

Верица Бакева Смиљкова

Горан Михајлоски

МАТЕМАТИКА

уџбеник за
други разред
гимназије

II



МАТЕМАТИКА

уџбеник за други разред
гимназијског образовања

II



Скопје, 2026
(Прво издање)

МАТЕМАТИКА II учебник за други разред гимназијског образовања

Прво издање, 2026

Ауторска права © 2026, Алби ДОО

Издавач	Алби ДОО, Скопје 2026
Автори	др Верица Бакева Смиљкова проф. Горан Михајлоски
Стручни сарадник	Александра Поповска-Митровић
Уредник	Елена Стефановска
Наслов оригинала	Математика II учебник за втора година гимназиско образование
Превод са македонског на српски	Ирена Божовић
Лектор	Биљана Спасовска
Дизајн и графичко уређивање	Младен Јакимовски
Штампа	Бранко Гапо – графичко производство, Скопје 2026
Тираж	30

Сва права су задржана. Ниједан део ове књиге не сме бити прештампаван, ни пренесен у било којем облику или било каквим средствима, електронским или механичким, укључујући и фотокопирање или чување у систему за поновно проналажење, без писмене сагласности издавача.

Овај учебник је одобрен за употребу у гимназијског образовања, Одлуком за употребу учебника из наставног предмета математика за други разред гимназијског образовања, бр. 26-644/1 од 21.05.2026, издатог од стране Министарства за образовање и науку РС Македоније.

Рецензентска комисија: проф. д-р Аљит Ибраими, проф. д-р Џеваир Бекири, Сузана Ничота

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)=163.41

БАКЕВА Смиљкова, Верица

Математика II : учебник за други разред гимназијског образовања / Верица Бакева Смиљкова, Горан Михајлоски ; [превод са македонског на српски Ирена Божовић]. - 1. изд. - Скопје : Алби, 2026. - 330 стр. : илустр. ; 27 см

Превод на делото: Математика II : учебник за втора година гимназиско образование. - Библиографија: стр. 330

ISBN 978-608-241-097-5

1. Михајлоски, Горан [автор]

COBISS.MK-ID 69434117

ПРЕДГОВОР

Овај уџбеник намењен је систематском и продубљеном изучавању кључних математичких појмова и метода за ученике другог разреда гимназије и представља основу за даље школовање, као и за примену математике у природним и техничким наукама, економији и свакодневном животу. У уџбенику су заступљени задаци који су у складу са савременим образовним смерницама које наглашавају СТЕМ оријентацију (наука, технологија, инжењерство и математика) и улогу математике као језика и алата за разумевање, моделовање и решавање реалних проблема. Циљ уџбеника није само усвајање формалних поступака, већ и развијање аналитичког, логичког и критичког мишљења, као и способности за примену математичких знања у различитим контекстима.

Уџбеник Математика за II разред састоји се од шест тематских целина, конципираних у складу са наставним програмом математике за други разред гимназије.

У првој тематској целини разматрају се кореновање и комплексни бројеви, с циљем проширивања операција над скупом реалних бројева и проширивања тог скупа на скуп комплексних бројева. Ови садржаји омогућавају дубље разумевање алгебарских операција и представљају неопходан алат за решавање различитих врста једначина и проблема у математици, физици и многим другим областима.

У наредне две тематске целине посебна пажња посвећена је квадратним једначинама и једначинама које се свode на квадратне, као и квадратној функцији, њеним својствима и њеној графичкој интерпретацији. Ове тематске целине успостављају јасну везу између алгебарског и геометријског приступа и представљају основу за даље изучавање функција. У наставку се обрађују квадратне неједначине и системи квадратних неједначина са једном непознатом, с акцентом на логичко размишљање, анализу решења и њихову интерпретацију.

У четвртој тематској целини „Елементи вероватноће“ уводе се основни појмови комбинаторике и вероватноће, односно основни принципи пребројавања и израчунавања вероватноће. Ови садржаји развијају комбинаторно и статистичко мишљење и омогућавају моделовање и анализу случајних појава, које су све присутније у савременим наукама и технологији.

Први део пете тематске целине посвећен је тригонометрији, која се изучава као моћан инструмент за анализу углова, троуглова и тригонометријских идентитета, уз јасну повезаност са геометријом, физиком и инжењерством. Уводе се тригонометријске функције и њихова примена у решавању практичних и теоријских задатака. У другом делу ове тематске целине, посвећеном правој и равни, објашњава се разлика између теореме и аксиоме, изучавају се аксиоме просторне геометрије, као и међусобни положај две равни, праве и равни, односно две праве у простору.

У последњем делу пете тематске целине изучавају се тродимензионална тела и њихови пресеци равни. Кроз ове садржаје развијају се просторна представа, способност визуализације и анализа геометријских објеката у равни и простору.

У шестој тематској целини изучавају се 2Д- дводимензионалне фигуре, њихов обим и површина, као и 3Д - тродимензионална тела, њихова површина и запремина. Ови појмови обрађују се кроз практичне примере повезане са мерењем, просторном анализом и моделовањем реалних објеката, као што су архитектонски елементи, техничке конструкције, амбалажа и природна тела.

Уџбеник је структуриран тако да је свака тематска целина праћена јасним дефиницијама, својствима, илустративним примерима и разноврсним задацима различитог степена сложености. Посебан акценат стављен је на повезивање теорије са практичном применом и на развијање математичког мишљења, логике и самосталности ученика. На почетку сваке лекције налази се рубрика „Подсети се!“, у којој су издвојени садржаји усвојени у претходном школовању, на које је потребно подсетити се ради лакшег усвајања нових знања. Сви примери у уџбенику дати су са решењима. После примера, по правилу, следе задаци за проверу усвојености садржаја наставне лекције. На крају сваке лекције налазе се „Задаци за вежбање“, а на крају сваке тематске целине задаци за понављање и утврђивање градива.

И поред великог труда уложеног у израду овог уџбеника, због кратког времена предвиђеног за његову припрему, могуће је да су се поткрале поједине техничке грешке, које ће бити исправљене у наредном издању. Бићемо вам захвални уколико нам на њих укажете.

Надамо се да ће овај уџбеник бити поуздан водич ученицима у изучавању математике и драгоцену подршку наставницима у реализацији наставног процеса.

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР	3
ТЕМА 1 КОРЕНИ И КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ	8
1.1 Степени и операције са степенима	8
1.2 Појам корена	13
1.3 Степен са рационалним изложивоца. Представљање корена помоћу степена	18
1.4 Проширивање и скраћивање корена	25
1.5 Кореновање производа и количника	29
1.6 Сабирање и одузимање корена	34
1.7 Множење, дељење, степеновање и кореновање корена	39
1.8 Ирационални изрази. Рационализација имениоца разломка	44
1.9 Проширивање скупа бројева	50
1.10 Сабирање и одузимање комплексних бројева	57
1.11 Множење комплексних бројева. Степен комплексног броја	60
1.12 Дељење комплексних бројева	64
1.13 Задачи из примене комплексних бројева	66
Задачи за понављање и утврђивање	72
ТЕМА 2 КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И ЈЕДНАЧИНЕ КОЈЕ СЕ СВОДЕ НА КВАДРАТНЕ	74
2.1 Појам квадратне једначине. Врсте квадратних једначина.	
Решење квадратне једначине	74
2.2 Решавање непотпуних квадратних једначина	80
2.3 Решавање потпуних квадратних једначина	84
2.4 Дискусија о решењима квадратне једначине	90
2.5 Вијетове формуле	94
2.6 Састављање квадратне једначине са датим решењима.	
Разлагање квадратног тринома	98
2.7 Разломљене рационалне једначине	103
2.8 Биквадратне једначине	107
2.9 Систем једне линеарне једначине са две непознате и једне квадратне једначине са две непознате	109
Задачи за понављање и утврђивање	112

ТЕМА 3	КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА, КВАДРАТНА НЕЈЕДНАЧИНА И СИСТЕМ КВАДРАТНИХ НЕЈЕДНАЧИНА СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ.	114
3.1	Квадратна функција. График функције $f(x) = x^2$	
3.2	График функција $f(x) = ax^2$ и $f(x) = ax^2 + c$	118
3.3	Канонски облик квадратне функције и график $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$	123
3.4	График функције $f(x) = ax^2 + bx + c$	127
3.5	Својства квадратне функције	131
3.6	Ток и график квадратне функције	138
3.7	Квадратне неједначине	141
3.8	Систем квадратних неједначина са једном непознатом	145
	Задаци за понављање и утврђивање	152
ТЕМА 4	ЕЛЕМЕНТИ ВЕРОВАТНОЋЕ	154
4.1	Варијације са понављањем	154
4.2	Варијације без понављања	159
4.3	Пермутације	164
4.4	Комбинације	170
4.5	Неки комбинаторни задаци	176
4.6	Експерименти и догађаји	181
4.7	Скуп елементарних догађаја. Случајни догађаји	185
4.8	Операције са догађајима	188
4.9	Класична дефиниција вероватноће	193
4.10	Својства вероватноће. Независни догађаји	198
	Задаци за понављање и утврђивање	205
ТЕМА 5	ГЕОМЕТРИЈА	210
5.1	Углови и мерење углова	208
5.2	Дефинисање тригонометријских функција оштрог угла	213
5.3	Тригонометријске функције комплементарних углова	217
5.4	Веза између тригонометријских функција истог угла	220
5.5	Упрошћавање тригонометријских израза	223
5.6	Примена тригонометријских функција	227
5.7	Аксиоме просторне геометрије	231
5.8	Међусобни положај праве и равни, две равни и две праве	236
5.9	Призма. Пресеци призме са равни	241
5.10	Пирамида. Пресеци пирамиде са равни	247
5.11	Цилиндар. Пресек цилиндра са равни	251
5.12	Купа. Пресеци купе са равни	255
	Задаци за понављање и утврђивање	261

ТЕМА 6	МЕРЕЊЕ	262
6.1	Обим и површина квадрата и правоугаоника	262
6.2	Обим и површина паралелограма	267
6.3	Обим и површина троугла	271
6.4	Обим и површина трапеца и делтоида	278
6.5	Обим и површина круга и делова круга	284
6.6	Површина и запремина пирамиде	290
6.7	Површина и запремина зарубљене пирамиде	296
6.8	Површина и запремина купе	302
6.9	Површина и запремина зарубљене купе	306
6.10	Површина сфере и делова сфере	312
6.11	Запремина лопте и њених делова	319
	Задаци за понављање и утврђивање	325
РЕЗУЛТАТИ УЧЕЊА		328
ЛИТЕРАТУРА		330

КОРЕНИ И КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

У многим реалним ситуацијама није довољно користити само основне аритметичке операције: сабирање, одузимање, множење, дељење и степеновање. Често су познати површина, запремина или нека физичка величина, а потребно је одредити одговарајућу дужину, страницу или другу меру. На пример, приликом израчунавања дужине дијагонале, растојања између две тачке, брзине, енергије или електричног отпора, јавља се операција кореновања. Овом операцијом се за дати број A одређује број B чијим се степеновањем добија дати број A . Ова операција назива се кореновање и има значајну примену у геометрији, физици, техници, инжењерству и моделирању у оквиру СТЕМ задатака. У овој теми упознаћемо се са појмом корена, његовим својствима и начинима израчунавања, као и са применом коренских израза у решавању практичних проблема.

1.1 СТЕПЕНИ И ОПЕРАЦИЈЕ СА СТЕПЕНИМА

Подсети се!

- Број 16 може да се запише као $4 \cdot 4$.
- Израз $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ може се краће записати као 5^4 .

Запамти!

Ако је a произвољан реалан број, а n позитиван цео број, тада се n -ти степен броја a дефинише на следећи начин:

$$a^1 = a;$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ пута}}, \quad n \geq 2.$$

Број a назива се *основа степена* a^n , а број n назива се *степен изложивоц*.

Задатак 1

Представи у облику степена следеће производе:

- а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; б) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$; в) $x \cdot x \cdot x \cdot x$.

Задатак 2

Представи следеће степене у облику производа једнаких чинилаца:

а) 4^8 ; б) $(-3)^2$; в) y^3 .

Задатак 3

Израчунај следеће степене бројева 1 и -1:

а) 1^{34} ; б) $(-1)^{2005}$; в) 1^{2025} ; г) $(-1)^{2026}$.

Запамти!

Ако је a произвољан реалан број, $a \neq 0$, а n позитиван цео број, тада $a^0 = 1$ и $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Пример 1

а) $5^0 = 1$; б) $(-4)^0 = 1$; в) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; г) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$.

Задатак 4

Израчунај следеће степене:

а) 10^0 ; б) $(-15)^0$; в) 1^{-5} ; г) $(-3)^{-4}$.

Запамти!

Ако су a и b произвољни реални бројеви, а m и n произвољни цели бројеви, тада важе следећа правила степеновања:

1. Производ степена са истом основом

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

2. Количник степена са истом основом

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \text{за } a \neq 0;$$

3. Степен степена (степеновање степена)

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

4. Степен производа

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

5. Степен количника

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{за } b \neq 0.$$

Пример 2

Коришћењем правила степеновања поједноставићемо следеће изразе:

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

$$y^4 \cdot y^{-2} = y^{4-2} = y^2$$

$$(3a)^4 = 3^4 a^4 = 81a^4$$

$$(c^3)^5 = c^{3 \cdot 5} = c^{15}$$

Задатак 5

Поједностави следеће изразе:

а) $b^{10}b^{-5}$; б) $\left(\frac{c}{3}\right)^3$; в) $\frac{d^6}{d^3}$.

Пример 3

Елиминисати (уклонити) негативне степене у:

а) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$; б) $\frac{a^{-m}}{b^{-n}}$, $a, b \neq 0$.

Решење:

$$\text{а) } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n; \quad \text{б) } \frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{b^n}{a^m}.$$

Запамти!

$$\text{а) } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n; \quad \text{б) } \frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}.$$

Пример 4

Елиминисати негативан степен и поједноставити израз: $\left(\frac{x}{3y^4}\right)^{-2}$.

Решење:

$$\left(\frac{x}{3y^4}\right)^{-2} = \left(\frac{3y^4}{x}\right)^2 = \frac{(3y^4)^2}{x^2} = \frac{3^2(y^4)^2}{x^2} = \frac{9y^8}{x^2}.$$

Задатак 6

Елиминисати негативан степен и поједноставити израз: $\left(\frac{y}{5x^{-4}}\right)^{-3}$.

Пример 5

Просечна дубина Тихог океана је 4280 m, а површина океана је $1,7 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$. Ако се запремина израчунава као производ површине и дубине океана, колика је укупна запремина океана у литрима? (Један кубни метар садржи 1000 литара)

Решење:

Нека просечну дубину означимо са $d = 4280 \text{ m}$, а површину са $B = 1,7 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$. Запремина океана се израчунава по формули $V = B \cdot d$, па

$$V = B \cdot d = 1,7 \cdot 10^{14} \cdot 4280 = 7276 \cdot 10^{14} = 7,276 \cdot 10^{17} \text{ m}^3.$$

Имајући у виду да 1 кубни метар садржи 1000 литара, тј. $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ l}$, добијамо да је укупна запремина у литрима

$$V = 7,276 \cdot 10^{17} \cdot 10^3 = 7,276 \cdot 10^{20} \text{ l}.$$

Пример 6

Запечаћена просторија у болници има следеће димензије: ширину 5 m, дужину 10 m и висину 3 m. Она је испуњена чистим кисеоником. Један кубни метар садржи 1000 литара, а 22,4 литра било ког гаса садрже $6,02 \cdot 10^{23}$ молекула (Авогадров број). Колико молекула кисеоника има у просторији?

Решење:

Запремина собе је $V = 5 \cdot 10 \cdot 3 = 150 \text{ m}^3 = 150 \cdot 10^3 \text{ l}$. Пошто се $6,02 \cdot 10^{23}$ 22,4 литра било ког гаса, следи да се у једном литру гаса налази $\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4}$ молекул. Одатле, укупан број молекула кисеоника

који се налази у просторији је $150 \cdot 10^3 \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4} = 40,3 \cdot 10^{26} = 4,03 \cdot 10^{27}$.

Активност

- Комад дрвета потпуно сагори на 600°C за једну секунду. Време потребно за сагоревање дрвета удвостручује се смањењем температуре за сваких 10°C , а преполовљава се повећањем температуре за сваких 10°C . За колико секунди ће сагорети комад дрвета на:

а) 550°C ; б) 650°C ?

- Дате су следеће једнакости:

а) $2^{-2} - 2^{-3} : 2^{-4} = 2^1$; б) $3^{-3} + 3^{-2} : 3^{-2} - 3^{-3} - 3^0 = 3^a$

У групама, дискутујте о местима на која треба уписати заграде како би се добиле тачне бројчане једнакости.

Задаци за вежбање!

1. Израчунај сваки израз:

а) $(2^3)^2$; б) $(2^3)^0$; в) $\frac{10^6}{10^4}$; г) $\frac{6^6}{6^{-4}}$; д) $\left(\frac{1}{32}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{4}{9}\right)^{-3}$;

ђ) $\frac{3^2 \cdot 4^{-2} \cdot 5^3}{2^{-4} \cdot 3^3 \cdot 25}$; е) $2^{-2} + 2^{-3}$; ж) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 (-3)^5$.

2. Поједноставити сваки од израза:

а) $x^{-8}x^4$; б) $(3y^2)(4y^3)$; в) $z^3z^{-4}z^{-7}$; г) $\frac{a^9a^{-2}}{a^3}$; д) $(3z^2)(9z^3)^{-2}$;

ђ) $b^4(3ab^3)(2a^2b^{-3})^{-4}$; е) $\left(\frac{x^4z^2}{3y^3}\right)^3 \left(\frac{6x^3z^{-2}}{2y^4}\right)^{-1}$; ж) $\left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-2}$.

3. Индекс телесне масе је мера коју користе медицински истраживачи како би утврдили да ли нека особа има нормалну телесну масу, прекомерну телесну масу или телесну масу испод нормалне вредности. За особу која има масу W килограма и висину H метара, индекс телесне масе B израчунава се по формули:

$$B = \frac{W}{H^2}.$$

и сматра се нормалним ако задовољава услов $18,5 \leq B \leq 24,9$, док се особа са индексом телесне масе $B \geq 30$ сматра особом са прекомерном телесном масом.

а) Израчунај индекс телесне масе за сваку особу наведену у табели, а затим утврди да ли она има нормалну телесну масу, телесну масу испод нормалне вредности или прекомерну телесну масу.

	Маса у kg	Висина у m	Индекс телесне масе	Закључак
Петар	43	1,6		
Лука	47	1,54		
Милош	95	1,84		
Ведран	105	1,55		

б) Израчунај свој индекс телесне масе.

4. Ако се инвестира износ од 5000 денара, камата након n година израчунава се по формули:

$$I = 5000 (1,0025^{12n} - 1).$$

Попуни следећу табелу каматом за дати број година.

Број година	Камата у динарима
1	152,08
2	
3	
4	
5	

5. Нека су a , b и c реални бројеви такви да је $a > 0$, $b < 0$ и $c < 0$. Одреди знак сваког израза:

а) b^5 ; б) b^{10} ; в) ab^2c^3 ; г) $(b-a)^3$; д) $(b-a)^4$; ђ) $\frac{a^3c^3}{b^6c^6}$.

1.2 ПОЈАМ КОРЕНА

Пример 1

У парку треба пројектовати квадратну цветну башту површине 64 m^2 . Колика треба да буде дужина стране квадрата?

Решење:

Нека је дужина стране квадрата x . Треба одредити x тако да важи:

$$x^2 = 64.$$

Дужина стране квадрата је ненегативан број, па се поставља питање који је то ненегативан број x који, помножен сам са собом, даје 64? Јасно је да је $8^2 = 64$, тј. $x = 8$. Пишемо $x = \sqrt{64} = 8$.

Пример 2

При слободном паду, пређени пут s (у метрима) приближно је дат формулом $s = t^2$, где је t време изражено у секундама. После колико секунди ће тело прећи пут од 36 m?

Решење:

У овом случају тражи се време t , које је ненегативан број, тако да важи $t^2 = 36$. Пошто је $6^2 = 36$, закључујемо да је $t = 6$. Дакле, при слободном паду тело ће прећи пут од 36 m за $t = 6$ секунди.

Пишемо $t = \sqrt{36} = 6$.

Запамти!

Квадратни корен (корен са коренским показатељем 2) негативног реалног броја x јесте ненегативан реалан број y , такав да важи $y^2 = x$.

Пишемо, $y = \sqrt{x}$ и читамо „ y је квадратни корен броја x “.

У изразу $\sqrt{x}$, број x назива се **поткорени израз** (или **поткорена величина**).

Уочимо да су операције степеновања са степенским изложником 2 и квадратног кореновања инверзне једна другој. Наиме,

$$\sqrt{36} = 6, \text{ јер је } 6^2 = 36;$$

$$\sqrt{225} = 15, \text{ јер је } 15^2 = 225;$$

$$\sqrt{1} = 1, \text{ јер је } 1^2 = 1;$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ јер је } 0^2 = 0.$$

Задатак 1

Израчунај вредности следећих квадратних корена:

а) $\sqrt{144}$; б) $\sqrt{196}$; в) $\sqrt{625}$.

У општем случају, када се решава једначина облика $x^2 = 25$, без ограничења у погледу знака броја x , траже се сви реални бројеви x за које једначина постаје тачна бројна једнакост. Ова једначина има два решења: $x = -5$ и $x = 5$, јер је $(-5)^2 = 25$ и $5^2 = 25$.

Пишемо $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$. Међутим, треба обратити пажњу: по дефиницији је $\sqrt{25} = 5$. Знак $\pm$ пише се испред знака корена.

Пример 3

Решити једначину $x^2 = 100$.

Решење:

Према претходној дискусији, $x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$.

Задатак 2

Решити следеће једначине:

а) $x^2 = 324$; б) $x^2 - 36 = 64$; в) $289 - x^2 = 0$.

Пример 4

У грађевинарству се користе бетонски блокови у облику коцке. Један такав блок има запремину 64m^3 . Колика је дужина једне ивице таквог блока?

Решење:

Ако је a дужина ивице једног блока, тада треба одредити број a за који важи $a^3 = 64$. Једини број a за који је ова једнакост испуњена јесте $a = 4$. Пишемо $a = \sqrt[3]{64} = 4$.

Запамти!

Кубни корен (корен са коренским показатељем 3) реалног броја x је реалан број y такав да је $y^3 = x$. Пишемо и читамо: „ y је кубни корен броја x “.

Уочимо да су операције степеновања са степенским изложивоцем 3 и кубног кореновања инверзне једна другој. Наиме,

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ јер је } 2^3 = 8;$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3, \text{ јер је } (-3)^3 = -27;$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1, \text{ јер је } (-1)^3 = -1;$$

$$\sqrt[3]{0} = 0, \text{ јер је } 0^3 = 0.$$

Задатак 3

Израчунај вредности следећих кубних корена:

а) $\sqrt[3]{-125}$; б) $\sqrt[3]{1000}$; в) $\sqrt[3]{-1000}$.

Сада се поставља питање да ли се појам корена може уопштити на произвољан коренски показатељ n , где је n ($n \geq 2$) произвољан природан број.

Запамти!

1. Ако је n паран број, онда је n -ти корен функција која сваком ненегативном реалном броју x придружује ненегативан реалан број y за који важи $y^n = x$.
2. Ако је n непаран број, онда је n -ти корен функција која сваком реалном броју x придружује реалан број y за који важи $y^n = x$.

У оба случаја пишемо, $y = \sqrt[n]{x}$ и читамо „ y је n -ти корен од x “.

Да уочимо да, ако је коренов показатељ n паран број, онда је функција дефинисана за све ненегативне реалне бројеве, односно област дефинисаности ове функције је $D = [0, +\infty)$. Вредности које добија ова функција су такође ненегативни бројеви, па је скуп вредности функције $V = [0, +\infty)$.

С друге стране, ако је коренов показатељ n непаран број, онда је функција дефинисана за све реалне бројеве, односно област дефинисаности ове функције је $D = \mathbb{R}$. Вредности које добија ова функција су такође реални бројеви, који могу бити и позитивни и негативни, па је скуп вредности: $V = \mathbb{R}$.

У општем случају, област дефинисаности и скуп вредности функције n -ти корен могу се записати као :

$$D = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{ако је } n \text{ паран број} \\ \mathbb{R}, & \text{ако је } n \text{ непаран број} \end{cases} \quad V = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{ако је } n \text{ паран број} \\ \mathbb{R}, & \text{ако је } n \text{ непаран број} \end{cases}$$

Пример 5

- а) Изрази $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[4]{-64}$, $\sqrt{-25}$ нису дефинисани зато што негативни бројеви нису у области дефинисаности функције n -ти корен, за паран број n .
- б) Изрази $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-32}$ су дефинисани зато што је област дефинисаности функције n -ти корен, за непаран број n , читав скуп реалних бројева. При томе $\sqrt[3]{-8} = -2$ и $\sqrt[3]{-32} = -2$.

Задатак 4

Одреди који од израза су дефинисани, а који нису :

- а) $\sqrt[3]{-25}$; б) $\sqrt[4]{-49}$; в) $\sqrt[3]{30}$; г) $\sqrt[4]{100}$.

Пример 6

Израчунати вредности следећих корена:

- а) $\sqrt[3]{3^3}$; б) $\sqrt[4]{(-3)^2}$; в) $\sqrt[4]{3^4}$; г) $\sqrt[4]{(-3)^6}$.

Решење:

- а) $\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27} = 3$;

$$\text{б)} \sqrt[3]{(-3)^3} = \sqrt[3]{-243} = -3;$$

$$\text{в)} \sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{81} = 3 = |3|;$$

г) Уочи да је $(-3)^6$ позитиван број, па је корен $\sqrt[4]{(-3)^6}$ дефинисан. Тако, $\sqrt[4]{(-3)^6} = \sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{729} = 3 = |-3|$. Значи, вредност израза $\sqrt[4]{(-3)^6}$ није -3 , већ је $3 = |-3|$.

Запамти!

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a, & \text{ако је } n \text{ непаран број} \\ |a|, & \text{ако је } n \text{ паран број} \end{cases}$$

Задатак 5

Одреди вредност израза:

$$\text{а)} \sqrt[4]{6^4}; \quad \text{б)} \sqrt[4]{(-6)^4}; \quad \text{в)} \sqrt[4]{6^5}; \quad \text{г)} \sqrt[4]{(-6)^5}.$$

Пример 7

Израчунати следеће изразе:

$$\text{а)} (\sqrt{9})^2; \quad \text{б)} (\sqrt[4]{16})^4; \quad \text{в)} (\sqrt[3]{-27})^3.$$

Решење:

$$\text{а)} (\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9; \quad \text{б)} (\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16; \quad \text{в)} (\sqrt[3]{-27})^3 = (-3)^3 = -27.$$

Запамти!

Ако је израз $\sqrt[n]{a}$ дефинисан, онда важи $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Уочи да $(\sqrt[4]{-16})^4 \neq -16$, ер број -16 није у области дефинисаности функције 4-тог корена.

Пример 8

Полиција користи формулу $v = \sqrt{254fd}$ како би проценила брзину v (во km/h) којом се аутомобил кретао ако се клизао d метара након што су нагло притиснуте кочнице (слика испод). Број f је коефицијент трења коловоза, који представља меру „клизавости“ пута.

Следећа табела приказује неке типичне процене за вредност f .

	Асвалт	Бетон	Калдрма
Влажан	0,5	0,4	0,1
Сув	1,0	0,8	0,2

- а) Ако се аутомобил клиза 10 метара по влажном бетону, коликом брзином се кретао у тренутку када су притиснуте кочнице?
 б) Ако се аутомобил креће брзином од 20 km/h, колико ће се далеко клизати по влажној калдрми?



Решење:

- а) Аутомобил се клиза 10 метара по влажном бетону, што значи: $d=10$ а $f=0,4$. Према датој формули, имамо да $v = \sqrt{254 \cdot f \cdot d} = \sqrt{254 \cdot 0,4 \cdot 10} = 31,87$ km/h.
 б) Аутомобил се креће брзином од 20 km/h по сувој калдрми, па је $v=20$, а $f=0,2$; у овом случају тражи се растојање d , које одређујемо из дате формуле $v^2 = 254 \cdot f \cdot d$, т.е.

$$d = \frac{v^2}{254 \cdot f}$$

Заменом вредности добијамо:

$$d = \frac{20^2}{254 \cdot 0,2} = 7,87 \text{ m.}$$

Задаци за вежбање!

- Који од следећих исказа су тачни
 - број 6 је квадратни корен од 72;
 - број 7 је квадратни корен од 49;
 - пети корен од 243 је 3;
 - пети корен од -243 је -3;
 - четврти корен од 16 је -4.
- Који од датих израза су дефинисани:
 - $\sqrt{-4}$;
 - $\sqrt[3]{-125}$;
 - $\sqrt[4]{64}$;
 - $-\sqrt{25}$.
- За које вредности променљиве x су следећи изрази дефинисани:
 - $\sqrt{2x-5}$;
 - $\sqrt[3]{x+4}$;
 - $\sqrt[4]{10-x}$;
 - $\sqrt[3]{x-1}$;
 - $\sqrt[4]{x^2+9}$.
- Израчунај вредност следећих израза:
 - $3\sqrt{\frac{1}{9}} + 2\sqrt{16} - \sqrt{\frac{1}{4}}$;
 - $\sqrt{196} - \sqrt[3]{-64} + \sqrt[4]{81}$;
 - $\sqrt[3]{-27} - \sqrt{49} - \sqrt[4]{-32}$.
- Које од датих једнакости су тачне:
 - $\sqrt{4^2} = 4$;
 - $\sqrt{(-4)^2} = -4$;
 - $5 \cos 41^\circ - 2$;
 - $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$;
 - $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$;
 - $\sqrt[3]{1^3} = 1$.
- За које вредности променљиве x је тачна једнакост?
 - $\sqrt{x^2} = x$;
 - $\sqrt[3]{x^3} = x$;
 - $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$;
 - $\sqrt[4]{(2-x)^4} = |2-x|$.
- Један електроинжењер ради на пројекту за соларне панеле. Он жели да постави $p \times n$ панела у један систем (тј. n редова и p колона панела). Један панел производи 40 ват-часова дневно. Колико панела ће бити потребно инжењеру ако жели да систем производи 1000 ват-часова дневно?

1.3 СТЕПЕН СА РАЦИОНАЛНИМ ИЗЛОЖИОЦЕМ. ПРЕДСТАВЉАЊЕ КОРЕНА ПОМОЋУ СТЕПЕНА

Подсети се!

- Ако је $n \in \mathbb{Z}^+$, онда
 1. $a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n$, за $n \geq 2$;
 2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, за $a \neq 0$;
 3. $a^0 = 1$, за $a \neq 0$.
- Ако је $r \in \mathbb{Q}$, онда се r може представити као $r = \frac{m}{n}$, где је $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Степен са рационалним изложником

Степеновање са природним и целобројним изложником сада ћемо уопштити на степеновање са рационалним изложником. Циљ овог уопштавања је да важе иста правила за степеновање која важе и за степене са природним или целобројним изложником.

Најпре ћемо дефинисати степеновање са изложником $\frac{1}{n}$, каде $n \in \mathbb{N}$.

Запамти!

1. Ако је a ненегативан реалан број, а n позитиван паран број, онда је $a^{\frac{1}{n}}$ ненегативан број за који важи $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.
2. Ако је a реалан број, а n позитиван непаран број, онда је $a^{\frac{1}{n}}$ реалан број за који важи $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

Пример 1

- а) $9^{\frac{1}{2}} = 3$, јер је $3^2 = 9$;
- б) $16^{\frac{1}{4}} = 2$, јер је $2^4 = 16$;
- в) $(-27)^{\frac{1}{3}} = -3$, јер је $(-3)^3 = -27$.

Задатак 1

Изračунај: а) $27^{\frac{1}{3}}$; б) $81^{\frac{1}{4}}$; в) $(-243)^{\frac{1}{5}}$.

У наставку ћемо проширити претходну дефиницију степеновања са степеновим изложником $r = \frac{m}{n}$, где је $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Као што смо претходно напоменули, треба да важе иста правила за степеновање која важе и за степене чији је изложник природан или цео број.

Запамти!

- Нека је a позитиван реалан број, где је $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ и n је паран број. Степен броја a са рационалним изложником $\frac{m}{n}$ дефинише се као $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.
- Нека је a реалан број ($a \neq 0$) и $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, где је $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ и n је непаран број. Степен броја a са степеном чији је изложник рационалан број $\frac{m}{n}$ дефинише се као $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Пример 2

Изračунај: а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $81^{\frac{5}{4}}$; в) $(-125)^{\frac{4}{3}}$.

Решење:

$$\text{а) } 27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^2 = 9;$$

$$\text{б) } 81^{\frac{5}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^5 = 3^5 = 243;$$

$$\text{в) } (-125)^{\frac{4}{3}} = \left((-125)^{\frac{1}{3}}\right)^4 = (-5)^4 = 625.$$

Задатак 2

Изračунај: а) $216^{\frac{5}{3}}$; б) $2401^{\frac{3}{4}}$; в) $(-64)^{\frac{7}{3}}$.

Према дефиницији за степен са рационалним изложником, правила степеновања остају иста као и у случају степеновања степена са чији је изложник цели број, али само у случају када је степеновање дефинисано, односно када има смисла.

Запамти!

За све реалне бројеве $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и за све $\frac{m}{n}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, где је $m, r \in \mathbb{Z}, n, s \in \mathbb{N}$, важе следећа правила:

1. Производ степена са истом основом

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m+r}{n \cdot s}};$$

2. Количник степена са истом основом

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m-r}{n \cdot s}};$$

3. Степеновање степена

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m \cdot r}{n \cdot s}};$$

4. Степеновање производа

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}};$$

5. Степеновање количника

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

Према свим овим правилима, ако је n паран број, тада a и b треба да буду позитивни.

Пример 3

Израчунај:

а) $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}}$; б) $16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}}$; в) $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Решење:

Према претходно формулисаним правилима за степеновање добијамо следеће:

а) $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1+1}{2 \cdot 4}} = 16^{\frac{2}{4}} = 2^2 = 4;$

б) $16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1-1}{2 \cdot 4}} = 16^{\frac{0}{4}} = 1;$

в) $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2.$

Задатак 3

Израчунај:

а) $256^{\frac{1}{4}} \cdot 256^{\frac{1}{8}}$; б) $256^{\frac{1}{2}} : 256^{\frac{1}{4}}$; в) $\left(256^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Пример 4

Нека је $a, b > 0$. Изврши назначене операције:

а) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; б) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(a \cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{5}}$.

Решење:

а) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{4}}$;

б) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{13}{4}} : a^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{13}{4}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{13}{4}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}} = a^{\frac{13}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{13}{4} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{41}{12}}$;

в) $\left(a \cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{4}{5}} \cdot b^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{4}{5}} \cdot b^{\frac{3}{5}}$.

Задатак 4

Нека је $a > 0$. Израчунај:

а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; б) $a^{\frac{1}{5}} : a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Пример 5

Израчунај степене $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3$ и $(4^3)^{\frac{1}{2}}$ и упореди их.

Решење:

$\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$ и $(4^3)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = 8$, па можемо закључити да су оба степена једнака.

Међутим, једнакост степена у претходном примеру не важи само у конкретном случају, већ и уопштено. Заправо, важи следеће својство.

Запамти!

За сваки реалан број a и за сваки $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, где су $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, важи:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

При томе, ако је n паран број, правило важи за $a \geq 0$.

Представљање степена чији је изложкиоц рационалан број преко корена и обратно

Претходно смо дефинисали да је n -ти корен функција која сваком реалном броју x придружује реалан број y за који важи $y^n = x$. При томе, ако је n паран број, функција је дефинисана за $x \geq 0$, а ако је n непаран број, дефиниционо подручје функције је скуп свих реалних бројева. Дакле, за x из домена функције важи следећа еквиваленција:

$$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n.$$

Да бисмо утврдили везу између степена чији је изложкиоц рационалан број и корена, поћи ћемо од дефиниције $a^{\frac{1}{n}}$. Ако степенујемо израз $a^{\frac{1}{n}}$ са степеновим изложкиоцем n , где је $n \in \mathbb{N}$, добијамо:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$

Значи, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$, па из претходне еквиваленције следи да $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Запамти!

Ако $n \in \mathbb{N}$, онда $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

При томе, ако је n паран број, онда једнакост важи за $a \geq 0$, а ако је n непаран број, она важи за сваки реалан број a .

Пример 6

а) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4;$

б) $(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2.$

Задатак 5

Израчунај: а) $64^{\frac{1}{3}};$ б) $(-27)^{\frac{1}{3}}.$

Нека $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Ако $a^{\frac{m}{n}}$ степенује се са n , добија се:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Од $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$ следи да $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Запамти!

Ако $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, онда $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

При томе, ако је n паран број, онда је $a^{\frac{m}{n}}$ дефинисан за $a \geq 0$, а ако је n непаран број, онда је $a^{\frac{m}{n}}$ дефинисан за сваки реалан број a .

Пример 7

а) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9;$

б) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 8;$

в) $(-32)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(-32)^2} = -8.$

Пример 8

Брзина којом једрилица може да плови зависи од три фактора: њене укупне дужине L , површине A њених једара и запремине V воде коју истискује, као што је приказано на скици.

Уопштено, једрилица може постићи већу брзину ако је дужа, ако има већу површину једара или ако истискује мању запремину воде. Да би трке једрилица биле фер, само чамци из исте „класе“ могу да се квалификују за заједничко такмичење. За одређену трку, чамац се сматра квалификованим уколико је испуњена дата неједнакост

$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} \leq 16,$$

при чему се L мери у метрима (m), A у квадратним метрима (m²), а V у кубним метрима (m³). Користите ову неједнакост да одговорите на следећа питања.

- Једрилица има дужину од 18 m, површину једара 316 m² и запремину истиснуте воде од 19 m³. Да ли се овај чамац квалификује за трку?
- Једрилица има дужину од 20 m и запремину истиснуте воде од 17 m³. Која је највећа могућа површина једара која ће омогућити чамцу да се квалификује за трку?

Решење:

- Из услова задатка имамо $L = 18$, $A = 316$ и $V = 19$. Питање је да ли је за ове вредности L , A и V испуњен услов за квалификацију једрилице за такмичење. Добијамо:

$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} = 0,98 \cdot 18 + 1,25 \cdot \sqrt{316} - 9,84 \cdot \sqrt[3]{19} = 13,6 \leq 16,$$

тј. услов за квалификацију је испуњен.



- б) За $L = 20$, а $V = 17$, тражи се највећа могућа површина једара која може омогућити чамцу да се квалификује за трку. Заправо, тражи се вредност површине A за коју ће горња неједнакост (за квалификацију) важити као једнакост, тј.

$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} = 16,$$

Где је $L = 20$, $V = 17$. Заменом добијамо:

$$0,98 \cdot 20 + 1,25 \cdot \sqrt{A} - 9,84 \cdot \sqrt[3]{17} = 16.$$

$$\text{Одатле } \sqrt{A} = \frac{16 - 0,98 \cdot 20 + 9,84 \cdot \sqrt[3]{17}}{1,25} = 17,36, \text{ па } A = 17,36^2 = 301,37 \text{ m}^2.$$

Задатак 6

Брзина коју један тркачки дрон може да постигне зависи од његове масе m (у килограмима), укупне површине пропелера S (у квадратним метрима) и капацитета батерије E (у ват-сатима). Дрон може постићи већу брзину ако има мању масу, већу површину пропелера или мањи капацитет батерије. За учешће дрона на одређеној трци, његове перформансе треба да задовоље следеће неједнакости:

$$0 \leq 0,6m + 4\sqrt{S} - 1,5E^{\frac{1}{3}} \leq 20,$$

Где је m е маса у kg, S је површина у m^2 , а E је капацитет батерије у Wh.

- Дрон има масу 3 kg, површину пропелера $0,50 \text{ m}^2$ и батерију капацитета 54 Wh. Да ли овај дрон може да учествује на трци?
- Дрон има масу 2,5 kg и батерију капацитета 64 Wh. Која је највећа могућа површина пропелера која може да се користи, а да се дрон и даље квалификује за ову трку?

Задаци за вежбање!

1. Одреди вредност степена:

а) $9^{\frac{5}{2}}$; б) $125^{\frac{7}{3}}$; в) $(-343)^{\frac{2}{3}}$.

2. Израчунај вредност израза:

а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$; б) $\left(\frac{1}{512}\right)^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot \left(\frac{36}{81}\right)^{\frac{1}{2}} - 3$.

3. Нека $a > 0$. Израчунај

а) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}}$; б) $a^{\frac{1}{2}} : \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-1}\right)$; в) $\left(\left(a : a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{6}} : a^{\frac{1}{24}}$.

4. Запиши степене у облику корена:

а) $a^{\frac{1}{3}}$; б) $2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}$; в) $4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}$.

5. Запиши степене у облику корена:

а) $\sqrt{a^3}$; б) $\sqrt[3]{2a^2b^4}$; в) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b^4}$.

1.4 ПРОШИРИВАЊЕ И СКРАЋИВАЊЕ КОРЕНА

Подсети се!

- $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$, за $k \neq 0$;
- $\frac{m}{n} = \frac{m : k}{n : k}$, за $k \neq 0$;
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

У примерима и задацима који следе претпоставићемо да у изразима $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $a \geq 0$, ако n је паран број и $a \in \mathbb{R}$, ако n је непарни број, тј. да $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ је увек дефинисан.

Пример 1

Упоредите вредности корена $\sqrt[4]{16}$ и $\sqrt[4]{256}$.

Решење:

Пошто је $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ и $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2$, закључујемо да ова два корена имају исту вредност.

Уочи да $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{16^2}$. Наиме, ако се у првом корену коренски изложивоц и степен изложивоц у поткоренском изразу помноже истим бројем, добија се други корен.

У општем случају, ако $m, n, k \in \mathbb{N}$, онда

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Ово својство се назива **проширивање корена**.

Запамти!

Ако се коренски изложивоц и степен изложивоц поткоренског изрази помноже истим бројем, различитим од 0, тада се вредност корена не мења.

Пример 2

Корене $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{5}$ прошири са 3.

Решење:

Применом поступка описаног изнад,

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \sqrt[2]{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27} \\ \sqrt[3]{5} &= \sqrt[3]{5} = \sqrt[9]{5^3} = \sqrt[9]{125}.\end{aligned}$$

Задатак 2

Корене $\sqrt{7}$ и $\sqrt[3]{4}$ прошири за 4.

Пример 3

Прошири корене са 2:

а) $\sqrt{x^2}$; б) $\sqrt[4]{x^2 y^3}$; в) $\sqrt[3]{x^3 y^2 z}$.

Решење:

а) $\sqrt{x^2} = \sqrt[2]{x^{2 \cdot 2}} = \sqrt[4]{x^4}$;

б) $\sqrt[4]{x^2 y^3} = \sqrt[4]{(x^2 y^3)^2} = \sqrt[8]{x^4 y^6}$;

в) $\sqrt[3]{x^3 y^2 z} = \sqrt[3]{(x^3 y^2 z)^2} = \sqrt[6]{x^6 y^4 z^2}$.

Задатак 3

Прошири корене са 3:

а) $\sqrt{a^2 b^3}$; б) $\sqrt[4]{ab^3 c^3}$.

Пример 4

Корене $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{3}$, сведи на исти коренски изложивоц.

Решење:

При свођењу корена на исти коренски изложивоц, најчешће бирамо број који је најмањи заједнички садржалац (НЗС) коренових изложивоца. У овом случају, $\text{НЗС}(2, 3, 4) = 12$. Значи, све корене ћемо проширити до коренског изложивоца 12. Добијамо:

$$\sqrt{3} = \sqrt[2]{3^6} = \sqrt[12]{3^6};$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[12]{3^4};$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[12]{3^3}.$$

Задатак 4

Сведи корене $\sqrt{a^2 b^3}, \sqrt[6]{ab^2 c^3}, \sqrt[3]{c^3}$ на исти коренски изложивоц.

Пример 5

Упореди вредности корена $\sqrt[3]{2^4}$ и $\sqrt[2]{2^3}$.

Решење:

Да бисмо упоредили вредности корена, најпре треба да их сведемо на исти коренски изложивоц. Пошто је $\text{НЗС}(5, 3) = 15$, оба корена ћемо свести на коренов изложивоц 15. Добијамо:

$$\sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{2^{4 \cdot 3}} = \sqrt[15]{2^{12}} = \sqrt[15]{4096} \quad \text{и} \quad \sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^{7 \cdot 3}} = \sqrt[15]{1024}.$$

Од два корена која су сведена на исти коренов изложивоц, већи је онај који има већи поткоренски израз. У овом случају то је $\sqrt[5]{2^7}$.

Задатак 5

Поређај по величини следеће корене:

а) $\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{17}$; б) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{7}$.

Пример 6

Корене $\sqrt[12]{2^6}, \sqrt[6]{2^3}, \sqrt{2}$ запиши као степене са рационалним изложивоцем и упореди их.

Решење:

Користењем везе између корена и степена са рационалним изложивоцем имамо:

$$\sqrt[12]{2^6} = 2^{\frac{6}{12}}, \quad \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}}, \quad \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

Пошто $\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, закључујемо да су сва три корена једнака.

У општем случају, ако коренски изложивоц и степен изложивоц поткоренског израза имају заједнички множилац k , онда

$$\sqrt[k]{a^{m \cdot k}} = a^{\frac{m \cdot k}{k}} = a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[k]{a^m}.$$

Овај поступак се назива **скраћивање корена**.

Запамти!

Ако коренски изложивоц и степен изложивоц поткоренског израза поделимо са неким њиховим заједничким делиоцем, тада се вредност корена не мења.

Пример 7

Скрати корене: а) $\sqrt[12]{x^6}$; б) $\sqrt[15]{x^3 y^9 z^6}$.

Решење:

а) Највећи заједнички делилац коренског изложивоца и степеновог изложивоца поткоренског израза је НЗД(12, 6) = 6, па ако скратимо са 6, добијамо: $\sqrt[12]{x^6} = \sqrt[12 \div 6]{x^{6 \div 6}} = \sqrt{x}$.

б) Пошто $\sqrt[15]{x^3 y^9 z^6} = \sqrt[15]{(xy^3 z^2)^3}$, а НЗД(15, 3) = 3, можемо скратити са 3:

$$\sqrt[15]{x^3 y^9 z^6} = \sqrt[15]{(xy^3 z^2)^3} = \sqrt[15 \div 3]{(xy^3 z^2)^{3 \div 3}} = \sqrt[3]{xy^3 z^2}.$$

Задатак 6

Скрати корене: а) $\sqrt[3]{y^4}$; б) $\sqrt[16]{a^{32}b^8}$; в) $\sqrt[18]{a^6b^{12}c^9}$.

Запамти!

Ако је коренски изложивоц n делилац степеновог изложивоца m подкоренског израза, т. е. $m = n \cdot k$, тада се корен $\sqrt[n]{a^m}$ своди на:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{n \cdot k}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = \begin{cases} |a^k|, & \text{ако је } n \text{ паран број} \\ a^k, & \text{ако је } n \text{ непаран број} \end{cases}$$

Пример 8

Упрости изразе:

а) $\sqrt[3]{x^6}$; б) $\sqrt{x^4y^2z^8}$.

Решење:

а) $\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{x^{2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{(x^2)^3} = x^2$; б) $\sqrt{x^4y^2z^8} = \sqrt{(x^2yz^4)^2} = |x^2yz^4|$.

Задатак 7

Упрости изразе:

а) $\sqrt[3]{2^6}$; б) $\sqrt{4^4 \cdot 3^6 \cdot 2^8}$; в) $\sqrt[3]{(x-2)^{12}}$.

Задачи за вежбање!

1. Прошири корене са 4:

а) $\sqrt{3a}$; б) $\sqrt[3]{5b}$; в) $\sqrt[3]{4a^2b}$; г) $\sqrt[3]{2ab^2}$.

2. Сведи корене на заједнички коренски изложивоц:

а) $\sqrt[3]{a^3}$ и $\sqrt[4]{a^5}$; б) $\sqrt[3]{3x^2}$ и $\sqrt[4]{x}$; в) $\sqrt{ab}$ и $\sqrt[3]{a^2b}$;

г) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt[4]{5}$; д) $\sqrt[3]{a^3b}$, $\sqrt[4]{a}$ и $\sqrt{ab}$; е) $\sqrt[3]{2xy^3}$, $\sqrt[4]{x}$ и $\sqrt[5]{y^3}$.

3. Упрости корене:

а) $\sqrt[3]{4a^4b^2}$; б) $\sqrt[3]{a^6b^3}$; в) $\sqrt[3]{a^6b^4}$.

4. Упрости корене:

а) $\sqrt[3]{8a^3}$; б) $\sqrt[3]{16b^4}$; в) $\sqrt[3]{32x^5}$; г) $\sqrt{25a^2b^6}$.

5. Упрости:

а) $\sqrt[3]{x^4}$; б) $\sqrt[3]{x^{12}}$; в) $\sqrt{x^9}$; г) $\sqrt{x^{11}}$;

1.5 КОРЕНОВАЊЕ ПРОИЗВОДА И КОЛИЧНИКА

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.
- Степенуј: $(x \cdot y)^2$; $(x : y)^2$; $(x \cdot y)^{(3/4)}$; $(x : y)^{(3/4)}$.

Пример 1

Провери тачност следећих једнакости:

$$\text{а) } \sqrt{49 \cdot 81} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{81}; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}.$$

Решење:

а) Лева страна једнакости је једнака $\sqrt{49 \cdot 81} = \sqrt{3969} = 63$, а за десну страну добијамо:

$$\sqrt{49} \cdot \sqrt{81} = 7 \cdot 9 = 63.$$

Дакле, обе стране једнакости су једнаке, па је једнакост тачна.

б) На исти начин покажи тачност и следеће једнакости.

Ова својства не важе само у конкретним случајевима, већ и у општем случају.

Запамти!

1. 1. Ако је коренски изложивоц n паран број ($n \geq 2$), тада

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ за сваки } a, b \geq 0$$

$$\text{и } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ за сваки } a \geq 0 \text{ и свако } b > 0.$$

2. 2. Ако је коренски изложивоц n непаран број ($n \geq 3$), тада

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ за сваки } a, b \in \mathbb{R};$$

$$\text{и } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ за сваки } a \in \mathbb{R} \text{ и свако } b \neq 0.$$

Ова правила су позната као правила за кореновање производа и количника.

Задатак 1

Израчунај:

$$\text{а) } \sqrt[4]{16 \cdot 256}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{\frac{64}{729}}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{(-64) \cdot 81}; \quad \text{г) } \sqrt[4]{\frac{32}{-283}}.$$

Пример 2

Упрости израз:

$$\text{а) } \sqrt[5]{a^5 b^{15} c^{10}}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\frac{x^6 y^3 z^9}{a^6 b^9}}, a, b \neq 0.$$

Решење:

$$\text{а) } \sqrt[5]{a^5 b^{15} c^{10}} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^{15}} \cdot \sqrt[5]{c^{10}} = ab^3 c^2.$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{\frac{x^6 y^3 z^9}{a^6 b^9}} = \frac{\sqrt[3]{x^6 y^3 z^9}}{\sqrt[3]{a^6 b^9}} = \frac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{z^9}}{\sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^9}} = \frac{x^2 y z^3}{a^2 b^3}.$$

Задатак 2

Упрости израз:

$$\text{а) } \sqrt[4]{a^8 b^4 c^{12}}, \text{ ако } a, b, c \geq 0;$$

$$\text{б) } \sqrt[6]{\frac{x^6 y^{18} z^{12}}{a^{24} b^6}}, \text{ ако } x, y, z \geq 0, \text{ а } a, b > 0.$$

Пример 3За које вредности променљиве x су једнакости тачне:

$$\text{а) } \sqrt[3]{(x+3)(x-2)} = \sqrt[3]{x+3} \cdot \sqrt[3]{x-2}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{\frac{x+3}{x-2}} = \frac{\sqrt[4]{x+3}}{\sqrt[4]{x-2}}.$$

Решење:а) Коренски изложивиоц је непаран, па је једнакост тачна за сваки реалан број x ;б) У овом случају коренски показатељ је паран, па ће једнакост бити тачна када x задовољава следећи систем линеарних неједначина:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases}.$$

Добијамо да ће једнакост бити тачна ако је $x > 2$.**Задатак 3**Одреди вредности променљиве x за које су једнакости тачне:

$$\text{а) } \sqrt[3]{x(x-4)} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x-4}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\frac{2x+4}{x-3}} = \frac{\sqrt[3]{2x+4}}{\sqrt[3]{x-3}}.$$

Пример 4

Упрости израз $\sqrt{25x^2y}$, ако $x, y \geq 0$.

Решење:

$$\sqrt{25x^2y} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = 5x\sqrt{y}$$

Запамти!

Према претходном поступку кореновања производа, добијамо:

$$\sqrt[n]{\alpha^n \beta} = \sqrt[n]{\alpha^n} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \alpha \sqrt[n]{\beta}.$$

Овакав поступак назива се **извлачење чиниоца испред знака корена**. Притом је $\alpha, \beta \geq 0$, ако је n паран број.

Пример 5

Извучи чиниоце испред знака корена:

а) $\sqrt{3a^2}$; б) $\sqrt[3]{8ab^3}$; в) $\sqrt[4]{a^4b}$, $a \geq 0$; г) $\sqrt[3]{5ab^3}$.

Решење:

а) $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2} = |a| \sqrt{3}$;

б) $\sqrt[3]{8ab^3} = \sqrt[3]{(2b)^3 a} = \sqrt[3]{(2b)^3} \cdot \sqrt[3]{a} = 2b \sqrt[3]{a}$;

в) $\sqrt[4]{a^4b} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b} = a \sqrt[4]{b}$. Тука е искористено дека $\sqrt[4]{a^4} = a$, бидејќи $a \geq 0$.

г) $\sqrt[3]{5ab^3} = \sqrt[3]{b^3(5a)} = \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{5a} = b \sqrt[3]{5a}$.

Задатак 4

Извучи чиниоце испред знака корена:

а) $\sqrt{5b^2c}$, $b, c \geq 0$; б) $\sqrt[3]{27x^2}$; в) $\sqrt[4]{a^4b^3}$, $a, b \geq 0$.

Уочи да се испред знака корена могу извући само они чиниоци у подкоренском изразу чији су степенови показатељи већи или еднаки коренском изложивоцу. Нека је дато $\sqrt[n]{a^m}$. Ако $m \geq n$, онда $m = nk + r$, где је k природан број и $0 \leq r < n$. У том случају,

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk+r}} = \sqrt[n]{a^{nk} \cdot a^r} = \sqrt[n]{(a^k)^n \cdot a^r} = \sqrt[n]{a^k}^n \cdot \sqrt[n]{a^r} = a^k \sqrt[n]{a^r}.$$

Запамти!

Ако $m = nk + r$, где је $k \geq 1$, $0 \leq r < n$, онда важи:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk+r}} = a^k \sqrt[n]{a^r}.$$

Притом, треба водити рачуна о дефинисаности корена, тј. ако је n паран број, онда је $a \geq 0$.

Пример 6

Извучи чиниоце испред знака корена:

- а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt[3]{24}$; в) $\sqrt[4]{a^9}$, $a \geq 0$;
 г) $\sqrt[3]{108a^5b^4}$; д) $\sqrt{\frac{a^4b}{cd^2}}$, $a, b \geq 0, c, d > 0$.

Решење:

- а) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;
 б) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$;
 в) $\sqrt[4]{a^9} = \sqrt[4]{(a^2)^4 \cdot a} = \sqrt[4]{(a^2)^4} \cdot \sqrt[4]{a} = a^2 \sqrt[4]{a}$;
 г) $\sqrt[3]{108a^5b^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 4 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b} = \sqrt[3]{(3ab)^3 \cdot 4a^2b} = \sqrt[3]{(3ab)^3} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} = 3ab\sqrt[3]{4a^2b}$;
 д) $\sqrt{\frac{a^4b}{cd^2}} = \frac{\sqrt{a^4b}}{\sqrt{cd^2}} = \frac{a^2\sqrt{b}}{d\sqrt{c}}$.

Задатак 5

Извучи чиниоце испред знака корена:

- а) $\sqrt{32}$; б) $\sqrt[3]{54}$; в) $\sqrt[4]{b^7}$, $b \geq 0$; г) $\sqrt[3]{40x^2y^7}$.

Размотри једнакост $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ здесна налево. Може се уочити да је чинилац 2 унет под знак корена тако што је степенован показатељем 2, а коренски показатељ је, такође, једнак 2. Наиме, $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$. Овај поступак назива се **уношење чиниоца под знак корена**.

Запамти!

Множилац се уноси под знак корена тако што се степењује коренским изложивоцем, а тако добијени израз множи са поткоренским изразом, тј. ако је $\alpha \geq 0$, онда важи

$$\alpha \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha^n \beta}.$$

Притом, ако је n паран број, онда β мора бити ненегативан број.

Пример 7

Нека је $x, y > 0$. Унеси чиниоце под знак корена:

$$\text{а) } x\sqrt{x}; \quad \text{б) } \frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^5}{x^5}}; \quad \text{в) } \frac{x}{2y}\sqrt{\frac{y^2}{x}}.$$

Решење:

$$\text{а) } x\sqrt{x} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3};$$

$$\text{б) } \frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^5}{x^5}} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^6 \cdot \frac{y^5}{x^5}} = \sqrt{\frac{x^6}{y^6} \cdot \frac{y^5}{x^5}} = \sqrt{\frac{x}{y}};$$

$$\text{в) } \frac{x}{2y}\sqrt{\frac{y^2}{x}} = \sqrt{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 \cdot \frac{y^2}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{4y^2} \cdot \frac{y^2}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{4x}} = \sqrt{\frac{x}{4}}.$$

Задатак 6

Нека је $a, b > 0$. Унеси чиниоце под знак корена:

$$\text{а) } a^2\sqrt{a}; \quad \text{б) } \frac{a^3}{b}\sqrt{\frac{b^4}{a^3}}; \quad \text{в) } \frac{2a}{b^2}\sqrt{\frac{b^3}{4a}}.$$

Пример 8

Упореди бројеве $3\sqrt{7}$ и $2\sqrt{10}$, без израчунавања вредности корена.

Решење:

Најпре у оба израза уносимо чиниоце под знак корена:

$$3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{63}, \quad 2\sqrt{10} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = \sqrt{40}.$$

Пошто је $\sqrt{63} > \sqrt{40}$, можемо закључити да је $3\sqrt{7} > 2\sqrt{10}$.

Задатак 7

Упореди бројеве $4\sqrt[3]{6}$ и $2\sqrt[2]{11}$, без израчунавања вредности корена.

Задачи за вежбање!

1. Израчунај вредност корена:

$$\text{а) } \sqrt{49 \cdot 81}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{64 \cdot (-125) \cdot 8}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{\frac{625 \cdot 16}{1296}}.$$

2. Нека је $a, b \geq 0$. Израчунај корене:

$$\text{а) } \sqrt{a^2 b^4}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{a^6 b^9}; \quad \text{в) } \sqrt[5]{\frac{a^{10} b^5}{c^{15}}}, \quad c \neq 0.$$

3. Извуци чиниоце испред знака корена:

а) $\sqrt{a^5 b^3 c^2}$, $a, b, c \geq 0$; б) $\sqrt[3]{a^7 b^{11}}$; в) $\sqrt[3]{\frac{a^9 b^4}{c^{12}}}$, $c \neq 0$.

4. Унеси чиниоце под знак корена:

а) $3\sqrt{3}$; б) $x^2 \sqrt{x^3 y}$; в) $\frac{4x}{y} \sqrt{\frac{y^4}{x^2}}$.

5. Без израчунавања вредности корена, упореди бројеве:

а) $3\sqrt{11}$ и $5\sqrt{8}$; б) $2\sqrt[3]{9}$ и $4\sqrt[3]{3}$.

1.6 САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ КОРЕНА

Подсети се!

- У изразу $\sqrt[3]{a^7 b^2 c^3}$, извуци чиниоце испред знака корена.
- Скрати корен $\sqrt[3]{a^4 b^2 c^6}$.

Запамти!

Корен је у **нормалном облику** ако су испуњени следећи услови:

1. Поткоренски израз не садржи именилац различит од 1;
2. Поткоренски израз не садржи чиниоце који се могу извући испред знака корена;
3. Коренски изложивоц и степен изложивоца поткоренског израза немају заједничког делилаца који је различит од 1.

Пример 1

- а) Корен $\sqrt{\frac{1}{2}}$ није у нормалном облику, јер поткоренски израз садржи именилац различит од 1.
- б) Корен $\sqrt{8}$ није у нормалном облику, јер $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$, односно садржи чиниоца који се може извући испред знака корена.
- в) Корен $\sqrt[3]{a^3 b^6 c^9}$ није у нормалном облику, јер $\sqrt[3]{a^3 b^6 c^9} = \sqrt[3]{(ab^2 c^3)^3}$, односно коренов изложивоц и степен изложивоца поткоренског израза имају заједничког делиоца 3 (различитог од 1).

Пример 2

Запиши корене из претходног примера у нормалном облику.

Решење:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\text{б) } \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2};$$

$$\text{в) } \sqrt[12]{a^3b^4c^5} = \sqrt[12]{(ab^2c^3)^3} = \sqrt[12 \cdot 3]{(ab^2c^3)^{3 \cdot 3}} = \sqrt[4]{ab^2c^3}.$$

Задатак 1

Запиши корене у нормалном облику:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{16}{3}}; \quad \text{б) } xy\sqrt{\frac{12}{xy}}, \quad x, y > 0; \quad \text{в) } \frac{x}{y}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}}, \quad x > y > 0.$$

Запамти!

Ако је корен сведен на нормалан облик, рационални чинилац који се налази испред знака корена назива се **рационални коефицијент** (или једноставно **коефицијент**) **корена**.

Пример 3

У изразу $2\sqrt{2}$, рационални коефицијент корена је 2, а у изразу $3x^2\sqrt{xy}$, рационални коефицијент корена је $3x^2$.

Пример 4

Сведи корене на нормалан облик и одреди њихов рационални коефицијент:

$$\text{а) } \sqrt[3]{8x^3 - 16x^5}; \quad \text{б) } a\sqrt{\frac{1}{a}}, \quad a > 0.$$

Решење:

$$\text{а) } \sqrt[3]{8x^3 - 16x^5} = \sqrt[3]{8x^3(1 - 2x^2)} = 2x \cdot \sqrt[3]{1 - 2x^2}. \text{ Рационални коефицијент испред корена је } 2x.$$

$$\text{б) } a\sqrt{\frac{1}{a}} = a\sqrt{\frac{a}{a^2}} = \frac{a}{a}\sqrt{a} = \sqrt{a}. \text{ Рационални коефицијент испред корена је } 1.$$

Задатак 2

Сведи корене на нормалан облик и одреди њихов рационални коефицијент:

$$\text{а) } \sqrt[4]{64a^4 - 16a^4}; \quad \text{б) } b\sqrt{\frac{a^2}{b}}, \quad a, b > 0.$$

Запамти!

Два или више корена у нормалном облику који се разликују само по својим рационалним коефицијентима називају се **слични корени**.

Пример 5

Корени $\sqrt[3]{a^2b}$, $2a \cdot \sqrt[3]{a^2b}$ и $\frac{a}{b^2} \sqrt[3]{a^2b}$ су слични корени. Њихови рационални коефицијенти су 1, $2a$ и $\frac{a}{b^2}$.

Пример 6

Провери да ли су слични корени:

а) $\sqrt{12}$ и $\sqrt{48}$; б) $\sqrt[3]{a^4bc^5}$ и $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}}$; в) $\sqrt[5]{a^5bc^7}$ и $\sqrt[5]{a^7b^5c^9}$.

Решење:

Најпре корене доводимо у нормалан облик, а затим проверавамо да ли су слични.

а) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, а $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Закључујемо да се корени $\sqrt{12}$ и $\sqrt{48}$ разликују само по рационалним коефицијентима, па су они слични корени;

б) $\sqrt[3]{a^4bc^5} = ac \cdot \sqrt[3]{abc^2}$, а $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}} = a^2b^2c^3 \cdot \sqrt[3]{abc^2}$. Значи, корени, $\sqrt[3]{a^4bc^5}$ и $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}}$ су слични корени.

в) $\sqrt[5]{a^5bc^7} = ac \cdot \sqrt[5]{bc^2}$, а $\sqrt[5]{a^7b^5c^9} = abc \cdot \sqrt[5]{a^2c^4}$. Одатле, $\sqrt[5]{a^5bc^7}$ и $\sqrt[5]{a^7b^5c^9}$ нису слични корени.

Задатак 3

Провери да ли су слични корени:

а) $\sqrt[3]{54}$ и $\sqrt[3]{128}$; б) $\sqrt[4]{a^6b^3c^7}$ и $\sqrt[4]{a^{10}b^3c^3}$.

Сабирање и одузимање може се дефинисати само код сличних корена.

Запамти!

Ако су a , b и c реални бројеви (или реални изрази), онда се сабирање и одузимање сличних корена дефинише на следећи начин:

$$a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c} = (a+b)\sqrt[n]{c}$$

$$a\sqrt[n]{c} - b\sqrt[n]{c} = (a-b)\sqrt[n]{c}$$

При томе треба да важи $c \geq 0$, ако је n паран број.

Пример 7

Израчунај:

а) $\sqrt{3} + 2\sqrt{12}$; б) $\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$.

Решење:

Најпре корене сводимо на нормалан облик, а затим, ако су слични, можемо да извршимо операције сабирања и одузимања.

а) $\sqrt{3} + 2\sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = (1+4)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$;

б) $\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{2^3 \cdot 5} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} = (1+4-3)\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$.

Задатак 4

Израчунај:

а) $\sqrt{72} - 2\sqrt{18} - \sqrt{8}$; б) $\sqrt[3]{250} - 3\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{2}$.

Пример 8Упрости израз $\sqrt[3]{125a} - \sqrt[3]{8a} - (\sqrt[3]{27a} - \sqrt[3]{64a})$.**Решење:**

$$\sqrt[3]{125a} - \sqrt[3]{8a} - (\sqrt[3]{27a} - \sqrt[3]{64a}) = 5\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a} - (3\sqrt[3]{a} - 4\sqrt[3]{a}) = 3\sqrt[3]{a} - (-\sqrt[3]{a}) = 4\sqrt[3]{a}.$$

Задатак 5

Упрости израз:

а) $\frac{3}{a}\sqrt{a^3} - \frac{4}{b}\sqrt{ab^2}$, $a, b > 0$; б) $2x\sqrt{x^4y} - 3y\sqrt{xy^4} - x^2\sqrt{\frac{y^4}{x^2}} + 2y^3\sqrt{\frac{x}{y^2}}$.

Пример 9Једно дечје игралиште има облик правоугаоника са страницама $(6\sqrt{3} + 8\sqrt{2})$ m и $7\sqrt{2}$ m.

а) За колико метара је једна страница већа од друге?

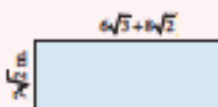
б) Колико метара ограде ће бити потребно за оградавање игралишта?

Решење:Странице правоугаоника су $a = 6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$ и $b = 7\sqrt{2}$.а) Страница a је већа од странице b за

$$a - b = (6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}) - 7\sqrt{2} = 6\sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ метри.}$$

б) Периметар правоугаоника је

$$L = 2a + 2b = 2 \cdot (6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}) + 2 \cdot 7\sqrt{2} = 12\sqrt{3} + 16\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 12\sqrt{3} + 30\sqrt{2}.$$

Значи, за оградавање ће бити потребна ограда дужине $12\sqrt{3} + 30\sqrt{2}$ метара

Задатак 6

Једна башта има облик једнакокраког трапеца са основицама чије су дужине $(10\sqrt{7} + 7\sqrt{3})\text{ m}$ и $5\sqrt{7}\text{ m}$ као и краком дужине $10\sqrt{3}\text{ m}$. Колики је периметар трапеца?

Задаци за вежбање!

1. Сведи у нормалан облик следеће корене:

а) $\sqrt{72}$; б) $\sqrt[3]{250}$; в) $\sqrt[3]{162}$; г) $\sqrt{75x^2y}$; д) $\sqrt[4]{125a^3b^6}$.

2. Сведи у нормалан облик следеће корене:

а) $\sqrt{50x^2y^3}$, $x, y > 0$; б) $\sqrt[3]{54a^4b^2}$; в) $\sqrt[3]{32x^2y^6}$, $x, y > 0$;

г) $\sqrt{108a^3}$, $a > 0$; д) $\sqrt[4]{125a^3b^6}$.

3. Провери да ли су слични корени:

а) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{27}$; б) $\sqrt{20}, \sqrt{45}$ и $\sqrt{80}$; в) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}, \sqrt[3]{\frac{8x}{y}}$ и $\sqrt[3]{\frac{x}{8y}}$, $y \neq 0$;

г) $\sqrt[3]{a^2b^2}, \sqrt[3]{16a^4b^2}$ и $\sqrt[3]{\frac{a^2b^{30}}{81}}$, $a, b > 0$.

4. Израчунај:

а) $7\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$; б) $20\sqrt{\frac{1}{2}} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{8}$; в) $\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{64} + 3\sqrt[4]{8}$;

г) $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \frac{1}{2}\sqrt{72}$; д) $(\sqrt{50} + \sqrt{2} - 2\sqrt{8}) - (\sqrt{32} - \sqrt{18})$.

5. Израчунај:

а) $3\sqrt{16a} - 2\sqrt{9a} + \sqrt{25a}$, $a \geq 0$;

б) $3a \cdot \sqrt[3]{ab^4} - a^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}} + 2b^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2}}$, $a, b \neq 0$.

6. Израчунај:

а) $\sqrt[3]{16a} + \sqrt[3]{81a} - \sqrt[3]{625a} + \sqrt[3]{a}$, $a > 0$; б) $(\sqrt{12x} - \sqrt[3]{27y}) - (\sqrt[3]{81y} - \sqrt{3x})$, $x > 0$.

7. Инжењери треба да трасирају оптички кабл који се састоји од три сегмента са дужинама (у метрима): $3\sqrt{12}, 2\sqrt{27}, \sqrt{48}$. Одреди укупну дужину кабла.

8. Један ултразвучни сензор мери растојање x (у cm). При калибрацији је утврђено да је збир две измерене компоненте растојања једнак укупном растојању, и то $\sqrt{2x} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$.

а) Одреди растојање x .

б) Провери да ли добијено решење има физички смисао.

9. Робот се креће по правој линији тако што прелази растојање $s_1 = \sqrt{200}\text{ m}$ удесно, а затим се помера улево два пута прелазећи растојања $s_2 = \sqrt{50}\text{ m}$ и $s_3 = 3\sqrt{8}\text{ m}$. Одреди где ће робот стићи у односу на почетну позицију.

1.7 МНОЖЕЊЕ, ДЕЉЕЊЕ, СТЕПЕНОВАЊЕ И КОРЕНОВАЊЕ КОРЕНА

Подсети се!

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$;
- $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$;
- Сведи корене $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{4}$ на исти коренски изложивоц.

Да израчунамо производ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ и количник $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Запамти!

Производ два корена са истим коренским изложивоцем n ($n \geq 2$) једнак је n -том корену из производа поткорених израза, а њихов количник једнак је n -том корену из количника поткорених израза, односно важе следеће једнакости:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0.$$

При томе, ако је коренски показатељ n паран број, прва једнакост важи за $a, b \geq 0$, а друга за $a \geq 0$ и $b > 0$.

Пример 1

Израчунај:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$; в) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$, $x \neq 0$; г) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Решење:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10};$

б) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^3};$

в) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x}} = \sqrt[3]{x};$

г) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
 $= \sqrt{3 \cdot 3} - \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} - \sqrt{2^2} = 3 - 2 = 1.$

Задатак 1

Израчунај:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{11};$ б) $3 \cdot \sqrt{xy} \cdot \sqrt{x^3 y^3}, \quad x, y \geq 0;$ в) $\sqrt[3]{9a^2} : \sqrt[3]{\frac{a^2}{3}}.$

Ако корени имају различите коренске показатеље, тада се они могу множити и делити након што се сведу на исти коренски показатељ.

Пример 2

Израчунај:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{11};$ б) $3 \cdot \sqrt{x^2 y} \cdot \sqrt[3]{x^3 y^4};$ в) $\sqrt{4x^3} : \sqrt[4]{\frac{x^3}{2}}.$

Решење:

Најпре ћемо свести корене на исти коренов показатељ, а затим ћемо извршити операције множења или дељења.

а) НЗС(2, 3) = 6, па ћемо оба корена свести на коренов показатељ једнак 6. Добијамо:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{121} = \sqrt[6]{8 \cdot 121} = \sqrt[6]{968}.$$

б) НЗС(3, 5) = 15, па

$$3 \cdot \sqrt{x^2 y} \cdot \sqrt[3]{x^3 y^4} = 3 \cdot \sqrt[15]{(x^2 y)^5} \cdot \sqrt[15]{(x^3 y^4)^3} = 3 \cdot \sqrt[15]{x^{10} y^5} \cdot \sqrt[15]{x^9 y^{12}} = 3 \cdot \sqrt[15]{x^{19} y^{17}} = 3xy \cdot \sqrt[15]{x^4 y^2}.$$

в) НЗС(2, 4) = 4. Добијамо:

$$\sqrt{4x^3} : \sqrt[4]{\frac{x^3}{2}} = \sqrt[4]{(4x^3)^2} : \sqrt[4]{\frac{x^3}{2}} = \sqrt[4]{\frac{16x^6}{\frac{x^3}{2}}} = \sqrt[4]{32x^3} = 2\sqrt[4]{2x^3}.$$

Да напоменемо да се при решавању задатака са коренима, ако у крајњем резултату остане корен, онда препоручује да се он доведе у нормалан вид.

