegeninin uzunluğunu hesapla.
16. Taban ayrıtı 16 cm ve yan ayrıtı 10 cm olan düzgün dörtgen piramidin köşegen kesitinin alanını ve yan yüz yüksekliğini (apotemini) hesapla.

17. Köşegeni 15 cm ve yan yüzünün köşegeni 12 cm olan düzgün dörtgen prizmanın yüksekliğini belirle.
18. Bir dörtgen piramidin taban ayrıtı $10\sqrt{2}$ cm ve yan ayrıtı 13 cm'dir. Piramidin apotemini ve köşegen kesitinin alanını belirle.
19. Yüksekliği 15 cm olan bir piramidin taban alanı 450 cm^2 'dir. Tabandan 5 cm uzaklıkta bulunan paralel kesitin alanını hesapla.
20. Yüksekliği 15 cm ve taban yarıçapı 10 cm olan bir silindir, eksenine paralel ve eksenden 6 cm uzaklıkta bulunan bir düzlemle kesilmiştir. Elde edilen kesitin alanını belirle.
21. Koninin tabanından 3 cm uzaklıkta bulunan paralel kesitin alanını belirle. Koninin taban alanı 144 cm^2 , yüksekliği ise 12 cm'dir.
22. Bir koninin yüksekliği 15 cm ve taban yarıçapı 12 cm'dir. Koninin paralel kesitlerinden birinin yarıçapı 4 cm ise bu kesitin koninin tabanından ne kadar uzakta bulunduğunu belirle.
23. Taban alanı 75 cm^2 olan bir koninin, tepe noktasından 8 cm uzaklıkta bulunan paralel kesitinin alanı 48 cm^2 'dir. Koninin yüksekliğini hesapla.
24. Yüksekliği 12 cm olan ve eksenel kesitinin çevresi 36 cm olan bir koninin eksenel kesit alanını ve yarıçapını belirle.
25. Yarıçapı 8 cm olan bir dik dairesel koninin eksenel kesiti, dik açısı koninin tepe noktasında bulunan bir dik üçgendir. Eksenel kesitin alanını hesapla.
26. Yarıçapı 12 cm olan bir koninin paralel kesiti, yüksekliği tepe noktasından tabana doğru 1 : 3 oranında böler. Bu paralel kesitin alanını belirle.

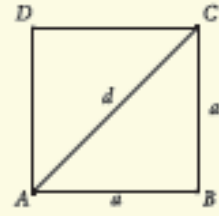
ÖLÇME

Bu konuda düzlemsel (2B) şekillerin çevresi ve alanı ile uzamsal (3B) şekillerin yüzey alanı ve hacmi incelenir. Bu kavramlar, nesnelerin büyüklüğünü açıklayan temel ölçülerdir: ne kadar yer kapladıkları, yapımları için ne kadar malzeme gerektiği veya ne kadar yüzeyin kaplanması gerektiği gibi. Bu bilgilerin uygulanması günlük yaşamda sıkça görülür: duvarlar için boya miktarının, bahçe için çitin, arazinin alanının, kapların veya depoların kapasitesinin hesaplanmasında kullanılır. Uygulamalı ve STEM sorularını çözme yoluyla öğrenciler, gerçek durumları matematiksel formüllerle modelleme, mantıklı düşünme ve matematiği mühendislik, mimarlık, teknoloji ve bilimle ilişkilendirme becerileri geliştireceklerdir.

6.1 KARE VE DİKDÖRTGENİN ÇEVRESİ VE ALANI

Hatırla!

Kenar uzunluğu a olan bir karenin çevresi $L = 4a$, formülüyle hesaplanırken, alanı $P = a^2$ formülüyle hesaplanır.



Çizim 1

Örnek 1

Alanı 25 cm^2 olan bir karenin köşegen uzunluğunu hesapla. Çözüm GeoGebra ile kontrol edilsin.

Çözüm:

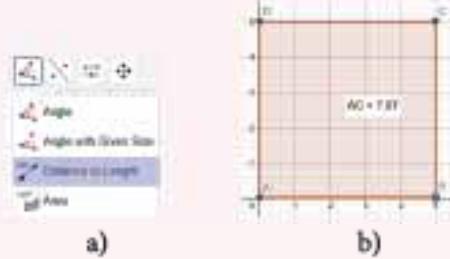
Karenin alanı için $P = a^2$ formülünden $a^2 = 25$ elde ederiz; buradan karenin kenar uzunluğu $a = 5$ cm olur. Pisagor teoremine göre, $\triangle ABC$ üçgeninden (çizim 1) köşegen uzunluğu için şunu elde ederiz $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, veya $d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$.

GeoGebra'da çözümü kontrol etme işlemi aşağıda verilmiştir. Öncelikle kenarı 5 cm olan bir kare çizmek için araçlardan (Toolbar) düzgün çokgen (Regular polygon) seçeneğini seçeceğiz (resim 1 a)) ve uzunluğu 5 cm olan bir doğru parçası çeceğiz. Bunun ardından, istenen çokgenin köşe sayısını girmemiz için bir pencere açılacaktır. Buraya 4 yazacağız (resim 1 b)).



Resim 1

Ardından, karenin köşegenini hesaplamak için araçlardan (Toolbar) uzaklık (Distance or Length) seçeneğini seçeceğiz (resim 2 a)) ve AC köşegeninin uç noktalarını işaretleyeceğiz. Böylece köşegen uzunluğunun $\overline{AC} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ cm olduğunu elde ederiz (resim 2 b)).



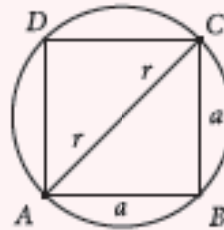
Resim 2

Örnek 2

Bir gölet, yarıçapı 6 m olan bir daire biçimindedir. Gölete, daire içine çizilmiş kare biçiminde bir platform yerleştirilecektir (çizim 2). Platformun yapılması için kaç m^2 malzeme gerektiğini hesapla.

Çözüm:

Çizim 2'ye göre, karenin köşegen uzunluğu $d = 2r = 2 \cdot 6 = 12$ m' dir. $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ eşitliğinden, karenin kenar uzunluğunun şu olduğu elde edilir $a = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{12^2}{2}} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ m. Buradan, karenin alanı $P = a^2 = 72$ m^2 olur. Demek ki platformun yerleştirilmesi için 72 m^2 malzeme gereklidir.



Çizim 2

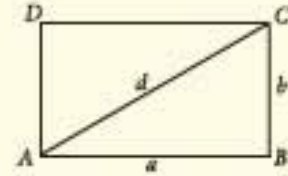
Soru 1

Belediye, okul ekoparkı için ayrılmış kare biçimindeki yeşil bir alanı çitle çevirmeyi planlamaktadır. Çit için 400 m metal tel vardır ve bu telle tüm alan, üst üste binme ve fire olmadan iki kez çevrilmelidir. Aşağıdakileri belirle:

- kare biçimindeki alanın kenar uzunluğunu;
- çevrilen alanın alanını.

Hatırla!

Kenar uzunlukları a ve b olan bir dikdörtgenin çevresi $L = 2a + 2b$, formülüyle hesaplanırken, alanı $P = ab$ formülüyle hesaplanır.



Çizim 3

Örnek 3

Bir kenarı 12 cm ve köşegeni 20 cm olan bir dikdörtgenin alanını hesapla.

Çözüm:

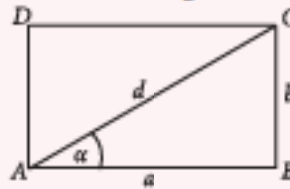
Dik üçgen $\triangle ABC$ 'den (çizim 3), Pisagor teoremine göre $d^2 = a^2 + b^2$ elde ederiz. Buradan b kenarının uzunluğu için $b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm bulunur. Dikdörtgenin alan formülünde yerine koyarsak $P = 12 \cdot 16 = 192$ cm² elde ederiz.

Örnek 4

Bir mühendis, elektronik bir cihaz için dikdörtgen biçiminde metal bir plaka tasarlamaktadır. Plakanın bir kenarının uzunluğu 20 cm' dir. Boyutlar lazer ölçerle kontrol edildiğinde, bu kenar ile plakanın köşegeni arasındaki açının 30° olduğu belirlenmiştir. Metal plakanın alanını hesapla.

Çözüm:

Metal plaka dikdörtgen biçimindedir. Çizim 4'e göre $\triangle ABC$ dik üçgendir. Buradan $\tan 30^\circ = \frac{b}{a}$ yani $b = a \cdot \tan 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 11,55$ cm elde ederiz. Dikdörtgenin alanı $P = 20 \cdot 11,55 \approx 231$ cm² olur.



Çizim 4

Soru 2

Dikdörtgen biçiminde bir sensör paneli tasarlanırken mühendisler, paneli köşegenleri aracılığıyla modellerler; çünkü köşegenler otomatik kalibrasyonda kullanılır. Köşegen uzunluklarının 12 cm olduğu ve köşegenler arasındaki açının 60° olduğu ölçülmüştür. Sensör panelinin alanı kaçtır?

Örnek 5

Elektronik bir cihazın koruyucu muhafazesi için dikdörtgen biçiminde bir alüminyum plaka yapılırken, mühendis sağlamlık ve estetik nedeniyle yapısal oranlara uymak zorundadır. Plakanın boyutları, kenar uzunluklarının oranı 3 : 5 olacak şekilde tasarlanmıştır ve plakanın toplam alanı 135 cm^2 dir. Plakanın kenar uzunlukları kaçtır?

Çözüm:

a ve b plakanın kenar uzunlukları olsun. Koşuldan $a : b = 3 : 5$ olduğunu elde ederiz; buradan $a = 3k$, $b = 5k$ olur.

a ve b değerlerini alan formülünde yerine koyarsak şunu elde ederiz

$$3k \cdot 5k = 135$$

$$15k^2 = 135$$

$$k^2 = 9$$

$$k = \sqrt{9} = 3 \text{ cm.}$$

k için elde edilen değeri a ve b 'de yerine koyarsak şunu elde ederiz $a = 3k = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}$ ve $b = 5k = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}$.

Soru 3

Bir kenarı diğerinden dört kat büyük olan ve alanı 64 cm^2 olan dikdörtgen biçimindeki bir çerçevenin kenarlarını belirle.

Örnek 6

Çizim 5'te bir güneş paneli gösterilmiştir.

- Panelin aktif yüzey alanını hesapla.
- Koruyucu çerçevenin yüzey alanını hesapla.

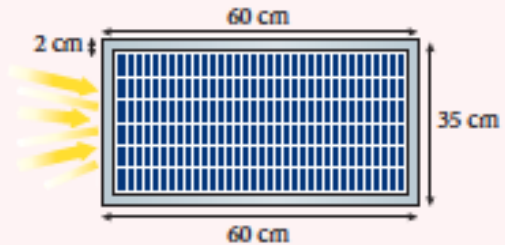
Çözüm:

- Panelin aktif yüzeyi, kenarları $a_1 = 60 - 2 \cdot 2 = 56 \text{ cm}$ ve $b_1 = 35 - 2 \cdot 2 = 31 \text{ cm}$ olan bir dikdörtgendir. Bu nedenle alanı $P = a_1 \cdot b_1 = 56 \cdot 31 = 1736 \text{ cm}^2$ olur.
- Koruyucu çerçevenin yüzey alanı P_* 'yi, tüm panelin toplam alanı P_* ile aktif yüzey alanı P arasındaki fark olarak hesaplayacağız.

Toplam alan, kenarları $a = 60 \text{ cm}$ ve $b = 35 \text{ cm}$, olan dikdörtgenin alan formülüyle hesaplanır:

$$P_* = a \cdot b = 60 \cdot 35 = 2100 \text{ cm}^2.$$

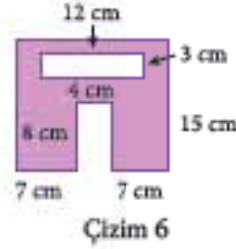
Koruyucu çerçevenin yüzey alanı için $P_2 = P_* - P = 2100 - 1736 = 364 \text{ cm}^2$ elde ederiz.



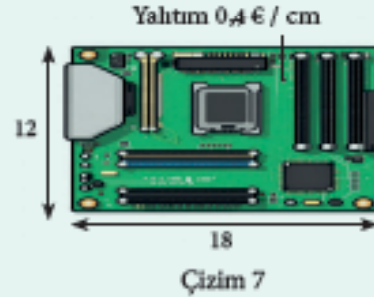
Çizim 5

Soru 4

Çizim 6'da verilen boyalı bölgenin alanını belirle.

**Alıştırma Soruları!**

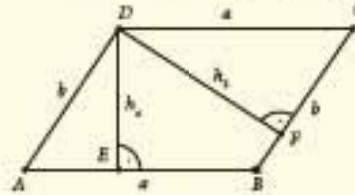
1. Köşegeni $7\sqrt{2}$ olan bir karenin alanını hesapla.
2. Bir kenarı 7 cm ve köşegeni 25 cm olan bir dikdörtgenin alanını hesapla.
3. Köşegeni 10 cm olan ve köşegen ile kenar arasındaki açısı 45° olan bir dikdörtgenin alanını hesapla.
4. Köşegenleri 106° lik açı oluşturan ve köşegen uzunlukları 10 cm olan bir dikdörtgenin alanını hesapla.
5. Bir elektronik plaka, 18 cm ve 12 cm boyutlarında dikdörtgen biçimindedir. (Çizim 7)
 - a) Plakanın alanını belirle.
 - b) Plakanın etrafına yalıtım katmanı yerleştirilmektedir. 1 cm yalıtım katmanı 0,4 avro ise yalıtım kaç avroya mal olur?



6.2 PARALELKENARIN ÇEVRESİ VE ALANI

Hatırla!

- Çizim 1'deki $ABCD$ paralelkenarında $\overline{DE}$ ve $\overline{DF}$ doğru parçalarına ne ad verilir?



Çizim 1

- Paralelkenarın alanı, bir kenarının uzunluğu ile o kenara indirilen ilgili yüksekliğin uzunluğunun çarpımına eşittir. Paralelkenarın kenar uzunlukları a ve b , ilgili yüksekliklerinin uzunlukları h_a ve h_b ise alanı şu formüllerle hesaplanır:

$$P = a \cdot h_a \text{ veya } P = b \cdot h_b.$$

Örnek 1

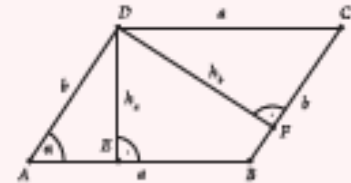
Kenarları 12 cm ve 5 cm olan bir paralelkenarın, bu kenarlar arasındaki açı 40° ise alanını hesapla.

Çözüm:

Dik üçgen $\triangle AED$ 'den (çizim 2) şu sonuç çıkar: $\sin \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{h_a}{b}$ ve $h_a = b \cdot \sin \alpha$. h_a değerini paralelkenarın alan formülünde yerine koyarsak

$$P = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin \alpha \text{ elde ederiz.}$$

Buradan, istenen alan $P = a \cdot b \cdot \sin \alpha = 12 \cdot 5 \cdot \sin 40^\circ \approx 38,57 \text{ cm}^2$ olur.



Çizim 2

Soru 1

Kenarları 6 cm ve 12 cm olan paralelkenarın h_a yüksekliğini, diğer yüksekliği 5 cm ise hesapla.

Örnek 2

Bir endüstriyel yapının eğimli çatısı tasarlanırken, çatı yüzeylerinden biri eğim açısı ve taşıyıcı kirişlerin ötelenmesi nedeniyle paralelkenar biçimindedir. Alt taşıyıcı kirişin uzunluğu 6 m' dir; paralel olan üst ve alt kirişler arasındaki uzaklık ise 2,4 m' dir. Sağlamlık için çatı yüzeyine koruyucu paneller yerleştirilmektedir ve her metrekareye kütlesi 12 kg/m^2 olan malzeme eklenmektedir. Aşağıdakileri belirle:

- a) çatı yüzeyinin alanını;
- b) yerleştirilen malzemenin toplam kütesini.

Çözüm:

- a) Çatı yüzeyi, kenarı $a = 6$ m ve yüksekliği $h_a = 2,4$ m olan bir paralelkenardır. Bu değerleri alan formülünde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$P = a \cdot h_a = 6 \cdot 2,4 = 14,4 \text{ m}^2.$$

Çatı yüzeyinin alanı $14,4 \text{ m}^2$ 'dir.

- b) Her metrekaresine kütlesi 12 kg/m^2 olan malzeme yerleştirildiğine göre, toplam kütle şöyledir:

$$m = P \cdot 12 = 14,4 \cdot 12 = 172,8 \text{ kg}.$$

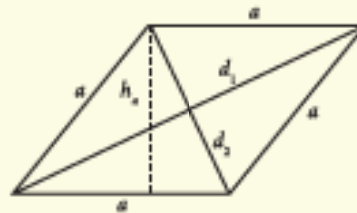
Soru 2

Tarım arazisinin eğimli bir bölümünde yapılan jeodezik ölçümde, yüzeyin paralelkenar biçiminde olduğu belirlenmiştir. Arazinin iki komşu kenarının uzunlukları 120 m ve 200 m, aralarındaki açı ise 30° 'dir. Arazinin sulanması için her hektar başına ($1 \text{ ha} = 10000 \text{ m}^2$) $2,5$ ton su gereklidir. Aşağıdakileri belirle:

- a) arazinin alanını;
- b) tüm arazinin sulanması için gerekli toplam su miktarını.

Hatırla!

- Eşkenar dörtgenin köşegenleri hangi açıyla kesişir?
- Eşkenar dörtgen aslında bütün kenarları aynı uzunlukta olan bir paralelkenardır. Bu nedenle eşkenar dörtgenin alanı, bir kenarının uzunluğu ile o kenara ait yüksekliğin çarpımına eşittir, yani $P = a \cdot h_a$ olur (çizim 3).
- Eşkenar dörtgenin alanı aşağıdaki formüllerle de hesaplanabilir: $P = a^2 \cdot \sin \alpha$ veya $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, burada α eşkenar dörtgenin herhangi bir iç açısı, d_1 ve d_2 ise eşkenar dörtgenin köşegen uzunluklarıdır (çizim 3).



Çizim 3

Örnek 3

Robot kontrolör, sensörlerle eşkenar dörtgen biçimindeki bir panelin zeminini kaplamalıdır. Eşkenar dörtgenin kenar uzunluğu 12 cm, içine çizilen çemberin yarıçapı ise 3 cm' dir.

- a) Eşkenar dörtgenin alanını hesapla.
- b) Panelin her santimetrekaresi $0,05 \text{ W}$ tüketen bir elektronik sensörle kaplanacaksa, tüm eşkenar dörtgen için toplam enerji tüketimi kaç olur?

Çözüm:

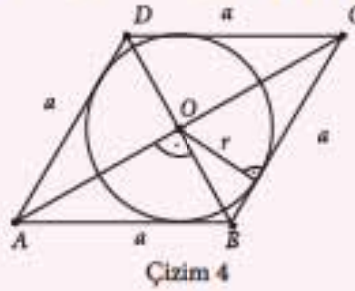
- a) Eşkenar dörtgen, köşegenleriyle 4 eş üçgene ayrılmıştır. Çizim 4'ten, içine çizilen çemberin yarıçapı r 'nin $a \Delta BOC$ 'nin yüksekliği olduğunu fark edebiliriz; buradan

$$P_{\Delta BOC} = \frac{a \cdot r}{2} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

elde ederiz. Eşkenar dörtgenin alanı için $P = 4 \cdot P_{\Delta BOC} = 4 \cdot 18 = 72 \text{ cm}^2$ elde ederiz.

- b) Her cm^2 için 0,05 W harcanıyorsa, tüm eşkenar dörtgen için toplam enerji tüketimi

$$E = P \cdot 0,05 = 72 \cdot 0,05 = 3,6 \text{ W olur.}$$



Çizim 4

Soru 3

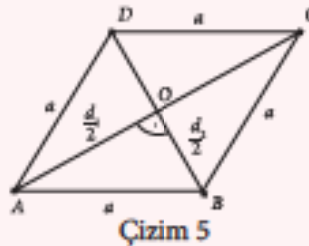
Kenar uzunluğu 12 cm, alanı ise 102 cm^2 olan eşkenar dörtgenin yüksekliğini hesapla.

Örnek 4

Bir köşegeni 16 cm olan eşkenar dörtgenin alanı 240 cm^2 dir. Diğer köşegenin uzunluğunu ve eşkenar dörtgenin çevresini hesapla.

Çözüm:

$d_1 = 16 \text{ cm}$ ve $P = 240 \text{ cm}^2$ olduğu verilmiştir. Eşkenar dörtgenin alan formülü $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ olduğundan, $\frac{16 \cdot d_2}{2} = 240$ elde ederiz. Buradan $d_2 = \frac{240}{8} = 30 \text{ cm}$ bulunur. Dik üçgen ΔAOB 'den (çizim 5), Pisagor teoremine göre $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$ olur. d_1 ve d_2 değerlerini yerine koyarsak $a^2 = \left(\frac{16}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 289$ elde ederiz. Yani eşkenar dörtgenin kenar uzunluğu $a = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$ ' dir. Buradan, eşkenar dörtgenin çevresi $L = 4 \cdot a = 4 \cdot 17 = 68 \text{ cm}$ olur.