Задатак 2

Израчунај:

$$\text{а) } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}; \quad \text{б) } \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{a^2b}; \quad \text{в) } \frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[3]{x^2y}}.$$

Пример 3

Архитекта пројектује парк у облику правоугаоника са страницама $\sqrt{50}\text{ m}$ и $\frac{\sqrt{32}}{2}\text{ m}$. Одреди површину тог парка.

Решење:

Странице правоугаоника су $a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ и $b = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Површина парка је

$$P = ab = \sqrt{50} \cdot \frac{\sqrt{32}}{2} = 5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2 \cdot 2} = 10 \cdot 2 = 20\text{ m}^2.$$

Задатак 3

Једнакокраки трапез има основе дужина $\sqrt[3]{24}$ и $\sqrt[3]{192}$ и крак дужине $\sqrt{6}$. Израчунати површину трапеза.

У наставку ћемо степеновати $\sqrt[n]{a}$ степеном m , где је $m, n \geq 2$. Добијамо:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Запамти!

Корен се степенује степеним показатељем m тако што се подкорени израз степенује на m , а добијени степен се коренује са истим кореновим показатељем n , тј. за $m, n \geq 2$, важи следећа једнакост:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

При томе, ако је n паран број, мора бити испуњен услов $a \geq 0$.

Пример 4

Израчунај:

$$\text{а) } (\sqrt[3]{5})^2; \quad \text{б) } (\sqrt[3]{5a^2b})^3, b \geq 0; \quad \text{в) } \left(\frac{x}{y} \cdot \sqrt{xy}\right)^3, x \geq 0, y > 0.$$

Решење:

$$\text{а) } (\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25};$$

$$\text{б) } (\sqrt[3]{5a^2b})^3 = \sqrt[3]{(5a^2b)^3} = \sqrt[3]{125a^6b^3} = a \cdot \sqrt[3]{125a^2b^3};$$

$$\text{в) } \left(\frac{x}{y} \cdot \sqrt{xy}\right)^3 = \left(\frac{x}{y}\right)^3 \sqrt{(xy)^3} = \frac{x^3}{y^3} \sqrt{x^3y^3} = \frac{x^3}{y^3} \cdot xy \cdot \sqrt{xy} = \frac{x^4}{y^2} \cdot \sqrt{xy}.$$

Задатак 4

Израчунај:

$$\text{а) } (\sqrt[3]{7})^3; \quad \text{б) } (\sqrt[3]{4ab^2})^3; \quad \text{в) } (a \cdot \sqrt{ab^2})^3, \quad a, b \geq 0.$$

Пример 5

Једна фирма жели да постави изложбени штанд на сајму у облику коцке чија је ивица $\sqrt{8} \text{ m}$. Закупац је платио закуп за 24 m^3 . Да ли штанд одговара плаћеном закупу?

Решење:

Штанд има облик коцке са ивицом $a = \sqrt{8}$. Запремина штанда је

$$V = (\sqrt{8})^3 = \sqrt{8^3} = \sqrt{(2^3)^3} = \sqrt{2^9} = 2^4 \cdot \sqrt{2} \approx 22,63 \text{ m}^3.$$

Штанд који фирма планира да постави у складу је са плаћеним закупом.

Задатак 5

Маркетиншка компанија поставља квадратни билборд чија је страница $\sqrt{50}$. Колика је површина коју ће заузимати овај билборд?

На крају, видећемо како се из $\sqrt[n]{a}$ може се израчунати m -ти корен, где је $m, n \geq 2$. Добијамо:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

Запомни!

Ако се из израза под кореном прво извади n -ти корен, а затим се из добијеног резултата извади m -ти корен, о је исто као да се из израза под кореном извади nm -ти корен, тј. ако је $m, n \geq 2$, онда важи

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

При томе, ако су n или m парни бројеви, треба да буде $a \geq 0$.

Пример 6

Израчунај:

$$\text{а) } \sqrt{\sqrt[3]{4}}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\sqrt{3x^2y}}, \quad x, y \geq 0; \quad \text{в) } \sqrt[3]{a\sqrt{2ab}}, \quad a, b \geq 0.$$

Решење:

$$\text{а) } \sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{4};$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{\sqrt{3x^2y}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{3x^2y}} = \sqrt[6]{3x^2y};$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{a\sqrt{2ab}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2 2ab}} = \sqrt[3]{\sqrt{2a^3b}} = \sqrt[6]{2a^3b}.$$

Задатак 6

Изračунај:

$$\text{а) } \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt[4]{a}}, \quad a \geq 0; \quad \text{в) } \sqrt[4]{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}, \quad a \geq 0.$$

Пример 7

Квадратна плоча има површину $P = \sqrt{128} \text{ cm}^2$. Одредити дијагоналу плоче.

Решење:

Ако је a дужина странице плоче, тада је $P = a^2 = \sqrt{128} = \sqrt{2^7}$. Одатле,

$$a = \sqrt{\sqrt{2^7}} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{8} \text{ cm}.$$

Дужина d дијагонале квадрата је

$$d = a\sqrt{2} = 2\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{4} = 2\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2^5} = 4\sqrt[4]{2} \text{ cm}.$$

Задатак 7

На једном зиду има простор димензија $90 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$ и на том простору треба поставити телевизор који има облик квадрата. Дали ће то бити могуће урадити ако је површина телевизора $P = 1600\sqrt{3} \text{ cm}^2$?

Задачи за вежбање!

1. Израчунај производе корена:

$$\text{а) } 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3}; \quad \text{б) } \sqrt{12} \cdot \sqrt{2}; \quad \text{в) } \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}; \quad \text{г) } \sqrt{a} \cdot \sqrt{5a}, \quad a \geq 0; \quad \text{д) } 2\sqrt[3]{3a^2} \cdot 4\sqrt[3]{5a}.$$

2. Израчунај производе корена:

$$\text{а) } \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}, \quad a \geq 0; \quad \text{б) } 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{2x^2} \cdot \sqrt[4]{x}, \quad x \geq 0.$$

3. Израчунај количнике корена:

$$\text{а) } \sqrt{27} : \sqrt{3}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}; \quad \text{в) } 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{9}} : \sqrt{\frac{5}{36}};$$

$$\text{г) } \sqrt{6a} : \sqrt{a}, \quad a > 0 \quad \text{д) } \sqrt[3]{12a^2} : \sqrt[3]{3a}; \quad \text{ђ) } \sqrt[4]{16a^3} : \sqrt[4]{a}, \quad a > 0.$$

4. Израчунај количнике корена:

$$\text{а) } \sqrt[3]{8} : \sqrt{2}; \quad \text{б) } \sqrt{a} : \sqrt[3]{a^2}, \quad a > 0; \quad \text{в) } \sqrt[3]{8a^2} : \sqrt[4]{2a^3}, \quad a > 0; \quad \text{г) } 4a\sqrt{a^2} : \sqrt[3]{a^2}, \quad a > 0.$$

5. Израчунај:

$$\text{а) } (3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 2\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}; \quad \text{б) } (4\sqrt{50} - 6\sqrt{8} + 2\sqrt{32}) : \sqrt{2}.$$

6. Израчунај степен дате вредности корена:

$$\text{а) } \left(\frac{3}{2}\sqrt[4]{8}\right)^3; \quad \text{б) } (\sqrt[3]{5x^2})^2; \quad \text{в) } (\sqrt[4]{a^2b})^6; \quad \text{г) } (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2.$$

7. Израчунај:

$$\text{а) } \sqrt{\sqrt{16a}}, \quad a \geq 0; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}, \quad a \geq 0; \quad \text{в) } \sqrt{a\sqrt[4]{a}}, \quad a \geq 0;$$

$$\text{г) } \sqrt{x^2\sqrt{xy}} : \sqrt{y\sqrt{xy}}, \quad x, y > 0; \quad \text{д) } \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{a^2}, \quad a \geq 0.$$

1.8 ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. РАЦИОНАЛИЗАЦИЈА ИМЕНИОЦА РАЗЛОМКА

Рационални алгебарски израз је израз састављен од бројева и/или променљивих повезаних операцијама сабирања, одузимања, множења, дељења и степеновања степеном чији је изложиоц цео број. Ове операције називају се **рационалне операције**.

Изрази у којима је, поред рационалних операција, заступљена и операција кореновања, односно степеновања рационалним изложиоцем који није цео број, називају се **ирационални изрази**.

Пример 1

Који од израза су рационални, а који ирационални алгебарски изрази?

а) $\frac{1}{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) $x^2 - 3xy$; г) $3 + \sqrt{x}$; д) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; е) $2a^{\frac{1}{3}}b^{-2}$.

Решење:

Рационални изрази су под а) и в). Остали су ирационални изрази.

Ирационалне изразе који садрже променљиве разматраћемо само за оне вредности променљивих за које је израз дефинисан, односно има смисла.

Пример 2

За које вредности променљиве је ирационални израз дефинисан:

а) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x-4}$; б) $\sqrt{x^2+4} - (x-3)^{\frac{1}{3}}$; в) $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-5}}$.

Решење:

а) Корен $\sqrt{x^2}$ е дефинисан за сваки реалан број x , односно $x \in (-\infty, +\infty)$, док је корен $\sqrt{x-4}$ дефинисан за сваки x , за који је $x-4 \geq 0$, $x \geq 4$, т.е. $x \in [4, +\infty)$. Према томе,

$$x \in (-\infty, +\infty) \cap [4, +\infty) = [4, +\infty).$$

б) Оба корена $\sqrt{x^2+4}$ и $(x-3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x-3}$ су дефинисана за сваки реалан број x , односно $x \in (-\infty, +\infty)$, па је и цео израз дефинисан за $x \in (-\infty, +\infty)$.

в) Корен $\sqrt{x+3}$ је дефинисан за $x+3 \geq 0$, $x \geq -3$, односно $x \in [-3, +\infty)$. Други корен $\sqrt{x-5}$ налази се у имениоцу, па он не сме бити једнак нули, тј. $\sqrt{x-5} \neq 0$. С друге стране, да би корен био дефинисан, потребно је $x-5 \geq 0$. Одатле добијамо да $x-5 > 0$, $x > 5$, односно.
 $x \in (5, +\infty)$. Сада је цео израз $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-5}}$ дефинисан ако је $x \in [-3, +\infty) \cap (5, +\infty) = (5, +\infty)$.

Задатак 1

За које вредности променљиве је ирационални израз дефинисан:

а) $\sqrt[4]{x^3} - 2x$; б) $\sqrt{x-7} - (x+3)^{\frac{1}{5}}$; в) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+4}} + x^2$.

После извршавања неких операција са коренима (као што су множење, дељење, степеновање, издвајање чиниоца испред знака корена или уношење чиниоца под знак корена), неки ирационални изрази могу се трансформисати у еквивалентан облик у коме се знак корена више не појављује, односно у рационалне изразе.

Пример 3

Који се од датих ирационалних израза свode на рационалне изразе:

- а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt[3]{81}$; в) $\sqrt[3]{x^3 y^9}$;
 г) $\sqrt{x^2 y}$, $x, y \geq 0$; д) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Решење:

- а) $\sqrt{4} = 2$ је рационалан израз.
 б) $\sqrt[3]{81} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$ се не свodi на рационалан израз, јер у изразу остаје корен.
 в) $\sqrt[3]{x^3 y^9} = xy^3$, према томе, израз се свodi на рационалан израз.
 г) $\sqrt{x^2 y} = x \cdot \sqrt{y}$. У изразу остаје квадратни корен, па се израз не може свести на рационалан израз.
 д) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x} \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot x} \cdot \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{x^{12}} = x^2$. Јасно је да се у овом случају израз свodi на рационалан израз.

Задатак 2

Који од датих ирационалних израза се свode на рационалне:

- а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt[3]{27}$; в) $\sqrt[3]{x^2 y^9 z^3}$; г) $\sqrt{x^2 y^2}$, $x, y \geq 0$.

Активност

Израчунај:

- а) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$, $a > 0$; б) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a}$; в) $\sqrt[4]{a^m} \cdot \sqrt[4]{a^{n-m}}$, $a > 0$, $m < n$.

Запамти!

Рационализација имениоца разломка е поступак којим се именилац разломка трансформише из ирационалног у рационалан израз, при чему се вредност разломка не мења.

Пример 4

Рационализуј именилац разломка $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Решење:

Именилац разломка садржи корен $\sqrt{5}$. Да бисмо уклонили корен из имениоца, разломак помножимо са $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$. Добијамо:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Тиме добијамо разломак који у имениоцу не садржи корен, односно именилац није ирационалан израз. Уочи да смо разломак помножили са $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$, па се његова вредност није променила.

Пример 5

Рационализуј именилац разломка:

а) $\frac{2}{\sqrt[3]{5^2}}$; б) $\frac{7}{\sqrt[3]{4^3}}$.

Решење:

а) Именилац разломка садржи $\sqrt[3]{5^2}$. Пошто је $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^3} = 5$, да бисмо уклонили корен из имениоца, разломак помножимо са $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$. Имамо,

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}.$$

б) У овом случају разломак проширујемо са $\frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}}$ и добијамо:

$$\frac{7}{\sqrt[3]{4^3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^5}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{4}.$$

Задатак 3

Рационализуј именилац разломка:

а) $\frac{6}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{9}{\sqrt[3]{3^3}}$; в) $\frac{-3}{\sqrt[3]{6^2}}$.

Да пратимо поступак рационализације разломка облика $\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}$, где је $m < n$, а A и $B \neq 0$ су дати бројеви или изрази (при чему је $B > 0$, ако је n паран број). Да би се уклонио корен из имениоца, исти разломак ћемо проширити са $\frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}}$. На тај начин добијамо:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{m+n-m}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^n}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{B}.$$

Ако је $m \geq n$, тада се најпре разломак доводи у нормалан облик, а затим се рационализује новодобијени разломак.

Пример 6

Рационализуј именилац разломка:

а) $\frac{10}{3\sqrt{7}}$; б) $\frac{x+2y}{\sqrt[3]{(x-2y)^2}}$, $x-2y > 0$; в) $\frac{-x+y}{x \cdot \sqrt[3]{y^2}}$, $y \neq 0$.

Решење:

а) $\frac{10}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{3\sqrt{7^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{21};$

б) $\frac{x+2y}{\sqrt[3]{(x-2y)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-2y)^5}}{\sqrt[3]{(x-2y)^5}} = \frac{(x+2y) \cdot \sqrt[3]{(x-2y)^5}}{\sqrt[3]{(x-2y)^7}} = \frac{(x+2y) \cdot \sqrt[3]{(x-2y)^2}}{x-2y};$

в) $\frac{-x+y}{x \cdot \sqrt[3]{y^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{y^5}}{\sqrt[3]{y^5}} = \frac{(-x+y) \cdot \sqrt[3]{y^5}}{x \cdot \sqrt[3]{y^7}} = \frac{(-x+y) \cdot \sqrt[3]{y^5}}{xy}.$

Задатак 4

Рационализуј именилац разломка:

а) $\frac{8}{4\sqrt{a^2+1}}$; б) $\frac{5}{\sqrt[3]{3a}}$, $a > 0$; в) $\frac{3y}{4 \cdot \sqrt[3]{5y^2}}$, $y \neq 0$.

АКТИВНОСТ

Изграчунај:

а) $(a+b)(a-b)$; б) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$; в) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

Нека је дат разломак $\frac{A}{a+\sqrt{b}}$, где су A , a и b ($b \geq 0$) дати бројеви или изрази, тако да је $a+\sqrt{b} \neq 0$.

Рационализација имениоца овог разломка врши се тако што се разломак проширује $\frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$. Добија се следеће:

$$\frac{A}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{A \cdot (a-\sqrt{b})}{a^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{A \cdot (a-\sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

Ако именилац садржи $a-\sqrt{b}$, онда се проширује са $\frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$.

Пример 6

Рационализуј именилац разломка:

а) $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$; б) $\frac{a}{a+\sqrt{3}}$, $a \neq -\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$.

Решење:

а) $\frac{4}{2+\sqrt{3}} = \frac{4}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot (2-\sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 \cdot (2-\sqrt{3})}{1} = 4 \cdot (2-\sqrt{3});$

б) $\frac{a}{a+\sqrt{3}} = \frac{a}{a+\sqrt{3}} \cdot \frac{a-\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}} = \frac{a(a-\sqrt{3})}{a^2-3};$

в) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)}{4}.$

Задатак 5

Рационализуј именилац разломка:

а) $\frac{5}{\sqrt{3}-1}$; б) $\frac{b+\sqrt{b}}{b-\sqrt{2}}$, $b \neq \sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{11}-3}$.

На крају, погледајмо како се рационализује именилац разломка који садржи облик $\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, где су

A , a и b ($a, b > 0$) дати бројеви или изрази, тако да $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq 0$, тј. $a \neq b$. Рационализација имениоца овог разломка врши се тако што се разломак проширује са $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Добија се следеће:

$$\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{A \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{A \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

Ако именилац садржи $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, тада се проширује са $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Пример 7

Рационализуј именилац разломка:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}; \quad \text{в) } \frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}.$$

Решење:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{7-5} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2} = 13+2\sqrt{6};$$

$$\text{в) } \frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \frac{54-23\sqrt{6}}{-6} = -9 + \frac{23}{6}\sqrt{6}.$$

Задаци за вежбање!1. За које вредности променљиве x је израз дефинисан:

$$\text{а) } \sqrt{x+11}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{x-4} - \sqrt{x^2+12}; \quad \text{в) } \frac{\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x+4}}{x}; \quad \text{г) } \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}};$$

2. Који од следећих израза се свODE на рационалне:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt{a}-a, \quad a \geq 0; & \quad \text{б) } \sqrt{a^2}-a, \quad a \geq 0; \\ \text{в) } \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^2}-3a; & \quad \text{г) } \sqrt[3]{64a^3}-\sqrt{9a^2}, \quad a \geq 0. \end{aligned}$$

3. Упростити изразе, а затим одредити који од њих су ирационални изрази:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^6}, \quad x \geq 0; & \quad \text{б) } \sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{ab^5}; \\ \text{в) } \frac{3}{5}\sqrt{50} : \frac{5}{5}\sqrt{2}; & \quad \text{г) } \sqrt{a^4b} : \sqrt{ab}, \quad a, b > 0. \end{aligned}$$

У задацима 4–7 рационализовати именилац разломка:

$$\begin{aligned} 4. \quad \text{а) } \frac{2}{\sqrt{5}}; & \quad \text{б) } \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}; & \quad \text{в) } \frac{4}{\sqrt[3]{2}}; & \quad \text{г) } \frac{-7}{\sqrt[3]{4^3}}. \\ 5. \quad \text{а) } \frac{2x}{\sqrt{x}}, \quad x > 0; & \quad \text{б) } \frac{\sqrt{2}a^3}{\sqrt{a}}, \quad a > 0; & \quad \text{в) } \frac{5}{\sqrt[3]{3a}}, \quad a \neq 0; & \quad \text{г) } \frac{a-6}{\sqrt[4]{a^2}}, \quad a > 0. \\ 6. \quad \text{а) } \frac{2(x-1)}{\sqrt{x-1}}, \quad x > 1; & \quad \text{б) } \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}, \quad a+b > 0; & \quad \text{в) } \frac{a+b}{\sqrt[3]{a+b}}, \quad a+b \neq 0. \\ 7. \quad \text{а) } \frac{5-\sqrt{7}}{7+\sqrt{5}}; & \quad \text{б) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}-4}; & \quad \text{в) } \frac{\sqrt{5}-4}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}; & \quad \text{г) } \frac{a-3}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}, \quad a \neq 3. \end{aligned}$$

1.9 ПРОШИРИВАЊЕ СКУПОВА БРОЈЕВА

Скуп природних бројева

Скуп природних бројева означава се са

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Овај скуп је затворен у односу на операције сабирања и множења, тј. збир и производ два природна броја поново је природан број.

Међутим, операција одузимања није затворена у скупу природних бројева. На пример, $2 - 5 \notin \mathbb{N}$. Због тога неке једначине немају решење у $\mathbb{N}$, као на пример једначине $6 + x = 3$, $x + 3 = 2$, итн.

Скуп целих бројева

Да би могле да се решавају и овакве једначине, скуп природних бројева се проширује бројем 0 и негативним бројевима. Тако се добија *скуп целих бројева*, који се означава са

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

У скупу $\mathbb{Z}$, операције сабирања, одузимања и множења су затворене. Међутим, постоје једначине које ни у овом скупу немају решење. На пример, једначина $2x = 5$ нема решење у $\mathbb{Z}$, јер не постоји цео број који помножен са 2 даје резултат 5. Разлог за то је што операција дељења није затворена у скупу целих бројева, тј. количник два цела броја није увек цео број.

Скуп рационалних бројева

Да би се решио претходни проблем, уводи се *скуп рационалних бројева*, који се означава са

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

У скупу $\mathbb{Q}$, једначина $2x = 5$ има решење $x = \frac{5}{2}$.

Ирационални бројеви

И поред тога, постоје једначине које немају решење ни у скупу рационалних бројева. На пример, једначина $x^2 = 5$ нема решење у $\mathbb{Q}$. За решавање оваквих једначина уводе се *ирационални бројеви*. Они се не могу записати као количник два цела броја и представљају непериодичне децималне бројеве са бесконачно много децимала. Примери ирационалних бројева су:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots, \sqrt{3} = 1,7320508\dots, \pi = 3,14159265\dots,$$

Скуп ирационалних бројева најчешће се означава са $\mathbb{J}$.

Скуп реалних бројева

Унија скупа рационалних и скупа ирационалних бројева даје **скуп реалних бројева**, који се означава са $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

У скупу реалних бројева могу се решити све једначине облика $x^2 = a$, где је $a > 0$.

Уочимо да важи $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. У свим овим скуповима операције сабирања и множења су комутативне и асоцијативне, а множење је дистрибутивно у односу на сабирање.

Увод у комплексне бројеве

Ипак, нека свака једначина нема решење у сваком скупу бројева. Зато се често поставља питање у ком скупу постоји решење дате једначине?

Пример 1

Испитајмо у којим скуповима има решење једначина:

а) $x + 3 = 5$; б) $x + 3 = 1$; в) $2x - 3 = 0$; г) $x^2 = 5$; д) $x^2 + 1 = 0$.

Решење:

- а) Решење једначине $x + 3 = 5$ е $x = 2$. Број $2 \in \mathbb{N}$. Дакле, једначина има решење у $\mathbb{N}$, а пошто $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, она има решење и у $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$.
- б) Решење једначине $x + 3 = 1$ е $x = -2$. Број $-2 \in \mathbb{Z}$, што значи да једначина има решење у $\mathbb{Z}$, па и у $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, али нема решење у $\mathbb{N}$.
- в) Решење једначине $2x - 3 = 0$ е $x = \frac{3}{2}$. Број $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$, што значи да једначина има решење у $\mathbb{Q}$, а самим тим и у $\mathbb{R}$.
- г) Једначина $x^2 = 5$ има две решења $x_1 = \sqrt{5}$ и $x_2 = -\sqrt{5}$. Ови решенија припадају скупу $\mathbb{R}$, али не припадају скупу $\mathbb{Q}$, тј. она су ирационални бројеви.
- д) Једначина $x^2 + 1 = 0$ може се записати у облику:

$$x^2 = -1.$$

Али, квадрат ниједног реалног броја не може бити негативан. Зато ова једначина нема решење у скупу реалних бројева.

Задатак 1

Испитајмо у којим скуповима има решење једначина:

а) $3x - 4 = 5$; б) $3 + x = 6$; в) $x + 2 = 0$; г) $x^2 - 4 = 5$; д) $x^2 + 4 = 0$.

Из примера 1 видимо да постоје једначине које немају решење ни у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$. Да би и оне могле да се решавају, јавља се потреба за проширењем скупа реалних бројева. Али, при томе се мора водити рачуна о следећем:

1. нови скуп треба да садржи све реалне бројеве;
2. у новом скупу треба да постоји број чији је квадрат једнак -1 ;

3. у новом скупу треба да буду дефинисане операције сабирања и множења и да за њих важе комутативно и асоцијативно својство, као и дистрибутивно својство множења у односу на сабирање.

Да би се испунио други захтев, по дефиницији се уводи нови број који се означава са i , такав да је његов квадрат -1 .

Запамти!

Број i се назива *имагинарна јединица*, а његов квадрат је -1 , т.е. $i^2 \stackrel{\text{def}}{=} -1$.

За степене имагинарне јединице добија се следеће:

$$\begin{aligned} i^1 &= i, \\ i^2 &= -1, \\ i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \\ i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1, \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i, \\ i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = -1, \\ i^7 &= i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \\ i^8 &= i^7 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1 \\ &\text{итн.} \end{aligned}$$

Може се уочити да за сваки природан број n , степен i^n узима вредности $i, -1, -i, 1$ и да се ове четири вредности периодично смењују.

За $n = 0$, по дефиницији, $i^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Запамти!

Ако је n ненегативан цео број, тада је $i^n \in \{i, -1, -i, 1\}$ и све четири вредности се периодично смењују. При томе, ако је $n = 4k + r$ ($0 \leq r \leq 3$), тј. ако је r остатак при дељењу броја n са 4, тада је $i^n = i^r$.

Пример 2

Израчунај степене имагинарне јединице:

а) i^{21} ; б) i^{48} ; в) i^{27} ; г) i^{54} .

Решење:

- а) $i^{21} = i^{4 \cdot 5 + 1} = i^1 = i$;
 б) $i^{48} = i^{4 \cdot 12 + 0} = i^0 = 1$;
 в) $i^{27} = i^{4 \cdot 6 + 3} = i^3 = -i$;
 г) $i^{54} = i^{4 \cdot 13 + 2} = i^2 = -1$.

Задатак 2

Израчунај следеће степене:

- а)
- i^{101}
- ; б)
- i^{97}
- ; в)
- i^{84}
- ; г)
- i^{26}
- .

Скуп комплексних бројева

Број $a + ib$, где су a и b дати реални бројеви, а i је имагинарна јединица, назива се **комплексни број**. Скуп свих бројева овог облика назива се **скуп комплексних бројева** и означава се са $\mathbb{C}$. Тако,

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ако

$$z = a + ib,$$

Тада се број a назива **реални део** броја z и означава се са $\operatorname{Re}(z)$, а број b се назива **имагинарни део** броја z и означава се са $\operatorname{Im}(z)$. При томе, по дефиницији важи

$$0 \cdot i = 0, \quad 1 \cdot i = i, \quad a + 0i = a, \quad 0 + bi = bi.$$

Пример 3

Запиши комплексне бројеве ако су дати њихови реални и имагинарни делови:

- а) $\operatorname{Re}(z) = 4, \operatorname{Im}(z) = -3$; б) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 4$;
 в) $\operatorname{Re}(z) = 3, \operatorname{Im}(z) = 0$; г) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 0$.

Решење:

- а) $z = 4 - 3i$; б) $z = 0 + 4i = 4i$; в) $z = 3 + 0i = 3$; г) $z = 0 + 0i = 0$.

Задатак 3

Запиши комплексне бројеве ако су дати њихови реални и имагинарни делови:

- а) $\operatorname{Re}(z) = -2, \operatorname{Im}(z) = -5$; б) $\operatorname{Re}(z) = 5, \operatorname{Im}(z) = 0$; в) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 5$.

За дати комплексни број $z = a + bi$, уочимо следеће:

- Ако је $\operatorname{Im}(z) = b = 0$, тада је $z = a + 0i = a \in \mathbb{R}$, па следи да је сваки реалан број и комплексан број, односно $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. чиме је испуњен први услов за проширење скупа реалних бројева.
- Ако је $\operatorname{Re}(z) = 0$, тада је $z = 0 + bi$, и ако је $b \neq 0$, број bi се назива **чисто имагинарни број**.

Задатак 4

Одреди реални и имагинарни део сваког од датих комплексних бројева:

- а) $1 + 3i$; б) $-4 - 3i$; в) $7i$; г) 0 ; д) 4 .

Запамти!

Комплексни број $-z = -a - bi$ назива се **супротан** комплексном броју $z = a + bi$.

Комплексни број $a - bi$ назива се **конјуговани комплексни број** броја $z = a + bi$ и означава се са $\bar{z}$, т.е. $\bar{z} = a - bi$.

Пример 4

Запиши супротан и конјуговани комплексни број датих бројева:

- а) $z = 3 - i$; б) $z = 2i$; в) $z = 3$; г) $z = 0 + 0i$.

Решење:

- а) Супротан број броја $z = 3 - i$ е $-z = -3 + i$, а конјугирано комплексен е $\bar{z} = 3 + i$.
 б) Супротан број броја $z = 2i = 0 + 2i$ је $-z = -0 - 2i = -2i$, а конјуговани комплексни број је $\bar{z} = 0 - 2i = -2i$. Може се закључити да су код чисто имагинарног броја супротан и конјуговани комплексни број једнаки.
 в) Супротан број броја $z = 3 = 3 + 0i$ је $-z = -3 - 0i = -3$, а конјуговани комплексни број је $\bar{z} = 3 - 0i = 3$.
 г) Супротан број броја $z = 0 = 0 + 0i$ е $-z = -0 - 0i = 0$, а конјуговани комплексни број је $\bar{z} = 0 - 0i = 0$.

Задатак 5

Допуни: Супротан број броја $z = 6i$ је _____, а његов конјуговани комплексни број је _____.

Пример 5

Ако је $z = a + bi$, покажи да важи: а) $\bar{\bar{z}} = z$; б) $\overline{(-z)} = -\bar{z}$.

Решење:

- а) $\bar{\bar{z}} = \overline{(a + bi)} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$;
 б) $\overline{(-z)} = \overline{(-a - bi)} = -a + bi = -(a - bi) = -\bar{z}$.

Знамо да у скупу реалних бројева квадратни корен негативног броја не постоји, односно није дефинисан, будући да квадрат реалног броја не може бити негативан. Међутим, увођењем имагинарне јединице i , за коју важи $i^2 = -1$, добијамо да је

$$\sqrt{-1} = i.$$

Ако је a негативан реалан број, односно ако је $a < 0$, тада можемо записати:

$$a = -|a|.$$

Сада се за квадратни корен броја $a < 0$, добија:

$$\sqrt{a} = \sqrt{-|a|} = \sqrt{(-1)|a|} = \sqrt{-1}\sqrt{|a|} = \sqrt{|a|} i.$$

На овај начин, квадратни корен сваког негативног броја изражава се помоћу имагинарне јединице. Ипак, треба нагласити да у овом случају радимо у скупу комплексних бројева.

Пример 6

- а) $\sqrt{-4} = \sqrt{4} i = 2i$;
 б) $\sqrt{-9} = \sqrt{9} i = 3i$;
 в) $\sqrt{-81} = \sqrt{81} i = 9i$.

Задатак 5

Упиши имагинарни број:

- а) $\sqrt{-225}$; б) $\sqrt{-196}$; в) $\sqrt{-121}$.

Два комплексна броја су једнака ако су им једнаки реални делови и једнаки имагинарни делови.

Запамти!

Комплексни бројеви $a + bi$ и $c + di$ еднаки су ако је $a = c$ и $b = d$.

Пример 7

За које реалне бројеве x и y важи једнакост:

- а) $x + 3i = 5 - yi$; б) $(x + y) + (x - y)i = 3 + 5i$.

Решење:

- а) Да би важила једнакост комплексних бројева, потребно је да буде $x = 5$ и $-y = 3$, тј. $y = -3$.
 б) У овом случају једнакост ће важити ако су x и y решење система линеарних једначина:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Решење овог система једначина је $x = 4$ и $y = -1$.

Задатак 6

За које реалне бројеве x и y важи једнакост $(2x - y) + (3x + 2y)i = x + 12i$.

Задаци за вежбање!

- Одреди у којим скуповима следеће једначине имају решење:
а) $x^2 - 6 = 0$; б) $x - 10 = 5$; в) $x + 10 = 5$; г) $3x - 4 = 0$.
- Одреди следеће степене имагинарне јединице:
а) i^{321} ; б) i^{199} ; в) i^{303} ; г) i^{551} .
- Запиши комплексне бројеве ако су дати њихов реални и имагинарни део.
а) $\operatorname{Re}(z) = -2, \operatorname{Im}(z) = 10$; б) $\operatorname{Re}(z) = 5, \operatorname{Im}(z) = 0$;
в) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = -4$; г) $\operatorname{Re}(z) = 11, \operatorname{Im}(z) = 12$.
- За дате комплексне бројеве одреди њихов реални и имагинарни део:
а) $-1 + 5i$; б) $6 + 2i$; в) 6 ; г) $-8i$.
- Запиши супротан и конјугован комплексни број датих бројева:
а) $z = -10 - 2i$; б) $z = -3i$; в) $z = 4$.
- Нека је $z = 4 - 5i$. Одреди корак по корак $\bar{z}$ и $(-z)$.
- Запиши чисто имагинарни број:
а) $\sqrt{-324}$; б) $\sqrt{-625}$; в) $\sqrt{-10000}$.
- За које реалне бројеве a и b важе следеће једнакости:
а) $5 + ai = b - 4i$;
б) $2a - 9i = 8 + 3bi$;
в) $(a - 2b) - (3a + 4b)i = 3a + 2 + 3bi$.

1.10 САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА

Подсети се!

- Број i назива се **имагинарна јединица** и важи $i^2 = -1$.
- Који је реални, а који имагинарни део броја $15 - 10i$?
- Који је конјугован комплексни број броја $z = 5 + 13i$?

У овој лекцији дефинисаћемо збир и разлику два комплексна броја.

Збир два комплексна броја је комплексни број чији је реални део једнак збиру реалних делова, а имагинарни део једнак збиру имагинарних делова тих бројева.

Разлика два комплексна броја је комплексни број чији се реални део добија тако што се од реалног дела првог броја одузме реални део другог броја, док се имагинарни део добија тако што се од имагинарног дела првог броја одузме имагинарни део другог броја.

Запамти!

Ако су $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, тада се збир и разлика ових бројева дефинишу на следећи начин:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Пример 1

Израчунај збир и разлику следећих бројева:

а) $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 - 2i$;

б) $z_1 = 4 - 2i$ и $z_2 = 2i$;

в) $z_1 = 3 - 6i$ и $z_2 = 5$.

Решење:

а) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + (3 + (-2))i = 5 + i,$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (3 - 2i) = (2 - 3) + (3 - (-2))i = -1 + 5i.$$

б) $z_1 + z_2 = (4 - 2i) + 2i = (4 + 0) + (-2 + 2)i = 4 + 0i = 4,$

$$z_1 - z_2 = (4 - 2i) - 2i = (4 - 0) + (-2 - 2)i = 4 - 4i.$$

в) $z_1 + z_2 = (3 - 6i) + 5 = (3 + 5) + (-6i) = 8 - 6i,$

$$z_1 - z_2 = (3 - 6i) - 5 = (3 - 5) + (-6i) = -2 - 6i.$$

Задатак 1

Израчунај збир и разлику следећих бројева:

а) $z_1 = 22 + 31i$ и $z_2 = 21 - 25i$;

б) $z_1 = 8 - 3i$ и $z_2 = 10i$;

в) $z_1 = 7 - 2i$ и $z_2 = 29$.

Пример 2

Нека је $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 2 + 5i$ и $z_3 = -1 - 7i$. Провери да ли су тачне једнакости:

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; б) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Решење:

а) $z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (-4 + 5)i = 5 + i$,

$z_2 + z_1 = (2 + 5i) + (3 - 4i) = (2 + 3) + (5 - 4)i = 5 + i$.

Можемо да закључимо да прва једнакост важи, тј. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

б) $(z_1 + z_2) + z_3 = ((3 - 4i) + (2 + 5i)) + (-1 - 7i) = (5 + i) + (-1 - 7i) = 4 - 6i$,

$z_1 + (z_2 + z_3) = (3 - 4i) + ((2 + 5i) + (-1 - 7i)) = (3 - 4i) + (1 - 2i) = 4 - 6i$.

Значи, и друга једнакост је тачна, тј. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Једнакости из примера 2 важе не само за конкретне бројеве z_1 , z_2 и z_3 , већ и за произвољне комплексне бројеве.

Запамти!

Операција сабирања је комутативна и асоцијативна у скупу комплексних бројева, тј. за било која комплексна броја z_1 , z_2 и z_3 важи:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ (комутативно својство) и} \\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ (асоцијативно својство).}$$

Пример 3

Нека је $z = 3 - 2i$. Израчунај:

а) $z + \bar{z}$; б) $z - \bar{z}$.

Решење:

а) $z + \bar{z} = (3 - 2i) + (3 + 2i) = 6 + 0i = 6 \in \mathbb{R}$,

б) $z - \bar{z} = (3 - 2i) - (3 + 2i) = 0 - 4i = -4i$.

Добили смо да је збир комплексног броја z и њему коњугованог комплексног броја реалан број, а њихова разлика је чист имагинаран број.

Ова својства важе за било који комплексни број. Наиме, ако је $z = a + bi$ дат комплексни број, тада је

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a + 0i = 2a$$

реалан број, а

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 0 + 2bi = 2bi$$

је чист имагинаран број.

Пример 4

Дати су бројеви $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Проверити тачност једнакости $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Решење:

Најпре израчунавамо $z_1 + z_2 = (2 + i) + (3 - 4i) = 5 - 3i$, па $\overline{z_1 + z_2} = 5 + 3i$. С друге стране, $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (2 - i) + (3 + 4i) = 5 + 3i$. Одатле следи да је једнакост тачна.

Ова једнакост важи и у општем случају, за произвољне бројеве $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$. Заиста, $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, па $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$. За десну страну једнакости добијамо: $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$, што потврђује тачност једнакости.

Запамти

За било која два комплексна броја z_1 и z_2 , важи једнакост $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Задачи за вежбање!

1. Израчунај збир и разлику комплексних бројева:

а) $z_1 = 5 - 6i$ и $z_2 = -4 + 9i$;

б) $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$ и $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$;

в) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5}i$ и $z_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{5}i$;

г) $z_1 = 3 - 9i$ и $z_2 = 5 - 11i$.

2. Нека је $z_1 = 7 - 6i$. Израчунати $\bar{z} - z$ и $z - \bar{z}$.

3. Нека је $z_1 = 3 - 2i$ и $z_2 = 5 + 3i$. Проверити тачност једнакости $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. Да ли једнакост важи у општем случају?

1.11 МНОЖЕЊЕ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА. СТЕПЕН КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА

У овом делу дефинисаћемо множење комплексних бројева.

Најпре ћемо размотрити случај множења два чиста имагинарна броја. Нека је $z_1 = ai$, а $z_2 = bi$. Тада,

$$z_1 \cdot z_2 = ai \cdot bi = abi^2 = -ab.$$

Дакле, производ два чиста имагинарна броја је реалан број.

Запамти!

Производ два чиста имагинарна броја је реалан број.

Пример 1

Израчунај производ чистих имагинарних бројева $z_1 = 3i$ и $z_2 = -4i$.

Решење:

$$z_1 \cdot z_2 = 3i \cdot (-4i) = -12i^2 = (-12)(-1) = 12.$$

Задатак 1

Израчунај производ чистих имагинарних бројева:

$$\text{а) } z_1 = 2i \text{ и } z_2 = 3i; \quad \text{б) } z_1 = -3i \text{ и } z_2 = -5i; \quad \text{в) } z_1 = -10i \text{ и } z_2 = 2i.$$

У општем случају, множење комплексних бројева своди се на множење бинома.

Нека је $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$. Тада се за производ бројева z_1 и z_2 добија:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Запамти!

Ако је $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, производ ова два броја дефинише се са

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Напоменимо да није потребно формулу знати напамет. Много је једноставније множење комплексних бројева извршити као множење бинома.

Пример 2

Израчунај производ комплексних бројева $z_1 = 3 - 2i$ и $z_2 = 2 + 4i$.

Решење:

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 2i)(2 + 4i) = 6 + 12i - 4i - 8i^2 = 6 + 12i - 4i + 8 = 14 + 8i.$$

Задатак 2

Израчунај производ комплексних бројева:

а) $z_1 = -4 - 3i$ и $z_2 = 5 - 3i$; б) $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 1 - i$; в) $z_1 = 4 + 3i$ и $z_2 = -7 - 2i$.

Пример 3

Нека је $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -8i$ и $z_3 = 3 - 4i$. Проверити да ли су тачне једнакости:

а) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$; б) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$; в) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Решење:

а) $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(-8i) = -16i - 24i^2 = 24 - 16i$.

$z_2 \cdot z_1 = (-8i)(2 + 3i) = -16i - 24i^2 = 24 - 16i$.

Из једнакости десних страна следи једнакост и левих страна, тј. за дате комплексне бројеве важи једнакост $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

б) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = ((2 + 3i)(-8i)) \cdot (3 - 4i) = (24 - 16i)(3 - 4i) = 72 - 96i - 48i + 64i^2 = 8 - 144i$.

$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (2 + 3i) \cdot ((-8i)(3 - 4i)) = (2 + 3i)(-32 - 24i) = -64 - 48i - 96i - 72i^2 = 8 - 144i$.

Значи, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

в) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = ((2 + 3i) + (-8i)) \cdot (3 - 4i) = (2 - 5i) \cdot (3 - 4i) = 6 - 8i - 15i + 20i^2 = -14 - 23i$.

$z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = (2 + 3i)(3 - 4i) + (-8i)(3 - 4i) = (18 + i) + (-32 - 24i) = -14 - 23i$.

Одатле следи да је и трећа једнакост тачна.

Може се показати да ове три једнакости важе и за било које комплексне бројеве.

Запамти!

Операција множења у скупу комплексних бројева је **комутативна и асоцијативна**, тј. ако су z_1 , z_2 и z_3 било који комплексни бројеви, тада важе:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \text{ (комутативно својство)}$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \text{ (асоцијативно својство)}.$$

Такође, у скупу комплексних бројева операција множења је **дистрибутивна** у односу на операцију сабирања, тј. за било које комплексне бројеве z_1 , z_2 и z_3 важи:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 \text{ (дистрибутивно својство)}.$$

Пример 4

Израчунај $z \cdot \bar{z}$, ако је $z = a + bi$.

Решење:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

Уочи да је $z \cdot \bar{z}$ производ реалан број.

Запамти

За произвољан комплексни број $z = a + bi$, производ $z \cdot \bar{z}$ је реалан број. Квадратни корен из тог броја означава се са $|z|$ и назива се **модул или апсолутна вредност** комплексног броја z . Дакле:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Пример 5

Израчунај модул комплексног броја:

- а) $1 + i$; б) $2 - i$; в) $4 - 3i$; г) $-3i$.

Решење:

$$\text{а) } |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\text{б) } |2 - i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5};$$

$$\text{в) } |4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\text{г) } |-3i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Задатак 3

Израчунај модул комплексног броја:

- а) $8 + 6i$; б) $3 - 4i$; в) $12i$.

Пример 6

Дати су комплексни бројеви $z_1 = -5 + 3i$ и $z_2 = 4 - 2i$. Проверити да ли за ове бројеве важи једнакост $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Решење:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(-5 + 3i)(4 - 2i)} = \overline{(-14 + 22i)} = -14 - 22i,$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (-5 - 3i)(4 + 2i) = -14 - 22i.$$

Значи, десне стране обеју једнакости су једнаке, па следи да су и леве стране једнаке, тј. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Тврдња важи и у општем случају, тј. за произвољне комплексне бројеве $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.

Наиме,

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

С друге стране, $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$.

Запамти!

Ако су z_1 и z_2 било који комплексни бројеви, тада $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

У наставку ћемо, користећи операцију множења комплексних бројева за коју важи асоцијативно својство, дефинисати степен комплексног броја.

Запамти!

За произвољан комплексни број z и произвољан природан број n , степен z^n дефинише се са:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ пута}}$$

Пример 7

Израчунај следеће степене:

а) $(2 - 3i)^3$; б) $(1 - i)^4$.

Решење:

а) $(2 - 3i)^2 = (2 - 3i)(2 - 3i) = -5 - 12i$

$(2 - 3i)^3 = (2 - 3i)^2(2 - 3i) = (-5 - 12i)(2 - 3i) = -46 - 9i.$

б) $(1 - i)^2 = (1 - i)(1 - i) = -2i.$

Ако искористимо да $(1 - i)^4 = ((1 - i)^2)^2$, добијамо

$$(1 - i)^4 = (-2i)^2 = (-2)^2 i^2 = 16.$$

Задатак 4

Израчунај следеће степене:

а) $(1 + i)^4$; б) $(2 - i)^3$; в) $(1 - 3i)^5$.

Задаци за вежбање!

1. Израчунај производ комплексних бројева z_1 и z_2 ако је

а) $z_1 = 5 - 6i$ и $z_2 = 4 - 9i$;

б) $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$ и $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$;

в) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ и $z_2 = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}i$;

г) $z_1 = 3 - 9i$ и $z_2 = 5 - 11i$.

2. Израчунај следеће степене:

а) $(2 + 5i)^3$; б) $(2 - 6i)^4$; в) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}i)^4$.

3. Израчунај модул комплексног броја z ако је

а) $z = 4 + 7i$; б) $z = 3 - 8i$; в) $z = -7i$.

4. Реши дате једначине и провери тачност добијених решења:

а) $x^2 - 16 = 0$; б) $x^2 + 16 = 0$.

1.12 ДЕЉЕЊЕ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА

Подсети се!

За произвољан комплексни број z , важи да је $z \cdot \bar{z}$ реалан број.

У овом делу ћемо дефинисати дељење два комплексна броја. Нека је $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ ($z_2 \neq 0$). Имајући у виду да је производ произвољног комплексног броја са његовим конјуговано комплексним бројем реалан број, израз $\frac{z_1}{z_2}$ množимо са $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$ и на тај начин се у имениоцу добија реалан број $z_2 \cdot \bar{z}_2$. Наиме,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

Запамти!

Ако је $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ ($z_2 \neq 0$), тада се количник ова два броја дефинише са:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Пример 1

Израчунај количник бројева z_1 и z_2 ако је

- а) $z_1 = 3 - i$ и $z_2 = 2 + 3i$;
- б) $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 - 4i$;
- в) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ и $z_2 = \sqrt{3} - 2i$.

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3-i}{2+3i} = \frac{3-i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{(3-i)(2-3i)}{2^2+3^2} = \frac{3-11i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{11}{13}i; \\ \text{б) } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2+3i}{3-4i} = \frac{2+3i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(2+3i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{-6+17i}{25} = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i; \\ \text{в) } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i} \cdot \frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+2i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+2i)}{(\sqrt{3})^2+2^2} = \\ &= \frac{(\sqrt{6}-2\sqrt{3})+(2\sqrt{2}+3)i}{7} = \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{7} + \frac{2\sqrt{2}+3}{7}i. \end{aligned}$$

Задатак 1

Израчунај количнике:

$$\text{а) } \frac{1-3i}{1+3i}; \quad \text{б) } \frac{2-5i}{6+8i}; \quad \text{в) } \frac{1-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}.$$

Пример 2

Израчунај реални и имагинарни део комплексног броја $z = \frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i}$.

Решење:

$$z = \frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i} = \frac{2-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} + \frac{2+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{2^2+1^2} + \frac{(2+i)^2}{2^2+1^2} = \frac{3-4i}{5} + \frac{3+4i}{5} = \frac{6}{5}.$$

Добили смо да $\operatorname{Re}(z) = \frac{6}{5}$, а $\operatorname{Im}(z) = 0$.

Задатак 2

Израчунај реални и имагинарни део комплексног броја $z = \frac{1-2i}{2+i} + \frac{2+3i}{2-i}$.

Пример 3

Нека је $z_1 = 1 - 2i$, а $z_2 = 3 + 4i$, проверити тачност једнакости $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Решење:

Најпре израчунавамо:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{3+4i} = \frac{1-2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{(1-2i)(3-4i)}{3^2+4^2} = \frac{-5-10i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Сада, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

С друге стране, $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

Овим је показана тачност једнакости за дате бројеве z_1 и z_2 .

Ова једнакост је тачна и у општем случају, за произвољне бројев z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$).

Запамти!

Ако су z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$) произвољни комплексни бројеви, тада $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Задаци за вежбање!

- Изračунај количник комплексних бројева z_1 и z_2 ако је
 - $z_1 = 5 - 6i$ и $z_2 = 4 - 9i$
 - $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$ и $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$
 - $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ и $z_2 = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}i$
 - $z_1 = 3 - 9i$ и $z_2 = 5 - 11i$
- Покажи да је једнакост $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ је тачна за произвољне комплексне бројеве z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$).
- Упростити изразе:
 - $\frac{(2+i)(3-i)}{1+i}$
 - $\frac{(1+2i)^2}{2-i} \cdot \frac{(3-i)^2 + 2i}{1+i}$

1.13 ЗАДАЦИ ИЗ ПРИМЕНЕ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА

Пре него што пређемо на решавање задатака из примене комплексних бројева, потребно је да објаснимо када нека величина може као вредност да прими комплексни број. За то је потребно да видимо како се комплексни бројеви могу представити геометријски.

Геометријско представљање комплексних бројева

Сваки комплексни број $z = a + bi$ потпуно је одређен својим реалним делом a и својим имагинарним делом b , при чему је $a, b \in \mathbb{R}$. Отуда, комплексни број $z = a + bi$ може се представити уређеним паром реалних бројева (a, b) , и обрнуто, сваки уређени пар (a, b) може се записати као комплексни број $z = a + bi$. Дакле, постоји обострано једнозначна кореспонденција између комплексних бројева и уређених парова реалних бројева. На пример

$$z = 3 - 2i = (3, -2);$$

$$z = 5i = (0, 5);$$

$$z = 3 = (3, 0).$$

Такође, $z = (2, 3) = 2 + 3i$, $z = (1, 0) = 1$, $z = (0, 2) = 2i$.

С друге стране, познато је да сваком уређеном пару (a, b) одговара тачно једна тачка $M(a, b)$ у координатној равни, и обрнуто, свакој тачки $N(x, y)$ у координатној равни одговара тачно један

уређени пар реалних бројева (x, y) , тј. постоји обострано једнозначна кореспонденција између уређених парова реалних бројева и тачака координатне равни. Отуда се може закључити да постоји обострано једнозначна кореспонденција између комплексних бројева и тачака координатне равни. То значи да сваком комплексном броју $z = a + bi$ одговара једна тачка $M(a, b)$ у координатној равни, и обрнуто, свакој тачки $N(x, y)$ у координатној равни одговара тачно један комплексни број $z = x + yi$.

Пример 1

Представи комплексне бројеве

$$z_1 = 2 + 3i, z_2 = 1 - i, z_3 = 3 \text{ и } z_4 = -3i$$

у координатној равни.

Решење:

Према претходном објашњењу,

$$z_1 = 2 + 3i = (2, 3),$$

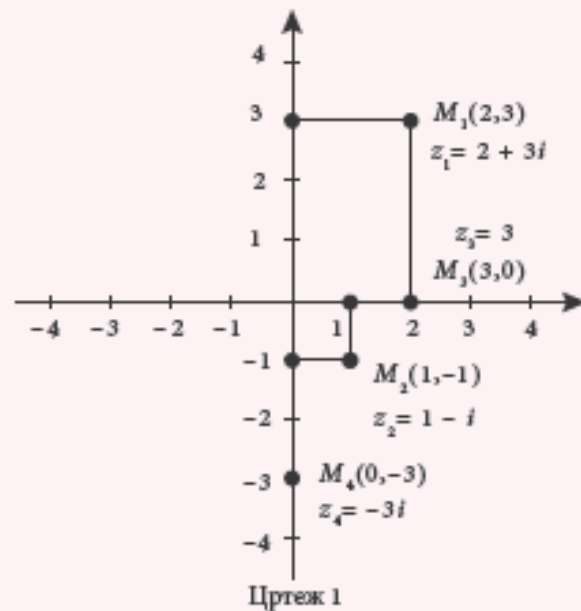
$$z_2 = 1 - i = (1, -1),$$

$$z_3 = 3 = (3, 0),$$

$$z_4 = -3i = (0, -3)$$

На слици 1 ове тачке су представљене у координатној равни.

Уочимо да реалном броју $z_3 = 3$ одговара тачка $M_3(3, 0)$, која лежи на x -оси, а имагинарном броју $z_4 = -3i$ одговара тачка $M_4(0, -3)$, која лежи на y -оси.



Цртеж 1

Задатак 1

Представити комплексне бројеве $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 2i$ и $z_4 = -4$ у координатној равни.

Раван чије тачке представљају комплексне бројеве назива се *комплексна* или *Гаусова раван*. Апсцисна оса те равни назива се *реална оса*, а ординатна оса назива се *имагинарна оса*.

У геометрији, вектор чији је почетак у координатном почетку, а крај у тачки $M(a, b)$ назива се *радијус-вектор* тачке M и означава се са $\overrightarrow{OM}$. Координате радијус-вектора поклапају се са координатама тачке M . При томе, свака тачка у равни потпуно је одређена својим радијус-вектором.

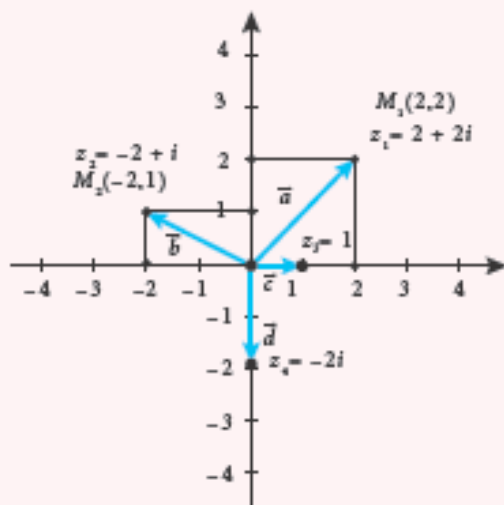
Пошто смо претходно показали да сваком комплексном броју одговара тачно једна тачка у равни, а да је свака тачка у равни одређена својим радијус-вектором, може се закључити да између комплексних бројева и радијус-вектора постоји обострано једнозначна кореспонденција.

Пример 2

Представити у координатној равни радијус-векторе $\vec{a} = (2, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1)$, $\vec{c} = (1, 0)$ и $\vec{d} = (0, -2)$. Које комплексне бројеве одређују ови радијус-вектори?

Решење:

На слици 2 представљени су одговарајући радијус-вектори. Радијус-вектор $\vec{a} = (2, 2)$ одређује комплексни број $z_1 = 2 + 2i$, радијус-вектор $\vec{b} = (-2, 1)$ одређује $z_2 = -2 + i$, вектор $\vec{c} = (1, 0)$ - број $z_3 = 1$, а вектор $\vec{d} = (0, -2)$ број $z_4 = -2i$.



Цртеж 2

Задатак 2

Представити у координатној равни радијус-векторе $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (-2, -4)$, $\vec{c} = (0, -3)$ и $\vec{d} = (5, 0)$. Које комплексне бројеве одређују ови радијус-вектори?

Зашто се неке величине представљају комплексним бројем?

Ово је суштинско питање на које треба да одговоримо како бисмо могли да користимо комплексне бројеве у реалним задацима примене.

У физици, техници, роботизи и многим другим областима, многе величине се не описују само једним бројем, већ садрже две важне информације. На пример, код силе није важна само њена величина, већ и правац у којем делује. Зато кажемо да је сила векторска величина; она има:

- јачину (величину),
- правац.

Како можемо повезати силу са комплексним бројем?

Комплексни број $z = a + bi$ садржи две компоненте: реални део a и имагинарни део b . Ове две компоненте могу се тумачити као два међусобно нормална правца (на пример, хоризонтални и вертикални). Зато се сила може записати као комплексни број:

$$F = F_x + iF_y$$

где:

- F_x је хоризонтална компонента силе,
- F_y је вертикална компонента силе.

У овом представљању, заправо, сила се представља као радијус-вектор, јер смо видели да између комплексних бројева и радијус-вектора постоји обострано једнозначна кореспонденција.

Ово представљање силе, а на исти начин и многих других векторских величина, веома је корисно јер се на овај начин:

- сабирање сила постаје обично сабирање комплексних бројева, уместо сабирања вектора;
- прорачуни се поједностављују;
- лакше се решавају задаци са осцилацијама, таласима, наизменичном струјом и многим другим примерима где се појављују променљиве које су векторске величине.

На основу овога, може се рећи да комплексни бројеви не представљају „нову“ физичку величину, већ су математички алат помоћу којег лакше описујемо величине које имају две компоненте.

Пример 3

Основне величине које се израчунавају за електрично коло су: јачина електричне струје I , која се мери у амперима (ознака A), привидни електрични отпор Z , мерен у омима (симбол Ω) и напон U , мерен у волтима (симбол V). Ове величине су повезане формулом $U = I \cdot Z$.

Да би се избегла забуна са симболом за јачину електричне струје I , инжењери записују имагинарну јединицу са j .

- У електричном колу, јачина електричне струје је $(8 + 3j)$ А, а отпор је $(4 - j)$ Ω . Колики износи напон?
- У електричном колу са напоном од 110 V, јачина електричне струје је $(4 + 3j)$ А. Колики је отпор?

Решење:

- Према условима задатка $I = 8 + 3j$, а $Z = 4 - j$. Напон електричне струје израчунава се по формули $U = I \cdot Z$. Заменом вредности за I и Z , добијамо:

$$U = I \cdot Z = (8 + 3j)(4 - j) = (35 + 4j) \text{ V.}$$

Добијеном резултату може се дати следеће физичко тумачење. Напон U биће одређен радијус-вектором $\vec{u} = (35, 4)$, па

- реални део (35 V) представља активни напон;
- имагинарни део (4jV) представља реактивни напон.

$$6) \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{110}{4 + 3j} = \frac{110}{4 + 3j} \cdot \frac{4 - 3j}{4 - 3j} = \frac{110(4 - 3j)}{4^2 + 3^2} = 4,4 \cdot (4 - 3j) = 17,6 - 13,2j.$$

АКТИВНОСТ

У електричном колу са напонам од 110 V, отпор је $(6 - 2j) \Omega$. Колика је јачина електричне струје?

Пример 4

У електричном колу два извора стварају комплексне напоне $U_1 = (6 + 4j) \text{ V}$ и $U_2 = (3 - 2j) \text{ V}$. Израчунај укупан напон у колу U , ако је он једнак збиру напона U_1 и U_2 .

Решење:

$$U = U_1 + U_2 = (6 + 4j) + (3 - 2j) = (9 + 2j) \text{ V}.$$

Пример 5

Робот се креће трансформацијом представљеном комплексним бројем $z_1 = 2 + j$, а затим се примењује додатна ротација и скалирање $z_2 = 1 - j$. Одреди резултат укупне трансформације $z = z_1 \cdot z_2$.

Решење:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + j)(1 - j) = 3 - j.$$

АКТИВНОСТ

Кроз телекомуникациони канал послат је сигнал $S = 10 + 6j$, а шум у каналу је $N = 2 - j$. На излазу из канала добија се сигнал који је једнак збиру послатог сигнала и шума

- Одреди примљени сигнал $R = S + N$.
- Од примљеног сигнала одреди чисти сигнал одузимањем шума.

Пример 6

Тачка у равни је задата комплексним бројем $z = 3 + 2j$ (То подразумева да су координате тачке (3,2)). На тачку се примењује трансформација $z' = (1 + j) \cdot z$. Одреди њен нови положај.

Решење:

Нови положај тачке биће

$$z' = (1 + j) \cdot z = (1 + j) \cdot (3 + 2j) = 1 + 5j.$$

Задачи за вежбање!

- Представи у комплексној равни следеће комплексне бројеве:
 $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = 1 - 5i$, $z_3 = 2 - 6i$ и $z_4 = -i$.
- Одреди комплексне бројеве који одговарају уређеним паровима реалних бројева $(2, 1)$, $(-2, 4)$, $(-3, -2)$, $(0, 4)$, $(2, 0)$, а затим их представи у координатној равни.
- Одреди радијус-векторе који одговарају комплексним бројевима $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 2 - 4i$, $z_3 = 3 - 5i$ и $z_4 = -2i$ и представи их у координатној равни.
- Једна локација је представљена бројем $z = -2 + 4i$.
 - Запиши њену локацију координатама.
 - Да ли се тачка налази северно или јужно од координатног почетка?
 - Да ли се тачка налази источно или западно од координатног почетка?
 - Претпостави да у координатној равни лево представља запад, десно исток, горе север, а доле југ.
- Положај једног сателита у равни дат је комплексним бројем $z = 9 - 6i$.
 - Одреди реални и имагинарни део.
 - Да ли се сателит налази изнад или испод хоризонталне осе?
 - Колико је јединица удаљен од y -осе?
- Кретање једног малог чамца у равни описано је комплексним бројем $z_1 = 6 + 2i$. Због струјања воде, додатно померање је $z_2 = -1 + 3i$.
 - Одреди укупно померање чамца.
 - У ком правцу је већи утицај: по хоризонтали или по вертикали?

ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ И УТВРЂИВАЊЕ

1. Упростити сваки од израза:

а) $x^{-2} \cdot x^{-4} \cdot x^6$; б) $\left(\frac{3x^2}{4x^4}\right)^3$; в) $\left(\frac{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}{y^{-3}zx^{-8}}\right)^{-1}$.

2. Које од следећих тврдњи су тачне:

- а) квадратни корен из броја 0 не постоји;
 б) квадратни корен из броја 0 је 0;
 в) израз $\sqrt{15}$ нема смисла;
 г) израз $\sqrt[3]{-15}$ дефинисан је, има смисла;
 д) $\sqrt[3]{-343} = -7$?

3. За коју вредност x израз има смисла:

а) $\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{x}$; б) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{2x^2+4}$.

4. Израчунај вредност израза:

а) $\sqrt{25} - 3\sqrt[3]{64} + 4\sqrt[4]{-32}$; б) $9^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}}$.

5. Извршити назначене операције:

а) $x^2 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 : x^{\frac{1}{4}} \quad x > 0$; б) $2a^2b^{\frac{1}{2}} : \left(a^{-1}b^{\frac{2}{3}}\right)^2, \quad a \neq 0, b > 0$.

6. Запиши степен у облику корена:

а) $5^{\frac{1}{2}}$; б) $2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}, \quad x \geq 0$; в) $2x+3y^{\frac{1}{2}}, \quad y \geq 0$.

7. Запиши корен као степен са рационалним изложником:

а) $\sqrt{21}$; б) $\sqrt[3]{18}$; в) $\sqrt[4]{a^2b^4}, \quad a, b \geq 0$.

8. Колики је пречник једне олује која траје 18 часова ако су метеоролози утврдили да се јаке олује могу описати формулом $D = 9,4 \cdot t^{\frac{2}{3}}$, где је D пречник олује, а t трајање олује?

9. Свести корене на заједнички коренов показатељ

а) $\sqrt[3]{x^2}, \sqrt[4]{xy^2}, \sqrt[5]{xy}, \quad x, y \geq 0$; б) $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a^2b}, \sqrt[5]{a^5b^5}, \quad a, b \geq 0$.

10. Поређај по величини корене:

а) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[4]{45}$; б) $\sqrt[3]{16}, \sqrt[4]{250}, \sqrt[5]{150}$.

11. Запиши корен у нормалном облику:

а) $\sqrt{250}$; б) $\sqrt[3]{8a^6b^5}$; в) $\frac{b}{a^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{2b^4}}, \quad a \geq 0, b > 0$.

12. Извршити назначене операције:

а) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{12}) \cdot \sqrt{3}$; б) $(\sqrt[3]{x^4y^2} - 3\sqrt[3]{x^6y^7}) : \sqrt[3]{x^2y^2}, \quad x, y > 0$;
 в) $(\sqrt[3]{ab^2})^2 \cdot \sqrt[3]{ab}$; г) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a^3}$; д) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}$; е) $\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt{b^3} \cdot \sqrt[3]{b^2}$.

13. Који од датих израза се своде на рационалне:

а) $a + \sqrt{a}$, $a \geq 0$; б) $\frac{2}{a} + \sqrt{a^4}$, $a > 0$; в) $a - \sqrt[5]{64a^5}$.

14. Рационализовати именилац разломка:

а) $\frac{23}{6 - \sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$; в) $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, $a, b > 0$.

15. Упростити израз $\left(\frac{16}{\sqrt{6} + 1} + \frac{3}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}} \right) (\sqrt{6} + 11)$.

16. Фибоначијев низ може се израчунати коришћењем Бинеове формуле, тако да је n -ти члан низа

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Коришћењем ове формуле одреди прва четири члана овог низа.

17. Запиши комплексне бројеве ако су дати:

а) $\operatorname{Re}(z) = 15$, $\operatorname{Im}(z) = -13$; б) $\operatorname{Re}(z) = -99$, $\operatorname{Im}(z) = 1$; в) $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) = -21$.

18. Израчунај збир и разлику бројева z_1 и z_2 ако

а) $z_1 = 14 - 5i$, $z_2 = -12 + 6i$; б) $z_1 = 4 - 9i$, $z_2 = -11 + 9i$; в) $z_1 = 12 - 3i$, $z_2 = -12 + 8i$.

19. Израчунај производ и количник z_1 и z_2 ако

а) $z_1 = 7 - 6i$, $z_2 = -1 + 5i$; б) $z_1 = -1 - 4i$, $z_2 = -10 + 4i$; в) $z_1 = -7 + 3i$, $z_2 = 2 - 5i$.

20. Израчунај вредност израза:

а) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{24}$; б) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \dots + \frac{1}{i^{24}}$.

21. Извршити степеновање и одредити модул добијеног комплексног броја:

а) $(2 + i)^2$; б) $(1 - 4i)^3$; в) $(\sqrt{3} + 3i)^2$.

22. Упростити израз:

а) $\frac{2 - 3i}{6 + 8i} + (2 + i)(4 - i) - (1 - i)^2$; б) $\frac{(1 + 2i)^3 + (3 + 3i) \cdot 5i}{(3 - 4i)^2}$.

23. Дат је комплексни број $z_1 = 1 - 2i$. Одреди комплексни број $z = x + yi$, такав да $\operatorname{Re}(z \cdot z_1) = -4$, а

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}_1}\right) = -\frac{7}{5}.$$

24. Провери тачност једнакости $(\sqrt{3} - i)^6 + (\sqrt{3} + i)^6 = -128$.

25. Комплексни бројеви $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 1 + 6i$, $z_3 = 4 - 2i$, $z_4 = -3$ и $z_5 = -5i$ представи их у комплексној равни са:

- а) тачкама у равни;
б) радијус-векторима.

26. Вектор ветра је описан комплексним бројем $z = -4 + 5i$.

- а) запиши број као уређени пар.
б) да ли ветар више дува у западном или северном правцу?
в) у ком квадранту се налази тачка која му одговара?

27. Стање једног техничког система описано је бројем $z_0 = 3 - i$. Након интервенције, стање се мења за $\Delta z = -2 + 4i$.

- а) Одреди ново стање система.
б) Који део промене је већи: реални или имагинарни?

КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И ЈЕДНАЧИНЕ КОЈЕ СЕ СВОДЕ НА КВАДРАТНЕ

Квадратне једначине представљају један од најважнијих типова једначина у алгебри и чине основу за даље изучавање многих математичких дисциплина, као и за моделирање и решавање нелинеарних зависности и проблема. Оне, заједно са једначинама које се свode на квадратне, имају кључну улогу у разумевању и анализи нелинеарних зависности које се јављају у различитим научним областима, као и у моделирању различитих реалних проблема у примењеним наукама. Изучавање квадратних једначина и метода за њихово решавање од великог је значаја јер се оне јављају у бројним математичким и практичним проблемима и омогућавају моделирање различитих појава.

Квадратне једначине налазе примену у многим научним дисциплинама. У физици се користе за израчунавање путања пројектила, у економији за оптимизацију трошкова и профита, у биологији за моделирање раста популација, а у инжењерству за анализу оптерећења конструкција код којих су деформације нелинеарне.

2.1 ПОЈАМ КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ. ВРСТЕ КВАДРАТНИХ ЈЕДНАЧИНА. РЕШАВАЊЕ КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Подсети се!

- Једначина облика $ax+b=0$ је линеарна једначина са једном непознатом; на пример, $3x-1=0$, $5-2y=0$, $4x=6$ су линеарне једначине са једном непознатом.
- Збир два или више монома назива се полином.
- Степен полинома је највећи степен монома који се јавља у његовом запису са коефицијентом различитим од нуле.

Активност

Одреди који су од следећих полинома $7x + x^2 - 2x^3 - 1$, $5x^2 - 2x - 1$, $-3x + 2$, $4x^4 - x^2$, $-3x^2 + 2$, $x^2 - x$ полиноми другог степена?

Запамти!

- Једначина облика $ax^2 + bx + c = 0$, где је x променљива, a , b , c реални бројеви и $a \neq 0$ назива се *квадратна једначина са једном непознатом*.
- Моном ax^2 је *квадратни члан*, bx је *линеарни члан*, а c је *слободни члан* квадратне једначине.
- Број a је коефицијент квадратног члана, b је коефицијент линеарног члана, а c је слободни коефицијент.

На пример, квадратне једначине су $x^2 = 5$, $x^2 - 16 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $2 = x^2 + 3x$.

Неке формуле у физици представљају квадратне једначине. На пример, пређени пут при равномерно убрзаном праволинијском кретању изражава се квадратном једначином по променљивој t , тј.

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Једначина $5x^2 - 2x - 1 = 0$ је квадратна једначина са коефицијентима $a = 5$, $b = -2$ и $c = -1$.

Пример 1

Једначина $(x-1)^2 = 3x - 2$ е квадратна једначина. Да бисмо одредили њене коефицијенте, следећим операцијама сводимо једначину на облик $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= 3x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 3x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 - 3x + 2 &= 0 \\ x^2 - 5x + 3 &= 0\end{aligned}$$

Дакле, $a = 1$, $b = -5$ и $c = 3$.

Задатак 1

Које су од следећих једначина квадратне? За једначине које су квадратне одредите њихове коефицијенте.

- а) $x^2 - 1 = 0$; б) $2x + 3 = 0$; в) $5x^3 - 2x^2 + 1 = 0$; г) $(2x+1)^2 + 1 = 0$; д) $(2x+2)^2 = (x+3)^2$.

Запамти!

- Једначина облика $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ назива се *општи облик квадратне једначине са једном непознатом*.
- Услов $a \neq 0$ мора бити испуњен, јер ако је $a = 0$, онда једначина није квадратна.

Задатак 2

Трансформишите једначине у општи облик:

- а) $2x(x-1) = x-3$; б) $\frac{x-3}{2} + \frac{x(x-3)}{3} = 1$; в) $(3-2x)^2 - 5 = (2-x)^2$.

Запамти!

- Квадратна једначина у којој је $a = 1$ назива се квадратна једначина у *нормалном облику* и обично је записујемо као $x^2 + px + q = 0$.
- Свака квадратна једначина може се трансформисати у нормални облик тако што је најпре трансформишемо у општи облик, а затим целу једначину поделимо коефицијентом a .

Пример 2

Једначину $-2x^2 - 5x + 4 = 0$ свешћемо на квадратну једначину у нормалном облику ако је поделимо коефицијентом $a = -2$:

$$-2x^2 - 5x + 4 = 0 \quad / : (-2)$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - 2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 2,5x - 2 = 0$$

При томе, $p = \frac{5}{2} = 2,5$, $q = -2$.

Задатак 3

Запишите једначину у нормалном облику.

а) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;

б) $(3 - 2x)^2 - 5 = x$;

в) $-2x(x + 3) + (x - 3)(x + 1) = 6$;

г) $(3x - 2)^2 = (x + 3)^2$.

Запамти!

- Ако $b \neq 0$ и $c \neq 0$ (при чему је $a \neq 0$), онда се једначина $ax^2 + bx + c = 0$ назива *потпуна квадратна једначина*. Дакле, једначина је потпуна квадратна једначина ако су у њеном општем облику сва три коефицијента различита од нуле.
- Једначине облика $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$; $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$ и $ax^2 = 0$ називају се *непотпуне квадратне једначине*.
- Ако један од коефицијената a , b или c квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ зависи од неког параметра, онда се та једначина назива *параметарска квадратна једначина* (квадратна једначина са параметром или са општим коефицијентима). Параметар је константа чија вредност зависи од постављених услова у задатку.

Пример 3

Одредите коефицијенте параметарске једначине $(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 5 = 0$.

Решење:

Једначина $(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 5 = 0$ е параметарска квадратна једначина у којој коефицијенти зависе од параметра m . Њени коефицијенти су: $a = m - 1$, $b = -2(m + 2)$ и $c = m - 5$.

Пример 4

За које вредности параметра m је једначина $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$:

- потпуна квадратна једначина,
- непотпуна квадратна једначина?

Решење:

Коефицијенти једначине су $a = 2m - 1$, $b = -3(m + 2)$ и $c = 5$.

- Да би једначина $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$ била квадратна једначина, треба да важи $a \neq 0$.

Добијамо $2m - 1 \neq 0$, односно $m \neq \frac{1}{2}$.

Да би била потпуна квадратна једначина, потребно је да и линеарни члан b и слободни члан c буду различити од нуле. Слободни члан је $c = 5 \neq 0$.

Од $b \neq 0$ имамо:

$$-3(m + 2) \neq 0$$

$$m + 2 \neq 0$$

$$m \neq -2$$

Дакле, једначина $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$ биће потпуна квадратна једначина за све вредности параметра m различите од $\frac{1}{2}$ и различите од -2 .

- Пошто је у овој једначини слободни коефицијент c различит од нуле, једначина ће бити непотпуна квадратна једначина само ако је линеарни коефицијент b jednak нули, тј.

$$-3(m + 2) = 0,$$

$$m + 2 = 0$$

$$m = -2$$

Дакле, једначина $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$ биће непотпуна квадратна једначина за $m = -2$.

Задатак 4

За које вредности k је једначина $(k + 2)x^2 - 3x - k + 1 = 0$:

- потпуна квадратна једначина,
- непотпуна квадратна једначина?

Решавање квадратне једначине

Подсети се!

- За $x = 2$, једначина $3x - 6 = 0$ постаје тачна бројна једнакост.
- $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Разлагање полинома на чиниоце:

$$4x^2 + 2x = 2x(2x + 1)$$

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$
- Парни корен из негативног броја је комплексан број. На пример, $\sqrt{-9} = 3i$; $\sqrt[4]{-16} = 2i$

Активност

За које вредности $x \in \{-2, -1, 0, 1, 3\}$ ће једначина $x^2 - x - 6 = 0$ прећи у тачну бројну једнакост?

Запамти!

Вредност непознате за коју квадратна једначина постаје тачна бројна једнакост назива се **решење** или **корен** једначине.

Пример 5

Провери да ли је $x = 4$ решење једначине $2x^2 - 6x - 8 = 0$.

Решење:

Да бисмо проверили да ли је $x = 4$ решење једначине $2x^2 - 6x - 8 = 0$ заменићемо вредност $x = 4$ у једначину

Имамо,

$$2 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 8 = 0$$

$$2 \cdot 16 - 24 - 8 = 0$$

$$32 - 32 = 0$$

$$0 = 0$$

Видимо да се заменом $x = 4$, једначина претвара у тачну бројну једнакост.

Према томе, $x = 4$ је решење једначине $2x^2 - 6x - 8 = 0$.

Пример 6

За коју вредност параметра k је број 2 решење једначине $(k + 2)x^2 - 3x - k + 1 = 0$?

Решење:

Ако у једначини заменимо x са 2, добијамо

$$2^2 \cdot (k+2) - 3 \cdot 2 - k + 1 = 0$$

$$4(k+2) - 6 - k + 1 = 0$$

$$3k + 3 = 0$$

$$k = -1$$

Значи, за $k = -1$ једначина је $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x = 2$ је решење ове квадратне једначине.

Задатак 5

Дата је једначина $(2m - 1)y^2 - 3(m + 2)y + 5 = 0$, $m \neq \frac{1}{2}$. Одреди вредност параметра m , тако да $y = 1$ буде решење једначине.

Задачи за вежбање!

1. Које од датих једначина су квадратне?

а) $7x^2 - 3 = 3x$; б) $0 \cdot x^2 + 2x - 3 = 0$; в) $(x^2 + 5)^2 - 1 = 0$; г) $\frac{1}{2}x^2 = 0$.

2. Одреди коефицијенте a , b и c у следећим једначинама:

а) $8x^2 - 3x + 9 = 0$; б) $-9x = 8x^2$; в) $\sqrt{3}x^2 - 5 = 8x$.

3. Трансформиши у општи облик следеће једначине:

а) $2(x+5)(x-2) = 3$; б) $(4x+3)(2x-1) = (x+1)(x+3)$;

в) $\frac{3x-4}{2} + \frac{(x-1)(x+2)}{3} = 1$; г) $(2x-1)(x+3) = \frac{x-2}{4}$.

4. Запиши следеће једначине у нормални облик:

а) $-2x^2 - 4x + 16 = 0$; б) $3x^2 = 9x$;

в) $3(x+2)^2 - 24 = 0$; г) $\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3 = 0$.

5. Које од следећих квадратних једначина су потпуне, а које непотпуне квадратне једначине?

а) $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$; б) $(x+5)(x+2) = 10$; в) $\sqrt{2}x^2 = 8x$.

6. За коју вредност параметра m ће дата једначина бити квадратна?

а) $(3m-1)x + (2m+1)x^2 = 5m$; б) $(m+1)x^2 + (2m+3) = 0$

в) $(m-3)x^2 + (m-3)x + (m-3) = 0$.

7. За које вредности параметра k ће једначина $(k-3)t^2 - (2k+1)t = 2k-1$ бити:

а) квадратна једначина;

б) потпуна квадратна једначина;

в) непотпуна квадратна једначина облика $at^2 + c = 0$;

г) непотпуна квадратна једначина облика $at^2 + bt = 0$.

8. Дата је једначина $2x^2 - 4x + 1 = 0$. Провери да ли је неки од бројева 0 , 1 , $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ решење ове једначине.

9. За коју вредност параметра k једначина $(k+2)y^2 + (2k-3)y - 5 = 0$ има решење:

а) $y = -1$ б) $y = \frac{1}{2}$?

2.2 РЕШАВАЊЕ НЕПОТПУНИХ КВАДРАТНИХ ЈЕДНАЧИНА

Запамти!

- Решити једначину значи пронаћи сва њена решења.
- Производ два или више бројева једнак је нули ако и само ако је бар један од тих бројева једнак нули.

Активност

Решити једначину $(3x + 6)(x - 1) = 0$.

Дата једначина је производ израза $3x + 6$ и $x - 1$ па ћемо за одређивање њених решења користити чињеницу да је производ два или више чинилаца једнак нули ако је бар један од чинилаца једнак нули. Према томе, ова једначина ће бити тачна бројна једнакост ако је $3x + 6 = 0$ или $x - 1 = 0$, односно ако је $x = -2$ или $x = 1$. Дакле, решења једначине су $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

Задатак 1

Одреди решења следећих једначина:

- а) $(x + 2)(3x - 5) = 0$; б) $2(6x - 3)(2x - 5) = 0$;
в) $(x + 3)(2x - 1)(5x - 8) = 0$; г) $(x + 3)(x - 3)(2x - 5)(4x - 10) = 0$.

Пример 1

Решити непотпуну квадратну једначину

- а) $ax^2 + bx = 0$; б) $ax^2 = 0$.

Решење:

- а) Једначину $ax^2 + bx = 0$ можемо записати као $x(ax + b) = 0$ и јасно је да су решења ове једначине

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = -\frac{b}{a}.$$

- б) Једначина $ax^2 = 0$ ће бити тачна бројна једнакост ако $x^2 = 0$, тј. за ову једначину $x_1 = x_2 = 0$.

Запамти!

Ако квадратна једначина постаје тачна бројна једнакост само за једну вредност променљиве x , на пример $x = d$, т.е. $x_1 = x_2 = d$, тада кажемо да је $x_1 = x_2 = d$ **двоструки (двојни) корен** на квадратне једначине.

Пример 2

Решите једначине:

а) $3x^2 + 8x = 0$;

б) $(2x - 1)^2 = 1$;

в) $(x - 2)(2x - 3) = 6$.

Решење:

а) $3x^2 + 8x = 0$

$x(3x + 8) = 0$

$x = 0$ или $3x + 8 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3}$

б) $4x^2 - 4x + 1 = 1$

$x(4x - 4) = 0$

$x = 0$ или $4x - 4 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 1$

в) $2x^2 - 3x - 4x + 6 = 6$

$x(2x - 7) = 0$

$x = 0$ или $2x - 7 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{2}$

Запамти!

- Решења једначине $ax^2 + bx = 0, a \neq 0, b \neq 0$ је $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$.
- Решења једначине $ax^2 = 0, a \neq 0$ је $x_1 = x_2 = 0$.

Задатак 2

Одреди решења следећих једначина:

а) $(x + 3)(x - 5) = -15$;

б) $(x - 1)(3x + 2) = x - 2$;

в) $\frac{x(x-2)}{2} - \frac{1-4x}{3} = \frac{x-1}{3}$.

Пример 3Решите непотпуну квадратну једначину $ax^2 + c = 0, a \neq 0, c \neq 0$.**Решење:**

Једначину $ax^2 + c = 0$ можемо записати као $ax^2 = -c$, односно $x^2 = -\frac{c}{a}$, $\left(|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$. Сада, за решења једначине имамо два различита случаја:

- Ако $-\frac{c}{a} > 0$ (су a и c различитих знакова), тада једначина има два различита решења која

су супротни реални бројеви: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, т.е. $x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

- Ако $-\frac{c}{a} < 0$ (a и c имају исте знакове), тада решења једначине нису реални бројеви, тј.

решења једначине су комплексни бројеви $x_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}}$.

Запамти!

Решења непотпуне квадратне једначине $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$ се:

1. Ако $-\frac{c}{a} > 0$ (су a и c различитих знакова), онда

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad \text{т.е. } x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

2. Ако $-\frac{c}{a} < 0$ (су a и c истог знака), онда

$$x_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Пример 4

Решите једначине:

а) $6x^2 - 30 = 0$;

б) $3x^2 + 12 = 0$;

в) $(x+3)^2 - 3 - 5x = x$.

Решење:

а) $6x^2 - 30 = 0$

$$6x^2 = 30$$

$$x^2 = 5$$

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_2 = -\sqrt{5}$$

б) $3x^2 + 12 = 0$

$$3x^2 = -12$$

$$x^2 = -4$$

$$x_1 = 2i, \quad x_2 = -2i$$

в) $(x+3)^2 - 3 - 5x = x$

$$x^2 + 6x + 9 - 3 - 5x = x$$

$$x^2 = -6$$

$$x_1 = \sqrt{6}i, \quad x_2 = -\sqrt{6}i.$$

Задатак 3

Одреди решења једначина:

а) $2x^2 - 18 = 0$;

б) $(x+2)(x-1) = x$;

в) $(2x-1)^2 = 2 - 4x$.

Пример 5

За које вредности параметра m ће једначина $(3m-6)x^2 + m + 4 = 0$ имати реална решења?

Решење:

$$(3m-6)x^2 + m + 4 = 0$$

$$(3m-6)x^2 = -m-4$$

$$x^2 = \frac{-m-4}{3m-6}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{-m-4}{3m-6}}$$

Да би једначина имала реална решења, потребно је да буде $\frac{-m-4}{3m-6} \geq 0$, односно, потребно је да изрази $3m - 6$ и $-m - 4$ буду истог знака. Одатле добијамо следеће системе неједначина за одређивање вредности параметра m :

$$\begin{cases} -m-4 \geq 0 \\ 3m-6 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -m-4 \leq 0 \\ 3m-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m > 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m \geq -4 \\ m < 2 \end{cases}.$$

Први систем нема решење, док из другог система добијамо $[-4, 2)$. ЗДакле, једначина ће имати реалне корене ако је $m \in [-4, 2)$.

Задатак 4

За које вредности параметра k ће једначина $(2k-4)x^2 - k + 6 = 0$ имати комплексна решења?

Задаци за вежбање!

Одреди решења једначина (1 – 7):

1. а) $(2x+5)(4-3x)=0$;

б) $\left(2-\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{5}{4}x-1\right)=0$.

2. а) $x(x+4)=x(2x-5)$;

б) $(x-2)^2-4=0$.

3. а) $8x^2+3x=0$;

б) $9x^2-\frac{5}{2}x=0$.

4. а) $(3-\sqrt{3})x^2=0$;

б) $-\frac{5\sqrt{5}}{2}x^2=0$.

5. а) $3x^2-27=0$;

б) $\frac{1}{3}x^2=\frac{3}{4}$.

6. а) $36+x^2=0$;

б) $-\frac{5}{2}x^2-4=0$.

7. а) $x(x-3)-x+16=-2x(2-x)$;

б) $\frac{3x^2-5x}{2}-\frac{2(x^2-3)}{3}=\frac{5x^2+8}{4}$.

8. За које вредности параметра k ће једначина $(k+1)x^2+k-3=0$ имати реална решења?

2.3 РЕШАВАЊЕ ПОТПУНИХ КВАДРАТНИХ ЈЕДНАЧИНА

Активност

Разложи полиноме на чиниоце:

а) $x^2 + x - 12$; б) $x^2 - 6x + 8$.

Решење:

а) $x^2 + x - 12 = x^2 + 4x - 3x - 12 = x(x + 4) - 3(x + 4) = (x + 4)(x - 3)$.

б) Најпре се допуњава до потпуног квадрата додавањем и одузимањем броја 9, при чему се добија

$$x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x - 4)(x - 2).$$

Пример 1

Реши једначину $x^2 + 5x + 6 = 0$ на два начина:

- а) разлагањем на чиниоце; б) допуњавањем до потпуног квадрата.

Решење:

а) $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) + 2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$.

Производ $(x + 3)(x + 2)$ једнак је нули ако је $x + 3 = 0$ или $x + 2 = 0$. Према томе, решења једначине су $x_1 = -3$ и $x_2 = -2$.

- б) Линеарни члан $5x$ можемо записати као $2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x$ и можемо допунити до потпуног квадрата

додавањем и одузимањем $\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0.$$

Као и под а), закључујемо да су решења $x_1 = -3$ и $x_2 = -2$.

Задатак 1

Реши једначине на два начина:

- 1) растављањем на чиниоце; 2) допуњавањем до потпуног квадрата.

а) $x^2 - 8x = 0$; б) $x^2 + 7x = 0$; в) $x^2 - ax = 0$; г) $x^2 + \frac{b}{a}x = 0, a \neq 0$.

Да бисмо одредили решења потпуне квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, најпре једначину поделимо са a па добијамо $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, односно $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$. Сада, да бисмо израз на левој страни допунили до потпуног квадрата, на обе стране једнакости додајемо $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Тиме добијамо једначину $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$, тј. $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Кореновањем обе стране једнакости добијамо $\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, односно $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$. Према томе, решења (корени) једначине $ax^2 + bx + c = 0$ се $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, што заједно можемо записати формулом $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Запамти!

Решења једначине $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ одређују се формулом $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Пример 2

Решите квадратне једначине:

а) $x^2 - 2x - 8 = 0$; б) $2x^2 = 4x + 1$.

Решење:

а) Вредности коефицијената су $a = 1$, $b = -2$, $c = -8$ па их уврстимо у формулу

$$x_{1/2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2},$$

Према томе, $x_1 = 4$ и $x_2 = -2$.

б) Најпре једначину запишемо у општем облику, $2x^2 - 4x - 1 = 0$, па вредности коефицијената $a = 2$, $b = -4$, $c = -1$ заменимо у формули па добијамо

$$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 6}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

Решења једначине су $x_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$ и $x_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$.

Запамти!

Формула за решавање потпуних квадратних једначина може се применити и за решавање непотпуних квадратних једначина.

Пример 3

Применом формуле за решавање квадратне једначине реши једначине:

а) $9x^2 = 0$; б) $3x^2 - 12x = 0$; в) $5x^2 - 10 = 0$.

Решење:

а) $a = 9, b = 0$, па $x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0+0}}{2 \cdot 9} = 0$, т.е. $x_1 = x_2 = 0$.

б) $a = 3, b = -12, c = 0$, $x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-0}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 12}{6}$, $x_1 = \frac{12+12}{6} = 4$, $x_2 = \frac{12-12}{6} = 0$.

в) $a = 5, b = 0, c = -10$, $x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0+200}}{2 \cdot 5} = \frac{\pm \sqrt{2 \cdot 100}}{10} = \frac{\pm 10\sqrt{2}}{10} = \pm \sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

Уочи да применом формуле добијамо:

- Ако $b = c = 0$, онда су решења непотпуне квадратне једначине $ax^2 = 0$ једнака $x_1 = x_2 = 0$.
- Ако $b = 0$, онда су решења непотпуне квадратне једначине $ax^2 + c = 0$ $x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.
- Ако $c = 0$, онда су решења непотпуне квадратне једначине $ax^2 + bx = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Задатак 2

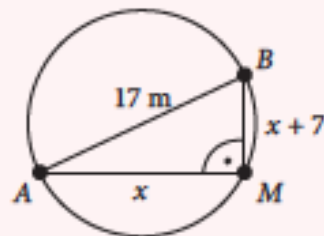
Одреди решења једначина:

а) $4x^2 - 4x - 24 = 0$; б) $5x^2 + 2x - 1 = 0$.

Пример 4

У једном кружном парку пречника 17 метара налазе се две капије А и В које се налазе једна насупрот другој (на супротним крајевима пречника). На путу у парку треба поставити стуб тако да разлика растојања од стуба до капија А и В буде 7 метара.

- а) Да ли је могуће поставити такав стуб?
б) Ако јесте, на ком растојању од капије А а на ком растојању од капије В ће се налазити стуб?



Решење:

Да бисмо лакше решили, направићемо скицу. Нека је AB пречник кружног парка, на чијим се крајњим тачкама налазе две капије. Положај траженог стуба означимо са M . Растојање AM ће означити са x .

Разлика растојања од стуба до две капије A и B износи 7 метара, имамо: $\overline{AM} - \overline{BM} = 7\text{ m}$ одакле добијамо $\overline{BM} = x + 7$.

Троугао AMB је троугао смештен у полукружници (једна страница је пречник кружнице, а супротно теме лежи на кружници). Према Талесовој теореме, овај троугао је правоугли. Применом Питагорине теореме добијамо:

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 17^2$$

$$x^2 + (x+7)^2 = 289$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 - 289 = 0$$

$$2x^2 + 14x - 240 = 0 : 2$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-120)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-7 \pm 23}{2}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 23}{2} = 8, x_2 = \frac{-7 - 23}{2} = -15$$

Добили смо решења 8 и -15.

Пошто решење једначине треба да представља растојање између две тачке, оно не може бити негативан број, тј. број -15 неће бити решење.

Решење је број 8.

Према томе, стуб ће бити постављен на растојању од 8 m од капије A и $8 + 7 = 15\text{ m}$ од капије B .

Дискриминанта квадратне једначине

Активност

Одреди вредност израза $b^2 - 4ac$, ако су a , b и c коефицијенти једначине $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Видели смо да решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$) одређујемо формулом

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Запамти!

Подкорени израз $b^2 - 4ac$ означавамо са D , т.е. $D = b^2 - 4ac$ и назива се **дискриминантом** квадратне једначине.

Коришћењем ознаке за дискриминанту, формулу за одређивање решења можемо записати као

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

1. Ако су коефицијенти a , b , c квадратне једначине реални бројеви, тада за одређивање решења

$$\text{користимо формулу } x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. Ако је неки од коефицијената a , b или c параметар или израз, тада је једноставније прво

$$\text{одредити дискриминанту } D = b^2 - 4ac, \text{ а затим користити формулу } x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Пример 7

Једначину $x^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{3})x + \sqrt{21} = 0$ ћемо решити тако што ћемо прво одредити дискриминанту

$$D = (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{21} = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7 \cdot 3} + (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{21} = (\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{21} + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2.$$

Затим добијену дискриминанту заменимо у формули $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ и за решења једначине

$$\text{добијамо } x_{1/2} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} \pm (\sqrt{7} - \sqrt{3})}{2}, \text{ односно } x_1 = \sqrt{7}, x_2 = \sqrt{3}.$$

Реши једначине:

а) $x^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{5})x + \sqrt{35} = 0$; б) $x^2 + 2x - 7 = 2x - 1$.

Задаци за вежбање!

1. У једначини $3x^2 + 5x + m - 4 = 0$ одреди параметар m ако је $x = 0$ једно њено решење. За добијену вредност m одреди друго решење једначине.

Одреди решења једначина (2–7):

2. а) $4x^2 - 4x - 24 = 0$; б) $5x^2 + 2x - 1 = 0$.
3. а) $3(2 - y) + y(y + 3) = 5y$; б) $6t^2 - 7t + 2 = 0$.
4. а) $5x^2 + 2x = 0$; б) $6x^2 - 25 = 0$; в) $16x^2 + 1 = 0$.
5. а) $1 + \frac{x-3}{2} = \frac{x(x-2)}{4}$; б) $\frac{x(x+4)}{2} - \frac{7x}{4} = 3 - \frac{5x-4}{6}$.
6. а) $x^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{3})x + \sqrt{18} = 0$; б) $x^2 - 4\sqrt{3}x - 1 = 0$.
7. а) $x^2 - 5kx + 6k^2 = 0$; б) $mx^2 - (m+1)x = 1$.
8. За које вредности x је трином $2x^2 + x - 8$ једнак биному $7x + 1$?
9. Производ два узастопна парна природна броја је 224. Који су то бројеви?
10. Дужина једног правоугаоника је за 6 cm дужа од његове ширине. Одреди странице правоугаоника ако је његова површина 112 cm^2 .

2.4 ДИСКУСИЈА О РЕШЕЊИМА КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Дискриминанта квадратне једначине

Подсети се!

Подкорени израз $b^2 - 4ac$ у формули $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ означава се са D , тј. $D = b^2 - 4ac$ и назива се **дискриминантом** квадратне једначине.

Пример 1

За следеће једначине прво одреди дискриминанту, а затим и решења:

а) $x^2 + 2x - 15 = 0$;

б) $x^2 + 2x + 1 = 0$;

в) $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Решење:

а) $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0$, $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$, $x_1 = 3, x_2 = -5$.

Дакле, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 \neq x_2$.

б) $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$, $x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$, $x_1 = -1, x_2 = -1$.

Дакле, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 = x_2$.

в) $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$. Једначина нема реална решења.

Запамти!

- Ако је $D > 0$, тада су решења квадратне једначине реална и различита.
- Ако је $D = 0$, тада су решења квадратне једначине реална и једнака, тј. једначина има двоструки (двојни) корен.
Дакле, ако је $D \geq 0$, тада су решења квадратне једначине реални бројеви.
- Ако је $D < 0$, тада квадратна једначина нема реална решења.

Пример 2

Без решавања, одреди природу решења једначина:

а) $-2x^2 + x + 10 = 0$; б) $-x^2 + 3x - 10 = 0$; в) $4x^2 + 12x + 9 = 0$.

Решење:

а) $D = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 10 = 81 > 0$. Дакле, једначина има два различита реална решења.

б) $D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10) = -31 < 0$. Дакле, једначина нема реалних решења.

в) $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$. Дакле, једначина има два једнака реална решења.

Задатак 1

Без решавања, одреди природу решења следећих једначина:

а) $x^2 - 5x + 7 = 0$; б) $-x^2 + x + 4 = 0$.

Код параметарских квадратних једначина, помоћу дискриминанте можемо одредити за које ће вредности параметра једначина имати једнака реална решења, различита реална решења или неће имати реална решења.

Пример 3

У зависности од вредности параметра m , одреди природу решења следећих једначина:

а) $4x^2 - 2x + m = 0$; б) $(m - 1)x^2 + 2x + 4 = 0$.

Решење:

а) $D = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot m = 4 - 16m$.

- Једначина ће имати два различита реална решења ако $D = 4 - 16m > 0$, односно за све вредности m које задовољавају неједнакост $m < \frac{1}{4}$, тј. $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$.
- Једначина ће имати једнака реална решења ако $D = 4 - 16m = 0$, односно ако $m = \frac{1}{4}$.
- Једначина неће имати реална решења ако $D = 4 - 16m < 0$, односно за све вредности m које задовољавају неједнакост $m > \frac{1}{4}$, тј. $m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

б) $D = 2^2 - 4 \cdot (m - 1) \cdot 4 = 20 - 16m$.

- Једначина ће имати два различита реална решења ако $D = 20 - 16m > 0 \Rightarrow m < \frac{5}{4}$, тј. за све вредности $m \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$.
- Једначина ће имати једнака реална решења ако $D = 20 - 16m = 0$, односно ако $m = \frac{5}{4}$.
- Једначина неће имати реална решења ако $D = 20 - 16m < 0 \Rightarrow m > \frac{5}{4}$, тј. за све вредности $m \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$.

Примена квадратних једначина

Решавање великог броја задатака из различитих области науке и технике своди се на решавање квадратних једначина. У следећим примерима показаћемо како се решавају неки проблеми применом квадратних једначина.

Пример 4

У ком многоуглу је број свих дијагонала седам пута већи од броја његових страница?

Решење:

Број свих дијагонала у многоуглу са n страница је $\frac{n(n-3)}{2}$. Треба да одредимо n , тако да број дијагонала буде једнак $7n$, тј.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 7n \Leftrightarrow n^2 - 17n = 0 \Leftrightarrow n(n-17) = 0.$$

Решења ове једначине су $n_1 = 0$, $n_2 = 17$. Пошто је n број страница многоугла, n треба да буде веће од нуле. Према томе, тражени многоугао има 17 страница.

Пример 5

Број 74 запиши као збир два броја чији је производ 1173.

Решење:

Нека је један сабирак x . Тада ће други сабирак бити $74 - x$. Производ два сабирка треба да буде 1173, па ћемо вредност x одредити решавањем једначине

$$x(74 - x) = 1173,$$

тј. $x^2 - 74x + 1173 = 0$. Решења добијене квадратне једначине су 23 и 51, што значи да су тражени сабирци 23 и 51.

Пример 6

Колико година има Јован, ако ће за 3 године имати онолико година колики је квадрат броја година које је имао пре 3 године?

Решење:

Нека је x број Јованових година (садашња старост). Тада је пре три године Јован имао $x - 3$ године, а за три године ће имати $x + 3$ године. Према услову задатка добијамо једначину

$$x + 3 = (x - 3)^2,$$

тј. $x^2 - 7x + 6 = 0$. Решења ове једначине су 1 и 6. Међутим, ако Јован сада има 1 годину, тада би пре 3 године имао -2 године, не задовољава услов задатка. Дакле, Јован има 6 година.

Пример 7

Да ли је могуће направити зграду са правоугаоном основом чији је обим 60 m, а површина 150 m²?

Решење:

Нека су странице основе a и b (у метрима). Тада ће обим бити $2(a + b)$, а површина ab . Обим основе зграде треба да буде $2(a + b) = 60$, одакле добијамо да је $b = 30 - a$, а из услова за површину основе добијамо једначину

$$a(30 - a) = 150,$$

тј. $a^2 - 30a + 150 = 0$. Да би зграда могла да се изгради, ова једначина треба да има реална решења. Дискриминанта једначине је $D = 30^2 - 4 \cdot 1 \cdot 150 = 300 > 0$, што значи да има реална решења, односно да се може изградити зграда са таквом основом. Решавањем једначине можемо одредити и дужине страница основе. Применом формуле за одређивање решења квадратне једначине добијамо да странице основе треба да буду $a = 5(3 - \sqrt{3}) \approx 6,34 \text{ m}$, $b = 5(3 + \sqrt{3}) \approx 23,66 \text{ m}$.

Задаци за вежбање!

- Без решавања једначина, одреди природу решења:
 - $x^2 + x - 12 = 0$;
 - $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
 - $x^2 - 6x + 25 = 0$.
- Одреди параметар m тако да једначина има двоструки корен:
 - $x^2 + 3x + m = 0$;
 - $3x^2 - 2mx + 3 = 0$;
 - $x^2 + 2(3 - m)x + 2k - 3 = 0$.
- За које вредности параметра m једначина има реалне и различите корене?
 - $x^2 - 2x + 3m = 0$;
 - $2x^2 - 8x + m + 6 = 0$;
 - $mx^2 - (2m + 3)x + m - 2 = 0$.
- За које вредности параметра k једначина нема реалне корене?
 - $x^2 + 2x + k = 0$;
 - $kx^2 + (2k - 3)x + k - 1 = 0$;
 - $(k - 2)x^2 - 4x - 1 = 0$.
- За које вредности параметра m једначина $x^2 - 2ax + m^2 - m + 3 = 0$ има реална решења?
- За коју вредност параметра a ће трином бити потпуни квадрат?
 - $ax^2 + 6x + 1$;
 - $ax^2 - 8x + 9a$.
- Одреди природу решења следећих квадратних једначина, у зависности од параметра m :
 - $x^2 - 2x + m - 3 = 0$;
 - $3mx^2 + 8x - 5 = 0$;
 - $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 3 = 0$.
- Број 123 запиши као збир два броја чији је производ 3710.
- У ком многоуглу се може повући укупно 170 дијагонала?
- Дужине страница једног троугла су 5 cm, 9 cm и 13 cm. Свака од три странице продужава се за исту дужину. Колика треба да буде та дужина да новодобијени троугао буде правоугли?

2.5 ВИЈЕТОВЕ ФОРМУЛЕ

Подсети се!

- Квадратну једначину $ax^2 + bx + c = 0$ у којој је $a = 1$ називамо једначином у нормалном облику и уобичајено је записујемо као $x^2 + px + q = 0$.
- Одреди ги p и q у једначини $x^2 + 7x - 9 = 0$.

Пример 1

Одреди збир и производ решења једначине $x^2 - 4x - 21 = 0$.

Решење:

Једначина је у нормалном облику, а коефицијенти су $p = -4$, $q = -21$. За решења једначине добијамо:

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = 2 \pm 5, \text{ тј., } x_1 = 7, x_2 = -3.$$

Збир решења је $x_1 + x_2 = 7 - 3 = 4$, а производ је $x_1 \cdot x_2 = 7 \cdot (-3) = -21$.

Уочимо да је збир решења $x_1 + x_2 = 4$ једнак $-p$, а производ $x_1 \cdot x_2 = -21$ једнак q .

Задатак 1

Трансформиши квадратну једначину $3x^2 - 7x + 2 = 0$ у нормални облик, а затим одреди коефицијенте p и q , збир и производ њених решења.

Показаћемо да веза између решења квадратне једначине и коефицијената нормалног облика једначине, коју смо уочили у претходним примерима, важи за сваку квадратну једначину. Знамо да су

решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ су $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. За

збир и производ решења добијамо:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{(2a)^2} = \frac{c}{a}.$$

Ако једначину $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ запишемо у нормалном облику, тада $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Значи, збир решења је једнак $-p$, а производ решења је једнак коефицијенту q из нормалног облика једначине.

Запамти!

- Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, тада важе формуле

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

- Ове формуле се називају **Вијетове формуле**.
- Вијетове формуле за једначину у нормалном облику $x^2 + px + q = 0$ су:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Пример 2

Без решавања једначине, одреди збир и производ њених решења.

- а) $4x^2 - 3x + 9 = 0$; б) $x^2 - (m-1)x + 2m + 5 = 0$.

Решење:

- а) Једначина је у општем облику са коефицијентима $a = 4$, $b = -3$ и $c = 9$. Према Вијетовим формулама, ако су x_1 и x_2 решења једначине, тада

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{9}{4}.$$

- б) Једначина је у нормалном облику са коефицијентима $p = -(m-1)$, $q = 2m + 5$. Према Вијетовим формулама следи да

$$x_1 + x_2 = -p = m - 1 \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = q = 2m + 5.$$

Сада ћемо показати да, ако за бројеве x_1 и x_2 важи $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, тада су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 + px + q = 0$.

Из $x_1 + x_2 = -p$ следи да је $p = -(x_1 + x_2)$, па једначина је $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$. Ако у овој једначини узмемо да је $x = x_1$, добијамо $x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_1^2 - x_1x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0$, тј. $0 = 0$. Дакле, за $x = x_1$ једначина постаје тачна бројна једнакост, односно $x = x_1$ је решење једначине. Слично, за $x = x_2$, добијамо $x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 - x_2^2 - x_1x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0$, тј. $0 = 0$, што значи да је и $x = x_2$ решење једначине.

Овим смо, заједно са претходним извођењем Вијетових формула, доказали следећу тврдњу (теорему).

Запамти

Бројеви x_1 и x_2 су решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ако и само ако

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ако је једначина у нормалном облику $x^2 + px + q = 0$, тада важи $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$.

Пример 3

Користећи Вијетове формуле провери да ли су

- а) 2 и -3 решења једначине $x^2 + 7x - 12 = 0$;
 б) $1 + \sqrt{2}$ и $1 - \sqrt{2}$ решења једначине $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Решење:

Да би дати пар бројева био пар решења једначине, ти бројеви морају да задовољавају Вијетове формуле.

- а) За једначину $x^2 + 7x - 12 = 0$ треба да $x_1 + x_2 = -p = -7$ и $x_1 \cdot x_2 = q = -12$.
 Пошто је $2 + (-3) = -1 \neq -7$, закључујемо да 2 и -3 нису решења једначине $x^2 + 7x - 12 = 0$.
 б) За ову једначину треба да $x_1 + x_2 = -p = 2$ и $x_1 \cdot x_2 = q = -1$. Пошто је $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 = -p$ и $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1 = q$, $1 + \sqrt{2}$ и $1 - \sqrt{2}$ су решења једначине $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Пример 4

Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$. Докажи да је $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$.

Решење:

Израз $x_1^2 + x_2^2$ допуњујемо до потпуног квадрата додавањем и одузимањем $2x_1x_2$ и добијамо $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Према Вијетовим формулама имамо да је $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, па из претходне једнакости добијамо $x_1^2 + x_2^2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$.

Запамти формулу $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$, тј. $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$.

Задатак 2

Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $3x^2 - 2x + 6 = 0$. Без решавања једначине, одреди вредност израза:

- а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $3x_1 - 5x_1^2 + 3x_2 - 5x_2^2$.

Задаци за вежбање!

- Запиши једначину у нормалном облику и одреди p и q :
 - $2x^2 + 3x - 5 = 0$;
 - $mx^2 - (m+3)x + 2m = 0$.
- Напиши Вијетове формуле за следеће једначине:
 - $3x^2 - 8x + 6 = 0$;
 - $2x^2 - 7x = 0$
 - $x^2 + 6 = 0$;
 - $(m-3)x^2 - (3m+1)x + 2 = 0$;
 - $4mx^2 - x + 2m - 3 = 0$.
- Реши једначине коришћењем Вијетових формула:
 - $x^2 - 8x + 15 = 0$;
 - $x^2 + 7x + 12 = 0$;
 - $x^2 + 8x + 15 = 0$;
 - $2x^2 - 7x + 5 = 0$.
- Применом Вијетових формула утврди да ли је дати пар бројева решење одговарајуће једначине:
 - 2 и 6, $x^2 - 8x + 12 = 0$;
 - 3 и 5, $x^2 - 2x - 15 = 0$;
 - $3 + \sqrt{2}$ и $3 - \sqrt{2}$, $x^2 + 6x + 7 = 0$;
 - 3 и 7, $x^2 - 9x + 12 = 0$.
- Одреди вредност параметра k , тако да збир решења једначине $x^2 + (2k+1)x - 5 = 0$ буде једнак 4. За добијену вредност параметра k одреди решења једначине.
- Коришћењем Вијетових формула одреди вредност параметра k и друго решење једначине:
 - $2kx^2 + kx - 1 = 0$, ако $x_1 = \frac{3}{2}$;
 - $x^2 - 5x + k = 0$, ако $x_1 = -2$;
 - $x^2 - 2bx + k = 0$, ако $x_1 = b - a$.
- За коју вредност параметра m корени једначине $x^2 + 6x - m + 3 = 0$ задовољавају услов $x_1 - x_2 = 0$?
- Без решавања једначине $4x^2 - 3x + 2 = 0$, одреди вредност израза:
 - $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$;
 - $x_1^2 + x_2^2$;
 - $\frac{5}{x_1} + \frac{5}{x_2}$;
 - $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

2.6 САСТАВЉАЊЕ КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ДАТИМ РЕШЕЊИМА. РАСТАВЉАЊЕ КВАДРАТНОГ ТРИНОМА НА ЧИНИОЦЕ

Састављање квадратне једначине са датим решењима

Подсети се!

- $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$ су нуле тринома $x^2 - 7x + 12$, па се он може записати као

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$
- $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$ су решења једначине $x^2 - x - 12 = 0$. Провери да ли је тачна једнакост

$$x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4).$$

Применом Вијетових формула можемо саставити једначину чији ће корени бити x_1 и x_2 .

Наиме, према Вијетовим формулама, x_1 и x_2 су решења једначине

$$x^2 + px + q = 0, p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2.$$

Пример 1

Састави квадратну једначину чија су решења $x_1 = -3, x_2 = 5$.

Решење:

Применом Вијетових формула одређујемо коефицијенте p и q :

$$p = -(x_1 + x_2) = -((-3) + 5) = -2,$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot 5 = -15.$$

Тражена једначина је $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Пример 2

Састави квадратну једначину чија су решења

$$\text{а) } x_1 = 3 - 4i, x_2 = 3 + 4i; \quad \text{б) } x_1 = 2 - \sqrt{3}, x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Решење:

Применом Вијетових формула одређујемо коефицијенте p и q .

$$\text{а) } p = -(x_1 + x_2) = -((3 - 4i) + (3 + 4i)) = -6, q = x_1 \cdot x_2 = (3 - 4i) \cdot (3 + 4i) = 25.$$

Тражена једначина је $x^2 - 6x + 25 = 0$.

$$\text{б) } p = -((2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})) = -4, q = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1,$$

Тражена једначина је $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Задатак 1

Састави квадратну једначину чија су решења

$$\text{а) } x_1 = 0,75, x_2 = -\frac{1}{3}; \quad \text{б) } x_1 = a - b, x_2 = a + b.$$

Запамти!

Ако су бројеви x_1 и x_2 решења квадратне једначине, онда је једначина облика

$$x^2 + px + q = 0, \text{ где је } p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2.$$

Ако вредности $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1 \cdot x_2$ заменимо у једначини $x^2 + px + q = 0$ чија су решења x_1 и x_2 , добијамо једначину $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$, тј. једначину

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Дакле, ако су бројеви x_1 и x_2 решења квадратне једначине, онда једначину можемо саставити и применом једнакости $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

На пример, ако су $x_1 = -3$, $x_2 = 5$ решења квадратне једначине, онда је једначина $(x + 3)(x - 5) = 0$, тј. $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Пример 3

Састави квадратну једначину тако да је збир њених корена -5 , а производ корена 6 .

Решење:

Ако је збир корена -5 , а њихов производ 6 , тада за коефицијенте нормалног облика једначине добијамо $p = -(x_1 + x_2) = 5$ и $q = x_1 \cdot x_2 = 6$. Тражена једначина је $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Пример 4

За коју вредност параметра m је један корен једначине $x^2 - 9x + m = 0$ два пута већи од другог?

Решење:

Према Вијетовим формулама, $x_1 + x_2 = 9$. Ако заменимо $x_1 = 2 \cdot x_2$ добијамо $2 \cdot x_2 + x_2 = 9$, тј. $x_2 = 3$, а $x_1 = 2 \cdot 3 = 6$. Сада је у једначини $q = m$, а према Вијетовим формулама $q = x_1 \cdot x_2 = 18$. Одатле следи да је вредност параметра m 18 .

Пример 5

Одреди вредност параметра m , тако да решења једначине $mx^2 - (2m + 2)x + 1 = 0$ задовољавају једнакост $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4$.

Решење:

Према Вијетовим формулама добијамо $x_1 + x_2 = \frac{-(2m+2)}{m}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m}$, $m \neq 0$. Из $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4$

слиди $x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = 4$, па заменом добијамо $\frac{1}{m} \cdot \frac{2m+2}{m} = 4$ или $4m^2 - 2m - 2 = 0$, тј. $2m^2 - m - 1 = 0$, чија су решења $m = 1$ и $m = -\frac{1}{2}$.

Разлагање квадратног тринома на линеарне чиниоце

Подсети се!

- Како гласе Вијетове формуле за квадратну једначину?
- За једначину $2x^2 - 4x + 3 = 0$ имамо:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}.$$

Активност

Разложи го квадратни трином $x^2 - 7x + 12$ на линеарне чиниоце:

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = x(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 4).$$

Уочи да су $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$ нуле датог квадратног тринома, односно решења једначине $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Ако су x_1 и x_2 нуле квадратног тринома $ax^2 + bx + c$, тј. решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, онда, према Вијетовим формулама, важи $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, па је

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 \right) = \\ &= a \left(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 \right) = a \left(x(x - x_1) - x_2(x - x_1) \right) = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Запамти!

Ако су x_1 и x_2 нуле квадратног тринома $ax^2 + bx + c$, онда је растављање тог тринома на линеарне чиниоце дато једнакошћу $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Пример 6

Растави трином на чиниоце:

а) $2x^2 + 6x - 8$; б) $2x^2 - 3x - 5$.

Решење:

а) Одређујемо нуле тринома $x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm 10}{4}$, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Значи, $2x^2 + 6x - 8 = 2(x + 4)(x - 1)$.

б) $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 7}{4}$, $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -1$, следи

$$2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1) = (2x - 5)(x + 1).$$

Задатак 2

Разложи трином на линеарне чиниоце:

а) $2x^2 + 7x - 15$; б) $x^2 - 2x - 2$.

Једнакост за растављање квадратног тринома на линеарне чиниоце можемо користити и за састављање квадратне једначине са датим решењима. Наиме, из једнакости $ax^2 + bx + c = 0$, пошто $a \neq 0$ следи $a(x - x_1)(x - x_2)$. На пример, једначину чија су решења $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -3$ можемо је одредити помоћу $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 0$, односно $x^2 + 3x - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$, па је тражена једначина $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Подсети се!

Да бисмо скратили дати алгебарски разломак, треба бројилац и именилац разложити на чиниоце.

Пример 7

Скрати разломак $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 12}$

Решење:

За бројилац имамо $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, да бисмо именилац разложили на чиниоце, одредићемо решења $x^2 - x - 12 = 0$. Добио смо:

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

па $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, па $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$. Одатле следи

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 12} = \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 4)} = \frac{x + 3}{x - 4}.$$

Уочимо да се разломак може скратити само ако је $x + 3$ различито од 0.

Задатак 3

Скрати разломак а) $\frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$; б) $\frac{x^2-x-6}{x^2-8x+15}$.

Задаци за вежбање!

У задацима (1–5) састави квадратну једначину чији су корени:

- | | | |
|---|--|--|
| 1. а) -2 и 3 ; | б) 7 и -1 ; | в) -5 и -1 . |
| 2. а) $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$; | б) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{3}{4}$; | в) $-\frac{3}{4}$ и $-\frac{1}{3}$. |
| 3. а) $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$; | б) $-4\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$; | в) $6-\sqrt{2}$ и $6+\sqrt{2}$. |
| 4. а) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; | б) $3-2i$ и $3+2i$; | в) $\frac{1-2i}{3}$ и $\frac{1+2i}{3}$. |
| 5. а) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$; | б) $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a-b}$. | |

6. Састави квадратну једначину тако да је збир њених решења -1 , а производ решења је $-2\frac{1}{2}$.

7. За коју вредност параметра m је један корен једначине $2x^2 - 3x + m - 2 = 0$ два пута мањи од другог?

8. Одреди вредност параметра k тако да корени једначине $2x^2 - 4x + k = 0$ задовољавају једнакост $x_1^2 + x_2^2 = 12$.

9. Састави квадратну једначину са реалним коефицијентима ако је један од њених корена:

- а) $2-3\sqrt{2}$; б) $2-3i$.

10. Разложи трином на линеарне чиниоце:

- а) $x^2 - 4x - 21$; б) $3x^2 + 5x - 2$; в) $x^2 - 4x + 1$.

11. Скрати разломак:

- а) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$; б) $\frac{x^2+8x+16}{x^2+7x+12}$; в) $\frac{3x^2+21x}{x^2+3x-28}$.

2.7 РАЗЛОМАЧКО-РАЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Подсети се!

- Како се одређује најмањи заједнички садржалац бројева и полинома.
- $\text{НЗС}(x - 2, x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)$.
- $\text{НЗС}(x + 3, x - 1, x^2 - 9) = (x + 3)(x - 3)(x - 1)$.
- Разломачко рационални разломака има облик $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где су $P(x)$ и $Q(x)$ два полинома $Q(x) \neq 0$.

Активност

Одреди НЗС за $x^2 + 2x - 1$ и $x^2 - 1$.

Решавање квадратних једначина омогућава решавање једначина које се одређеним трансформацијама своде на квадратне једначине.

Запамти!

Једначина у којој се променљива, тј. непозната, садржи и у имениоцу неког дробноразломачко-рационалног разломка назива се **разломачко-рационална једначина**. Ове једначине су дефинисане за вредности непознате за које су сви имениоци у једначини различити од нуле.

Пример 1

$\frac{3(x-5)}{x-1} = 3x+8$ је разломачко-рационална једначина која је дефинисана за све x за које $x - 1 \neq 0$, тј. $x \neq 1$. Значи, дефиниционо подручје (скуп допуштених вредности) једначине је $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Најчешће поступак за решавање разломачко рационалних једначина је следећи:

- имениоци разломака се разлажу на чиниоце;
- одређује се дефиниционо подручје једначине;
- множи се са НЗС за имениоце разломака;
- одређују се решења добијене једначине;
- проверава се која од добијених решења су решења почетне (разломачко рационалне) једначине, тј. која од добијених решења припадају дефиниционом подручју једначине.

Пример 2

Решите једначине:

$$\text{а) } \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x} = 3; \quad \text{б) } \frac{-2x+7}{x-2} = x-2; \quad \text{в) } \frac{3x}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = \frac{2x^2-6x}{x^2-1}.$$

Решење:

- а) Једначина је дефинисана за $x-1 \neq 0$ и $x \neq 0$, тј. $x \neq 1$ и $x \neq 0$. Значи, дефинициони скуп једначине је $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Имениоци у овој једначини су $x-1$ и x а њихов НЗС је $x(x-1)$. Једначину множимо са НЗС-ом именилаца и добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x} &= 3 / \cdot x(x-1) \\ 3x + 5(x-1) &= 3x(x-1) \\ 3x^2 - 11x + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Решења добијене једначине су $x_1 = \frac{11-\sqrt{61}}{6}$, $x_2 = \frac{11+\sqrt{61}}{6}$. И пошто оба решења припадају скупу D , следи да су оба решења решења дате разломачко-рационалне једначине.

- б) Једначина је дефинисана за $x-2 \neq 0$, односно $x \neq 2$, па је дефинициони скуп једначине

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. У једначини постоји само један именилац, па једначину множимо са $x-2$.

$$\begin{aligned} \frac{-2x+7}{x-2} &= x-2 / \cdot (x-2) \\ -2x+7 &= (x-2)^2 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Решења добијене квадратне једначине су -1 и 3 . Пошто се оба решења налазе у дефиниционом скупу разломачко-рационалних једначина, оба решења су решења дате једначине.

- в) Једначина је дефинисана за $x-1 \neq 0$ и $x+1 \neq 0$ односно $x \neq 1$ и $x \neq -1$. Значи, дефинициони скуп једначине је $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Једначину множимо са НЗС $(x-1)(x+1)(x^2-1) = x^2-1$ и добијамо да је :

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-1} + \frac{4x}{x+1} &= \frac{2x^2-6x}{x^2-1} / \cdot (x^2-1) \\ 3x(x+1) + 4x(x-1) &= 2x^2-6x \\ 5x^2 + 5x &= 0 \end{aligned}$$

Решења добијене квадратне једначине су $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Пошто $x_2 = -1$ не припада дефиниционом скупу разломачко-рационалне једначине, решење једначине је само $x = 0$.

Задатак 1

Решите једначине:

$$\text{а) } \frac{6}{x^2-1} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{2}{x-1}; \quad \text{б) } \frac{3x-5}{2x-1} = \frac{2x-3}{x+1}.$$

Пример 3

Решите једначину $\frac{2x+1}{x^2+x-6} - \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{6}{x^2-9}$.

Решење:

Најпре имениоце растављамо на чиниоце:

Решења једначине $x^2 + x - 6 = 0$ су -3 и 2 , а једначине $x^2 - 5x + 6 = 0$ су 2 и 3 . Одатле је растављање именилаца на чиниоце:

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3), \quad x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \quad x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Једначина је дефинисана за $x \neq 2$, и $x \neq -3$, и $x \neq 3$. Према томе, дефинициони скуп једначине је $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2, 3\}$. Једначину множимо са НЗС $((x - 2)(x + 3), (x - 2)(x - 3), (x - 3)(x + 3) = (x - 2)(x - 3)(x + 3))$ и добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^2+x-6} - \frac{x-1}{x^2-5x+6} &= \frac{6}{x^2-9} \\ \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} - \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} &= \frac{6}{(x-3)(x+3)} \quad / \cdot (x-2)(x-3)(x+3) \\ (2x+1)(x-3) - (x-1)(x+3) &= 6(x-2) \\ x^2 - 13x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

Решења добијене квадратне једначине су $x_1 = 1$, $x_2 = 12$. Оба решења припадају дефиниционом скупу разломачко рационалне једначине, па су 1 и 12 решења дате једначине.

Задатак 2

Решите једначину $\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} - \frac{x-4}{2x-4} = 0$.

Пример 4

Брзина моторног чамца у мирној води је 15 km/h . Ако се чамац креће низводно, растојање од 72 km пређе за 2 часа мање него ако се креће узводно. Одреди брзину реке

Решење:

Ако је брзина реке $x \text{ km/h}$, онда је брзина чамца низводно $15 + x$, а узводно $15 - x$. Из формуле $s = v \cdot t$ следи да је $72 = (15 + x) \cdot t_1$ и $72 = (15 - x) \cdot t_2$.

Одатле добијамо $t_1 = \frac{72}{15+x}$ и $t_2 = \frac{72}{15-x}$. Пошто је $t_2 - t_1 = 2$, добијамо $\frac{72}{15-x} - \frac{72}{15+x} = 2$.

Након множења једначине НЗС-ом именилаца добијамо

$$72(15+x) - 72(15-x) = 2(15+x)(15-x),$$

уствари

$$x^2 + 72x - 225 = 0.$$

Решења ове једначине су $x_1 = 3$, $x_2 = -75$, али $x_2 = -75$ не може бити решење задатка, јер је x брзина и не може имати негативну вредност. Значи, брзина реке је 3 km/h .

Пример 5

Један штедиша добио је 15 евра камате за одређену суму новца орочену на једну годину. Затим је на ту суму додао још 85 евра и орочио је још једну годину по истој каматној стопи. По истеку те године штедиша је на рачуну имао укупно 420 евра. Колика је била почетна сума новца и колики је проценат годишње камате?

Решење:

Нека је уложена (почетна) сума новца K , а каматна стопа је $x\%$. Тада $\frac{K \cdot x}{100} = 15$, односно $K = \frac{100 \cdot 15}{x}$.

Значи, на почетку друге године штедиша је на рачуну имао $\frac{1500}{x} + 15 + 85 = \frac{1500}{x} + 100$ евра, а

на крају друге године је имао $\left(\frac{1500}{x} + 100\right) + \left(\frac{1500}{x} + 100\right) \cdot \frac{x}{100}$. Знамо да је на крају друге године

штедиша на рачуну имао 420 евра, па добијамо следећу једначину:

$$\left(\frac{1500}{x} + 100\right) + \left(\frac{1500}{x} + 100\right) \cdot \frac{x}{100} = 420.$$

Из ове разломачко рационалне једначине добија се квадратна једначина $x^2 - 305x + 1500 = 0$, чија су решења $x_1 = 5$, $x_2 = 300$, што значи да је каматна стопа 5%, а сума уложена на почетку била

$\frac{1500}{5} = 300$ евра. Друго решење не може бити решење задатка јер камата не може да износи 300 %.

Задачи за вежбање!

1. 1. Реши једначине:

а) $8x + 11 + \frac{7}{x} = \frac{21 + 65x}{7}$;

б) $\frac{6}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} = 2 - \frac{x + 4}{x + 1}$;

в) $\frac{3x + 5}{x - 2} - \frac{x - 2}{x + 2} = -\frac{3}{2}$.

г) $\frac{2x}{x + 1} + \frac{2x}{x - 1} = \frac{16}{3}$;

д) $\frac{2x - 3}{x + 1} = \frac{3x - 5}{2x - 1}$;

ђ) $\frac{5x}{2x^2 - x - 1} + \frac{5}{2x + 1} = \frac{4x - 5}{x^2 - 1}$.

2. Разлика реципрочних вредности два узастопна цела броја је $\frac{1}{30}$. Који су то бројеви?

3. Група ученика треба да прикупи 6000 денара тако да сваки ученик даје једнак износ новца. Двоје ученика су одустала, па су зато преостали морали да доплате још по 150 денара. Колико је ученика било у групи?

4. Један воз пређе растојање од 650 km за три часа мање од другог воза, чија је брзина за 15 km/h мања од брзине првог воза. Одреди брзине оба воза.

2.8 БИКВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Подсети се!

- Ког степена је једначина $x^4 - 9x^2 = 0$?
- Колико решења има ова једначина?
- Провери који од бројева $-3, 3, 4, -4, 0$ су решења једначине!

Активност

Одреди сва решења једначине $x^4 - 9x^2 = 0$.

Пример 1

Одреди решења једначина:

- а) $x^4 = 0$; б) $x^4 - 81 = 0$; в) $x^4 - 16x^2 = 0$.

Решење:

- а) Из $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ следи да су решења ове једначине $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. једначина има четвороструки корен једнак 0.
- б) $x^4 - 81 = 0$ можемо записати као $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$, т.е. $(x - 3)(x + 3)(x - 3i)(x + 3i) = 0$. Значи, решења једначине су $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 3i, x_4 = -3i$, тј. једначина има 4 различита корена, два реална и два комплексна.
- в) Пошто је $x^4 - 16x^2 = x^2(x^2 - 16)$, добијамо једначину $x \cdot x(x - 4)(x + 4) = 0$. Решења једначине су $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = -4$, па једначина има један двоструки корен и два различита реална корена.

Запамти!

Једначина облика $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где су $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$, назива се **биквадратна једначина**.

Да бисмо одредили решења биквадратне једначине $ax^4 + bx^2 + c = 0$, једначину записујемо као $a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$ и уводимо нову променљиву, односно замену $y = x^2$. На тај начин добијамо квадратну једначину по y , а она је $ay^2 + by + c = 0$. Њена решења y_1, y_2 можемо одредити помоћу формуле за решавање квадратне једначине. Затим, да бисмо одредили решења биквадратне једначине, враћамо замену, односно решавамо једначине $x^2 = y_1$ и $x^2 = y_2$, чиме добијамо $x_{1/2} = \pm\sqrt{y_1}$, $x_{3/4} = \pm\sqrt{y_2}$.

Пример 2

Решите једначину $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Решење:

Једначину записујемо у облику $(x^2)^2 - 7x^2 + 12 = 0$ и уводимо замену $y = x^2$. Тиме добијамо квадратну једначину $y^2 - 7y + 12 = 0$. Решења ове једначине су $y_1 = 3$ и $y_2 = 4$. Враћањем замене добијамо $x^2 = 3$ и $x^2 = 4$. Из $x^2 = 3$ следи да је $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, а из $x^2 = 4$ следи да је $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. Значи, једначина има 4 различита реална решења.

Задатак 1

Решите једначину $x^4 - 13x^2 + 12 = 0$.

Задатак 2

Скратите разломак $\frac{x^2 - 9}{x^4 - 13x^2 + 36}$.

Задаци за вежбање!

1. Решите једначине:

а) $10x^4 = 0$; б) $4x^4 - 64 = 0$; в) $x^4 - 9x^2 = 0$.

2. Одредите решења једначина:

а) $\frac{30 - 2x^2}{x^2 - 6} + \frac{5x^2 - 16}{10} = \frac{2x^2 + 3}{5}$; б) $(x^2 - 5)(4x^2 + 5) = 6x^2$.

3. Површина једног правоугаоника је 60 cm^2 , а његова дијагонала је 13 cm . Одредите дужине страница правоугаоника.

4. Саставите биквадратну једначину чија су решења $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$, $x_3 = 4$, $x_4 = -4$.

5. Скратите разломак $\frac{x^4 - 20x^2 + 64}{x^2 + 2x - 8}$.

2.9 СИСТЕМ ЈЕДНЕ ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ И ЈЕДНЕ КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Подсети се!

- Како се решава систем линеарних једначина методом замене.
- Решите систем $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ методом замене.

Активност

Провери који од понуђених уређених парова $(x, y) \in \left\{ (1, 1), (0, 2), (2, 0), \left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right) \right\}$ је решење система $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

Пример 1

Решите систем $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

Решење:

Уочимо да се систем $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ састоји од једне линеарне једначине са две непознате и једне квадратне једначине са истом непознатом. Овај систем можемо решавати исто као и систем две линеарне једначине са две непознате, методом замене.

Наиме, из линеарне једначине изразимо једну променљиву. У датом систему из прве једначине можемо изразити $y = 2 - 2x$. Заменом у квадратној једначини добијамо:

$$x^2 + (2 - 2x)^2 = 4,$$

односно

$$5x^2 - 8x = 0.$$

Добијена квадратна једначина има решења $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{8}{5}$. За $x_1 = 0$ добијамо да је $y_1 = 2 - 2 \cdot 0 = 2$, па је друго решење система $x_2 = \frac{8}{5}$ добијамо да је $y_2 = 2 - 2 \cdot \frac{8}{5} = -\frac{6}{5}$.
Значи, решења система једначина су уређени парови $(2, 0)$ и $\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$.

Запамти!

- Систем $\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \end{cases}$, у којем је барем један од коефицијената a , b или c различит од нуле, представља *општи облик система једне линеарне једначине са две непознате и једне квадратне једначине са две непознате*.
- Овакав систем једначина решава се методом замене, а његова решења су уређени парови.

Пример 2

Решите систем $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ x^2 + xy + y^2 = 9 \end{cases}$.

Решење:

Из линеарне једначине имамо $x = 6 - 3y$ и заменом у квадратној једначини добијамо:

$$(6 - 3y)^2 + (6 - 3y)y + y^2 = 9,$$

односно

$$7y^2 - 30y + 27 = 0.$$

Решења квадратне једначине су $y_1 = 3$ и $y_2 = \frac{9}{7}$. За $y_1 = 3$ добијамо да је $x_1 = 6 - 3 \cdot 3 = -3$, а за

$y_2 = \frac{9}{7}$ добијамо да је $x_2 = 6 - 3 \cdot \frac{9}{7} = \frac{15}{7}$. Значи, решења система једначина су уређени парови

$$(-3, 3) \text{ и } \left(\frac{15}{7}, \frac{9}{7}\right).$$

Задатак 1

Решите системе једначина:

а) $\begin{cases} x \cdot y = 6 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x^2 + 4y + y^2 = 1 \end{cases}$.

Пример 3

Два многоугла имају укупно 15 страница и укупно 40 дијагонала. Који су то многоуглови?

Решење:

Нека је x број страница једног многоугла, а y број страница другог многоугла. Према условима задатка, једна једначина је $x + y = 15$. Број дијагонала у многоуглу са x страница

је $\frac{x(x-3)}{2}$, па је друга једначина $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{y(y-3)}{2} = 40$.

За одређивање броја страница многоуглова добијамо следећи систем једначина

$$\begin{cases} x+y=15 \\ x(x-3)+y(y-3)=80 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y=15 \\ x^2-3x+y^2-3y=80 \end{cases}$$

Из линеарне једначине имамо $x = 15 - y$ и заменом у квадратној једначини добијамо

$$(15 - y)^2 - 3(15 - y) + y^2 - 3y = 80,$$

односно

$$y^2 - 15y + 50 = 0.$$

Решења ове квадратне једначине су $y_1 = 5$ и $y_2 = 10$. За $y_1 = 5$ добијамо да је $x_1 = 10$, а за $y_2 = 10$ се добија да је $x_2 = 5$. Значи, један многоугао има 5 страница, а други 10 страница.

Задачи за вежбање!

1. Реши системе:

а) $\begin{cases} x-3y=-3 \\ 3x^2+2x+3y^2-3=0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y-x=1 \\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{9}{10} \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=2 \\ \frac{y+3}{x}+\frac{x-4}{y}=1 \end{cases}$

2. Реши системе: $\begin{cases} x \cdot y = 3m^2 \\ x + y = 4m \end{cases}$.

- Збир реципрочних вредности једног разломка и његове реципрочне вредности је $\frac{29}{10}$, а збир бројиоца и имениоца разломка је 7. Одреди који је то разломак.
- Један фармер жели да огради башту у облику правоугаоника, али тако да само једна страница не буде ограђена. Он има 40 метара жице за ограду. Такође, жели да површина баште буде 150 m^2 . Пронађи димензије баште.

ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ И УТВРЂИВАЊЕ

- За коју вредност m је једначина $(2m-1)x^2 - 4mx + 3 = 0$ квадратна једначина?
- Запиши следеће једначине у нормалном облику:
 - $3x^2 - 9x + 36 = 0$;
 - $2x^2 = 8x$;
 - $\frac{2}{3}x^2 - 4x + 1 = 0$.
- За које вредности параметра m ће једначина $(m+2)x^2 + m - 5 = 0$ имати реална решења?
- Одреди природу решења једначина:
 - $x^2 + x - 3 = 0$;
 - $3x^2 + 2x + 1 = 0$;
 - $4x^2 - 40x + 25 = 0$;
 - $x^2 - 8x + 15 = 0$.
- Реши једначине:
 - $(x+1)^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-1)$;
 - $x^2 - 10 = 3(x^2 - 4)$;
 - $\frac{x^2}{4} - 6x = 0$;
 - $\frac{2x^2 - 9x}{2} = \frac{5x^2 + 7x}{4}$;
 - $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
 - $x^2 - 2x - 15 = 0$.
- Реши једначину $x^2 - (a+b)x + ab = 0$.
- За које вредности параметра k једначина $kx^2 + 2kx + k + 1 = 0$
 - ће имати двоструки корен
 - ће имати два различита реална решења
 - неће имати реална решења.
- Применом Вијетових формула састави квадратну једначину чија су решења
 - $x_1 = -2$ и $x_2 = -7$;
 - $x_1 = 3 + \sqrt{5}$ и $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.
- Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $3x^2 - 2x + 6 = 0$. Без решавања једначине одреди вредност израза $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$.
- Разложи трином на линеарне множиоце:
 - $2x^2 - \frac{22}{3}x + 4 = 0$;
 - $2x^2 + 5x - 3 = 0$.
- Без коришћења Вијетових формула састави квадратну једначину чија су решења -2 и 6 .
- Скрати разломке
 - $\frac{x^2 - x - 12}{(x+3)^2}$;
 - $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1}$.
- Реши једначине:
 - $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+2} = 1$;
 - $\frac{x+5}{5-x} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{100}{25-x^2}$;
 - $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = 2\frac{1}{6}$.
- Реши једначине:
 - $12x^4 = 0$;
 - $5x^4 = 125$;
 - $x^4 - 36x^2 = 0$.
- Одреди решења једначина:
 - $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$;
 - $(x^2 - 4x + 3)^2 + 8x(x^2 + 3) + 12 = 0$.

16. Скрати разломак $\frac{x^4-1}{x^4-5x^2+4}$.

17. Реши системе једначина:

а) $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2-29=0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 3x^2+2y^2+3x-4y=-2xy \end{cases}$

18. Српа ручно израђује капе и продаје их. Свој дневни приход од продаје капа израчунава формулом $x(x-47)$, где је x цена једне капе у еврима. Српа жели да оствари дневни приход од 150 евра. По којој цени треба да продаје капе??

19. Правоугаони плац, широк 6m и дугачак 4m, окружен је путем. Ширина пута је свуда једнака. Ако пут и плац имају једнаку површину, колика је ширина пута?

20. Произвођач малих кућних апарата закључио је да се профит P (у доларима) остварен производњом x микроталасних пећница недељно може израчунати формулом $P = \frac{1}{10}x(300-x)$ под условом $0 \leq x \leq 200$. Колико пећница треба произвести у датој недељи да би се остварио профит од 1250 долара?

21. Јарбол је причвршћен са супротних страна са две сајле, од којих је свака 2 метра дужа од јарбола. Растојање између тачака где су сајле причвршћене за земљу једнако је дужини једне сајле. Колика је висина јарбола?



22. Део ученика једног одељења учествовао је на шаховском турниру. Укупан број одиграних мечева био је 253.

а) Колико ученика је учествовало на турниру?

б) Које решење квадратне једначине ће бити одбачено и зашто?

23. Један трговачки путник вози сталном брзином од града А до града Б, који су удаљени 120 km. Затим повећава брзину за 10 km/h и том брзином вози 150 km од града Б до Скопља. Ако је друга етапа његовог путовања трајала 6 минута дуже од прве етапе, којом брзином је возио на путу од А до Б

24. Одреди два броја чији је збир 20, а збир њихових квадрата 272.

25. Производ две цифре двоцифреног броја је 8, а при дељењу тог броја збиром његових цифара добија се 4. Одреди број.

КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА, КВАДРАТНА НЕЈЕДНАЧИНА И СИСТЕМ КВАДРАТНИХ НЕЈЕДНАЧИНА СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ

Квадратна функција је једна од најважнијих функција у алгебри и представља природни наставак изучавања квадратних једначина. У овој теми упознаћемо се са својствима ове функције, обликом њеног графика, као и са квадратним неједначинама и њиховим решавањем. Квадратне функције и квадратне неједначине су кључни елементи за графичко и нумеричко истраживање параболичких модела, омогућавајући дубље разумевање нелинеарних појава. Изучавање квадратних функција омогућава разумевање параболе, која представља њихов график, и њених трансформација, док нам решавање квадратних неједначина омогућава одређивање интервала на којима је квадратна функција већа или мања од неке вредности.

Квадратна функција и решавање квадратних неједначина имају широку примену у решавању многих практичних проблема. На пример, у физици за моделирање путања пројектила и висине пада као функције времена, у економији за анализу трошкова и одређивање максималних и минималних трошкова.

3.1 КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА. ГРАФИК ФУНКЦИЈЕ $f(x) = x^2$

Подсети се!

- Функција облика $y = ax + b$, где су a и b реални бројеви, а x независна променљива, назива се линеарна функција.
- Област дефинисаности D линеарне функције је скуп реалних бројева, тј. $D = \mathbb{R}$.
- Скуп вредности V линеарне функције је такође скуп реалних бројева, тј. $D = \mathbb{R}$.
- График линеарне функције је права. За цртање графика линеарне функције довољно је одредити две тачке које му припадају.

Активност

Табеларно прикажи вредности функције $f(x) = x^2$, за $x \in D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
Добијене уређене парове $(x, f(x))$ прикажи графички у координатном систему.

Запамти!

- Функција облика $f(x) = ax^2 + bx + c$, где су a , b и c реални бројеви и $a \neq 0$, назива се **квадратна функција**.
- Област дефинисаности квадратне функције је $D_f = \mathbb{R}$.
- Често, уместо $f(x) = ax^2 + bx + c$, пишемо $y = ax^2 + bx + c$.
- График квадратне функције је скуп свих тачака $G_f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = ax^2 + bx + c\}$.
- Крива која представља график квадратне функције назива се **парабола**.

Пример 1

Одреди коефицијенте a , b и c функције $f(x) = ax^2 + bx + c$, ако $f(0) = 0$, $f(1) = 5$, $f(2) = 16$.

Решење:

Заменом одговарајућих вредности променљиве x у формулу функције добијамо $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$, $f(2) = 4a + 2b + c$, односно добијамо следећи систем једначина

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 16 \end{cases}, \text{ Решење овог система је } a = 3, b = 2 \text{ и } c = 0. \text{ Тражена функција је } f(x) = 3x^2 + 2x.$$

Задатак 1

Одреди квадратну функцију $f(x) = x^2 + bx + c$, чији график садржи тачке $A(-1, 0)$ и $B(4, 0)$.

Пример 2

За које вредности параметра m дата функција представља квадратну функцију:

а) $f(x) = 4x^2 + (m - 3)x$; б) $f(x) = (m + 5)x^2 - 2x - 7$.

Решење:

Да би функција била квадратна, мора бити испуњен услов $a \neq 0$.

а) У функцији $f(x) = 4x^2 + (m - 3)x$, коефицијент уз $a = 4 \neq 0$.

Према томе, вредност параметра m не утиче на то да ли је функција квадратна, па је $m \in \mathbb{R}$.

б) У функцији $f(x) = (m + 5)x^2 - 2x - 7$, коефицијент уз $a = (m + 5)$.

Према услову за квадратну функцију $a \neq 0$, имамо $m + 5 \neq 0$, односно $m \neq -5$.

- Ако је $b = c = 0$, онда квадратна функција има облик $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$.
- Ако је $a = 1$, $b = c = 0$, добија се најједноставнија квадратна функција $y = x^2$.

Пример 3

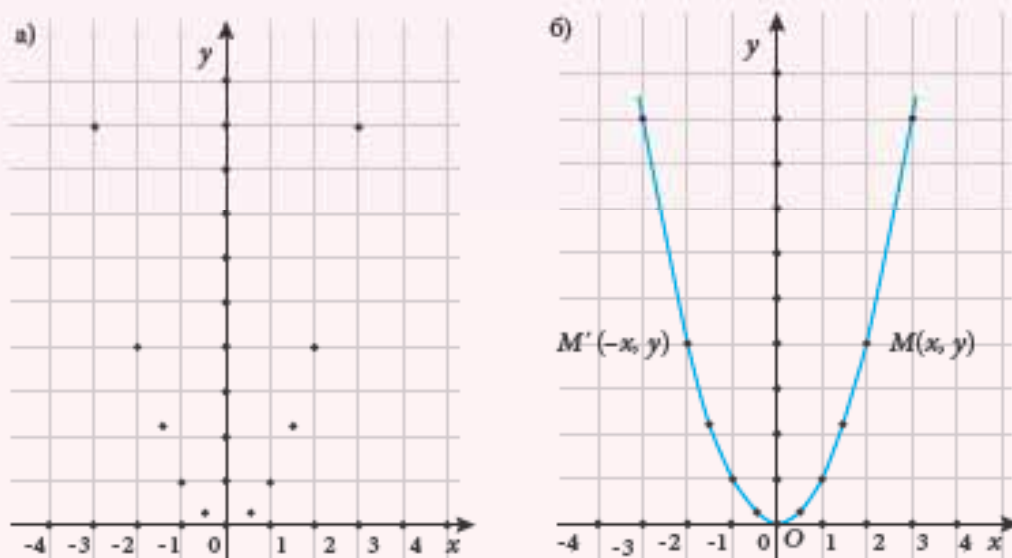
За функцију $y = x^2$ направи табелу вредности за $x \in \{-3; -2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 3\}$. Нацртај одговарајуће тачке у координатном систему и повежи их да би добио геометријски изглед графика функције.

Решење:

Барана табела је:

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
x^2	9	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	9

Из табеле 3 можемо закључити да су $(-3, 9)$, $(-2, 4)$, $(-1,5, 2,25)$, $\dots$, $(1,5, 2,25)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$ тачке графика функције $y = x^2$. Ове тачке су представљене у координатном систему датом на цртежу 1а). Што више тачака графика унесемо у координатни систем, добићемо бољу представу о геометријском изгледу графика.



Цртеж 1

- Ако се у координатни систем унесу све тачке (x, x^2) , за $x \in \mathbb{R}$ са графика функције $y = x^2$ тачке ће образовати параболу (слика 1б).
- Координатни почетак $O(0, 0)$ је најнижа тачка графика. Ова тачка је *теме* параболе.
- Можемо уочити да је за сваку тачку $M(x, y)$ параболе $\{(x, y) | y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$ и тачка $M'(-x, y)$, која је симетрична тачки M у односу на y -осу, такође на параболу. То значи да је y -оса оса симетрије ове параболе.

Задаци за вежбање!

1. Која је од датих функција квадратна:

а) $f(x) = x^2 - 2x^2$;

б) $f(x) = 5x^2$;

в) $f(x) = x(2x - 3)$;

г) $f(x) = 2 - 3x - x^2$;

д) $f(x) = -2x + 3x^2 - 5$

2. За које вредности параметра m је дата функција квадратна:

а) $f(x) = 2x^2 - (m+1)x + 7$;

б) $f(x) = (m-3)x^2 + x + 1$;

в) $f(x) = (m^2 - 9)x^2 - 4x - 5 + m$.

3. Нека је $f(x) = 2x^2$.

а) Препиши и попуни табелу:

x	-2,5	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	2,5
x^2									

б) Нацртај график функције и помоћу графика упореди:

• $f(-4)$ и $f(-2)$;

• $f(-4)$ и $f(2)$;

• $f(x_1)$ и $f(x_2)$ ако $x_1 < x_2 < 0$;

• $f(x_1)$ и $f(x_2)$ ако $0 < x_1 < x_2$.

4. Дата је функција $f(x) = -x^2 + bx + c$. Одреди вредности b и c , ако је

а) $f(1) = -3, f(0) = 1$;

б) $f(-2) = -10, f(2) = -6$.

5. Одреди функцију $f(x) = ax^2 + bx + c$, ако је $f(1) = 2, f(-2) = 29, f(2) = 5$.6. Одреди параметар m тако да график функције $f(x) = 2x^2 - (m+1)x + 1$ пролази кроз тачку $(-1, 5)$.7. Докажи да за функцију $f(x) = x^2 + x + k$ важи $f(k-1) = k^2$.8. Одреди функцију $f(x) = ax^2 + c$, ако је

а) $f(1) = 0$ и $f(-2) = 3$;

б) $f(0) = -1$ и $f(4) = 12$.

3.2 ГРАФИК ФУНКЦИЈА

$$f(x) = ax^2 \text{ И } f(x) = ax^2 + c$$

Подсети се!

- Како се назива крива која представља график функције $y = x^2$?
- Која тачка је теме параболе $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$?
- Која права је оса симетрије параболе $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$?

Пример 1

Нацртај графике датих функција у истом координатном систему:

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x^2$, $h(x) = \frac{1}{3}x^2$ б) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = -3x^2$.

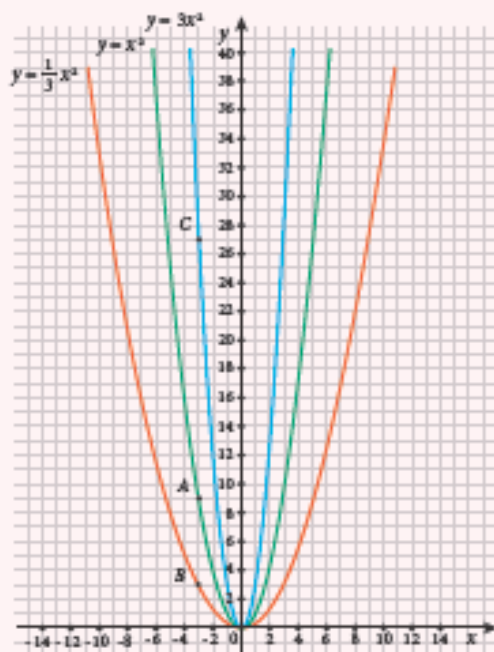
Решење:

- а) Бирамо неколико вредности променљиве x и израчунавамо вредности функција како бисмо одредили неколико тачака њихових графика.

x	-3	-1	0	1	3
x^2	9	1	0	1	9
$3x^2$	27	3	0	3	27
$\frac{1}{3}x^2$	3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3

Користећи податке из табеле и повезујући добијене тачке на графицима ове три функције, графички представљамо функције (види слику 1).