Çizim 5

Soru 4

Kenar uzunluğu 12 cm ve bir köşegeni 10 cm olan eşkenar dörtgenin alanını hesapla.

Örnek 5

Yovana, çizimdeki gibi 13 eşdeğer eşkenar dörtgenden oluşan bir tasarıma sahip vitray hazırlamaktadır. Vitrayın toplam genişliği 40 cm, toplam alanı ise 260 cm² dir. Her bir eşkenar dörtgenin köşegen uzunlukları ve alanı belirlenmelidir.

Çözüm:

Bir eşkenar dörtgenin alanı $P = \frac{260}{13} = 20 \text{ cm}^2$ olur. Tasarımın toplam

genişliği, 5 eşkenar dörtgenin küçük köşegenlerinden oluşmaktadır.

Buradan $5 \cdot d_1 = 40$ elde ederiz; yani her bir eşkenar dörtgenin küçük köşegen uzunluğu $d_1 = 8 \text{ cm}$ dir.

Eşkenar dörtgenin diğer köşegenini alan formülünden bulacağız: $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. Yerine koyarsak $20 = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, yani $d_2 = \frac{20 \cdot 2}{d_1} = 10 \text{ cm}$ elde ederiz.



Çizim 6

Soru 5

Bir eşkenar dörtgenin alanı 24 dm², köşegenlerinden biri ise 8 dm' dir. Eşkenar dörtgenin yüksekliğini ve çevresini belirle.

Alıştırma Soruları!

1. Yükseklikleri 3 cm ve 5 cm olan paralelkenarın küçük kenarı 6 cm ise büyük kenarının uzunluğunu hesapla.
2. Yükseklikleri 3 cm ve 4 cm olan, aralarındaki açı 30° olan paralelkenarın alanını hesapla.
3. Kenar uzunluğu 10 dm ve içine çizilen çemberin yarıçapı 4 dm olan eşkenar dörtgenin alanını hesapla.
4. Bir paralelkenarın alanı 300 cm², çevresi 70 cm ve büyük kenarları arasındaki uzaklık 10 cm' dir. Küçük kenarları arasındaki uzaklığı belirle.
5. Katya, çizim 7'deki gibi düzenlenmiş 8 eş eşkenar dörtgenden oluşan dekoratif bir bahçe tasarlamaktadır. Bir eşkenar dörtgenin alanı 120 metrekare, küçük köşegeni ise 10 metre uzunluğundadır (çizim 7). Katya, köşegenler boyunca taştan yürüyüş yolları yapmak istemektedir. Bahçedeki yürüyüş yollarının toplam uzunluğu kaçtır?

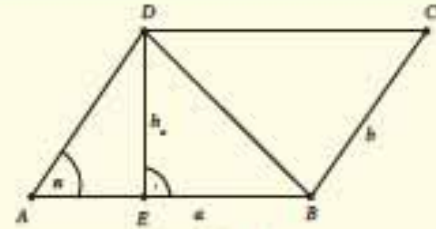


Çizim 7

6.3 ÜÇGENİN ÇEVRESİ VE ALANI

Hatırla!

- Üçgenler kenarlarına göre nasıl, açılarına göre nasıl sınıflandırılır?
- Tabanı ve yüksekliği üçgenle aynı olan paralelkenarın alanına göre üçgenin alanı ne kadardır (çizim 1)?



Çizim 1

Üçgenin alanı, bir paralelkenarın alanının yarısı olarak hesaplanır; çünkü $\triangle ABD$ ve $\triangle CBD$ eş üçgenlerdir.

Kenarları a, b, c ve bu kenarlara ait yükseklikleri h_a, h_b ve h_c bir üçgenin alanı, aşağıdaki formüllerden herhangi biri kullanılarak hesaplanır:

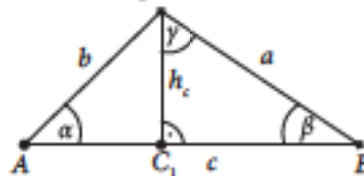
$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a, \quad P = \frac{1}{2} b \cdot h_b \quad \text{veya} \quad P = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

Üçgenin alanı, üçgen iki kenar ve bu kenarlar arasındaki açı ile verildiğinde trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak da hesaplanabilir. Aşağıda bu formülü çıkaracağız.

Çizim 2'deki $\triangle ABC$ için $P = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ olur. Dik üçgen $\triangle AC_1C$ 'den $\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$, veya $h_c = b \cdot \sin \alpha$ olduğu, $\triangle CC_1B$ 'den

ise $\sin \beta = \frac{h_c}{a}$ elde edildiği görülür; yani $h_c = a \cdot \sin \beta$. Formülde yerine koyarak $P = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ şunu elde ederiz:

$$P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha \quad \text{veya} \quad P = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta. \quad \text{Benzer şekilde şu elde edilir: } P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma.$$



Çizim 2

Unutma!

Üçgenin alanı, aşağıdaki formüllerden herhangi biri kullanılarak hesaplanabilir:

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma \quad \text{veya} \quad P = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta \quad \text{veya} \quad P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

yani üçgenin alanı, iki kenarının çarpımı ile bu kenarlar arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısına eşittir.

Örnek 1

İki kenarının uzunlukları 5 cm ve 14 cm, aralarındaki açı 36° olan $\triangle ABC$ 'nin alanını hesapla.

Çözüm:

$b = 5$ cm, $c = 14$ cm ve bu kenarlar arasındaki açı $\alpha = 36^\circ$ olarak verilmiş olsun. Üçgenin alan formülüne göre elimizde şu vardır $P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 14 \cdot \sin 36^\circ \approx 35 \cdot 0,588 \approx 20,58 \text{ cm}^2$.

Eşkenar ve dik üçgen için alan hesaplama formülleri aşağıdaki biçime indirgenir:

- Eşkenar üçgende her iç açı 60° 'dir ve kenarı a ile gösterirsek alanı $P = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ olur.
- Dik üçgende dik kenarlar birbirine diktir. Bu nedenle $h_a = b$, $h_b = a$ olur ve üçgenin alan formülünde yerine koyarsak $P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$ elde ederiz.

Unutma!

Kenar uzunluğu a olan eşkenar üçgenin alanı $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ formülüyle hesaplanır.

Dik kenarları a ve b olan dik üçgenin alanı $P = \frac{a \cdot b}{2}$ formülüyle hesaplanır.

Soru 1

Dik kenarları 12 cm ve 9 cm olan dik üçgenin alanını belirle.

Örnek 2**Örnek 2**

Bir mühendis, spor kurulumu için üçgen bir çerçeve tasarlamaktadır. Üçgen çerçeve dik üçgen biçimindedir ve dik kenarlarının uzunlukları oranı $5 : 12$ 'dir. Çerçevenin alanı 480 cm^2 'dir. Çerçevenin çevresini hesapla.

Çözüm:

Dik kenarların uzunlukları oranı $a : b = 5 : 12$ olduğundan $a = 5k$ ve $b = 12k$.

Dik üçgenin alan formülünde yerine koyarak $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{5k \cdot 12k}{2} = 480$, $k^2 = \frac{960}{60} = 16$, yani $k = 4$ elde edilir.

Buradan, k yerine koyularak $a = 5 \cdot 4 = 20$ cm, $b = 12 \cdot 4 = 48$ cm elde edilir.

Pisagor teoremi uygulanarak $c = \sqrt{20^2 + 48^2} = \sqrt{2704} = 52$ cm elde edilir.

Çerçevenin çevresi şu olur

$$L = a + b + c = 20 + 48 + 52 = 120 \text{ cm}.$$

Soru 2

Bir inşaatçı, eşkenar üçgen biçiminde bir fiske yapmayı planlamaktadır. Fiskeyi yüksekliği (tepe noktasından karşı kenara kadar) 10 cm ise hesapla:

- üçgenin kenar uzunluğunu;
- üçgenin alanını;
- üçgenin çevresini.

Unutma!

Herhangi bir üçgenin alanını hesaplamak için, üç kenarının uzunlukları a , b ve c biliniyorsa, Heron formülü adı verilen formül kullanılır: $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, burada $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Örnek 3

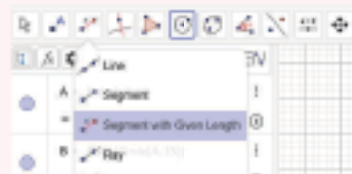
Kenarları 15 cm, 13 cm ve 14 cm olan üçgenin alanını hesapla. Sonuç, GeoGebra bilgisayar yazılımı kullanılarak kontrol edilsin.

Çözüm:

$a = 15$ cm, $b = 13$ cm ve $c = 14$ cm değerlerini yerine koyarsak $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+13+14}{2} = 21$ cm elde ederiz. Üçgenin alanı için

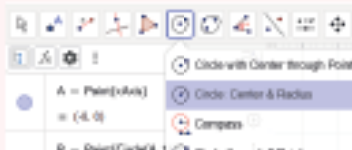
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-15)(21-13)(21-14)} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2 \text{ elde edilir.}$$

Çözümün GeoGebra’da kontrol edilme işlemi şöyledir. Öncelikle verilen uzunlukta bir doğru parçası çizeceğiz: (“Segment with Given Length”) ve uzunluk için 15 değerini gireceğiz (resim 1). Bu, üçgenin AB kenarıdır.



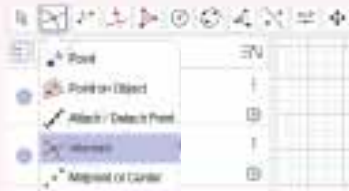
Resim 1

C tepe noktasını elde etmek için işlem şöyledir: Önce, merkezi A noktası ve yarıçapı 14 cm olan bir çember ile merkezi B noktası ve yarıçapı 13 cm olan bir çember çizeceğiz. İki çemberin kesişimi C noktasını verir. GeoGebra’da çember çizimi, menüden “Circle: Center & Radius” seçeneği seçilerek yapılır (resim 2).



Resim 2

C kesişim noktasını elde etmek için "Intersect" seçeneğini seçer ve çemberlerin kesişim noktasını işaretleriz (resim 3).



Resim 3

Üçgeni oluşturmak için çokgen ("Polygon") seçeneğini seçer ve A, B ve C köşelerinden geçen bir üçgen oluştururuz (resim 4).



Resim 4

Son olarak, alanı hesaplamak için "Area" seçeneğini seçeriz (resim 5) ve işaretçiyle üçgenin üzerine tıklarız.



Resim 5

84 sonucu elde edilir. Bu, üçgenin alanının daha önce bulduğumuz gibi $P = 84 \text{ cm}^2$ olduğu anlamına gelir.

Soru 3

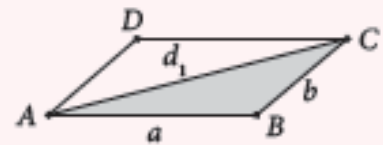
Kenar uzunlukları 8 m, 15 m ve 17 m olan üçgen biçimindeki bir parselin alanı kaçtır? Sonuç GeoGebra ile kontrol edilsin.

Örnek 4

Kenarları 10 cm, 17 cm ve bir köşegeni 21 cm olan paralelkenarın alanını hesapla.

Çözüm:

Çizim 3'te AC köşegeni, ABCD paralelkenarını iki eş üçgene ayırır; bu nedenle paralelkenarın alanını bu üçgenlerin alanlarının toplamı olarak hesaplayacağız. $\triangle ABC$ için üç kenar $a = 10 \text{ cm}$, $b = 17 \text{ cm}$ ve $d_1 = 21 \text{ cm}$, verildiğinden, alanını Heron formülüyle hesaplayacağız. Öncelikle, $s = \frac{10+17+21}{2} = 24$, buradan üçgenin alanı için şu elde edilir



Çizim 3

$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{24 \cdot (24-10) \cdot (24-17) \cdot (24-21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2.$$

Paralelkenarın alanı için şunu elde ederiz $P = 2P_{\triangle ABC} = 2 \cdot 84 = 168 \text{ cm}^2$.

Soru 4

Bir mühendis ekibi, uzunlukları 18 cm, 20 cm ve 34 cm olan üç metal çubuktan yapılmış üçgen biçimindeki taşıyıcı bir yapıyı analiz etmektedir. Yapının sağlamlığı için üçgenin mümkün olan en büyük yüksekliğini, yani bir köşeden karşı kenara olan en uzun uzaklığı bilmek önemlidir. Bu üç kenardan oluşan üçgenin en büyük yüksekliğini belirle.

Hatırla!

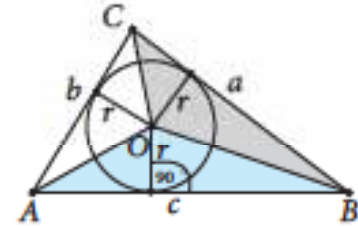
- Üçgende iç teğet çemberin merkezi nerede, çevrel çemberin merkezi nerede bulunur?
- Üçgenin bir kenarı ile iç teğet çemberin değme noktasına çizilen yarıçap nasıl bir açı oluşturur?
- Dik üçgenin çevrel çemberinin merkezi nerede bulunur?

r , kenarları a , b ve c olan $\triangle ABC$ üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı olsun. Üçgenin alanını a , b , c ve r aracılığıyla ifade edeceğiz. r yarıçapı, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ ve $\triangle AOC$ üçgenlerinin her birinin yüksekliğidir. $\triangle ABC$ üçgeninin tamamının alanı, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ ve $\triangle AOC$, üçgenlerinin alanlarının toplamı olarak hesaplanabilir; yani $P_{ABC} = P_{AOB} + P_{BOC} + P_{AOC}$ olur. Buradan şunu elde ederiz:

$$P = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s,$$

Burada

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$



Çizim 4

Unutma!

- r bir üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı ise bu üçgenin alanı $P = r \cdot s$, formülüyle hesaplanır; burada $s = \frac{a+b+c}{2}$.
- R bir üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı ise bu üçgenin alanı $P = \frac{abc}{4R}$ formülüyle hesaplanır.

Örnek 5

Bir dokunun mikroskopik analizinde üç farklı zar sınırı dik üçgen oluşturur. Bu modelin dik kenarlarının uzunlukları $9 \mu\text{m}$ ve $12 \mu\text{m}$ ' dir. Bu bölgenin içinde, üç zar sınırının tamamına teğet olan dairesel bir reaksiyon bölgesi bulunmaktadır. Dairesel reaksiyon bölgesinin yarıçapını, yani verilen dik üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapını hesapla.

Çözüm:

Dik kenarların uzunlukları $a = 9 \mu\text{m}$ ve $b = 12 \mu\text{m}$ olarak verilmiştir; bu nedenle üçgenin alanı şöyledir

$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54 \mu\text{m}^2.$$

Pisagor teoremine göre hipotenüs için şunu elde ederiz $c = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \mu\text{m}$,

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = 18 \mu\text{m}.$$

İç teğet çemberin yarıçapını $P = r \cdot s$ formülünü kullanarak hesaplayacağız. Buradan, $r = \frac{P}{s}$ olur; P ve s , değerlerini yerine koyarsak iç teğet çemberin yarıçapının şu olduğunu elde ederiz

$$r = \frac{54}{18} = 3 \mu\text{m}.$$

Örnek 6

Kenarları 26 cm, 28 cm ve 30 cm olan üçgenin çevrel çemberinin yarıçapını hesapla.

Çözüm:

Heron formülüne göre, $s = \frac{26+28+30}{2} = 42$ olur ve üçgenin alanı şöyledir

$$P = \sqrt{42 \cdot (42-26) \cdot (42-28) \cdot (42-30)} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 336 \text{ cm}^2.$$

Çevrel çemberin yarıçapını $P = \frac{abc}{4R}$ formülünü kullanarak hesaplayacağız. Buradan istenen yarıçap şu şekilde ifade edilebilir:

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{26 \cdot 28 \cdot 30}{4 \cdot 336} = 16,25 \text{ cm}.$$

Soru 5

Yarıçapı R olan daire biçimindeki bir gölette, çember içine çizilmiş üçgen biçiminde bir adacık vardır. Üçgenin kenarları 15 m, 16 m ve 17 m'dir. Kışın göletin su olan kısmı donmaması için kaplanmalıdır. Bunun için kaç metrekaare malzeme gerekli olacaktır?

Örnek 6

Bir mühendis, ikizkenar üçgen biçiminde olan, tabanı 12 m ve yüksekliği 9 m olan bir köprü bölümünü (çizim 5) tasarlamalıdır.

- Köprü'nün bu bölümüne kaç metrekaare reklam yerleştirilebilir?
- Köprü'nün üçgen bölümünü yapmak için kaç metre metal konstrüksiyon gereklidir?

Çözüm:

- a) Kaç metrekaare reklam yerleştirilebileceğini belirlemek için üçgenin alanının hesaplanması gerekir.

$$\text{Şunu elde ederiz } P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54 \text{ m}^2.$$

Demek ki köprünün üçgen bölümüne 54 m^2 yüzey alanına sahip reklam yerleştirilebilir.

- b) Çizim 6'daki ADC dik üçgeninden, Pisagor teoremi uygulanarak şunu elde ederiz

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} \approx 10,82 \text{ m}.$$

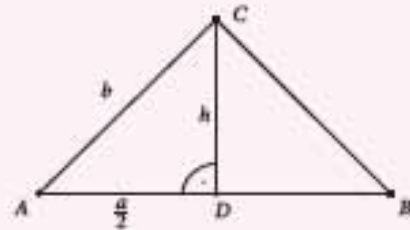
Üçgenin çevresini hesaplamamız gerekir,

$$L = a + 2b = 12 + 2 \cdot 10,82 = 33,64 \text{ m}.$$

Demek ki köprünün üçgen bölümünün yapılması için $33,64 \text{ m}$ metal konstrüksiyon gereklidir.



Çizim 5



Çizim 6

Alıştırma Soruları!

1. Kenarları 9 cm, 10 cm ve 17 cm olan üçgenin en büyük yüksekliğini belirle.
2. Kenarları 13 cm, 20 cm ve bir köşegeni 21 cm olan paralelkenarın alanını hesapla.
3. $a = 7 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$ kenarları ve $\gamma = 36^\circ$ açısı verilen üçgenin alanını hesapla.
4. Taban uzunluğu 12 cm olan ve açılardan biri 48° olan ikizkenar üçgenin alanını hesapla.
5. Bir ikizkenar üçgenin tabanı 40 cm, eş kenarı ise 25 cm'dir. İç teğet çemberin ve çevrel çemberin yarıçaplarını belirle.
6. Güneş paneli üretimi yapan bir şirket, çizim 7'deki gibi bir panel üretmelidir.
 - a) 1 m^2 camın fiyatı 50 avrodur. Bir güneş panelinin üretimi için gerekli cam kaç avroya mal olur?
 - b) Panelin kaplanması için, bir metre uzunluğu 8 avro olan metal şerit kullanılmaktadır. Panelin üç kenarının tamamını kaplamak kaç avroya mal olur?



Çizim 7

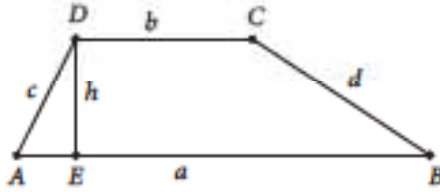
6.4 TRAPEZ VE DELTOİDİN ÇEVRESİ VE ALANI

Hatırla!

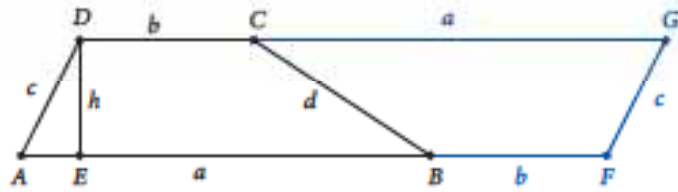
- Trapez nedir?
- Trapezin kaç paralel kenarı vardır ve bunlara ne ad verilir?
- Hangi trapez türleri vardır?

Çizim 1'de, tabanları a ve b , yan kenarları c ve d , yüksekliği h olan $ABCD$ trapezi gösterilmiştir. Eğer $a = \overline{AB}$ kenarını $b = \overline{BF}$ uzunluğu kadar ve $b = \overline{DC}$ kenarını $a = \overline{CG}$, uzunluğu kadar uzatırsak, tabanı $(a + b)$ ve yüksekliği h olan $AFGD$ paralelkenarı elde edilir (çizim 2). Bu paralelkenar $ABCD$ ve $GCBF$ olmak üzere iki eş trapezden oluşur ve alanı $P = (a + b) \cdot h$ formülüyle hesaplanır.

$ABCD$ trapezi, $AFGD$ paralelkenarının yarısını oluşturur. Bu nedenle trapezin alanı için şu formülü elde ederiz: $P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h = \frac{a + b}{2} \cdot h$.



Çizim 1



Çizim 2

Unutma!

Tabanları a ve b , yüksekliği h olan bir trapezin alanı $P = \frac{a + b}{2} \cdot h$ formülüyle hesaplanır.

Örnek 1

Bir trapezin tabanları 18 dm ve 12 dm, alanı ise 45 dm²'dir. Trapezin yüksekliğini belirle.

Çözüm:

$a = 18$ dm, $b = 12$ dm ve $P = 45$ dm² değerlerini trapezin alan formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz $45 = \frac{18 + 12}{2} \cdot h$ yani $h = \frac{45}{15} = 3$ dm olur. Buradan $h = 3$ dm elde edilir.

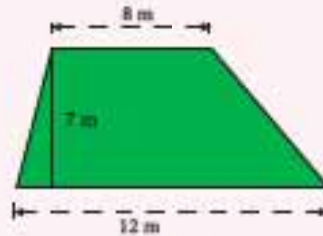
Soru 1

Bir trapezin alanı 80 cm^2 ve yüksekliği 4 cm ' dir. Tabanlarından birinin uzunluğu 25 cm ' dir. Trapezin diğer tabanının uzunluğunu belirle.

Örnek 2

Bir ekoparkta, çizim 3'teki gibi trapez biçiminde yeni bir yeşil alan düzenlenmesi ve bu alana çim ekilmesi planlanmaktadır.

- Yeşil alanın alanı kaçtır?
- 1 m^2 için 250 g tohum gerekiyorsa, tüm alanın ekilmesi için ne kadar tohum gerekir?
- 1 kg tohum yılda yaklaşık $1,5 \text{ kg CO}_2$ emiyorsa, yeni yeşil alan bir yılda ne kadar CO_2 emecektir?



Çizim 3

Çözüm:

- Çizim 3'ten trapezin tabanlarının $a = 12 \text{ m}$ ve $b = 8 \text{ m}$, yüksekliğinin ise $h = 7 \text{ m}$ olduğu görülebilir. Bu değerleri trapezin alan formülünde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

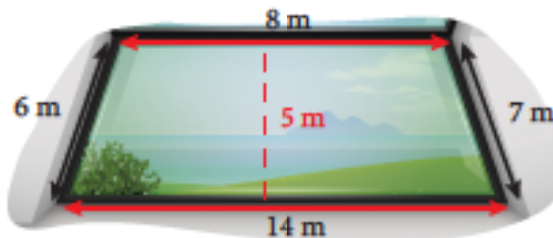
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{12+8}{2} \cdot 7 = 70 \text{ m}^2.$$

- 1 m^2 lik alanın ekilmesi için 250 g tohum gerektiği verilmiştir. Buna göre, tüm alanın ekilmesi için $70 \cdot 250 = 17500 \text{ g} = 17,5 \text{ kg}$ tohum gerekli olacaktır.
- 1 kg tohum yılda yaklaşık $1,5 \text{ kg CO}_2$ emdiğine göre, yeni yeşil alanla yılda $17,5 \cdot 1,5 = 26,25 \text{ kg CO}_2$ emilecektir.

Soru 2

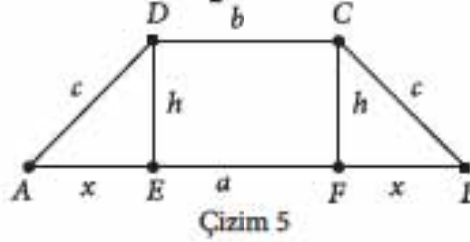
Modern bir yapının cam cephesi (çizim 4) trapez biçimindedir.

- 1 m^2 cam 120 avro ise cephe için ne kadar ödeme yapılmalıdır?
- Çerçeve için metre başına 35 avro fiyatında alüminyum kullanılıyorsa, çerçevenin toplam fiyatı ne kadardır?



Çizim 4

Bir trapezin iki yan kenarı eşit uzunlukta ise bu trapeze **ikizkenar trapez** denir. Çizim 5'te tabanları a ve b , yan kenarı c ve yüksekliği h olan ikizkenar trapez gösterilmiştir. AED dik üçgeninden, Pisagor teoremi uygulanarak $c^2 = x^2 + h^2$ elde edilir; burada $x = \frac{a-b}{2}$ olur.



Çizim 5

Örnek 3

Tabanları 14 cm ve 6 cm, yan kenarı 5 cm olan ikizkenar trapezin alanını hesapla.

Çözüm:

Sorunun koşullarından $a = 14$ cm, $b = 6$ cm ve $c = 5$ cm olduğunu biliyoruz.

x kısmı için (çizim 5) şunu elde ederiz $x = \frac{a-b}{2} = \frac{14-6}{2} = 4$ cm yükseklik h 'yi ise şu eşitlikten buluruz

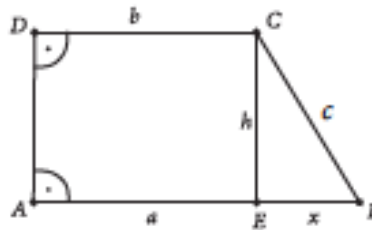
$h^2 = c^2 - x^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$. Buradan $h = \sqrt{9} = 3$ cm olur. Son olarak alan için

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{14+6}{2} \cdot 3 = 30 \text{ cm}^2 \text{ elde edilir.}$$

Soru 3

Alanı 90 cm^2 olan bir trapezin yüksekliği 10 cm ' dir. Tabanları 4 cm farklı olduğuna göre trapezin tabanlarını belirle.

Bir trapezin tabanındaki açılardan biri dik açı ise bu trapeze **dik trapez** denir. Çizim 6'da tabanları a ve b , yan kenarı c ve yüksekliği h olan dik trapez gösterilmiştir. Bu durumda x uzunluğu $x = a - b$.



Çizim 6

Örnek 4

Bir ekoloji laboratuvarında, su bitkilerini incelemek için tabanı dik trapez biçiminde olan bir akvaryum tasarlanmaktadır. Suyun doğru hareket etmesi için tabanın boyutları şöyle seçilmiştir: uzun taban 20 cm , kısa taban 15 cm ve yükseklik 12 cm ' dir.

- Akvaryumun taban alanını hesapla.
- Akvaryumun etrafına koruyucu lastik çerçeve yerleştirmek için gerekli olan taban çevresini hesapla.

Çözüm:

Sorunun koşullarından $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, ve $h = 12$ cm olduğunu biliyoruz.

- a) Akvaryumun taban alanı için (taban trapezdir) şunu elde ederiz

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{20+15}{2} \cdot 12 = 210 \text{ cm}^2.$$

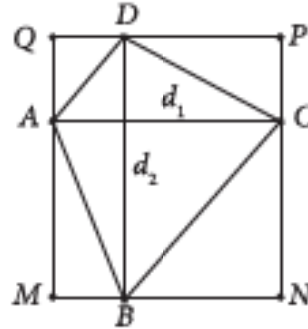
- b) Trapezin çevresini belirlemek için c yan kenarının uzunluğunu belirlememiz gerekir (çizim 6). Pisagor teoreminden $c^2 = h^2 + x^2 = h^2 + (a-b)^2 = 12^2 + (20-15)^2 = 169$ elde ederiz; buradan $c = 13$ cm olur. Dik trapezin ikinci yan kenarı, trapezin yüksekliği ile aynı uzunluktadır. Buradan trapezin çevresi $L = 20 + 15 + 13 + 12 = 60$ cm olur.

Soru 4

Bir nehir yatağı incelenirken, nehrin enine kesiti dik trapez olarak modellenmektedir. Trapezin uzun tabanı (su yüzeyinin genişliği) 24 m, kısa tabanı (tabanın genişliği) 16 m' dir; eğik yan kenar ise uzun tabanla 30° lik açı yapmaktadır.

- Trapezin yüksekliğini (nehirin derinliğini) belirle.
- Nehrin enine kesitinin alanını hesapla.
- Kesitin çevresini hesapla.

Köşegenleri d_1 ve d_2 birbirine dik olan ABCD dörtgeni verilmiş olsun. Bu dörtgenin alanını belirleyeceğiz. Bu dörtgenin köşelerinden, köşegenlere paralel doğrular çizilirse, kenarları $\overline{MN} = d_1$ ve $\overline{MQ} = d_2$, olan MNPQ dikdörtgeni elde edilir. Bu dikdörtgen, dört çift dik üçgenden oluşur ve her çiftteki üçgenlerin alanları eşittir (çizim 7). Buna göre, dörtgenin alanı MNPQ dikdörtgeninin alanının iki kat küçüğüdür. Buradan dörtgenin alanının $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ olduğu sonucu çıkar.



Çizim 7

Unutma!

Köşegenleri birbirine dik olan ve uzunlukları d_1 ile d_2 olan bir dörtgenin alanı, bu uzunlukların çarpımının yarısına eşittir ve şu formülle hesaplanır $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

İki çift eş komşu kenarı olan dörtgene **deltoid** denir. Deltoide en çok uçurtma, süs motifleri, çeşitli nesnelerin tasarımı ve benzeri biçimlerde rastlarız. Deltoidin köşegenleri birbirine diktir. Bu nedenle deltoidin alanı $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, formülüyle belirlenebilir; burada d_1 ve d_2 , deltoidin köşegen uzunluklarıdır.

Örnek 5

Bir şirket, bir restoranın iç duvarları için deltoid biçiminde ahşap dekoratif bir panel tasarlamaktadır. Panelin kenarları 10 cm ve 17 cm olmalıdır; simetri eksenini olmayan köşegen ise 16 cm'dir (çizim 8).

- Panelin yapımı için kaç santimetrekare ahşap gereklidir?
- Ahşap plakanın fiyatı cm^2 başına 2 avro ise panelin toplam fiyatı ne kadardır?

Çözüm:

- Çizim 9'da panelin 2B biçimi verilmiştir. Buradan $\overline{AD} = a = 10 \text{ cm}$ ve $\overline{AB} = b = 17 \text{ cm}$, ise $\overline{AC} = d_1 = 16 \text{ cm}$.

olduğunu elde ederiz.

$\triangle DOC$ dik üçgeninden

$$\overline{DO}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{OC}^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 10^2 - 8^2 = 36, \text{ elde ederiz; yani } \overline{DO} = 6 \text{ cm. Öte yandan,}$$

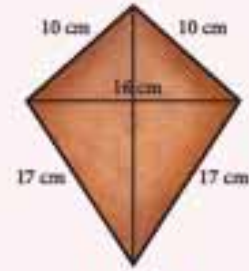
$\triangle BOC$ dik üçgeninden

$$\overline{OB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 17^2 - 8^2 = 225, \text{ yani } \overline{OB} = 15 \text{ cm elde ederiz. Buradan}$$

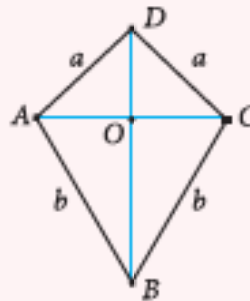
büyük köşegenin uzunluğu için $d_2 = \overline{DB} = \overline{DO} + \overline{OB} = 6 + 15 = 21 \text{ cm}$, elde ederiz; alan ise a

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{16 \cdot 21}{2} = 168 \text{ cm}^2 \text{ olur. Demek ki dekoratif ahşap panelin yapımı için } 168 \text{ cm}^2 \text{ ahşap gereklidir.}$$

- Ahşap plakanın fiyatı cm^2 başına 2 avrodur. Buna göre bir ahşap panelin yapım fiyatı $168 \cdot 2 = 336$ avro olur.



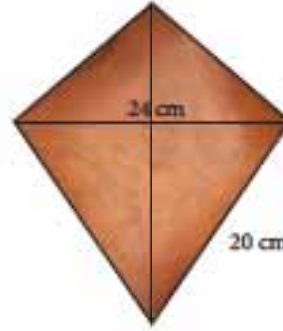
Çizim 8



Çizim 9

Soru 5

Bir firma, alüminyum çerçeve içine yerleştirilecek deltoid biçiminde bir PVC reklam paneli üretmelidir. Panelin alanı 216 cm^2 olmalı, uzun kenarları 20 cm uzunluğunda olmalı ve simetri eksenini olmayan köşegenin uzunluğu 24 cm olmalıdır (çizim 10). Alüminyum çerçevenin yapımı, $1 \text{ cm}'si 0,50$ avrodan temin edilirse kaç avroya mal olur?



Çizim 10

Alıştırma Soruları!

1. Bir trapezin alanı 420 cm^2 , taban uzunlukları ise 28 cm ve 14 cm dir. Trapezin yüksekliğini hesapla.
2. Bir mimar, tabanları 28 m ve 16 m olan, tabana dik olmayan yan kenarı 18 m olan dik trapez biçiminde bir havuz platformu tasarlamaktadır. Platformun alanını ve platformun etrafına yerleştirilmesi gereken çitin uzunluğunu hesapla.
3. Tabanlarının farkı 5 cm , yüksekliği 8 cm ve alanı 96 cm^2 olan trapezin tabanlarını hesapla.
4. Bir çevre aktivisti, bir okul binasının çatısında deltoid biçiminde yeşil bir bahçe yapmak istemektedir. Bahçenin kenarları 13 m ve 20 m olmalıdır. Ortasında yağmur suyunun tahliyesi için köşegen yollar bulunmalıdır ve simetri eksenini olan yolun uzunluğu 21 m olmalıdır.
 - a) Diğer tahliye yolunun uzunluğunu hesapla.
 - b) 1 m^2 alana 4 bitki dikilebiliyorsa, bahçenin tüm alanına kaç bitki dikilebilir?
5. Bir elektrik panosu deltoid biçimindedir. Simetri eksenini olan köşegeni 17 cm uzunluğundadır, deltoidin kenarlarından biri 10 cm uzunluğundadır ve panonun alanı 136 cm^2 dir.
 - a) Elektrik panosunun kaplaması için ne kadar şerit gerektiğini hesapla.
 - b) Her bir bileşen 2 cm^2 yer kaplıyorsa, panoya kaç bileşen yerleştirilebilir?

6.5 ÇEMBERİN ÇEVRESİ, DAİRENİN ALANI VE DAİRE DİLİMLERİ

Hatırla!

- Çember nedir?
- Daire nedir?
- Tam açı kaç derecedir?

Yarıçapı r olan bir çemberin çevresi $L = 2\pi r$ formülüyle hesaplanır. Aynı yarıçapa sahip dairenin alanı ise $P = r^2\pi$ formülüyle hesaplanır. Bu formüller, eğitimin önceki yıllarında öğrenilmiştir; bu nedenle bunları bilinen formüller olarak kullanacağız.

Örnek 1

Dairesel bir güneş platformunun (çizim 1) çevresi 62,8 m' dir.

- Platformun yarıçapını ve alanını belirle.
- 1 m², 240 W elektrik enerjisi ürettiyorsa güneş platformunun toplam gücü ne kadardır?
- En az 226 kW elektrik enerjisi sağlamak için bu tür platformlardan kaç tane gereklidir?



Çizim 1

Çözüm:

- Dairenin çevresi formülünden $62,8 = 2\pi r$ elde ederiz; yani $r = \frac{62,8}{2 \cdot 3,14} = 10$ m. Yarıçap değerini alan formülünde yerine koyarak $P = r^2\pi = 10^2\pi = 314$ m² elde ederiz.
- Güneş platformunun toplam gücü $314 \cdot 240 = 75360$ W = 75,36 kW olur.
- En az 226 kW elektrik enerjisi sağlamak için yaklaşık $226 : 75,36 \approx 3$ adet böyle güneş platformu gereklidir.

Soru 1

Bir tarımsal sulama sisteminde, bir tarlaya su taşıyan iki dairesel hortum kullanılmaktadır. Hortumların çapları 10 cm ve 24 cm' dir. Bunların, aynı su akışına sahip olacak daha büyük tek bir hortumla değiştirilmesi planlanmaktadır. Yeni hortumun çapını belirle.

Örnek 2

Bir telekomünikasyon operatörü, alanı 196 cm^2 olan kare biçiminde bir anten tabanı yerleştirmektedir. Tabanın içine, kare tabana iç teğet olan dairesel bir koruyucu modül yerleştirilmiştir.

- Dairesel koruyucu modülün alanı ne kadardır?
- Tabanın ne kadarlık yüzeyi kaplanmadan kalır?

Çözüm:

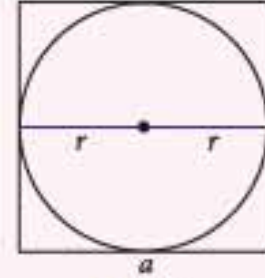
- Karenin alan formülünden $a^2 = 196$ ve $a = 14 \text{ cm}$ elde ederiz. Daha sonra, dairenin çapı karenin kenarına eşit olduğundan (çizim 2), yani $d = a$ olduğundan, yarıçap için

$$r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm elde ederiz.}$$

Dairesel koruyucu modülün alanı $P = r^2 \pi = 7^2 \pi = 49\pi \text{ cm}^2$ olur.

- Tabanın kaplanmadan kalan yüzeyini, tüm kare tabanın alanı ile dairesel modülün alanı arasındaki fark olarak hesaplayacağız

$$P = 196 - 49 \cdot 3,14 = 42,14 \text{ cm}^2.$$



Çizim 2

Soru 2

Bir şeker fabrikası, kurabiye için kare biçiminde karton bir kutu yapmaktadır. Kutunun taban alanı 225 cm^2 'dir. Kutunun içine, kare tabana iç teğet olan yuvarlak bir kurabiye yerleştirilmektedir (kurabiye dört kenarın her birine değmektedir).

- Kurabiye'nin çapı kaçtır?
- Kurabiye'nin çevresi kaçtır?
- Kutunun tabanının yüzde kaç kurabiye tarafından kaplanmamıştır?

Örnek 3

Bir elektrikli bisikletin tekerleğinin yarıçapı $r = 35 \text{ cm}$ ' dir. 2 dakika içinde tekerlek 180 tam dönüş yapmaktadır.

- Bisiklet ne kadar mesafe almıştır?
- Bisikletin m/s cinsinden ortalama hızı kaçtır?

Çözüm:

Tekerleğin bir dönüşü, çemberin çevresine karşılık gelir ve bu çevre şöyledir

$$L = 2r\pi = 2 \cdot 35 \cdot \pi = 70\pi \text{ cm} = 0,7\pi \text{ m.}$$

Tekerlek 180 tam dönüş yaptığına göre bisikletin aldığı mesafe

$$s = 180 \cdot L = 180 \cdot 0,7\pi = 126\pi \text{ m olur.}$$

$$s \approx 126 \cdot 3,14 = 395,6 \text{ m.}$$

- 2 dakika = 120 s süre için ortalama hızı şu formülle hesaplarız:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{126\pi}{120} = 1,05\pi \text{ m/s,}$$

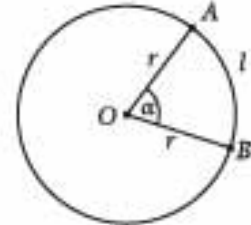
$$\text{veya } v = 1,05\pi = 1,05 \cdot 3,14 \approx 3,3 \text{ m/s.}$$

Soru 3

Bir elektrikli scooterin tekerleğinin çapı 80 cm' dir. Tekerlekler 150 dönüş yaptıysa scooter hangi mesafeyi almıştır?

Çemberin, belirli bir merkez açıya karşılık gelen kısmına çember yayı denir ve çemberin çevresinin ölçüldüğü aynı ölçü birimiyle ölçülür. Çizim 3'te, α merkez açısına karşılık gelen $\overline{AB} = l$ çember yayının uzunluğu gösterilmiştir. Tüm çemberin çevresi $L = 2r\pi$ dir ve 360° lik merkez açıya karşılık gelir. Buradan $l : \alpha = 2r\pi : 360^\circ$ orantısı elde edilir. Bu orantıdan

$$l = \frac{2r\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ} \text{ elde edilir,}$$



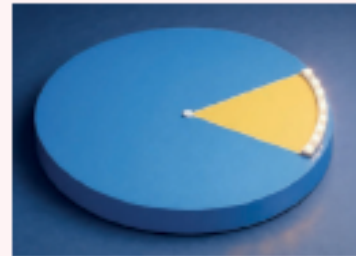
Çizim 3

Unutma!

Yarıçapı r olan bir çemberde, α merkez açısına karşılık gelen çember yayının uzunluğu $l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ formülüyle hesaplanır.

Örnek 4

Yarıçapı 15 cm olan dairesel bir reklam panosuna (çizim 4), reklam panosunun 30° lik merkez açıya karşılık gelen çember yayını kaplayacak ince bir LED şerit yerleştirilmelidir. Bu LED şeridin uzunluğu ne kadardır?



Çizim 4

Çözüm:

Soruda $r = 15$ cm ve $\alpha = 30^\circ$ verilmiştir. LED şeridin uzunluğunu belirlemek için, yarıçapı 15 cm olan çemberde 30° lik merkez açıya karşılık gelen çember yayının uzunluğunu hesaplamak gerekir. Formülde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ} = \frac{15 \cdot \pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} = 2,5\pi \approx 2,5 \cdot 3,14 = 7,85 \text{ cm.}$$

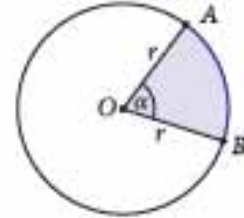
Soru 4

Bir parktaki bisiklet yolu, yarıçapı 600 m olan dairesel bir viraj yapmaktadır. Buna karşılık gelen yol uzunluğu 150 m ise yolun kıvrımlı bölümünün merkez açısı kaçtır?