Три означене тачке A , B и C су тачке графика ових трију функција добијене за $x = -3$ (код све три тачке x -координата је -3). Из y -координата ових трију тачака можемо уочити да се за веће позитивне вредности коефицијента уз x^2 (коефицијента a у квадратној функцији) добијају и веће y -координате (ординате) за исту вредност x ($x \neq 0$).

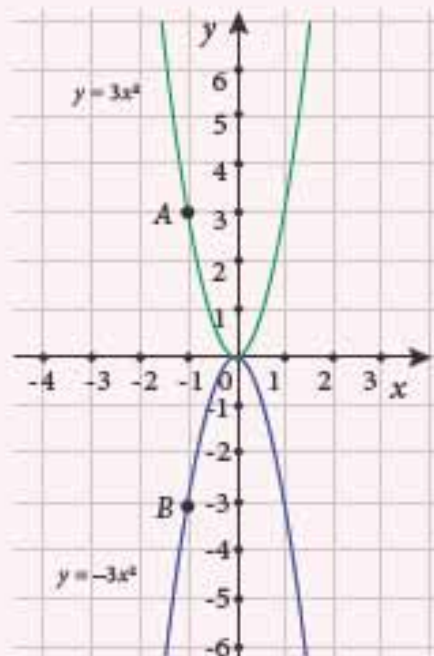


$$= \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$$

б) Табела вредности ових двеју функција за исте вредности променљиве x је

x	-3	-1	0	1	3
$3x^2$	27	3	0	3	27
$-3x^2$	-27	-3	0	-3	-27

На цртежу су функције приказане графички. Можемо уочити да су ординате тачака A и B супротни бројеви. То важи за све тачке графика за које је $x \neq 0$. То показује да се график функције $y = -3x^2$ може добити од графика функције $y = 3x^2$ рефлексијом у односу на x -осу.



Запамти!

- График функције $y = ax^2$, $a \neq 0$ је крива која се назива **парабола**.
- Најнижа тачка графика (када је $a > 0$), односно највиша тачка графика (када је $a < 0$) назива се **теме параболе**.
- Теме параболе која је график функције $y = ax^2$ је координатни почетак.
- Ако је $a > 0$, онда се са повећањем вредности коефицијента a повећавају и ординате тачака графика функције $y = ax^2$ за исту вредност променљиве x , тј. како се повећава вредност a , график је све стрмији, односно све ближи y -оси.
- Ако је $a > 0$, онда је парабола отворена нагоре, а ако је $a < 0$, онда је парабола отворена надолу.
- За функцију $y = ax^2$, $a \neq 0$ важи $f(-x) = f(x)$, што значи да је график функције симетричан у односу на y -осу.

Задатак 1

Нацртај графике датих функција у истом координатном систему.

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \frac{1}{2}x^2$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

Подсети се!

Ако је A е тачка со координатама $(1, 2)$, одреди координате тачке B која се добија транслацијом тачке A за 2 јединице нагоре тачке C која се добија транслацијом тачке A за 5 јединица надолу.

Пример 2

Нацртај у истом координатном систему графике датих функција

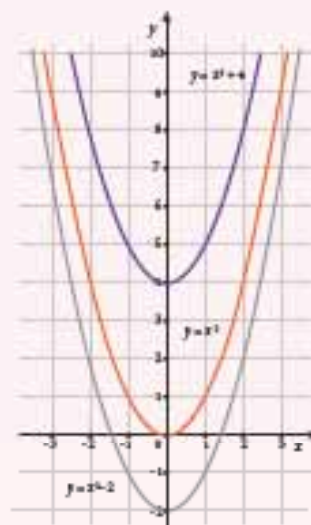
$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 4, \quad h(x) = x^2 - 2,$$

и уочи везу између њихових графика.

Решење:

Најпре правимо табелу вредности за дате функције. Затим помоћу добијених тачака цртамо параболу које су графици функција (цртеж 2).

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 4$	$h(x) = x^2 - 2$
-2	4	$4 + 4 = 8$	$4 - 2 = 2$
-1	1	$1 + 4 = 5$	$1 - 2 = -1$
0	0	$0 + 4 = 4$	$0 - 2 = -2$
1	1	$1 + 4 = 5$	$1 - 2 = -1$
1,5	2,25	$2,25 + 4 = 6,25$	$2,25 - 2 = 0,25$
3	9	$9 + 4 = 13$	$9 - 2 = 7$



Ако упоредимо вредности функција $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^2 + 4$, можемо уочити да је за сваку вредност променљиве x , вредност $g(x)$ за 4 већа од вредности $f(x)$. Аналогно, $h(x)$ је за 2 мања од $f(x)$.

Одатле следи да се график функције $g(x) = x^2 + 4$ може добити померањем, односно транслацијом графика функције $f(x) = x^2$ за 4 јединице нагоре.

Дакле, график функције $g(x) = x^2 + 4$ је параболу симетрична у односу на y -осу, чија је најнижа тачка, тачка $(0, 4)$ односно теме параболу.

Аналогно, график функције $h(x) = x^2 - 2$ је параболу симетрична у односу на y -осу, која се добија померањем, односно транслацијом графика функције $f(x) = x^2$ за 2 јединице надолу. Теме ове параболу је тачка $(0, -2)$.

Задатак 2

Нацртај у истом координатном систему графике функција $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$, $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ и $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}$ и уочи нека њихова својства.

Запамти!

График функције $y = ax^2 + c$ је парабола са теменом $T(0, c)$. Добија се транслацијом параболе $y = ax^2$ за c јединица нагоре ако је $c > 0$, за $|c|$ јединица надоле ако је $c < 0$.

Својства функције $f(x) = ax^2 + c$, $a \neq 0$:

- Функција је дефинисана за све реалне бројеве $D_f = \mathbb{R}$.
- Теме параболе је $T(0, c)$.
- Ако је $a > 0$, тада је теме $T(0, c)$ најнижа тачка графика, тј. $f(0) = c$ је најмања вредност функције. Одатле следи да је skup вредности функције $V_f = [c, +\infty)$.
Ако је $a < 0$, теме је највиша тачка графика тј. $f(0) = c$ је највећа вредност функције. Значи, skup вредности функције је $V_f = (-\infty, c]$.
- Из претходног следи да функција $f(x) = ax^2 + c$, $a \neq 0$ у темну графика (параболе) има најмању или највећу вредност, тј. екстремну вредност.

Наиме,

ако је $a > 0$, $y_{\min} = c$ за $x = 0$,

ако је $a < 0$, $y_{\max} = c$ за $x = 0$.

- Оса симетрије графика функције (параболе) је y -оса.

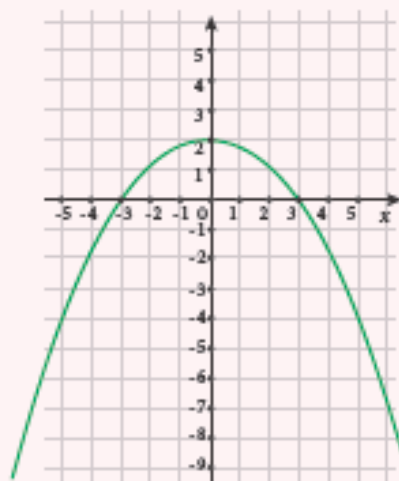
Пример 3

Запиши својства функције $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$.

Решење:

- Дефинициона област функције је $D_f = \mathbb{R}$.
- Скуп вредности функције је $V_f = (-\infty, 2]$.
- Теме параболе је тачка $T(0, 2)$.
- Из $a = -\frac{1}{4} < 0$ следи да функција има максимум $y_{\max} = 2$ за $x = 0$.
- График функције је симетричан у односу на y -осу.

График функције је дат на цртежу, одакле се може уочити да се овај график добија рефлексijом графика $y = \frac{1}{4}x^2$ у односу на x -осу, а затим транслацијом добијене параболе за 2 јединице нагоре.

**Задатак 3**

Запиши својства функције $y = -x^2 - 2$. Рефлексijом и транслацијом графика које функције можеш добити график $y = -x^2 - 2$.

Задатак 4

- а) Направи табелу вредности функције $y = \frac{1}{2}x^2$ за пет различитих вредности независне променливе x .
- б) Користећи табелу, скицирај график функције $y = \frac{1}{2}x^2$.
- в) Користећи график $y = \frac{1}{2}x^2$, скицирај го график $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ и наведи својства те функције $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.

Задачи за вежбање!

Нацртај графике датих функција тако што ћеш најпре скицирати график прве функције, а графике друге две добити од графика прве функције. (Задачи 1-3).

1. $y = x^2$, $y = x^2 - 2$, $y = x^2 + 2$;
 2. $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 1$;
 3. $y = -x^2$, $y = 3 - x^2$, $y = -4 - x^2$.

За дату функцију одреди скуп вредности, теме параболеи екстремну вредност. (Задачи 4-6).

4. а) $y = x^2 + 5$; б) $y = -x^2 + 1$.
 5. а) $y = 3x^2 - 1$; б) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$.
 6. а) $y = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}$; б) $y = \frac{4}{3}x^2 - 2$.

7. Која функција се добија ако се ордината сваке тачке графика функције $y = -\frac{2}{3}x^2$

а) смањи за 3; б) повећа за 4?

8. За колико јединица и у ком смеру треба померити параболу $y = ax^2 + 2$ да би се добила параболу:

а) $y = ax^2$; б) $y = ax^2 + 7$; в) $y = ax^2 - 4$?

3.3 КАНОНСКИ ОБЛИК КВАДРАТНЕ ФУНКЦИЈЕ И ГРАФИК $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Подсети се!

- Нека је A тачка са координатама $(1, 4)$. Одреди координате тачака A_1 и A_2 , ако се A_1 добија транслацијом тачке A за 4 јединице улево, а A_2 транслацијом тачке A за 2 јединице удесно?
- Функција $f(x) = ax^2 + bx + c$, где су a , b и c реални бројеви и $a \neq 0$, назива се квадратна функција.
- Које од следећих функција су квадратне?

а) $y = -(x - 3)^2$;
б) $y = 4(x - 1)^2 + 3$;
в) $y = 2(x - 1)^2 - x^2 + 1$.

Пример 1

У истом координатном систему нацртај графике функција

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = (x + 3)^2, \quad h(x) = (x - 2)^2.$$

и уочи везу између добијених графика.

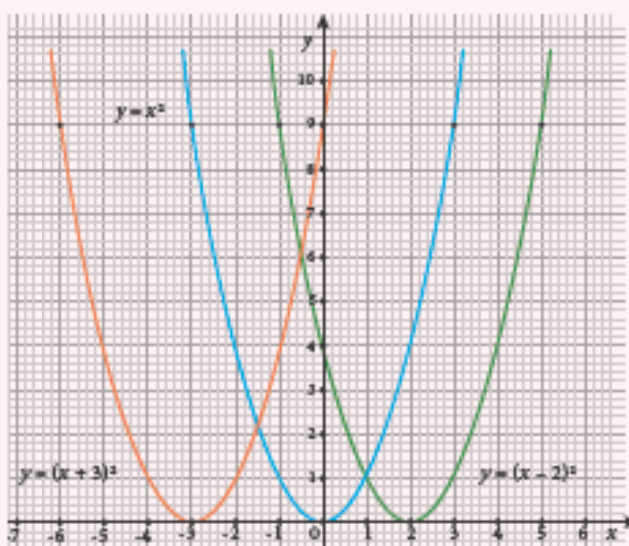
Решење:

Да бисмо добили параболе које представљају графике ових функција, направићемо табелу вредности функција за неколико вредности променљиве x .

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 3)^2$	$h(x) = (x - 2)^2$
-2	4	1	16
-1	1	4	9
0	0	9	4
1	1	16	1
2	4	25	0

Са графика функција уочавамо следеће:

- график функције $y = (x + 3)^2$ добија се транслацијом графика $y = x^2$ дуж x -осе за 3 јединице улево;
- график функције $y = (x - 2)^2$ добија се транслацијом графика $y = x^2$ дуж x -осе за 2 јединице удесно;
- оса симетрије сваке параболе је права која пролази кроз њено теме и паралелна је са y -осом.



Запамти!

- График функције $f(x) = a(x - \alpha)^2$ је парабола са теменом $T(\alpha, 0)$ која се може добити транслацијом параболе $f(x) = ax^2$ дуж x -осе за α јединица удесно ако је $\alpha > 0$, или за $|\alpha|$ јединица улево ако је $\alpha < 0$.
- Оса симетрије параболе $f(x) = a(x - \alpha)^2$ је права $x = \alpha$, која пролази кроз теме параболе и паралелна је са y -осом.

Задатак 1

Нацртај графике функција $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2$ и $g(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^2$.

Пример 2

Нацртај графике функција $y = -3x^2 + 12x - 12$ и испитај њена својства.

Решење:

Функцију можемо записати у облику

$$y = -3(x^2 - 4x + 4), \text{ тј. } y = -3(x - 2)^2.$$

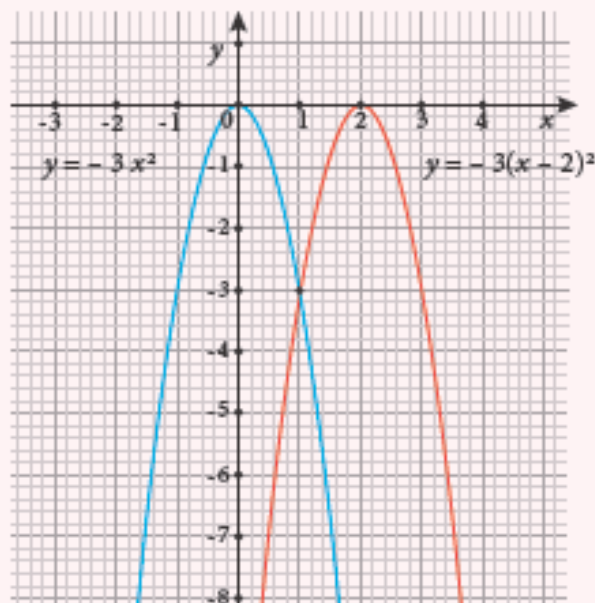
Најпре правимо табелу вредности за неколико вредности функције $y = -3x^2$ и цртамо параболу која представља график ове функције.

График функције $y = -3(x - 2)^2$ добијамо транслацијом графика функције $y = -3x^2$ дуж x -осе за 2 јединице удесно.

Из графика функције $y = -3(x - 2)^2$ можемо уочити следећа својства функције:

- Дефинициона област функције је $D_f = \mathbb{R}$. Скуп вредности функције је $V_f = (-\infty, 0]$.
- Теме параболе је тачка $T(2, 0)$.
- Парабола је отворена надоле ($a = -3 < 0$), и функција има максимум $y_{\max} = 0$ за $x = 2$.
- Оса симетрије графика је права $x = 2$.

x	-2	-1	0	1	2
$-3x^2$	-12	-3	0	-3	-12



Задатак 2

Нацртај график функције $y = 2(x - 1)^2$ и наведи својства функције.

Подсети се!

Како ће се променити координате тачке добијене транслацијом тачке $A(x, y)$ за 3 јединице удесно и 2 јединице надоле.

Пример 3

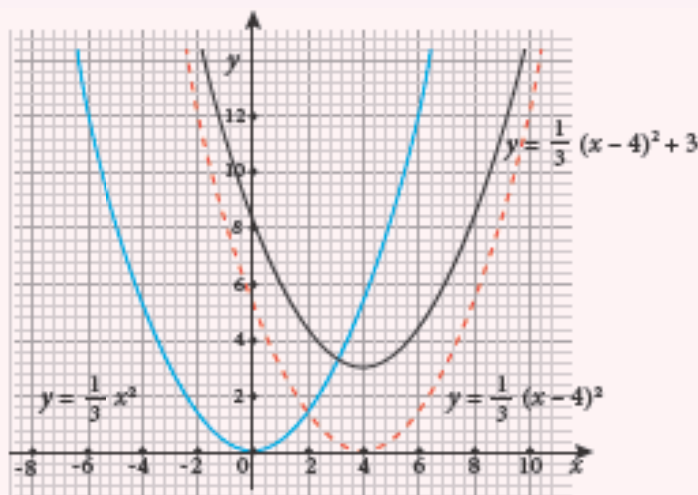
Нацртај график функције $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3$.

Решење:

Најпре ћемо, користећи табелу вредности, скицирати параболу $y = \frac{1}{3}x^2$ (плава параболоа на слици). Затим ћемо нацртати график функције $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2$ тако што ћемо график функције $y = \frac{1}{3}x^2$ транслацијом дуж x -осе померити за 4 јединице удесно (парабола са испрекиданом црвеном линијом на слици).

На крају, транслацијом графика функције $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2$ за 3 јединице нагоре добићемо график функције $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3$.

Можемо уочити да је график функције $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3$ е параболоа која је отворена нагоре, јер је $a = \frac{1}{3} > 0$, са теменом у тачки $T(4, 3)$ и осом симетрије $x = 4$.

**Запамти!**

- Облик $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ назива се канонски облик квадратне функције.
- График је параболоа са теменом у тачки $T(\alpha, \beta)$ и осом симетрије $x = \alpha$.

Пример 4

Нацртај график функције $y = (x + 2)^2 - 3$.

Решење:

Функција је дата у канонском облику

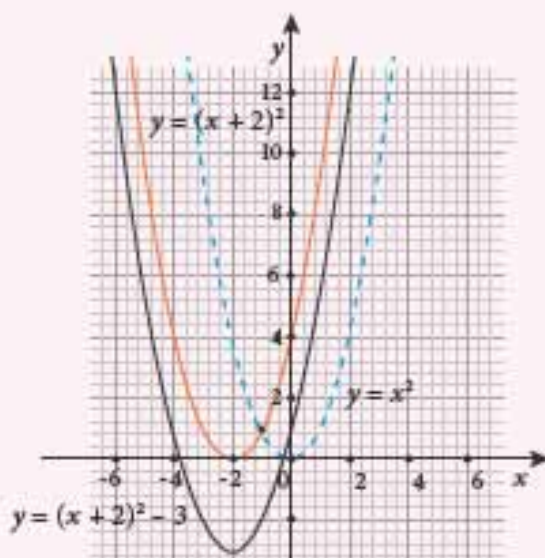
$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

при чему је

$$a = 1, \alpha = -2, \text{ а } \beta = -3.$$

Дакле, теме параболое је тачка $T(-2, -3)$.

Најпре цртамо параболу $y = x^2$ (плава испрекидана линија). Затим, трансляцијом за 2 јединице улево ($\alpha = -2$) добијамо график функције $y = (x + 2)^2$ (жута линија), а на крају трансляцијом другог графика за 3 јединице доле ($\beta = -3$) добијамо график дате функције (црна линија).



Задаци за вежбање!

1. Одреди теме параболое:

а) $y = 4(x + 1)^2$; б) $y = 4(x + 2)^2 - 3$; в) $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$.

2. Нацртај график функције:

а) $f(x) = 3(x + 2)^2$; б) $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$; в) $f(x) = -5(x - 3)^2$.

г) $f(x) = x^2 + 6x + 9$; д) $f(x) = -4x^2 + 24x - 36$; ђ) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$.

3. Нацртај графике функција у истом координатном систему

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 4)^2$, $h(x) = (x + 2)^2$;

б) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -(x - 4)^2$, $h(x) = -(x + 2)^2$.

4. Одреди теме, осу симетрије и екстремну вредност параболое одређене функцијом

а) $f(x) = -4(x + 2)^2$; б) $y = \frac{1}{5}(x + 1)^2 - 3$; в) $y = \frac{2}{3}(x - 6)^2 + \frac{1}{2}$.

5. За колико јединица и у ком смеру треба померити параболу $y = 3(x - 2)^2$ да би се добила параболоа

а) $y = 3(x + 2)^2$; б) $y = 3(x - 5)^2 - 2$; в) $y = 3(x + 1)^2 + 4$?

6. Одреди вредности a и α тако да параболоа $y = a(x - \alpha)^2$ пролази кроз тачку $A(-3, 2)$ а њено теме буде $T(4, 0)$.

7. Одреди функцију чији је график симетричан у односу на x -осу са графиком функције

а) $f(x) = (x - 5)^2$; б) $f(x) = -(x + 1)^2$; в) $f(x) = 3x^2 - 4$.

3.4 ГРАФИК ФУНКЦИЈЕ $f(x) = ax^2 + bx + c$

Подсети се!

- График функције $f(x) = a(x - \alpha)^2$ је парабола са теменом $T(\alpha, 0)$.
- Облик $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ се назива се канонски облик квадратне функције. Њен график је парабола са теменом $T(\alpha, \beta)$ и осом симетрије $x = \alpha$.

АКТИВНОСТ

Трансформиши функцију $y = x^2 - 6x$ у облик $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Пример 1

Трансформиши функцију $y = 3x^2 - 24x + 12$ у канонски облик и одреди теме њеног графика.

Решење:

Коефицијент уз квадратни члан издвајамо испред заграде и добијамо $y = 3(x^2 - 8x + 4)$.

Израз у загради допуњујемо до потпуног квадрата:

$$y = 3(x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 + 4)$$

$$y = 3((x - 4)^2 - 12)$$

$$y = 3(x - 4)^2 - 36$$

Овим смо функцију трансформисали у канонски облик. Из канонског облика следи да је теме графика функције тачка $T(4, -36)$.

У општем случају функцију $y = ax^2 + bx + c$ трансформишемо у канонски облик на следећи начин.

- У прва два члана коефицијент a издвајамо испред заграде и добијамо $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$.
- Линеарни члан $\frac{b}{a}x$ у загради записујемо као $\frac{b}{a}x = 2 \cdot \frac{b}{2a}x$ и добијамо

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c.$$

- Израз у загради допуњујемо до потпуног квадрата додавањем и одузимањем $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ и добијамо

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c, \text{ т.е.}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Овом квадратну функцију трансформисали смо у канонски облик $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ и за параметре α и β добили смо $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Из канонског облика квадратне функције јасно је да ће теме графика бити тачка $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Запамти!

- График функције $f(x) = ax^2 + bx + c$ је парабола са теменом $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.
- Свака квадратна функција може се записати у канонском облику $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
- Описаним поступком квадратна функција $y = ax^2 + bx + c$ своди се на канонски облик

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

За прецизније цртање параболе $y = ax^2 + bx + c$, потребно је одредити њене карактеристичне тачке. То су теме и пресечне тачке параболе са координатним осама.

Пример 2

Сведи у канонски облик функцију $y = 3x^2 - 12x + 7$ и нацртај њен график.

Решење:

Канонски облик функције можемо одредити директном заменом вредности коефицијената a , b и c у изведену формулу или можемо применити поступак допуњавања до потпуног квадрата за добијање канонског облика.

Први начин (поступком трансформације)

$$\begin{aligned} y &= 3(x^2 - 4x) + 7 \\ y &= 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 7 \\ y &= 3((x - 2)^2 - 4) + 7 \\ y &= 3(x - 2)^2 - 12 + 7 \\ y &= 3(x - 2)^2 - 5 \end{aligned}$$

Други начин (коришћењем изведених формула за α и β)

Коефицијенти дате функције су $a = 3$, $b = -12$ и $c = 7$.

$$\text{Одатле, } \alpha = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = 2, \beta = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7 - (-12)^2}{4 \cdot 3} = -5, \text{ тј. } y = 3(x - 2)^2 - 5.$$

Из канонског облика функције добијамо да график функције има теме у тачки $T(2, -5)$ и да је симетричан у односу на праву $x = 2$.

Да бисмо прецизније скицирали график, одређујемо и пресеке са координатним осама.

За одређивање пресечне тачке са y -осом одређујемо вредност функције за $x = 0$. За $x = 0$, $y = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 7 = 7$, па је пресечна тачка $A(0, 7)$.

Тачка $A_1(4, 7)$ симетрична је тачки $A(0, 7)$ у односу на осу симетрије $x = 2$. За одређивање пресечних тачака са x -осом, одређујемо вредности x за које је $y = 0$. Добијамо

$$3x^2 - 12x + 7 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{6}$$

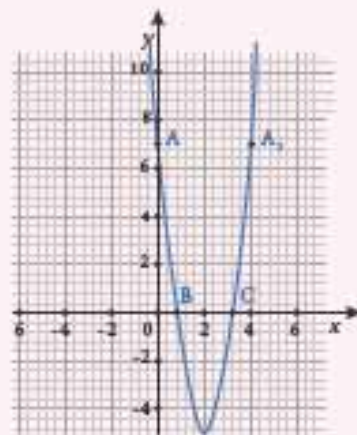
$$x_1 \approx 0,71, x_2 \approx 3,29$$

Пресечне тачке су $B(0,71, 0)$ и $C(3,29, 0)$.

График је приказан на слици.

Можемо уочити да је за цртање параболе потребно одредити најмање 5 њених тачака. Ако једначина $ax^2 + bx + c = 0$ нема реалних решења, то ће значити да параболоа не сече x -осу. У том случају одређујемо још најмање две друге тачке за произвољно изабране вредности x .

График функције $y = 3x^2 - 12x + 7$, тј. $y = 3(x - 2)^2 - 5$ можемо добити и транслацијама графика функције $y = 3x^2$. Најпре треба да одредимо неколико тачака њеног графика. Затим добијену параболу померамо за 2 јединице удесно ($\alpha = 2$) чиме добијамо параболу $y = 3(x - 2)^2$. На крају параболу $y = 3(x - 2)^2$ померамо за 5 јединица надолу ($\beta = -5$) и добијамо график функције $y = 3x^2 - 12x + 7$.



Пример 3

Нацртај график функције одређивањем карактеристичних тачака параболое:

а) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$; б) $y = 2x^2 + 3x + 5$.

Решење:

а) Коefицијенти су $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 4$.

- Теме: $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot (-\frac{1}{3})} = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot 4 - (\frac{1}{3})^2}{4 \cdot (-\frac{1}{3})} = \frac{49}{12}$, па теме је $T(\frac{1}{2}, \frac{49}{12})$.

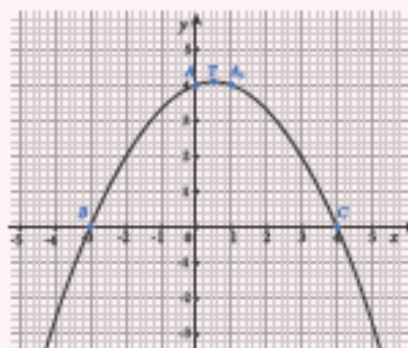
- Пресек са y -осом: $f(0) = 4$, па је $A(0, 4)$.

- Пресек са x -осом: за $y = 0$ добијамо $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4 = 0$ чија су решења $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$. Парабола сече x -осом $B(-3, 0)$ и $C(4, 0)$.

- Оса симетрије је права $x = \frac{1}{2}$, па је тачка $A_1(1, 4)$ симетрична тачки $A(0, 4)$ у односу на ову осу.

- Пошто је $a = -\frac{1}{3} < 0$, параболоа је отворена надолу.

График је приказан на слици.

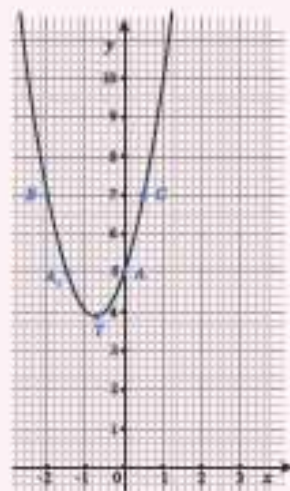


6) Коэффициенти су $a=2$, $b=3$, $c=5$.

- Теме: $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4}$, $\beta = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5 - 3^2}{4 \cdot 2} = \frac{31}{8} = 3,875$, па је теме $T\left(-\frac{3}{4}, \frac{31}{8}\right)$.
- Оса симетрије је права $x = -\frac{3}{4}$.
- Пресек са y -осом је: $f(0) = 5$, па је пресечна тачка $A(0, 5)$. Тачка $A_1\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$ је симетрична тачки $A(0, 5)$ у односу на праву $x = -\frac{3}{4}$.
- Пресеци са x -осом: Једначина $2x^2 + 3x + 5 = 0$ нема реална решења, јер је дискриминанта $D = -31 < 0$. Значи, парабола не сече x -осу.
- За прецизније цртање параболе, одредићемо још две тачке њеног графика.

За $x = -2$, $f(-2) = 7$, па је једна тачка графика $B(-2, 7)$. За $x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 7$, па добијемо тачку $C\left(\frac{1}{2}, 7\right)$.

- Пошто је $a = 2 > 0$ парабола је отворена нагоре. График је приказан на слици.



Задачи за вежбање!

1. Залиши функцију у канонском облику:

а) $f(x) = x^2 + 4x$; б) $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$; в) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

2. Одреди теме функције:

а) $f(x) = 4x^2 + 5x - 3$; б) $f(x) = -5x^2 + 6x$; в) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 2x - 1$.

3. Нацртај график функције:

а) $y = -(x+1)^2 + 2$; б) $y = 2(x-2)^2 + 1$; в) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{3}{2}$.

4. Нацртај график помоћу карактеристичних тачака:

а) $f(x) = x^2 + x - 2$; б) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$; в) $f(x) = x^2 - 4x$.

5. Нацртај график функције:

а) $f(x) = x^2 - 2x + 2$; б) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$; в) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$.

6. За које вредности p и q , ће тачка $T(-3, 2)$ бити теме параболе $y = x^2 + px + q$?

7. Парабола $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ пролази кроз тачку $A(8, 5)$ и има теме $T(6, 3)$. Одреди a , α и β .

8. Одреди коефицијенте a , b и c функције $f(x) = ax^2 + bx + c$, тако да график сече x -осу у тачки $A(3, 0)$, има екстремну вредност за $x = 1$ и важи $f(1) = -4$.

3.5 СВОЈСТВА КВАДРАТНЕ ФУНКЦИЈЕ

Подсети се!

Одреди највећу вредност функције $f(x) = -3x^2 + 2x$.
Подсети се својстава квадратне функције $f(x) = ax^2 + c$.

Испитајмо својства квадратне функције $y = ax^2 + bx + c$.

1) Област дефинисаности

Квадратна функција је дефинисана за све реалне бројеве $D_f = \mathbb{R}$.

2) Теме параболе

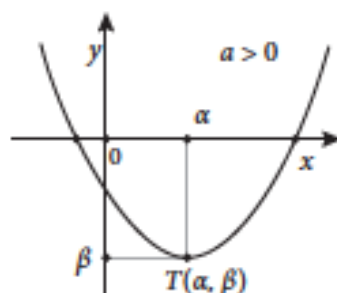
Да бисмо одредили теме параболе која је график функције, функцију записујемо у канонском облику

$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$, где је $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Теме параболе је тачка $T(\alpha, \beta)$.

3) Екстремна вредност

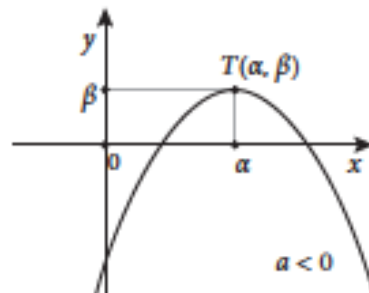
Функција има екстремну вредност у темену која, у зависности од знака коефицијента a , је минимум или максимум.

- Ако је $a > 0$, парабola је отворена нагоре и у темену има минимум.



$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{за} \quad x = -\frac{b}{2a}$$

- Ако је $a < 0$, парабola је отворена надоле и у темену има максимум.



$$y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{за} \quad x = -\frac{b}{2a}$$

Пример 1

За функцију $y = 3x^2 - 5x - 4$ одреди:

- а) област дефинисаности; б) координате темена; в) екстремну вредност.

Решење:

а) Квадратна функција је дефинисана за све реалне бројеве $D_f = \mathbb{R}$

б) Координате темена одредићемо према формулама $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$,

Коефицијенти квадратне функције су $a = 3$, $b = -5$, $c = -4$.

$$\alpha = \frac{-5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6} \quad \beta = \frac{4 \cdot 3 \cdot (-4) - (-5)^2}{4 \cdot 3} = \frac{-48 - 25}{12} = -\frac{73}{12}.$$

Теме параболе је тачка $T\left(\frac{5}{6}, -\frac{73}{12}\right)$.

в) Пошто је $a > 0$, парабола је отворена нагоре и у темену има минимум. Минимална вредност функције је

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 3 \cdot (-4) - (-5)^2}{4 \cdot 3} = -\frac{73}{12}, \quad \text{за } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}.$$

Пример 2

За коју вредност параметра m функција $y = mx^2 - 3x + 2$ има максимум једнак 4?

Решење:

Да би функција имала максимум, мора бити $m < 0$ Вредност максимума је

$$y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot m \cdot 2 - (-3)^2}{4 \cdot m}.$$

Максимум треба да буде 4, па добијамо следећу једначину $\frac{4 \cdot m \cdot 2 - (-3)^2}{4 \cdot m} = 4$.

Решавањем једначине добијамо $m = -\frac{9}{8}$.

Пример 3

Наћи најмањи могући производ два реална броја ако је њихова разлика 12.

Решење:

Нека је један број x .

Пошто је разлика између два броја 12, други број може бити $x - 12$ или $x + 12$.

Узмимо да је други број $x + 12$.

Производ два броја записаћемо као функцију

$$y = x \cdot (x + 12)$$

$$y = x^2 + 12x, \text{ где је } a = 1, b = 12 \text{ и } c = 0.$$

Треба да одредимо $y_{\min}$.

Из формуле за теме функције имамо

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad x_{\min} = -\frac{b}{2a}$$

$$y_{\min} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 0 - 12^2}{4 \cdot 1} = \frac{-144}{4} \quad x_{\min} = -\frac{12}{2 \cdot 1}$$

$$y_{\min} = -36 \quad x_{\min} = -6$$

Одатле закључујемо да је један број број -6 .

Други број ће бити број $-6 + 12 = 6$.

Најмањи производ два броја чија је разлика 12 е $-6 \cdot 6 = -36$.

Задатак 1

Одреди највећу површину троугла код којег је збир основице и одговарајуће висине 8 cm.

4) Скуп вредности функције

Екстремна вредност одређује скуп вредности функције који означавамо са V_f .

- Ако је $a > 0$, онда је $V_f = [\beta, +\infty)$.
- Ако је $a < 0$, онда је $V_f = (-\infty, \beta]$.

Пример 4

Одреди скуп вредности функције $y = -2x^2 - 4x - 5$.

Решење:

Коефицијент $a < 0$, што значи да је парабола окренута отвором надоле и има максимум

$$y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -3. \text{ Значи, скуп вредности је } V_f = (-\infty, -3].$$

5) Нуле функције

Нуле функције $y = ax^2 + bx + c$ су вредности променљиве x за које је $y = 0$. Значи, нуле функције су решења једначине $ax^2 + bx + c = 0$.

Помоћу нула функције одређујемо x -координате тачака у којима график сече x -осу. Ако једначина $ax^2 + bx + c = 0$ нема реалних решења, тада график не сече x -осу.

Задатак 2

Одреди нуле функција и наведи шта уочаваш:

$$\text{а) } y = 2x^2 - 2x + 5; \quad \text{б) } y = 2x^2 + 3x - 2; \quad \text{в) } y = x^2 - 4x + 4.$$

Запамти!

Нека је $D = b^2 - 4ac$ дискриминанта квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$.

- Ако је $D > 0$, тада функције $y = ax^2 + bx + c$ има две реалне нуле и парабола $y = ax^2 + bx + c$ сече x -осу у две тачке.
- Ако је $D = 0$, тада је нула функције $y = ax^2 + bx + c$ е $x = -\frac{b}{2a}$, тј. парабола $y = ax^2 + bx + c$ додирује x -осу у тачки $T\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.
- Ако је $D < 0$, тада функција $y = ax^2 + bx + c$ нема реалних нула тј. парабола $y = ax^2 + bx + c$ нема заједничких тачака са x -осом.

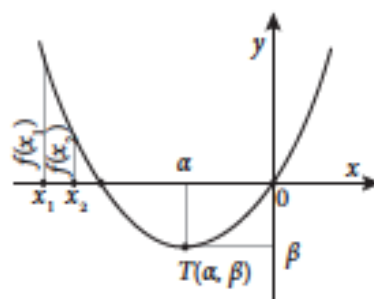
Задатак 3

За које вредности b и c график квадратне функције $y = x^2 + bx + c$ сече x -осу у тачкама $A(3, 0)$ и $B(1, 0)$?

6) Монотоност функције

Испитати монотоност (раст, опадање) неке функције значи испитати шта се дешава са вредностима функције ако се вредност променљиве x повећава.

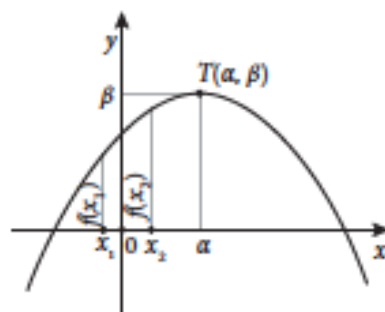
- Ако је $a > 0$, функција има минимум. Оса симетрије параболе $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$, јдели дефиниционо подручје функција $y = ax^2 + bx + c$ на два интервала $(-\infty, \alpha)$ и $(\alpha, +\infty)$. Пошто функција има минимум у $x = \alpha$, в у првом интервалу (лево од минимума) функција опада (вредности функције се смањују са повећањем вредности x), а у другом интервалу (десно од минимума) функција расте (вредности функције се повећавају са повећањем вредности x).



На цртежу можемо уочити да за $x_1 < x_2 < \alpha$, $f(x_1) > f(x_2)$, тј. функција монотono опада за $x \in (-\infty, \alpha)$, док она монотono расте за $x \in (\alpha, +\infty)$.

- Ако је $a < 0$, функција има максимум за $x = \alpha$, па у првом интервалу (лево од минимума) функција расте, а у другом интервалу (десно од минимума) функција опада.

На слици можемо уочити да у овом случају за $x_1 < x_2 < \alpha$, $f(x_1) < f(x_2)$, тј. функција монотono расте за $x \in (-\infty, \alpha)$, док монотono опада за $x \in (\alpha, +\infty)$.



Пример 4

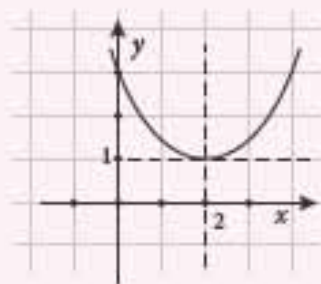
Испитај монотоност функције $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

Решење:

Испитати монотоност функције значи одредити интервале раста и опадања функције.

Пошто је $a = \frac{1}{2} > 0$, функција има максимум $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = 1$,
за $x = -\frac{b}{2a} = 2$.

Значи, интервалите у којима треба да се разматра монотоност су $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$ (види слику). Пошто је $x = 2$ вредност функције најмања, она монотono опада у интервалу $(-\infty, 2)$, а монотono расте у интервалу $(2, +\infty)$.

**Задатак 3**

Одреди интервале раста и опадања функција:

- а) $y = -x^2 + x$; б) $y = x^2 + 4$; в) $y = 3x^2 - 2x + 7$

7) Знак функције

Одредити знак квадратне функције значи одредити интервале вредности x за које је функција позитивна и оне за које је функција негативна.

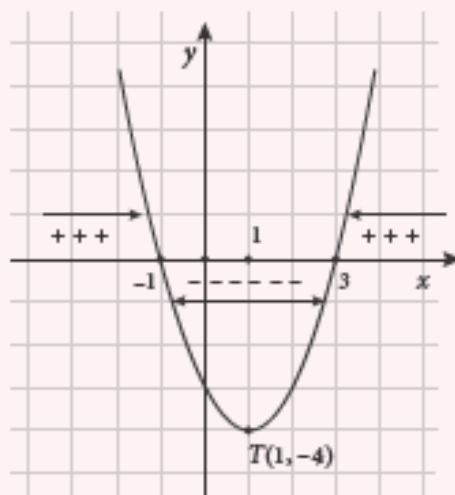
Пример 5

Одреди знак квадратне функције $y = x^2 - 2x - 3$.

Решење:

Прво одређујемо теме графика функције и пресечне тачке са x -осом како бисмо могли да скицирамо параболу. Теме параболе $y = x^2 - 2x - 3$ е $T(1, -4)$. Решења једначине $x^2 - 2x - 3 = 0$ се $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$, па параболa сече x -осу у тачкама $(-1, 0)$ и $(3, 0)$. Са ове три тачке цртамо график функције приказан на слици.

Из графика функције уочавамо да је функција позитивна, тј. $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, а негативна, тј. $f(x) < 0$ за $x \in (-1, 3)$.



Пример 6

Одреди знак функције:

а) $y = -3x^2 - 6x$;

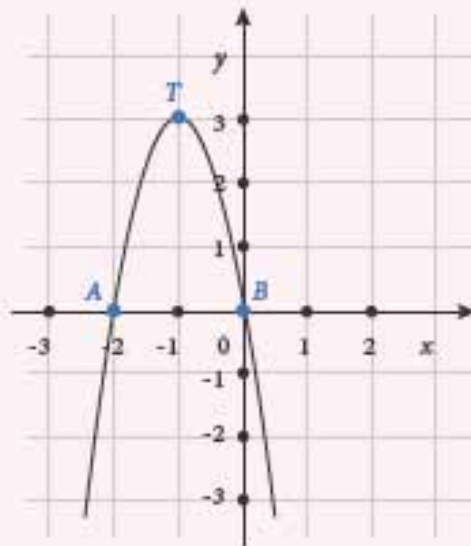
б) $y = x^2 + 2x + 3$

Решење:

- а) Теме параболе је $T(-1, 3)$. За $y = 0$ добијамо једначину $-3x^2 - 6x = 0$, чија су решења $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$, па параболу сече x -осу у тачкама $(-2, 0)$ и $(0, 0)$. Са ове три тачке скицирамо параболу која је отвором окренута надолу, јер је $a = -3 < 0$.

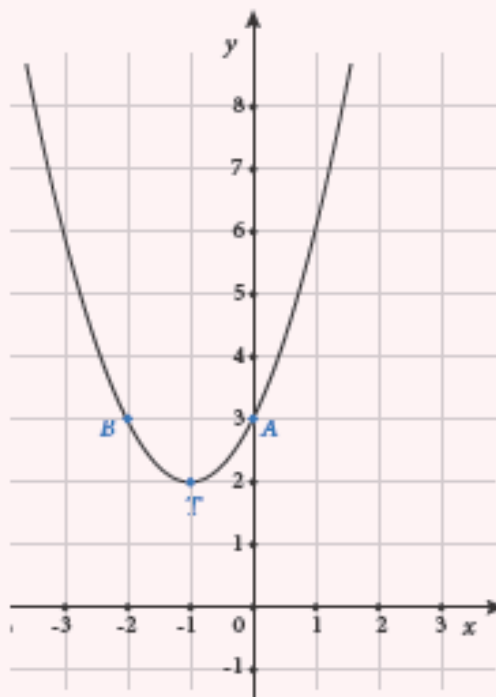
График функције је дат на слици.

Из графика функције уочавамо да је функција позитивна за $x \in (-2, 0)$, а негативна за $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.



- б) Теме параболе $y = x^2 + 2x + 3$ је $T(-1, 2)$. За $y = 0$, ја добијамо једначину $x^2 + 2x + 3 = 0$, која нема реална решења, тј. параболу не сече x -осу. За $x = 0$, добијамо $y = 3$, па параболу сече y -осу у тачки $A(0, 3)$. Тачка симетрична тачки A је тачка $B(-2, 3)$. Са ове три тачке цртамо график функције који је параболу окренута отвором нагоре, јер је $a = 1 > 0$.

Пошто параболу нема пресечних тачака са x -осом и окренута је отвором нагоре, цела параболу се налази изнад x -осе односно функција је позитивна за сваки реалан број, тј. $f(x) > 0$ за сваки $x \in (-\infty, +\infty)$.



Пример 7

Кошаркашки тим игра у арени капацитета 15.000 гледалаца. Цена улазнице је 14 долара, а просечна посећеност на недавним утакмицама била је 9.500 гледалаца. Истраживање тржишта показује да се за свако смањење цене улазнице за 1 долар просечна посећеност повећава за 1.000 гледалаца.

- Одреди функцију којом се израчунава приход од продатих улазница, у зависности од цене улазнице.
- Одреди цену улазнице при којој ће приход од продаје улазница бити највећи.
- Одреди цену улазнице која ће бити толико висока да нико неће присуствовати утакмицама и неће бити прихода.

Решење:

- Нека је x цена улазнице. Треба да одредимо функцију $f(x)$ којом ћемо за дату вредност цене улазнице израчунати остварени приход од продатих улазница. Ако је n број продатих улазница. Тада је приход број гледалаца (продатих улазница), јасно је да је $f(x) = n \cdot x$. Знамо да ће, ако је цена једне улазнице 14 долара, бити (у просеку) 9.500 продатих улазница, као и да се за свако смањење цене за 1 долар број продатих улазница повећава за 1.000 (ако се цена смањи за 3 долара, број гледалаца биће $(9.500 + 3.000)$).

Ако је x цена улазнице, онда са $14 - x$ израчунавамо за колико је долара она мања од 14 долара. Дакле, ако је цена улазнице x долара, број продатих улазница повећаће се за $1000(14 - x)$, тј. укупан број продатих улазница биће $n = 9500 + 1000(14 - x)$.

Сада за функцију $f(x)$ добијамо

$$f(x) = x \cdot (9500 + 1000(14 - x))$$

$$f(x) = x \cdot (23500 - 1000x)$$

$$f(x) = -1000x^2 + 23500x$$

- Треба одредити максимум функције $f(x)$. Функција је квадратна функција са коефицијентом $a = -1000 < 0$, што значи да је њен график парабола окренута отвором надоле и да у темену има максимум. Тај максимум се добија за $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23500}{2(-1000)} = 11,75$. Дакле, ако је цена улазнице 11,75 долара, приход ће бити највећи.

- Треба одредити цену улазнице x тако да остварени приход буде $f(x) = 0$.

$$-1000x^2 + 23500x = 0$$

$$x(23500 - 1000x) = 0$$

Решења добијене једначине су $x = 0$ и $x = 23,5$. Дакле, 23,5 долара била би превисока цена улазнице и нико не би купио улазницу. Јасно је да би и при цени од 0 долара приход био нула, али се у задатку тражи да се одреди цена која би била толико висока да нико не би присуствовао утакмицама, па је зато одговор 23,5 долара.

Задаци за вежбање!

Одреди својства функција (теме, екстремна вредност, скуп вредности, нуле, интервали раста и опадања) (1 – 6)

1. $y = x^2 - 4x + 1$

2. $y = -x^2 + x + 6$

3. $y = 2x^2 - 7x + 3$

4. $y = 5x^2 + 7x + 3$

5. $y = -2x^2 + 4x$

6. $y + 16 = -x^2 + 8x$

7. Одреди знак функције:

а) $y = x^2 - 5x + 6$; б) $y = x^2 + 2$; в) $y = -2x^2 - 6x$.

8. Одреди коефицијенте a и c функције $f(x) = ax^2 + 3x + c$, ако су $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ њене нуле.9. За коју вредност променљиве x разломак $\frac{4}{6x^2 - 5x - 3}$ има највећу вредност?10. Продавац безалкохолних пића на једној популарној плажи анализира своју продајну евиденцију и открива да, ако у једном дану прода x лименки газираног сока, његов профит (у доларима) је дат функцијом $P(x) = -0,001x^2 + 3x - 1800$. Колики је максимални дневни профит и колико лименки треба да прода да би остварио максималан профит?11. Ефикасност телевизијске рекламе зависи од тога колико пута је гледалац види. После Након неколико експеримената, једна рекламна агенција је утврдила да се ефикасност (E) може одредити следећом формулом

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2,$$

где је n број пута колико је гледалац видео дату рекламу. Колико пута треба гледалац да види рекламу да би она имала максималну ефикасност?

3.6 ТОК И ГРАФИК КВАДРАТНЕ ФУНКЦИЈЕ

Подсети се!

- $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$ су нуле функције $y = x^2 - 4$, а у темену $T(0, -4)$ функција има минимум. На интервалу $(0, +\infty)$ функција расте, а на $(-\infty, 0)$ опада.
- Одреди и остала својства функције $y = x^2 - 4$.

Веома често се поставља захтев: „Нацртај график и испитај ток квадратне функције...”

Да би одговорио на овај захтев, потребно је да одредиш

- 1) област дефинисаности функције;
- 2) теме параболе која је график функције;
- 3) пресеке параболе са координатним осама;
- 4) осу симетрије параболе.

Са овим подацима можеш да нацрташ график функције, а затим да одредиш и:

- 5) екстремну вредност функције;
- 6) скуп вредности функције;
- 7) монотоност функције;
- 8) знак функције.

Редослед којим ћеш записати одговоре (својства функције) није битан.

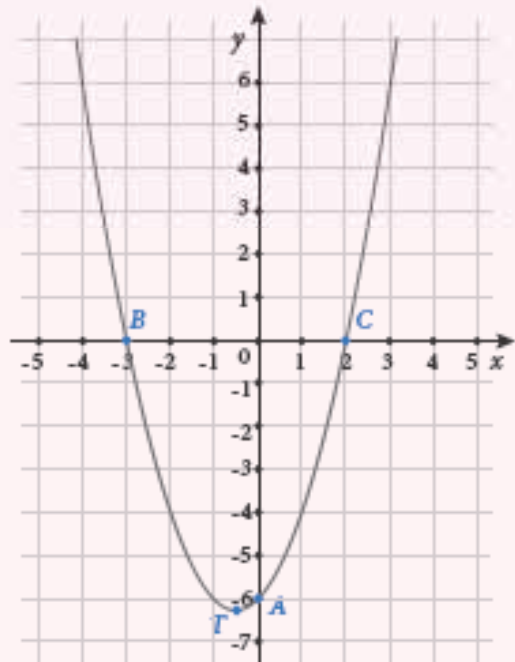
Пример 1

Нацртај график и испитај ток функције

$$y = x^2 + x - 6.$$

Решење:

- Област дефинисаности $D_f = \mathbb{R}$.
- $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{25}{4} = -6,25$,
па је теме параболе $T(-0,5; -6,25)$.
- Пресеци са координатним осама су:
 - пресек са y -осом: $f(0) = -6$, $A(0, -6)$
 - пресек са x -осом (нуле функције):
решења једначине
 $x^2 + x - 6 = 0$ се $x_1 = -3$ и
 $x_2 = 2$, $B(-3, 0)$, $C(2, 0)$.
- Оса симетрије је $x = -\frac{1}{2}$.



Са овим својствима можемо да нацртамо график функције који је дат на слици.

- Екстремна вредност: $a = 1 > 0$, па функција има минимум $y_{\min} = -6,25$ за $x = -0,5$.
- Скуп вредности је $V_f = [-6,25; +\infty)$.
- Монотоност функције: функција монотono опада за $x \in (-\infty; -0,5)$, а монотono расте на $x \in (-0,5; +\infty)$.
- Знак функције: функција је позитивна за $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$, а негативна за $x \in (-3, 2)$.

Пример 2

Нацртај график и испитај ток функције $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$.

Решење:

Прво одређујемо график функције:

- Област дефинисаности је $D_f = \mathbb{R}$.
- $\alpha = -1$, $\beta = 4$, па је теме параболе T .
- Пресеци са координатним осама су:
 - пресек са y -осом:

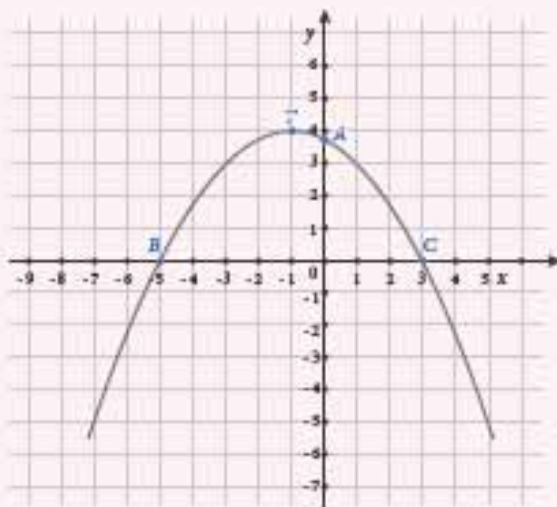
$$f(0) = \frac{15}{4} = 3,75, A(0, 3,75)$$

- пресек са x -осом (нуле функције):

$$\text{решења једначине } -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4} = 0$$

$$\text{су } x_1 = -5 \text{ и } x_2 = 3, B(-5, 0), C(3, 0).$$

- Оса симетрије је $x = -1$.
- График функције је дат на слици.



Из графика испитујемо ток функције:

- Екстремна вредност: $a = 1 < 0$, па функција има максимум $y_{\max} = 4$ за $x = -1$.
- Скуп вредности је $V_f = (-\infty, 4)$.
- Монотоност функције: функција монотono расте за $x \in (-\infty, -1)$, а монотono опада за $x \in (-1, +\infty)$.
- Знак функције: $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$, а $f(x) > 0$ за $x \in (-5, 3)$.

Задатак 1

Нацртај график и испитај ток функције

а) $y = x^2 + 2x$; б) $y = -x^2 + 2x$; в) $y = -x^2 - 2x$

Задачи за вежбање!

Нацртај график и испитај ток функције (1 – 6)

1. $y = x^2 - 3$

2. $y = -2(x - 1)^2$

3. $y = 2x^2 - 4x - 3$

4. $y = (x + 2)^2$

5. $y = \frac{1}{4}(x + 4)^2 - \frac{1}{4}$

6. $y = -4x^2 + 25$

3.7 КВАДРАТНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ

Подсети се!

- За које вредности $x \in \{-3, -2, 0, 1\}$, неједначина $x - 3 > 0$ постаје тачан бројни израз?
- Ако су x_1 и x_2 нуле квадратног тринома $ax^2 + bx + c$, онда је разлагање тринома на линеарне чиниоце $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Производ $a \cdot b$ је позитиван ако су оба чиниоца позитивна или ако су оба чиниоца негативна.
- Производ $a \cdot b$ је негативан ако је један чинилац позитиван, а други негативан.
- Одреди скуп решења неједначине $x + 3 > 0$?

Активност

Одреди за које вредности x је производ $x(x - 2)$ позитиван.

Запамти!

- Неједначине облика
 $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$
 $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$
 где су $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$ називају се **квadratне неједначине**.
- Овај облик квадратне неједначине је **општи облик квадратне неједначине**.

Пример 1

Реши квадратну неједначину $x^2 + 2x - 8 < 0$.

Решење:

Потребно је да одредимо скуп вредности променљиве x за које ће неједначина бити тачан бројни израз. Можемо поступити на два начина.

Први начин.

Квадратни трином на левој страни неједначине разлажемо на линеарне чиниоце. Одређујемо

нуле тринома $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-8)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$, односно $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Одатле је, $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$, па неједначину можемо записати у облику $(x + 4)(x - 2) < 0$. Да би производ $(x + 4)(x - 2)$ био негативан, чиниоци морају имати супротне знакове, па добијамо следећа два система линеарних неједначина:

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+4 < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x > -4 \\ x < 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < -4 \\ x > 2 \end{cases}$$

Решење првог система неједначина је $M_1 = (-4, 2)$, а решење другог система је $M_2 = \emptyset$. Решење дате неједначине биће унија скупова решења оба система, односно скуп решења квадратне неједначине је $M = M_1 \cup M_2 = (-4, 2) \cup \emptyset = (-4, 2)$.

Други начин.

За одређивање скупа решења квадратне неједначине можемо користити график одговарајуће квадратне функције. У том случају решавање квадратне неједначине своди се на одређивање вредности x за које квадратна функција $y = x^2 + 2x - 8$ има негативне вредности. За ову функцију нуле функције су $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$, а коефицијент a уз квадратни члан је позитиван, па је парабола отворена нагоре. Са графика функције (датог на слици) читамо вредности x за које је функција негативна, односно вредности за које се њен график налази испод x -осе. На овај начин добијамо да $x^2 + 2x - 8 < 0$ за $x \in (-4, 2)$.



Пример 2

Решите неједначину $\frac{x^2-5}{4} - \frac{3x^2+1}{2} \geq -2$. Затим одредите целобројна решења неједначине.

Решење:

Прво, неједначину сводимо на општи облик. Након што је помножимо са НЗС именилаца, односно са 4, добијамо

$$x^2 - 5 - 2(3x^2 + 1) \geq -8.$$

Сређивањем добијамо неједначину $5x^2 - 1 \leq 0$. Нуле одговарајуће квадратне функције налазимо решавањем једначине $5x^2 - 1 = 0$,

одакле добијамо $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Пошто је $a = 5$ позитивно, парабола $y = 5x^2 - 1$ отворена је нагоре, па је $f(x) \leq 0$ за $x \in \left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$.

Целобројна решења неједначине биће цели бројеви који припадају скупу решења $\left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$. Одатле је скуп целобројних решења дате неједначине $M = \{0\}$.



Задатак 1

Решите неједначине:

а) $2x^2 + 6x - 8 > 0$; б) $2x^2 - 3x \leq 5$; в) $(2x - 1)^2 > 2 - 4x$; г) $2x^2 - 18 \leq 0$.

Пример 3

Одреди област дефинисаности функције $f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}$.

Решење:

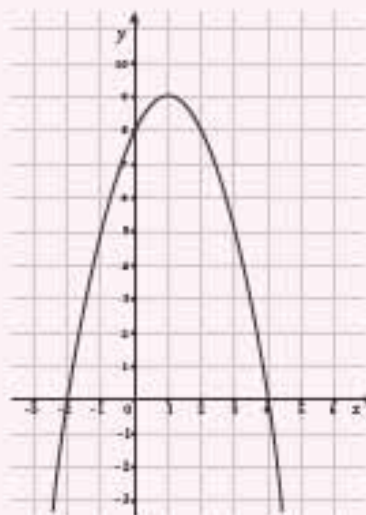
Квадратни корен ће бити реалан број само ако израз под кореном није негативан број. Према томе, област дефинисаности функција биће скуп решења неједначине

$$-x^2 + 2x + 8 \geq 0.$$

Решења једначине $-x^2 + 2x + 8 = 0$ су $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$.Пошто је $a = -1 < 0$, парабола је отворена надолу.Значи, $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$ за $x \in [-2, 4]$.

Дакле, област дефинисаности функције је

$$D_f = [-2, 4].$$



Задатак 2

Одреди област дефинисаности функција:

а) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 6}$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$.

Пример 4

За које вредности параметра m једначина $x^2 + (2 - m)x - 2 + m = 0$ има реална решења?

Решење:

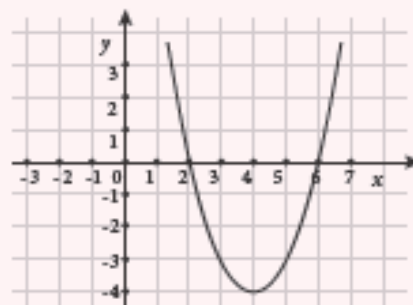
Дискриминанта квадратне једначине је

$$D = (2 - m)^2 - 4(-2 + m) = m^2 - 8m + 12.$$

Да би једначина имала реална решења, потребно је да $D \geq 0$,
 $m^2 - 8m + 12 \geq 0$.

Решења једначине $m^2 - 8m + 12 = 0$ су $m_1 = 2$ и $m_2 = 6$.

Пошто је коефицијент уз квадратни члан позитиван,
 парабола је отворена нагоре. Одатле следи да $m^2 - 8m + 12 \geq 0$
 за $m \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$.



Задатак 3

За које вредности параметра m једначина $mx^2 + 2(m + 2)x + 2m + 4 = 0$ нема реалних решења, ако је $m < 0$?

Пример 5

Трошак изнајмљивања аутобуса, за одлазак на концерт, износи 450 долара и треба да се подели подједнако међу ученицима. Организатори концерта нуде попуст на карту за концерт за групе које долазе аутобусом. Редовна цена једне карте је 50 долара, али се за особе које долазе аутобусом цена карте смањује за 10 центи за сваку особу у групи (односно, ако у групи има 10 особа, сваки ученик ће добити попуст од 100 центи). Колико ученика треба да буде у групи да би укупан трошак по ученику био мањи од 54 долара?

Решење:

Нека је x број ученика. Тада сваки ученик треба да плати $\frac{450}{x}$ долара за аутобус и $50 - 0,1 \cdot x$ долара за карту. Укупан трошак по ученику треба да буде мањи од 54 долара, па добијамо неједначину:

$$\begin{aligned} \frac{450}{x} + (50 - 0,1x) &< 54 \quad (\text{множимо са } x, x > 0, \text{ па се знак неједнакости не мења}) \\ 450 + 50x - 0,1x^2 &< 54x \\ -0,1x^2 - 4x + 450 &< 0 \end{aligned}$$

Решења једначине $-0,1x^2 - 4x + 450 = 0$ (тј. нуле функције $y = -0,1x^2 - 4x + 450$) се $x_1 = -90$ и $x_2 = 50$. При томе је, $a = -0,1 < 0$, па је парабола отворена надоле. Одатле следи да је скуп решења неједначине $-0,1x^2 - 4x + 450 < 0$ е $(-\infty, -90) \cup (50, +\infty)$. Међутим, x представља број ученика у групи и не може бити негативан број, па је решење $x \in (50, +\infty)$. Односно, потребно је да се у групи сакупи више од 50 ученика да би укупан трошак по ученику био мањи од 54 долара.

Задаци за вежбање!

Решите квадратне неједначине (1 – 4):

- а) $x^2 - 9 < 0$; б) $16 - x^2 \geq 0$; в) $x^2 - 2x > 0$.
- а) $(3x + 1)(x - 1) \geq 0$; б) $x^2 - 3x - 18 \leq 0$; в) $x^2 + 2x > 3$.
- а) $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$; б) $x^2 < x + 2$; в) $(x + 2)(x - 3) \geq 0$.
- а) $(x + 4)^2 \geq 0$; б) $(x + 4)^2 > 0$; в) $(x + 4)^2 < 0$; г) $(x + 4)^2 \leq 0$.

5. Решите неједначину свдећи је на квадратну неједначину $\frac{(x-1)^2}{4} \leq 1 - \frac{3-x}{2}$.

6. Одредите област дефинисаности функције $f(x) = \sqrt{24 - x - 3x^2}$.

7. За које вредности параметра m једначина $(m + 1)x^2 + 2(1 - m)x + 2m - 5 = 0$ нема реалних решења?

8. Ако произвођач прода x јединица производа, приход R и трошак C , у доларима, дати су формулама

$$R = 20x$$

$$C = 2000 + 8x + 0,0025x^2$$

Профит је разлика прихода и трошка. Одредите колико јединица треба да прода да би остварио профит од најмање 2400 долара.

3.8 СИСТЕМ КВАДРАТНИХ НЕЈЕДНАЧИНА СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ

Подсети се!

Графички прикажи скуп решења система $\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 3 \end{cases}$.

Одреди пресек скупова $M_1 = (-3, 10]$ и $M_2 = (-\infty, -1] \cup (5, +\infty)$.

За које вредности a и b је количник $\frac{a}{b}$ негативан?

Активност

Реши систем линеарних неједначина $\begin{cases} x-5 \geq -1 \\ 5-2x < 3 \end{cases}$.

Пример 1

Одреди решење система линеарне и квадратне неједначине са једном непознатом

$$\begin{cases} 3x+5 \leq 10 \\ x^2+3x-10 < 0 \end{cases}$$

Решење:

Решавамо линеарну неједначину $3x+5 \leq 10$.

Добијамо да је $x \leq \frac{5}{3}$, тј. скуп решења линеарне неједначине је $M_1 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$.

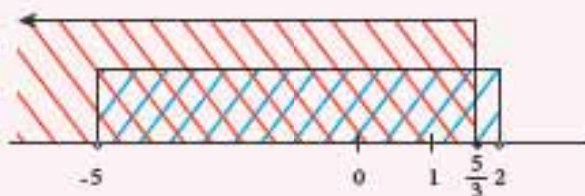
Одређујемо скуп решења квадратне неједначине $x^2+3x-10 < 0$.

Решења квадратне једначине је $x^2+3x-10=0$ су $x_1 = -5$ и $x_2 = 2$. Пошто је $a = 1 > 0$, парабола је отворена нагоре. Значи, $x^2+3x-10 < 0$ за $x \in (-5, 2)$, тј. скуп решења је $M_2 = (-5, 2)$.

Скуп решења система је пресек скупова решења неједначина у систему. Одатле, за решење система добијамо $M = M_1 \cap M_2 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \cap (-5, 2) = \left(-5, \frac{5}{3}\right]$.

Пресек скупова решења обе неједначине може се одредити и графички, представљањем оба скупа на реалној правој (види цртеж). Пресек се налази у делу у коме се налазе косе линије обе боје. Скуп M_1 представљен је црвеним линијама, а скуп M_2 плавим линијама, па се тамо где се појављују линије обе боје налази пресек ова два скупа, односно пресек је двоструко ишрафирана област. Такође, ако је неки интервал затворен у некој од крајњих тачака, то се на реалној правој означава пуним кружићем.

Скуп $M_1 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ је интервал који је затворен са десне стране, што значи да вредност $\frac{5}{3}$ припада скупу, па је зато на цртежу у тој тачки означен пуни кружић. Ако је неки интервал отворен у некој од крајњих тачака, онда се то на реалној правој означава празним кружићем у тачки у којој је интервал отворен. овом примеру, тачке -5 и 2 не припадају скупу $M_2 = (-5, 2)$ па су зато на цртежу у тим тачкама означени празни кружићи.



Задатак 1

Решите систем $\begin{cases} 2x+5 \leq 0 \\ x^2+2x-3 < 0 \end{cases}$.

Пример 2

Решите систем квадратних неједначина $\begin{cases} x^2-7x+10 \leq 0 \\ x^2-8x+7 > 0 \end{cases}$.

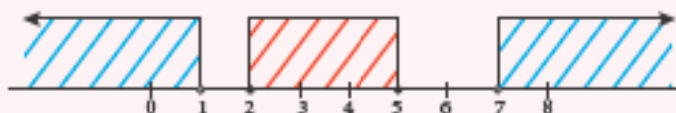
Решење:

Имамо систем од две квадратне неједначине са једном непознатом. Најпре одређујемо скупове решења сваке од неједначина у систему, а затим за одређивање решења система тражимо пресек два добијена скупа решења.

Решења једначине $x^2 - 7x + 10 = 0$ су $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$, а пошто је $a = 1 > 0$, парабола је отворена нагоре. Значи, $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ за $x \in [2, 5]$, тј. скуп решења је $M_1 = [2, 5]$.

Решења једначине $x^2 - 8x + 7 = 0$ су $x_1 = 1$ и $x_2 = 7$, а пошто је $a = 1 > 0$, и ова парабола је отворена нагоре. Значи, $x^2 - 8x + 7 > 0$ за $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$, тј. скуп решења је $M_2 = (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$.

Добијени скупови решења обе неједначине представљени су графички на цртежу.



Видимо да је пресек два добијена скупа решења празан скуп, па дати систем неједначина нема решења.

Пример 3

Решите систем квадратних неједначина са једном непознатом

$$\begin{cases} (x-1)^2 - 2x > -3 \\ x(x-3) \leq x+5 \end{cases}$$

Решење:

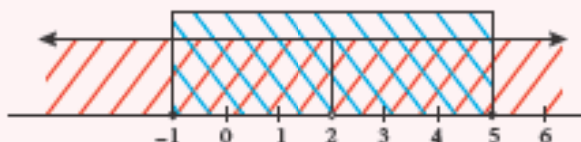
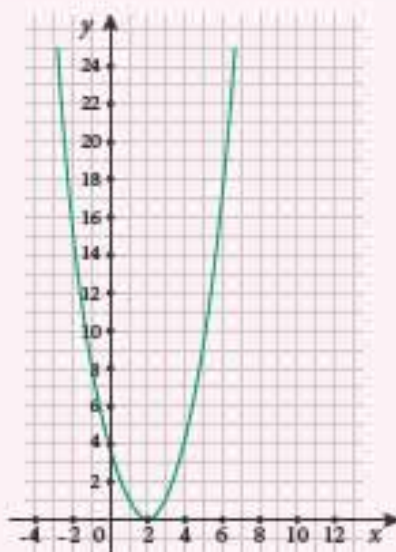
Прво обе неједначине сводимо на општи облик. Добијамо

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - 2x + 3 > 0 \\ x^2 - 3x - x - 5 \leq 0 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x^2 - 4x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

Једначина $x^2 - 4x + 4 = 0$ има једно решење $x = 2$ а пошто је парабола отворена нагоре, цео график функције $y = x^2 - 4x + 4$ налази се изнад x -осе, са темеом у тачки $(2, 0)$ (види цртеж). Значи, $x^2 - 4x + 4 > 0$ за $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, тј. скуп решења је $M_1 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Решења једначине $x^2 - 4x - 5 = 0$ су $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, па $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ за $x \in [-1, 5]$, тј. скуп решења је $M_2 = [-1, 5]$.

Добијени скупи решења обе неједначине представљени су графички на цртежу.



Скуп решења система је $M = M_1 \cap M_2 = ((-\infty, 2) \cup (2, +\infty)) \cap [-1, 5] = [-1, 2) \cup (2, 5]$.

Задатак 2

Решите систем квадратних неједначина са једном непознатом $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0 \end{cases}$

Пример 4

Решите неједначину $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} < 0$.

Решење:

Знамо да је количник негативан ако именилац и бројилац имају супротне знаке. Одатле следи да ће скуп решења ове неједначине бити унија скупова решења следећа два система квадратних неједначина:

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 16 > 0 \\ x^2 - 12x + 11 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0 \\ x^2 - 12x + 11 > 0 \end{cases}$$

Решења $x^2 - 6x - 16 = 0$ се $x_1 = -2$ и $x_2 = 8$, су $x^2 - 12x + 11 = 0$ се $x_1 = 1$ и $x_2 = 11$.

Решење првог система.

- $x^2 - 6x - 16 > 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$, тј. скуп решења је $(-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$
- $x^2 - 12x + 11 < 0$ за $x \in (1, 11)$, тј. скуп решења је $(1, 11)$.

Скуп решења првог система неједначина је пресек ова два скупа тј. $M_1 = (8, 11)$ (види цртеж).



Решење другог система.

- $x^2 - 6x - 16 < 0$ за $x \in (-2, 8)$, тј. скуп решења је $(-2, 8)$.
- $x^2 - 12x + 11 > 0$ за $x \in (-\infty, 1) \cup (11, +\infty)$, тј. скуп решења је $(-\infty, 1) \cup (11, +\infty)$.

Скуп решења другог система неједначина је пресек ова два скупа, тј. $M_2 = (-2, 1)$ (види цртеж).



Решење $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} < 0$ је $M = M_1 \cup M_2 = (-2, 1) \cup (8, 11)$.

Пример 5

Решити неједначину $\frac{x^2 + 2x + 1}{-x^2 - 2x + 3} \geq 0$.

Решење:

Количник неће бити ненегативан ако именилац и бројилац имају исти знак, при чему бројилац може бити и једнак нули. Одатле следи да ће скуп решења ове неједначине бити унија скупова решења следећа два система квадратних неједначина:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 1 \leq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 < 0 \end{cases}$$

Решења једначине $x^2 + 2x + 1 = 0$ су за $x_1 = x_2 = -1$ (и парабола функције $y = x^2 + 2x + 1$ је отворена нагоре) а решења на $-x^2 - 2x + 3 = 0$ су $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$ (и парабола функције $y = -x^2 - 2x + 3$ је отворена надолу).

Решење првог система.

- $x^2 + 2x + 1 \geq 0$ за $x \in \mathbb{R}$, тј. скуп решења је $(-\infty, +\infty)$
- $-x^2 - 2x + 3 > 0$ за $x \in (-3, 1)$, тј. скуп решења је $(-3, 1)$.

Скуп решења првог система неједначина је пресек ова два скупа, тј. $M_1 = (-3, 1)$.

Решење другог система.

- $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ за све x $x = -1$, тј. скуп решења је $\{-1\}$.
- $-x^2 - 2x + 3 < 0$ за $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, тј. скуп решења је $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Скуп решења другог система неједначина је пресек ова два скупа, тј. $M_2 = \emptyset$.

Решење дате неједначине је $M = M_1 \cup M_2 = (-3, 1)$.

Задатак 3

Решите неједначину $(x^2 - 3x - 10)(x^2 + 3x - 4) \leq 0$.

Задатак 4

Одредите област дефинисаности функције $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 12}}$.

Пример 6

Решите неједначину $\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} < 3$.

Решење:

$$\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} - 3 < 0$$

Број 3 пребацујемо са леве стране неједначине.

$$\frac{-x^2 + 2x - 3 - 3(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 4x + 3} < 0 \quad \text{Сређујемо израз са леве стране.}$$

$$\frac{-4x^2 + 14x - 12}{x^2 - 4x + 3} < 0$$

Скуп решења добијене неједначине биће унија скупова решења следећа два система квадратних неједначина:

$$\begin{cases} -4x^2 + 14x - 12 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x^2 + 14x - 12 < 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases}$$

Решења једначине $-4x^2 + 14x - 12 = 0$ су $x_1 = \frac{3}{2}$ и $x_2 = 2$ (а пошто је парабола функције $y = -4x^2 + 14x - 12$ отворена надолу), а решења једначине $x^2 - 4x + 3 = 0$ су $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ (па је парабола функције $y = x^2 - 4x + 3$ отворена нагоре).