Dairesel kesit ya da **daire sektörü**, dairenin iki yarıçapı ve bu yarıçapların oluşturduğu merkez açı ile sınırlanan kısmına denir (çizim 5'te boyalı kısım). α merkez açısına karşılık gelen daire parçasının alanı P ile α açısı arasındaki oran, tüm dairenin alanı $r^2\pi$ ile 360° lik tam açı arasındaki orana eşittir; yani $P : \alpha = r^2\pi : 360^\circ$ olur.

Buradan dairese kesitin alanının

$$P = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} \text{ olduğu elde edilir.}$$



Çizim 5

Örnek 5

Bir direğe yerleştirilmiş bir sensörün (çizim 6) yarıçapı 12 m olan dairese bir kapsama alanı vardır. Sensör, yalnızca 60° lik merkez açığa karşılık gelen alanın bir bölümünü kapsamaktadır. Sensörün kapsadığı alanın büyüklüğü ne kadardır?

Çözüm:

Dairesel kesitin alan formülünde $r = 12$ m ve $\alpha = 60^\circ$ değerlerini yerine koyarak

$$P = \frac{12^2 \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} \approx 75,36 \text{ m}^2 \text{ elde ederiz.}$$

Sensörün kapsadığı alanın büyüklüğü yaklaşık $75,36 \text{ m}^2$ dir.



Çizim 6

Soru 5

Yarıçapı 12 m olan dairese bir meydana, yüzeyin yalnızca dairese kesit biçimindeki bir kısmı aydınlatılmıştır ve bu kısmın alanı $36\pi \text{ m}^2$ dir.

- Aydınlatılan kısmın merkez açısı kaçtır?
- Aydınlatılan kısmı sınırlayan çember yayının uzunluğu ne kadardır?

Dairenin bir yayı ve bu yaya karşılık gelen kirişle sınırlanan kısmına dairese parça denir. Çizim 7'deki dairede parça, AB kirişi ve α merkez açısı ile belirlenmiştir. ACB dairese parçasının alanı, AOB dairese kesitinin alanı P_1 ile ikizkenar $\triangle OAB$ 'nin alanı P_2 arasındaki fark olarak hesaplanır; yani

$$P = P_1 - P_2$$



Çizim 7

Örnek 6

Yarıçapı $r = 10$ cm olan bir çemberde AB kirişi bir dairese parça ayırmaktadır. Kirişi gören merkez açı $\alpha = 72^\circ$.

- Dairesel parçanın alanını hesapla.
- AB Dairesel parçanın alanını hesapla.
- Parçayı sınırlayan $\widehat{AB}$ yayının uzunluğunu hesapla.

Çözüm:

- a) $\alpha = 72^\circ$ merkez açısına karşılık gelen dairesel parçanın alanını $P = P_1 - P_2$ olarak hesaplayacağız. Burada P_1 AOB, dairesel kesitinin alanı; P_2 ise ikizkenar $\triangle OAB$ 'nin alanıdır. Şunu buluruz:

$$P_1 = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{10^2 \pi \cdot 72^\circ}{360^\circ} = 20\pi = 20 \cdot 3,14 = 62,8 \text{ cm}^2;$$

$$P_2 = \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{10^2 \cdot \sin 72^\circ}{2} = 50 \cdot \sin 72^\circ \approx 50 \cdot 0,95 = 47,5 \text{ cm}^2.$$

Buradan, dairesel parçanın alanı için $P = P_1 - P_2 = 62,8 - 47,5 = 15,3 \text{ cm}^2$ elde ederiz

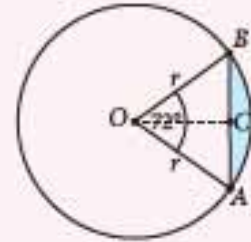
- b) Kirişin uzunluğunu belirlemek için, $\triangle ACO$ dik üçgeninden hareket edeceğiz. Şunu buluruz:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{r}, \text{ t.e. } AC = r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 10 \cdot \sin 36^\circ = 10 \cdot 0,59 = 5,9 \text{ cm.}$$

$$\text{Çünkü } \overline{AB} = 2 \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 5,9 = 11,8 \text{ cm.}$$

- c) $\widehat{AB}$, yayının uzunluğu için şu elde edilir:

$$l = \frac{r \pi \alpha}{180^\circ} = \frac{10 \cdot \pi \cdot 72^\circ}{180^\circ} = 4\pi \approx 4 \cdot 3,14 = 12,56 \text{ cm.}$$



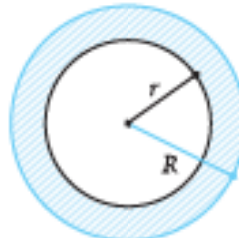
Çizim 8

Soru 6

Bir denizaltının cam penceresi, çemberin bir parçası biçimindedir (dairesel parça). Pencere, yarıçapı $r = 40 \text{ cm}$ olan dairesel camdan yapılmıştır. Pencereyi tutan metal çerçeve, camın girişinin 60° lik merkez açıyla karşılık gelmesi nedeniyle ışık geçişini sınırlandırmaktadır.

- Işık geçiren cam yüzeyini hesapla (dairesel parçanın alanı).
- Pencerenin kenarı boyunca uzanan metal çerçevenin uzunluğunu hesapla (yay uzunluğu ile giriş uzunluğunun toplamı).
- Cam, m^2 başına 8 kg ağırlığındaysa pencerenin kütlesi ne kadardır? (Sonucu kg cinsinden ifade et.)

Dairesel halka, farklı yarıçaplara sahip iki eş merkezli çemberle sınırlanan düzlem parçasıdır. Dairesel halkanın alanı (çizim 9), yarıçapları R ve r olan dairelerin alanları arasındaki farka eşittir; yani $P = R^2 \pi - r^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi$.



Çizim 9

Örnek 7

Bir atletizm stadyumunda tartan kaplamalı dairesele bir koşu yolu yapılması planlanmaktadır (çizim 10). Yolu dış yarıçapı 12 m, tartan kaplamanın genişliği ise 3 m olmalıdır. Yerleştirilmesi gereken tartan kaplamanın yüzey alanı ne kadardır?

Çözüm:

Tartan kaplamalı dairesele yol, yarıçapları $R = 12$ m ve $r = 12 - 3 = 9$ m olan bir dairesele halkadır. Buna göre formülden

$$P = (R^2 - r^2)\pi = (12^2 - 9^2)\pi = 63\pi \approx 198 \text{ m}^2.$$



Çizim 10

Soru 7

Bir su tesisatı sisteminde, dairesele halka biçiminde olan kauçuk bir koruyucu halka kullanılmaktadır. Halkanın dış yarıçapı $R = 12$ cm, iç yarıçapı ise $r = 8$ cm'dir.

- Koruyucu halkanın alanını hesapla.
- Halkanın kenarlarının toplam uzunluğu ne kadardır (dış çevre ile iç çevrenin toplamı)?
- Halkanın yapımı için 100 cm^2 başına 0,09 kg kauçuk gerekiyorsa, bir koruyucu halkanın kütlesi ne kadardır?
- Bir pakete bu tür halkalardan 25 tane konulursa, paketin toplam kütlesi ne kadar olur?

Alıştırma Soruları!

- Bir traktörün tekerleği 12 kez dönmüş ve traktör 37,68 m yol almıştır.
 - Tekerleğin yarıçapını bul.
 - Tekerlek 15 dönüş daha yaparsa traktör kaç metre yol alır?
- Bir mühendislik projesinde yarıçapları 2 mm ve 3 mm olan iki dairesele elektrik kablosu kullanılmaktadır. Mühendis, direncin değişmemesi için bu kabloları, eski iki kablonun çevreleri toplamına eşit çevreye sahip daha büyük tek bir kabloyla değiştirmeyi planlamaktadır. Yeni kablonun enine kesit alanı kaçtır?
- İki vantilatör çember biçimindedir. Çevrelerinin oranı 3 : 5'tir ve küçük vantilatörün yarıçapı 18 cm'dir. Büyük vantilatörün yarıçapını ve alanını belirle.
- Bir tarım arazisinin bir bölümü, yarıçapı 25 m ve merkez açısı 144° olan dairesele bir çizgi boyunca çitle çevrilmiştir. Çitin 1 metre uzunluğu 12 avro ise çitin toplam fiyatı ne kadardır?
- Yarıçapı 50 m olan dairesele bir tarlanın ortasında, yarıçapı 10 m olan dairesele bir su deposu bulunmaktadır.
 - Tarlanın işlenebilir alanı ne kadardır?
 - 1 m^2 başına gelir 0,8 avro ise tarlanın işlenmesinden elde edilecek toplam gelir ne kadardır?

6.6 PİRAMİDİN YÜZEY ALANI VE HACMI

Hatırla!

- Bir piramidin temel elemanları nelerdir?
- Piramidin bir düzlemlle kesitlerini say.

Unutma!

Bir piramidin yüzey alanı P taban alanı (B) ile yan yüzey alanının (M), toplamı olarak hesaplanır; yani

$$P = B + M$$

Her piramitte yan yüzler üçgendir.

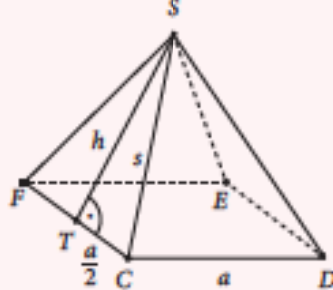
Örnek 1

Taban ayrıtı 10 cm ve yan ayrıtı 13 cm olan düzgün dörtgen piramidin yüzey alanını belirle.

Çözüm:

Düzgün dörtgen piramidin tabanı, kenarı $a = 10$ cm, olan bir karedir ve yan ayrıtının uzunluğu $s = 13$ cm'dir. Buradan taban alanı $B = a^2 = 10^2 = 100$ cm² olur. $\triangle CTS$ dik üçgeninden (çizim 1), Pisagor

teoremine göre $s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ elde ederiz; buradan $h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 169 - 25 = 144$ sonucu çıkar. Demek ki piramidin apotem uzunluğu $h = 12$ cm'dir. Şimdi, bir yan yüzün alanı $\frac{a \cdot h}{2}$ olur. Buna göre yan yüzey alanı $M = 4 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 2 \cdot a \cdot h$ olur. a ve h değerlerini yerine koyarak şunu elde ederiz: $M = 2 \cdot a \cdot h = 2 \cdot 10 \cdot 12 = 240$ cm². Piramidin yüzey alanı $P = B + M = 100 + 240 = 340$ cm² dir.



Çizim 1

Etkinlik

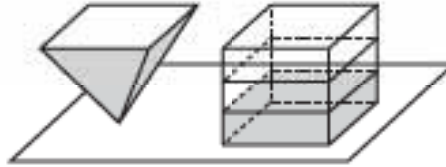
Bir binanın çatısı, taban ayrıtı 8 m olan düzgün dörtgen piramit biçimindedir ve yan yüzlerin yükseklikleri 5 m' dir. Bina, 1 m²'si 1800 denar olan sac levha ile kaplanacaksa kaplama maliyeti ne kadar olur?

Hatırla!

- Bir prizmanın temel elemanlarını belirt.
- Bir prizmanın hacmi $V = B \cdot H$ formülüyle hesaplanır. Burada B prizmanın taban alanı, H ise prizmanın yüksekliğidir.

Çizim 2'de olduğu gibi, biri prizma biçiminde, diğeri piramit biçiminde olan iki kap olsun. Bu kapların tabanları ve yükseklikleri eşittir.

Prizma biçimindeki kabı ince kumla doldurup daha sonra bu kumu piramit biçimindeki kaba dökersek, prizmadaki kumla piramit biçimindeki kabın üç kez dolduğunu görürüz.



Çizim 2

Bu deneyden, piramidin hacminin prizmanın hacminden üç kat küçük olduğu sonucuna varırız. Prizmanın hacmi $V = B \cdot H$ formülüyle hesaplandığına göre, piramidin hacmi için $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$ elde ederiz.

Unutma!

Herhangi bir piramidin hacmi V yüksekliği H ile taban alanı B 'nin çarpımının üçte birine eşittir; yani

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H \text{ veya } V = \frac{B \cdot H}{3}.$$

Örnek 2

Taban ayrıtları 13 cm, 14 cm ve 15 cm olan, yüksekliği 24 cm olan üçgen piramidin hacmini belirle.

Çözüm:

Önce, tabanı çeşitkenar üçgen olan piramidin taban alanını Heron formülünü uygulayarak hesaplayacağız.

Önce yarı çevreyi buluruz $s = \frac{13+14+15}{2} = 21$ cm. Elde edilen değeri üçgenin alan formülünde yerine koyarız; ancak taban alanını B ile gösteririz:

$$B = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} \\ = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \text{ cm}^2.$$

Bulduğumuz taban alanını hacim formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{84 \cdot 24}{3} = \frac{2016}{3} = 672 \text{ cm}^3$.

Soru 1

Taban köşegeni 24 cm ve yan ayrıtı 20 cm olan düzgün dörtgen piramidin hacmini hesapla.

Örnek 3

Tabanı, köşegenleri 18 cm ve 10 cm olan bir eşkenar dörtgen olan bir piramit verilmiştir. Piramidin küçük köşegen kesitinin alanı 15 dm^2 dir ve yüksekliğin ayağı köşegenlerin kesişim noktasında bulunmaktadır. Piramidin hacmini hesapla.

Çözüm:

Verilenleri $d_1 = 18 \text{ cm}$, $d_2 = 10 \text{ cm}$, $Q = 15 \text{ dm}^2 = 1500 \text{ cm}^2$ olarak gösterelim.

Piramidin küçük köşegen kesiti, tabanı $d_2 = 10 \text{ cm}$ ve yüksekliği H olan bir üçgendir. Buradan, bu kesitin

alanı $Q = \frac{d_2 \cdot H}{2}$ olur. Yerine koyarak $1500 = \frac{10 \cdot H}{2}$, elde ederiz; yani $H = \frac{1500 \cdot 2}{10} = 300 \text{ cm}$.

Eşkenar dörtgenin alan formülünden piramidin taban alanını hesaplarız

$$B = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{18 \cdot 10}{2} = 90 \text{ cm}^2.$$

Piramidin hacmi için $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{90 \cdot 300}{3} = 9000 \text{ cm}^3$ elde ederiz.

Soru 2

Hacmi 720 cm^3 olan bir piramit verilsin. Piramidin tabanı, kenarları 18 cm ve 10 cm olan bir dikdörtgendir ve yüksekliğin ayağı tabanın köşegenlerinin kesişim noktasında bulunmaktadır. Piramidin yan yüzey alanı belirlensin.

Örnek 4

Cam bir çatı, taban ayrıtı 6 cm ve yüksekliği 4 cm olan düzgün dörtgen piramit biçimindedir. Çatı konstrüksiyonunun hacmi (çatının ve yapının tavanı arasında bulunan boşluk) 40 cm^3 ten büyük müdür? Çözümü GeoGebra ile kontrol et.

Çözüm:

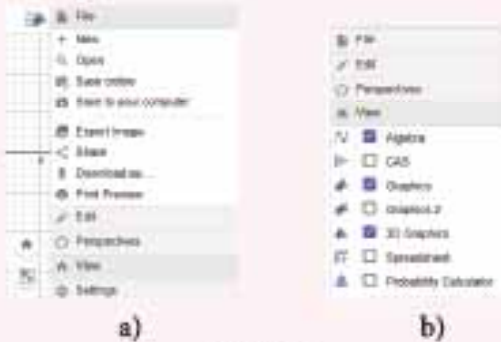
Piramidin düzgün olduğu verildiğine göre, piramidin tabanı kare olur ve alanı $B = 6^2 \text{ cm}^2$ 'dir. Daha sonra, piramidin hacim formülünden $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{36 \cdot 4}{3} = 48 \text{ cm}^3$ elde edilir. Demek ki çatının altındaki boşluğun hacmi 48 cm^3 'ten büyüktür.

Çözümü GeoGebra kullanarak kontrol edeceğiz. Öncelikle düzgün çokgen (Regular Polygon) seçeneğini seçeriz (resim 1 a), uzunluğu 6 cm olan bir doğru parçası çizeriz ve menüye düzgün çokgenin köşe sayısını gireriz (resim 1 b).



Resim 1

GeoGebra'da 3B penceresini açmak için sağ üst köşedeki üç yatay çizgiden "View" seçeneğini seçeriz (resim 2 a) ve "3D Graphics" alanını işaretleriz (resim 2 b).



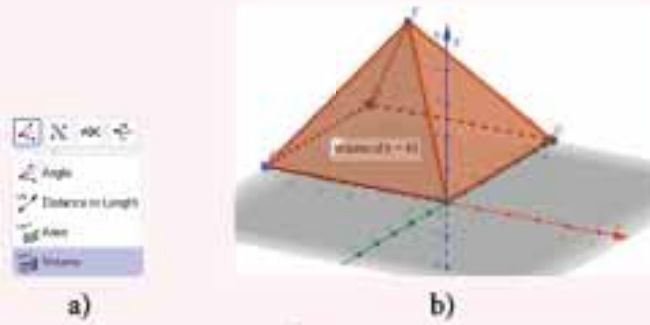
Resim 2

3B bölümünden "Extrude to Pyramid" seçeneğini seçeriz (resim 3 a), kareyi seçeriz ve piramidin yüksekliği için bir değer gireriz (resim 3 b).



Resim 3

Son olarak, piramidin hacmini hesaplamak için hacim hesaplama aracını seçeriz (resim 4 a) ve piramidin üzerinde sonucu elde ederiz (resim 4 b).



Resim 4

Hacmin 48 olduğu elde edilir. Böylece daha önce bulunan sonuç doğrulanmış olur.

Örnek 5

Bir sergi salonu, uzunluğu $a = 8$ m, genişliği $b = 6$ m olan dikdörtgen tabanlı ve yüksekliği $H_1 = 4$ m olan dik prizma biçimindedir. Salonun çatısı, aynı dikdörtgen tabana ve $H_2 = 3$ m yüksekliğe sahip bir piramittir.

- Salonda her ziyaretçinin rahat kalabilmesi için salonun iç hacminden en az 4 m^3 gerektiği kabul edilmektedir. Aynı anda salonda bulunabilecek en fazla ziyaretçi sayısını belirle.
- Zemin, yani piramidin tabanı, başka bir malzemeden yapılmışsa çatı için kaç metrekare malzeme kullanılmıştır?

Çözüm:

- Sergi salonu, çatısıyla birlikte Çizim 3'te verilmiştir. Salon, kenarları $a = 8$ m, genişliği $b = 6$ m olan dikdörtgen tabanlı ve yüksekliği $H_1 = 4$ m olan prizma biçimindedir. Buradan prizmanın hacmi

$$V_1 = B \cdot H_1 = a \cdot b \cdot H_1 = 8 \cdot 6 \cdot 4 = 192 \text{ m}^3 \text{ olur.}$$

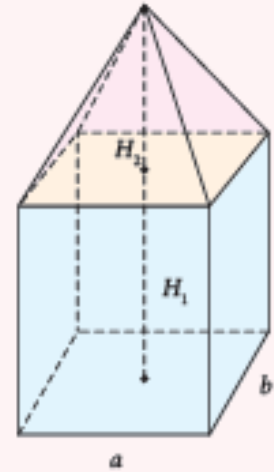
Salonun çatısı, aynı dikdörtgen tabana ve $H_2 = 3$ m yüksekliğe sahip bir piramittir. Çatının hacmi

$$V_2 = \frac{B \cdot H_2}{3} = \frac{a \cdot b \cdot H_2}{3} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 3}{3} = 48 \text{ m}^3 \text{ olur.}$$

Yapının toplam hacmi $V = V_1 + V_2 = 192 + 48 = 240 \text{ m}^3$ 'tür. Her ziyaretçi için 4 m^3 gerektiğine göre, salonda bulunabilecek en fazla

$$\text{ziyaretçi sayısı } N = \frac{240}{4} = 60 \text{ olur.}$$

- Bu durumda piramidin yan yüzey alanı istenmektedir. Taban başka bir malzemeden yapılmıştır ve bu nedenle hesaplamaya dâhil edilmez. Bu alanı belirlemek için yan yüzleri oluşturan üçgenlerin yüksekliklerini belirlemek gerekir. Taban dikdörtgendir; bu yüzden tabanı $a = 8$ m olan iki üçgen biçiminde yan yüz ve kenarı $b = 6$ m. Çizim 4'ten, tabanı a olan ve tabanı b olan üçgenlerin yükseklikleri için sırasıyla şunları buluruz:



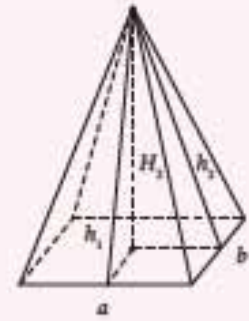
Şekil 3

- tabanı a olan yüzler için: $h_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + H_1^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$;
- tabanı b olan yüzler için: $h_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H_1^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 3^2} = 5$.

Piramidin yan yüzey alanı

$$M = 2 \cdot \frac{a \cdot h_1}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_2}{2} = a \cdot h_1 + b \cdot h_2 = 8 \cdot 3\sqrt{2} + 6 \cdot 5 = 24\sqrt{2} + 30 \approx 63,9 \text{ m}^2 \text{ olur.}$$

Demek ki çatı için yaklaşık 64 m² malzeme kullanılmıştır.



Şekil 4

Soru 3

Bir su deposu, kare tabanlı dik prizma biçimindedir. Üzerine ise kare tabanlı piramit biçiminde bir çatı yerleştirilmiştir. Kare tabanın kenarı $a = 4$ m, prizmanın yüksekliği $H_1 = 5$ m, piramidin yüksekliği ise $H_2 = 3$ m.'dir.

- Deponun toplam hacmini hesapla.
- Deponun tabanı kaplanmayacaksa, kaplama için kaç m² gereklidir?
- 1 m³ su 1000 kg ağırlığındaysa, depo tamamen dolu olduğunda suyun kütlesi ne kadardır? Peki çatısıyla birlikte ne kadardır?

Alıştırma Soruları!

- Yüksekliği 8 dm ve taban alanı 144 dm² olan düzgün dörtgen piramidin yüzey alanını hesapla.
- Yan ayrıtı 25 cm ve apotemi 24 cm olan düzgün dörtgen piramidin yüzey alanını hesapla.
- Yüksekliği 6 cm ve apotemi 10 cm olan düzgün üçgen piramidin yan yüzey alanını hesapla.
- Tahıl depolamak için kullanılan bir yapı, taban ayrıtı 6 m ve yüksekliği 4 m olan düzgün dörtgen piramit biçimindedir.
 - Yapı ne kadar tahıl alır?
 - Yapının yan yüzlerini kaplamak için kaç denar harcanır? 1 m² kaplama için 2500 denar gereklidir.
- Parktaki bir heykel, kare tabanlı piramit biçimindedir. Tabanın kenarı $a = 6$ m, piramidin yüksekliği ise $H = 4$ m'dir.
 - Heykelin hacmini hesapla. Sonucu GeoGebra ile kontrol et.
 - Piramidin toplam yüzey alanı kaçtır? Tabanı da dâhil et.
 - Yalnızca yan yüzler kaplanacaksa kaç metrekaare malzeme gereklidir?
- Bir atriyumun cam çatısı, boyutları $a = 10$ m ve $b = 6$ m olan dikdörtgen tabanlı piramit biçimindedir. Piramidin düşey yüksekliği $H = 3$ m'dir.
 - Çatının altındaki havanın hacmini hesapla. Sonucu GeoGebra ile kontrol et.
 - Çatı için gerekli cam yüzey alanını hesapla. Taban hariç tutulacaktır.
 - 1 m³ cam 25 kg ağırlığındaysa çatının toplam kütlesi ne kadardır?

6.7 KESİK PİRAMİDİN YÜZEY ALANI VE HACMİ

Hatırla!

- Piramidin paralel kesiti neyi ifade eder?
- Piramidin paralel kesiti ile tabanı birbirine göre nasıl çokgenlerdir?
- Tabanları a ve b yüksekliği h olan ikizkenar trapezin alanı

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h \text{ formülüyle hesaplanır.}$$

Unutma!

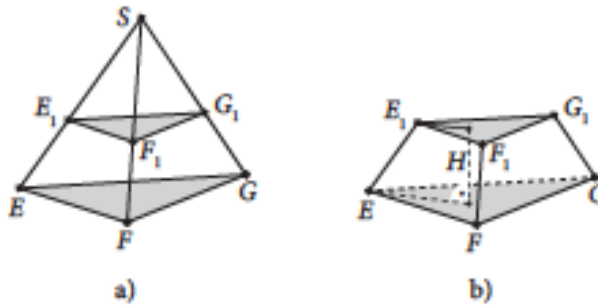
Kesik piramit, bir piramidin paralel kesiti ile tabanı arasında kalan kısmına denir.

Çizim 1 a)'da üçgen piramit $SEFG$ ve onun bir paralel kesiti $E_1F_1G_1$, gösterilmiştir. Çizim 1 b)'de ise $SEFG$ piramidinden elde edilen kesik üçgen piramit $EF_1G_1F_1E_1$ gösterilmiştir.

Piramidin tabanı ve paralel kesiti, kesik piramidin **tabanları** olarak adlandırılır.

Tabanların bulunduğu düzlemler arasındaki uzaklığa kesik piramidin **yüksekliği** denir ve H ile gösterilir.

Taban olmayan yüzlere **yan yüzler** denir ve bunlar kesik piramidin **yan yüzeyini** oluşturur.



Çizim 1

Kesik piramidin yan yüzleri nasıl dörtgenlerdir?

Unutma!

Kesik piramidin yüzey alanı P

$$P = B + B_1 + M,$$

formülüyle hesaplanır; burada B ve B_1 taban alanları, M ise yan yüzey alanıdır.

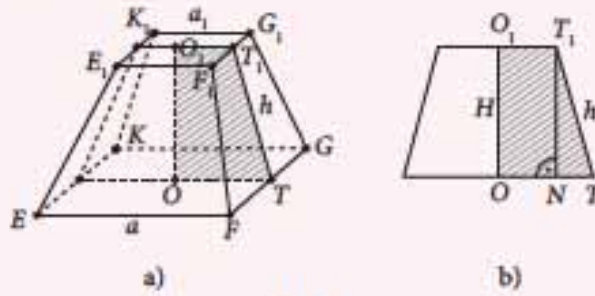
Örnek 1

Taban ayrıtları 18 cm ve 8 cm, yüksekliği 12 cm olan düzgün dörtgen kesik piramidin yüzey alanını hesapla.

Çözüm:

Kesik piramidin tabanlarının kenar uzunluklarının $a = 18$ cm, $a_1 = 8$ cm ve yüksekliğinin $H = 12$ cm olduğu verilmiştir (çizim 2). Kesik piramidin tabanları kare olduğundan, bunların alanları için şunu elde ederiz:

$$B = a^2 = 18^2 = 324 \text{ cm}^2, \quad B_1 = a_1^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2.$$



Çizim 2

Çizim 2 b)'de, kesik piramidin tabanlarının köşegenlerinin kesişim noktasından ve taban ayrıtlarının orta noktalarından geçen kesiti gösterilmiştir. Dik üçgen ΔTNT_1 'den şunu elde ederiz:

$$h^2 = \overline{TT_1}^2 = \overline{TN}^2 + \overline{NT_1}^2 = \left(\frac{a-a_1}{2}\right)^2 + H^2 = \left(\frac{18-8}{2}\right)^2 + 12^2 = 169,$$

buradan $h = \sqrt{169} = 13$ cm olduğunu elde ederiz.

Dört yan yüzün tamamı, yüksekliği h olan ikizkenar trapezlerdir. Bu nedenle yan yüzey alanı için şunu elde ederiz:

$$M = 4 \cdot \frac{a+a_1}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{18+8}{2} \cdot 13 = 676 \text{ cm}^2.$$

Son olarak, yüzey alanı formülünde yerine koyarız ve şunu elde ederiz:

$$P = B + B_1 + M = 324 + 64 + 676 = 1064 \text{ cm}^2.$$

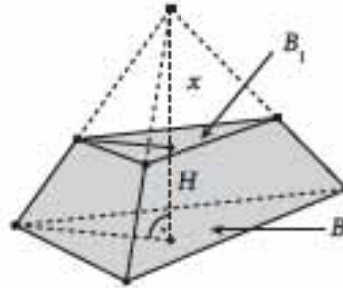
Soru 1

Düzgün dörtgen kesik piramidin taban ayrıtları 26 m ve 8 m, yan ayrıtı ise 15 m' dir. Bu piramidin yüzey alanını hesapla.

Hatırla!

- Piramidin hacmi nasıl hesaplanır?
- Piramidin paralel kesitleri nasıl ilişkilidir?
- Kesik piramidin tabanları arasındaki ilişki nasıldır?

Kesik piramidin hacmini hesaplama formülünü belirlemek için şu şekilde ilerleyeceğiz. Çizim 3'teki gibi, "tam" bir piramide tamamlanmış bir kesik piramit verilmiş olsun. Tamamlanan kısmın yüksekliğini x ile gösterelim.



Çizim 3

Piramidin paralel kesitlerinin alanları ile piramidlerin yükseklikleri arasındaki oranı kullanarak şunu elde ederiz $B : B_1 = (H + x)^2 : x^2$.

Eşitliğin iki tarafının karekökünü alarak şunu elde ederiz

$$\sqrt{B} : \sqrt{B_1} = (H + x) : x,$$

yani

$$x = \frac{H\sqrt{B_1}}{\sqrt{B} - \sqrt{B_1}} = \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1}.$$

Kesik piramidin hacmini, tam piramidin hacmi ile tamamlanan kısmın hacmi arasındaki fark olarak elde ederiz,

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot (H + x) - \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot H + B \cdot x - B_1 \cdot x] = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot H + (B - B_1) \cdot x].$$

Son olarak, son formülde x için elde edilen ifadeyi yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left[B \cdot H + (B - B_1) \cdot \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1} \right] = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}].$$

Unutma!

Kesik piramidin hacmi şu formülle hesaplanır: $V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}]$

Örnek 2

Taban ayrıtları 30 cm ve 15 cm, yüksekliği $H = 18$ cm olan düzgün dörtgen kesik piramidin hacmini hesapla.

Çözüm:

Kesik piramidin tabanları, kenarları $a = 30$ cm ve $a_1 = 15$ cm olan karelerdir. Bu nedenle taban alanları $B = 30^2 = 900$ cm² ve $B_1 = 15^2 = 225$ cm² olur.

Kesik piramidin hacim formülünde yerine koyarak şu elde edilir:

$$V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}] = \frac{18}{3} [900 + 225 + \sqrt{900 \cdot 225}] = 9450 \text{ cm}^3.$$

Soru 2

Taban ayrıtları 10 cm ve 5 cm, yüksekliği $H = 12$ cm olan düzgün üçgen kesik piramidin hacmini hesapla.

Örnek 3

Bir kesik piramidin taban alanları 36 cm^2 ve 16 cm^2 , yüksekliği ise 5 cm ' dir. Tam piramidin hacmini ve tamamlanan kısmın hacmini hesapla.

Çözüm:

Soru koşulundan $B = 36 \text{ cm}^2$, $B_1 = 16 \text{ cm}^2$ ve $H = 5 \text{ cm}$ olduğu verilmiştir. Taban alanları ile tam piramidin ve tamamlanan piramidin yükseklikleri arasındaki oranı kullanarak şunu elde ederiz:

$$B : B_1 = (H + x)^2 : x^2,$$

yani

$$36 : 16 = (5 + x)^2 : x^2.$$

Eşitliğin iki tarafının karekökünü alarak şunu elde ederiz:

$$6 : 4 = (5 + x) : x,$$

$$6x = 20 + 4x,$$

yani $x = 10 \text{ cm}$. Tam piramidin hacmi

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 15 = 180 \text{ cm}^3,$$

tamamlanan kısmın hacmi ise $V_1 = \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 10 = \frac{160}{3} \text{ cm}^3$.

Soru 2

Bir kesik piramidin taban alanları 200 dm^2 ve 50 dm^2 , tam piramidin yüksekliği ise 24 dm ' dir. Kesik piramidin hacmini hesapla.

Örnek 4

Taban ayrıtları 20 dm ve 10 dm olan düzgün dörtgen kesik piramit biçimindeki bir teneke kap, şekerle doldurulmuştur. Büyük taban üsttedir. Şekerin tamamı 56000 denara satılmıştır.

- Her kilogram şekerin 20 denara satıldığı ve 1 dm^3 hacmin yaklaşık 1 kg şeker içerdiği bilindiğine göre kabın hacmi kaçtır?
- Kabın derinliği ne kadardır?
- Kapaksız kabı yapmak için ne kadar teneke kullanılmıştır? Kapak olarak büyük taban kabul edilmektedir.

Çözüm:

- a) Toplam şeker miktarı 56000 denara satıldığına ve 1 kg şeker 20 denara satıldığına göre, kabın hacmini $V = 56000 : 20 = 2800$ kg, yani $V = 2800 \text{ dm}^3$.
- b) Soru koşulunda $a = 20 \text{ dm}$, $a_1 = 10 \text{ dm}$, olduğu verilmiştir. Kesik piramidin hacim formülü

$$\text{Buradan kabın derinliğinin } V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}] :$$

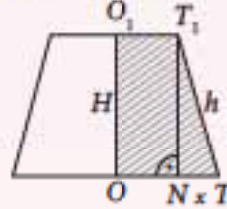
$$2800 = \frac{H}{3} \cdot [20^2 + 10^2 + \sqrt{20^2 \cdot 10^2}] ,$$

$$H = \frac{3 \cdot 2800}{700} = 12 \text{ dm olduğu sonucu çıkar.}$$

- c) Yan yüzün ikizkenar trapez olmasından dolayı (çizim 4), önce x 'i hesaplarız, $x = \frac{a - a_1}{2} = \frac{20 - 10}{2} = 5 \text{ dm}$ daha sonra yan yüzün yüksekliği için

$$h^2 = H^2 + x^2 = 12^2 + 5^2 = 169,$$

elde ederiz ve buradan $h = 13 \text{ dm}$ bulunur.



Çizim 4

Her yan yüz ikizkenar trapezdir. Bu nedenle bütün yan yüzey alanı için şunu elde ederiz:

$$M = 4 \cdot \frac{a + a_1}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{20 + 10}{2} \cdot 13 = 780 \text{ dm}^2.$$

Alt tabanın alanı $B_1 = 10^2 = 100 \text{ dm}^2$ dir. Buna göre kesik piramidin toplam yüzey alanı (kapaksız), taban alanı ile yan yüzey alanının toplamıdır, yani

$$P = B + M = 780 + 100 = 880 \text{ dm}^2.$$

Demek ki kabı yapmak için toplam 880 dm^2 teneke kullanılmıştır.

Soru 3

Bir müzede, düzgün dörtgen kesik piramit biçiminde dekoratif bir kaide yerleştirilmektedir. Büyük taban üstte, küçük taban ise alttadır. Üst tabanın ayrıtı $a = 18 \text{ dm}$, alt tabanın ayrıtı ise $a_1 = 6 \text{ dm}$ dir. Kaidenin içi tamamen betonla doldurulmaktadır. 1 dm^3 beton için $2,4 \text{ kg}$ kütle gerektiği ve betonun toplam kütlelerinin 3600 kg olduğu bilinmektedir.

- Kaidenin hacmini hesapla.
- Kaidenin yüksekliğini belirle.
- Alt taban kaplanmayacaksa, kaideyi kaplamak için gerekli malzemenin yüzey alanı ne kadardır?

Alıştırma Soruları!

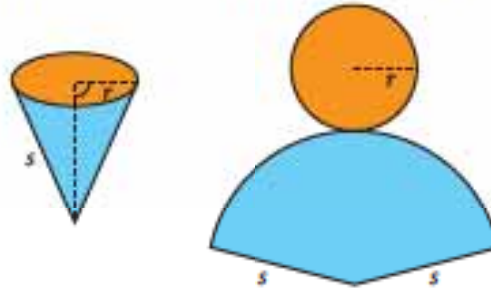
1. Taban ayrıtları 30 cm ve 20 cm, yüksekliği 12 cm olan düzgün dörtgen kesik piramidin yüzey alanını hesapla.
2. Taban ayrıtları 18 cm ve 10 cm olan, yan yüzü büyük tabana 45° lik açıyla eğimli düzgün dörtgen kesik piramidin yüzey alanını bul.
3. Taban ayrıtları 12 cm ve 6 cm, yüksekliği 2 cm olan düzgün altıgen kesik piramidin yan yüzey alanını belirle.
4. Taban alanları 162 cm^2 ve 72 cm^2 , karşılık gelen tam piramidin yüksekliği 18 cm olan kesik piramidin hacmini hesapla.
5. Üçgen kesik piramidin yüksekliği 6 cm' dir. Bir tabanın ayrıtları 5 cm, 12 cm ve 13 cm, diğer tabanın çevresi ise 15 cm' dir. Kesik piramidin hacmini hesapla.
6. Bir sütun için beton temel yapımında, taban ayrıtları 6 m ve 2 m, yüksekliği 3 m olan düzgün dörtgen kesik piramit biçiminde bir temel kullanılmaktadır. 1 m^3 betonun fiyatı 100 avrodur ve 10% beton rezervi planlanmıştır.
 - a) Temelin yapımı için ne kadar beton kullanılacaktır?
 - b) Toplamda ne kadar beton temin edilmelidir?
 - c) Beton temelin yapımı toplam kaç avroya mal olacaktır?

6.8 KONİNİN YÜZEY ALANI VE HACMİ

Hatırla!

- Yarıçapı s olan bir çemberde merkez açısı α olan daire dilimi nedir?
- Yarıçapı s olan bir çemberde merkez açısı α ile belirlenen daire diliminin yay uzunluğu $l = \frac{s\pi\alpha}{180^\circ}$ formülüyle hesaplanır.
- Yarıçapı s olan bir çemberde merkez açısı α ile belirlenen daire diliminin alanı $P = \frac{s^2\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{s\pi\alpha}{180^\circ} \cdot \frac{s}{2} = \frac{l \cdot s}{2}$ formülüyle hesaplanır; burada l , dilime karşılık gelen yay uzunluğudur.

Yarıçapı r ve ana doğrusu s olan bir koninin yüzey alanını belirlemek için koniyi Çizim 1'deki gibi açarız.



Çizim 1

Koninin tabanı, yarıçapı r olan bir dairedir. Bu nedenle taban alanı $B = r^2\pi$ olur.

Koninin yan yüzeyi, yarıçapı s olan bir dairenin daire dilimidir. Bu dilime karşılık gelen yayın uzunluğu, koninin tabanının çevresine eşittir; yani $l = 2\pi r$ olur. Buradan koninin yan yüzey alanı şu şekilde elde edilir

$$M = \frac{l \cdot s}{2} = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi rs.$$

Unutma!

Koninin yüzey alanı P , taban alanı B ile yan yüzey alanı M 'nin toplamıdır:

$$P = \pi r^2 + \pi rs, \text{ t.e. } P = \pi r(r + s).$$

Örnek 1

Yüksekliği $H = 24$ cm ve ana doğrusu $s = 26$ cm olan koninin yüzey alanını hesapla.

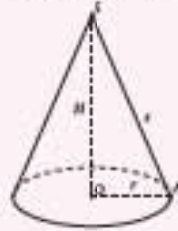
Çözüm:

OS dik üçgeninden Pisagor teoremini uygulayarak şunu elde ederiz:

$$r^2 = s^2 - H^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100,$$

buradan yarıçapın $r = 10$ cm. olduğunu elde ederiz. Şimdi s ve r değerlerini koninin yüzey alanı formülünde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$P = \pi(r + s) = \pi \cdot 10 \cdot (10 + 26) = 360\pi \text{ cm}^2.$$



Çizim 2

Soru 1

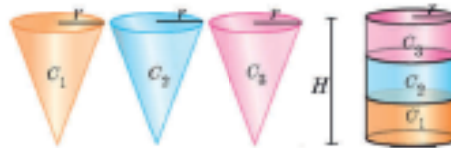
Yüksekliği 21 cm ve taban çevresi 56π cm olan koninin yüzey alanını hesapla.

Hatırla!

- Silindirin hacmini hesaplama formülü nedir?
- Prizma ve piramit aynı tabana ve eşit yüksekliklere sahipse, piramidin hacmi prizmanın hacminin ne kadarlık kısmını doldurur?

Koninin hacim formülünü belirlemek için taban yarıçapı r ve yüksekliği H olan üç eş koniyi inceleyelim. Bunların kumla doldurulduğunu varsayalım. Üç konideki kum, sırasıyla aynı taban yarıçapı r ve aynı yüksekliği H olan bir silindire aktarılsa, silindirin tam tepe noktasına kadar, hiç artan kum kalmadan dolduğu görülür (Çizim 3). Buradan, bir koninin hacminin, aynı taban yarıçapına ve aynı yüksekliğe sahip silindirin hacminin üçte birine eşit olduğu sonucuna varırız, yani:

$$V_{\text{koni}} = \frac{1}{3} V_{\text{silindir}} = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$



Çizim 3

Unutma!

Taban yarıçapı r ve yüksekliği H olan koninin hacmi şu formülle hesaplanır:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$

Örnek 2

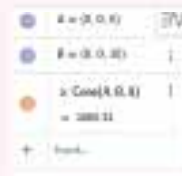
Yarıçapı 8 cm ve yan yüzey alanı $136\pi \text{ cm}^2$ olan koninin hacmini hesapla. Çözüm GeoGebra ile kontrol edilsin.