Решење првог система.

$$-4x^2 + 14x - 12 > 0 \text{ за } x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \text{ за } x \in (1, 3).$$

Скуп решења првог система неједначина је пресек ова два скупа, тј. $M_1 = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Решење другог система.

$$-4x^2 + 14x - 12 < 0 \text{ за } x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ за } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

Скуп решења другог система неједначина је пресек ова два скупа, тј. $M_2 = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

Решење дате квадратне неједначине је $M = M_1 \cup M_2 = (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (3, +\infty)$.

Задатак 5

Решите неједначину $\frac{2x^2 + x - 13}{x^2 - 2x - 3} > 1$.

Пример 7

Еједан 3Д-штампач за t часова производи $P(t) = -t^2 + 16t$ објеката. Ако штампач ради t часова, онда је број неисправних објеката дат функцијом $D(t) = t^2 - 9t + 23$. Колико часова треба да ради штампач како би произвео најмање 48 објеката и не више од 5 неисправних објеката?

Решење:

Потребно је одредити интервал вредности за t – време рада штампача, тако да $P(t) \geq 48$ и $D(t) \leq 5$, тј. да одредимо скуп решења система неједначина:

$$\begin{cases} -t^2 + 16t \geq 48 \\ t^2 - 9t + 23 \leq 5 \end{cases}$$

Решење прве неједначине $-t^2 + 16t - 48 \geq 0$ је $M_1 = [4, 12]$, а друге неједначине $t^2 - 9t + 18 \leq 0$ је $M_2 = [3, 6]$.

Решење система је пресек ова два скупа $M = [4, 6]$.

Значи, штампач треба да ради од 4 до 6 часова како би произвео најмање 48 објеката и не више од 5 неисправних објеката.

Задатак 6

Одреди два узастопна природна броја чији је производ мањи од 90, а збир њихових квадрата већи од 113.

Задаци за вежбање!

1. Реши систем неједначина

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - x - 30 \leq 0 \\ x^2 - 4x - 32 > 0 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} -2x^2 + 3x + 5 > 0 \\ 2x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}; \quad \text{в) } \begin{cases} 4x^2 > 4x - 1 \\ (3x - 2)^2 + (x - 2)^2 < 2 \end{cases}$$

2. Реши неједначину

$$\text{а) } \frac{x^2 - 3x + 4}{1 - x^2} > 0; \quad \text{б) } \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x - 8} \leq 0.$$

$$\text{в) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > -3; \quad \text{г) } \frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} < -1.$$

3. Реши неједначину $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x - 3) < 0$.

4. Одреди област дефинисаности функције $f(x) = \sqrt{\frac{4x - x^2}{x^2 - x + 1}}$.

5. Ефикасност потрошње горива аутомобила, (у km по литру), при брзини v km/h дата је функцијом

$$E(v) = -0,01v^2 + 1,2v - 10.$$

Из еколошких разлога, ефикасност мора бити најмање 20 km/l, а ради безбедности мотора, ефикасност мора бити највише 30 km/l. Одреди интервал дозвољених брзина за које је ефикасност еколошки прихватљива и безбедна за мотор.

ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ И УТВРЂИВАЊЕ

1. Која од наведених функција је квадратна?

а) $f(x) = x - x^3$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = (x + 3)(3x - 1)$; г) $f(x) = 1 + x - x^2$.

2. Нека је $f(x) = -3x^2$.

- а) Попуни табелу

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$-3x^2$									

- б) Нацртај график функције.

3. Одреди m тако да график функције $f(x) = 2mx^2 - (m + 3)x + 2$ пролази кроз тачку $(-2, 3)$.

4. а) Направи табелу вредности функције $y = \frac{1}{4}x^2$ за пет различитих вредности независне променљиве x .

- б) Помоћу табеле скицирај график $y = \frac{1}{4}x^2$.

- в) Помоћу графика $y = \frac{1}{4}x^2$ скицирај график $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3$.

5. Одреди скуп вредности, теме и екстремну вредност функције.

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = -x^2 + 5$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$; г) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}$.

6. За колико јединица и у ком смеру треба померити параболу $y = 3x^2 - 2$ да би се добила параболу $y = 3x^2 + 5$?

7. Одреди теме, осу симетрије и екстремну вредност, а затим нацртај график функције.

а) $f(x) = -2(x + 1)^2$; б) $f(x) = 4(x - 2)^2 + 1$; в) $f(x) = 2x^2 + 12x + 9$.

г) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$; д) $f(x) = \frac{1}{3}(x - 2)^2 + 1$; б) $y = \frac{1}{5}(x - 3)^2 + \frac{1}{2}$.

8. За колико јединица и у ком смеру треба померити параболу $y = 2(x + 1)^2$ да би се добила параболу $y = 2(x - 5)^2 + 2$?

9. Одреди функцију чији је график симетричан у односу на x -осу са параболом $y = -2(x + 1)^2$.

10. Запиши функцију у канонском облику:

а) $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$; б) $f(x) = x^2 - 2x$; в) $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$.

11. Нацртај график функције $y = -\frac{1}{3}(x - 1)^2 + \frac{2}{3}$.

12. Нацртај график функције помоћу карактеристичних тачака

а) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$; б) $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

13. За које вредности p и q је тачка $T(2, -5)$ теме параболу $y = x^2 + px + q$?

14. За које вредности a , α и β , параболу $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ пролази кроз тачку $(2, 3)$ и има теме $(3, 4)$?

15. Одреди својства функција (теме, екстремна вредност, скуп вредности, нуле, интервали раста и опадања)

а) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$; б) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$; в) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

16. Одреди знак функције

а) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$; б) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

17. Број јабука произведених од сваког дрвета у јабуковом воћњаку зависи од тога колико су густо засађена дрвећа. Ако је на једном хектару земљишта засађено n дрвећа, онда свако дрво производи 900-9 n јабука. Колико дрвећа треба засадити на једном хектару воћњака да би се остварио максималан принос јабука? Нацртај график и испитај ток функције?

18. Нацртај график функције и испитај ток функције

а) $f(x) = -x^2 + x + 6$; б) $f(x) = x^2 - 9$.
в) $f(x) = (x+2)^2$; г) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$.

19. Реши квадратне неједначине

а) $x^2 + 3x - 4 < 0$; б) $x^2 + x - 6 > 0$;
в) $6x^2 + x - 1 \geq 0$; г) $x^2 - 25 \leq 0$.

20. Реши неједначину свдећи је на квадратну

а) $\frac{(x+2)^2}{3} - 3 \geq \frac{1-x}{4}$; б) $\frac{(x+2)^2}{3} + 2 \leq \frac{1-x}{4}$.

21. Одреди област дефинисаности функције $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x + 6}$.

22. За Стефанов аутомобил пут заустављања d , у центиметрима, при брзини v km/h дат је формулом

$$d = v + \frac{v^2}{2}.$$

Он жели да пут заустављања не буде већи од 760 cm. Одреди интервал брзина којима може да вози?

23. Један баштован има ограду укупне дужине 120 метара. Он жели да оградом огради правоугаону башту са поврћем у свом дворишту и жели да површина ограђеног простора буде најмање 800 m².

Који је интервал могућих вредности за дужину његове баште?

24. Које вредности $x \in \{-5, -1, 0, 5\}$ задовољавају систем $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -x^2 + 3x + 4 \leq 0 \end{cases}$?

25. Реши систем $\begin{cases} 4x - 1 > 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$.

26. Реши систем

а) $\begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 > 0 \\ 3x^2 + 2x - 1 > 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ -x^2 - 3x + 4 \geq 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases}$.

27. Реши неједначину $(2x^2 - 4x - 6)(-x^2 + 3x + 4) \geq 0$.

28. Одреди област дефинисаности функције $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}}$.

29. Реши неједначину $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$.

30. Одреди у ком интервалу треба да буде дужина странице квадрата, тако да збир његове површине и обима буде мањи од 21, а већи од 5.

ЕЛЕМЕНТИ ВЕРОВАТНОЋЕ

Комбинаторика и вероватноћа су две тесно повезане математичке области. Комбинаторика је део математике који се бави бројањем, распоређивањем и избором елемената према одређеним правилима. Она нам помаже да одговоримо на питања типа „На колико начина може...?“, а да притом не набрајамо све могућности појединачно. Вероватноћа, пак, омогућава математичко описивање појава у природи и друштву које нису детерминистичке, већ садрже елемент случајности. Почеци теорије вероватноће повезани су са играма на срећу. Данас се теорија вероватноће примењује у природним наукама, техници, економији и свим сферама живота.

4.1 ВАРИЈАЦИЈЕ СА ПОНАВЉАЊЕМ

Подсети се!

Декартов (директан) производ скупова A и B је скуп $A \times B$, који се састоји од уређених парова (a, b) , где је $a \in A$ и $b \in B$, односно

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Активност

Одреди скуп $A \times B$ ако је

а) $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 4\}$;

б) $C = \{0, 1, 2\}$ и $D = \{1, 2, 3, 4\}$

Пример 1

Ако је $A = \{1, 2, 3\}$, одреди Декартов производ $A \times A$. Колико елемената има овај Декартов производ?

Решење:

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Број елемената скупа $A \times A$ је $9 (= 3 \cdot 3 = 3^2)$.

Запамти!

Нека је A скуп са n елемената. Сваки елемент Декартовог производа $A \times A$ назива се *варијација са понављањем од n елемената класе 2*.

- Ако је A скуп са n елемената, колико елемената има Декартов производ $A \times A$, односно колико уређених парова (a, b) постоји, ако су a и b елементи скупа A ?

Уочи следеће:

- Елемент a може бити било који елемент скупа A . Скуп A има n елемената, па се a може изабрати на n начина.
- Када фиксирамо a , елемент b поново може бити било који елемент скупа A , па се и b може изабрати на n начина.
- Према томе, број елемената директног производа $A \times A$ је $n \cdot n = n^2$.

Запамти!

Број варијација са понављањем од n елемената класе 2 означава се са $\bar{V}_n^2$ и једнак је $\bar{V}_n^2 = n^2$.

Црта у ознаци $\bar{V}_n^2$ означава да је понављање дозвољено, односно да је реч о варијацијама са понављањем.

Нека је A дати скуп. Декартов производ $A \times A \times A$ је скуп који садржи све уређене тројке (a_1, a_2, a_3) , где су $a_1, a_2, a_3 \in A$, односно

$$A \times A \times A = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in A\}.$$

Пример 2

Нека је $A = \{1, 2\}$. Одреди Декартов производ $A \times A \times A$. Колико елемената има овај скуп?

Решење:

$$A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}.$$

Скуп $A \times A \times A$ има 8 елемената $(= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3)$.

Задатак 1

Одреди Декартов производ $A \times A \times A$, где је $A = \{3, 5, 7\}$. Колико елемената има овај скуп?

Запамти!

Ако је A скуп са n елемената, сваки елемент Декартовог производа $A \times A \times A$ назива се *варијација са понављањем од n елемената класе 3*. Број варијација са понављањем од n елемената класе 3 означава се са $\bar{V}_n^3$ и једнак је $\bar{V}_n^3 = n^3$.

Запамти!

Декартов производ $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ пута}}$ у коме се скуп A појављује k пута, састоји се од уређених k -торки $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, где су $a_1, a_2, \dots, a_k$ елементи скупа A , односно.

$$A \times A \times \dots \times A = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in A\}.$$
Пример 3

Нека је $A = \{c, d\}$. Запиши скуп $A \times A \times A \times A$. Колико елемената има овај скуп?

Решење:

$A \times A \times A \times A = \{(c, c, c, c), (c, c, c, d), (c, c, d, c), (c, c, d, d), (c, d, c, c), (c, d, c, d), (c, d, d, c), (c, d, d, d),$
 $(d, c, c, c), (d, c, c, d), (d, c, d, c), (d, c, d, d), (d, d, c, c), (d, d, c, d), (d, d, d, c), (d, d, d, d)\}$

Број елемената скупа $A \times A \times A \times A$ је $16 = 2^4$. Број 2 је број елемената скупа A , а број 4 је број појављивања скупа A у Декартовом производу.

Запамти!

- Ако је A скуп са n елемената, сваки елемент Декартовог производа $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ пута}}$, назива се **варијација са понављањем од n елемената класе k** .
- Број варијација са понављањем од n елемената класе k означава се са $\bar{V}_n^k$ и једнак је $\bar{V}_n^k = n^k$.

- Уочи да су $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ различите уређене тројке, иако су састављене од истих елемената. Према томе, распоред елемената у k -торци је важан: различити распореди елемената дају различите k -торке.

Запамти!

Редослед елемената у варијацији са понављањем од n елемената класе k је важан. Променом редоследа елемената добија се друга варијација.

Договор: У наставку текста, ради једноставнијег записивања, варијације са понављањем писаћемо без заграда и зареза. Тако ћемо варијацију (c, d, c, d) писати као $cdcd$. При томе не смемо заборавити да је и даље реч о уређеној k -торци и да је редослед елемената важан.

Пример 4

Колико троцифрених бројева може да се формира цифрама 1, 2, 3, 4?

Решење:

- Треба имати у виду да је позиција цифре у вишецифреном броју значајна. Наиме, бројеви 321 и 213 састоје се од истих цифара, а ипак представљају различите бројеве.
- Дакле, у позиционом бројном систему положај цифре у броју је битан; сходно томе, сваки k -цифрени број може се посматрати као уређена k -торка — или, другим речима, као варијација са понављањем класе k .
- Из тога следи да је број троцифрених бројева састављених од цифара 1, 2, 3 и 4 једнак укупном броју варијација са понављањем од 4 елемента класе 3, што износи $\bar{V}_4^3 = 4^3 = 64$.

Активност

Напиши све троцифрене бројеве који се могу формирати цифрама 1, 2, 3, 4.

Пример 5

- Колико четвороцифрених бројева може да се формира цифрама 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
- Колико њих почиње цифром 5?
- Колико њих је парно?

Решение:

- Тражени четвороцифрени бројеви су, заправо, варијације са понављањем 9 елемената класе 4. Њихов број је $\bar{V}_9^4 = 9^4 = 6561$.
- Ако се на првој позицији (позицији хиљада) фиксира цифра 5, преостале три позиције представљају варијације са понављањем од 9 елемената класе 3. Њихов број је $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$.
- Број је паран ако се завршава парном цифром. Ако се на последњој позицији (позицији јединица) фиксира цифра 2, прве три позиције могу се сматрати варијацијама са понављањем 9 елемената класе 3. Баш као и раније, њихов број је $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$.
Исти број варијација се добија ако је последња позиција фиксирана на 4 или 6 или 8. Дакле, цифра јединица може бити једна од цифара 2, 4, 6 или 8, тј. постоје 4 начина да се изабере ова цифра. Која год од ових цифара је фиксирана на позицији јединица, преостале три цифре се могу попунити на $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$ начина. Дакле, укупан број парних четвороцифрених бројева састављених од цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 је $4 \cdot \bar{V}_9^3 = 4 \cdot 9^3 = 2916$.

Задатак 2

Колико непарних петоцифрених бројева може да се формира цифрама 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Пример 6

На зиду се налазе 3 вешалице. На колико начина се 4 капута могу окачити на њих, ако на једној вешалици може бити више капута?

Решење:

- Сваком капуту можемо доделити ознаку 1, 2 или 3, зависно од тога на коју ће вешалицу бити окачен.
- Сваки распоред 4 капута на 3 вешалице може се посматрати као варијација са понављањем од 3 елемента класе 4.
- На пример, запис 1132 означава да су први и други капут на првој вешалици, трећи капут на трећој, а четврти капут на другој вешалици.
- Зато се 4 капута могу распоредити на 3 вешалице на $V_3^4 = 3^4 = 81$ начин.

Задаци за вежбање!

1. Дати су скупови $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Одреди Декартов производ $A \times B$.
2. Дат је скуп $A = \{a, b\}$. Запиши све варијације са понављањем класе 5 од елемената скупа A .
3. Колико има троцифрених бројева у којима се не појављују цифре 0 и 3?
4. Одреди број свих четвороцифрених бројева који се могу записати цифрама 1, 3, 4, 6 и 8.
5. На колико начина се може попунити тикет спортске прогнозе са 10 парова? За сваки пар постоје три могућности: 1 – победа прве екипе, 2 – победа друге екипе, 0 – нерешено).
6. У приземљу четвороспратнице у лифт је ушло 6 људи. На колико начина они могу напустити лифт ако свако може изаћи на било ком од четири спрата.
7. На колико начина се 6 писама може распоредити у 3 различита поштанска сандучета, ако се у свако сандуче може ставити више писама.
8. а) Колико различитих петоцифрених ПИН-кодова може да се формира цифрама 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ако је понављање цифара дозвољено?
б) Колико њих се завршава цифром 0?
в) Колико њих почиње непарном цифром?

4.2 ВАРИЈАЦИЈЕ БЕЗ ПОНАВЉАЊА

Подсети се!

Ако је A скуп са n елемената, сваки елемент Декартовог производа $A \times A \times \dots \times A$ (у коме се A појављује k пута као чинилац), назива се варијација са понављањем од n елемената класе k .

Пример 1

Колико троцифрених бројева са различитим цифрама може да се формира цифрама 1, 2, 3, 4.

Решење:

Бројеве формирамо, у растућем редоследу, на следећег начин:

123, 124, 132, 134, 142, 143,
213, 214, 231, 234, 241, 243,
312, 314, 321, 324, 341, 342,
412, 413, 421, 423, 431, 432.

Укупан број троцифрених бројева састављених од цифара 1, 2, 3 и 4, у којима су све цифре различите, износи 24.

У претходној лекцији рекли смо да се сваки троцифрени број састављен од цифара 1, 2, 3 и 4, при чему се цифре могу понављати, може посматрати као варијација са понављањем од 4 елемента класе 3. Ако су, међутим, у варијацији сви елементи различити, такву варијацију називамо варијацијом без понављања.

Запамти!

- Варијација од n елемената класе k у којој су сви елементи различити назива се **понављања од n елемената класе k** .
- Дакле, варијација без понављања од n елемената класе k је свака уређена k -торка међусобно различитих елемената скупа са n елемената.

Приметите да, да би сви елементи у непонављајућој варијацији од n елемената класе k били различити, мора бити испуњен услов $k \leq n$. Такође, као и код варијација са понављањем, распоред елемената је важан, тј. другачији распоред даје другачију могућност.

Задатак 1

Наћи све непонављајуће варијације елемената скупа $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ класе 3.

Нека је A скуп са n елемената од којих се формирају варијације без понављања класе k . Свака таква варијација како елемент скупа $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ пута}}$, (k пута), је уређена k -торка $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, где су $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$. Број свих варијација без понављања од n елемената класе k означава се са V_n^k и одређује се на следећег начин:

- Елемент a_1 на првој позицији може бити било који од n елемената скупа A , па се може изабрати на n начина.
- После избора a_1 елемент a_2 на другој позицији може се изабрати од преосталих $n - 1$ елемената јер мора бити различит од a_1 .
- Прва два елемента могу се, дакле, изабрати на $n(n - 1)$ начина.
- Након што су елементи a_1 и a_2 на прве две позиције изабрани, елемент a_3 на трећој позицији може се изабрати из преосталих $n - 2$ елемента (мора бити различит од a_1 и од a_2). Дакле, може се изабрати на $n - 2$ начина.
- Отуда, прва три елемента могу да се изаберу на $n(n - 1)(n - 2)$ начина. ?
- Настављамо поступак на исти начин док се свих k позиција не попуне. Може се закључити да је укупан број могућих избора, тј. укупан број варијација без понављања n елемената класе k , једнак

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)).$$

Запамти!

- Производ првих n природних бројева назива се „ n -факторијел“ и означава се са $n!$.
- Значи,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

При томе, $1! \stackrel{\text{def}}{=} 1$, $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

На пример, $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Користећи ову нотацију, формула за одређивање броја варијација без понављања може се написати на следећи начин:

$$\begin{aligned} V_n^k &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Запамти!

Укупан број варијација без понављања од n елемената класе k , при чему је $k (k \leq n)$ израчунава се формулом:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 2

Колико четвороцифрених бројева се може формирати користећи цифре од 1 до 9 ако су бројеви састављени од различитих цифара?

Решење:

Пошто бројеви морају бити састављени од различитих цифара, укупан број таквих четвороцифрених бројева састављених од цифара од 1 до 9 је, заправо, број свих варијација без понављања 9 елемената класе 4, тј.

$$V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

Задатак 2

Колико петоцифрених бројева са различитим цифрама може да се формира цифрама од 1 до 9.

Пример 3

Колико петоцифрених бројева може да се формира цифрама 0, 1, 2, ..., 9, ако су бројеви састављени од различитих цифара.

Решење:

- У овом случају, треба напоменути да број не сме почети са 0. На пример 01234 је четвороцифрени, а не петоцифрени број. Стога, да би се добили сви петоцифрени бројеви састављени од цифара 0, 1, 2, ..., 9, од укупног броја варијација без понављања 10 елемената класе 5, треба одузети број оних варијација које почињу са 0.
- Укупан број варијација без понављања 10 елемената класе 5 је $V_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 30240$.
- Може се навести број тих варијација које се не понављају које почињу са 0 тако да ће 0 бити фиксирано на првој позицији, а преостале четири позиције ће бити попуњене са бројевима од 1 до 9. Укупан број оваквих варијација је $V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 3024$.
- Дакле, број петоцифрених бројева са различитим цифрама је

$$V_{10}^5 - V_9^4 = 30240 - 3024 = 27216.$$

Задатак 3

Колико шестоцифрених бројева са различитим цифрама може да се састави од цифара 0, 1, 2, ..., 9, ако бројеви не почињу цифром 1 или 2.

Пример 4

На 9 карата записане су цифре од 1 до 9, по једна цифра на свакој карти. Карте се добро измешају, а затим се извлаче 4 карте једна по једна и ређају редоследом извлачења. На колико начина се могу извући карте тако да се добије паран четвороцифрени број?

Решење:

- Свако извлачење 4 карте и њихово ређање по редоследу извлачења представља варијацију без понављања од 9 елемената класе 4. Али, потребне су само оне варијације које се завршавају једном од парних цифара 2, 4, 6 или 8.
- Ако се на последњој позицији фиксира цифра 2, претходне три позиције могу се попунити преосталим 8 цифрама (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) на $V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$ начина.
- Ако се на последњој позицији фиксира цифра 4, претходне три позиције могу да се попуне преосталих 8 цифара, такође на 336 начина.
- Исти број се добија ако је цифра 6 или 8 фиксирана на последњој позицији.
- Дакле, имамо 4 могућности за избор цифре на последњој позицији (позицији јединица) и за сваки избор те цифре, претходне три позиције могу се попунити на 336 начина. Дакле, укупан број парних четвороцифрених бројева формираних од цифара од 1 до 9 је $4 \cdot V_8^3 = 4 \cdot 336 = 1344$.

Задатак 4

Колико различитих троцифрених бројева може да се формира цифрама од 2 до 8 ако:

- а) цифре могу да се понављају;
- б) Дали су бројеви састављени од различитих цифара?

Пример 5

У аутобус са 7 празних места улази 5 особа. На колико начина оне могу сести на празна места.

Решење:

- Свака особа бира позицију од 1 до 7 где ће седети. У овом случају, две или више особа не могу изабрати исто место за седење.
- Стога је ово варијација без понављања 7 елемената класе 5, тако да је потребан број могућих распореда $V_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$.

Задаци за вежбање!

1. Израчунај: а) $7!$; б) $4!$; в) $\frac{8!}{4!}$.
2. Израчунај: а) V_{11}^3 ; б) V_{14}^4 .
3. Реши једначину по непознатој n :
а) $V_n^2 = 72$; б) $9 \cdot V_n^3 = 5 \cdot \bar{V}_n^3$; в) $V_n^{10} + V_n^9 = 9 \cdot V_n^8$; г) $5 \cdot V_n^2 = \bar{V}_n^2$.
4. На географској карти приказане су 4 државе, а свака се може обојити једном од 9 датих боја. На колико начина се карта може обојити ако свака држава мора бити различите боје?
5. Колико има петоцифрених бројева састављених од различитих цифара који се завршавају са 67?
6. Колико трочланих делегација може да се формира од 12 људи ако се свака делегација састоји од председника, секретара и благајника?
7. Одреди број свих парних четвороцифрених бројева који се могу записати цифрама 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, ако се цифре не смеју понављати.
8. У библиотеци има 5 читалаца и 8 различитих књига. Сваки читалац бира по једну књигу, а једну књигу може изабрати само један читалац.
На колико начина се књиге могу расподелити?

4.3 ПЕРМУТАЦИЈЕ

Подсети се!

Шта је варијација са понављањем од n елемената класе k , а шта варијација без понављања од n елемената класе k ?

Активност

Напиши све троцифрене бројеве са различитим цифрама који се могу формирати цифрама 1, 2 и 3. Колико их има?

Тражени бројеви су све варијације без понављања од 3 елемента класе 3. Њихов број је

$$V_3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 3! = 6. \text{ То су бројеви: } 123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

Запамти!

Варијација без понављања од n елемената класе n назива се **пермутација без понављања од n елемената**.

Пример 1

Формирајмо све пермутације без понављања од елемената a , b , c и d . Посматрај поступак формирања пермутација:

$abcd$	$abdc$	$acbd$	$acdb$	$adbc$	$adcb$
$bacd$	$badc$	$bcad$	$bcda$	$bdac$	$bdca$
$cabd$	$cadb$	$cbad$	$cbda$	$cdab$	$cdba$
$dabc$	$dacb$	$dbac$	$dbca$	$dcab$	$dcba$

Уочи да су пермутације поређане по абecedном (лексикографском) редоследу. Такође, једнак број (по 6) пермутација почиње сваким од датих елемената.

Запамти!

Пермутације су посебна врста варијација, па пошто је код варијација распоред (редослед) елемената важан, тај распоред је важан и код пермутација, односно различити распореди елемената дају различите пермутације.

Број пермутација без понављања од n елемената означава се са P_n . У складу са дефиницијом пермутације без понављања од n елемената као варијације без понављања од n елемената, за P_n добијамо:

$$P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

Запамти!

Број пермутација без понављања од n елемената је $n!$.

Пример 2

На колку начини може да се наредат 4 различити книги на една полица ако распоредот на книгите на полицама е битен?

Решение:

Сваки распоред четири књиге представља једну пермутацију без понављања од 4 елемента. Зато је број распореда $P_4 = 4! = 24$.

Задатак 1

У једној корпи има 7 врста воћа: једна јабука, једна крушка, једна бресква, једна банана, један ананас, један лимун и једна поморанџа. На колико начина се воће може поделити на 7 деце, без сечења.

Пример 3

- Колико четвороцифрених бројева са различитим цифрама може да се формира цифрама 2, 3, 4 и 5?
- Колико њих почиње цифром 4?
- Код колико њих је 4 прва, а 3 друга цифра?

Решење:

- Број тражених бројева једнак је броју пермутација без понављања од 4 елемента $P_4 = 4! = 24$.
- Ако се цифра 4 фиксира на првој позицији, преостале три позиције попуњавају се преосталим трима цифрама. Број могућности је $P_3 = 3! = 6$.
- Ако се цифра 4 фиксира на првој, а цифра 3 на другој позицији, преостале две цифре могу се распоредити на $P_2 = 2! = 2$ начина.

Пример 4

Која је 243. пермутација по лексикографском редоследу састављена од елемената a, b, c, d, e и f ?

Решење:

- Претходно смо уочили да се пермутације формирају по лексикографском редоследу и да једнак број пермутација почиње сваким од наведених 6 елемената.
- Укупан број пермутација је $P_6 = 6! = 720$. Дакле, са сваким елементом започиње тачно 120 пермутација.
- Дакле, са елементом a започиње првих 120 пермутација, док са елементом b започињу следећих 120 пермутација, односно пермутације са редним бројем од 121 до 240.
- Прва пермутација која започиње елементом c је пермутација са редним бројем 241. То је пермутација $cabdfe$. Након ње следе $cabedf$. Дакле, тражена пермутација је $cabedf$.

Активност

Запиши све пермутације без понављања од елемената a_1, a_2, a_3, b . Затим у свакој пермутацији замени $a_1 = a_2 = a_3$. Колико пута ће се појавити исти распоред елемената односно иста пермутација?

Запамти!

Нека су $a_1, a_2, \dots, a_k$ различити елементи. Сваки различит распоред у коме се a_1 појављује n_1 пута, a_2 се појављује n_2 пута, $\dots$, a_k се појављује n_k пута ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) назива се **пермутација са понављањем од n елемената типа $(n_1, n_2, \dots, n_k)$** .

Одредимо број пермутација са понављањем од n елемената у којима се један елемент (на пример, елемент a) појављује m пута, а сви остали елементи се појављују само једанпут, односно одредимо број пермутација са понављањем од n елемената типа $(m, 1, \dots, 1)$.

- Најпре, нека свако од m појављивања елемента a посматрамо као различит елемент, односно да сматрамо да се у пермутацији појављују елементи $a_1, a_2, \dots, a_m$, који ће међусобно бити различити и различити од осталих елемената у пермутацији. Тада ћемо имати пермутације без понављања од n елемената. Њихов број је $n!$.
- Ако затим заменимо $a_1 = a_2 = \dots = a_m = a$, неке од пермутација ће бити једнаке. Заправо, свака пермутација ће се понављати $m!$ пута (када се m елемената a међусобно пермутује на m позиција).
- Отуда, укупан број пермутација са понављањем од n елемената типа $(m, 1, \dots, 1)$ добија се дељењем броја $n!$ са $m!$.

Запамти!

Број пермутација са понављањем n елемената, од којих се један елемент понавља m пута, а преостали елементи се појављују тачно једном, означен је са $P_n(m, 1, \dots, 1)$ и тај број се израчунава формулом

$$P_n(m, 1, \dots, 1) = \frac{n!}{m!}.$$

Задатак 2

Одреди број петоцифрених бројева који се могу саставити од елемената 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4.

Сличним размишљањем као и претходно, формула за број пермутација са понављањем од n елемената типа $(m, 1, \dots, 1)$ може се уопштити у формулу за број пермутација са понављањем од n елемената типа $(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Запамти!

Број пермутација са понављањем од n елемената типа $(n_1, n_2, \dots, n_k)$, где је $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, израчунава се по следећој формули:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Пример 5

Колико различитих пермутација може да се добије од слова речи БАБАТА?

Решење:

У овој речи слово Б се појављује 2 пута, слово А – 3 пута, а слово Т – једном. Отуда је број различитих пермутација са понављањем од 6 елемената типа $(2, 3, 1)$ е

$$P_6(2, 3, 1) = \frac{6!}{2!3!1!} = 60.$$

Пример 6

- Колико седмоцифрених бројева може да се формира од цифара 1, 4 и 8 ако се цифра 1 појављује 4 пута, цифра 4 два пута, а цифра 8 једном?
- Колико њих почиње цифром 4?
- Колико њих почиње са 41?

Решење:

- а) Укупан број шестоцифрених бројева који се могу саставити од 4 јединице, 2 четворке и 1 осмице је

$$P_7(4,2,1) = \frac{7!}{4!2!1!} = 105.$$

- б) Ако се на прву позицију фиксира цифра 4, преосталих 6 позиција треба попунити са 4 јединице, 1 четворком и 1 осмицом. Укупан број таквих седмоцифрених бројева је

$$P_6(4,1,1) = \frac{6!}{4!1!1!} = 30.$$

- в) Слично као и претходно, ако се прве две позиције попуне цифрама '41', преосталих 5 позиција треба попунити са 3 јединице, 1 четворком и 1 осмицом, па је тражени број седмоцифрених бројева

$$P_5(3,1,1) = \frac{5!}{3!1!1!} = 20.$$

Задатак 3

Одреди број различитих пермутација са понављањем које се могу добити од слова речи ПАРА ЛЕЛА.

Задатак 4

У продавници одеће продају се мајице у четири величине: S, M, L и XL.

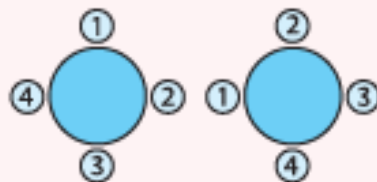
У магацину има 2 мајице величине S, 3 величине M, 4 величине L и 2 величине XL. На колико различитих начина може да изгледа редослед продаје свих мајица, ако се мајице исте величине сматрају једнаким?

Пример 7

На колико начина се k људи може распоредити око кружног стола ако није важно ко седи на којој столици, већ само њихов кружни редослед?

Решење:

Уочимо да су два распореда дата на слици једнака. Да би се добили сви различити распореди, довољно је да се фиксира једна особа на једну столицу, а да се остале особе распоређују на све могуће начине на преосталим столицама. Број свих пермутација са 3 елемента је $P_3 = 3! = 6$.



Уочимо да се k људи може распоредити око округлог стола на $(k - 1)!$ начина. Наиме, једна особа се фиксира на једну столицу, а остале особе се распоређују на све могуће начине.

Задаци за вежбање!

1. Пет гостију одседа у хотелу који има 5 соба. На колико начина могу бити распоређени ако у свакој соби борави највише један гост?
2. У првом реду школске приредбе има 7 места резервисаних за директора и 6 наставника из руководства школе. На колико начина могу сести ако директор увек седи на средњој столици?
3. Сваким распоредом 4 свеће — беле, црвене, зелене и плаве — слева надесно задаје се један сигнал. Колико различитих сигнала постоји?
4. Колико различитих речи може да се формира од слова речи:
а) КЊИГА; б) МАТЕМАТИКА.
5. Одреди 5!-пермутацију слова речи КЊИГА по азбучном редоследу, ако је прва пермутација добијена азбучним ређањем слова.
6. Колико осмоцифрених бројева може да се формира од цифара 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4?
7. Колико шестоцифрених бројева може да се формира од цифара 1, 1, 0, 0, 0, 2?
8. На колико начина се 4 црвена, 3 плава и 3 бела балона могу поделити десеторо деце, ако је важна боја балона који свако дете добија?
9. У групи од 6 људи само се две особе међусобно познају. На колико начина група може сести за кружни сто тако да познаници увек седе један поред другог?
10. У једној фабрици се штампа 15 етикета са ознакама а, б, в, г, д. Потребно је одштампати: 5 етикета са ознаком а, 3 са ознаком б, 3 са ознаком в, 2 са ознаком г и 2 са ознаком д. Етикете се ређају у низ. На колико различитих начина се могу распоредити етикете?

4.4 КОМБИНАЦИЈЕ

АКТИВНОСТ

Од ученика A, B, C, D и E треба саставити двочлани тим за шаховско такмичење. На колико начина се тим може саставити? Да ли су $\{A, B\}$ и $\{B, A\}$ различити тимови?

Пример 1

Дат је скуп $A = \{a, b, c, d\}$. Одреди сва његова подскупа која имају по 3 елемента. Да ли је распоред елемената у једном подскупу битан, односно да ли различит распоред даје различит подскуп?

Решење:

Подскупови скупа A који садрже по 3 елемента су:

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

Уочимо да распоред елемената није битан. На пример, $\{a, b, c\}$ и $\{b, a, c\}$ представљају исти скуп.

Запамти!

Сваки подскуп са k елемената датог скупа са n елемената назива се **комбинација без понављања од n елемената класе k** .

Важно!

- Свака комбинација од n елемената класе k представља подскуп са k елемената датог скупа са n елемената.
- Редослед елемената у комбинацији није важан, односно различит распоред истих елемената у једном подскупу даје исту комбинацију.
- С обзиром на то да је комбинација без понављања скуп, за означавање комбинација користимо велике заграде $\{ \}$, а не мале заграде $()$.

Пример 2

Колико различитих букета од по 3 цвета може да се направи од руже, лале, кале, гербера и хризантеме, ако букет садржи највише један цвет сваке врсте?

Решење:

Распоред цветова у једном букету није битан и букети треба да садрже 3 различита цвета. Зато се ради о комбинацијама без понављања од 5 елемената класе 3.

Ако користимо кратке ознаке: Р — ружа, Л — лала, К — кала, Г — гербер и Х — хризантема:

{Р, Л, К}, {Р, Л, Г}, {Р, Л, Х}, {Р, К, Г}, {Р, К, Х}, {Р, Г, Х}, {Л, К, Г}, {Л, К, Х}, {Л, Г, Х}, {К, Г, Х}.

Укупан број различитих букета, односно укупан број комбинација без понављања од 5 елемената класе 3, износи 10.

Одредимо број комбинација без понављања од n елемената класе k .

- Број варијација без понављања од n елемената класе k је V_n^k .
- С друге стране, ако се изабере једна комбинација без понављања од n елемената класе k , њој одговара $k!$ различитих варијација без понављања од n елемената класе k , које се добијају различитим распоредом елемената. На пример, комбинацији {a, b, c} одговарају следеће варијације (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a) (укупно има $6 = 3!$ варијација).
- Дакле, укупан број комбинација без понављања од n елемената класе k добија се дељењем укупног броја варијација без понављања од n елемената класе k са $k!$.

Запамти!

Укупан број комбинација без понављања од n елемената класе k означава се са C_n^k и одређује се формулом:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 3

Од 5 дечака и 7 девојчица треба формирати екипу од 6 чланова. На колико начина се екипа може изабрати ако:

- а) нема ограничења у погледу броја кандидата од сваког пола;
- б) у екипи морају бити тачно 2 дечака;
- в) у екипи треба да буду најмање 4 девојчице.

Решење:

Сви чланови екипе имају исти ранг, па зато распоред чланова није битан. Дакле, ради се о комбинацијама.

а) Ако нема ограничења у погледу пола, то су комбинације од 12 елемената класе 6, па је њихов број $C_{12}^6 = \frac{12!}{6!(12-6)!} = 924$. Различити број могућности за формирање екипе.

б) Ако број дечака у екипи треба да буде тачно 2, тада број девојчица треба да буде 4. Од 5 дечака могу се изабрати 2 на $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ начина.

За сваки избор 2 дечака, 4 девојчице (од укупно 7) могу се изабрати на $C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$ начина. Одавде следи да укупан број могућих избора је

$$C_5^2 \cdot C_7^4 = 10 \cdot 35 = 350.$$

в) У екипи ће бити најмање 4 девојчице у следећа три случаја:

- 4 девојчице и 2 дечака (број могућности је $C_7^4 \cdot C_3^2 = 35 \cdot 10 = 350$);
- 5 девојчица и 1 дечак (број могућности је $C_7^5 \cdot C_3^1 = 21 \cdot 5 = 105$);
- 6 девојчица и 0 дечака (број могућности је $C_7^6 \cdot C_3^0 = 7 \cdot 1 = 7$).

Дакле, укупан број различитих екипа са најмање 4 девојчице је

$$C_7^4 \cdot C_3^2 + C_7^5 \cdot C_3^1 + C_7^6 \cdot C_3^0 = 350 + 105 + 7 = 462.$$

Задатак 1

Ана има 10 непровитаних књига. На одмор жели да понесе 3 књиге. На колико начина их може изабрати?

Запамти!

Број комбинација C_n^k записује се као $\binom{n}{k}$ и чита се „ n над k “. Значи, $C_n^k = \binom{n}{k}$.

За сваки природан број n важе следеће једнакости:

$$C_n^0 = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1, \quad C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1, \quad C_n^1 = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n.$$

Пример 4

Докажи да је $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Решење:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}.$$

Пример 5

У цвећари има цветова руже и хризантеме. Колико различитих букета од по 3 цвета може да се формира ако у букетима могу да се појаве и цветови исте врсте? Који су то букети?

Решење:

Сваки букет може се посматрати као група од 3 цвета. Ако користимо Р за ружу и Х за хризантему, могуће групе су:

Р Р Р Р Р Х Р Х Х Х Х Х.

Дакле, укупан број оваквих група (букета) је 4.

Запамти!

Свака група од k елемената из скупа са n врста елемената, у којој се елементи могу понављати и редослед није важан, назива се **комбинација са понављањем од n елемената класе k** .

Уочи да у једној групи распоред елемената није битан, па самим тим ни у комбинацији са понављањем од n елемената класе k распоред елемената није битан. То значи да различит распоред датих елемената даје исту комбинацију са понављањем.

Запамти!

Број свих различитих комбинација са понављањем од n елемената класе k означава се са $\bar{C}_n^k$ и тај број се одређује формулом

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

У претходном задатку број различитих букета са 3 цвета који могу да се направе од 2 врсте цветова који се налазе у цвећари је $\bar{C}_2^3 = C_{2+3-1}^3 = \binom{4}{3} = 4$.

Пример 6

У посластичарници постоје сладоледи са укусом чоколаде, ваниле, јагоде, ораха, лешника и лимуна. Колико различитих порција од по три кугле сладоледа може да се направи ако:

- све кугле у једној порцији су различитог укуса;
- у порцији могу бити и кугле истог укуса.

Решење:

Редослед кугли сладоледа у једној порцији није битан, па зато говоримо о комбинацијама са 6 елемената класе 3. У првом случају то су комбинације без понављања, а у другом случају – комбинације са понављањем.

$$\text{а) } C_6^3 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20, \quad \text{б) } \bar{C}_6^3 = C_{6+3-1}^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$$

Задатак 2

На колико начина могу да се изабере 4 бомбоне од 5 различитих укуса ако може да се изабере више бомбона једног укуса?

Пример 7

За једно такмичење од 6 кандидата треба изабрати жири састављен од троје чланова. Од њих треба изабрати једног председника жирија и још два члана. При томе, два члана имају исти ранг. На колико начина може да се састави овакво жири?

Решење:

- Најпре, број избора за председника жирија је $C_6^1 = 6$.
- За сваки избор председника, остаје да се изабере два члана од преосталих 5 кандидата. Чланови су исти по рангу, па зато распоред елемената није битан и ради се о комбинацијама без понављања од 5 елемената класе 2. Укупан број оваквих избора је $C_5^2 = 10$.
- Дакле, укупан број избора председника жирија и два члана (са истим рангом) је

$$C_6^1 \cdot C_5^2 = 6 \cdot 10 = 60.$$

Задатак 3

Међу седам кандидата за два слободна места у једној компанији налазе се три мушкарца и четири жене. На колико начина могу да се попуне два места:

- било којом двојicom кандидата?
- са две жене?
- са једним мушкарцем и једном женом?

Задаци за вежбање!

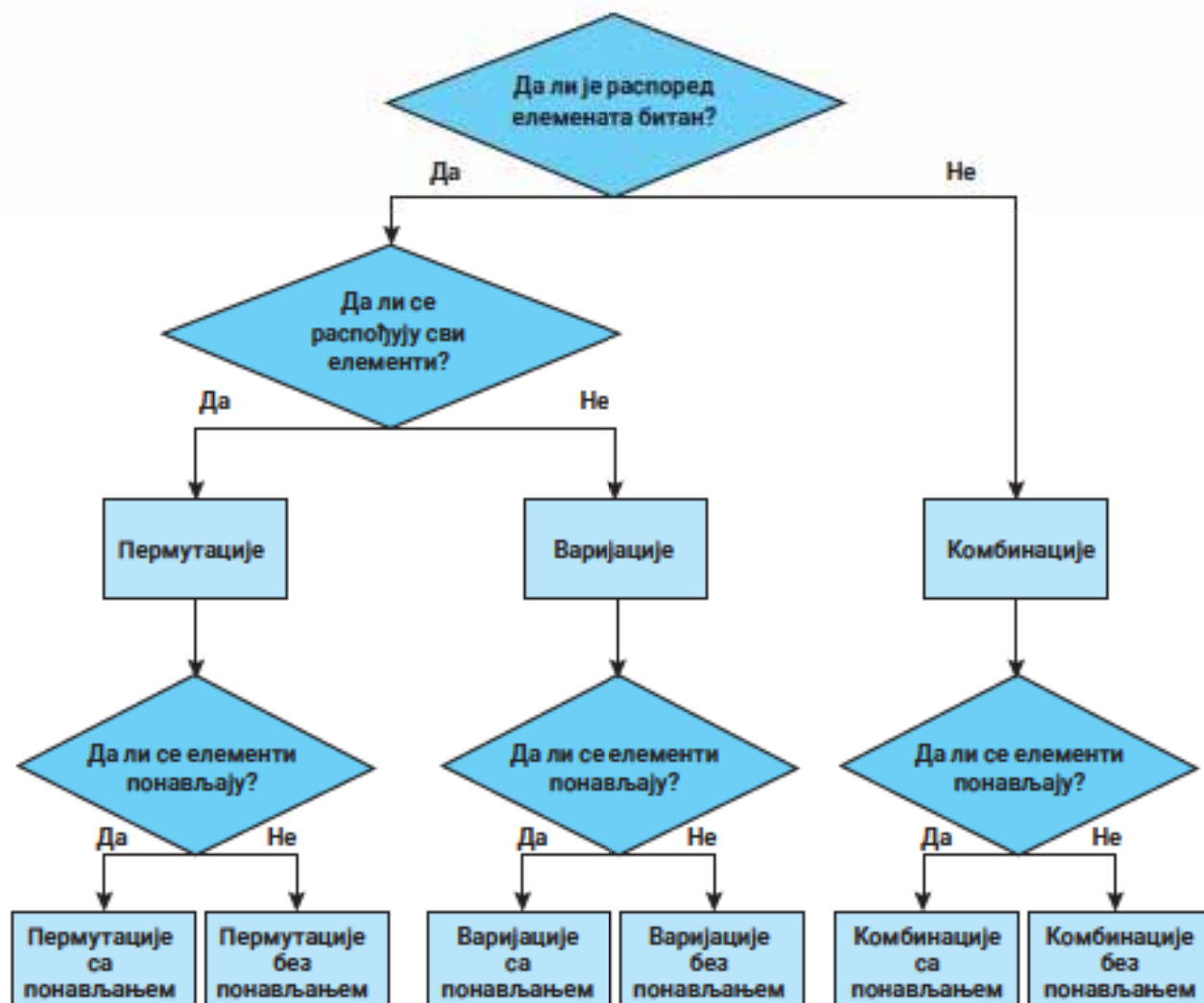
1. Напиши све комбинације без понављања класе 4 од елемената скупа $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.
2. Израчунај: а) C_7^4 ; б) C_9^5 ; в) $C_8^3 \cdot C_5^2$; г) $\frac{C_{11}^9}{C_8^4}$.
3. На колико начина се од 8 књига може изабрати 5?
4. На колико начина се 24 људи могу поделити у две групе од по 12 људи?
5. На колико начина се 16 ученика и 20 ученица могу распоредити у два одељења тако да у сваком буде 8 ученика и 10 ученица?
6. Пет девојака и шест младића номиновано је за избор мис и мистера на матурској вечери. На колико начина се могу изабрати мис, мистер и два пратиоца, ако пратиоци могу бити било ког пола?
7. У магацину има маркера у 7 различитих боја. Треба их паковати по 3 тако да сва три маркера буду различитих боја. Колико различитих паковања постоји?
8. Тренер има 11 играча и треба да изабере 5 који ће изводити пенале после нерешене утакмице. На колико начина може извршити избор?
9. Колико комбинација лотоа „7 од 37“ треба уплатити да би се обезбедила сигурна добит?
10. Напиши све комбинације са понављањем класе 4 од елемената скупа $A = \{a, b, c\}$.
11. У цвећари има цветова у пет боја: црвеној, белој, плавој, розе и жутој. На колико начина се може саставити букет од 5 цветова ако:
 - а) сви цветови морају бити различитих боја;
 - б) у букету могу бити и цветови исте боје.

4.5 НЕКИ КОМБИНОВАНИ ЗАДАЦИ

Подсети се!

- Шта су варијације, пермутације и комбинације?
- Редослед (распоред) елемената код комбинација није битан, а код варијација и пермутација – распоред елемената је битан.

Највећи проблем при решавању задатака из комбинаторике је да се утврди којој категорији (комбинацији, варијацији или пермутацији) припада дати задатак. Одговор на ово питање може се добити ако се следи алгоритам задат следећим дијаграмом.



Ако се прати шематски приказани алгоритам, поступак за препознавање комбинација, варијација и пермутација одвија се на следећи начин:

- Најпре се поставља питање: Да ли је распоред елемената битан?
- Ако је одговор на ово питање „не“, одмах се може закључити да је реч о комбинацијама.
- Ако је одговор на ово питање „да“, онда је реч или о варијацијама или о пермутацијама, у зависности од тога да ли се распоређују сви елементи или не. Зато се поставља следеће питање: Да ли се распоређују сви елементи?
- Ако је одговор на ово питање „да“, онда је реч о пермутацијама, а у супротном је реч о варијацијама.
- Након што се утврди којој категорији (комбинацијама, варијацијама или пермутацијама) припада задатак, следеће питање је: Да ли се елементи понављају? На основу тога се утврђује да ли ћемо имати, на пример, варијације са понављањем или без понављања.

Пример 1

На колико начина се из кутије са 15 оловака може изабрати 9?

Решење:

Да ли је распоред елемената битан? Не!

Дакле, реч је о комбинацијама. Елементи се не понављају (једна оловка не може да се изабере више од једанпут), па се зато тражи број комбинација без понављања од 15 елемената класе 9. Тај број је

$$C_{15}^9 = \binom{15}{9} = \frac{15!}{9!(15-9)!} = 5005.$$

Задатак 1

На једној лутрији учествује 10 лозова са различитим добицима. Један учесник извлачи 3 лоза. На колико начина може да добије 3 различите награде?

Пример 2

Наставник математике је испитивао четворицу ученика и оценио их оценама 2, 3, 4 и 5. На колико начина могу да се распореде оцене ако:

- сви су оцењени различитом оценом;
- ученици се оцењују само оценама 4 или 5.

Решење:

Уочимо да је распоред елемената (оцена) битан. Различит распоред оцена ученика даје различиту могућност. Значи, реч је или о варијацијама или о пермутацијама.

- У овом случају распоређују се 4 различите оцене на четворицу ученика, па је реч о пермутацијама без понављања од 4 елемента. Њихов број је $P_4 = 4! = 24$.
- Ако се сви ученици оцењују само оценама 4 или 5, онда је број оваквих оцењивања број варијација са понављањем од 2 елемента (елементи су 4 и 5) класе 4, а тај број је $\bar{V}_2^4 = 2^4 = 16$.

Задатак 2

Један човек је заборавио шестоцифрени PIN за пријаву на електронско банкарство. Сећа се да се PIN састоји од цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6 и да цифре 1 и 6 нису ни на првој ни на последњој позицији. Колико покушаја је потребно да би се открио заборављени PIN?

Пример 3

До краја првенства у Првој фудбалској лиги један тим треба да одигра још 7 утакмица. Према процени тренера, потребан минимум за опстанак у лиги је 8 бодова. На колико начина може да се обезбеди тај минимум ако победа доноси 3 бода, нерешен резултат – 1 бод, а пораз – 0 бодова? Напоменимо да се тражи освајање тачно 8 бодова, а не и више од тога.

Решење:

Потребан минимум може се освојити на следеће начине:

- 2 победе, 2 нерешена резултата и 3 пораза;
- 1 победа, 5 нерешених резултата и 1 пораз.

Уочимо да је распоред елемената битан. Различит распоред победа, нерешених резултата и пораза даје различиту могућност. При томе се распоређује 7 елемената на 7 позиција, од којих су неки елементи (победе, нерешени резултати, порази) једнаки. Значи, реч је о пермутацијама са понављањем, и то у првом случају типа (2,2,3), а у другом случају типа (1,5,1).

Отуда је укупан број могућих исхода

$$P_7(2,2,3) + P_7(1,5,1) = \frac{7!}{2!2!3!} + \frac{7!}{1!5!1!} = 252.$$

Задатак 3

На једном јарболу распоређено је 9 заставица. Сваки распоред заставица представља одређени сигнал. Колико сигнала може бити представљено заставицама ако међу њима има 4 беле, 3 црвене и 2 плаве заставице?

Пример 4

На једном турниру одиграно је 36 шаховских партија. Према правилима турнира, сваки шахиста је одиграо са сваким по једну шаховску партију. Колико је учесника било на турниру?

Решење:

Уочимо да број n шахиста који учествују на турниру није познат. При томе, свака шаховска партија игра се између два шахиста и свака два шахиста одиграју само по једну партију, па распоред шахиста (у свакој партији) није битан. Зато је реч о комбинацијама без понављања од n елемената класе 2. Отуда је укупан број одиграних партија на турниру C_n^2 , а према условима задатка тај број је 36. Добијамо

$$C_n^2 = 36 \quad \binom{n}{2} = 36 \quad \frac{n(n-1)}{2} = 36$$

Последња једнакост се своди на квадратну једначину $n^2 - n - 72 = 0$. За решења ове једначине добија се :

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-72)}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2},$$

тј. $n_1 = 9$, $n_2 = -8$. Пошто је реч о броју учесника на турниру, тај број не може бити негативан. Значи, број учесника на турниру је 9.

Задатак 4

У последњој сезони Прве македонске фудбалске лиге одигране су 132 утакмице. Према правилима лиге, свака екипа игра са сваком другом по две утакмице (једну на домаћем, а једну на гостујућем терену). Колико екипа игра у Првој македонској фудбалској лиги?

Пример 5

Разматрају се шесторке састављене од цифара 0, 1, 2. Одредити број оних шесторки код којих се цифра 2 налази на последњој (шестој) позицији?

Решење:

С обзиром на то да је реч о шесторкама, јасно је да је распоред елемената у свакој шесторци битан. Шесторке су састављене од три цифре 0, 1, 2, па је јасно да је свака шесторка варијација са понављањем од 3 елемента класе 6. У задатку се траже оне варијације код којих се на последњој позицији налази цифра 2. Њихов број може се одредити на следећи начин: ако се на последњој позицији фиксира 2, првих пет позиција може се попунити на $V_5^3 = 3^5 = 243$ начина.

Задатак 5

Разматрају се седморке састављене од цифара 0, 1, 2, 3, 4. Одредити број оних седморки код којих цифре 1 и 2 стоје на првој и другој позицији, редом.

Пример 6

Колико дијагонала може да се повуче у једном десетоуглу?

Решење:

Размотримо скуп темена десетоугла. Ако се свако теме повеже са свим осталим теменима, добиће се све дијагонале и све странице десетоугла. Свако повезивање два темена може се посматрати као једна комбинација од 10 елемената класе 2 (редослед темена није битан, два темена одређују тачно једну дијагоналу или тачно једну страницу). Укупан број дијагонала и страница је $C_{10}^2 = \binom{10}{2} = 45$. Пошто десетоугао има 10 страница, укупан број дијагонала биће $C_{10}^2 - 10 = 45 - 10 = 35$.

Задатак 6

Колико дијагонала може да се повуче у једном дванаестоуглу?

Пример 7

На једној полици треба распоредити 7 књига, међу којима су и два дела једног романа. На колико начина може да се направи распоред ако два тома романа треба да стоје један поред другог, у било ком редоследу?

Решење:

Два тома романа могу се посматрати као једна књига (значи распоређује се 6 књига), при чему постоје две могућности: да буду у редоследу 1 – 2 или у редоследу 2 – 1. Ако се поставе у редоследу 1 – 2, онда је број распореда шест књига на полици $P_6 = 720$. Исти број се добија и ако се две књиге поставе у редоследу 2 – 1. Отуда је укупан број распореда књига

$$2 \cdot P_6 = 2 \cdot 720 = 1440.$$

Задаци за вежбање!

- Од пет непарних цифара формирају се четвороцифрени бројеви.
 - Колико четвороцифрених бројева може да се формира?
 - Код колико њих су све цифре различите?
 - Колико их се завршава цифром дељивом са 3?
 - Колико их почиње и завршава се истом цифром?
- На Светском првенству у рукомету учествује 16 репрезентација. На колико начина могу да се доделе златна, сребрна и бронзана медаља?
- Један уређај има 8 различитих дугмади. Притискање 5 дугмади одређеним редоследом активира једну радњу. Колико различитих радњи може бити активирано?
- Колико различитих пермутација цифара 0, 1, 2, ..., 9 постоји у којима цифре 2, 3 и 4 стоје једна поред друге, у било ком редоследу?
- Три дечака и три девојчице распоређују се у ред. На колико начина ако:
 - три дечака морају стајати један поред другог;
 - две одређене девојчице морају стајати једна поред друге.
- Из стандардног шпила издвојене су само карте са сликама: жандар, дама и краљ. Издвајају се 3 карте. На колико начина се могу изабрати најмање две црвене карте?
- На полици се налази 9 књига, од којих је 7 из математике, а 2 из информатике. На колико начина могу да се изаберу 4 књиге тако да међу њима буде бар једна књига из информатике?
- У продавници постоје 4 врсте крофни. На колико начина се може купити 6 крофни ако се врсте могу понављати?

4.6 ЕКСПЕРИМЕНТИ И ДОГАЂАЈИ

Активност

1. Изведи експеримент са бацањем коцке за игру и посматрај појављивање броја 2. Да ли са сигурношћу можеш да кажеш да ће се при бацању коцке појавити број 2?
2. Понови експеримент са бацањем коцке за игру више пута и преброј колико пута се појавио број 2. Какав закључак можеш да извучеш на основу броја појављивања броја 2?

Запамти!

Експеримент је поступак или активност која се изводи да би се посматрала, измерила или испитала нека појава, понашање неког система или процеса и да би се добили подаци за даљу анализу.

Неколико примера експеримената:

1. Један новчић се баца у ваздух и након његовог пада на земљу, на горњој страни може се појавити „писмо“ или „глава“. Бацањем новчића извршили смо један експеримент, а као резултат тог експеримента може се добити један од следећих исхода: „на горњој страни новчића појавило се писмо“ или „на горњој страни новчића појавила се глава“.
2. Ако се вода загрева на $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, онда ће почети да кључа. Овде је извршен један експеримент (загревање воде), а као резултат тог експеримента јавља се исход „вода кључа“.
3. Проверава се исправност производа у једној фабрици тако што се узима један производ, проверава се његов квалитет и утврђује се да ли је исправан или није. Дакле, извршен је један експеримент (провера квалитета), а могући исходи су: „производ је исправан“ и „производ није исправан“.
4. Спроводи се тест како би се проверило знање једног ученика. Оцењивање теста врши се поенима од 0 до 100. Тада је експеримент оцењивање ученика, а могући исходи су „ученик је освојио i поена“, где је $i=0,1,\dots,100$.

Сваки резултат (исход) експеримента S назива се *догађај* у вези са експериментом S . Догађаје ћемо означавати великим штампаним словима са почетка азбуке: $A, B, C, \dots$

Један експеримент може бити *детерминистички* и *недетерминистички*. Ако је исход једног експеримента унапред познат, онда је тај експеримент *детерминистички*. У супротном, ако се исход не може са сигурношћу знати унапред, тај експеримент је *недетерминистички*.

Задатак 1

За сваки експеримент из примера 1, 2, 3, 4 утврди да ли је детерминистички или недетерминистички.

Теорија вероватноће се бави проучавањем недетерминистичких експеримената. Њен циљ је да пронађе законитости у експериментима са неједнозначним исходом. Размотримо следећи пример.

Пример 1

Размотримо експеримент бацања новчића и догађај A : „пала је глава“. Ако се експеримент изводи једном, онда се не може са сигурношћу рећи какав ће бити његов исход. Зато нека се изведе 10 серија од по $n=1000$ експеримената под једнаким условима. Са $n_i(A)$ означава се број експеримената из i -те серије у којима се појавио догађај A . Резултати ових десет серија представљени су у следећој табели.

i	$n_i(A)$	$\frac{n_i(A)}{n}$
1	502	0,502
2	504	0,504
3	492	0,492
4	498	0,498
5	500	0,500
6	510	0,510
7	505	0,505
8	490	0,490
9	493	0,493
10	509	0,509

У последњој колони дате су вредности количника $\frac{n_i(A)}{n}$, где је n број изведених експеримената у једној серији. У нашем случају је $n=1000$. Може се уочити да су вредности у тој колони блиске броју 0,5. При томе, ако се број експеримената у једној серији повећава, тада се тај количник све више приближава броју 0,5. Дакле, иако једним извођењем експеримента бацања новчића не можемо са сигурношћу предвидети који ће се исход догодити, при извођењу серије од више експеримената уочава се одређена законитост у појављивању догађаја „пала је глава“, а то је да ће се овај догађај појавити у приближно половини експеримената.

Запамти!

- Број $\frac{n_i(A)}{n}$ назива се **релативна фреквенција догађаја A** у i -тој серији експеримената.
- Реалан број око којег се групишу ове релативне фреквенције назива се **статистичка** (или **емпиријска**) **вероватноћа догађаја A** .
- Ако се посматра серија од n експеримената, онда је број $n(A)$ појављивања догађаја A најмање 0, а највише n , тј. $0 \leq n(A) \leq n$. Одатле је, $\frac{0}{n} \leq \frac{n(A)}{n} \leq \frac{n}{n}$, па је $0 \leq \frac{n(A)}{n} \leq 1$. Можемо закључити да је релативна фреквенција појављивања догађаја A број између 0 и 1, па је и статистичка вероватноћа догађаја A између 0 и 1.
- Статистичка вероватноћа догађаја A је објективна мера могућности појављивања овог догађаја
- У претходном примеру са бацањем новчића статистичка вероватноћа догађаја A : „пала је глава“ је 0,5. То је број око којег се групишу релативне фреквенције дате у последњој колони претходне табеле.

Задатак 2

Колика је релативна фреквенција појављивања догађаја B : „пао је број 2“ у серији експеримената са бацањем коцке за игру које си извео у претходној активности?

Запамти!

За дати догађај A може се применити статистичка дефиниција вероватноће ако су испуњена следећа два услова:

1. Експеримент S може се поновити под истим условима онолико пута колико желимо;
2. Релативне фреквенције догађаја A , у свакој од више изведених серија експеримената, јесу бројеви који су приближно једнаки. То значи да, ако се изведу серије од по $n_1, n_2, \dots, n_k$ експеримената, онда:

$$\frac{n_1(A)}{n_1} \approx \frac{n_2(A)}{n_2} \approx \dots \approx \frac{n_k(A)}{n_k}.$$

Услов 2 обезбеђује статистичку стабилност, а услов 1 обезбеђује проверу услова 2. Догађај A у вези са датим експериментом, за који су испуњени услови 1 и 2, назива се *случајан догађај*.

Пример 2

Размотримо следеће експерименте и догађаје у вези са њима.

- а) Нека је експеримент бацање коцке за игру. Разматрају се догађаји:
 A_1 : пао је број од 1 до 6;
 A_2 : пао је број 7.
- б) Експеримент је извлачење куглице из кутије у којој се налази 5 белих куглица. Разматрају се догађаји:
 B_1 : извучена је бела куглица;
 B_2 : извучена је црна куглица.
- в) Експеримент је оцењивање случајно изабраног ученика. Разматрају се догађаји:
 C_1 : ученик је добио оцену од 1 до 5;
 C_2 : ученик је добио оцену 10.

Може се уочити да се догађаји A_1, B_1, C_1 појављују при сваком извођењу одговарајућег експеримента, а догађаји A_2, B_2, C_2 не појављују се никада при извођењу одговарајућег експеримента.

Запамти!

- **Сигуран догађај** у вези са датим експериментом је догађај који се појављује при свакој реализацији тог експеримента.
- **Немогућ догађај** у вези са датим експериментом је догађај који се никада не појављује при реализацији датог експеримента.

Значи, у примеру 2, догађаји A_1, B_1, C_1 су сигурни догађаји, а A_2, B_2, C_2 су немогући догађаји.

- Може се уочити да, ако се изводи серија од n експеримената, сигуран догађај се појављује n пута, а немогућ догађај се појављује 0 пута. Отуда је релативна фреквенција сигурног догађаја $\frac{n}{n} = 1$, а релативна фреквенција немогућег догађаја је $\frac{0}{n} = 0$. Значи, сигуран и немогућ догађај задовољавају услове 1 и 2, па су и они случајни догађаји.

Задаци за вежбање!

1. Нека је експеримент бацање коцке. Изведи 4 серије од по 50 бацања и одреди статистичку вероватноћу догађаја:
 А: на горњој страни појавио се паран број;
 В: на горњој страни појавио се број већи од 4.
2. Извлачи се карта из стандардног шпила од 52 карте. Изведи 5 серија од по 100 извлачења. После сваког извлачења забележи вредност и знак карте и врати је у шпил. Одреди статистичку вероватноћу догађаја:
 А: извучена је петица;
 В: извучена је карта знака пик;
 С: извучена је десетка знака треф.
3. Дигиталним термометром мери се температура у учионици. Сензор приказује температуре од -10°C до 50°C . За сваки догађај утврди да ли је сигуран, немогућ или ниједно од тога.
 А: температура је између -10°C и 50°C .
 В: температура је 100°C .
 С: температура је негативна.
4. У лабораторији се раствор испитује лакмус-папиром. Раствор је кисео, неутралан или базан. За сваки догађај утврди да ли је сигуран, немогућ или ниједно од тога.
 А: раствор је неутралан.
 В: раствор је истовремено и кисео и базан.
 С: раствор има једно од три наведена својства.

4.7 МНОЖЕСТВО ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДОГАЂАЈА. СЛУЧАЈНИ ДОГАЂАЈИ

Пример 1

Размотримо експеримент бацање коцке за игру. Неки од могућих догађаја у вези са овим експериментом су следећи:

A : пао је паран број;

B : пао је број дељив са 3;

E_1 : пао је број 1;

E_2 : пао је број 2;

E_3 : пао је број 3;

E_4 : пао је број 4;

E_5 : пао је број 5;

E_6 : пао је број 6.

Размотримо догађаје A и B , с једне стране, и догађаје E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 и E_6 с друге стране. Може се приметити да се догађај A појављује ако се појави један од догађаја E_2 , E_4 или E_6 , а догађај B се појављује ако се појави догађај E_3 или E_6 . Значи, догађај A може се разложити на догађаје E_2 , E_4 и E_6 , а догађај B може се разложити на догађаје E_3 и E_6 .

С друге стране, догађаји E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 и E_6 не могу се разложити на друге догађаје. Зато те догађаје називамо елементарним догађајима. Елементарне догађаје означаваћемо симболом E са индексом 1, 2,...

Запамти!

- **Елементарни догађај** у вези са датим експериментом је сваки логички исход експеримента који се не може разложити на друге догађаје. При томе, при свакој реализацији експеримента појављује се један и само један елементарни догађај.
- Скуп свих оваквих догађаја у вези са једним експериментом назива се **скуп елементарних догађаја** и означава се са Ω .

Пример 2

Одредимо скуп елементарних догађаја ако је експеримент бацање коцке за игру. Приметимо да се при свакој реализацији експеримента појављује један и само један од догађаја E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 и E_6 , који су дефинисани у примеру 1. Према томе, скуп елементарних догађаја у вези са овим експериментом је $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$.

Задатак 1

Одреди скуп елементарних догађаја за експеримент бацање новчића.

Пример 3

Нека се експериментот састоји у бацању два новчића. При бацању једног новчића, могући исход је „пало је писмо“ или „пала је глава“ (краће ћемо писати „писмо“ или „глава“). Међутим, експеримент се састоји од истовременог бацања два новчића, па ће могући исходи бити уређени парови, при чему ће први елемент сваког пара означавати исход првог новчића, а други елемент – исход другог новчића. Скуп елементарних догађаја је следећи:

$$\Omega = \{(\text{глава, глава}), (\text{глава, писмо}), (\text{писмо, глава}), (\text{писмо, писмо})\}.$$

У примеру 1 закључили смо да ће се догађај A појавити ако се појави један од догађаја E_2 , E_4 или E_6 , а догађај B ће се појавити ако се појави догађај E_3 или E_6 . Према томе, догађаји A и B могу се записати на следећи начин $A = \{E_2, E_4, E_6\}$, $B = \{E_3, E_6\}$. Приметимо да су догађаји A и B представљени као подскупови скупа елементарних догађаја Ω .

Запамти!

- *Случајан догађај* је произвољан подскуп скупа елементарних догађаја Ω .
- Рећи ћемо да се догађај A појавио ако се појавио неки од елементарних догађаја који припадају подскупу елементарних догађаја који одговара догађају A .

Пример 4

Експеримент се састоји у бацању две коцке за игру. Опиши скуп елементарних догађаја и следеће случајне догађаје:

A : на обе коцке пао је паран број;

B : на првој коцки пао је паран, а на другој непаран број.

Решење:

Скуп елементарних догађаја за овај експеримент састојаће се од уређених парова (x, y) , где је x исход прве коцке, а y – исход друге коцке, $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Према томе,

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

За догађај A добија се:

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \{2, 4, 6\}\},$$

или у развијеном облику:

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\},$$

За догађај B имамо:

$$B = \{(x, y) \mid x \in \{2, 4, 6\}, y \in \{1, 3, 5\}\},$$

или

$$B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}.$$

- Сигуран догађај се појављује увек када се реализује експеримент, односно сваки елементарни догађај доводи до његовог појављивања. Зато се он означава са Ω .
- Немогућ догађај, пак, не појављује се никада када се реализује експеримент, односно ниједан елементарни догађај не доводи до његовог појављивања. Према томе, немогућ догађај означаваћемо са $\emptyset$.

Задаци за вежбање!

1. Експеримент се састоји најпре од бацања новчића. Затим, ако падне писмо, баца се коцка и региструје се број тачака на горњој страни коцке, а ако падне глава, новчић се баца још једном. Опиши скуп елементарних догађаја.
2. У једној кутији налази се 5 куглица нумерисаних бројевима од 1 до 5. На случајан начин извлаче се једна по једна куглица (без враћања), све док се не извуче куглица са непарним бројем. Ако се региструју бројеви извучених куглица, опиши скуп елементарних догађаја.
3. Експеримент се састоји у бацању три коцке за игру. Опиши скуп елементарних догађаја и следеће случајне догађаје:
 - A: на прве две коцке пао је паран број, а на трећој непаран;
 - B: на све три коцке пао је непаран број;
 - C: збир бројева на три коцке је паран;
 - D: на прве две коцке пала је иста вредност;
 - F: на три коцке није се појавила ниједна петица;
 - G: на три коцке појавила се бар једна петица.
4. Стрелац има 4 метка и гађа мету све док не постигне два поготка узастопно или док не изгуби могућност да испуни тај услов. Опиши скуп елементарних догађаја и следеће случајне догађаје:
 - A: мета је погођена најмање два пута;
 - B: један метак је остао неискоришћен;
 - C: било је више погодака него промашаја.
5. На једној табли за пикадо налазе се поља 7, 8, 9, 10. Један играч гађа стрелицама у табли три пута. Одреди скуп елементарних догађаја и следеће случајне догађаје:
 - A: три пута је погођен паран број;
 - B: два пута је погођен паран, а једном непаран број;
 - C: у прва два гађања погођен је паран, а у трећем непаран број;
 - D: збир погођених бројева је 27.

4.8 ОПЕРАЦИЈЕ СА ДОГАЂАЈИМА

Подсети се!

- Елементарни догађај у вези са датим експериментом је сваки логички исход експеримента који се не може разложити на друге догађаје. При томе, при свакој реализацији експеримента појављује се један и само један елементарни догађај.
- Странице једног правилног тетраедра означене су бројевима 1, 2, 3, 4. Тетраедар се баца на равну површину и посматра се страница којом лежи на површини. Који је скуп елементарних догађаја за овај експеримент?
- За претходни експеримент опиши догађај A : пао је непаран број, као подскуп скупа Ω .

Пример 1

Нека се експеримент састоји у извлачењу карте из шпила од 52 карте. Означимо догађаје:

A : извучена је карта са бројем 10;

B : извучена је карта пик.

C : извучена је карта пик са бројем 10.

Приметимо да ће се догађај C појавити када се истовремено појаве догађаји A и B .

Запамти!

- **Производ** догађаја A и B је догађај који се појављује онда и само онда када се истовремено појаве оба догађаја A и B . Тај догађај је одређен скупом елементарних догађаја који је пресек скупова елементарних догађаја догађаја A и догађаја B .
- Производ два догађаја A и B означава се са $A \cap B$.

Пример 2

Нека је експеримент бацање коцке за игру. Разматрамо догађаје:

A : пао је број мањи или једнак од 3;

B : пао је број дељив са 3;

C : пао је број већи од 4.

Одредити производ догађаја A и B , као и догађаја A и C .

Решење:

Скуп елементарних догађаја за овај експеримент је $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, где је E_i елементарни догађај „пао је број i “, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Догађаји A , B и C , као подскупови

Скупова Ω описују се на следећи начин: $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_4\}$, $C = \{E_3, E_4\}$. Догађај $A \cap B$ означава да је пао број који је мањи или једнак од 3 и дељив са 3, па је $A \cap B = \{E_3\}$. Догађај $A \cap C$ означава да је пао број који је мањи или једнак од 3 и већи од 4, што је немогуће. Значи, догађаји A и C не могу се појавити истовремено, односно $A \cap C = \emptyset$.

Задатак 1

Одреди производ догађаја B и C из примера 2.

Запамти!

Ако два догађаја A и B не могу да се појаве истовремено, онда се они називају **дисјунктни догађаји**. Њихов производ је немогућ догађај, односно $A \cap B = \emptyset$.

У примеру 2, догађаји A и C се су дисјунктни догађаји.

Запамти!

- **Збир догађаја A и A** је догађај који се појављује онда и само онда када се појави бар један од догађаја A или A .
- **Збир догађаја A и B** одређен је скупом елементарних догађаја који је унија скупова елементарних догађаја догађаја A и догађаја B .
- Збир два догађаја A и B , у општем случају, означава се са $A \cup B$.
- Ако су догађаји A и B дисјунктни, онда њихов збир означавамо са $A + B$.