Çözüm:

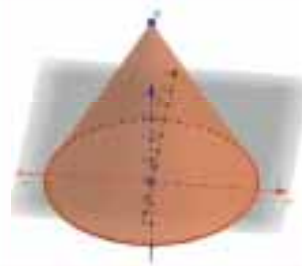
Yan yüzey alanı formülü $M = \pi r s$ olduğundan $136\pi = \pi \cdot 8 \cdot s$, olur ve buradan $s = \frac{136}{8} = 17 \text{ cm}$ elde edilir. Pisagor teoreminden yükseklik H , $H^2 = s^2 - r^2$ biçiminde ifade edilebilir (Çizim 2). r ve s değerleri yerine yazıldığında $H^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$, yani $H = 15 \text{ cm}$ elde edilir. Son olarak, koninin hacim formülünü kullanarak şunu elde ederiz:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 320\pi \text{ cm}^3.$$

Çözümü GeoGebra kullanarak kontrol edeceğiz. Giriş alanına ("Input Bar"), koninin taban merkezini temsil eden $A(0,0,0)$ noktasını ve koninin tepe noktası olan, tabandan 15 birim yükseklikte bulunan $B(0,0,15)$ noktasını gireriz. Son olarak $\text{Cone}(A, B, 8)$ yazarız (resim 1 a). Ardından "Enter" tuşuna basıldığında yarıçapı 8 cm ve yüksekliği 15 cm olan dik dairesel koni çizilir (resim 1 b) ve giriş alanında koninin hacmi otomatik olarak gösterilir (resim 1 a).



a)



b)

Resim 1

Soru 2

Yüzey alanı $108\pi \text{ cm}^2$ olan eşkenar koninin hacmini hesapla.

Örnek 3

Ana doğrusu yüksekliğinden 2 cm fazla olan ve taban çapı 12 cm olan koninin yüzey alanını ve hacmini hesapla.

Çözüm:

Soru koşulundan $s = H + 2$ ve $d = 12 \text{ cm}$ olduğu verilmiştir. Buna göre taban yarıçapı için

$$r = 12 : 2 = 6 \text{ cm} \text{ elde edilir.}$$

Şimdi $s^2 = H^2 + r^2$ formülünde yerine koyarız ve $(H + 2)^2 = H^2 + 6^2$, elde ederiz, yani

$$\begin{aligned} H^2 + 4H + 4 &= H^2 + 36, \\ 4H &= 32, \end{aligned}$$

buradan yükseklik $H = 8$ cm olur.

Ana doğru için $s = 8 + 2 = 10$ cm elde ederiz.

Koninin yüzey alanı ve hacim formüllerinde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$P = \pi r(r + s) = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 10) = 96\pi \text{ cm}^2 \text{ ve } V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \text{ cm}^3.$$

Örnek 4

Taban çevresi 37,68 m ve ana doğrusu 10 m olan koni biçimindeki bir saman yığınının kaç metreküp saman vardır?

Çözüm:

Taban çevresinin $l = 37,68$ m ve ana doğrunun $s = 10$ m, olduğu verilmiştir. Dairenin çevre formülünden $2\pi r = 37,68$ elde edilir. Buradan taban yarıçapı için

$$r = \frac{37,68}{2\pi} = \frac{37,68}{6,28} = 6 \text{ m elde edilir.}$$

Devamında $s^2 = H^2 + r^2$ formülünden $H^2 = 10^2 - 6^2 = 64$ olur, buna göre $H = 8$ m'dir.

Koninin hacmi için $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \approx 301 \text{ m}^3$, elde edilir; demek ki yığınının yaklaşık 301 m³ saman vardır.

Soru 3

Bir bahçede oyun alanı için kuru kumdan koni biçiminde bir yığın oluşturulmaktadır. Dairesel tabanın çevresi $l = 31,4$ m, koninin ana doğrusu $s = 8$ m ve kumun yoğunluğu $\rho = 1,6 \text{ t/m}^3$.

- Yığının kaç metreküp kum vardır?
- Kumun ton cinsinden toplam ağırlığı ne kadardır?

Alıştırma Soruları!

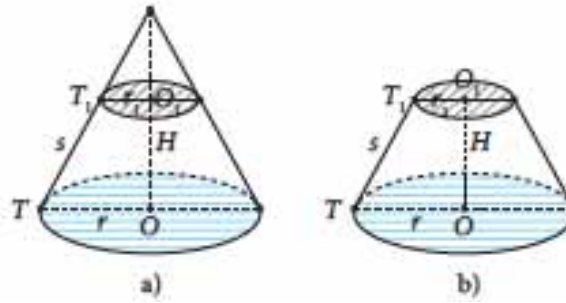
- Yükseklikleri eşit olan iki koninin taban çapları sırasıyla 40 cm ve 1 m ise hacimleri hangi orandadır? Konilerin yüksekliği $H = 20$ cm ise sonuç GeoGebrada kontrol edilsin.
- Dik kenarları 30 cm ve 40 cm olan bir dik üçgen, hipotenüsü etrafında döndürülüyor. Bu şekilde elde edilen cismin yüzey alanını ve hacmini belirle.
- Bir dik konide yarıçap ile yükseklik oranı 2 : 3'tür ve yan yüzey alanı $8\pi\sqrt{13} \text{ cm}^2$ dir. Bu koninin hacmini hesapla.
- İçinde 5 l su bulunan bir kaptan, yarıçapı 4 cm ve ana doğrusu 4 cm olan koni biçimindeki bardaklar dolduruluyor. Kaç tam bardak doldurulabilir?
- Yüksekliği 4 m ve taban çevresi 18,84 m olan koni biçimindeki bir çadırı kaplayan bezin maliyetini hesapla. 1 m² bez 150 denardır.
- Taban çevresi 12 m ve her birinin yüksekliği 9 m olan koni biçimindeki 15 eş kum yığınının taşınması için kaç tane beş tonluk kamyon gerekir? 1 m³ kumun kütlesi 1,5 tondur.

6.9 KESİK KONİNİN YÜZEY ALANI VE HACMİ

Hatırla!

- Koninin paralel kesiti ve eksen kesiti nedir?
- Eşkenar koni nedir?
- Kesik koninin her eksen kesiti nedir?

Çizim 1 a)'da bir koni ve onun bir paralel kesiti gösterilmiştir; Çizim 1 b)'de ise taban ile kesit arasındaki kısım ayrıca gösterilmiştir.

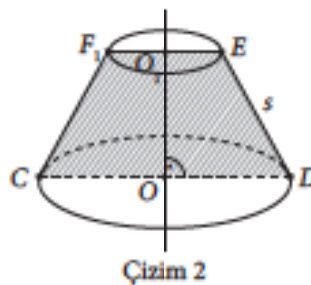


Çizim 1

Unutma!

- Koninin tabanı ile koninin bir paralel kesiti arasında kalan kısma **kesik koni** denir.
- Koninin tabanı ve paralel kesiti, kesik koninin **tabanları** olarak adlandırılır; uç noktaları tabanların merkezleri olan doğru parçasına ise kesik koninin **ekseni** denir.
- Tabanlar arasındaki uzaklığa **yükseltilik**, koninin ana doğrusunun tabanlar arasında kalan kısmına ise kesik koninin **ana doğrusu** veya **generatrisi** denir.

Ayrıca kesik koni, bir dik trapezin küçük dik kenarı etrafında döndürülmesiyle (Çizim 2'deki $ODEO_1$ trapezi) ya da bir ikizkenar trapezin simetri ekseni etrafında döndürülmesiyle (Çizim 2'deki $CDEF$ trapezi) de elde edilebilir.



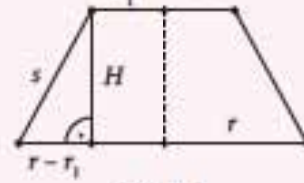
Çizim 2

Örnek 1

Yüksekliği 10 cm, büyük tabanının yarıçapı 8 cm ve eksen kesitinin alanı 130 cm^2 olan kesik koninin küçük taban yarıçapını hesapla.

Çözüm:

$H = 10 \text{ cm}$, $r = 8 \text{ cm}$ ve $Q = 130 \text{ cm}^2$ olduğu verilmiştir. Eksen kesiti, tabanları $2r$ ve $2r_1$ olan bir ikizkenar trapezdir (Çizim 3). İkizkenar trapezin alan formülünden $Q = \frac{2r + 2r_1}{2} \cdot H = (r + r_1) \cdot H$, $r + r_1 = \frac{Q}{H}$ elde ederiz. Buradan küçük tabanın yarıçapı $r_1 = \frac{Q}{H} - r = \frac{130}{10} - 8 = 5 \text{ cm}$.



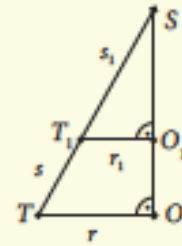
Çizim 3

Soru 1

Bir kesik koninin tabanlarının yarıçapları 13 cm ve 8 cm, generatrişi ise 13 cm dir. Kesik koninin eksen kesitinin alanını hesapla.

Hatırla!

- Çizim 4'teki hangi iki üçgen benzerdir?
- Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarları birbirine göre nasıldır?



Çizim 4

Unutma!

Kesik koninin yüzey alanı, taban alanlarının toplamı ile yan yüzey alanının toplamına eşittir: $P = B + B_1 + M$; burada $B = \pi r^2$, $B_1 = \pi r_1^2$ taban alanlarıdır, M ise yan yüzey alanıdır.

Kesik koninin yan yüzey alanı, bütün koninin yan yüzey alanı ile tamamlanan kısmın (bütün koniye tamamlayan kısmın) yan yüzey alanı arasındaki fark olarak hesaplanır. Çizim 4'e göre şunu elde ederiz:

$$M = \pi \cdot r \cdot \overline{ST} - \pi \cdot r_1 \cdot \overline{ST_1} = \pi \cdot r \cdot (s + s_1) - \pi \cdot r_1 \cdot s_1 = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r \cdot s_1 - \pi \cdot r_1 \cdot s_1,$$

yani

$$M = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot (r - r_1) \cdot s_1$$

Bu formüllerde s , kesik koninin generatrisidir; $a + s_1$ ise bütün koninin generatrisidir.

SOT ve SO_1T_1 üçgenleri benzer olduğundan, karşılık gelen kenarları orantılıdır. Buna göre $\frac{r}{r_1} = \frac{s_1 + s}{s_1}$ olur.

Buradan $s_1 = \frac{s \cdot r_1}{r - r_1}$ elde ederiz. s_1 değerini M için son eşitlikte yerine koyarsak şunu elde ederiz

$$M = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot (r - r_1) \cdot \frac{s \cdot r_1}{r - r_1} = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r_1 \cdot s = \pi \cdot s \cdot (r + r_1).$$

Unutma!

Taban yarıçapları r ve r_1 , generatrisi s olan kesik koninin yüzey alanı şu formülle hesaplanır:

$$P = \pi r^2 + \pi r_1^2 + \pi \cdot s \cdot (r + r_1),$$

yani

$$P = \pi(r^2 + r_1^2 + s \cdot (r + r_1)).$$

Örnek 2

Bir ikizkenar trapezin simetri eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen kesik koninin taban çapları 18 cm ve 8 cm, yüksekliği ise 12 cm'dir. Bu kesik koninin yüzey alanını hesapla.

Çözüm:

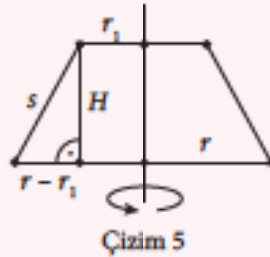
Taban çaplarının 18 cm ve 8 cm olduğu verilmiştir. Buna göre bu kesik koninin taban yarıçapları

$r = \frac{18}{2} = 9$ cm ve $r_1 = \frac{8}{2} = 4$ cm olur. Çizim 5'teki dik üçgenden

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm buluruz.}$$

Yüzey alanı formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$P = \pi(9^2 + 4^2 + 13 \cdot (9 + 4)) = 266\pi \text{ cm}^2.$$



Soru 2

Yarıçapları 12 cm ve 6 cm, ana doğrusu 8 cm olan bir kesik koninin yan yüzey alanını ve yüzey alanını hesapla.

Örnek 3

Yüksekliği 15 cm, taban yarıçapları 28 cm ve 8 cm olan kesik koninin yüzey alanını hesapla.

Çözüm:

Soru koşulunda $H = 15$ cm, $r = 28$ cm ve $r_1 = 8$ cm verilmiştir.

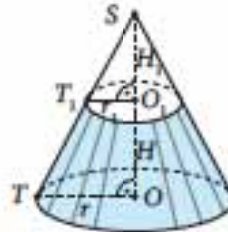
Çizim 5'teki dik üçgenden

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{(28 - 8)^2 + 15^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ cm elde ederiz.}$$

Yüzey alanı formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$P = \pi(r^2 + r_1^2 + s \cdot (r + r_1)) = \pi(28^2 + 8^2 + 25 \cdot (28 + 8)) = 1748\pi \text{ cm}^2.$$

Kesik koninin hacmini, bütün koninin hacmi ile tamamlanan kısmın hacmi arasındaki fark olarak belirleyeceğiz (Çizim 6).



Çizim 6

Koninin hacim formüllerine göre

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \overline{SO} - \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot \overline{SO_1} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot (H + H_1) - \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot H_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi (r^2 - r_1^2) H_1 \text{ elde ederiz.}$$

Son formülde H kesik koninin yüksekliği, $H + H_1$ ise bütün koninin (tamamlanan kısmıyla birlikte) yüksekliğidir.

Devamında koninin tamamlanan kısmının yüksekliği olan H_1 'i r , r_1 ve H cinsinden ifade edeceğiz. SOT ve

SO_1T_1 üçgenlerinin benzerliğinden $\frac{r}{r_1} = \frac{H + H_1}{H_1}$ elde ederiz. Buradan $H_1 = \frac{r_1 H}{r - r_1}$ olur. H_1 değerini hacim

formülünde yerine koyduğumuzda formül şu biçimi alır:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi (r - r_1)(r + r_1) \frac{r_1 H}{r - r_1} = \frac{H \pi}{3} (r^2 + r_1^2 + r r_1).$$

Unutma!

Taban yarıçapları r ve r_1 , yüksekliği H olan kesik koninin hacmi şu formülle belirlenir:

$$V = \frac{H \pi}{3} (r^2 + r_1^2 + r r_1).$$

Örnek 4

Bir çiçek saksısı, yüksekliği 12 cm ve taban yarıçapları 15 cm ile 10 cm olan kesik koni biçimindedir.

- Saksı ne kadar toprak alır?
- Saksının yan yüzey alanını hesapla.

Çözüm:

Soru koşullarında $H = 12$ cm, $r = 15$ cm ve $r_1 = 10$ cm değerleri verilmiştir.

- Formülde yerine koyarak $V = \frac{12\pi}{3}(15^2 + 10^2 + 15 \cdot 10) = 1900\pi \text{ cm}^3$ elde ederiz.

Demek ki saksı $1900\pi \text{ cm}^3 \approx 6000 \text{ cm}^3$ veya 6 dm^3 toprak alır.

- Çizim 5'ten generatris için $s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm elde ederiz. Buna göre yan yüzey alanı için şunu buluruz:

$$M = \pi \cdot s \cdot (r + r_1) = \pi \cdot 13 \cdot (15 + 10) = 325\pi \text{ cm}^2.$$

Örnek 5

Sacdan yapılmış bir kova, taban çapları 20 cm ve 36 cm, yüksekliği 28 cm olan kesik koni biçimindedir.

- Kova kaç litre su alır?
- Kullanılan sacın %10'unun atık olduğu biliniyorsa, bu tür 40 kovanın yapımı için kaç metrekare sac temin edilmiştir?

Çözüm:

- Şu veriler verilmiştir: $d = 20$ cm, $d_1 = 36$ cm ve $H = 28$ cm. Taban yarıçapları için $r = 10$ cm ve $r_1 = 18$ cm elde ederiz. Kovanın kaç litre su aldığını hesaplamak için kesik koninin hacmini hesaplamak gerekir. Buna göre hacim formülünde yerine koyarak şunu elde ederiz:

$$V = \frac{28\pi}{3}(10^2 + 18^2 + 10 \cdot 18) = 5637,33\pi \text{ cm}^3 \approx 17701,23 \text{ cm}^3 = 17,7 \text{ dm}^3 = 17,7 \text{ l.}$$

Demek ki kova yaklaşık 17,7 litre su alır.

- Kovanın yüzey alanını hesaplamak için önce generatrisin uzunluğu s belirlenmelidir:

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{8^2 + 28^2} = 29,1 \text{ cm.}$$

Sonra kovanın üst tabanı olmadan yüzey alanını belirlemek gerekir. Kovada büyük tabanın üst tarafta olduğunu belirtelim. Buna göre istenen yüzey alanı şu olur:

$$\begin{aligned} P &= B + M = \pi r^2 + \pi \cdot s \cdot (r + r_1) = \pi \cdot (10^2 + 29,1 \cdot (10 + 18)) = \\ &= 914,8\pi \text{ cm}^2 = 2872,5 \text{ cm}^2 \approx 0,287 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

40 kova için $40 \cdot 0,287 \text{ m}^2 = 11,5 \text{ m}^2$ sac gerekir. Temin edilen toplam sac miktarı (atıkla birlikte) $11,5 / 0,9 \approx 12,8 \text{ m}^2$ dir.

Soru 3

Bir kimyasal ürünler fabrikasında, üstü açık olan kesik koni biçiminde metal bir depo kullanılmaktadır. Üst çap 2,4 m, alt çap 3,6 m ve deponun yüksekliği 2 m' dir.

- Depoda depolanabilecek sıvının hacmini hesapla.
- Koruyucu tabaka ile kaplanması gereken iç yan yüzey alanı ne kadardır?
- 1 m² koruyucu tabaka 18 avro ise kaplama için toplam maliyet ne kadardır?

Alıştırma Soruları

- Taban yarıçapları 10 cm ve 6 cm olan kesik koninin yüzey alanını hesapla; koninin tamamlanan kısmının yüksekliği 12 cm' dir.
- Tabanları 50 cm ve 30 cm, alanı 960 cm² olan ikizkenar trapez, simetri eksenini etrafında döndürülüyor. Elde edilen cismin yüzey alanını ve hacmini hesapla.
- Tabanları 22 cm ve 14 cm, küçük dik kenarı 15 cm olan dik trapezin küçük dik kenarı etrafında döndürülmesiyle elde edilen kesik koninin yüzey alanını hesapla.
- Bir kesik koninin taban yarıçapları 5 : 3 oranındadır. Kesik koninin yüksekliği 12 cm ve büyük tabanının alanı 100π cm² olduğuna göre yüzey alanını ve hacmini hesapla.
- Taban yarıçapları 10 dm ve 4 dm, ana doğrusu 10 dm olan kesik koniyle aynı yüksekliğe ve aynı yan yüzey alanına sahip silindirin yarıçapını belirle.
- Bir bahçede, kesik koni biçiminde 4961,2 cm³ toprak alacak beton bir çiçeklik yapılması planlanmaktadır. Taban yarıçapları 14 cm ve 6 cm ise çiçekliğin yüksekliği ne kadar olacaktır?

6.10 KÜRENİN YÜZEY ALANI VE KÜRE PARÇALARI

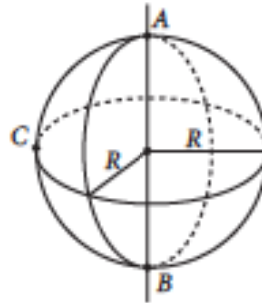
Hatırla!

Bir düzlemde, bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan tüm noktaların kümesine ne ad verilir?

Unutma!

- Uzayda, verilen bir O noktasından verilen R uzaklığında bulunan tüm noktaların kümesine **küre** denir ve $S(O, R)$ ile gösterilir. O noktasına kürenin **merkezi** denir.
- Uç noktaları kürenin merkezi ve küre üzerindeki herhangi bir nokta olan doğru parçasına kürenin **yarıçapı** denir ve R ile gösterilir.
- Uç noktaları küre üzerindeki herhangi iki nokta olan doğru parçasına **kiriş** denir.
- Kürenin merkezinden geçen kiriş kürenin **çapı** denir.

Kürenin, bir yarım çemberin çapı etrafında döndürülmesiyle elde edilen bir dönel yüzey olduğuna dikkat et (Çizim 1).



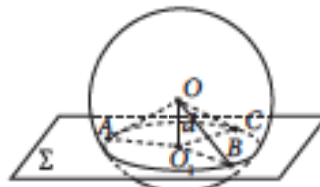
Çizim 1

Kürenin merkezi O 'dan verilen Σ düzlemine olan dik uzaklık d , küre ile düzlemin **merkezsiz uzaklığı** olarak adlandırılır.

$d > R$ ise küre ile düzlemin ortak noktası yoktur.

$d = R$ ise küre ile düzlemin bir ortak noktası vardır. Bu durumda düzlem küreye teğettir ve **teğet düzlem** olarak adlandırılır.

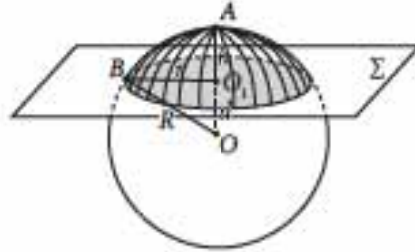
$d < R$ ise düzlem küreyi keser ve kesit bir çemberdir (Çizim 2).



Çizim 2

Düzlem kürenin merkezinden geçerse, düzlem ile kürenin kesiti, yarıçapı kürenin yarıçapına eşit olan bir çemberdir. Bu çember, kürenin bir düzlemle kesiti olarak elde edilebilecek en büyük çemberdir ve küreyi iki yarım küreye ayırır. Böyle çemberlere **ana kesit çemberleri** denir.

Σ düzlemi küreyi kesiyor ve merkezden geçmiyorsa, küre iki eşit olmayan parçaya ayrılır ve bunların her birine **küresel kapak** denir. Kabul gereği, küresel kapak olarak kürenin daha küçük kısmı alınır ve küresel kapağın kendi yüksekliği h vardır (Çizim 3).



Çizim 3

Örnek 1

Bir küre, merkezinden 12 cm uzaklıktaki bir düzlemle kesildiğinde oluşan ve kesit çemberinin çevresi 10π cm olan küresel kapağın yüksekliğini belirle.

Çözüm:

Çemberin çevre formülünden $L = 2r\pi$ olur. Buradan yerine koyarak $2r\pi = 10\pi$ ve $r = 5$ cm elde ederiz.

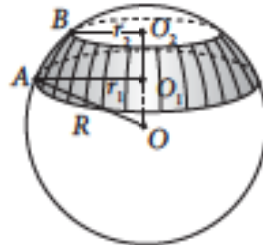
Çizim 3'e göre uzaklık $d = \overline{OO_1}$, yarıçap ise $r = \overline{O_1B}$ ' dir. Buna göre dik üçgen $\triangle OO_1B$ 'den $R^2 = 12^2 + 5^2$, elde ederiz. Karekök alarak yarıçap için $R = 13$ cm.

Küresel kapağın yüksekliği $h = \overline{OA} - d = R - d = 13 - 12 = 1$ cm' dir.

Birbirine paralel iki kesit arasında kalan küre parçasına **küresel kuşak** veya kısaca **kuşak** denir (Çizim 4).

İki paralel kesit arasındaki uzaklık, kuşağın **yüksekliği**dir. Çizim 4'te kuşağın yüksekliği $\overline{O_1O_2}$ doğru parçasının uzunluğudur, yani $h = \overline{O_1O_2} = h$, başka bir ifadeyle $h = \overline{O_1O_2}$ ' dir.

$d_1 = \overline{OO_1}$ ve $d_2 = \overline{OO_2}$ kesitlerin merkezsiz uzaklıkları ise, kesitler merkeze göre aynı tarafta olduğunda $h = d_1 - d_2$ kesitler merkeze göre farklı taraflarda olduğunda ise $h = d_1 + d_2$ olur.



Çizim 4

Soru 1

Bir küre, kürenin merkezinden 15 cm uzaklıkta bulunan bir düzlemle kesilmiştir. Oluşan küresel kapağın yüksekliği 10 cm'dir. Kesit çemberinin çevresini belirle.

Etkinlik 1

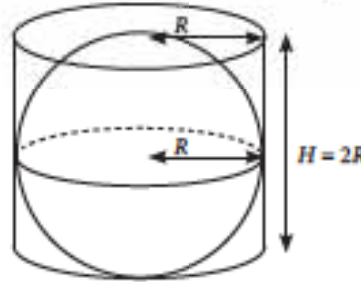
Küçük bir top (örneğin pinpon topu) ve kâğıt şerit ya da ince kâğıt gereklidir. Kâğıt şeridi, topun en büyük çemberi (ekvatoru) boyunca topun etrafına sar.

- Şeridin uzunluğunu ölç; bu yaklaşık olarak $2\pi R$ çevresidir.
- Kâğıttan şu özelliklerde bir dikdörtgen hazırla:
 - genişliği ölçülen çevreye eşit olsun
 - yüksekliği yaklaşık olarak topun çapına, yani $2R$ 'ye eşit olsun.
- Topun etrafına sarılan dikdörtgen, kürenin etrafındaki silindirin yan yüzeyini temsil eder.

Kürenin yüzey alanı ile silindirin yan yüzey alanı arasındaki ilişkiyi belirle.

Kürenin Yüzey Alanı

Yarıçapı R olan bir küre verilmiş olsun. Bu kürenin etrafına, taban yarıçapı R ve yüksekliği $H = 2R$ olan bir silindir çizelim. Küre, silindire üst ve alt tabanda ve bir ana kesit çemberi boyunca teğettir (Çizim 5).



Çizim 5

Kürenin yüzey alanının çıkarımında, Arşimet'in kanıtladığı şu sonucu kullanacağız:

Kürenin yüzey alanı, onun etrafına çizilen silindirin yan yüzey alanına eşittir.

Demek ki kürenin yüzey alanını belirleme, kürenin etrafına çizdiğimiz silindirin yan yüzey alanını belirlemeye indirgenir (Çizim 5). Bu yüzey alanı ise

$$M = 2\pi R \cdot H = 2\pi R \cdot 2 \cdot R = 4\pi R^2 \text{ olur.}$$

Unutma!

Yarıçapı r olan kürenin yüzey alanı $P_{\text{küre}} = 4\pi R^2$.

Yarıçapı R olan kürenin yüzey alanı, yarıçapı R olan dairenin alanından 4 kat büyüktür.

Örnek 2

Bir kürenin yarıçapı $R = 7 \text{ cm}$ ' dir. Kürenin yüzey alanını hesapla.

Çözüm:

Formülün uygulanmasıyla kürenin yüzey alanının şu olduğu elde edilir:

$$P_{\text{küre}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 7^2 = 196\pi \text{ cm}^2.$$

Soru 2

Metal bir kürenin yüzey alanı $324\pi \text{ cm}^2$ dir. Kürenin yarıçapını belirle.

Küresel Kapağın Yüzey Alanı

R kürenin yarıçapı, h ise küresel kapağın yüksekliği olsun. Bu küresel kapağın yüzey alanını belirlemek için yine Arşimet'in şu sonucunu kullanırız:

Yarıçapı R ve yüksekliği h olan küresel kapağın yüzey alanı, yarıçapı R ve yüksekliği h olan silindirin yan yüzey alanına eşittir.

Bu, aslında bütün kürenin yüzey alanını belirlerken kullandığımız aynı fikirdir; ancak bu durumda yalnızca onun "bir kısmının" yüzey alanı istenir. Yarıçapı R ve yüksekliği h olan silindirin yan yüzey alanı ise

$$M = 2\pi R \cdot h.$$

Arşimet'in sonucuna göre, küresel kapağın yüzey alanı da aynı formülle belirlenir.

Unutma!

Yüksekliği h olan ve yarıçapı R olan bir küreden elde edilen küresel kapağın yüzey alanı şu formülle belirlenir:

$$P_{\text{kapak}} = 2\pi R \cdot h.$$

Formül, kürenin, kapağı oluşturan düzlemle yaptığı dairesel kesitin yarıçapına bağlı değildir.

Örnek 3

Bir küresel kapağın yüzey alanı $40\pi \text{ dm}^2$ dir. Kürenin yarıçapı $R = 5 \text{ dm}$ ' dir. Küresel kapağın yüksekliğini belirle.

Çözüm:

Küresel kapağın yüzey alanı formülünden $P_{\text{kapak}} = 2\pi R \cdot h$ elde edilir $h = \frac{P_{\text{kapak}}}{2\pi R} = \frac{40\pi}{2\pi \cdot 5} = 4 \text{ dm}$.

Soru 3

Bir kürenin yarıçapı $R = 10$ cm' dir. Bir düzlemle yüksekliği $h = 3$ cm olan bir küresel kapak kesilmiştir. Küresel kapağın yüzey alanını hesapla.

Küre İçindeki Kuşağın Yüzey Alanı

Kürenin yarıçapı R , kuşağın yüksekliği h olsun ve kuşak, merkez in aynı tarafında bulunan iki paralel düzlemle oluşturulmuş olsun. Bu şekilde oluşturulan her kuşak, iki küresel kapağın farkı olarak incelenebilir. Küresel kapakların yükseklikleri h_1 ve h_2 olsun ($h_1 < h_2$) ve $h = h_2 - h_1$ olsun.

İki küresel kapağın yüzey alanları

$$P_1 = 2\pi R \cdot h_1 \text{ ve } P_2 = 2\pi R \cdot h_2.$$

Kuşağın yüzey alanı, bu iki yüzey alanının farkı olarak belirlenir:

$$P_{\text{kuşak}} = P_2 - P_1 = 2\pi R \cdot h_2 - 2\pi R \cdot h_1 = 2\pi R (h_2 - h_1) = 2\pi R h.$$

Kuşağın yüzey alanını hesaplama için aynı formül, kuşak merkezin farklı taraflarında bulunan iki paralel düzlemle oluşturulduğunda da elde edilir.

Unutma!

Yarıçapı R olan bir kürede, yüksekliği h olan kuşağın yüzey alanı şu formülle belirlenir:

$$P_{\text{kuşak}} = 2\pi R \cdot h.$$

Küresel kapak ve kuşağın yüzey alanı için önceki iki formül karşılaştırıldığında şu sonuca varılabilir: Aynı kürede bir küresel kapak ile bir kuşak aynı yüksekliğe sahipse, bunların yüzey alanları da aynıdır. Bu yüzey alanı yalnızca R ve h değerlerine bağlıdır; küre içindeki konumlarına bağlı değildir.

Örnek 4

Bir küresel kuşağın yüzey alanı 36π dm² dir. Kürenin yarıçapı $R = 6$ dm' dir.

- Kuşağın yüksekliğini belirle.
- Kuşağın yüzey alanını bütün kürenin yüzey alanı ile karşılaştır.

Çözüm:

- Kuşağın yüzey alanı formülü $P_{\text{kuşak}} = 2\pi R h$ 'den kuşağın yüksekliğini ifade edebiliriz:

$$h = \frac{P_{\text{kuşak}}}{2\pi R} = \frac{36\pi}{2\pi \cdot 6} = 3 \text{ dm}$$

- Kürenin yüzey alanı şöyledir:

$$P_{\text{küre}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi \text{ dm}^2$$

Bu iki yüzey alanını karşılaştırsak şunu elde ederiz:

$$\frac{P_{\text{kuşak}}}{P_{\text{küre}}} = \frac{36\pi}{144\pi} = \frac{1}{4}$$

yani

$$P_{\text{küre}} = 4 \cdot P_{\text{kuşak}}$$

Örnek 5

Bir kürenin merkezine göre farklı taraflarda, yarıçapları 12 cm ve 16 cm olan iki paralel kesit oluşturulduğunda elde edilen küresel kuşağın yüzey alanını hesapla. Kesitler arasındaki uzaklık 28 cm' dir.

Çözüm:

Soru koşullarına göre kuşağın yüksekliği $h = 28$, tabanların yarıçapları $r = 16$ cm, $r_1 = 12$ cm' dir. Kuşağın yüzey alanının $P = 2R\pi h$ formülüyle hesaplanabilmesi için kürenin yarıçapı R belirlenmelidir.

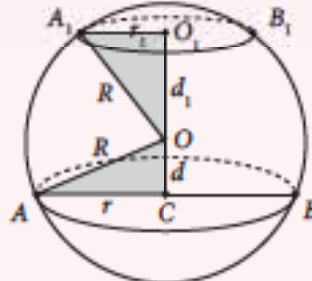
Kürenin merkezi O 'dan bir kesite olan uzaklık d , O 'dan diğer kesite olan uzaklık ise d_1 olsun. O hâlde kuşağın yüksekliği $h = d + d_1$, yani $d + d_1 = 28$ ve $d_1 = 28 - d$ olur. Çizim 6'daki dik üçgenler $\triangle OO_1A_1$ ve $\triangle OCA$ incelenir. Bunlardan $R^2 = d_1^2 + r_1^2$ ve $R^2 = d^2 + r^2$ denklemleri elde edilir. Bunları birbirine eşitlediğimizde $d^2 + r^2 = d_1^2 + r_1^2$ olur. Eşitlikte $r = 16$ cm, $r_1 = 12$ cm ve $d_1 = 28 - d$ yazılırsa d 'ye göre şu biçimde bir denklem elde edilir:

$$d^2 + 16^2 = (28 - d)^2 + 12^2.$$

Bu denklem çözülürse:

$$\begin{aligned} d^2 + 256 &= 784 - 56d + d^2 + 144, \\ 56d &= 672, \end{aligned}$$

yani $d = 12$ cm olur. Buna göre kürenin yarıçapı için $R = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$ cm elde ederiz. Küresel kuşağın yüzey alanı için ise $P = 2R\pi h = 2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot 28 = 1120\pi$ cm² bulunur.



Çizim 6

Soru 4

Kürenin merkezinin farklı taraflarında bulunan iki paralel kesitle sınırlanan küresel kuşağın yüzey alanı 1750π cm²dir. Kesitlerin yarıçapları 15 cm ve 20 cm ise kuşağın yüksekliğini belirle.

Soru 5

Dünya'nın etrafındaki ozon tabakasının genişliğinin yaklaşık olarak ne kadar olduğunu araştır ve bu ozon kuşağının toplam yüzey alanını yaklaşık olarak hesapla. Bu kuşak, Dünya'daki yaşam için neden önemlidir?

Alıştırma Soruları!

1. Yarıçapı 7 cm olan kürenin yüzey alanını hesapla.
2. Yarıçapı 5 cm olan bir küre bir düzlemle kesilmiş ve yüksekliği 4 cm olan bir küresel kapak elde edilmiştir. Küresel kapağın yüzey alanını hesapla.
3. Bir spor arenası, yarıçapı 12 m olan bir küreden elde edilen kubbe (küresel kapak) biçimindedir. Yüzey alanının $100\pi \text{ m}^2$ olduğu biliniyorsa spor arenasının yüksekliğini belirle.
4. Bir kürenin merkezine göre farklı taraflarda, yarıçapları 7 cm ve 15 cm olan iki paralel kesit oluşturulduğunda elde edilen küresel kuşağın yüzey alanını hesapla. Kesitler arasındaki uzaklık 44 cm' dir.
5. Bir küresel kapağın yüksekliği 5 cm, tabanının yarıçapı ise 15 cm' dir. Kesitin kürenin merkezinden uzaklığını belirle.

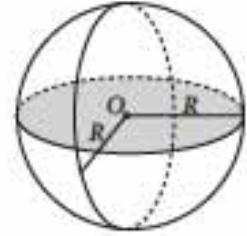
6.11 KÜRENİN HACMI VE PARÇALARI

Hatırla!

Bir çemberin, çapı etrafında döndürülmesiyle hangi 3B şekil elde edilir?

Bir küre yüzeyi ile sınırlanan uzay parçasına **küre** cismi denir. Küre yüzeyinin merkezi ve yarıçapı, sırasıyla küre cisminin merkezi ve yarıçapıdır. Düzlem, küre cisminin merkezinden geçerse, küre cismi iki eş parçaya ayrılır. Bu parçalara **yarım küreler** denir; kesite ise küre cisminin **büyük dairesi** denir.

Çizim 1'de, birbirine dik üç düzlemde bulunan üç ana dairesiyle birlikte bir küre cisminin taslağı gösterilmiştir.



Çizim 1

Unutma!

- Küre cisminin bir düzlemle kesiti dairedir.
- Küre cismi, bir yarım dairenin çapı etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel bir 3B şekildir.

Örnek 1

Bir küre cismi, merkezin farklı taraflarında bulunan iki paralel düzlemle kesilmiştir. Kesitlerin çapları 30 cm ve 18 cm, aralarındaki uzaklık ise 24 cm'dir. Büyük dairenin alanını belirle.

Çözüm:

Soru verilerine ve Çizim 2'ye göre elimizde şunlar vardır:

$$\overline{O_1B} = r_1 = 30 : 2 = 15 \text{ cm}, \quad \overline{O_2A} = r_2 = 18 : 2 = 9 \text{ cm}, \quad \overline{OO_1} = d_1,$$

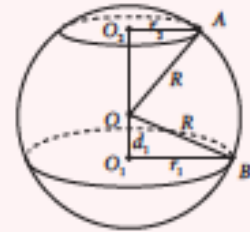
$\overline{OO_2} = 24 - d_1$. Oda $\triangle OO_1B$ 'den $R^2 = d_1^2 + 15^2$ olduğu, $\triangle OO_2A$ 'dan ise $R^2 = (24 - d_1)^2 + 9^2$ olduğu çıkar. Son iki eşitliği birbirine eşitleyerek şunu elde ederiz

$$d_1^2 + 15^2 = (24 - d_1)^2 + 9^2,$$

$$d_1^2 + 225 = 576 - 48d_1 + d_1^2 + 81,$$

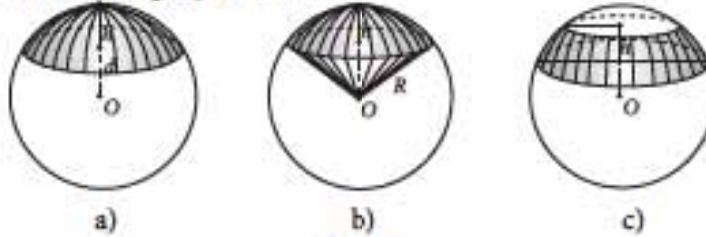
$$48d_1 = 432,$$

buradan $d_1 = 9$ cm elde ederiz. Büyük dairenin yarıçapı için $R = \sqrt{9^2 + 15^2} = \sqrt{306}$ cm bulunur. Büyük dairenin alanı ise $P = R^2\pi = 306\pi \text{ cm}^2$ dir.



Çizim 2

Küre cisminin merkezinden geçmeyen her düzlem, küre cismini iki eşit olmayan parçaya ayırır ve bunların her birine *segment* veya *küre cisim parçası* denir.



Çizim 3

- Küre cismi parçası, bir küresel kapak ve bir daire ile sınırlıdır. Küresel kapağın yüksekliği, küre cismi parçasının yüksekliğidir (Çizim 3 a).
- Küre cismi parçası ile tabanı küre cismi parçasının tabanı olan, tepe noktası ise küre cisminin merkezi olan bir koniden oluşan küre cismi *bölümüne küre dilimi* veya *sektör* denir (Çizim 3 b).
- Küre cisminin iki paralel kesit arasında kalan kısmına *küre cismi tabakası* denir. Küre cismi tabakasının sınırları iki daire ve bir küresel kuşaktır (Çizim 3 c).

Örnek 2

Bir küre cismi parçasının taban alanı $49\pi \text{ cm}^2$ 'dir; parçanın eksen kesitinin yayının merkez açısı 60° 'dir. Küre cisminin yarıçapını ve parçanın yüksekliğini belirle.

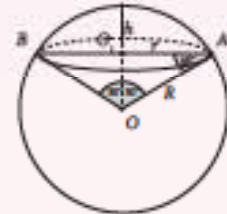
Çözüm:

Dairenin alan formülünden $r^2\pi = 49\pi$ elde ederiz. Buradan küre cismi parçasının taban yarıçapı için $r = 7 \text{ cm}$ bulunur. Soru koşullarına göre $\angle AOB = 60^\circ$, olduğundan $\angle AOO_1 = 30^\circ$ ve $\angle OAO_1 = 60^\circ$ olur. Devamında

OO_1A üçgeninden $\cos 60^\circ = \frac{r}{R}$, elde ederiz, yani küre cisminin yarıçapı $R = \frac{r}{\cos 60^\circ} = \frac{7}{0,5} = 14 \text{ cm}$.

Benzer şekilde, $\tan 30^\circ = \frac{r}{OO_1}$, veya $OO_1 = \frac{r}{\tan 30^\circ} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{21}{\sqrt{3}} = 7\sqrt{3} \text{ cm}$ parçanın yüksekliği için

$h = R - OO_1 = (14 - 7\sqrt{3}) \text{ cm}$ elde ederiz.



Çizim 4

Devamında, yarıçapı R olan küre cisminin hacmini hesaplama formülünü belirleyeceğiz. Burada yine Arşimet'in şu sonucu kullanılır:

Yarıçapı R olan küre cisminin hacmi, taban yarıçapı aynı ve yüksekliği $2R$ olan silindirin hacminin $\frac{2}{3}$ 'üdür.

Yarıçapı R ve yüksekliği $H = 2R$ olan silindirin hacmi

$$V_{\text{sil}} = \pi R^2 \cdot H = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 \text{ olur.}$$

Arşimet'in sonucunu kullanırsak, küre cisminin hacminin

$$V_{\text{kür}} = \frac{2}{3} \cdot V_{\text{sil}} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3.$$

Unutma!

Yarıçapı R olan küre cisminin hacmi şu formülle hesaplanır:

$$V_{\text{küre}} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3.$$

Örnek 3

Yarıçapı $R = 6$ cm olan küre cisminin hacmini belirle. Sonuç GeoGebra ile kontrol edilsin.