- Када се каже да се појавио бар један од догађаја A или B , подразумева се да се појавио или само догађај A , или само догађај B , или оба догађаја истовремено.
- Ако су догађаји A и B дисјунктни, онда је истовремено појављивање оба догађаја немогуће, па појављивање догађаја $A \cup B$ подразумева да се појави или само догађај A или само догађај B .
- Зато се у овом случају за збир два догађаја користи ознака $A + B$. Дакле,

$$A + B = A \cup B \text{ ако } A \cap B = \emptyset.$$

Пример 3

Одреди збир догађаја A и B , као и догађаја A и C , ако су A , B и C догађаји из примера 2.

Решење:

Догађаји A , B и C одређени су са : $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_4\}$, $C = \{E_3, E_4\}$. Догађај $A \cup B$ означава да је пао број који је мањи или једнак од 3 или број дељив са 3, па се он може описати као $A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$. Догађај $A \cup C$ означава да је пао број који је мањи или једнак од 3 или број који је већи од 4. У примеру 2 приметили смо да догађаји A и C не могу да се појаве истовремено, односно да су они дисјунктни догађаји. Према томе, $A \cup C = A + C = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$.

Задатак 2

Одреди збир догађаја B и C из примера 2.

Запамти!

- **Супротан догађај** догађају A је догађај који се појављује онда и само онда када се догађај A не појави. Овај догађај означава се са $\bar{A}$. Скуп елементарних догађаја супротног догађаја $\bar{A}$ је комплемент скупа елементарних догађаја који одговара догађају A , у односу на Ω .
- За сваки догађај A важи:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad A + \bar{A} = \Omega.$$

Пример 4

Одреди супротне догађаје догађајима A и B из примера 1.

Решење:

Догађај A неће се појавити ако падне број већи од 3, односно ако се појави један од елементарних догађаја E_4, E_5 или E_6 , па је $\bar{A} = \{E_4, E_5, E_6\}$. За супротан догађај догађаја B добија се $\bar{B} = \{E_1, E_2, E_4, E_5\}$.

Задатак 3

Одреди супротан догађај догађају C из примера 2.

Запамти!

Догађај A повлачи догађај B (пишемо $A \subseteq B$) ако се увек када се појави догађај A појављује и догађај B .

Пример 5

Поново размотримо експеримент бацање два новчића. Нека су

A : пала је тачно једна глава

B : пала је бар једна глава.

Може се приметити да се сваки пут када се појави догађај A , појављује и догађај B , односно $A \subseteq B$.

Запамти!

Ако је $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, онда за догађаје A и B кажемо да су **једнаки**.

Дефиниције производа и збира два догађаја могу се уопштити и на производ и збир коначно много догађаја.

Запамти!

- Збир догађаја $A_1, A_2, \dots, A_n$ је догађај који се појављује онда и само онда када се појави бар један од догађаја $A_1, A_2, \dots, A_n$.
- Овај догађај означава се са $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, а његов скуп елементарних догађаја је унија скупова елементарних догађаја који одговарају сваком од догађаја $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Запамти!

- Производ догађаја $A_1, A_2, \dots, A_n$ је догађај који се појављује онда и само онда када се сви догађаји $A_1, A_2, \dots, A_n$ појаве истовремено.
- Овај догађај означава се са $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, а његов скуп елементарних догађаја је пресек скупова елементарних догађаја који одговарају сваком од догађаја $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Пример 6

У мету се гађа три пута. Разматрају се догађаји A_1, A_2 и A_3 које означавају погађање циља у првом, другом и трећем гађању, редом. Помоћу ових догађаја описати следеће случајне догађаје:

- B : постигнута су три поготка;
 C : циљ је три пута промашен;
 D : постигнут је бар један погодак;
 F : постигнут је бар један промашај;

Решење:

- Догађај B ће се појавити ако се сва три догађаја A_1, A_2 и A_3 појаве истовремено. Према томе, $B = A_1 A_2 A_3$.
- Догађај C ће се појавити ако се не појави ниједан од догађаја A_1, A_2 и A_3 , односно ако се појаве њихови супротни догађаји. Тако, $C = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$.
- Догађај D ће се појавити ако се појави бар један од догађаја A_1, A_2 или A_3 , па је $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Слично томе, $F = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$.

Пример 7

Један брод има један управљачки механизам, четири парна котла и две турбине. Означимо следеће догађаје:

- A : управљачки механизам је исправан
 B_k : k -ти парни котао је исправан, $k = 1, 2, 3, 4$
 C_j : j -та турбина је исправна, $j = 1, 2$

Догађај D означава да је брод у возном стању и он се појављује ако је исправан управљачки механизам, бар један котао и бар једна турбина. Изразити догађај D помоћу догађаја A , B_1 и C_j .

Решење:

$$D = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \cap (C_1 \cup C_2).$$

Задаци за вежбање!

- Експеримент се састоји у бацању три новчића. Догађаји A_1 , A_2 и A_3 означавају појаву писма на првом, другом и трећем новчићу, редом. Коришћењем ових догађаја описати следеће случајне догађаје:
 B : писмо се појавило само на првом новчићу;
 C : писмо се појавило на првом и другом новчићу;
 D : писмо се појавило на сва три новчића;
 E : писмо се појавило на бар два новчића;
 F : писмо се појавило само на једном новчићу;
 G : писмо се појавило на тачно два новчића;
 H : писмо се појавило на највише два новчића.
- Два шахиста A и B играју турнир у шаху. Турнир се састоји од 4 партије, при чему се нерешене партије не узимају у обзир. Победник је онај шахиста који оствари већи број победа. У случају нерешеног резултата (2:2) игра се и пета одлучујућа партија. Описати следеће догађаје:
 D : победиће шахиста A ;
 E : победиће шахиста B ;
 F : играће се и пета партија.
- На тесту из математике ученик добија три задатка. Са A_i означавамо догађај да ученик зна да реши i -ти задатак, $i = 1, 2, 3$. Помоћу ових догађаја описати следеће догађаје:
 B : ученик зна да реши све задатке;
 C : ученик зна да реши бар један задатак;
 D : ученик зна да реши бар два задатка;
 E : ученик зна да реши највише два задатка;
 F : ученик не зна да реши сва три задатка;
 G : ученик не зна да реши ниједан задатак.
- Експеримент се састоји у избору три производа из једне производне серије. Означимо следеће догађаје:
 A : бар један од три производа је неисправан;
 B : сва три производа су исправна.
 На шта су једнаки следећи догађаји:
 а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $\bar{A}$; г) $\bar{B}$.

4.9 КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ

Подсети се!

Шта је скуп елементарних догађаја?

Како се дефинише случајни догађај A ?

Како се дефинише статистичка вероватноћа датог догађаја A ?

Као што смо раније поменули, код недетерминистичких експеримената исход није једнозначно одређен. Зато, када се изводе ови експерименти, не знамо унапред који ће се исход појавити. Због тога је потребно пронаћи неку објективну меру могућности појављивања одређеног догађаја повезаног са експериментом који разматрамо. У ту сврху увешћемо појам вероватноће, управо као меру могућности појављивања одређеног догађаја.

Овде ћемо се задржати само на експериментима код којих сви елементарни догађаји имају једнаке шансе да се појаве, односно код којих су сви елементарни догађаји једнако вероватни. На пример

- при бацању коцке за игру, свака страна има једнаке шансе да се појави;
- при бацању новчића, писмо и грб имају једнаке шансе да се појаве;
- при извлачењу куглице из кутије са куглицама, свака куглица има једнаке шансе да буде извучена итд.

Као што смо претходно дефинисали, сваки случајни догађај A је подскуп скупа елементарних догађаја Ω . Према томе, број елемената у скупу A је увек мањи или једнак броју елемената у скупу Ω , односно $|A| \leq |\Omega|$.

Запамти!

Класична дефиниција вероватноће. Нека је $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ дат коначан скуп елементарних догађаја и нека сваки од њих има једнаке шансе да се појави. Ако је A случајни догађај у вези са датим експериментом који садржи k елементарних догађаја, тада се (теоријска) вероватноћа догађаја A одређује формулом:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{број на елемената у } A}{\text{број на елемената у } \Omega}.$$

- Сваки елементарни догађај можемо тумачити као „могући случај“ у вези са датим експериментом.
- Са друге стране, k је број елементарних догађаја који припадају догађају A , односно $k = |A|$ па ћемо сваки елементарни догађај из скупа A тумачити као „повољан случај“ за појављивање догађаја A .

- Према класичној дефиницији, вероватноћа датог случајног догађаја A једнака је количнику броја повољних случајева за појављивање догађаја A и броја свих могућих случајева за дати експеримент, односно $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Пример 1

Одредити вероватноћу да се при бацању коцке за игру добије паран број.

Решење:

Ако је експеримент бацање коцке за игру, скуп елементарних догађаја је $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, где је E_i догађај „на горњој страни коцке појавио се број i “, $i=1,2,\dots,6$. Уочимо да су сви елементарни догађаји једнако вероватни, односно при бацању коцке свака страна има једнаке шансе да се појави. Догађај $A = \{E_2, E_4, E_6\}$. Према томе, број повољних могућности за појављивање догађаја A је 3, а укупан број могућности при реализацији експеримента је 6. Према класичној дефиницији вероватноће, за вероватноћу догађаја A добија се $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$.

Задатак 1

Одредити вероватноћу да се при бацању коцке за игру добије број који је већи од 4.

Пример 2

Експеримент се састоји у бацању три новчића. Одредити скуп елементарних догађаја и вероватноће следећих случајних догађаја:

A : појавила су се тачно два писма:

B : није се појавило ниједно писмо.

Решење:

Користићемо ознаку „Г“ ако се на горњој страни новчића појави грб, а „П“ ако се на горњој страни појави писмо. Скуп елементарних догађаја за овај експеримент састоји се од уређених тројки, при чему је i -ти елемент у тројци исход i -тог новчића, $i = 1, 2, 3$. Дакле, $\Omega = \{(П, П, П), (П, П, Г), (П, Г, П), (Г, П, П), (П, Г, Г), (Г, П, Г), (Г, Г, П), (Г, Г, Г)\}$.

Тада је догађај A

$$A = \{(П, П, Г), (П, Г, П), (Г, П, П)\},$$

па се, према класичној дефиницији вероватноће, добија

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

За догађај B , добијамо:

$$B = \{(Г, Г, Г)\}.$$

Вероватноћа овог догађаја је $P(B) = \frac{1}{8}$.

Пример 3

Из стандардног шпила од 52 карте случајно се извлачи 5. Одредити вероватноћу да су све извучене карте пик.

Решење:

Означимо догађај A : извучено је пет карата пик. Број елемената скупа Ω је број свих могућих комбинација од 52 елемента класе 5, тј.

$$|\Omega| = C_{52}^5 = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2598960.$$

Аналогно, постоји 13 карата пик, па је број елементарних догађаја у догађају A

$$|A| = C_{13}^5 = \frac{13!}{5!(13-5)!} = 1287. \text{ Сада,}$$

$$P(A) = \frac{1287}{2598960} = 0,0005.$$

Задатак 2

Из стандардног шпила са 52 карте случајно се извлаче 3 карте. Одредити вероватноћу да су извучене две даме и једна десетка.

Пример 4

У једној кутији се налази 20 тениских лоптица, од којих су 4 неисправне. Случајно се бирају две лоптице из те кутије. Одредити вероватноћу да је извучена једна неисправна и једна исправна лоптица.

Решење:

Означимо догађај A : извучена је једна неисправна и једна исправна лоптица.

Број елемената у Ω је

$$|\Omega| = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = 190.$$

Догађај A ће се појавити ако се извуче једна неисправна лоптица (од укупно 4) и једна исправна лоптица (од укупно 16), па је број елемената у A је $|A| = C_4^1 \cdot C_{16}^1 = 4 \cdot 16 = 64$. Сада,

$$P(A) = \frac{64}{190} = 0,337.$$

Задатак 3

У једној кутији се налази 5 белих и 4 црне лоптице. Из кутије се истовремено извлаче три лоптице. Одредити вероватноћу да су све три извучене лоптице беле.

Пример 5

Многе генетске особине су контролисане са два гена, једним доминантним и једним рецесивним. У оригиналним експериментима Грегора Мендела са грашком, гени који контролишу висину биљке означени су са T (висока) и t (ниска). Ген T је доминантан, па је биљка са генотипом (генетским саставом) TT или Tt висока, док је биљка са генотипом tt ниска.

Статистичком анализом потомства у својим експериментима, Мендел је закључио да потомство наслеђује један ген од сваког родитеља и да је свака могућа комбинација два гена подједнако вероватна. Ако сваки родитељ има генотип Tt , онда следећа табела приказује могуће генотипове потомства:

		Родитељ 1	
		T	t
Родитељ 2	T	TT	Tt
	t	tT	tt

Колика је вероватноћа да случајно изабрани потомак оваквих родитеља (са генотипом Tt) буде висок, а колика да буде низак?

Решење:

Из услова задатка јасно је да је у овом експерименту $\Omega = \{TT, Tt, tT, tt\}$, тј. број могућих случајева у вези са овим експериментом је 4, а сви елементарни догађаји (могуће комбинације гена) су једнако вероватни.

Означимо догађај A : случајно изабрани потомак родитеља са генотипом Tt је висок. Догађај A ће се појавити ако се појави један од генотипова TT, Tt, tT , тј. $A = \{TT, Tt, tT\}$. Значи, постоје 3 повољне могућности за појављивање догађаја A . Отуда се за вероватноћу догађаја A добија $P(A) = \frac{3}{4}$.

Вероватноћа да случајно изабрани потомак буде низак је, заправо, вероватноћа супротног догађаја догађаја A , па $P(\bar{A}) = \frac{1}{4}$.

Важно!

Вероватноћа израчуната према класичној дефиницији вероватноће је теоријска вероватноћа, за разлику од статистичке вероватноће, која је емпиријска, односно експериментално израчуната. Међутим, може се показати да се за велики број n изведених експеримената релативна фреквенција приближава теоријској вероватноћи.

Задатак 4

Један точак среће је подељен на 8 једнаких делова, нумерисаних бројевима од 1 до 8. Точак се заврти једном. Одредити вероватноћу да се стрелица заустави на:

- непарном броју;
- броју дељивом са 4;
- броју мањем од 3.

Задатак 5

У једној кутији се налази 12 лоптица истог облика. Од њих су 3 црвене, а преостале су зелене. Из кутије се извлачи једна лоптица. Одредити вероватноћу да извучена лоптица буде:

- а) црвена;
- б) црвена или зелена;
- в) зелена;
- г) бела.

Задаци за вежбање!

1. У једној кутији се налази 10 лоптица, од којих је 6 белих, 3 црвене и 1 црна. Случајно се бирају 3 лоптице истовремено. Одредити вероватноћу да су:
 - а) све извучене лоптице беле;
 - б) извучене 2 црвене и 1 црна лоптица.
2. У једном одељењу има 40 ученика, од којих је 10 одличних. Одељење се дели у две групе од по 20 ученика. Одредити вероватноћу да у обе групе буде по 5 одличних ученика.
3. У једној игри бацају се три коцке и добитак се остварује ако је збир добијених бројева на три коцке 11 или 12. Одредити вероватноћу следећих догађаја:
 - A: збир добијених бројева је 11;
 - B: збир добијених бројева је 12;
 - C: остварен је добитак.
4. Дато је пет дужи са дужинама 2, 3, 4, 7 и 9 cm. Одредити вероватноћу да се од три случајно изабране дужи може конструисати троугао.
5. Један човек је купио 7 сијалица од 40 W, 5 сијалица од 60 W и 3 сијалице од 100 W. На путу су му се разбиле три сијалице. Колика је вероватноћа да укупна снага разбијених сијалица износи 180W?
6. Десет књига се случајно ређа на једну полицу. Одредити вероватноћу следећих догађаја:
 - A: једна фиксна књига ће се увек налазити на почетку реда;
 - B: три тома једног романа ће увек бити један поред другог у растућем редоследу;
 - C: три тома једног романа ће увек бити један поред другог у произвољном редоследу.
7. У једном паковању се налази 8 сензора, од којих је 5 исправних, а 3 неисправна. Из паковања се бирају 3 сензора потребна за конструкцију једне роботске руке. Одредити вероватноћу да ће бити изабрана 2 исправна и 1 неисправан сензор.
8. Један инвеститор случајно бира 3 акције из портфолија у којем се налази 5 безбедних и 3 ризичне акције. Одредити вероватноћу да ће изабрати више безбедних него ризичних акција.

4.10 СВОЈСТВА ВЕРОВАТНОЋЕ. НЕЗАВИСНИ ДОГАЂАЈИ

Подсети се!

Како гласи класична дефиниција вероватноће? Када се она може применити?

У овом делу размотрићемо основна својства вероватноће.

- Сваки догађај A е подскуп скупа елементарних догађаја Ω , па важи $0 \leq |A| \leq |\Omega|$. Одатле следи,

$$\frac{0}{|\Omega|} \leq \frac{|A|}{|\Omega|} \leq \frac{|\Omega|}{|\Omega|}, \text{ тј. } 0 \leq P(A) \leq 1.$$
- За вероватноћу сигурног догађаја добија се да је $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$, а за вероватноћу немogućег догађаја имамо $P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = 0$.
- Нека $A = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ и $B = \{E_{k+1}, E_{k+2}, \dots, E_{k+m}\}$ су два дисјунктна догађаја, тј. $A \cap B = \emptyset$. Тада је збир догађаја A и B е $A+B = \{E_1, E_2, \dots, E_k, E_{k+1}, E_{k+2}, \dots, E_{k+m}\}$ и он садржи $k+m$ елементарних догађаја. Одатле,

$$P(A+B) = \frac{k+m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = P(A) + P(B).$$

Запамти!

За вероватноћу догађаја A важе следећа основна својства:

1. За сваки догађај A , важи $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(\emptyset) = 0$;
4. Ако су A и B дисјунктни скупи, онда важи $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Пример 1

У једној кутији се налазе 4 беле, 6 црвених и 5 црних куглица. Из кутије се случајно извлачи једна куглица. Одредити вероватноћу да је извучена бела или црна куглица.

Решење:

Означавамо догађаје

A : извучена је бела куглица;

B : извучена је црна куглица.

Уочимо да су догађаји A и B дисјунктни. Наиме, појављивање догађаја A искључује појављивање догађаја B , и обрнуто. Тражимо вероватноћу догађаја $A + B$. Према својству 4 добијамо:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Задатак 4

Из шпила од 52 карте извлачи се једна карта. Одредити вероватноћу да је извучена карта пик или карта херц.

Својство 4 може се уопштити на следећи начин.

Запамти!

5. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_k$ дисјунктни догађаји, тј. $A_i \cap A_j = \emptyset$, за $i \neq j$. Тада важи

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k).$$

- Ако догађај A повлачи догађај B , тј. ако је $A \subseteq B$, онда $|A| \leq |B|$, па је $\frac{|A|}{|\Omega|} \leq \frac{|B|}{|\Omega|}$. Из тога се добија да $P(A) \leq P(B)$.

Запамти!

6. Ако $A \subseteq B$, онда је $P(A) \leq P(B)$.

- Пошто је $A + \bar{A} = \Omega$ из својстава 2 и 4 добија се да је $P(A + \bar{A}) = P(\Omega)$ т.е.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Из то следи, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Запамти!

7. За вероватноћу супротног догађаја датог догађаја A важи $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Пример 2

У једној кутији се налази 5 белих и 4 црне куглице. Из кутије се истовремено извлаче 3 куглице. Одредити вероватноћу да је извучена бар једна бела куглица.

Решење:

Означавамо догађај A : извучена је бар једна бела куглица. Тада супротан догађај $\bar{A}$ означава да није извучена ниједна бела куглица, тј. да су све три извучене куглице црне. Зато,

$$P(\bar{A}) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84} = \frac{1}{21}.$$

Сада, за вероватноћу догађаја A добија се:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}.$$

- Ако су A и B два догађаја у вези са једним експериментом, онда је број елемената у $A \cup B$ једнак $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Ако се овај израз подели са $|\Omega|$, следи тачност следећег својства.

Запамти!

8. Вероватноћа збира два произвољна догађаја у вези са једним експериментом израчунава се по формули:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Пример 3

У једном предузећу има 100 запослених. Од њих 40 зна енглески језик, 30 зна немачки језик, а 15 зна оба језика. Случајно се бира једно лице. Одредити вероватноћу следећих случајних догађаја

B : изабрано лице зна бар један језик;

C : изабрано лице не зна ниједан језик.

Решење:

Означићемо следеће догађаје:

A : изабрано лице зна енглески језик;

G : изабрано лице зна немачки језик.

Из услова задатка имамо да

$$P(A) = \frac{40}{100} = 0,4, \quad P(G) = \frac{30}{100} = 0,3, \quad P(A \cap G) = \frac{15}{100} = 0,15.$$

Уочимо да се догађај B може записати као унија догађаја A и G , тј. $B = A \cup G$. Одателе,

$$P(B) = P(A \cup G) = P(A) + P(G) - P(A \cap G) = 0,4 + 0,3 - 0,15 = 0,55.$$

С друге стране, догађај C је супротан догађај догађају B , тј. $C = \bar{B}$. Одатле,

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,55 = 0,45.$$

Задатак 5

Један играч окреће точак среће приказан на слици десно. Одредити вероватноћу следећих догађаја:

- A: Точак ће се зауставити на наранџастом пољу;
- B: Точак ће се зауставити на парном броју;
- C: Точак ће се зауставити на наранџастом пољу или на парном броју.

**Независност догађаја**

За два догађаја A и B кажемо да су независни ако појављивање једног догађаја не утиче на појављивање другог догађаја, и обрнуто. На пример, ако се бацају две коцке, онда исход прве коцке не утиче на исход друге коцке, па ако дефинишемо догађаје

- A: на првој коцки је пао број пет и
- B: на другој коцки је пао број три,

онда су догађаји A и B независни догађаји.

Међутим, не може се увек на основу самих услова задатка утврдити да ли су два догађаја независна или нису. У том случају треба проверити да ли је испуњен услов независности.

Запамти!

Два догађаја A и B су **независна** ако и само ако важи $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Пример 4

Из шпила од 52 карте извлачи се једна карта. Размотримо следеће догађаје:

- A: извучена је карта на којој је број пет;
- B: извучена карта је лист.

Проверити да ли су догађаји A и B независни.

Решење:

Повољан број могућности за појављивање догађаја A је 4 (у шпилу постоје 4 петице), па је

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. С друге стране, повољан број могућности за појављивање догађаја B је 13 (у шпилу има 13 карата лист). Одатле, $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Догађај $A \cap B$ ће се појавити ако се извуче карта лист са бројем 5. Повољна могућност за појављивање овог догађаја постоји само једна. Добија се:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = P(A)P(B).$$

Можемо закључити да је услов за независност испуњен, па су догађаји A и B независни догађаји, иако интуитивно то не изгледа тако (међу картама са знаком лист налази се петица, а међу четири петице налази се петица лист).

Пример 5

У једној кутији се налази 6 белих и 4 црне куглице. Из кутије се извлачи једна куглица, бележи се њена боја и куглица се враћа у кутију. Затим се извлачи још једна куглица. Одредити вероватноћу да су обе извучене куглице беле.

Решење:

Означавамо следеће догађаје:

A: прва извучена куглица је бела;

B: друга извучена куглица је бела.

Уочимо да су догађаји A и B независни. Наиме, прва извучена куглица се враћа у кутију, па исход првог извлачења не утиче на исход другог извлачења. Тражимо вероватноћу догађаја $A \cap B$. Ако искористимо независност, добијамо:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{25}.$$

Задатак 6

Ученик на тесту добија два питања на која треба да одговори са ДА или са НЕ. Ученик се није припремао за тест, па одговоре на питања погађа. Одговор на једно питање не утиче на одговор на друго питање, и обрнуто. Одредити вероватноћу следећих догађаја:

A: ученик је тачно одговорио на оба питања;

B: ученик је тачно одговорио само на једно питање;

C: ученик је погрешно одговорио на оба питања.

Да ли два дисјунктна догађаја могу бити независна, и обрнуто?

- Нека су A и B дисјунктни догађаји. Тада је $A \cap B = \emptyset$, па је $P(A \cap B) = 0$. Одатле ће једнакост

$$P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$$

важити само ако је $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$. Значи, ако су A и B дисјунктни догађаји и ако је $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, онда A и B не могу бити независни.

- Важи и обрнуто. Нека су A и B независни догађаји и нека је $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. Тада је $P(A) \cdot P(B) > 0$. Из независности следи $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$, па A и B нису дисјунктни догађаји.

Запамти!

- Независност и дисјунктност два догађаја су различити појмови!
- Два дисјунктна догађаја A и B су независна ако и само ако је $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$.

Пример 6

Петар истовремено баца један новчић и једну коцку за игру.

- Одредити скуп елементарних догађаја.
- Одредити вероватноћу следећих догађаја:
 A : на новчићу је пало писмо, а на коцки је пао паран број поена;
 B : на новчићу је пао грб, а на коцки је пао број поена већи од 4.
- Да ли су догађаји A и B дисјунктни?
- Да ли су догађаји A и B независни?

Решење:

- Ако означимо „П“ (писмо) и „Г“ (грб) као исходе бацања новчића, а бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6 као исходе бацања коцке, скуп елементарних догађаја је:

$$\Omega = \{(П, 1), (П, 2), (П, 3), (П, 4), (П, 5), (П, 6), (Г, 1), (Г, 2), (Г, 3), (Г, 4), (Г, 5), (Г, 6)\}.$$

Значи, број елемената скупа Ω је $|\Omega| = 12$.

- Догађај A може се описати као $A = \{(П, 2), (П, 4), (П, 6)\}$, па је број повољних могућности за појављивање догађаја A једнак 3. Одатле

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{С друге стране, } B = \{(Г, 5), (Г, 6)\} \text{ и } P(B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

- Може се уочити да је $A \cap B = \emptyset$, па су A и B дисјунктни догађаји.
- Претходно смо добили да је $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$ а они су дисјунктни догађаји. У складу са претходном дискусијом, они не могу бити независни.

Задатак 7

Из шпила од 52 карте случајно се извлачи једна карта. Нека су дати догађаји

- A : извучена карта је херц;
 B : извучена карта је пик;
 C : извучена карта је дама.

- Одредити $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$.
- Да ли су догађаји A и B независни догађаји? Да ли су они дисјунктни догађаји?
- Да ли су догађаји A и C независни догађаји? Да ли су они дисјунктни догађаји?
- Нека је $D = A \cap B$. Да ли су догађаји C и D независни догађаји?

Задаци за вежбање!

- Нека је $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$, а $P(A \cap B) = 0,3$. Одредити вероватноће следећих догађаја $\bar{A}, \bar{B}, A \cup B, \bar{A} \cap \bar{B}, \bar{A} \cup \bar{B}$.
- Одредити вероватноћу догађаја $A \cap B$ ако је $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,7$, а $P(A \cup B) = 0,5$.
- У једној кутији се налази 4 беле, 6 црних и 5 плавих куглица. Из кутије се случајно извлачи једна куглица. Дати су случајни догађаји:
 A : извучена куглица је бела;
 B : извучена куглица је црна.
 Одредити вероватноћу збира догађаја A и B .
- Бацају се две коцке за игру. Дати су следећи случајни догађаји:
 A : збир бројева на обе коцке је већи од 9;
 B : на првој коцки је пао број 5.
 Одредити вероватноћу
 а) догађаја A и B ;
 б) догађаја $\bar{A}$ и $\bar{B}$
 в) $A \cap B$ и $A \cup B$.
- Два точка среће A и B (приказана на слици испод) окрећу се истовремено.



A



B

- Да ли су догађаји „точак A ће се зауставити на наранџастом пољу“ и „точак B ће се зауставити на жутом пољу“ независни догађаји?
 - Одредити вероватноћу да ће се точак A зауставити на црвеном пољу, а точак B на жутом пољу.
- Коцка се баца два пута. Одредити вероватноћу да ће у првом бацању пасти број један или да ће у другом бацању пасти непаран број.
 - Експеримент се састоји у бацању две фигуре: правилног тетраедра и правилног додекаедра. Тетраедар има четири стране (које су једнакостранични троуглови) нумерисане бројевима 1, 2, 3, 4, а додекаедар има 12 страна (које су правилни петоуглови) нумерисаних бројевима од 1 до 12. Одредити вероватноћу да на тетраедру падне број дељив са 3, а на додекаедру број дељив са 4.

ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ И УТВРЂИВАЊЕ

1. Колико четвороцифрених бројева може да се формира од цифара 1, 3, 5, 7, 9 ако цифре могу да се понављају?
2. Колико троцифрених бројева може да се формира од цифара 0, 2, 4, 6, 8 ако су све цифре у бројевима различите?
3. На колико начина може да се поређа у ред 12 запослених у једној компанији како би направили групну фотографију?
4. Један флаутиста треба да изведе на концерту 7 композиција. На колико начина може да распореди композиције на концерту?
5. На колико начина може 6 ученика да седне на 6 места у првом реду ако Стефан инсистира да седи на првом месту?
6. Колико различитих распореда може да се направи од слова у речи ПАРАЛОПИПЕД.
7. Један ученик је купио 3 сладоледа од ваниле, 5 од чоколаде, 4 од јагоде и 8 од малине. На колико начина може да подели сладоледе својим 20 другара како би их частио за рођендан?
8. Седам другара на екскурзији треба да се смести у хотелу у којем су слободне: 2 једнокреветне, 1 двокреветна и 1 трокреветна соба. На колико начина могу да се сместе другари у слободне собе?
9. На колико начина могу да се изаберу 3 различита додатка за пицу ако је доступно 12 додатака?
10. Ученик треба да изабере и одговори на 7 од 9 питања на тесту из историје. На колико начина може да изабере питања?
11. Један скуп има 7 елемената. Колико подскупова са 5 елемената има тај скуп?
12. Тренер школске фудбалске репрезентације позвао је на припреме 4 ученика из првог, 6 из другог, 8 из трећег и 10 из четвртог разреда. После припрема треба да састави тим од 11 ученика који ће учествовати на фудбалском купу. На колико начина може да састави тим ако у њему треба да буду 2 ученика из првог, 2 из другог, 3 из трећег и 4 из четвртог разреда?
13. Нека је експеримент извлачење карте из шпила од 52 карте. Спроведи 10 серија од по 50 извлачења. После сваког извлачења региструј број карте и врати је назад у шпил. Одреди статистичку вероватноћу појављивања следећих догађаја:
 А: извучена је карта пик са бројем 10;
 В: извучена је карта са непарним бројем (за непаран број се сматра и карта-дама).
14. Нека је експеримент извлачење карте из шпила од 28 карата у којем постоје по 4 карте са бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Направи 4 серије од по 100 експеримената и одреди релативне фреквенције догађаја:
 А: извучена је карта са бројем не мањим од 5;
 В: извучена је карта са бројем већим или једнаким 3;
 С: извучена је карта са парним бројем.
15. Истовремено се бацају новчић и тетраедар чије су стране означене са a , b , c и d . Опиши скуп елементарних догађаја за овај експеримент.
16. У једној кутији се налазе 4 куглице нумерисане бројевима 1, 2, 3 и 4. На случајан начин се извлаче једна по једна куглица, без враћања у кутију. Извлачење се врши све док се не извуче куглица са бројем 1. Опиши скуп елементарних догађаја за овај експеримент.

17. Стрелац гађа мету три пута, при чему се за сваки покушај бележи погодак или промашај мете. Опиши скуп елементарних догађаја и следеће случајне догађаје:
 А: у првом гађању је постигнут погодак;
 В: мета је промашена два пута;
 С: у сва три гађања је постигнут исти резултат;
 D: у прва два гађања мета је промашена.
18. У једној кутији се налази 10 батерија, од којих су 3 неисправне. Из кутије се истовремено бира 5 батерија. Одредити вероватноћу да се међу њима налазе 3 исправне батерије.
19. Коцка за игру се баца једном. Одредити вероватноћу следећих догађаја:
 А: пао је број већи од 3;
 В: пао је непаран број;
 С: пао је број 3 или број 4.
20. У једној трци учествује 8 коња, при чему су сви могући распореди коња на циљу једнако вероватни. Пре почетка трке Милош попуњава тикет на којем прогнозира редослед коња након завршетка трке. Колика је вероватноћа да ће погодити распоред?
21. У једној кутији се налази укупно 8 црних и белих куглица. Из кутије се извлаче две куглице. Вероватноћа да се извуку 2 беле куглице из кутије је $15/18$. Одредити број белих куглица у кутији.
22. Одредити вероватноћу да ће у случајно изабраној години у месецу августу бити тачно 4 понедељка.
23. Разматрају се пермутације без понављања од n елемената. Колика је вероватноћа да ће у једној случајно изабраној пермутацији два фиксна елемента a и b бити један поред другог?
24. Један шпил се састоји од 52 карте. Карте се распоређују у један низ по случајном редоследу. Одредити вероватноћу следећих догађаја:
 А: све четири јединице ће бити једна поред друге;
 В: јединице ће бити распоређене на прве четири позиције или на последње четири позиције.
25. Све стране једне коцке су обојене црвеном бојом. Коцка је подељена на 100 једнаких коцкица и оне су добро измешане. Случајно се бира једна коцкица. Одредити вероватноћу следећих догађаја:
 А: на коцкици ће бити тачно две стране обојене црвеном бојом;
 В: на коцкици ће бити бар две стране обојене црвеном бојом.
26. Један играч уплаћује у два узастопна кола по једну комбинацију лота 7/37. Одредити вероватноћу да:
 а) добије седмицу у првом колу;
 б) добије бар једну седмицу у два узастопна кола.
27. **Проблем за размишљање.** Крајем 17. века енглески математичари су саставили и анализирали таблице смртности које су показивале колико људи умире у различитим узрастима. На основу ових таблица могли су да процене вероватноћу да ће нека особа бити жива одређеног датума у будућности. То је довело до оснивања прве компаније за животно осигурање 1699. године. Компаније за животно осигурање користе податке о очекиваном трајању живота и стопама смртности како би израчунале премије осигурања. Следећа аустралијска таблица живота показује колико од 100 000 новорођених особа доживи одређену старост и колико се година живота у просеку очекује након навршене те старости.

Табела живота (life table) приказана је за Аустралију. Она показује колико од 100 000 рођених особа преживи до различитих узраста, као и очекивани број преосталих година живота за сваки узраст.

Мушкарци			Жене		
Години	Број преживелих	Очекивано време живота	Године	Број преживелих	Очекивано време живота
0	100000	73,03	0	100000	79,46
5	98809	68,90	5	99307	75,15
10	98698	63,97	10	99125	70,22
15	98555	59,06	15	98965	65,27
20	98052	54,35	20	98758	60,40
25	97325	49,74	25	98516	55,54
30	96688	45,05	30	98278	50,67
35	96080	40,32	35	98002	45,80
40	95366	35,60	40	97615	40,97
45	94323	30,95	45	96997	36,22
50	92709	26,45	50	95945	31,59
55	89891	22,20	55	94285	27,10
60	85198	18,27	60	91774	22,76
65	78123	14,69	65	87923	18,64
70	67798	11,52	70	81924	14,81
75	53942	8,82	75	72656	11,36
80	37532	6,56	80	58966	8,38
85	20998	4,79	85	40842	5,97
90	8416	3,49	90	21404	4,12
95	2098	2,68	95	7004	3,00
99	482	2,23	99	1953	2,36

На пример, можемо видети да се од 100 000 рођених мушкараца очекује да 98 052 доживи 20 година и да се, након навршених 20 година, очекује да ће преживети у просеку живети још 54,35 година.

- Колико година живота може да очекује новорођено мушко, а колико новорођено женско дете у Аустралији?
- Колика је вероватноћа да новорођено мушко дете доживи 60 година? А колика је та вероватноћа за женско дете?
- Према табели, који пол у просеку живи дуже? Образложи.
- Осигуравајућа компанија нуди животну осигурање са роком важења од 30 година. Зашто је такво осигурање јефтиније за лице старости 30 година него за лице старости 50 година?

ГЕОМЕТРИЈА

У овој теми обрађују се тригонометријске функције и везе између њих, међусобни однос праве и равни, однос између две равни или две праве, као и пресеци 3Д-облика са равни. Ови садржаји омогућавају прецизно описивање и анализу положаја, правца и нагиба објеката у простору. Тригонометрија представља основни алат за мерење и израчунавање растојања и углова, док проучавање међусобних односа и пресека са равни омогућава геометријско моделирање сложених просторних ситуација. Знања из ове теме имају широку примену у архитектури, инжењерству, грађевинарству, техничком цртању, физици и информатици, где се користе за анализу конструкција, одређивање видљивих пресечних облика, стабилности и просторне оријентације.

У темама 5 и 6 биће потребно да део примера и задатака визуелизујете и проверите у рачунарском софтверу GeoGebra. GeoGebra је интерактивни математички софтвер за визуелизацију и учење геометрије, алгебре, функција, статистике и калкулуса. Овај софтвер можете користити онлајн путем следећег линка: <https://www.geogebra.org/classic> или га можете преузети и инсталирати на свој рачунар преко линка: <https://www.geogebra.org/download..>

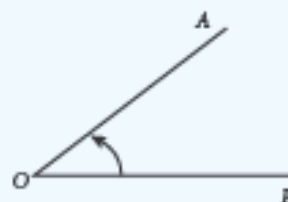
5.1 УГЛОВИ И МЕРЕЊЕ УГЛОВА

Подсети се!

- Које врсте углова постоје?
- У којој мерној јединици се мере углови?
- Углови се сусрећу у многим областима свакодневног живота, као што су архитектура, физика, картографија, геодезија, навигација, дизајн, спорт и многе друге.

Запамти!

- 2Д-форма која је образована од две полуправе са заједничком почетном тачком и део равни ограничен њима назива се **угао**.
- Заједничка почетна тачка полуправих назива се **теме угла**, а полуправе које образују угао називају се **краци угла**.
- На слици 1 приказан је угао AOB са теменом O и крацима OA и OB .



слика 1

Подсети се!

- Оштар угао је угао који је већи од 0° а мањи од 90° (слика 2).
- Туп угао је угао који је већи од 90° а мањи од 180° (слика 3).
- Угао који има тачно 90° назива се прав угао (слика 4), док се угао од 180° назива раван угао (слика 5).
- Неконвексан угао је угао који је већи од 180° , а мањи од 360° (слика 6).
- Пун угао је угао од 360° (слика 7).



слика 2



слика 3



слика 4



слика 5



слика 6



слика 7

- Степен је мера угла која се добија када се један цео круг подели на 360 једнаких делова. Један од тих делова назива се степен и означава се са 1° . Мање јединице од степена су минут, који се означава са $1'$, и секунда, која се означава са $1''$. При томе важи, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Пример 1

Претвори углове у минуте: а) 23° б) $31^\circ 15'$.

Решење:

$$\text{а) } 23^\circ = (23 \cdot 60)' = 1380'; \quad \text{б) } 31^\circ 15' = (31 \cdot 60 + 15)' = 1875'.$$

Пример 2

Претвори углове у степене: а) $493'$; б) $78^\circ 15'$.

Решење:

$$\text{а) } \frac{493}{60} = 8,2167^\circ; \quad \text{б) } 78^\circ 15' = 78 + \frac{15}{60} = 78 + 0,25 = 78,25^\circ.$$

Запамти!

Радијан је мера за величину угла која представља однос између дужине лука који одговара том углу и полупречника кружнице.

$\varphi = \frac{l}{r}$ (l - дужина кружног лука који одговара централном углу у кружници са полупречником r).

Најчешће се углови који су изражени у радијанима означавају са φ (чита се „фи“) или θ (чита се „тета“). У овом уџбенику ми ћемо користити ознаку φ .

Ако је дужина лука једнака полупречнику, тада се добија угао од 1 радијана (1 rad) $\varphi = \frac{l}{r} = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad}$.

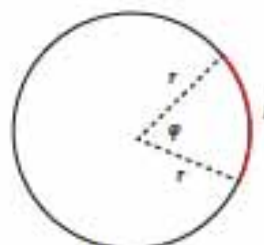
За претварање угла из степени у радијане и обрнуто користи се чињеница да један цео круг износи 360° или 2π rad. Ако је α угао изражен у степенима, а φ је исти тај угао изражен у радијанима, тада следи да је однос угла α према 360° је једнак односу угла φ према 2π , тј. $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\varphi}{2\pi}$. Одатле се добијају следеће формуле:

$$\alpha = 360^\circ \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi, \quad \varphi = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha.$$

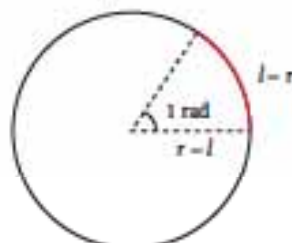
Нагласимо да запис величине угла у радијанима најчешће укључује број π .

Запамти!

- Формула за претварање угла из степени у радијане је $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$.
- Формула за претварање угла из радијана у степене је $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi$.
- Ознака rad за означавање радијана обично се не пише, али се подразумева. Тако, ако напишемо $\varphi = \frac{\pi}{6}$, подразумева се да је $\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.



Цртеж 8



Цртеж 9

Пример 3

Претвори прав, раван и пун угао из степени у радијане.

Решење:

Користећи формулу за претварање из степена у радијане, добијамо:

- за прав угао: $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{2}$;
- за раван угао: $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 180^\circ = \pi$;
- за пун угао: $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 360^\circ = 2\pi$.

Запамти!

- Прав угао $\alpha = 90^\circ$ изражен у радијанима је $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad.
- Раван угао $\alpha = 180^\circ$ изражен у радијанима је $\varphi = \pi$ rad.
- Пун угао $\alpha = 360^\circ$ изражен у радијанима је $\varphi = 2\pi$ rad.

Да би се добила боља представа о величини мере радијан, треба знати да је

$$1 \text{ rad} = 57,296^\circ \text{ и } 1^\circ = 0,01745 \text{ rad.}$$

Пример 4

Угао од 135° претвори у радијане.

Решење:

Применом формуле за $\alpha = 135^\circ$, добијамо $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$ rad.

Задатак 1

Угао од 150° претвори у радијане.

Пример 5

Угао од $\frac{\pi}{12}$ rad претвори у степене.

Решење:

Применом формуле за $\varphi = \frac{\pi}{12}$, добијамо $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\pi}{12} = 15^\circ$.

Задатак 2

Угао од $\frac{4\pi}{3}$ rad претвори у степене.

Пример 6

Угао од 3,2 rad претвори у степене.

Решење:

Применом формуле за $\varphi = 3,2$, добијамо $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi = \frac{180^\circ}{3,14} \cdot 3,2 = 183,44^\circ$.

Задатак 3

Угао од 29° претвори у радијане.

Запамти!

- Углови се мере у степенима или радијанима.
- 360° одговара 2π радијана.
- Степени су практичнији у свакодневним контекстима, док се радијани чешће примењују у тригонометрији и математичким анализама.

Задаци за вежбање!

1. Претвори углове у минуте:

- a) $78^\circ 32' 50''$; б) $13^\circ 40'$; в) $12^\circ 13' 25''$.

2. Претвори углове из степени у радијане:

- a) $\alpha = 225^\circ$; б) $\alpha = 315^\circ$; в) $\alpha = 210^\circ$; г) $\alpha = 75^\circ$.

3. Изрази у степенима углове који су дати у радијанима:

- a) $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ rad; б) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ rad; в) $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ rad; г) $\varphi = 3,5$ rad.

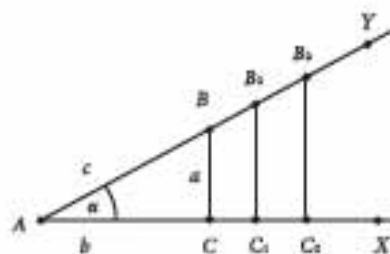
5.2 ДЕФИНИСАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА ОШТРОГ УГЛА

Подсети се!

- Дефиниши сличне троуглове!
- Дефиниши размеру и пропорцију!

Нека је дат један оштар угао $\alpha = \angle XAY$ (цртеж 1) и нека на краку AY изаберемо произвољне тачке $B, B_1, B_2, \dots$. Затим, из тачака $B, B_1, B_2, \dots$ повуцимо нормале на крак AX , чиме се добијају правоугли троуглови $ACB, AC_1B_1, AC_2B_2, \dots$. За све ове троуглове заједнички угао је α , а сви имају по један прав угао, што значи да су у свим троугловима сва три угла једнака. Одатле следи да су сви троуглови међусобно слични. Из сличности ових троуглова следи да су њихове одговарајуће странице пропорционалне, односно

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \dots \quad \text{и} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \dots$$



Цртеж 1

Отуда следи да у свим правоуглих троугловима са оштрим углом α , однос катете наспрам тог угла и хипотенузе тог троугла има исту вредност $a : c$, где је $a = \overline{BC}$, $c = \overline{AB}$. На идентичан начин долазимо до закључка да у свим правоуглих троугловима са оштрим углом α , однос катете налегле (суседне) том углу и хипотенузе тог троугла има исту вредност $b : c$, где је $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.

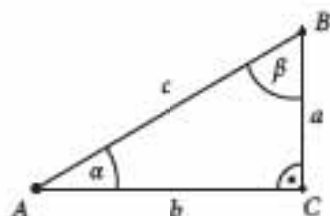
Запамти!

- **Синус** оштра угла у правоуглом троуглу представља однос наспрамне катете тог угла и хипотенузе.
- **Косинус** оштра угла у правоуглом троуглу представља однос налегле (суседне) катете тог угла и хипотенузе.

$$\sin \alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}}.$$

Ако је дат троугао који је стандардно означен као на цртежу 2, према дефиницији 1 имамо:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c}.$$



Цртеж 2

На исти начин као што се дефинишу синус и косинус неког угла, дефинишу се и функције тангенс и котангенс неког угла. Овде се користи чињеница да у свим правоуглим троугловима са оштрим углом α , однос наспрамне катете и налегле катете тог троугла има исту вредност. Аналогно, и однос налегле и наспрамне катете угла α у произвољном правоуглом троуглу има исту вредност.

Запамти!

- **Тангенс** оштрог угла у правоуглом троуглу представља однос наспрамне и налегле катете тог угла и означава се са $\operatorname{tg} \alpha$.
- **Котангенс** оштрог угла у правоуглом троуглу представља однос налегле и наспрамне катете тог угла и означава се са $\operatorname{ctg} \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{наспрамна катета}}.$$

Запамти!

- **Основне тригонометријске функције** су $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.
- За било који оштар угао α , вредности основних тригонометријских функција добијају се као количник дужина страница у једном правоуглом троуглу, које су позитивни бројеви, па су и саме функције позитивне.
- Област математике која проучава тригонометријске функције назива се **тригонометрија**.
- Назив тригонометрија потиче од грчких речи *trigonum*, што значи троугао, и *metria*, што значи мера.

Пример 1

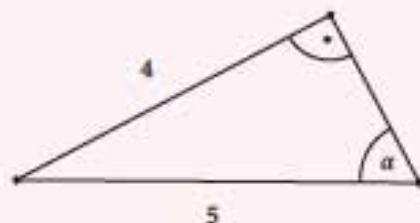
Према дефиницији, одреди вредности тригонометријских функција угла α за троугао који је дат на цртежу 3.

Решење:

Са цртежа добијамо да је дужина једне катете правоуглог троугла $a = 4$, а дужина хипотенузе је $c = 5$. Нека са b означимо дужину непознате катете троугла. Применом Питагорине теореме имамо $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ и одатле $b = \sqrt{9} = 3$.

Користећи дефиниције тригонометријских функција, добијамо

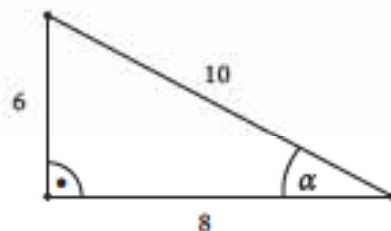
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}.$$



Цртеж 3

Задатак 1

Одреди вредности тригонометријских функција угла α за троугао који је дат на цртежу 4.



Цртеж 4

Пример 2

Одреди вредности тригонометријских функција оба оштра угла правоуглог троугла на цртежу 5, ако је однос дужина његових катета 8:15.

Решење:

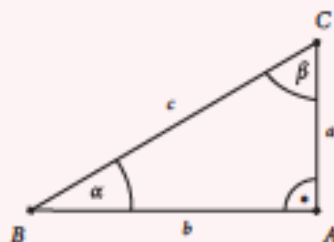
Из услова задатка о односу дужина катета имамо $a : b = 8 : 15$. Одатле добијамо да је $a = 8k$, $b = 15k$. Затим, заменом добијених вредности за a и b у једнакости $c^2 = a^2 + b^2$, добијамо:

$$c^2 = a^2 + b^2 = (8k)^2 + (15k)^2 = 64k^2 + 225k^2 = 289k^2, \text{ тј. } c = \sqrt{289k^2} = 17k.$$

Из дефиниције тригонометријских функција имамо

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}.$$

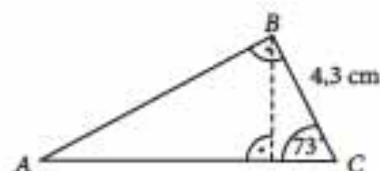
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{8k}{15k} = \frac{8}{15}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{15k}{8k} = \frac{15}{8}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{15k}{8k} = \frac{15}{8}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} = \frac{8k}{15k} = \frac{8}{15}.$$



Цртеж 5

Задатак 2

Одреди површину и обим датог троугла.



Рад са угловима на калкулатору

Калкулатори раде у различитим угаоним режимима:

- DEG – степени
- RAD – радијани

Исти број који се уноси различито се тумачи у зависности од изабраног режима.

1. Рад у режиму DEG (степени)

- 1) Подеси калкулатор у режим DEG.
- 2) Сваки угао који уносиш сматра се да је изражен у радијанима.
- 3) Резултати се израчунавају као углови изражени у радијанима.

Режим: DEG

Унеси: 60
 $\sin(60) = 0.866$
 (угао је изражен у степенима)

2. Рад у режиму RAD (радијани)

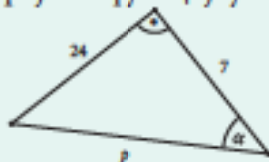
- 1) Подеси калкулатор у режим RAD.
- 2) Сваки угао који уносиш сматра се да је изражен у радијанима.
- 3) Резултати се израчунавају као углови изражени у радијанима.

Режим: RAD

Унеси: $\pi/3$
 $\sin(\pi/3) = 0.866$
 (угао је изражен у радијанима)

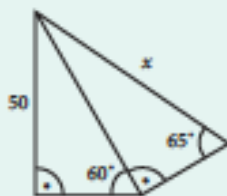
Задаци за вежбање!

1. Одреди вредности тригонометријских функција углова α и β у правоуглом троуглу ако су a и b катете, а c хипотенуза троугла:
 а) $a = 3, b = 4$; б) $b = 6, c = 10$; в) $a = 12, c = 37$; г) $b = 15, c = 17$.
2. Одреди вредности тригонометријских функција оштрог угла правоуглог троугла ако је познато да је
 а) $a : c = 5 : 13$; б) $b : c = 8 : 17$; в) $a : c = 7 : 25$; г) $a : b = 7 : 24$.
3. Одреди вредности тригонометријских функција угла α у правоуглом троуглу са слике.

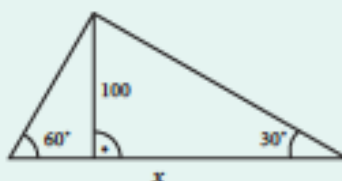


4. Одредити вредност променљиве x :

а)



б)

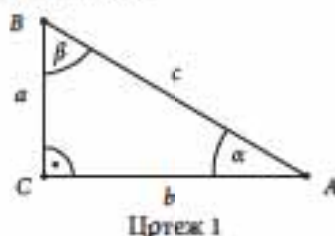


5.3 ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕМЕНТНИХ УГЛОВА

Подсети се!

- Шта су комплементарни углови?
- Наведи пример два пара комплементарних углова изражених у степенима и у радијанима.
- Колики је збир оштрих углова у правоуглом троуглу?

Размотримо троугао ABC приказан на слици 1.



Из троугла се може закључити следеће:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} = \cos \beta, & \cos \alpha &= \frac{b}{c} = \sin \beta, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta, & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta.\end{aligned}$$

Ако се у овим једнакостима замени $\beta = 90^\circ - \alpha$, тада једнакости добијају следећи облик:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha, & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

Ако је угао α е задат у радијанима, тада је $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, па се горње једнакости за везу између комплементарних углова могу записати као

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{tg} \alpha,\end{aligned}$$

Запамти!

Свака тригонометријска функција датог оштрог угла једнака је одговарајућој кофункцији његовог комплементарног угла.

Кофункције су парови тригонометријских функција чије су вредности за један оштар угао једнаке вредностима друге функције за његов комплементарни угао. Тако синус и косинус, као и тангенс и котангенс, представљају парове кофункција.

Пример 1Одреди оштар угао α ако

а) $\sin(\alpha - 12^\circ) = \sin 28^\circ$; б) $\sin \alpha = \cos 38^\circ$; в) $\operatorname{ctg}(\alpha + 28^\circ) = \operatorname{tg} 21^\circ 40'$.

Решење:а) Од $\sin(\alpha - 12^\circ) = \sin 28^\circ$ следи $\alpha - 12^\circ = 28^\circ$ и на крају се добија $\alpha = 40^\circ$.б) Полазећи од $\sin \alpha = \cos 38^\circ$, применом $\cos 38^\circ = \sin(90^\circ - 38^\circ) = \sin 52^\circ$, добија се $\sin \alpha = \sin 52^\circ$. Отуда је, $\alpha = 52^\circ$.в) Ако се замени $\operatorname{tg} 21^\circ 40' = \operatorname{ctg}(90^\circ - 21^\circ 40') = \operatorname{ctg} 68^\circ 20'$. Отуда се добија да је $\alpha + 28^\circ = 68^\circ 20'$, тј. $\alpha = 40^\circ 20'$.**Задатак 1**Одреди оштар угао α ако

а) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 49^\circ$; б) $\cos(\alpha - 25^\circ) = \sin 64^\circ 10'$; в) $\operatorname{tg}(\alpha + 15^\circ) = \operatorname{ctg}(2\alpha - 8^\circ)$.

Пример 2Одреди оштар угао α , изражен у радијанима, ако

а) $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{4})$; б) $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4})$.

Решење:а) Најпре, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$. Заменом у $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{4})$, добија се

$$\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{4}), \text{ тј. } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

б) Слично као претходно, $\operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - (2\alpha - \frac{\pi}{4})) = \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$. Заменомпоследњег резултата $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4})$, добија се $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$. Отуда,

$$\alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} - 2\alpha, \text{ тј. } 3\alpha = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}. \text{ Добијамо решење, } \alpha = \frac{11\pi}{36}.$$

Задатак 2Одреди оштар угао α , изражен у радијанима, ако

а) $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{6})$; б) $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{8}) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{6})$.

Пример 3

Упрости израз:

а) $2\sin 42^\circ - 3\cos 48^\circ$; б) $\frac{4\operatorname{tg} 58^\circ + 6\operatorname{ctg} 32^\circ}{-2\operatorname{ctg} 32^\circ + 3\operatorname{tg} 58^\circ}$.

Решење:

а) $2\sin 42^\circ - 3\cos 48^\circ = 2\sin 42^\circ - 3\sin(90^\circ - 48^\circ) = 2\sin 42^\circ - 3\sin 42^\circ = -\sin 42^\circ$.

$$б) \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{ctg} 32^{\circ}}{-2 \operatorname{ctg} 32^{\circ} + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{tg}(90^{\circ} - 32^{\circ})}{-2 \operatorname{tg}(90^{\circ} - 32^{\circ}) + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{tg} 58^{\circ}}{-2 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{10 \operatorname{tg} 58^{\circ}}{\operatorname{tg} 58^{\circ}} = 10.$$

Пример 4

Упрости израз
$$\frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \cos(\frac{\pi}{6})}{2 \cos(\frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})}.$$

Решење:

Уочимо да су углови дати у радијанима, па ћемо зато користити одговарајуће везе између $\sin \alpha$ и $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$. Добијамо:

$$\frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \cos(\frac{\pi}{6})}{2 \cos(\frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{2 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \sin(\frac{\pi}{3})}{2 \sin(\frac{\pi}{3}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{-2 \sin(\frac{\pi}{3})}{9 \sin(\frac{\pi}{3})} = -\frac{2}{9}.$$

Задатак 3

Упрости изразе:

$$\begin{aligned} \text{а) } 2 \operatorname{ctg} 59^{\circ} - 6 \operatorname{ctg} 31^{\circ}; \quad \text{б) } \frac{7 \sin 18^{\circ} - 3 \cos 72^{\circ}}{-\cos 72^{\circ} + 5 \sin 18^{\circ}}; \quad \text{в) } \frac{2 \operatorname{tg} 65^{\circ} - 7 \operatorname{ctg} 25^{\circ}}{2 \operatorname{tg} 65^{\circ} + 3 \operatorname{ctg} 25^{\circ}}; \quad \text{г) } \frac{-5 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{12}) + 9 \operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{12})}{2 \operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{12}) - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{12})} \end{aligned}$$

Задачи за вежбање!1. Одреди оштар угао α ако

а) $\sin(\alpha - 14^{\circ}) = \cos 29^{\circ} 20'$; б) $\cos(27^{\circ} - \alpha) = \sin 61^{\circ} 50'$;

в) $\operatorname{tg}(\alpha + 30^{\circ}) = \operatorname{ctg} 65^{\circ} 40'$; г) $\operatorname{ctg}(\alpha - 18^{\circ}) = \operatorname{tg} 52^{\circ} 38'$.

2. Одреди оштар угао α , у радијанима, ако

а) $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{5})$; б) $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{10}) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - 3\alpha)$; в) $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3})$.

3. Упрости израз:

а) $5 \cos 41^{\circ} - 2 \sin 49^{\circ} - \sin 49^{\circ} + 3 \cos 41^{\circ}$; б) $4 \sin 32^{\circ} - 3 \cos 58^{\circ} + 2 \sin 32^{\circ}$.

в) $\frac{4 \operatorname{tg} 35^{\circ} + 6 \operatorname{ctg} 55^{\circ}}{-3 \operatorname{ctg} 55^{\circ} + 2 \operatorname{tg} 35^{\circ}}$; г) $3 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}) - 4 \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{8}) + 5 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}) + \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{8})$.

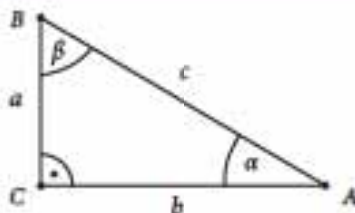
4. Упрости изразе ако се зна да је $\alpha + \beta = 90^{\circ}$.

а) $\cos \beta + \sin \alpha$; б) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta$ в) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$ г) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta$

5.4 ВЕЗА ИЗМЕЂУ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА ИСТОГ УГЛА

Подсети се!

- Како гласи дефиниција тригонометријских функција оштрог угла у правоуглом троуглу преко односа страница троугла?
- Како гласи Питагорина теорема?



Ако једнакост $a^2 + b^2 = c^2$, која је резултат Питагорине теореме, поделимо са c^2 , добијамо:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \quad \text{тј.} \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

У овој једнакости замењујемо $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ и $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ и добијамо $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Затим, $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, тј. добија се да $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

На сличан начин, $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$, тј. добија се да $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Из последње две једнакости добија се да $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Запамти!

Основни тригонометријски изрази или идентитети за произвољан оштар угао α су:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Једна од примена ових тригонометријских идентитета је одређивање вредности осталих тригонометријских функција ако је дата вредност једне тригонометријске функције.

Пример 1

Одреди вредности осталих тригонометријских функција ако је дато да је α оштар угао и

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

Решење:

У случају када је дата вредност $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$, полази се од идентитета $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, па се њему замењује вредност одговарајуће кофункције. У нашем случају

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1, \text{ затим } \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}. \text{ Одателе, } \sin \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Уочите да је једнакост $\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$ задовољена и за $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, али је вредност $\sin \alpha$ позитивна за сваки оштар угао α .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Задатак 1

Ако је дато да је α оштар угао и $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, одреди вредности осталих тригонометријских функција.

Пример 2

Одреди вредности осталих тригонометријских функција ако је дато да је $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$, где је α оштар угао.

Решење:

Постоје два начина за решавање оваквих задатака, и то:

Први начин

Полазећи од једнакости $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{12}$, добија се $\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \cos \alpha$. Ако последњу једнакост

заменимо у једнакости $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, добија се $\left(\frac{5}{12} \cdot \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$. Одатле,

$$\frac{25}{144} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ онда } \left(\frac{25}{144} + 1\right) \cos^2 \alpha = 1 \text{ и } \frac{169}{144} \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\text{Сада, } \cos^2 \alpha = \frac{1}{\frac{169}{144}} = \frac{144}{169}, \text{ а } \cos \alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

Замењујући вредност за $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ у једнакости $\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \cos \alpha$, добијамо да је

$$\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13} = \frac{5}{13}.$$

Сада, знајући да је $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, вредност $\operatorname{ctg} \alpha$ може се добити као реципрочна вредност

$$\operatorname{tg} \alpha, \text{ тј. } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}.$$

Други начин

Ако једнакост $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ поделимо са обе стране са $\cos^2 \alpha$, добијамо

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ тј. } \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \text{ Одатле, } \cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}, \text{ тј. } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}},$$

јер је $\cos \alpha$ позитиван број за сваки оштар угао α . Заменом вредности за $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ добијамо

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{144} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25 + 144}{144}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{169}{144}}} = \frac{12}{13}.$$

Добијену вредност за $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, заменујемо у $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и добијамо да је $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

Ако је дата вредност $\operatorname{ctg} \alpha$, тада једнакост $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ треба поделити са $\sin^2 \alpha$ добија се

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ тј. } 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \text{ Одатле, } \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \text{ тј. } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \text{ јер је}$$

$\sin \alpha$ позитиван број за сваки оштар угао α .

Запамти!

За сваки оштар угао α , тачне су једнакости $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$ и $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$.

Задатак 2

Одреди вредности осталих тригонометријских функција ако је дато да је α оштар угао и да је $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$.

Задаци за вежбање!

1. Одреди вредности осталих тригонометријских функција ако је α оштар угао и дато је да је:

а) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$; б) $\cos \alpha = \frac{20}{29}$.

2. Одреди вредности осталих тригонометријских функција ако је α оштар угао и дато је да је:

а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{40}$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$.

3. Одреди вредности осталих тригонометријских функција ако је α оштар угао и дато је да је:

а) $\sin \alpha = \frac{2a}{a^2 + 1}$; б) $\cos \alpha = \frac{10a}{a^2 + 25}$.

4. Израчунај вредност израза $4\operatorname{tg} \alpha + 5\cos \alpha$ ако је α оштар угао и $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

5.5 УПРОШЋАВАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ИЗРАЗА

Подсети се!

- Дефиниција тригонометријских функција комплементних углова.
- Напиши основне тригонометријске идентитете.

Запамти!

Једна од најважнијих примена основних тригонометријских идентитета јесте **упрошћавање тригонометријских израза**.

За упрошћавање тригонометријског израза следи кораке:

1. **Разломци и НЗС.** Ако израз садржи више разломака, имениоци се факторизују и одређује се најмањи заједнички садржалац (НЗС). Израз се записује као један разломак.
2. **Заједнички чинилац.** Код израза са више чланова проверава се могућност издвајања заједничког чиниоца испред заграде и одговарајућег груписања.
3. **Основни тригонометријски идентитети.** Примењују се идентитети:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

4. **Замена tg и ctg.** Изрази tg α и ctg α замењују се са $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

- Ако израз садржи два или више чланова, покушај да издвојиш заједнички чинилац испред заграде.
- Користи идентитете $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.
- Ако израз садржи tg α и/или ctg α , разложи их према идентитетима $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Пример 1

Упрости израз:

$$\text{а) } 4 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha; \quad \text{б) } (1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha); \quad \text{в) } \frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha}.$$

Решење:

$$\text{а) } 4 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 4 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4 - 1 = 3;$$

$$\text{б) } (1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha;$$

в) Будући да изрази $1 - \sin \alpha$ и $1 + \sin \alpha$ немају заједнички делилац, следи да је НЗС = $(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, па отуда добијамо

$$\frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} = \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}.$$

Задатак 1

Упрости израз:

$$\text{а) } 7 - 7 \cos^2 \alpha \quad \text{б) } (1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha); \quad \text{в) } \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 - \cos \alpha}.$$

Пример 2

Упрости израз:

$$\text{а) } \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \text{б) } \sqrt{1 - \sin \alpha} \cdot \sqrt{1 + \sin \alpha}; \quad \text{в) } \frac{(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha}.$$

Решење:

а) Ако се сведу оба разломка на исти именилац, добија се да је:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha - (1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{б) } \sqrt{1 - \sin \alpha} \cdot \sqrt{1 + \sin \alpha} = \sqrt{(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos^2 \alpha} = \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha} &= \frac{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha + 1}{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{2 + 2 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{2(1 + \sin \alpha)}{2 \sin \alpha(1 + \sin \alpha)} \\ &= \frac{1}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Запамти!

- Постоје два начина доказивања да је једнакост тачна:
- Први начин је када се обе стране једнакости трансформишу све док се не доведу до истог израза.
- Други начин је када се крене од једне стране и одређеним трансформацијама добије друга страна. (Најчешће се почиње од оне стране која је сложенија).

Пример 3

Докажи тачност једнакости:

$$\text{а) } \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha; \quad \text{б) } \frac{\sin \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}; \quad \text{в) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

Решење:**а) Прии начин:**

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha. \quad (\text{тражи се НЗС разломака са леве стране једнакости})$$

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha \quad (\text{извлачи се заједнички чинилац испред заграда})$$

$$\frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}. \quad (\text{примењује се } 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha)$$

$$\frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

Добили смо да је лева страна једнака десној $\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$. Тиме је доказана тачност једнакости.

Други начин:

Нека са $D = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$ означимо десну страну једнакости, а са $L = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ означимо леву страну. Полазимо од леве стране и желимо да је доведемо до облика као на десној страни.

$$\begin{aligned} L = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = D \end{aligned}$$

Значи, успели смо леву страну, применом тригонометријских идентитета, да доведемо до десне стране и тиме смо доказали тачност једнакости.

б) Полазимо од леве стране, најпре примењујемо идентитете $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Тиме се лева страна своди на:

$$L = \frac{\sin \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}.$$

Даље, свођењем сложених разломака на просте и применом идентитета $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, добијамо да је

$$L = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = D.$$

Тиме је тачност једнакости доказана.

- в) У овом случају сложеност обе стране је иста, па је свеједно са које стране ћемо кренути. У овом случају, са које год стране да кренемо, најлакше ћемо доћи до друге стране применом идентитета $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$. Тако, ако кренемо од леве стране и из претходног идентитета изразимо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$, добијамо да је:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{1 + \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

Задатак 2

Докажи тачност једнакости:

$$\text{а) } (1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha}; \quad \text{б) } \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Задатак 3Докажи идентитет $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = 2 \operatorname{ctg} \alpha$.**Задаци за вежбање!**

1. Упрости израз:

$$\text{а) } \sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha; \quad \text{б) } (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha; \quad \text{в) } \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

2. Упрости израз:

$$\text{а) } \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\sin^2 \alpha}; \quad \text{б) } \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha}; \quad \text{в) } \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{3 \sin \alpha - 1}{1 - \sin \alpha} - \frac{2}{1 + \sin \alpha}.$$

3. Докажи тачност једнакости:

$$\text{а) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0;$$

$$\text{б) } \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha, \sin \alpha \neq 0.$$

5.6 ПРИМЕНА ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

Подсети се!

- Скицирај правоугаоник, трапез, троугао и правилно означи њихове елементе.
- Дефиниције тригонометријских функција оштрог угла.

Запамти!

- Угао под којим се гледа тело када се предмет налази изнад хоризонта назива се **угао елевације**.
- Угао под којим се гледа тело када се предмет налази испод хоризонта назива се **угао депресије**.



Пример 1

Израчунај периметар правоугаоника са страницом $a = 14$ cm ако је угао између те странице и дијагонале $\alpha = 28^\circ 40'$.

Решење:

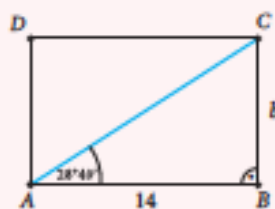
Из услова задатка позната је дужина једне странице правоугаоника, а да бисмо одредили његов периметар, треба да нађемо дужину b друге странице.

Са цртежа 1 јасно је да треба да изаберемо тригонометријску функцију у којој се користи количник између наспрамне и налегле катете, како бисмо искористили дати угао и страницу $a = 14$ за израчунавање непознате дужине b . Јасно је да је та тригонометријска функција тангенс, тј.

$\operatorname{tg} 28^\circ 40' = \frac{b}{14}$. Одатле, $b = 14 \cdot \operatorname{tg} 28,67^\circ = 14 \cdot 0,547 = 7,7$ cm. (Вредност $\operatorname{tg} 28^\circ 40'$ се израчунава на калкулатору.)

За периметар правоугаоника добијамо

$$L = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 7,7 = 43,4 \text{ cm.}$$



Цртеж 1

Задатак 1

Изračунај периметар и висину једнакокраког троугла чији крак износи 40 cm, а угао при врху троугла је 44° .

Пример 2

Једнакокраки трапез има основе 18 cm и 13,4 cm. Угао између доње основе и крака је $\frac{\pi}{3}$.

Одреди дужину крака и висину трапеза.

Решење:

На цртежу 2 дат је једнакокраки трапез.

Најпре ћемо израчунати део x који је карактеристичан

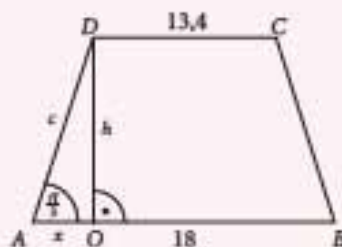
за једнакокраки трапез, $x = \frac{18 - 13,4}{2} = \frac{4,6}{2} = 2,3$ cm. За

одређивање непознате дужине c крака и непознате висине

h трапеза, посматрамо троугао $\triangle AOD$. Из њега налазимо:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{x}{c} = \frac{2,3}{c}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{x} = \frac{h}{2,3}.$$

Одатле, $c = \frac{2,3}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{2,3}{0,5} = 4,6$ cm, а $h = 2,3 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,3 \cdot \sqrt{3} \approx 2,3 \cdot 1,73 = 3,979$.



Цртеж 2

Пример 3

Основе једнакокраког трапеза су 18 cm и 13,4 cm, а крак је 5 cm. Одреди углове трапеза.

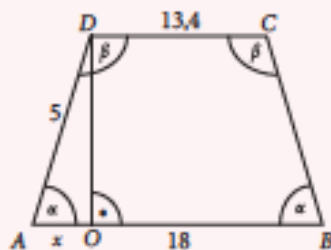
Решење:

Слично као у претходном примеру, најпре ћемо израчунати

део x према цртежу 3. Добијамо да је: $x = \frac{18 - 13,4}{2} = \frac{4,6}{2} = 2,3$ cm.

Из троугла $\triangle AOD$, помоћу тригонометријске функције косинус израчунаћемо угао α . Наиме,

$\cos \alpha = \frac{2,3}{5} = 0,46$, одакле следи да је $\alpha = \cos^{-1} 0,46 = 62,61^\circ$ (Вредност инверзне функције функције косинус израчунава се на калкулатору). Користећи чињеницу да су супротни углови у једнакокраком трапезу једнаки и да је збир унутрашњих углова у сваком четвороуглу једнак 360° , имамо $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, па заменом вредности угла α добијамо $2 \cdot 62,61^\circ + 2\beta = 360^\circ$. Одатле следи да је $2\beta = 360^\circ - 125,22^\circ$, односно $\beta = 234,78^\circ : 2 = 117,39^\circ$.



Цртеж 3

Задатак 2

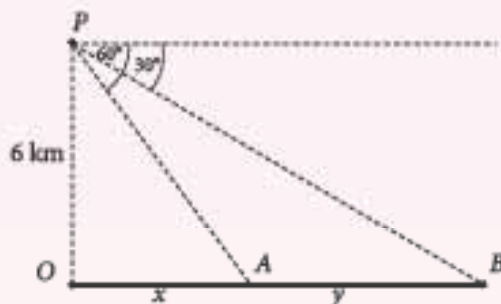
Изračунај периметар правоугаоника чија је дијагонала 15 cm и која са дужином страницом зах угао од 36° .

Пример 4

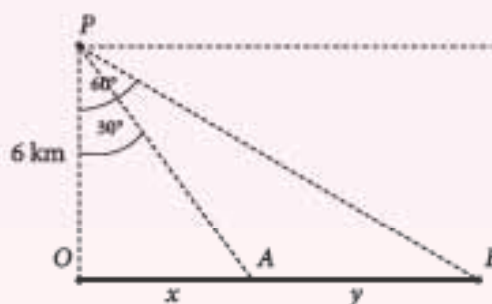
Авион лети на надморској висини од 6 km изнад мора и уочава два брода. Углови депресије из авиона према бродовима А и В су 60° и 30° , редом. Израчунај растојање између два брода.

Решење:

Нека се авион налази у тачки Р а тачку вертикално испод њега означимо са О. Бродови се налазе у тачкама А и В на површини мора. (цртеж 6)



Цртеж 6



Цртеж 7

Висина на којој се налази авион означена је са PO , из углова депресије од авиона до бродова добијамо да је $\angle OPA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ и $\angle OPB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Нека са x го означимо растојање од тачке О до тачке А, тј. $x = \overline{OA}$ а са y растојање од тачке А до тачке В, тј. $y = \overline{AB}$ (цртеж 7).