Çözüm:

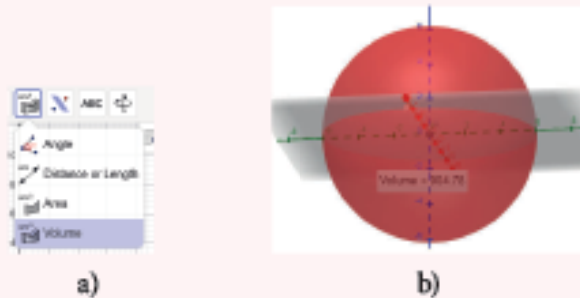
Elde ettiğimiz formülde yerine koyarak $V_{\text{küre}} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$ elde ederiz.

Sonucu GeoGebra kullanarak kontrol etmek için işlem şu şekildedir. Önce tıklayarak 3D bölümünü seçeriz, ardından "Sphere: Center & Radius" aracını seçeriz (resim 1 a); sonra (0,0,0) noktasına tıklarız. Kürenin yarıçapını girmemiz gereken bir pencere açılır (resim 1 b).



Rresim 1

Daha sonra, hacim hesaplama aracını seçeriz (resim 2 a) ve kürenin üzerinde sonucu elde ederiz (resim 2 b). Hacmin $904,78 \text{ cm}^3$ olduğu elde edilir; bu da daha önce elde edilen sonucu doğrular ($288\pi = 904,78$).



Rresim 2

Soru 1

Yarıçapı 4 dm olan küre cisminin hacmini belirle.

Örnek 4

Üç tenis topu, yüksekliği 18 cm olan silindirik bir kutuya yerleştirilmiştir.

- Bir tenis topunun hacmini belirle.
- Silindirin tenis topları tarafından kaplanmayan kısmının hacmini belirle.

Çözüm:

- Bir tenis topunun yarıçapı r olsun. O hâlde silindirin yüksekliği, üç topun çaplarının toplamına eşittir, yani $H = 3d = 3 \cdot 2R = 6R$. Buradan $6R = 18$ cm, yani $R = 3$ cm elde ederiz. Toplar kutuya yerleştirildiğinden, silindirin yarıçapı da $R_{\text{silindir}} = R = 3$ cm.

Bir topun hacmi için formüle göre $V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}3^3\pi = 36\pi \text{ cm}^3$, elde

ederiz. Buna göre üç topun toplam hacmi $V_{\text{TT}} = 3 \cdot 36\pi = 108\pi \text{ cm}^3$ olur.

- Silindirin hacmi $V_{\text{silindir}} = R^2\pi H = 3^2 \cdot \pi \cdot 18 = 162\pi \text{ cm}^3$ olur. Silindirin tenis topları tarafından kaplanmayan kısmının hacmi, silindirin hacmi ile üç topun kapladığı hacmin farkı olarak hesaplanır, yani

$$V = V_{\text{silindir}} - V_{\text{TT}} = 162\pi - 108\pi = 54\pi \text{ cm}^3.$$



Unutma!

- Yarıçapı R olan bir küre cisminden elde edilen, yüksekliği h olan küre cismi parçasının hacmi şu formülle hesaplanır:

$$V_{\text{kp}} = \frac{\pi h}{3}(3R - h).$$

- Yarıçapı R olan bir küre cisminden elde edilen, yüksekliği h olan küre diliminin hacmi şu formülle hesaplanır:

$$V_{\text{kd}} = \frac{2}{3}R^2\pi h.$$

- Yarıçapı R olan bir küre cisminden elde edilen, yarıçapları r_1 ve r_2 yüksekliği h olan küre cismi tabakasının hacmi şu formülle belirlenir:

$$V_{\text{kt}} = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

Örnek 5

Tabanının yarıçapı 45 cm, küre cisminin yarıçapı ise 75 cm olan küre diliminin hacmini belirle.

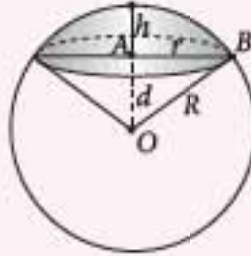
Çözüm:

Verilere göre $R = 75$ cm ve $r = 45$ cm'dir. $\triangle OAB$ 'den (Çizim 5)

$$d^2 = R^2 - r^2 = 75^2 - 45^2 = 3600,$$

elde ederiz; yani $d = 60$ cm olur. Küre cismi parçasının yüksekliği için $h = R - d = 75 - 60 = 15$ cm.

buluruz. Küre diliminin hacim formülünde yerine koyarsak $V_{\text{kl}} = \frac{2}{3} R^2 \pi h = \frac{2}{3} \cdot 75^2 \cdot \pi \cdot 15 = 56250\pi \text{ cm}^3$, elde ederiz.



Çizim 5

Soru 2

Bir düzlem, küre cisminin çapına diktir ve çapı 9 cm ve 15 cm'lik parçalara ayırır. Küre cisminden elde edilen parçaların hacimlerini hesapla.

Soru 3

Endüstriyel işleme sürecinde, yarıçapı $r = 20$ cm olan dolu metal bir küre cismi, küre cisminin merkezinden aynı tarafta 5 cm ve 3 cm uzaklıkta bulunan iki paralel düzlemle kesiliyor. Elde edilen küre cismi parçasının hacmini belirle.

Örnek 6

Bir basketbol topu, yarıçapı 12 cm olan yaklaşık kusursuz bir küre cismi biçimindedir.

- Topun hacmini hesapla.
- Topun yapımı için ne kadar malzeme kullanıldığını hesapla.
- Top daha sonra şişirilmiş ve hacmi %10 artmıştır. Topun yeni yarıçapı kaçtır?



Çözüm:

- Küre cisminin hacim formülünde $R = 12$ cm yerine yazıldığında şunu elde ederiz:

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{4}{3} 12^3 \pi = 7234,56 \pi \text{ cm}^3.$$

- Gerekli malzeme miktarını hesaplamak için, verilen küre cismine karşılık gelen kürenin yüzey alanı hesaplanmalıdır.

$$P = 4R^2 \pi = 4 \cdot 12^2 \pi \approx 1809 \pi \text{ cm}^2.$$

c) Şişirildikten sonra topun hacmi $V = 7234,56 + \frac{7234,56 \cdot 10}{100} = 7958,02 \text{ cm}^3$ olur. Bu değeri küre cisminin hacim formülünde yerine yazarsak ve topun yeni yarıçapı R_1 ise, $\frac{4}{3}R_1^3\pi = 7958,02$, elde ederiz. Buradan $R_1^3 = \frac{3 \cdot 7958,02}{4\pi} \approx 1900,8$.

Buna göre topun yeni yarıçapı $R_1 \approx 12,39 \text{ cm}$ ' dir.

Alıştırma Soruları

1. Yarıçapı 12 cm olan bir küre cismi, merkezinden 8 cm uzaklıktaki bir düzlemle kesilmiştir. Elde edilen küre diliminin hacmini belirle.
2. Küre cisminin yarıçapı 15 cm, dilimin dairesel tabanının yarıçapı ise 9 cm' dir. Küre diliminin hacmini hesapla.
3. Yarıçapı 21 cm olan bir küre cismi, merkezinden 6 cm uzaklıktaki bir düzlemle kesilmiştir. Elde edilen küre cismi parçasının hacmini hesapla.
4. Yarıçapı 15 cm olan bir küre cismi, merkezinden 5 cm ve 7 cm uzaklıktaki iki paralel düzlemle, fakat merkeze göre farklı taraflardan kesilmiştir. Küre cismi tabakasının hacmini belirle.
5. Yarıçapı 18 cm olan bir küre cismi, merkezinden aynı tarafta 6 cm ve 12 cm uzaklıktaki iki paralel düzlemle kesilmiştir. Elde edilen küre cismi tabakasının hacmini belirle.
6. Bir küresel kapağın yüzey alanı, kürenin yüzey alanının $\frac{2}{5}$ ' idir. Ortak tabanlarının yarıçapı $2\sqrt{6}$ cm ise küresel kapağın yüzey alanını ve küre cismi parçasının hacmini belirle.

TEKRAR VE PEKİŞTİRME SORULARI

1. Bir kenarı 9 cm ve köşegeni 15 cm olan dikdörtgenin alanını hesapla. Sonuç GeoGebra ile kontrol edilsin.
2. Bir dikdörtgenin köşegenleri 120° lik açı oluşturuyor ve her bir köşegen 16 cm' dir. Dikdörtgenin alanını hesapla.
3. Köşegeni 13 cm olan bir dikdörtgenin kenar uzunlukları 5 : 12 oranındaysa alanını hesapla.
4. Bir güneş paneli, bir kenarı 24 cm ve köşegeni 30 cm olan bir dikdörtgendir.
 - a) Panelin yüzey alanını hesapla.
 - b) Verilen aydınlatma koşulunda 1 cm^2 den 0,18 W elde ediliyorsa yaklaşık güç ne kadardır?
5. Bir paralelkenarın alanı 240 cm^2 , çevresi 64 cm ve büyük kenarları arasındaki uzaklık 12 cm' dir. Küçük kenarları arasındaki uzaklığı belirle.
6. Kenarı 13 cm olan ve içine çizilen çemberin yarıçapı 5 cm olan eşkenar dörtgenin alanını hesapla.
7. Paralelkenar biçimindeki bir metal levha, bir gövdeye yerleştirilmektedir. Paralel kenar çiftleri arasındaki uzaklıklar 7 cm ve 14 cm' dir. Kısa kenar 10 cm' dir. Levhanın uzun kenarının uzunluğu kaçtır?
8. Bir taşıyıcının çalışma yüzeyi paralelkenar biçimindedir. Yükseklikleri 8 cm ve 15 cm, aralarındaki açı ise 30° dir. Yüzeyin alanını hesapla.
9. Bir dik kenarı 6 cm ve hipotenüsü 10 cm olan dik üçgenin alanını hesapla. Sonuç GeoGebra ile kontrol edilsin.
10. Bir dik kenarı 6 cm ve açılarından biri 50° olan dik üçgenin alanını hesapla.
11. Bir ikizkenar üçgenin çevresi 64 cm' dir ve eş kenar ile taban arasındaki fark 11 cm' dir. Üçgenin alanını hesapla.
12. 18 m uzunluğunda bir çelik halat, yerle 40° lik açı yapacak şekilde gerilmiş ve bir direğin tepe noktasını tutmaktadır.
 - a) Direğin yüksekliği ne kadardır?
 - b) Direğin tabanından halatın sabitlendiği yere kadar olan yatay uzaklık ne kadardır?
13. Bir işaret levhası, kenarı 90 cm olan eşkenar üçgen biçimindedir.
 - a) İşaret levhasının alanını belirle. Sonuç GeoGebra ile kontrol edilsin.
 - b) İçine çizilen çemberin yarıçapını belirle (dairese logo yeri).
 - c) İşaret levhasının bir tarafı folyo ile kaplanacaktır. Folyo 1 cm^2 için 2 denar ise kaplama kaç denara mal olur?
14. Bir trapezin alanı 360 cm^2 , taban uzunlukları ise 30 cm ve 15 cm' dir. Trapezin yüksekliğini hesapla.
15. Bir dik trapezin alanı 200 cm^2 , yüksekliği 10 cm ve tabanlarından biri 30 cm' dir. Diğer tabanın uzunluğunu hesapla.
16. Bir platform, tabanları 12 m ve 20 m, yüksekliği 8 m olan ikizkenar trapez biçimindedir
 - a) Platformun alanını hesapla.
 - b) Platformun çevresine koruyucu korkuluk yapılması için ne kadar uzunlukta korkuluk gereklidir?
17. Bir parkta bulunan dekoratif yüzey deltoid biçimindedir. Simetri eksenini köşegen 18 m, diğer köşegen ise 10 m' dir.
 - a) Yüzeyin alanını hesapla.
 - b) Kaplama için 1 m^2 'ye 3 karo gerekiyorsa toplam kaç karo gereklidir?

18. Metalden dairesel bir levha yapılmaktadır. 1 cm^3 metal $0,015 \text{ kg}$ ağırlığındaysa yarıçapı 14 cm olan levhanın kütlesi ne kadardır?
19. Yarıçapı $1,2 \text{ m}$ ve açısı 45° olan bir çember yayı boyunca LED şerit yerleştirilecektir. Ne kadar uzunlukta şerit gereklidir?
20. Çemberin yarıçapı 15 cm , kirişin merkezden uzaklığı ise 9 cm 'dir. Dairesel parçanın alanını hesapla.
21. Bir dairesel halkanın alanı $64\pi \text{ cm}^2$, iç yarıçapı ise 4 cm 'dir. Dış yarıçapını belirle.
22. Düzgün üçgen piramidin taban kenarı 12 cm , apotemi ise 10 cm 'dir.
 - a) Yan yüzey alanını hesapla.
 - b) Yan yüzey alanını taban alanı ile karşılaştır.
23. Bir taş anıt, kenarı 5 m olan kare tabanlı ve yüksekliği 9 m olan piramit biçimindedir.
 - a) Hacmini hesapla.
 - b) Taşın yoğunluğu 2600 kg/m^3 ise anıtın kütlesi ne kadardır?
24. Bir cam çatı, boyutları 12 m ve 8 m olan dikdörtgen tabanlı dik piramit biçimindedir. Tabanı 12 m olan yan yüzlerin apotemi 5 m 'dir.
 - a) Cam yüzey alanını hesapla (taban harid).
 - b) Çatının izin verilen en büyük kütlesi 2000 kg ise 1 m^2 cam 30 kg ağırlığındaysa çatı yerleştirilebilir mi?
25. Kesik düzgün dörtgen piramidin alt tabanının kenarı 14 cm , üst tabanının kenarı 8 cm , kesik piramidin apotemi ise 9 cm 'dir. Kesik piramidin yan yüzey alanını hesapla.
26. Kesik düzgün dörtgen piramidin hacmi 1248 cm^3 'tür. Tabanların kenarları 10 cm ve 4 cm 'dir. Kesik piramidin yüksekliğini belirle.
27. Bir depolama kabı, tabanları 3 m ve $1,5 \text{ m}$, yüksekliği $2,4 \text{ m}$ olan kesik düzgün dörtgen piramit biçimindedir.
 - a) Kabin hacmi ne kadardır?
 - b) Kaç litre malzeme alabilir?
28. Bir konide yarıçap ile yükseklik oranı $3 : 4$ 'tür ve hacmi $V = 96\pi \text{ cm}^3$ 'tür. Koninin yan yüzey alanını hesapla.
29. Bir kapta 8 litre meyve suyu vardır. Yarıçapı 3 cm ve yüksekliği 12 cm olan koni biçimindeki bardaklar dolduruluyor.
 - a) Kaç tam bardak doldurulabilir?
 - b) Ne kadar meyve suyu kullanılmadan kalır?
30. Bir sıvı deposunun yarıçapı $1,2 \text{ m}$ ve yüksekliği $0,8 \text{ m}$ olan konik bir tabanı vardır.
 - a) Konik kısmın hacmi ne kadardır?
 - b) Depo $0,02 \text{ m}^3/\text{dakika}$ hızla boşalıyorsa konik kısım kaç dakikada boşalır?
31. Bir kesik koninin taban yarıçapları $R = 9 \text{ cm}$ ve $r = 3 \text{ cm}$, yüksekliği ise $h = 10 \text{ cm}$ 'dir.
 - a) a) Hacmini hesapla.
 - b) Kesik koninin elde edildiği bütün koninin hacmi ne kadardır?
32. İki kesik dik koninin yükseklikleri ve büyük yarıçapları eşittir; küçük yarıçapları ise $1 : 2$ oranındadır. Hacimleri hangi orandadır?
33. Bir ışıklık, yarıçapları $2,2 \text{ m}$ ve $1,2 \text{ m}$, apotemi $1,5 \text{ m}$ olan kesik koni biçimindedir.
 - a) Camın yan yüzey alanını hesapla.
 - b) 1 m^2 cam 28 kg ağırlığındaysa toplam kütle ne kadardır?
34. Bir kürenin yüzey alanı $324\pi \text{ cm}^2$ 'dir.
 - a) Kürenin yarıçapını belirle.
 - b) Verilen küre ile sınırlanan küre cisminin hacmini hesapla.

35. Bir gezegen modeli, yarıçapı $R = 20$ cm olan bir küredir. "Buz örtüsü", yüksekliği $h = 4$ cm olan bir küresel kapaktır.
- Buz örtüsünün yüzey alanını hesapla.
 - Gezegenin toplam yüzey alanının yüzde kaçını kaplar?
36. Bir küre cisminin yarıçapı $R = 10$ cm' dir. Bir düzlemle kesildiğinde hacmi $V = \frac{625\pi}{3}$ cm³ olan bir küre cismi parçası elde edilir. Düzlemin küre cisminin merkezinden uzaklığı d 'yi belirle.
37. Bir yer altı deposunun kubbeli çatısı küresel kapak biçimindedir. Çatı, yarıçapı $R = 4$ m olan bir küreye aittir ve kubbenin yüksekliği $h = 1,5$ m' dir. Kubbenin örttüğü iç hacim, aynı kürenin bir küre cismi parçasıdır.
- Küre cismi parçasının hacmini hesapla (m³ cinsinden).
 - Küresel kapağın yüzey alanını hesapla.
 - Kubbe koruyucu malzeme ile kaplanacaktır. Kaplama 1 m² için 2000 denar ise kubbenin kaplanması için toplam maliyet ne kadardır?
 - Depoda günlük 12 m³ yağmur suyu birikiyorsa depo kaç günde dolar? (başlangıçta depo boştur).

PROGRAMDAN BEKLENEN ÖĞRENME SONUÇLARI

Konu 1:

KÖKLER VE KARMAŞIK SAYILAR

Bu konunun öğrenilmesiyle şu becerileri kazanacaksın:

1. üslere ve üslerle yapılan işlemlere indirgenen gerçek bağlamlı problemleri çözme;
2. günlük yaşam bağlamındaki problemleri çözmek için kök almayı kullanma;
3. gerçek problemlerde üslü alma ve kök alma işlemlerini ayırt etme ve uygulama;
4. irrasyonel ifadeleri sadeleştirirken kesrin paydasını rasyonelleştirmeyi uygulama;
5. soruları çözerken karmaşık sayılarla işlemleri kullanma;
6. STEM problemlerini çözerken karmaşık sayıları uygulama.

Konu 2:

KARE DENKLEMLER VE KAREYE İNDİRGENEN DENKLEMLER

Bu konunun öğrenilmesiyle şu becerileri kazanacaksın:

1. farklı türdeki kare denklemleri ve kare denklemlere indirgenen denklemleri ayırt etme
2. kare denklemlere indirgenen gerçek bağlamlı problemleri çözme;
3. STEM problemlerini çözerken kare denklemlere indirgenen denklemleri kullanma;
4. gerçek problemleri çözmek için iki değişkenli, bir kare denklem ve bir doğrusal denklemden oluşan denklem sistemini uygulama.

Konu 3:

KARE FONKSİYON, KARE EŞİTSİZLİK VE TEK BİLİNMEYENLİ KARE EŞİTSİZLİK SİSTEMİ

Bu konunun öğrenilmesiyle şu becerileri kazanacaksın:

1. STEM problemlerini çözmek için kare fonksiyonu uygulama;
2. tek bilinmeyenli kare eşitsizliğin çözümlerini yorumlama;
3. günlük yaşam bağlamındaki problemleri çözmek için tek bilinmeyenli iki kare eşitsizlikten oluşan sistemi kullanma.

Konu 4:

OLASILIK İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Bu konunun öğrenilmesiyle şu becerileri kazanacaksın:

1. gerçek bağlamlı problemleri çözerken permütasyonları, varyasyonları ve kombinasyonları uygulama;
2. gerçek problemlerde olayların olasılığını belirleme.

Konu 5:

GEOMETRİ

Bu konunun öğrenilmesiyle şu becerileri kazanacaksın:

1. STEM problemlerini çözmek için sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjantı kullanma;
2. uzayda iki düzlemin, bir doğru ile bir düzlemin veya iki doğrunun karşılıklı durumunu inceleme;
3. 3B şeklin bir düzlemle farklı kesitlerini belirleme.

Konu 6:

ÖLÇME

Bu konunun öğrenilmesiyle şu becerileri kazanacaksın:

1. 2B şekillerin çevresi ve alanını uygulayarak gerçek bağlamlı problemleri çözme;
2. 3B şekillerin yüzey alanı ve hacmiyle STEM problemlerini çözme.

İLGİLİ LİTERATÜR

1. James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson: *Algebra and Trigonometry*, Brooks/Cole, USA
2. Cindy J. Boyd, Jerry Cummins, Carol Malloy, John Carter, Alfino Flores, *Geometry*, Mc Graw Hill, USA
3. Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis: *Calculus*, John Wiley & Sons, Inc., 2012
4. H. Africk: *Elementary College Geometry*, CUNY Academic Works, 2021
5. В.Бакева: *Веројатности*, УКИМ, Скопје, 2015, <https://ukim.edu.mk/e-book/00009/>
6. В.В. Казаков, О.О.Казакова: Геометрија, учебное пособие для 9 класса, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2025
7. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, И. В. Горбунова: Геометрија, учебное пособие для 10 класса, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2020
8. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, И. В. Горбунова, О. Е. Цыбулько: Геометрија, учебное пособие для 11 класса, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2020