Разматрајући троугао $\triangle POA$ и угао $\angle OPA = 30^\circ$, имамо $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{6}$. Одатле следи да $x = 6 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6 \cdot 0,577 = 3,46 \text{ km}$.

Слично, из троугла $\triangle POB$, за угао $\angle OPB = 60^\circ$ и страницу $\overline{OB} = x + y$, имамо $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x + y}{6}$. Одатле следи да је $x + y = 6 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 6 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 1,732 = 10,39 \text{ km}$.

Одатле добијамо да растојање између бродова А и В износи $y = 10,39 - 3,46 = 6,93 \text{ km}$.

Задатак 3

Једно лице посматра дрво које се налази на супротној обали реке под углом од 48° . Затим се лице креће 10 m дуж обале и зауставља се. Тада исто дрво посматра под углом од 36° . Одреди ширину реке.

Пример 5

Човек висок 1,8 m стоји на растојању 4,5 m од уличне светиљке, а његова сенка је дугачка 2,8 m. Одреди висину уличне светиљке.

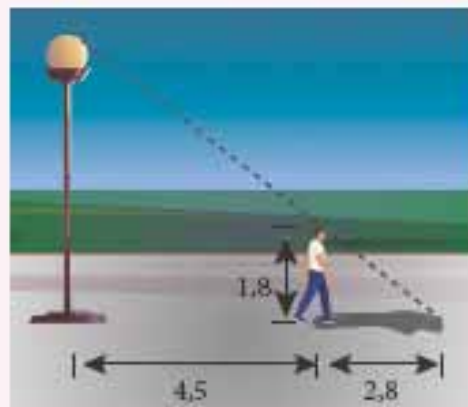
Решење:

Са слике се добија цртеж 8. Нека са $x = \overline{DB} = 2,8$ m означимо дужину сенке, а са $y = \overline{DE} = 1,8$ m означимо висину човека. Тада ћемо угао α добити из правоуглог троугла DBE , са $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,8}{2,8} = 0,643$, односно $\alpha = \operatorname{tg}^{-1} 0,643 = 32,74^\circ$.

Од правоуглог троугла ABC са катетама $\overline{AC}$ и $\overline{AB} = 4,5 + 2,8 = 7,3$ m, добијамо

$\operatorname{tg} 32,74^\circ = \frac{\overline{AC}}{7,3}$, односно $\overline{AC} = 7,3 \cdot \operatorname{tg} 32,74^\circ \approx 4,7$ m.

Значи, висина уличне светиљке је 4,7 m.



Задатак 4

Планинар се пење стазом дугачком 2 km, која са хоризонталном равни захвата угао од 12° . На којој висини ће се налазити планинар када стигне на крај стазе? Направи скицу.

Задаци за вежбање!

1. До којој које висине досежу мердевине за гашење пожара дужине 25 m ако су нагнуте под углом од 70° ?
2. Дат је једнакокраки трапез чија је већа основица 42 cm, угао при тој основици је $47^\circ 20'$, а крак $c = 25$ cm. Израчунати другу основицу и висину трапеza.
3. На коју висину се попео путник који је ишао правим путем дугим 2 km под углом од $4^\circ 10'$?
4. Са врха једног светионика, који је висок 150 m, види се брод под углом од 9° . Колико износи растојање од светионика до брода?
5. Камера је постављена тако да посматра један објекат под углом депресије од 35° . Објекат према коме је камера усмерена налази се на хоризонталном растојању од 20 m. Израчунати висинску разлику камере у односу на објекат.
6. Угао депресије са врха зграде висине 56 m према аутомобилу паркираном на земљи износи 30° . За колико метара треба да се аутомобил удаљи од зграде да би нови угао депресије износио 15° ?

5.7 АКСИОМЕ ПРОСТОРНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

У просторној геометрији изучавају се међусобни односи између основних геометријских појмова: тачке, праве и равни. Њихова својства и међусобни положаји утврђују се на основу аксиома просторне геометрије, које представљају почетне тврдње које се не доказују, већ се прихватају као истините. На овој аксиоматској основи разматрају се могући међусобни односи тачке и праве, две праве, праве и равни, као и две равни, што омогућава систематско и логички доследно проучавање геометрије у простору. Аксиоме просторне геометрије и међусобни односи између тачке, праве и равни имају широку практичну примену. Оне представљају основу за решавање геометријских задатака, доказивање теорема и правилно тумачење просторних конструкција. Ови појмови се примењују у архитектури, грађевинарству, техничком цртању, инжењерству и физици, где је неопходно прецизно одређивање положаја и оријентације објеката у простору.

Геометрија је грана математике која проучава облик, величину и положај објеката у равни и простору. Порекло геометрије повезује се са практичним потребама човека, као што су мерење, грађење, оријентација у простору и друго.

У досадашњем образовању изучавани су многи појмови из геометрије, као што су: тачка, права, троугао, коцка, 3Д-облик и многи други. Неки од њих дефинишу се помоћу других познатих појмова, а неки се не дефинишу. Појмови који се не дефинишу, већ се објашњавају навођењем примера, називају се **основни појмови** а помоћу њих се дефинишу остали појмови.

Запамти!

- Појмови који се не дефинишу називају се **основни појмови**.
- Појмови који се дефинишу помоћу основних појмова називају се **изведени или дефинисани појмови**.
- У геометрији основни појмови су **тачка, права и раван**.

Пример 1

Угао је 2Д-облик састављен од две полуправе са једном заједничком тачком.

Дакле, појам угла је потпуно објашњен реченицом у којој су логички повезани појмови тачка, полуправа и 2Д-облик.

Запамти!

- **Дефиниција** е јасно и прецизно објашњење једног појма којим се његов садржај сагледава помоћу других познатих појмова.
- **2Д-облик** је скуп тачака у равни који има тачно одређен положај, облик и величину.
- **Основна тврђења** или **аксиоме** јесу тврђења која прихватамо као тачна без доказивања.
- **Изведена тврђења** или **теореме** јесу сва остала тврђења која се доказују.

Теорема може бити исказана у облику **импликације** (**условном облику**) или у **категоричном облику**. На пример: Ако је четвороугао квадрат, онда његове странице имају једнаке дужине. Ово је теорема исказана у облику импликације. Ова теорема у категоричном облику гласи: Све странице квадрата имају једнаке дужине.

У свакој теореме морају постојати:

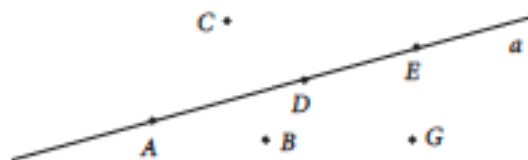
- услови под којима се разматра објекат (ти услови се називају **претпоставке**);
- тврђење о тим објектима (то тврђење се назива **закључак** теореме).

У наставку следе неке важније аксиоме и теореме, при чему ће аксиоме бити означаване са $A_1, A_2, A_3, \dots$, а теореме са $T_1, T_2, T_3, \dots$

A_1 : На свакој правој лежи бесконачно много тачака, а постоји и бесконачно много тачака које не леже на тој правој.

A_2 : Кроз било које две различите тачке пролази једна и само једна права.

За тачку A кажемо да припада или лежи на правој a , или да права a пролази кроз тачку A , и записујемо $A \in a$. Такође, за тачку B кажемо да не припада или не лежи на правој a , или да права a не пролази кроз тачку B , и записујемо $B \notin a$ (цртеж 1).



Цртеж 1

Запамти!

Тачке које леже на истој правој називају се **колинеарне тачке**.

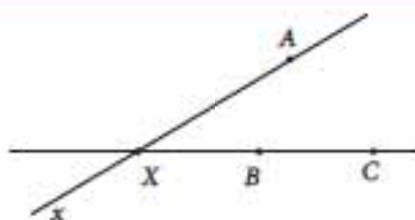
Сада ће бити приказано неколико теорема које следе из датих аксиома.

T_1 : У простору постоје најмање три неколинеарне тачке.

Доказ: Нека је дата права p пролази кроз две различите тачке A и B . Према аксиоми A_1 постоји тачка C која не лежи на правој a . Дакле, тачке A , B и C нису колинеарне.

T_2 : Кроз сваку тачку пролази бесконачно много правих.

Доказ: Нека је A произвољна тачка, а B и C тачке такве да тачке A , B и C нису колинеарне. Према аксиоми A_2 , кроз тачке B и C пролази јединствена права, на којој, према аксиоми A_1 , лежи бесконачно много тачака. Кроз сваку тачку X праве BC и кроз тачку A пролази јединствена права (цртеж 2). Будући да на правој BC лежи бесконачно много тачака, следи да ће кроз тачку A пролазити бесконачно много правих.



Цртеж 2

Пример 2

Колико правих пролази кроз четири тачке A , B , C и D ?

Решење:

Из аксиоме A_2 следи да кроз две различите тачке пролази тачно једна права. Број правих које пролазе кроз тачке A , B , C и D зависи од њиховог међусобног положаја, па ћемо размотрити неколико случајева.

Све четири тачке су колинеарне:

Тада постоји тачно једна права која пролази кроз све четири тачке.

Три тачке су колинеарне, а четврта не лежи на тој правој:

Три колинеарне тачке одређују једну праву. Четврта тачка са сваком од те три тачке одређује по једну нову праву. Укупан број правих је $1 + 3 = 4$.

Било које три тачке нису колинеарне:

Свака два различита пара тачака одређују нову праву. Укупан број правих је $\binom{4}{2} = 6$

Овај број правих добија се на следећи начин: Из скупа од 4 тачке изаберемо произвољан подскуп од 2 тачке и кроз њих повучемо једну праву. Број таквих избора подскупа са два елемента из скупа са 4 елемента је $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$, што је уједно и број различитих правих.

Можемо закључити да кроз четири тачке могу пролазити једна, четири или шест различитих правих, у зависности од положаја тачака.

Пример 3

Нека је A произвољно дата тачка. Покажи да постоје тачке B и C , такве да тачке A , B и C нису колинеарне.

Решење:

Нека је B тачка различита од тачке A . Тада, према аксиоми A_2 , кроз тачке A и B пролази једна и само једна права a . Према аксиоми A_1 , постоје тачке које не леже на правој a , па нека је C једна таква тачка (цртеж 3). Дакле, тачке A , B и C нису колинеарне.



Цртеж 3

Задатак 1

Колико правих одређују тачке A, B, C, D и E ако су три од њих колинеарне?

Задатак 2

Покажи да, ако је у равни дато n тачака, онда је број одређених правих највише $\binom{n}{2}$. Када се постиже једнакост?

Следећим аксиомама одређује се међусобни положај тачке и равни.

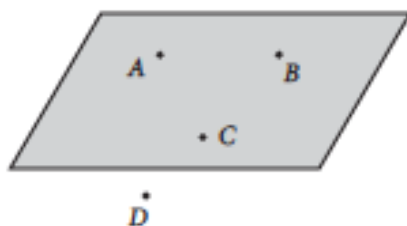
A_3 : На свакој равни лежи бесконачно много тачака, а постоје и тачке које не припадају тој равни.

A_4 : Кроз три неколинеарне тачке пролази једна и само једна раван.

У наставку ћемо показати тачност следеће теореме.

T_3 : У простору постоје најмање четири тачке које не леже у истој равни.

Доказ: Према теорему T_1 , у простору постоје најмање три неколинеарне тачке. Нека су то тачке A, B и C . Према аксиоми A_4 , оне одређују једну и само једну раван. Према аксиоми A_3 , постоје тачке које не леже у тој равни. Нека је D једна таква тачка. Тада тачке A, B, C и D не леже у истој равни.



Цртеж 4

Запамти!

Компланарне тачке су тачке које леже у истој равни.

Пример 4

Покажи да кроз дату праву p и тачку $A \notin p$ пролази тачно једна раван.

Доказ: На правој p постоје најмање две различите тачке B и C . Тачка A не лежи на правој p , па тачке A , B и C нису колинеарне. Према аксиоми A_4 , кроз ове три тачке пролази једна и само једна раван.

Пример 5

Колико различитих равни пролази кроз четири тачке A , B , C и D ?

Решење:

Одговор на ово питање зависи од међусобног положаја тачака. Из аксиоме A_4 следи да кроз три неколинеарне тачке пролази једна раван. Размотрићемо све могуће случајеве положаја четири тачке.

Све четири тачке не леже у истој равни (најмање једна тачка је „изван“ равни коју одређују преостале три):

Тада од 4 тачке можемо изабрати 4 различите тројке. Свака тројка одређује различиту раван. Дакле, кроз 4 тачке пролазе 4 равни.

Четири тачке леже у истој равни, али нису све колинеарне

Тада било које три тачке леже у истој равни, па се све могуће равни поклапају, односно кроз четири тачке пролази тачно једна раван.

Четири тачке су колинеарне (све леже на једној правој):

У том случају, кроз једну праву може се повући бесконачно много равни. Дакле, кроз 4 колинеарне тачке пролази бесконачно много равни.

Дакле, кроз 4 различите тачке могу пролазити једна, четири или бесконачно много равни, у зависности од положаја тачака.

Задатак 3

Колико различитих равни пролази кроз пет тачака A , B , C , D и E ?

Задаци за вежбање!

1. Колико правих пролази кроз једну дату тачку?
2. Колико правих одређују три дате неколинеарне тачке?
3. Колико дужи одређују три различите тачке?
4. Покажи да је са пет различитих тачака одређена једна, пет, шест, осам или десет правих.
5. Нека је A произвољна тачка. Покажи да постоје тачке B , C и D , такве да тачке A , B , C и D нису компланарне.

5.8 МЕЋУСОБНИ ПОЛОЖАЈ ПРАВЕ И РАВНИ, ДВЕ РАВНИ И ДВЕ ПРАВЕ

Подсети се!

- Какав може бити међусобни положај тачке и праве?
- Шта представљају ознаке $A \in a$ и $A \in \Sigma$, ако је A дата тачка, a дата права, а Σ дата раван?
- Под међусобним положајем две фигуре подразумева се број заједничких тачака које те две фигуре имају.

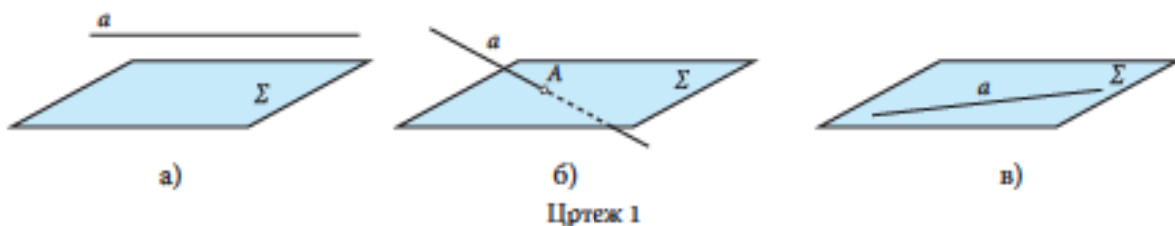
Међусобни положај праве и равни

Ако свака тачка праве a лежи у равни Σ , тада кажемо да права a лежи у равни Σ , односно да раван Σ пролази кроз праву a .

A_Σ : Ако две тачке праве a леже у равни Σ , онда и права a лежи у овој равни.

Правна и раван могу имати један и само један од следећих међусобних положаја:

- да немају заједничких тачака, тј. $a \cap \Sigma = \emptyset$ (цртеж 1, а);
- да имају само једну заједничку тачку, тј. $a \cap \Sigma = \{A\}$ (цртеж 1, б);
- да свака тачка праве a да лежи у равни Σ , тј. $a \cap \Sigma = a$ (цртеж 1, в).



Запамти!

- Ако права a и раван Σ немају заједничких тачака, тада кажемо да су оне паралелне и то означавамо са $a \parallel \Sigma$. Такође, кажемо да су права a и раван Σ паралелне и ако права a лежи у равни Σ .
- Ако права a и раван Σ имају једну заједничку тачку A , тада кажемо да се оне секу у тачки A , односно да права a пробада раван Σ у тачки A .
- Ако права a и раван Σ имају две заједничке тачке, тада права a лежи у равни Σ .

У наставку ћемо доказати неколико теорема о међусобном положају праве и равни.

T_4 : На свакој равни Σ лежи барем једна права.

Доказ: Према аксиоми A_3 , на равни Σ леже најмање две тачке. Нека су то тачке A и B , а према аксиоми A_2 , кроз тачке A и B пролази једна и само једна права a . Пошто тачке A и B леже на правој a и у равни Σ , према аксиоми A_1 , следи да права a лежи у равни Σ .

T_5 : За сваку тачку A која не лежи на правој a , постоји једна и само једна раван Σ која пролази кроз тачку A и праву a .

Доказ: Према аксиоми A_1 , следи да на правој a леже најмање две тачке, на пример B и C . Пошто $A \notin a$, следи да тачке A , B и C нису колинеарне, па према аксиоми A_4 , оне одређују једну и само једну раван Σ . Дакле, кроз тачку A и праву a пролази тачно једна раван.

Пример 1

Покажи да у свакој равни Σ леже најмање три различите праве.

Решење:

Према аксиоми A_3 , свака раван Σ садржи бесконачно много тачака. Отуда можемо изабрати три различите неколинеарне тачке A , B , $C \in \Sigma$. Пошто су неколинеарне, оне не леже на истој правој. Отуда кроз било које две од њих пролази тачно једна права (аксиома A_2). На тај начин добијамо праве: $p_1 = AB$, $p_2 = AC$ и $p_3 = BC$. Према аксиоми A_3 , пошто свака од ових правих са равни има две заједничке тачке, следи да праве p_1 , p_2 и p_3 леже у равни Σ .

Међусобни положај две равни

Међусобни положај две равни сагледаћемо кроз следећу теорему:

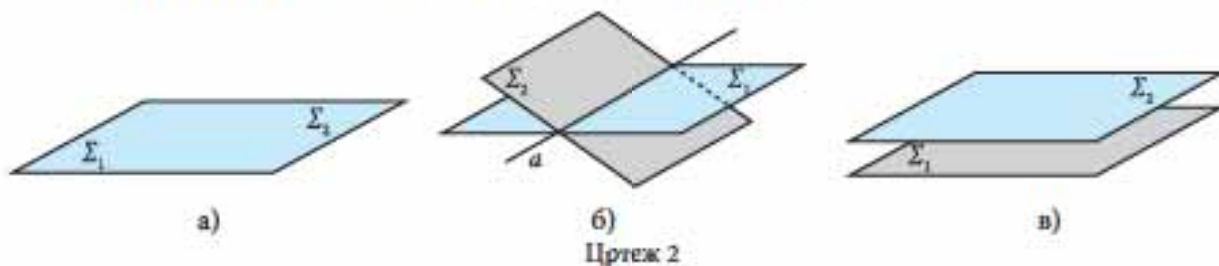
T_6 : Постоје најмање две равни које имају заједничку праву.

Доказ: Према T_3 у простору постоје четири тачке које не леже у истој равни, на пример A , B , C и D . Према A_4 , тачке A , B и C одређују раван Σ_1 , а тачке A , B и D другу раван Σ_2 . Пошто тачке A и B леже у равни Σ_1 следи да права $a = AB$ има две заједничке тачке са равни Σ_1 , а пошто тачке A и B леже и у равни Σ_2 следи да права a има две заједничке тачке и са равни Σ_2 . Према аксиоми A_3 , следи да права a лежи у обе равни. Пошто су Σ_1 и Σ_2 различите равни, према A_4 , следи да оне не могу имати друге заједничке тачке осим тачака које леже на правој a . У супротном, Σ_1 и Σ_2 би биле једна иста раван. Према томе, равни Σ_1 и Σ_2 имају заједничку праву a , тј. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$.

A_6 : Ако две равни имају једну заједничку тачку, онда имају бар још једну заједничку тачку.

Отуда, две равни Σ_1 и Σ_2 могу:

- а) да се поклапају, тј. $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ (цртеж 2, а)
- б) да имају заједничку праву, тј. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$ (цртеж 2, б)
- в) да немају заједничких тачака, тј. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ (цртеж 2, в)



Запамти!

- Равни Σ_1 и Σ_2 су паралелне ако немају заједничких тачака. Пишемо, $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$.
- Равни које се секу имају само једну заједничку праву.
- Равни Σ_1 и Σ_2 се поклапају ако имају три заједничке неколинеарне тачке. Пишемо, $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$.

Задатак 1

Да ли две равни могу имати само једну заједничку тачку? Образложи одговор.

Пример 2

Ако тачке A, B и C леже и у равни Σ_1 и у равни Σ_2 , да ли из тога следи да се те две равни поклапају? Образложи одговор.

Решење:

Не мора да следи да се равни поклапају, јер у случају када су тачке A, B и C колинеарне, тада се равни секу.

Задатак 2

Какав међусобни положај могу имати равни одређене тачкама ABC и ABD ?

Међусобни положај две праве

Две праве a и b могу:

- да немају ниједну заједничку тачку, тј. $a \cap b = \emptyset$;
- да имају само једну заједничку тачку, тј. $a \cap b = \{A\}$;
- да имају бесконачно много заједничких тачака, тј. $a \cap b = \{A, B, C, \dots\}$.

Следеће теореме одређују међусобни положај две праве:

T_2 : Ако две праве имају најмање две заједничке тачке, онда су једнаке као скупови тачака.

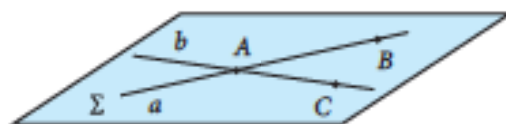
Доказ: Ако су A и B с две различите тачке које припадају правој a и правој b , онда, према A_2 постоји једна и само једна права која пролази кроз њих. Та права не може бити различита ни од праве a ни од праве b . Дакле, праве a и b представљају исти скуп тачака.

T_3 : Две различите праве не могу имати више од једне заједничке тачке.

Доказ: Ако праве a и b имају више од једне заједничке тачке, онда се, према T_2 , поклапају. Дакле, пресек две различите праве a и b може бити празан или садржати само једну тачку. У другом случају кажемо да се праве a и b секу и записујемо $a \cap b = \{A\}$.

T_4 : Две праве које се секу одређују једну и само једну раван.

Доказ: Нека се праве a и b секу у тачки A . Према A_1 , на правој a , осим тачке A постоји и тачка B , а на правој b , осим тачке A постоји и тачка C . Тачке A , B и C нису колинеарне, па према A_4 , оне одређују једну и само једну раван Σ , која пролази кроз тачке A , B и C , онда, према A_4 , равни Σ_1 и Σ представљају исти скуп тачака и поклапају се.



Цртеж 3

Запамти!

Две праве које се секу увек леже у истој равни.

Пример 3

Покажи да су једном правом и двема тачкама које не леже на правој одређене једна или две равни.

Решење:

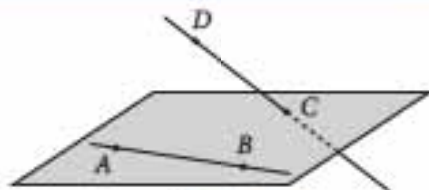
Ако права одређена са две дате тачке сече дату праву, онда, према T_2 , те две праве одређују једну раван. У супротном случају, према T_3 , дата права и свака од тачака одређују по једну раван, односно укупно две равни.

Задатак 3

Две праве a и b секу се у тачки A . Права a лежи у равни Σ_1 , а права b у равни Σ_2 . Да ли се равни Σ_1 и Σ_2 поклапају?

T_{10} : Постоје праве које не леже у истој равни.

Доказ: Према T_3 , постоје најмање четири тачке A, B, C и D које не леже у истој равни. Праве AB и CD сигурно не леже у истој равни, јер ако постоји раван која пролази кроз њих, онда би све тачке A, B, C и D лежале у тој равни (цртеж 4).



Цртеж 4

Запамти!

- Две праве које се не секу или су паралелне или не леже у истој равни.
- Две праве које не леже у истој равни називају се **мимоплазне праве**.
- Две праве a и b које леже у истој равни, а не секу се и не поклапају, називају се **паралелне праве** и означавају се са $a \parallel b$.

Задатак 4

Дата је раван Σ и праве a и b . Ако се праве a и b секу у тачки A и ако права a лежи у равни Σ , да ли права b може да лежи у равни Σ ?

Задатак 5

Нека су A и B две различите тачке равни Σ . Докажи да постоји бесконачно много правих које пролазе кроз тачку A , леже у равни Σ и различите су од праве AB .

Задатак 6

Нека права a не лежи у равни Σ и $a \cap \Sigma = \emptyset$. Докажи да је права a паралелна са равни Σ , и покажи да постоји раван Π која садржи праву a и $\Pi \parallel \Sigma$.

Задаци за вежбање!

1. Докажи да у свакој равни Σ лежи барем једна права a и барем једна тачка A , тако да $A \notin a$.
2. Покажи да за сваку раван Σ постоји барем једна права која пробада раван Σ .
3. Докажи да кроз тачку A која лежи у равни Σ пролази бесконачно много правих које леже у равни Σ .
4. Нека су Σ_1 и Σ_2 две различите равни и нека је $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Докажи да постоји барем једна права која пробада обе равни.
5. Нека су дата права a и раван Σ . Одреди да ли је могуће $a \cap \Sigma = \Sigma$.
6. Права a пробада раван Σ . Да ли у равни Σ постоји права која је паралелна са правом a ?
7. Покажи да две различите паралелне праве одређују једну и само једну раван.
8. Какав међусобни положај могу имати равни одређене тачкама ABM и ADN ?
9. Докажи да кроз дату праву a пролази бесконачно много равни.

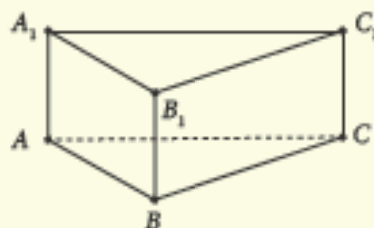
5.9 ПРИЗМА. ПРЕСЕЦИ ПРИЗМЕ СА РАВНИМА

Проучавање тродимензионалних геометријских облика и њихових пресека са равни има посебан значај и практичну примену. Пресек просторног тела (као што су призма, пирамида, цилиндар, купа и сл.) са равни представља раванску фигуру која настаје као заједнички део тела и равни. Анализа ових пресека омогућава боље разумевање унутрашње структуре, облика и својстава просторног тела.

Познавање пресека са равни има важну практичну примену у архитектури, грађевинарству, машинству и техничком цртању, где се помоћу пресека приказују скривени делови објеката, анализирају конструкције и израђују прецизни технички прикази.

Подсети се!

- На цртежу 1 приказана је права троугаона призма.
- Какав је међусобни положај равни у којима леже основе?
- Које су ивице основе, а које бочне ивице призме?
- Шта представљају бочне стране призме?



Цртеж 1

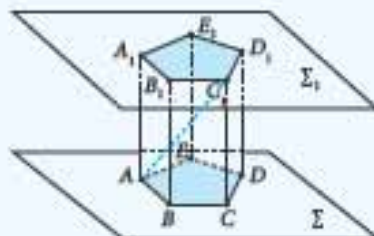
Запамти!

- 3Д-форме ограничене површинама које су састављене само од многоуглова називају се *рогљасте 3Д-форме* или *полиедри*.
- Многоуглови који образују површину полиедра називају се *стране*, њихове странице називају се *ивице*, а њихова темена називају се *темена* полиедра.

У сваком темену полиедра сусрећу се најмање три његове ивице, а свака ивица је страница два и само два његова зида.

Запамти!

- Призма је полиедар ограничен са два подударна многоугла који леже у две паралелне равни, док су остале стране паралелограми који имају по једну заједничку страницу са сваким од два многоугла. (цртеж 2)
- Две стране које леже у паралелним равнима називају се *основе*, а остале се називају *бочне стране*. Све бочне (страничне) стране чине *бочну површину* призме. Странице основа називају се *ивице основа*, а све остале ивице су *бочне ивице* призме.
- Растојање између основа назива се *висина* призме.
- Дуж чије су крајње тачке два темена призме која не леже на истој страни назива се *просторна дијагонала* или само *дијагонала* призме.
- У зависности од броја страница (углова) основе призма може бити троугаона, четвороугаона, петоугаона и сл.



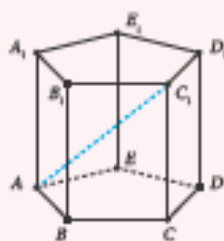
Цртеж 2

Пример 1

За петоугаону призму на цртежу 3 напиши: основе, бочне стране, ивице основа, бочне ивице и просторне дијагонале.

Решење:

- Основе призме су петоуглови $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ који леже у две паралелне равни Σ и Σ_1 .
- Остале стране су бочне стране: ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , CDD_1C_1 , DEE_1D_1 , EAA_1E_1 .
- Ивице основа су: AB , BC , CD , DE , EA , A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , D_1E_1 , E_1A_1 .
- Бочне ивице су: AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , EE_1 .
- Просторне дијагонале призме су: AC_1 , AD_1 , BD_1 , BE_1 , CE_1 , CA_1 , DA_1 , DB_1 , EB_1 , EC_1 .



Цртеж 3

Запамти!

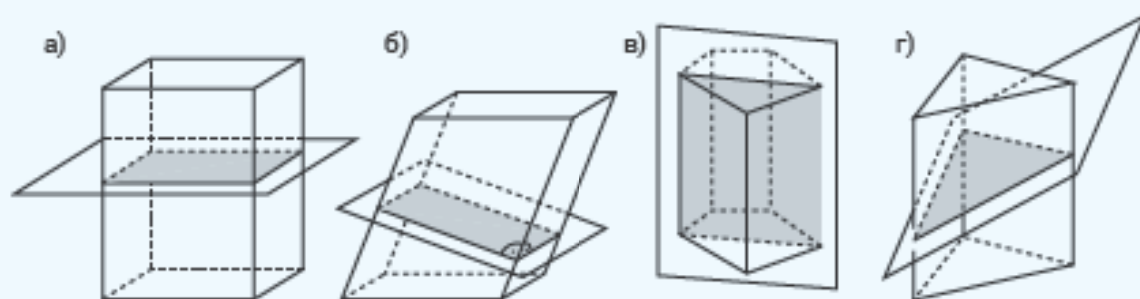
- Ако су бочне ивице призме нормалне њеним основама, онда се та призма назива *права призма*, а у супротном случају назива се *коса призма*.
- Права призма чије су основе правилни многоуглови назива се *правилна призма*.

Задатак 1

- Која врста четвороуглова су бочне стране код праве призме?
- Какве су међусобно бочне стране код правилне призме?
- Ако је једна од бочних страна неке призме правоугаоник, да ли су и остале њене бочне стране такође правоугаоници?

Запамти!

- Ако заједнички део једне 3Д-форме и једне равни садржи и унутрашње тачке тела, онда се тај део назива *пресек 3Д-форме са равни*.
- У зависности од положаја равни Σ у односу на призму, разликујемо следеће врсте пресека:
 - *паралелни пресек*, ако је Σ паралелна са основама призме (цртеж 4, а)
 - *нормални пресек*, ако је Σ нормална са бочним ивицама призме (цртеж 4, б)
 - *дијагонални пресек*, ако Σ пролази кроз две несуседне бочне ивице призме (цртеж 4, в)
 - *коси пресек*, ако Σ сече све бочне ивице призме и није паралелна са основама (цртеж 4, г)



Цртеж 4

Задатак 2

- Какав многоугао је паралелни пресек шестоугаоне призме? Шта се може рећи о односу тог пресека према основама?
- Какав многоугао је дијагонални пресек шестоугаоне праве призме? А какав многоугао је тај пресек код произвољне n -угаоне праве призме?
- Какав многоугао је дијагонални пресек произвољне косе призме?
- Какав многоугао је нормални пресек шестоугаоне праве призме?

Пример 2

Одреди дужину дијагонале квадра димензија $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 6$ cm. Решење проверити у рачунарском софтверу GeoGebra.

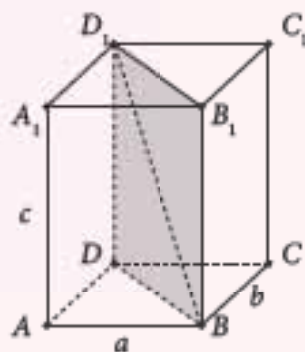
Решење:

Све четири дијагонале квадра једнаке су међусобно, секу се у једној тачки и та тачка их преполовљује.

На цртежу 5 приказана је дијагонала BD_1 . Она је дијагонала дијагоналног пресека BB_1D_1D , па према Питагориној теореме из правоуглог троугла $\triangle BDD_1$, имамо $\overline{BD_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DD_1}^2$.

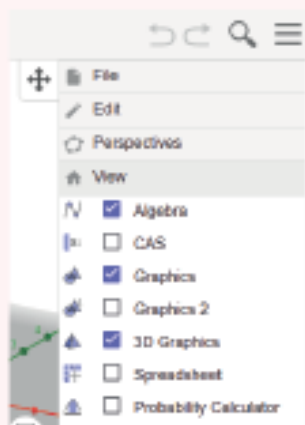
Затим, из правоуглог троугла $\triangle ABD$ имамо $\overline{BD}^2 = a^2 + b^2$ а из тога што $\overline{DD_1}^2 = c^2$ заменом у $\overline{BD_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DD_1}^2$ добијамо $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Дакле, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$ cm.

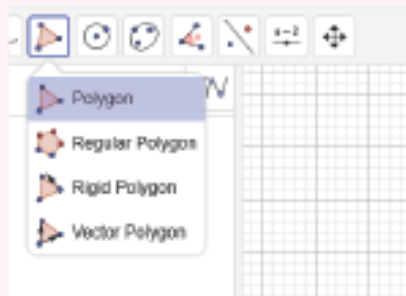


Цртеж 5

Најпре из главног менија (три црте у горњем десном углу) изаберемо „View“, а затим активирамо „3D Graphics“ (слика 1, а). Потом изаберемо 2Д-поље, како би биле активне функције за 2Д, и изаберемо „Polygon“ (слика 1, б).



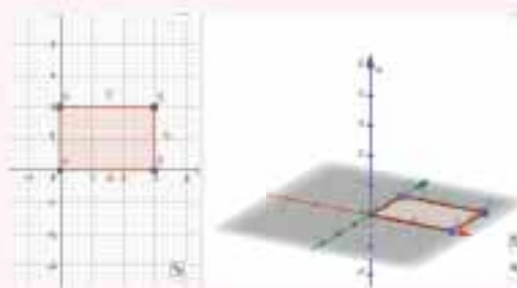
а)



б)

Слика 1

Бирамо четири тачке како бисмо добили правоугаоник са страницама 3 cm и 2 cm (слика 2).



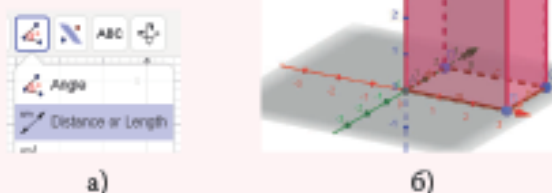
Слика 2

Затим изаберемо 3Д-прозор како би биле активне функције за 3Д и изаберемо „Extrude to Prism“ (слика 3, а). У 3Д-прозору кликнемо на правоугаоник (основу), при чему се отвара прозор у који уносимо висину призме (слика 3, б).



Слика 3

На крају, да бисмо измерили дужину дијагонале, изаберемо „Distance or Length“ (слика 4, а), затим означимо прво теме A , а потом теме K , и добијамо да је дужина дијагонале призме $AK = 7$ cm. (слика 4, б).



Слика 4

Запамти!

Дужина дијагонале квадра са страницама a , b и c израчунава се по формули $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Задатак 3

Одреди дужину дијагонале коцке чија је ивица основе 7 cm. Резултат проверити у програму GeoGebra.

Пример 3

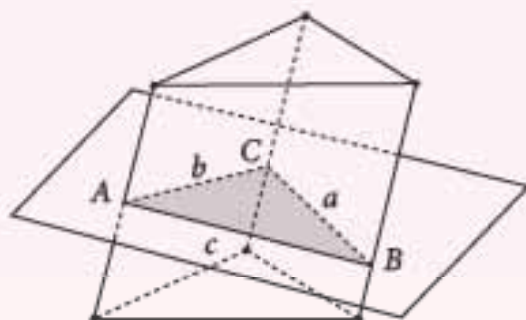
Израчунај површину једног нормалног пресека косе троугаоне призме ако су растојања између бочних ивица призме 13 cm, 14 cm и 15 cm.

Решење:

Код косе троугаоне призме, нормални пресек је троугао $\triangle ABC$ чије су странице једнаке растојањима између бочних ивица (цртеж 6). Будући да је троугао разностраничан, његову површину ћемо израчунати применом Херонове формуле.

Најпре израчунавамо $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$, коју даље замењујемо у формули за површину и добијамо да је

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2.$$



Цртеж 6

Задатак 4

Дијагонала правилне четвороугаоне призме је 25 cm, а дијагонала бочног зида је 20 cm. Одреди висину призме.

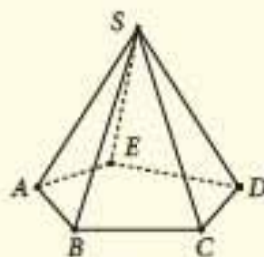
Задачи за вежбање!

- Колико темена, страна, ивица основа и бочних ивица имају:
а) троугаона призма; б) четвороугаона призма; в) n -угаона призма.
- Одредити дужину дијагонале правоуглог паралелепипеда димензија 4 cm, 6 cm и 12 cm. Резултат проверити у програму GeoGebra.
- Правилна четвороугаона призма има висину 12 cm, а дијагонала бочне стране је 20 cm. Одредити дужину ивице основе.
- Дијагонала правилне четвороугаоне призме је $\sqrt{194}$ cm, а дијагонала бочног зида је 13 cm. Одредити висину призме.
- Основа косе призме је ромб чије су дијагонале 24 cm и 10 cm. Одредити обим и површину једног паралелног пресека призме.

5.10 ПИРАМИДА. ПРЕСЕЦИ ПИРАМИДЕ СА РАВНИ

Подсети се!

Каква је 2Д-форма основа, а какве су 2Д-форме бочне стране петоаgone пирамиде приказане на цртежу 1?

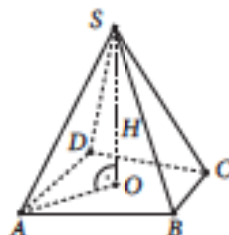


Цртеж 1

Запамти!

- Пирамида је полиедар ограничен једним конвексним многоуглом, док су остале стране троуглови који имају једно заједничко теме.
- Многоугао се назива *основа*, троуглови се називају *бочне стране*, а њихово заједничко теме је *врх* пирамиде.
- Ако се из врха пирамиде повуче нормала на раван њене основе, онда се дужина дужи између врха пирамиде и подножја нормале назива висина пирамиде и означава се са H .

На цртежу 2 дата је пирамида $SABCD$ са основом $ABCD$ и врхом S . Висина пирамиде је $H = \overline{SO}$.



Цртеж 2

Запамти!

- Према врсти основе, пирамида може бити: троугаона, четвороугаона, петоагона, ...
- Троугаона пирамида се назива и *тетраедар*, а за њену основу може се узети било која њена страна. Тетраедар чије су све стране једнакоstrанични троуглови назива се *правилан тетраедар*.

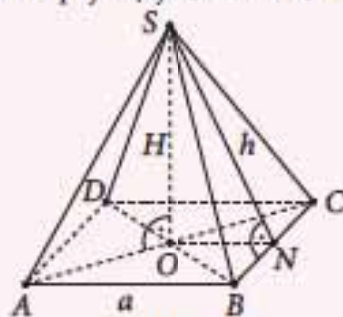
Запамти!

Пирамида чија је основа правилан многоугао, а бочне ивице су међусобно једнаке назива се **правилна пирамида**.

Пример 1

На цртежу 3 представљена је правилна четвороугаона пирамида $SABCD$.

- Какви су троуглови бочне стране и какви су они међусобно?
- Шта представља ортогонална пројекција O темена S на основу правилне пирамиде?



Цртеж 3

Решење:

- Бочне стране су једнакокраки троуглови који су међусобно једнаки.
- Ортогонална пројекција врха налази се у пресеку дијагонала основе, односно представља центар описане и уписане кружнице квадрата $ABCD$.

Запамти!

Висина бочне стране правилне пирамиде спуштена из врха назива се **апотема пирамиде**.

Из правоуглог троугла $\triangle SON$, приказаног на цртежу 3, може се одредити веза између висине H , апотеме h и ивице основе a . Наиме, катете троугла $\triangle SON$ имају дужине $\overline{ON} = \frac{a}{2}$ и $\overline{SO} = H$, а хипотенуза је $\overline{SN} = h$. Применом Питагорине теореме добијамо да је $h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$.

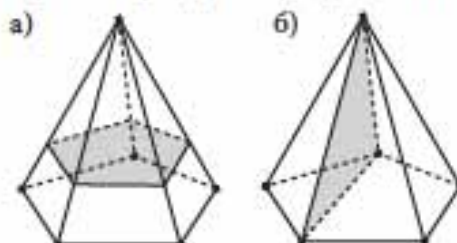
Запамти!

Веза између висине H , апотеме h и ивице основе a правилне четвороугаоне пирамиде је

$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2.$$

У зависности од положаја равни Σ у односу на пирамиду, разликујемо следеће врсте пресека:

- **паралелни пресек**, ако је Σ паралелна са основом пирамиде (цртеж 4, а)
- **дијагонални пресек**, ако Σ пролази кроз две несуседне бочне ивице пирамиде (цртеж 4, б).



Цртеж 4

За паралелне пресеке пирамиде са равни важи следећа теорема.

- 1) Сваки паралелни пресек дели бочне ивице и висину пирамиде на пропорционалне дужи.
- 2) Сваки паралелни пресек и основа пирамиде су слични многоуглови.
- 3) Површина датог паралелног пресека и површина основе односе се као квадрати њихових растојања од врха пирамиде.

Пример 2

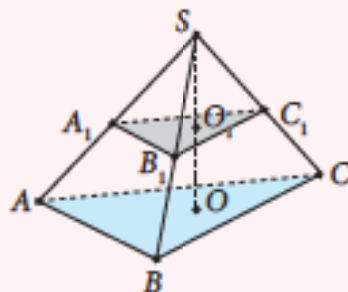
Висина троугаоне пирамиде је 20 cm, а површина њене основе је 600 cm². Колика је површина паралелног пресека који се налази на растојању од 4 cm од основе.

Решење:

Висину пирамиде означимо са $H = \overline{SO}$, растојање паралелног пресека до врха пирамиде означимо са $H_1 = \overline{SO_1}$, Површину основе означимо са Q , а површину паралелног пресека са Q_1 (види цртеж 5). Према условима задатка, $H = 20$ cm, $Q = 600$ cm², а растојање између основе и паралелног пресека пирамиде је $H - H_1 = 4$ cm. Одатле за H_1 добијамо $H_1 = H - 4 = 20 - 4 = 16$ cm. Према делу 3) претходне теореме, имамо

$$Q_1 : Q = H_1^2 : H^2.$$

Заменом вредности за Q , H и H_1 у последњој једнакости добијамо да је $Q_1 : 600 = 16^2 : 20^2$ одакле следи $400 \cdot Q_1 = 256 \cdot 600$, односно $Q_1 = \frac{256 \cdot 600}{400} = 384$ cm².



Цртеж 5

Пример 3

Израчунај површину дијагоналног пресека и апотему правилне четвороугаоне пирамиде са ивицом основе 18 cm и бочном ивицом 15 cm.

Решење:

Да означимо следеће елементе: Q – површину дијагоналног пресека, a – ивицу основе, а s – бочну ивицу. Према условима задатка, $a = 18$ cm, $s = 15$ cm.

Из правоуглог троугла $\triangle SNC$, према Питагориној теореме, за апотему добијамо:

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

На сличан начин, из правоуглог троугла $\triangle SON$ имамо:

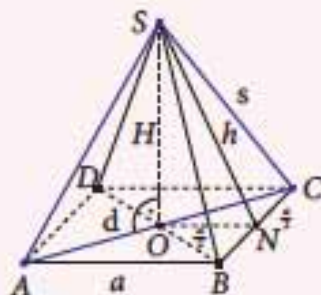
$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{144 - 81} = \sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = 3\sqrt{7} \text{ cm.}$$

Дијагонални пресек је троугао $\triangle SAC$ чију ћемо површину израчунати као $Q = \frac{d \cdot H}{2}$, где је d дужина дијагонале основе. d ћемо одредити из правоуглог троугла $\triangle ABC$. Наиме,

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2 \cdot a^2} = \sqrt{2 \cdot 18^2} = \sqrt{2 \cdot 324} = 18\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Заменом последње добијене вредности у формулу за површину дијагоналног пресека добијамо да је

$$Q = \frac{18\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{7}}{2} = \frac{54\sqrt{14}}{2} = 27\sqrt{14} \text{ cm}^2.$$



Задатак 1

Висина троугаоне пирамиде је 15 cm, а површина њене основе је 450 cm². Колика је површина паралелног пресека који се налази на растојању од 5 cm од основе.

Задаци за вежбање!

1. Дата је правилна четвороугаона пирамида са ивицом основе 20 cm и површином дијагоналног пресека 200 cm². Одредити висину пирамиде.
2. Површина основе пирамиде висине 24 cm износи 800 cm². На ком растојању од основе се налази паралелни пресек чија је површина 200 cm².
3. Израчунати апотему правилне четвороугаоне пирамиде чија је висина 12 cm, а ивица основе 10 cm.
4. Израчунати ивицу основе правилне четвороугаоне пирамиде чија је висина 15 cm, а апотема 17 cm.

5.11 ЦИЛИНДАР. ПРЕСЕК ЦИЛИНДРА СА РАВНИ

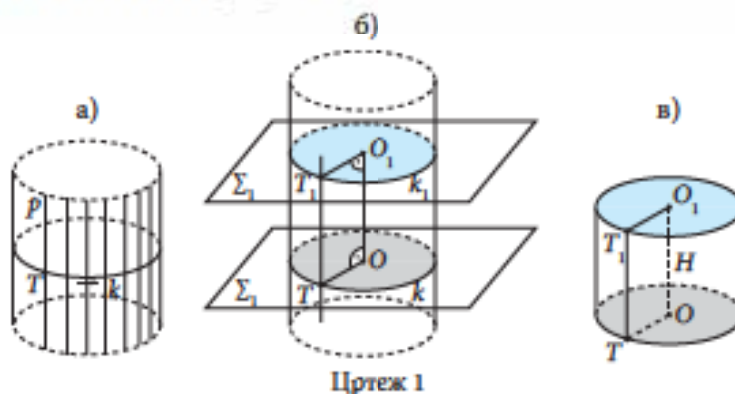
Подсети се!

- Наведи неколико предмета који имају облик ваљка.
- Који 2Д-облик може да се добије при пресеку цилиндра са равни?

Нека су дати кружница k и произвољна тачка T на кружници. Нека је кроз тачку T повучена права p нормална на раван у којој лежи кружница и замислимо да се та права креће по кружници, остајући нормална на раван у којој лежи кружница, као на цртежу 1, а).

На тај начин покретна права p описује једну закривљену површ која се назива **ваљкаста површ**. Покретна права p назива се **генератриса** (изводница), а кружница по којој се права креће назива се **директриса** ваљкасте површи.

Ако ваљкасту површ пресечемо са две равни Σ и Σ_1 које су паралелне са равни у којој лежи кружница (цртеж 1, б), добијају се кругови са центрима у O и O_1 . Ови кругови, заједно са делом простора ограниченим цилиндричном површином између две равни, образују 3Д-форму која се назива **прави кружни цилиндар** или само цилиндар (цртеж 1, в).



Цртеж 1

Елементи цилиндра су:

Основе – два круга.

Бочна или латерална површ – део ваљкасте површи који се налази између основа.

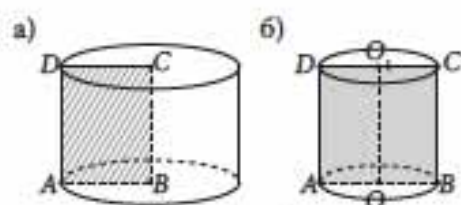
Оса – права која пролази кроз центре обеју основа O и O_1 .

Висина – растојање између основа које се означава са H .

Полуарчењници основа – дужи OT и O_1T_1 , које имају једнаке дужине.

Генератриса или изводница – дуж TT_1 која описује бочну површ ваљкаваљка.

Цилиндар се може добити и ротацијом правоугаоника око једне од његових страница или око једне његове осе симетрије, па је зато цилиндар **ротациона 3Д-форма**. На цртежу 2, а), цилиндар је добијен ротацијом правоугаоника $ABCD$ око странице BC , а цилиндар на цртежу 2, б) добијен је ротацијом правоугаоника $ABCD$ око његове осе OO_1 .



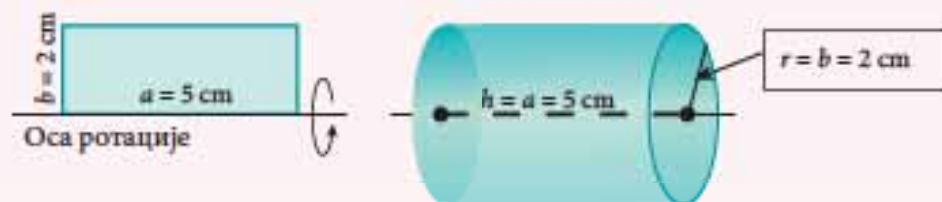
Цртеж 2

Пример 1

Правоугаоник са страницама $a = 5 \text{ cm}$ и $b = 2 \text{ cm}$ ротира око странице a . Која 3Д-форма се добија овом ротацијом?

Решење:

Ротацијом правоугаоника око једне његове странице добија се цилиндар (Цртеж 3). Правоугаоник ротира око странице a , па се на цртежу 3 може уочити да основе цилиндра имају полупречник $r = b = 2 \text{ cm}$, а висина цилиндра је $h = a = 5 \text{ cm}$.



Цртеж 3

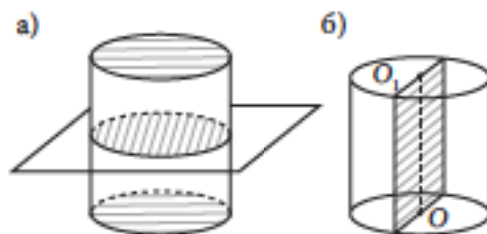
Задатак 1

Колики су полупречник основе и висина цилиндра који се добија ако правоугаоник са страницама $a = 3$ и $b = 5$ ротира око:

- странице a ;
- странице b ;
- осе која је нормална на страницу a и њена је симетрала.

Пресек цилиндра са равнином може бити:

- паралелни пресек** – ако је раван паралелна са основама (цртеж 4, а),
- осни пресек** – ако раван пролази кроз осу цилиндра (цртеж 4, б).



Цртеж 4

Запамти !

- Сваки паралелни пресек цилиндра са равни представља круг чији је полупречник једнак полупречнику основе ваљка.
- Сваки осни пресек цилиндра са равни представља правоугаоник чије су странице једнаке пречнику основе и висини ваљка.

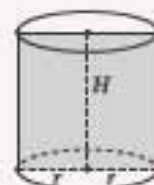
Пример 2

Дат је цилиндар висине 6 cm и полупречника основе 5 cm. Одреди површину осног пресека ваљка.

Решење:

Осни пресек цилиндра је правоугаоник чије су странице једнаке пречнику основе $d = 2 \cdot r = 2 \cdot 5 = 10$ cm и висини $H = 6$ cm. Одатле за површину Q осног пресека добијамо да је:

$$Q = d \cdot H = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2.$$



Цртеж 5

Задатак 2

Одреди полупречник и висину цилиндра ако је његов осни пресек квадрат површине 64 cm^2 .

Запамти!

Равнотежни цилиндар је цилиндар чији је осни пресек квадрат, односно пречник основе једнак је висини ваљка.

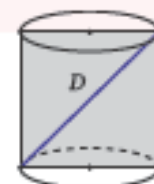
Пример 3

Површина осног пресека једног равнотежног цилиндра је 16 cm^2 . Одреди висину и полупречник ваљка.

Решење:

Из услова да је цилиндар једнакостраничан следи да је осни пресек квадрат, тј. $2r = H$. Одатле се површина осног пресека може изразити као $P = H^2$. Ако заменимо $P = 16 \text{ cm}^2$, добијамо $H^2 = 16$.

Значи, $H = 4$ cm. С друге стране, из једнакости $2r = H$ можемо изразити полупречник као $r = \frac{H}{2}$, и отуда имамо да је $r = \frac{H}{2} = \frac{4}{2} = 2$ cm.



Цртеж 6

Задатак 3

Одредити дужину дијагонале D осног пресека цилиндра са полупречником 9 cm и висином 24 cm (цртеж 6).

Пример 4

Висина једног цилиндра је 7 cm, а полупречник основе је 13 cm. Цилиндар је пресечен равнином паралелном са осом ваљка, која се налази на растојању од 5 cm од осе. Одреди површину добијеног пресека.

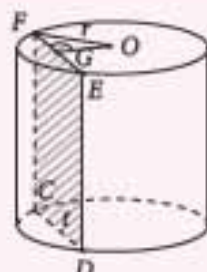
Решење:

На цртежу 7 приказан је пресек са равни који је правоугаоник $CDEF$ чије су странице $DE = H = 7$ cm и $t = \overline{CD}$.

Из правоуглог троугла $\triangle FOG$, применом Питагорине теореме, имамо да је $\overline{FO}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GO}^2$. Заменом $\overline{FO} = r = 13$ cm, $\overline{FG} = \frac{t}{2}$ и $\overline{GO} = 5$ cm, добијамо да је:

$$13^2 = \left(\frac{t}{2}\right)^2 + 5^2.$$

Затим, $\frac{t}{2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm, односно $t = 2 \cdot 12 = 24$ cm. Из формуле за површину правоугаоника добијамо да је површина пресека $Q = t \cdot H = 24 \cdot 7 = 168$ cm².



Цртеж 7

Задатак 4

Израчунај површину основе цилиндра висине 12 cm који је пресечен равни паралелном са осом ваљка, на растојању од 6 cm од осе. Површина тог пресека износи 192 cm².

Задатак 5

Израчунај површину основе цилиндра висине 8 cm који је пресечен са равни паралелном са осом ваљка, на растојању од 4 cm од осе. Површина тог пресека износи 48 cm².

Задаци за вежбање!

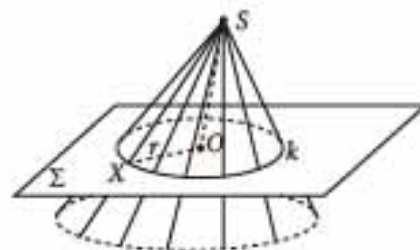
- Одреди полупречник цилиндра висине 12 cm ако површина његовог осног пресека износи 96 cm².
- Површина осног пресека цилиндра износи 196 cm². Одреди висину цилиндра ако је његов полупречник основе 7 cm.
- Одредити дијагоналу осног пресека цилиндра са полупречником 8 cm и висином 15 cm.
- Израчунај површину основе цилиндра висине 6 cm који је пресечен равнином паралелном са осом, на растојању од 6 cm од осе. Површина тог пресека износи 96 cm².
- Однос површине основе једног цилиндра и површине његовог осног пресека је $\pi : 4$. Одреди угао између дијагонала осног пресека.

5.12 КУПА. ПРЕСЕЦИ КУПЕ СА РАВНИ

Подсети се!

Који 2Д-облик може да се добије при пресеку купе равнином?

На сличан начин као што се добија цилиндар, може се добити и 3Д-форма купа.



Цртеж 1

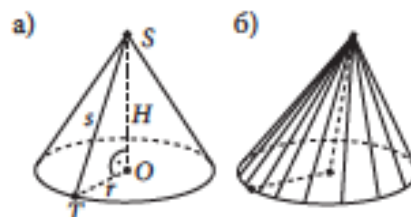
Нека је дата кружница k са полупречником r у равни Σ и тачка S која не припада равни Σ . Нека је на кружници изабрана тачка X и нека је повучена полуправа SX . Замислимо да се тачка X креће по кружници, обилазећи целу кружницу, као на цртежу 1.

На тај начин описује се једна закривљена површ која се назива **купина површ**. Покретна полуправа назива се **генератриса** (изводница), кружница се назива **директриса**, тачка S – **врх**, а права SO назива се **оса** купине површи.

Купа представља део простора ограничен кругом који купина површ одсеца од равни, као и делом купине површи од врха до круга.

Круг се назива **основа**, а део купине површи назива се **бочна површ** купе.

Купа код које је оса SO нормална основи назива се **права купа** (цртеж 2, а), а у случају када није нормална основи назива се **коса купа** (цртеж 2, б).



Цртеж 2

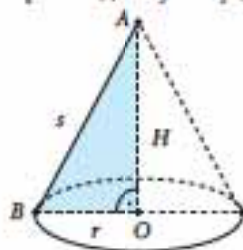
У пракси, ако је речено само купа, подразумева се да је реч о правој купи. Ако је реч о случају у којем је дата коса купа, то мора бити посебно наглашено.

Висина купе је најкраће растојање (нормала) од врха до основе.

Генератриса (изводница) назива се свака дуж чије су крајње тачке врх S и произвољна тачка T на кружници основе, при чему су све генератрисе једног праве купе једнаке међу собом. Код косе купе генератрисе нису једнаке међу собом.

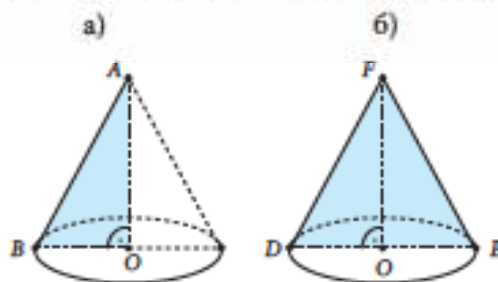
Ако је дата права купа са полупречником основе r , висином H и изводницом s , тада се формира карактеристичан правоугли троугао као на цртежу 3.

Из троугла $\triangle BOA$, према Питагориној теореме, добијамо једнакост $s^2 = r^2 + H^2$.



Цртеж 3

Такође, купа се може добити ротацијом правоуглог троугла око једне његове катете или ротацијом једнакокраког троугла око његове осе симетрије. Зато је и купа, исто као и цилиндар, ротационо тело. Тако је купа на цртежу 4, а) добијена ротацијом троугла $\triangle BOA$ око катете OA , а купа на цртежу 4, б) добијена је ротацијом једнакокраког троугла $\triangle DEF$ око дужи OF , која је његова оса симетрије.



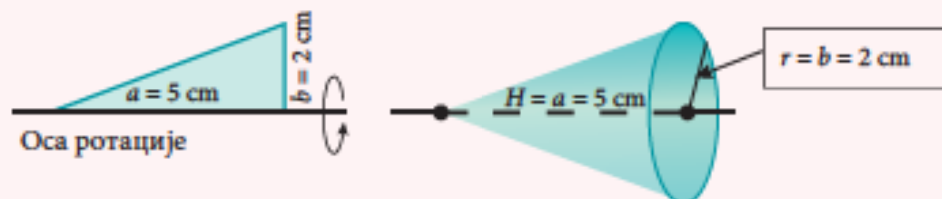
Цртеж 4

Пример 1

Правоугли троугао са катетама $a = 5$ cm и $b = 2$ cm ротира око стране a . Која 3Д-форма се добија овом ротацијом?

Решење:

Ротацијом правоуглог троугла око једне његове катете добија се купа (Цртеж 5). Правоугли троугао ротира око стране a , па се на цртежу 5 може уочити да основа купе има полупречник $r = b = 2$ cm, а висина на купе је $H = a = 5$ cm.



Цртеж 5

Задатак 1

Коллики су полупречник основе и висина купе која се добија ротацијом правоуглог троугла са катетама $a = 3$ и $b = 4$ око

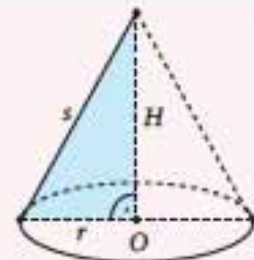
- странице a ;
- странице b .

Пример 2

Одредити висину купе са полупречником основе 16 cm и изводницом 34 cm.

Решење:

Из услова задатка дато је да је $r = 16$ cm и $s = 34$ cm. Из једнакости $s^2 = r^2 + H^2$ добијамо $H^2 = s^2 - r^2 = 34^2 - 16^2 = 1156 - 256 = 900$. Одатле се за висину H добија да је $H = \sqrt{900} = 30$ cm.



Цртеж 6

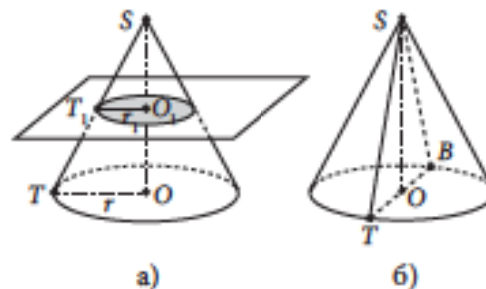
Задатак 2

Одредити дужину изводнице купе са висином 6 cm и полупречником основе 8 cm.

Врсте пресека купе са равни су:

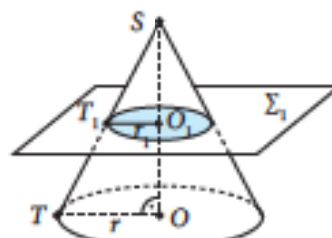
- паралелни пресек** - ако је раван паралелна са основом купе (цртеж 7, а);
- осни пресек** - ако раван пролази кроз осу купе (цртеж 7, б).

Као што се може видети на цртежу 7, паралелни пресеци купе са равни су кругови, док су осни пресеци троуглови.



Цртеж 7

На цртежу 8 приказан је права купа која је пресечена са равни која је паралелна са основом купе.



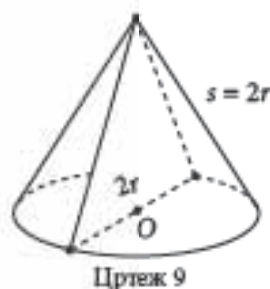
Цртеж 8

Из сличности троуглова $\triangle TOS$ и $\triangle T_1O_1S$ добија се однос $\overline{TO} : \overline{T_1O_1} = \overline{SO} : \overline{SO_1}$. Квадрирањем обе стране добијамо $\overline{TO}^2 : \overline{T_1O_1}^2 = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$. Ако у последњој једнакости заменимо $\overline{TO}^2 = r^2$ и $\overline{T_1O_1}^2 = r_1^2$ и ако помножимо и бројилац и именилац леве стране са π , добијамо да је $r^2\pi : r_1^2\pi = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$. Ако са B означимо површину основе, а са B_1 површину паралелног пресека, тада је $B = r^2\pi$, а $B_1 = r_1^2\pi$. Заменом у последњој једнакости добијамо $B : B_1 = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$.

За паралелне пресеке купе са равни важи следећа теорема.

Површине основе B и паралелног пресека B_1 односе се као квадрати њихових растојања до врха купе. Висина и генератриса једне купе пресеком су подељене у истом односу.

Ако је осни пресек купе једнакостранични троугао, односно ако је $s = 2r$, тада се та купа назива *једнакостранична купа* (цртеж 9).

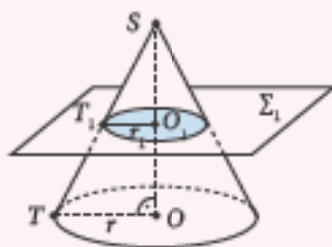


Цртеж 9

Пример 3

Површина основе једне купе висине 16 cm износи 64 cm². Одредити површину паралелног пресека ако се он налази на растојању од 6 cm од врха купе.

Решење:



Цртеж 10

Са цртежа 10, ако означимо са $H = \overline{SO}$ и $H_1 = \overline{SO_1}$, из услова задатка имамо да је $B = 64$ cm², $H = 16$ cm и $H_1 = 6$ cm. Користећи релацију $B : B_1 = H^2 : H_1^2$, добијамо $64 : B_1 = 16^2 : 6^2$. Одатле,

$$B_1 = \frac{64 \cdot 36}{256} = 9 \text{ cm}^2.$$

Задатак 3

Купа има висину 10 cm и полупречник основе $r = 8$ cm. Паралелни пресек купе је круг са полупречником 2 cm. Одредити колико је тај пресек удаљен од врха купе.

Пример 4

Израчунати површину осног пресека купе са висином 24 cm и изводницом 26 cm.

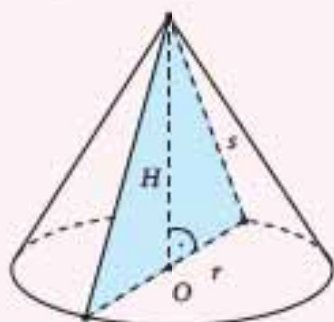
Решење:

У условима задатка дато је да је $s = 26$ cm и $H = 24$ cm. Одатле, према Питагориној теореме (цртеж 11), имамо

$$r^2 = s^2 - H^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100,$$

па добијамо да је $r = \sqrt{100} = 10$ cm. Површина Q осног пресека биће једнака

$$Q = \frac{2r \cdot H}{2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 24}{2} = 240 \text{ cm}^2.$$



Цртеж 11

Задатак 4

Једна права купа са полупречником основе 5 cm има осни пресек у облику правоуглог троугла, при чему се прав угао налази код врха купе. Израчунај површину осног пресека.

Задаци за вежбање!

1. Периметар осног пресека једнакостраничне купе износи 30 cm. Израчунај површину тог осног пресека.
2. Површина основе једне купе износи 50 cm^2 , а паралелни пресек који се налази на растојању од 10 cm од врха има површину 18 cm^2 . Одреди његову висину.
3. Одреди полупречник купе са висином 15 cm, чији периметар осног пресека износи 60 cm^2 .
4. Дато је купа са висином 18 cm и полупречником основе 6 cm, чија површина једног паралелног пресека износи $16\pi \text{ cm}^2$. Одреди растојање пресека од основе.
5. Израчунај површину паралелног пресека купе са полупречником основе 9 cm ако тај пресек дели висину од врха до основе у односу 3:2.

ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ И УТВРЂИВАЊЕ

- Претвори из степени у радијане следеће углове:
а) 300° ; б) 150° .
- Претвори из радијана у степене следеће углове:
а) $\frac{7\pi}{6}$ rad; б) $1,7$ rad.
- Одреди вредности осталих тригонометријских функција ако је дато:
а) $\cos \alpha = \frac{24}{25}$; б) $\sin \alpha = \frac{7}{24}$; в) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$.
- Одреди вредност израза $\frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha}$ ако је дато да $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$.
- Одреди вредности тригонометријских функција оштрог угла правоуглог троугла ако је познато да је $a : c = 9 : 41$.
- Одреди вредност α ако је дато да
а) $\sin(\alpha + 50^\circ) = \cos(\alpha + 10^\circ)$; б) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \operatorname{ctg}(3\alpha - \frac{\pi}{3})$.
- Упрости израз: $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{4 - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2 \cos \alpha - \sin \alpha - 1}{1 - \cos \alpha} + \frac{3 \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.
- На једном спортском терену одржава се дечји фестивал. Изнад терена се уздиже велики шарени балон за фотографисање. Са места на којем стоји један човек балон се види под углом од $47^\circ 15'$, а растојање од човека до тачке на земљи непосредно испод балона износи 3 km. Израчунај на којој се висини балон налази изнад земље.
- Авион започиње спуштање према аеродрому под углом од 6° у односу на хоризонталу. Колика је његова висина ако хоризонтално растојање до писте износи 950 m.
- За приступну рампу дозвољен је максимални угао од 6° у односу на хоризонталу. Колика треба да буде дужина рампе да би се савладала висинска разлика од 0,6 m.
- Кабал је затегнут између земље и врха вертикалног стуба висине 12 m. Ако кабал са хоризонталном подлогом захвата угао од 30° , колика је његова дужина?
- Дато је пет различитих тачака, од којих су тачно три колинеарне, а преостале две не леже на тој правој. Колико различитих правих је одређено?
- Покажи да са пет тачака у простору број одређених равни може бити 1, 5, 7 или 10.
- На ком растојању од врха дате пирамиде је направљен паралелни пресек ако је висина пирамиде 20 dm, површина основе 32 dm^2 , а површина пресека 8 dm^2 ?
- Дијагонала основе правилне четвороугаоне призме има дужину $4\sqrt{2}$, а дијагонала бочног зида има дужину 5 cm. Израчунај дужину дијагонале призме.
- Израчунај површину дијагоналног пресека и апотему правилне четвороугаоне пирамиде са основном ивицом 16 cm и бочном ивицом 10 cm.

17. Одредити висину правилне четвороугаоне призме са дијагоналом 15 cm и дијагоналом бочне стране од 12 cm
18. Једна четвороугаона пирамида има основну ивицу $10\sqrt{2}$ cm и бочну ивицу 13 cm. Одредити апотему и површину дијагоналног пресека пирамиде.
19. Пирамида висине 15 cm има површину основе 450 cm^2 . Израчунати површину паралелног пресека који се налази на растојању од 5 cm од основе.
20. Цилиндар висине 15 cm и полупречника основе 10 cm пресечен је равни која је паралелна са његовом осом и налази се на растојању од 6 cm од осе. Одредити површину добијеног пресека.
21. Одредити површину паралелног пресека купе ако се он налази на растојању од 3 cm од основе купе. Површина основе купе износи 144 cm^2 , а његова висина је 12 cm.
22. Купа има висину 15 cm и полупречник основе 12 cm. Ако један паралелни пресек купе има полупречник 4 cm, одредити на ком се растојању тај пресек налази од основе купе.
23. Израчунати висину купе чија је површина основе 75 cm^2 , ако његов паралелни пресек који се налази на растојању 8 cm од врха има површину 48 cm^2 .
24. Одредити површину осног пресека и полупречник купе висине 12 cm чији осни пресек има обим 36 cm.
25. Израчунати површину осног пресека праве кружне купе са полупречником 8 cm, ако осни пресек представља правоугли троугао чији се прав угао налази код врха купе.
26. Један паралелни пресек купе са полупречником 12 cm дели висину од врха до основе у односу 1: 3. Одредити површину тог паралелног пресека.

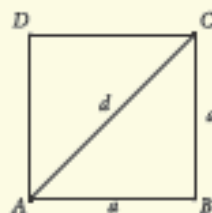
МЕРЕЊЕ

У овој теми изучавају се периметар и површина равних (2Д) облика, као и површина и запремина просторних (3Д) облика. Ови појмови представљају основне мере којима се описује величина објекта – колико простора заузимају, колико је материјала потребно за њихову израду или колика површина треба да се покрије. Примена ових знања је свакодневна: при израчунавању количине боје за зидове, дужине оgrade за двориште, површине земљишта, капацитета посуда или резервоара. Кроз решавање практичних и СТЕМ-задака, ученици ће развијати вештине моделирања реалних ситуација помоћу математичких формула, логичког размишљања и повезивања математике са инжењерством, архитектуром, технологијом и науком.

6.1 ПЕРИМЕТАР И ПОВРШИНА КВАДРАТА И ПРАВОУГАОНИКА

Подсети се!

Периметар квадрата са страницом a се израчунава формулом $L = 4a$, док се површина израчунава формулом $P = a^2$.



Цртеж 1

Пример 1

Израчунај дужину дијагонале квадрата ако његова површина износи 25 cm^2 .

Решење треба проверити помоћу GeoGebre.

Решење:

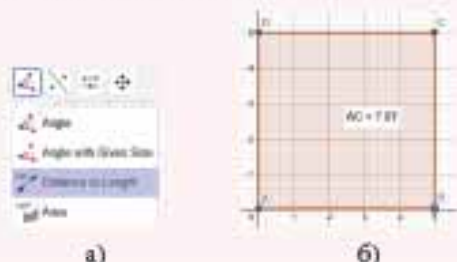
Из формуле за површину квадрата $P = a^2$, добијамо $a^2 = 25$, па је страница квадрата дужине $a = 5 \text{ cm}$. Према Питагориној теорему, из троугла $\triangle ABC$ (цртеж 1) за дужину дијагонале добијамо $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, тј. дужина дијагонале је $d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$.

Поступак за проверу решења у GeoGеbri дат је у наставку. Најпре, да бисмо нацртали квадрат са страницом дужине 5 cm, из алатки (Toolbar) изабраћемо опцију за правилан многоугао (Regular polygon) (слика 1 а) и нацртаћемо дуж дужине 5 cm, при чему ће се отворити прозор за унос броја темена траженог многоугла. Ту ћемо унети 4 (слика 1 б).



Слика 1

Затим, да бисмо израчунали дијагоналу квадрата, из алатки (Toolbar) изабраћемо опцију за растојање (Distance or Length) (слика 2 а) и означићемо темена дијагонале AC, чиме добијамо да дужина дијагонале износи $\overline{AC} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ cm. (слика 2 б).



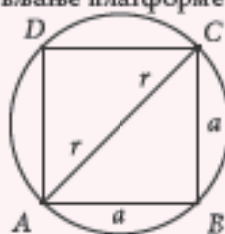
Слика 2

Пример 2

Једно језерце има облик круга полупречника 6 m. На језерцу треба поставити платформу у облику квадрата уписаног у круг (цртеж 2). Израчунај колико m^2 материјала ће бити потребно за постављање платформе?

Решење:

Према цртежу 2, дужина дијагонале квадрата је $d = 2r = 2 \cdot 6 = 12$ m. Из једнакости $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, добија се да је дужина странице квадрата $a = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{12^2}{2}} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ m. Одатле, површина квадрата је $P = a^2 = 72$ m^2 . Значи, за постављање платформе потребно је 72 m^2 материјала.



Цртеж 2

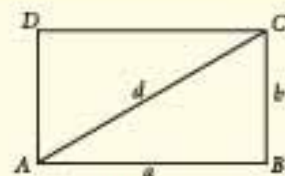
Задатак 1

Општина планира да огради квадратну зелену површину намењену школском еко-парку. За ограду има 400 m металне жице, којом треба да се огради цела површина два пута, без преклапања и отпада. Одреди:

- дужину странице квадратне површине;
- површину ограђене површине.

Подсети се!

Периметар правоугаоника са страницама a и b израчунава се формулом $L = 2a + 2b$, док се површина израчунава формулом $P = ab$.



Цртеж 3

Пример 3

Израчунај површину правоугаоника са страницом 12 cm и дијагоном 20 cm.

Решење:

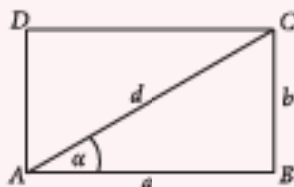
Из правоуглог троугла $\triangle ABC$ (цртеж 3), према Питагориној теореме имамо $d^2 = a^2 + b^2$, одакле за дужину странице b добијам $b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm. Заменом у формулу за површину правоугаоника добијамо да је $P = 12 \cdot 16 = 192$ cm².

Пример 4

Инжењер пројектује правоугаону металну плочу за електронски уређај. Једна страна плоче има дужину 20 cm. При провери димензија ласерским мерачем утврђено је да угао између те стране и дијагонале плоче износи 30°. Израчунај површину металне плоче.

Решење:

Метална плоча има облик правоугаоника. Према цртежу 4, $\triangle ABC$ је правоугли, па отуда добијамо $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{b}{a}$, односно $b = a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 11,55$ cm. Површина правоугаоника је $P = 20 \cdot 11,55 \approx 231$ cm².



Цртеж 4

Задатак 2

При пројектовању правоугаоног сензорског панела, инжењери моделирају панел помоћу његових дијагонала јер се оне користе при аутоматској калибрацији. Измерено је да дужина дијагонала износи 12 cm, а угао између дијагонала је 60° . Колика је површина сензорског панела?

Пример 5

При изради правоугаоне алуминијумске плоче за заштитно кућиште електронског уређаја, инжењер мора да поштује конструкцијске пропорције због чврстоће и естетике. Димензије плоче су пројектоване тако да је однос дужина страница 3 : 5, а укупна површина плоче износи 135 cm^2 . Колика су дугачке странице плоче?

Решење:

Нека су a и b дужине страница плоче. Из услова имамо да је $a : b = 3 : 5$, одакле добијамо $a = 3k$, $b = 5k$.

Заменом a и b у формулу за површину имамо

$$3k \cdot 5k = 135$$

$$15k^2 = 135$$

$$k^2 = 9$$

$$k = \sqrt{9} = 3 \text{ cm.}$$

Заменом добијене вредности за k у a и b добијамо $a = 3k = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}$ и $b = 5k = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}$.

Задатак 3

Одреди странице правоугаоне рамке ако је једна страница четири пута дужа од друге, а површина рамке је 64 cm^2 .

Пример 6

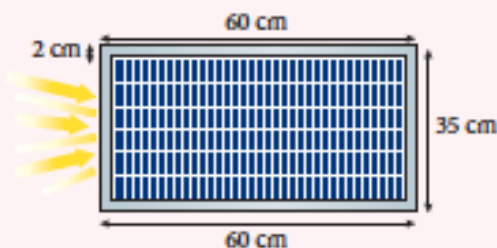
На цртежу 5 приказан је соларни панел.

- Израчунај активну површину панела.
- Израчунај површину заштитног оквира.

Решење:

- Активна површина панела представља правоугаоник са страницама $a_1 = 60 - 2 \cdot 2 = 56 \text{ cm}$ и $b_1 = 35 - 2 \cdot 2 = 31 \text{ cm}$, па је његова површина $P = a_1 \cdot b_1 = 56 \cdot 31 = 1736 \text{ cm}^2$.

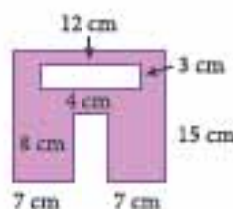
- Површину заштитног оквира P_z израчунаћемо као разлику укупне површине целог панела $P_{\text{ук}}$ и површине активног дела P .
Укупна површина израчунаће се помоћу формуле за површину правоугаоника са страницама $a = 60 \text{ cm}$ и $b = 35 \text{ cm}$, $P_{\text{ук}} = a \cdot b = 60 \cdot 35 = 2100 \text{ cm}^2$.
За површину заштитног оквира добијамо $P_z = P_{\text{ук}} - P = 2100 - 1736 = 364 \text{ cm}^2$.



Цртеж 5

Задатак 4

Одреди површину обојеног региона датог на цртежу 6.



Цртеж 6

Задаци за вежбање!

1. Израчунај површину квадрата чија је дијагонала $7\sqrt{2}$ cm.
2. Израчунај површину правоугаоника са страницом 7 cm и дијагоналом 25 cm.
3. Израчунај површину правоугаоника са дијагоналом 10 cm и углом између дијагонале и странице од 45° .
4. Израчунај површину правоугаоника код којег дијагонале заклапају угао од 106° , а дужина дијагонале је 10 cm.
5. Једна електронска плоча има правоугаони облик са димензијама 18 cm и 12 cm. (Цртеж 7)
 - а) Одреди површину плоче.
 - б) Око плоче се поставља изолациони слој. Колико ће коштати изолација ако 1 cm изолационог слоја кошта 0,4 евра?

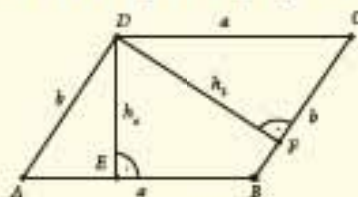


Цртеж 7

6.2 ПЕРИМЕТАР И ПОВРШИНА ПАРАЛЕЛОГРАМА

Подсети се!

- Како се називају одсечци $\overline{DE}$ и $\overline{DF}$ на паралелограму $ABCD$ на цртежу 1?



Цртеж 1

- Површина паралелограма једнака је производу дужине једне његове стране и одговарајуће висине спуштене на ту страну. Ако паралелограм има стране дужина a и b , а одговарајуће висине имају дужине h_a и h_b , онда се његова површина израчунава формулама:

$$P = a \cdot h_a \text{ или } P = b \cdot h_b.$$

Пример 1

Пресметај површину паралелограма са страницама 12 cm и 5 cm ако је угао између њих 40° .

Решење:

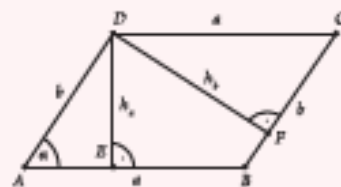
Из правоуглог троугла $\triangle AED$ (цртеж 2) следи да $\sin \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{h_a}{b}$ и

$h_a = b \cdot \sin \alpha$. Заменом h_a у формулу за површину паралелограма

добивамо

$$P = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin \alpha.$$

Одатле је тражена површина $P = a \cdot b \cdot \sin \alpha = 12 \cdot 5 \cdot \sin 40^\circ \approx 38,57 \text{ cm}^2$.



Цртеж 2

Задатак 1

Израчунај висину h_a паралелограма са страницама 6 cm и 12 cm ако је друга висина 5 cm.

Пример 2

При пројектовању косог крова на индустријском објекту, једна од кровних површина има облик паралелограма због угла нагиба и померања носећих греда. Дужина доње носеће греде износи 6 m, а растојање између горње и доње греде, које су паралелне, износи 2,4 m. За стабилност, по површини крова постављају се заштитни панели, при чему се на сваки квадратни метар додаје материјал масе 12 kg/m^2 . Одреди:

- а) површину кровне површине;
- б) укупну масу постављеног материјала.

Решење:

- а) Кровна површина је паралелограм са страницом $a = 6 \text{ m}$ и висином $h_a = 2,4 \text{ m}$. Заменом ових вредности у формулу за површину добијамо:

$$P = a \cdot h_a = 6 \cdot 2,4 = 14,4 \text{ m}^2.$$

Кровна површина има површину од $14,4 \text{ m}^2$.

- б) На сваки квадратни метар поставља се материјал масе 12 kg/m^2 , па је укупна маса:

$$m = P \cdot 12 = 14,4 \cdot 12 = 172,8 \text{ kg}.$$

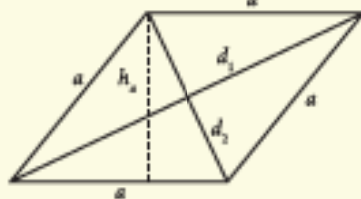
Задатак 2

При геодетском мерењу косог дела пољопривредне парцеле утврђено је да површина има облик паралелограма. Дужине две суседне странице парцеле су 120 m и 200 m , а угао између њих износи 30° . За наводњавање парцеле, за сваки хектар ($1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$) потребно је $2,5 \text{ t}$ воде. Одреди:

- а) површину парцеле;
- б) укупну количину воде потребну за наводњавање целе парцеле.

Подсети се!

- Под којим углом се секу дијагонале ромба?
- Ромб је, заправо, паралелограм код којег све странице имају исту дужину, па је површина ромба једнака производу дужине једне његове странице и одговарајуће висине, тј. $P = a \cdot h_a$ (цртеж 3).
- Плоштината на ромб може да се пресмета и со следните формули: $P = a^2 \cdot \sin \alpha$ или $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где је α било који унутрашњи угао ромба, а d_1 и d_2 су дужине дијагонала ромба (цртеж 3).



Цртеж 3

Пример 3

Робот-контролор треба да покрије под ромбовидног панела са сензорима. Ромб има страницу дужине 12 cm , а полупречник уписане кружнице је 3 cm .

- а) Израчунај површину ромба.
- б) Уколико сваки квадратни сантиметар панела треба да буде покривен електронским сензором који троши $0,05 \text{ W}$, колика је укупна потрошња енергије за цео ромб?

Решење:

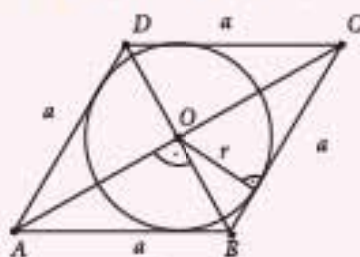
- а) Ромб је дијагоналама подељен на 4 једнака троугла. Са цртежа 4 можемо уочити да полупречник r уписане кружнице представља висину троугла $\triangle BOC$, па имамо

$$P_{\triangle BOC} = \frac{a \cdot r}{2} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

За површину ромба добијамо $P = 4 \cdot P_{\triangle BOC} = 4 \cdot 18 = 72 \text{ cm}^2$.

- б) Ако се за сваки cm^2 троши 0,05 W, укупна потрошња енергије за цео ромб је

$$E = P \cdot 0,05 = 72 \cdot 0,05 = 3,6 \text{ W}.$$



Цртеж 4

Задача 3

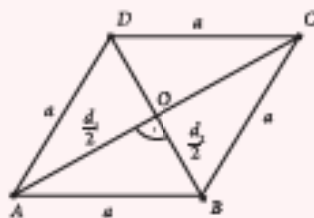
Израчунај висину ромба ако је страница 12 cm, а његова површина износи 102 cm^2 .

Пример 4

Површина ромба, чија је једна дијагонала 16 cm, износи 240 cm^2 . Израчунај дужину друге дијагонале и обим ромба.

Решење:

Дато је да је $d_1 = 16 \text{ cm}$ и $P = 240 \text{ cm}^2$. Из формуле за површину ромба $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ добијамо $\frac{16 \cdot d_2}{2} = 240$, затим $d_2 = \frac{240}{8} = 30 \text{ cm}$. Из правоуглог троугла $\triangle AOB$ (цртеж 5), према Питагориној теореме, имамо $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$, па заменом d_1 и d_2 добијамо $a^2 = \left(\frac{16}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 289$, тј. дужина странице ромба је $a = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$. Отуда је обим ромба $L = 4 \cdot a = 4 \cdot 17 = 68 \text{ cm}$.



Цртеж 5

Задатак 4

Израчунај површину ромба са страницом 12 cm и једном дијагоналом дужине 10 cm.

Пример 5

Јована припрема витраж са дизајном састављеним од 13 идентичних ромбова као на цртежу. Укупна ширина витража износи 40 cm, док је његова укупна површина 260 cm^2 . Одредити дужине дијагонала и површину сваког ромба.

Решење:

Површина једног ромба износи $P = \frac{260}{13} = 20 \text{ cm}^2$. Укупна ширина дизајна састоји се од мањих дијагонала 5 ромбова, па

отуда имамо $5 \cdot d_2 = 40$, дужина мање дијагонале сваког ромба је $d_2 = 8 \text{ cm}$. Другу дијагоналу ромба наћи ћемо из формуле за површину $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. Са заменом добијамо $20 = \frac{d_1 \cdot 8}{2}$, односно $d_1 = \frac{20}{4} = 5 \text{ cm}$.



Цртеж 6

Задатак 5

Површина једног ромба је 24 dm^2 , а једна његова дијагонала је 8 dm . Одреди висину и обим ромба.

Задаци за вежбање!

1. Израчунај дужину дуже стране паралелограма са висинама 3 cm и 5 cm ако је краћа страница 6 cm.
2. Израчунај површину паралелограма са висинама 3 cm и 4 cm и углом између њих од 30° .
3. Израчунај површину ромба са страницом 10 dm и полупречником уписане кружнице 4 dm.
4. Површина једног паралелограма је 300 cm^2 , његов обим је 70 cm, а растојање између дужих страница је 10 cm. Одреди растојање између краћих страница.
5. Катја дизајнира декоративну башту састављену од 8 једнаких ромбова, распоређених као на цртежу 7. Површина једног ромба износи 120 квадратних метара, а мања дијагонала је дужине 10 метара (цртеж 7). Она жели да дуж дијагоналу направи пешачке стазе од камена. Колика је укупна дужина пешачких стаза у башти? (цртеж 7)

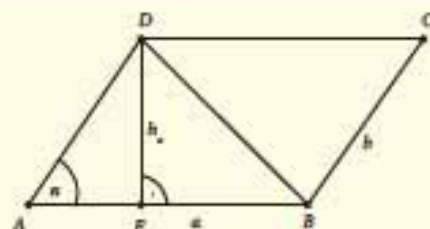


Цртеж 7

6.3 ПЕРИМЕТАР И ПОВРШИНА ТРОУГЛА

Подсети се!

- Како се деле троуглови према страницама, а како према угловима?
- Колика је површина троугла у односу на површину паралелограма који има исту основу и исту висину као троугао (цртеж 1)?



Цртеж 1

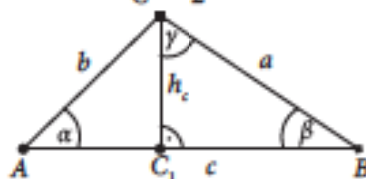
Површина троугла израчунава се као половина површине једног паралелограма зато што су $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ подударни троуглови.

Површина троугла са страницама a , b , c и одговарајућим висинама h_a , h_b и h_c израчунава се коришћењем било које од следећих формула:

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a, \quad P = \frac{1}{2} b \cdot h_b \quad \text{или} \quad P = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

Површина троугла може се израчунати и коришћењем тригонометријских функција, када је троугао задат са две странице и углом између њих. У наставку ћемо извести ту формулу. За $\triangle ABC$ на цртежу 2 имамо

$P = \frac{1}{2} c \cdot h_c$. Из правоуглог троугла $\triangle AC_1C$ имамо да $\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$, тј. $h_c = b \cdot \sin \alpha$, а из $\triangle CC_1B$ добија се да $\sin \beta = \frac{h_c}{a}$, односно $h_c = a \cdot \sin \beta$. Замењујући у формули $P = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ добијамо: $P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$ или $P = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta$. На сличан начин се добија да $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$.



Цртеж 2

Запамти

Површина троугла може се израчунавати коришћењем било које од следећих формула:

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma \quad \text{или} \quad P = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta \quad \text{или} \quad P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha,$$

тј. површина троугла једнака је половини производа две његове странице и синуса угла између њих.

Пример 1

Израчунај површину троугла $\triangle ABC$ ако две његове странице имају дужине 5 cm и 14 cm, а угао између њих је 36° .

Решење:

Нека су дате странице $b = 5$ cm, $c = 14$ cm и угао између њих $\alpha = 36^\circ$. Према формули за површину троугла, имамо $P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 14 \cdot \sin 36^\circ \approx 35 \cdot 0,588 \approx 20,58$ cm².

За једнакостранични и правоугли троугао, формуле за израчунавање површине свде се на следеће:

- У једнакостраничном троуглу сваки унутрашњи угао износи 60° и ако страницу означимо са a , тада његова површина износи $P = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.
- У правоуглом троуглу катете су међусобно нормалне, па су висине $h_a = b$, $h_b = a$ и заменом у формулу за површину троугла добијамо $P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$.

Запамти!

Површина једнакостраничног троугла са страницом a израчунава се по формули $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.
Површина правоуглог троугла са катетама a и b израчунава се по формули $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Задатак 1

Одреди површину правоуглог троугла чије су катете 12 cm и 9 cm.

Пример 2

Инжењер дизајнира троугласту рамку за спортску инсталацију. Троугласта рамка има облик правоуглог троугла, а однос дужина катета је 5:12. Површина рамке је 480 cm². Израчунај периметар рамке.

Решење:

Из односа дужина катета $a : b = 5 : 12$ имамо да $a = 5k$ и $b = 12k$.

Заменом у формулу за површину правоуглог троугла $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{5k \cdot 12k}{2} = 480$, добија се $k^2 = \frac{960}{60} = 16$, тј. $k = 4$.

Одатле, заменом вредности за k , добијамо $a = 5 \cdot 4 = 20$ cm, а $b = 12 \cdot 4 = 48$ cm.

Применом Питагорине теореме добијамо $c = \sqrt{20^2 + 48^2} = \sqrt{2704} = 52$ cm.

Периметар рамке износи

$$L = a + b + c = 20 + 48 + 52 = 120 \text{ cm.}$$

Задатак 2

Грађевинар планира да направи фонтану у облику једнакостраничног троугла. Ако је висина фонтане (од врха до наспрамне странице) 10 cm, израчунај:

- дужину странице троугла;
- површину троугла;
- периметар троугла.

Запамти!

За израчунавање површине произвољног троугла, ако су познате дужине његове три странице a , b и c , користи се такозвана Херонова формула $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, где је $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Пример 3

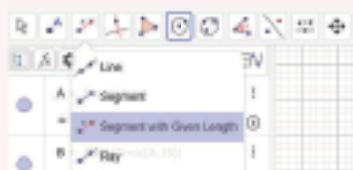
Израчунај површину троугла чије су странице 15 cm, 13 cm и 14 cm. Резултат провери коришћењем рачунарског софтвера GeoGebra.

Решење:

Заменом $a = 15$ cm, $b = 13$ cm и $c = 14$ cm, добијамо да $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+13+14}{2} = 21$ cm. За површину троугла добија се:

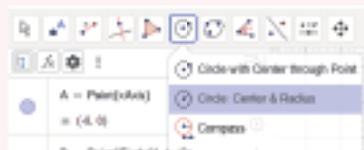
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-15)(21-13)(21-14)} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2.$$

Поступак за проверу решења у GeoGebra је следећи. Најпре ћемо нацртати дуж задате дужине („Segment with Given Length“) и за дужину ћемо унети 15 (слика 1). То је страница AB троугла.



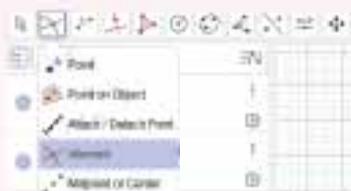
Слика 1

Да бисмо добили теме C , поступак је следећи: прво ћемо нацртати кружницу са центром у тачки A и полупречником 14 cm и кружницу са центром у тачки B и полупречником 13 cm. Пресек две кружнице даје тачку C . Цртање кружница у GeoGebra врши се избором опције „Circle: Center & Radius“ из менија (слика 2).



Слика 2

Да бисмо добили пресечну тачку C , изабирамо „Intersect“ и означавамо пресечну тачку кружица (слика 3).



Слика 3

Да бисмо конструисали троугао, изабирамо многоугао („Polygon“) и правимо троугао кроз теме A , B и C (слика 4).



Слика 4

На крају, да бисмо израчунали површину, изабирамо опцију „Area“ (слика 5) и показивачем кликнемо на троугао.



Слика 5

Добија се резултат 84, што значи да је површина троугла $P = 84 \text{ cm}^2$, као што смо добили и претходно.

Задатак 3

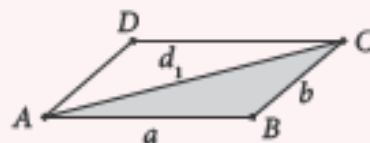
Колика је површина троугласте парцеле са дужинама страница 8 m, 15 m и 17 m? Резултат проверити помоћу GeoGebre.

Пример 4

Израчунај површину паралелограма са страницама 10 cm и 17 cm и једном дијагоналом 21 cm.

Решење:

На цртежу 3 дијагонала AC дели паралелограм $ABCD$ на два складна троугла, па ћемо површину паралелограма израчунати као збир површина ових троуглова. Пошто су за $\triangle ABC$ дате три странице $a = 10 \text{ cm}$, $b = 17 \text{ cm}$ и $d_1 = 21 \text{ cm}$, његову површину ћемо израчунати Хероновом формулом. Најпре, $s = \frac{10+17+21}{2} = 24$, па за површину троугла добијамо:



Цртеж 3

$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{24 \cdot (24-10) \cdot (24-17) \cdot (24-21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2.$$

За површину паралелограма добијамо $P = 2P_{\triangle ABC} = 2 \cdot 84 = 168 \text{ cm}^2$.

Задатак 4

Тим инжењера анализира троугласту носећу конструкцију направљену од три металне шипке дужине 18 cm, 20 cm и 34 cm. За стабилност конструкције важно је знати највећу могућу висину троугла, односно најдужу дуж која представља растојање од једног темена до наспрамне стране. Одреди највећу висину троугла формираног од ових страница.

Подсети се!

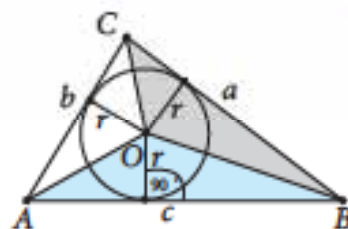
- Где се налази центар уписане, а где центар описане кружнице у троуглу?
- Какав угао образују страница троугла и полупречник уписане кружнице повучен до додирне тачке?
- Где лежи центар кружнице описане око правоуглог троугла?

Нека је r полупречник уписане кружнице у $\triangle ABC$ са страницама a, b и c . Изразићемо површину троугла преко a, b, c и r . Полупречник r је висина сваког од троуглова $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ и $\triangle AOC$. Површина целог троугла $\triangle ABC$ може се израчунати као збир површина троуглова $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ и $\triangle AOC$, тј. $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AOB} + P_{\triangle BOC} + P_{\triangle AOC}$, па отуда имамо:

$$P = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s,$$

где је

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$



Цртеж 4

Запамти!

- Ако је r полупречник уписане кружнице у троуглу, тада се површина тог троугла израчунава по формули $P = r \cdot s$, где је $s = \frac{a+b+c}{2}$.
- Ако је R полупречник описане кружнице око троугла, тада се површина тог троугла израчунава по формули $P = \frac{abc}{4R}$.

Пример 5

У микроскопској анализи ткива три различите мембранске границе формирају правоугли троугао. Дужине катета овог модела су $9 \mu\text{m}$ и $12 \mu\text{m}$. У оквиру овог региона налази се кружна реакциона зона која додирује све три мембранске границе. Израчунај полупречник кружне реакционе зоне, односно полупречник уписане кружнице у датом правоуглом троуглу.

Решење:

Дате су дужине катета $a = 9 \mu\text{m}$ и $b = 12 \mu\text{m}$, па је површина троугла

$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54 \mu\text{m}^2.$$

Према Питагориној теореме за хипотенузу добијамо $c = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \mu\text{m}$, па

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = 18 \mu\text{m}.$$

Полупречник уписане кружнице израчунаћемо коришћењем формуле $P = r \cdot s$. Отуда, $r = \frac{P}{s}$, па заменом вредности за P и s , добијамо да је полупречник уписане кружнице

$$r = \frac{54}{18} = 3 \mu\text{m}.$$

Пример 6

Израчунај полупречник описане кружнице у троуглу са страницама 26 cm, 28 cm и 30 cm.

Решење:

Према Хероновој формули, $s = \frac{26+28+30}{2} = 42$, а површина троугла је

$$P = \sqrt{42 \cdot (42-26) \cdot (42-28) \cdot (42-30)} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 336 \text{ cm}^2.$$

Полупречник описане кружнице израчунаћемо коришћењем формуле $P = \frac{abc}{4R}$. Отуда се може изразити тражени полупречник:

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{26 \cdot 28 \cdot 30}{4 \cdot 336} = 16,25 \text{ cm}.$$

Задатак 5

У језерцету кружног облика са полупречником R налази се острвце у облику троугла уписаног у круг. Странице троугла су 15 m, 16 m и 17 m. Зими водени део језерцета треба покрити како се не би заледио. Колико квадратних метара материјала ће бити потребно за то?

Пример 6

Један инжењер треба да пројектује троугласти део моста (цртеж 5) који представља једнакокраки троугао са основицом 12 m и висина 9 m.

- Колико квадратних метара рекламног простора може да се постави на том делу моста?
- Колико метара металне конструкције је потребно за израду троугластог дела моста?

Решење:

- а) Да бисмо одредили колико квадратних метара рекламе може да се постави, потребно је израчунати површину троугла. Добијамо да $P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54 \text{ m}^2$.

Значи, на троугластом делу моста може се поставити реклама површине 54 m^2 .

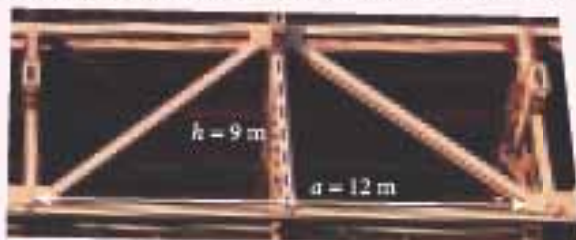
- б) Из правоуглог троугла ADC на цртежу 6, применом Питагорине теореме, имамо

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} \approx 10,82 \text{ m}.$$

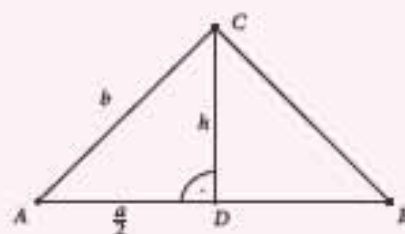
Потребно је израчунати обим троугла, па имамо,

$$L = a + 2b = 12 + 2 \cdot 10,82 = 33,64 \text{ m}.$$

Значи, за израду троугластог дела моста потребно је $33,64 \text{ m}$ металне конструкције.



Цртеж 5



Цртеж 6

Задаци за вежбање!

- Одреди највећу висину троугла чије су странице 9 cm , 10 cm и 17 cm .
- Израчунај површину паралелограма са страницама 13 cm и 20 cm и једном дијагоналом 21 cm .
- Израчунај површину троугла ако су дате странице $a = 7 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$ и угао $\gamma = 36^\circ$.
- Израчунај површину једнакокраког троугла са основицом дужине 12 cm и једним углом од 48° .
- Основица једног једнакокраког троугла је 40 cm , а крак је 25 cm . Одреди полупречнике уписане и описане кружнице.
- Компанија за производњу соларних панела треба да произведе панел као на цртежу 7.
 - Цена 1 m^2 стакла је 50 евра. Колико кошта стакло за израду једног соларног панела?
 - За облагање панела користи се метална трака која кошта 8 евра за један метар дужине. Колико новца ће коштати облагање све три ивице панела?



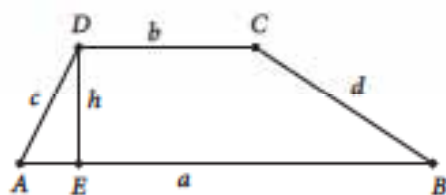
Цртеж 7

6.4 ОБИМ И ПОВРШИНА ТРАПЕЗА И ДЕЛТОИДА

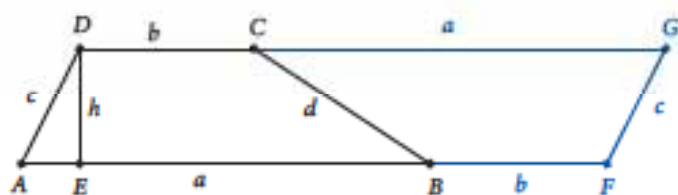
Подсети се!

- Шта је траpez?
- Колико паралелних страница има траpez и како се оне називају?
- Које врсте трапеza постоје?

На цртежу 1 приказан је траpez $ABCD$ са основицама a и b , крацима c и d и висином h . Ако страницу $a = \overline{AB}$ продужимо за дужину $b = \overline{BF}$ и страницу $b = \overline{DC}$ продужимо за $a = \overline{CG}$, добија се паралелограм $AFGD$ са основицом $(a + b)$ и висином h (цртеж 2). Овај паралелограм је састављен од два једнака трапеza $ABCD$ и $GCBF$, а његова површина се израчунава по формули $P = (a + b) \cdot h$. Траpez $ABCD$ представља једну половину целог паралелограма $AFGD$ и зато за површину трапеza добијамо формулу $P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h = \frac{a + b}{2} \cdot h$.



Цртеж 1



Цртеж 2

Запамти!

Површина трапеza са основицама a и b и висином h израчунава се по формули $P = \frac{a + b}{2} \cdot h$.

Пример 1

Основице једног трапеza су 18 dm и 12 dm, а његова површина је 45 dm². Одреди висину трапеza?

Решење:

Заменом $a = 18$ dm, $b = 12$ dm и $P = 45$ dm² у формулу за површину трапеza добијамо $45 = \frac{18 + 12}{2} \cdot h$ односно $h = \frac{45}{15} = 3$ dm.

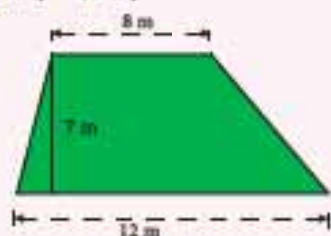
Задатак 1

Један трапез има површину 80 cm^2 и висину 4 cm . Дужина једне основице износи 25 cm . Одреди дужину друге основице трапеза.

Пример 2

У једном еко-парку планира се уређење нове зелене површине у облику трапеза, као на цртежу 3, на којој ће бити посађена трава.

- Колика је површина зелене површине?
- Ако је за 1 m^2 потребно 250 g семена, колика количина семена је потребна за засађивање целе површине?
- Ако 1 kg семена апсорбује приближно $1,5 \text{ kg CO}_2$ годишње, колико CO_2 ће нова зелена површина апсорбовати за једну годину?



Цртеж 3

Решење:

- Са цртежа 3 може се видети да су основице трапеза $a = 12 \text{ m}$ и $b = 8 \text{ m}$, а висина трапеза је $h = 7 \text{ m}$. Ако ове вредности заменимо у формулу за површину трапеза, добијамо:

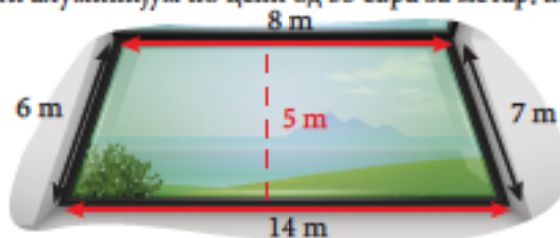
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{12+8}{2} \cdot 7 = 70 \text{ m}^2.$$

- Пошто је за засејавање површине од 1 m^2 потребно 250 g семена, за засејавање целе површине биће потребно $70 \cdot 250 = 17500 \text{ g} = 17,5 \text{ kg}$ семена.
- Будући да 1 kg семена годишње апсорбује приближно $1,5 \text{ kg CO}_2$ новом зеленом површином годишње ће се апсорбовати $17,5 \cdot 1,5 = 26,25 \text{ kg CO}_2$.

Задатак 2

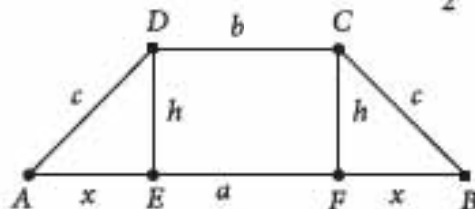
Стаклена фасада једног модерног објекта (цртеж 4) има облик трапеза.

- Колико треба платити за фасаду ако 1 m^2 стакла кошта 120 евра.
- Ако се за рам користи алуминијум по цени од 35 евра за метар, колика је укупна цена рама?



Цртеж 4

Један траpez се назива **једнакокраки** ако два крака трапеza имају једнаку дужину. На цртежу 5 приказан је једнакокраки траpez са основицама a и b , краком c и висином h . Из правоуглог троугла AED, применом Питагорине теореме, добијамо $c^2 = x^2 + h^2$, где је $x = \frac{a-b}{2}$.



Цртеж 5

Пример 3

Израчунај површину једнакокраког трапеza са основицама 14 cm и 6 cm и краком 5 cm.

Решење:

Из услова задатка имамо да је $a = 14$ cm, $b = 6$ cm и $c = 5$ cm.

За део x (цртеж 5) имамо $x = \frac{a-b}{2} = \frac{14-6}{2} = 4$ cm, а висину h налазимо из једнакости

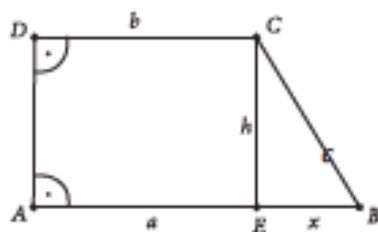
$h^2 = c^2 - x^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$. Отуда, $h = \sqrt{9} = 3$ cm. На крају, за површину се добија

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{14+6}{2} \cdot 3 = 30 \text{ cm}^2.$$

Задатак 3

Траpez са површином 90 cm^2 има висину 10 cm. Одреди основице трапеza ако се разликују за 4 cm.

Један траpez се назива **правоугли** ако је један угао при основици прав. На цртежу 6 приказан је правоугли траpez са основицама a и b , краком c и висином h . У овом случају дужина $x = a - b$.



Цртеж 6

Пример 4

У лабораторији за екологију пројектује се акваријум за проучавање водених биљака чија основа има облик правоуглог трапеza. За правилно кретање воде, димензије основе су изабране тако да је дужа основица 20 cm, краћа основица 15 cm, а висина 12 cm.

- Израчунај површину основе акваријума.
- Израчунај обим основе, који је потребан за постављање заштитног гуменог оквира око акваријума.

Решење:

Из услова задатка имамо $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, а $h = 12$ cm.

- а) За површину основе акваријума, која има облик трапеца, добијамо

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{20+15}{2} \cdot 12 = 210 \text{ cm}^2.$$

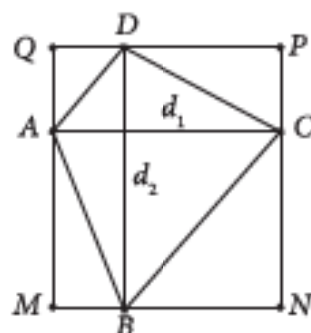
- б) За одређивање обима трапеца потребно је одредити дужину крака c (цртеж 6). Применом Питагорине теореме добијамо $c^2 = h^2 + x^2 = h^2 + (a-b)^2 = 12^2 + (20-15)^2 = 169$, па је $c = 13$ cm. Други крак правоуглог трапеца има исту дужину као висина трапеца. Отуда је обим трапеца $L = 20 + 15 + 13 + 12 = 60$ cm.

Задатак 4

При истраживању корита једне реке, попречни пресек реке моделира се као правоугли трапез. Дужа основица трапеца (ширина површине воде) износи 24 m, краћа основица (ширина дна) је 16 m, а коси крак заклапа утао од 30° са дужином основицом.

- Одреди висину трапеца (дубину реке).
- Израчунај површину попречног пресека реке.
- Израчунај обим пресека.

Нека је дат четвороугао $ABCD$ чије су дијагонале d_1 и d_2 међусобно нормалне. Одредићемо површину овог четвороугла. Ако кроз темена тог четвороугла повучемо праве паралелне са дијагоналама, добија се правоугаоник $MNPQ$ са страницама $MN = d_1$ и $MQ = d_2$, који је састављен од четири пара правоуглих троуглова, при чему троуглови у сваком пару имају једнаке површине (цртеж 7). Према томе, површина четвороугла је двапут мања од површине правоугаоника $MNPQ$. Отуда следи да је површина четвороугла $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.



Цртеж 7

Запамти!

Површина четвороугла чије су дијагонале међусобно нормалне и имају дужине d_1 и d_2 једнака је половини производа тих дужина и израчунава се по формули $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Четвороугао који има два пара једнаких суседних страница назива се *делтоид*. Делтоид најчешће срећемо код облика као што су змај за летење, украсни орнаменти, дизајн различитих предмета и друго. Дијагонале делтоида су међусобно нормалне, па се површина делтоида може одредити по формули $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где су d_1 и d_2 дужине дијагонала делтоида.

Пример 5

Једна компанија пројектује дрвени декоративни панел у облику делтоида за унутрашње зидове једног ресторана. Странице панела треба да буду 10 cm и 17 cm, а дијагонала која није оса симетрије дуга је 16 cm (цртеж 8).

- Колико квадратних центиметара дрвета је потребно за израду панела?
- Ако је цена дрвене плоче 2 евра за cm^2 , колика је укупна цена панела?

Решење:

- На цртежу 9 приказан је 2Д-облик панела. Одатле имамо да $\overline{AD} = a = 10 \text{ cm}$ и $\overline{AB} = b = 17 \text{ cm}$, а $\overline{AC} = d_1 = 16 \text{ cm}$.

Од правоуглог троугла $\triangle DOC$ имамо

$$\overline{DO}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{OC}^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 10^2 - 8^2 = 36, \text{ односно } \overline{DO} = 6 \text{ cm.}$$

С друге стране, из правоуглог троугла $\triangle BOC$ имамо

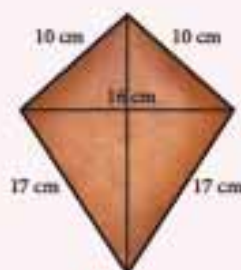
$$\overline{OB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 17^2 - 8^2 = 225, \text{ тј. } \overline{OB} = 15 \text{ cm.}$$

Отуда, за дужину веће дијагонале добијамо $d_2 = \overline{DB} = \overline{DO} + \overline{OB} = 6 + 15 = 21 \text{ cm}$, а површина ће бити једнака на

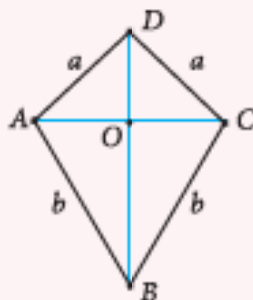
$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{16 \cdot 21}{2} = 168 \text{ cm}^2. \text{ Значи, за израду декоративног дрвеног панела потребно је}$$

168 cm^2 дрвета.

- Цена дрвене плоче је 2 евра за cm^2 , па је цена израде једног дрвеног панела $168 \cdot 2 = 336$ евра.



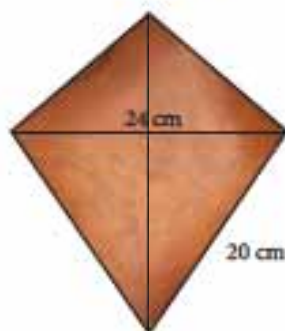
Цртеж 8



Цртеж 9

Задатак 5

Једна фирма треба да изради ПВЦ рекламни панел у облику делтоида који ће бити постављен у алуминијумски оквир. Панел треба да има површину од 216 cm^2 , дуже странице дужине 20 cm , а дијагонала која није оса симетрије треба да буде дужине 24 cm (цртеж 10). Колико ће коштати израда алуминијумског оквира ако се 1 cm набавља по цени од $0,50$ евра.



Цртеж 10

Задачи за вежбање!

1. Површина једног трапеза је 420 cm^2 , а дужине основица су 28 cm и 14 cm . Израчунај висину трапеза?
2. Један архитекта пројектује платформу за базен у облику правоуглог трапеза са основицама 28 m и 16 m и краком који није нормалан на основице, дужине 18 m . Израчунај површину платформе и дужину оgrade која треба да се постави око платформе.
3. Израчунај основице трапеза ако је њихова разлика 5 cm , висина трапеза 8 cm , а његова површина 96 cm^2 .
4. Један еколошки активиста жели да направи зелену башту у облику делтоида на крову једне школске зграде. Странице баште треба да буду дужине 13 m и 20 m , а у средини треба да се налазе дијагоналне стазе за одвод кишнице, при чему дијагонала која је оса симетрије треба да буде дужине 21 m .
 - а) Израчунај дужину друге стазе за одвод.
 - б) Ако на 1 m^2 површине могу да се засаде 4 биљке, колико биљака може да се засади на целој површини баште?
5. Једна електрична табла има облик делтоида. Дијагонала која је оса симетрије дуга је 17 cm , једна од страница делтоида дуга је 10 cm , а површина табле је 136 cm^2 .
 - а) Израчунај колико је траке потребно за облагање електричне табле.
 - б) Ако свака компонента заузима 2 cm^2 , колико компоненти може да се смести на табли?

6.5 ПЕРИМЕТАР И ПОВРШИНА КРУГА И ДЕЛОВИ КРУГА

Подсети се!

- Шта је кружница?
- Шта је круг?
- Колико степени износи пун угао?

Обим кружнице са полупречником r израчунава се по формули $L = 2\pi r$, а површина круга са истим полупречником израчунава се по формули $P = r^2 \pi$. Ове формуле су ученици изучили претходних година школовања и зато ћемо их користити као познате.

Пример 1

Кружна соларна платформа (цртеж 1) има обим 62,8 m.

- Одреди полупречник и површину платформе.
- Колика је укупна снага соларне платформе ако 1 m^2 производи 240 W електричне енергије?
- Колико је оваквих платформи потребно да би се обезбедило најмање 226 kW електричне енергије?



Цртеж 1

Решење:

- Из формуле за обим круга добијамо $62,8 = 2\pi r$, односно $r = \frac{62,8}{2 \cdot 3,14} = 10 \text{ m}$. Заменом вредности за полупречник у формулу за површину добијамо $P = r^2 \pi = 10^2 \pi = 314 \text{ m}^2$.
- Укупна снага соларне платформе износи $314 \cdot 240 = 75360 \text{ W} = 75,36 \text{ kW}$.
- Да би се обезбедило најмање 226 kW електричне енергије, потребне су приближно $226 : 75,36 \approx 3$ овакве соларне платформе.

Задатак 1

У једном пољопривредном систему за наводњавање користе се два кружна црева која доводе воду до једне њиве. Пречници црева су 10 cm и 24 cm. Планирано је да се она замене једним већим цревом које ће имати исти проток воде. Одреди пречник новог црева.

Пример 2

Један телекомуникациони оператер поставља квадратну основу за антену површине 196 cm^2 . У основи је смештен кружни заштитни модул, који је уписан у квадратну основу.

- Колика је површина кружног заштитног модула?
- Колика површина основе остаје непокривена?

Решење:

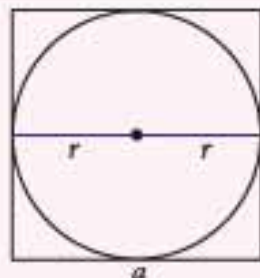
- Из формуле за површину квадрата добијамо $a^2 = 196$ и $a = 14 \text{ cm}$. Затим, пошто је пречник круга једнак страници квадрата (цртеж 2), тј. $d = a$, за полупречник добијамо

$$r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}.$$

Површина кружног заштитног модула износи $P = r^2 \pi = 7^2 \pi = 49\pi \text{ cm}^2$.

- Површину основе која остаје непокривена израчунаћемо као разлику површине целе квадратне основе и површине кружног модула,

$$P = 196 - 49\pi = 42,14 \text{ cm}^2.$$



Цртеж 2

Задатак 2

Једна фабрика слаткиша прави квадратну картонску кутију за колаче. Површина основе кутије је 225 cm^2 . У кутију се ставља округли колач који је уписан у квадратну основу (колач додирује сваку од четири странице).

- Колики је пречник колача?
- Колики је обим колача?
- Колики проценат основе кутије није покривен колачем?

Пример 3

Точак једног електричног бицикла има полупречник $r = 35 \text{ cm}$. За време од 2 минута точак направи 180 потпуних обртаја.

- Колико је растојање прешао бицикл?
- Колика је средња брзина бицикла у m/s ?

Решење:

- Један обрт точка одговара обиму кружнице, који износи:

$$L = 2r\pi = 2 \cdot 35 \cdot \pi = 70\pi \text{ cm} = 0,7\pi \text{ m}.$$

Точак је направио 180 потпуних обртаја, па је растојање које је прешао бицикл

$$s = 180 \cdot L = 180 \cdot 0,7\pi = 126\pi \text{ m}.$$

$$s \approx 126 \cdot 3,14 = 395,6 \text{ m}.$$

- Средњу брзину за време од 2 min = 120 s израчунавамо по формули

$$v = \frac{s}{t} = \frac{126\pi}{120} = 1,05\pi \text{ m/s},$$

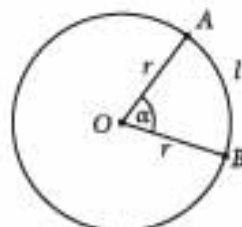
$$\text{или } v = 1,05\pi = 1,05 \cdot 3,14 \approx 3,3 \text{ m/s}.$$

Задатак 3

Точак једног електричног скутера има пречник од 80 cm. Колико је растојање прешао скутер ако је направио 150 обртаја точкова? (цртеж 3)

Део кружнице који одговара одређеном централном углу назива се **кружни лук** и мери се истом мерном јединицом у којој се мери и обим кружнице. На цртежу 3 приказана је дужина кружног лука $\overline{AB} = l$ који одговара централном углу α . Обим целе кружнице је $L = 2\pi r$ и одговара централном углу од 360° . Отуда се добија пропорција $l : \alpha = 2\pi r : 360^\circ$, из које добијамо да

$$l = \frac{2\pi r \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$



Цртеж 3

Запам'яті!

Дужина кружног лука који одговара централном углу α , у кружници полупречника r , израчунава се по формули $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$.

Пример 4

На кружној рекламної табли (цртеж 4) са полупречником 15 cm треба да се постави танка ЛЕД-трака која ће покрити кружни лук рекламне табле који одговара централном углу од 30° . Колика је дужина те ЛЕД-траке?

Решење:

У задатку су дати $r = 15$ cm и $\alpha = 30^\circ$. Да би се одредила дужина ЛЕД-траке, потребно је израчунати дужину кружног лука који одговара кружници са полупречником 15 cm и централним углом од 30° , па заменом у формулу добијамо

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} = \frac{15 \cdot \pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} = 2,5\pi \approx 2,5 \cdot 3,14 = 7,85 \text{ cm}.$$



Цртеж 4

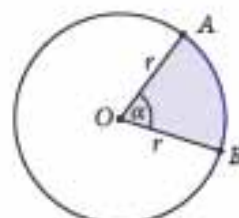
Задатак 4

Једна бициклистичка стаза у парку има кружну кривину са полупречником 600 m. Колики је централни угао дела стазе који је закривљен ако дужина стазе која му одговара износи 150 m.

Кружни исечак или **кружни сектор** назива се део круга који је ограничен са два његова полупречника и централним углом који захватају ти полупречници (обојени део на цртежу 5). Однос површине P дела круга који одговара централном углу α и угла α једнак је односу површине $r^2\pi$ целог круга и пуног угла од 360° , односно $P : \alpha = r^2\pi : 360^\circ$.

Отуда добијамо да је површина кружног исечка једнака

$$P = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ}.$$



Цртеж 5

Пример 5

Еден сензор кој е поставен на столб (цртеж 6) има кружен опсег со радиус 12 m. Сензорот покрива само дел од просторот кој одговара на централен агол од 60° . Колкава е плоштината на просторот што го покрива сензорот?

Решење:

Заменом $r = 12$ m и $\alpha = 60^\circ$ у формули за површину кружног исечка добијамо

$$P = \frac{12^2 \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} \approx 75,36 \text{ m}^2.$$

Површина простора који покрива сензор износи приближно $75,36 \text{ m}^2$.



Цртеж 6

Задатак 5

На једном кружном тргу са полупречником 12 m осветљен је само део површине у облику кружног исечка, који има површину $36\pi \text{ m}^2$.

- Колики је централни угао осветљеног дела?
- Колика је дужина кружног лука који ограничава осветљени део?

Део круга ограничен једним кружним луком и одговарајућом тетивом назива се **кружни одсечак**.

У кругу на цртежу 7 одсечак је одређен тетивом AB и централним углом α . Површина кружног одсечка ACB изразува се као разлика површине P_1 кружног исечка AOB и површине P_2 једнакокраког троугла $\triangle OAB$, тј.

$$P = P_1 - P_2.$$



Цртеж 7

Пример 6

У кружници са полупречником $r = 10$ cm, тетива AB одсеца кружни одсечак. Централни угао који наткриљује тетиву је $\alpha = 72^\circ$.

- Изразунај површину кружног одсечка.
- Изразунај дужину тетиве AB .
- Изразунај дужину лука $\widehat{AB}$ који ограничава одсечак.

Решење:

- а) Површину кружног одсечка, који одговара централном углу од $\alpha = 72^\circ$, израчунаћемо као $P = P_1 - P_2$, где је P_1 површина кружног исечка AOB , а P_2 површина једнакокраког троугла $\triangle OAB$.
Налазимо:

$$P_1 = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{10^2 \pi \cdot 72^\circ}{360^\circ} = 20\pi = 20 \cdot 3,14 = 62,8 \text{ cm}^2;$$

$$P_2 = \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{10^2 \cdot \sin 72^\circ}{2} = 50 \cdot \sin 72^\circ \approx 50 \cdot 0,95 = 47,5 \text{ cm}^2.$$

Отуда, за површину кружног одсечка добијамо $P = P_1 - P_2 = 62,8 - 47,5 = 15,3 \text{ cm}^2$.

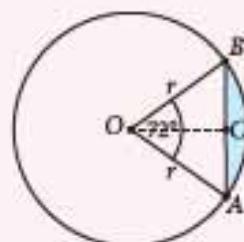
- б) За одређивање дужине тетиве, поћи ћемо од правоуглог троугла $\triangle ACO$. Налазимо

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{r}, \text{ тј. } AC = r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 10 \cdot \sin 36^\circ = 10 \cdot 0,59 = 5,9 \text{ cm.}$$

$$\text{Будући да } \overline{AB} = 2 \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 5,9 = 11,8 \text{ cm.}$$

- в) За дужину лука $\widehat{AB}$, добијамо:

$$l = \frac{r \pi \alpha}{180^\circ} = \frac{10 \cdot \pi \cdot 72^\circ}{180^\circ} = 4\pi \approx 4 \cdot 3,14 = 12,56 \text{ cm.}$$



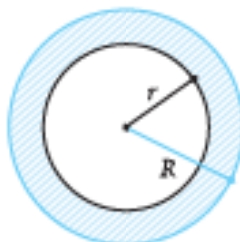
Цртеж 8

Задатак 6

Стаклени прозор на подморници има облик дела кружнице (кружног одсечка). Прозор је израђен од кружног стакла са полупречником $r = 40 \text{ cm}$. Метални оквир који држи прозор ограничава пролаз светлости тако што тетива стакла одговара централном углу од 60° .

- Израчунај површину стакла која пропушта светлост (површину кружног одсечка).
- Израчунај дужину металног оквира који иде дуж ивице прозора (збир дужине лука и тетиве).
- Ако стакло тежи 8 kg по m^2 , колика је маса прозора? (Резултат изрази у kg .)

Кружни прстен је део равни ограничен са две концентричне кружнице различитих полупречника. Површина кружног прстена (цртеж 9) једнака је разлици површина кругова са полупречницима R и r , тј. $P = R^2 \pi - r^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi$.



Цртеж 9

Пример 7

На атлетском стадиону планира се изградња кружне стазе са тартаном (цртеж 10), при чему спољашњи полупречник стазе треба да буде 12 m, док је ширина тартана 3 m. Колика је површина тартана који треба поставити?

Решење:

Кружна стаза са тартаном представља кружни прстен са полупречницима $R = 12$ m и $r = 12 - 3 = 9$ m. Према формули за површину кружног прстена добијамо

$$P = (R^2 - r^2)\pi = (12^2 - 9^2)\pi = 63\pi \approx 198\text{ m}^2.$$



Цртеж 10

Задатак 7

У водоводном систему користи се гумени заштитни прстен који има облик кружног прстена. Спољашњи полупречник прстена је $R = 12$ cm, а унутрашњи полупречник је $r = 8$ cm.

- Изračунај површину заштитног прстена.
- Колика је укупна дужина ивице прстена (збир спољашњег и унутрашњег обима)?
- Ако је за израду прстена потребно 0,09 kg гуме на 100 cm^2 , колика је маса једног заштитног прстена?
- Ако се у један пакет ставља 25 оваквих прстенова, колика је укупна маса пакета?

Задаци за вежбање!

- Један точак трактора направио је 12 обртаја, при чему је трактор прешао 37,68 m.
 - Одреди полупречник точака.
 - Колико ће метара прећи трактор ако точак направи још 15 обртаја?
- У једном инжењерском пројекту користе се два кружна електрична кабла са полупречницима 2 mm и 3 mm. Инжењер планира да их замени једним већим каблом који ће имати исти обим као збир обима два стара кабла, како се не би променила отпорност. Колика је површина попречног пресека новог кабла?
- Два вентилатора имају облик круга, при чему је однос њихових обима 3:5, а полупречник мањег вентилатора је 18 cm. Одреди полупречник и површину већег вентилатора.
- Део пољопривредне парцеле ограђен је по кружној линији са полупречником 25 m и централним углом од 144° . Колика је укупна цена оградe ако 1 метар дужине кошта 12 евра?
 - Колика је обрадива површина њиве?
 - Колики је укупан приход од обраде њиве ако приход износи 0,8 евра по 1 m^2 .

6.6 ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА ПИРАМИДЕ

Подсети се!

- Који су основни елементи једне пирамиде?
- Наведи пресеке пирамиде са равни.

Запамти!

Површина P једне пирамиде израчунава се као збир површине основе (B) и површине бочне површине (M), тј..

$$P = B + M$$

Код сваке пирамиде бочни зидови су троуглови.

Пример 1

Одреди површину правилне четвороугаоне пирамиде са основним рабом 10 cm и бочним рабом 13 cm.

Решење:

Основа правилне четвороугаоне пирамиде је квадрат са страницом $a = 10$ cm, а дужина њеног бочног рубца је $s = 13$ cm. Отуда је површина основе $B = a^2 = 10^2 = 100$ cm². Из правоуглог троугла

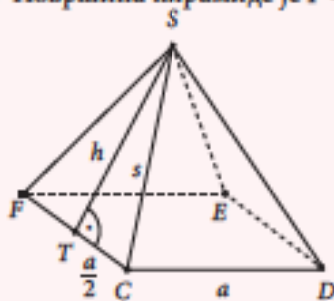
$\triangle CTS$ (цртеж 1), према Питагориној теореме, имамо $s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, одакле следи

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 169 - 25 = 144.$$

Дакле, дужина апотеме пирамиде је $h = 12$ cm. Сада је површина једне бочне стране $\frac{a \cdot h}{2}$,

паа површина бочне површине је $M = 4 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 2 \cdot a \cdot h$. Заменом вредности a и h добијамо:

$$M = 2 \cdot a \cdot h = 2 \cdot 10 \cdot 12 = 240 \text{ cm}^2. \text{ Површина пирамиде је } P = B + M = 100 + 240 = 340 \text{ cm}^2.$$



Цртеж 1

Активност

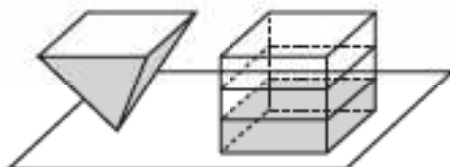
Кров једне зграде је правилна четвороугаона пирамида са основним рубом 8 m, а висине бочних страна износе 5 m. Ако зграду треба покрити лимом који кошта 1800 динара за 1 m², колика ће бити цена покривања?

Подсети се!

- Наведи основне елементе призме.
- Запремина призме израчунава се по формули $V = B \cdot H$, где је B површина основе призме, а H висина призме.

Нека имамо две посуде, једну у облику призме, а другу у облику пирамиде, при чему имају једнаке основе и висине, као на цртежу 2.

Ако посуду у облику призме напунимо ситним песком, а затим тај песак пресипамо у посуду у облику пирамиде, приметимо да се количином песка из призме три пута може напунити посуда у облику пирамиде.



Цртеж 2

Из овог експеримента закључујемо да је запремина пирамиде три пута мања од запремине призме.

Будући да се запремина призме израчунава по формули $V = B \cdot H$, запремина пирамиде је $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$.

Запамти!

Запремина V било које пирамиде једнака је једној трећини производа њене висине H и површине основе B , тј. $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$ или $V = \frac{B \cdot H}{3}$.

Пример 2

Одреди запремину троугласте пирамиде чије су ивице основе 13 cm, 14 cm и 15 cm, а висина пирамиде износи 24 cm.

Решење:

Прво ћемо израчунати површину основе, која је разностранични троугао, применом Херонове формуле.

Израчунамо $s = \frac{13+14+15}{2} = 21$ cm, тако добијену вредност замењујемо у формулу за површину троугла, али је означавамо са B ,

$$B = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} \\ = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \text{ cm}^2.$$

Заменом у формулу за запремину добијамо $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{84 \cdot 24}{3} = \frac{2016}{3} = 672 \text{ cm}^3$.

Задатак 1

Израчунај запремину правилне четвороугаоне пирамиде са дијагоналом основе 24 cm и бочним рубом 20 cm.

Пример 3

Дата је пирамида чија је основа ромб са дијагоналама 18 cm и 10 cm. Њен мањи дијагонални пресек има површину 15 dm^2 , а подножје висине налази се у пресеку дијагонала. Израчунај запремину пирамиде.

Решење:

Означимо дате податке $d_1 = 18 \text{ cm}$, $d_2 = 10 \text{ cm}$, $Q = 15 \text{ dm}^2 = 1500 \text{ cm}^2$.

Мањи дијагонални пресек пирамиде је троугао са основом $d_2 = 10 \text{ cm}$ и висином H . Отуда је његова површина $Q = \frac{d_2 \cdot H}{2}$. Заменом добијамо $1500 = \frac{10 \cdot H}{2}$, т.е. $H = \frac{1500 \cdot 2}{10} = 300 \text{ cm}$.

Заменом у формулу за запремину добијамо

$$B = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{18 \cdot 10}{2} = 90 \text{ cm}^2.$$

За запремину пирамиде имамо $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{90 \cdot 300}{3} = 9000 \text{ cm}^3$.

Задатак 2

Дата је пирамида запремине 720 cm^3 чија је основа правоугаоник са страницама 18 cm и 10 cm, а подножје висине налази се у пресеку дијагонала основе. Одреди површину бочне површине пирамиде.

Пример 4

Стаклени кров има облик правилне четвороугаоне пирамиде са основним рубом 6 cm и висином 4 cm. Да ли је запремина кровне конструкције (простора који се налази између крова и таванице објекта) већа од 40 cm^3 ? Решење проверити коришћењем програма GeoGebra.

Решење:

Из чињенице да је пирамида правилна следи да је њена основа квадрат чија је површина $B = 6^2 \text{ cm}$.

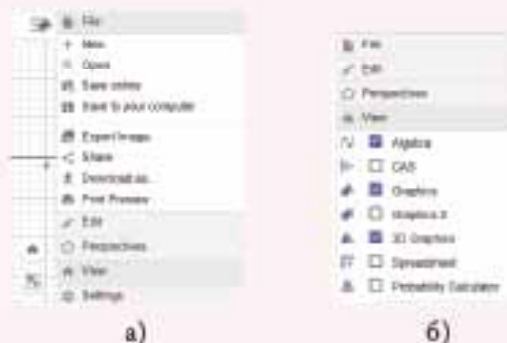
Затим, из формуле за запремину пирамиде следи $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{36 \cdot 4}{3} = 48 \text{ cm}^3$. Дакле, запремина простора испод крова већа је од 48 cm^3 .

Решење ћемо проверити коришћењем програма GeoGebra. Најпре изаберемо правилан многоугао (Regular Polygon) (слика 1, а), нанесемо дуж дужине 6 cm и у менију унесемо број темена правилног многоугла (слика 1, б).



Слика 1

Да бисмо отворили 3Д-прозор у програму GeoGebra, у горњем десном углу изаберемо мени са три хоризонталне линије, затим изаберемо „View“ (слика 2, а) и селекујемо поље „3D Graphics“ (слика 2, б).



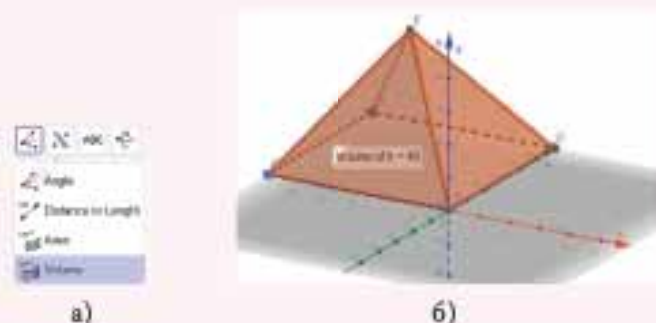
Слика 2

У делу 3Д изаберемо „Extrude to Pyramid“ (слика 3, а), селекујемо квадрат и задамо вредност висине пирамиде (слика 3, б).



Слика 3

На крају, за израчунавање запремине пирамиде, изаберемо алатку за израчунавање запремине (слика 4, а) и на пирамиди добијамо резултат (слика 4, б).



Слика 4

Добија се да је запремина 48 m^3 , чиме се потврђује претходно добијени резултат.

Пример 5

Изложбена сала има облик праве призме са правоугаоном основом чије су дужина $a = 8 \text{ m}$, ширина $b = 6 \text{ m}$ и висина $H_1 = 4 \text{ m}$. Кров сале је пирамида са истом правоугаоном основом и висином $H_2 = 3 \text{ m}$.

- Сматра се да је за удобан боравак сваког посетиоца потребно најмање 4 m^3 унутрашње запремине сале. Одреди максималан број посетилаца који истовремено може боравити у сали.
- Колико квадратних метара материјала је потребно за кров ако је под (основа пирамиде) израђен од другог материјала?

Решење:

- Изложбена сала са кровом приказана је на цртежу 3. Сала има облик призме са правоугаоном основом чије су странице $a = 8 \text{ m}$, $b = 6 \text{ m}$ и висина $H_1 = 4 \text{ m}$. Отуда је запремина призмата $V_1 = B \cdot H_1 = a \cdot b \cdot H_1 = 8 \cdot 6 \cdot 4 = 192 \text{ m}^3$.

Кров сале је пирамида са истом правоугаоном основом и висином $H_2 = 3 \text{ m}$. Запремина крова је

$$V_2 = \frac{B \cdot H_2}{3} = \frac{a \cdot b \cdot H_2}{3} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 3}{3} = 48 \text{ m}^3.$$

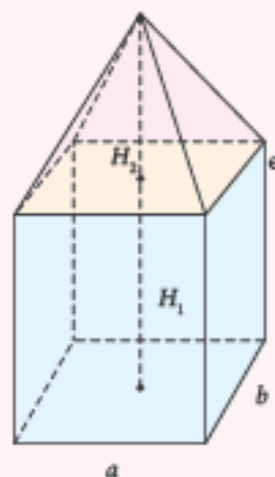
Укупна запремина објекта је $V = V_1 + V_2 = 192 + 48 = 240 \text{ m}^3$.

Будући да је за сваког посетиоца потребно 4 m^3 простора,

максималан број посетилаца у сали је $N = \frac{240}{4} = 60$.

- У овом случају тражи се површина бочне површине пирамиде.

Основа је израђена од другог материјала и не улази у прорачун. Да бисмо одредили ову површину, потребно је да израчунамо висине троуглова који представљају бочне стране пирамиде. Основа је правоугаоник, па имамо две бочне стране у облику троугла са основицом $a = 8 \text{ m}$ и две бочне стране у облику троугла са основицом $b = 6 \text{ m}$. Са цртежа 4, за висине троуглова са основицама a и b , редом, добијамо:



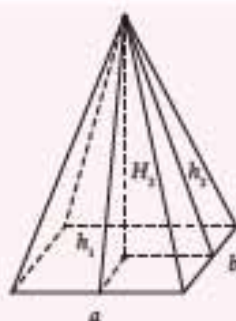
Цртеж 3

- за странице са основицом a : $h_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + H_1^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$;
- за странице са основицом b : $h_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H_1^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 3^2} = 5$.

Површина бочне површине пирамиде биће

$$M = 2 \cdot \frac{a \cdot h_1}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_2}{2} = a \cdot h_1 + b \cdot h_2 = 8 \cdot 3\sqrt{2} + 6 \cdot 5 = 24\sqrt{2} + 30 \approx 63,9 \text{ m}^2.$$

Према томе, за покривање је потрошено приближно 64 m^2 материјала.



Цртеж 4

Задатак 3

Резервоар за воду има облик праве призме са квадратном основом, на којој је постављена пирамида са квадратном основом као кров. Странаца квадратне основе је $a = 4 \text{ m}$, висина призме је $H_1 = 5 \text{ m}$, а висина пирамиде је $H_2 = 3 \text{ m}$.

- Израчунај укупну запремину резервоара.
- Колико m^3 лима је потребно за облагање резервоара ако се под не облаже?
- Ако 1 m^3 воде има масу 1000 kg , колика је маса воде када је резервоар потпуно пун (заједно са простором испод крова)?

Задаци за вежбање!

- Израчунај површину правилне четвороугаоне пирамиде са висином 8 dm и површином основе 144 dm^2 .
- Израчунај површину правилне четвороугаоне пирамиде са бочним рубом 25 cm и апотемом 24 cm .
- Израчунај површину бочне површине правилне троугаоне пирамиде са висином 6 cm и апотемом 10 cm .
- Један објекат за складиштење жита има облик правилне четвороугаоне пирамиде са основним рубом 6 m и висином 4 m .
 - Колико жита може да стане у објекат.
 - Колики су трошкови покривања бочних страна објекта ако је за покривање 1 m^2 потребно 2500 динара.
- Скулптура у парку има облик пирамиде са квадратном основом. Странаца основе је $a = 6 \text{ m}$, а пирамиде је $H = 4 \text{ m}$.
 - Израчунај запремину скулптуре.
 - Колика је укупна површина пирамиде, укључујући и основу?
 - Колико квадратних метара материјала је потребно ако се облажу само бочне стране?
- Стаклени кров атријума има облик пирамиде са правоугаоном основом димензија $a = 10 \text{ m}$ и $b = 6 \text{ m}$. Висина пирамиде је $H = 3 \text{ m}$.
 - Израчунај запремину ваздуха испод крова. Резултат провери коришћењем програма GeoGebra.
 - Израчунај површину стакла потребну за кров, без основе.
 - Ако 1 m^2 стакла има масу 25 kg , колика је укупна маса крова?

6.7 ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА ЗАРУБЉЕНЕ ПИРАМИДЕ

Подсети се!

- Шта представља паралелни пресек пирамиде?
- Какви су многоуглови међусобно паралелни пресек и основа пирамиде?
- Површина једнакокраког трапеза са основицама a и b и висином h израчунава се по формули

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

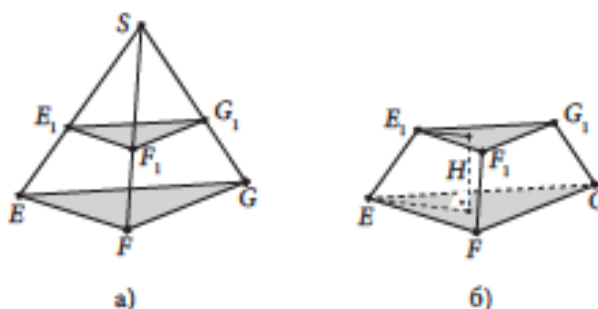
Запамти!

Зарубљена пирамида назива се део пирамиде који се налази између једног њеног паралелног пресека и основе.

На цртежу 1, а) приказана је троугаона пирамида $SEFG$ и један њен паралелни пресек $E_1F_1G_1$, а на цртежу 1, б) приказана је зарубљена троугаона пирамида $EFGG_1F_1E_1$, која је добијена од пирамиде $SEFG$. Основа и паралелни пресек пирамиде називају се **основама** зарубљене пирамиде.

Растојање између равни у којима се налазе основе назива се **висина зарубљене пирамиде** и означава се са H .

Бочне стране које нису основе називају се **бочним странама** и оне чине **бочну површину** зарубљене пирамиде.



Цртеж 1

Које су врсте четвороуглова бочне стране зарубљене пирамиде?

Запамти!

Површина P зарубљене пирамиде израчунава се по формули

$$P = B + B_1 + M,$$

где су B и B_1 површине основе, а M површина бочне површине.

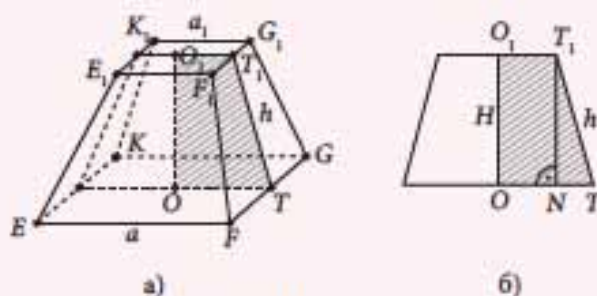
Пример 1

Израчунај површину правилне четвороугаоне зарубљене пирамиде са основним ивицама 18 cm и 8 cm и висином 12 cm.

Решење:

Дато је да су дужине страница основа зарубљене пирамиде $a = 18$ cm и $a_1 = 8$ cm, а њена висина је $H = 12$ cm (цртеж 2). Будући да су основе зарубљене пирамиде квадрати, за њихове површине добијамо:

$$B = a^2 = 18^2 = 324 \text{ cm}^2, \quad B_1 = a_1^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2.$$



Цртеж 2

На цртежу 2, б) приказан је пресек зарубљене пирамиде који пролази кроз пресек дијагонале основа и кроз средине основних ивица. Из правоуглог троугла ΔT_1NT имамо:

$$h^2 = \overline{TT_1}^2 = \overline{TN}^2 + \overline{NT_1}^2 = \left(\frac{a-a_1}{2}\right)^2 + H^2 = \left(\frac{18-8}{2}\right)^2 + 12^2 = 169,$$

одакле добијамо да $h = \sqrt{169} = 13$ cm.

Сва четири бочне стране су једнакокраки трапези са висином h , па зато за површину бочне површине имамо

$$M = 4 \cdot \frac{a+a_1}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{18+8}{2} \cdot 13 = 676 \text{ cm}^2.$$

И на крају, заменом у формулу за површину добијамо

$$P = B + B_1 + M = 324 + 64 + 676 = 1064 \text{ cm}^2.$$

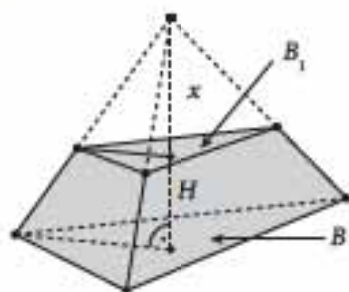
Задатак 1

Основне ивице правилне четвороугаоне зарубљене пирамиде су 26 m и 8 m, а бочна ивица је 15 m. Израчунај површину те пирамиде.

Подсети се!

- Како се израчунава запремина пирамиде?
- Како се односе паралелни пресеци пирамиде?
- Каква је веза између основа зарубљене пирамиде?

Да бисмо одредили формулу за израчунавање запремине зарубљене пирамиде, поступићемо на следећи начин. Нека је дата једна зарубљена пирамида као на цртежу 3, која је допуњена до „целе“ пирамиде. Нека висину допуњеног дела означимо са x .



Цртеж 3

Користећи однос површина паралелних пресека и висина пирамиде, добијамо $B : B_1 = (H + x)^2 : x^2$. Кореновањем обе стране једнакости добијамо

$$\sqrt{B} : \sqrt{B_1} = (H + x) : x,$$

тј.

$$x = \frac{H\sqrt{B_1}}{\sqrt{B} - \sqrt{B_1}} = \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1}.$$

Запремину зарубљене пирамиде добијамо као разлику запремине целе пирамиде и запремине допуњеног дела,

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot (H + x) - \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot H + B \cdot x - B_1 \cdot x] = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot H + (B - B_1) \cdot x].$$

На крају, ако у последњу формулу заменимо добијени израз за x , добијамо:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left[B \cdot H + (B - B_1) \cdot \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1} \right] = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}].$$

Запамти!

Запремина зарубљене пирамиде израчунава се по формули: $V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}]$

Пример 2

Израчунај запремину правилне четвороугаоне зарубљене пирамиде са основним ивицама 30 cm и 15 cm и висином $H = 18$ cm.

Решење:

Основе зарубљене пирамиде су квадрати са страницама $a = 30$ cm и $a_1 = 15$ cm, па су површине основа $B = 30^2 = 900$ cm² и $B_1 = 15^2 = 225$ cm².

Заменом у формулу за запремину зарубљене пирамиде добија се:

$$V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}] = \frac{18}{3} [900 + 225 + \sqrt{900 \cdot 225}] = 9450 \text{ cm}^3.$$

Задатак 2

Израчунај запремину правилне троугаоне зарубљене пирамиде са основним ивицама 10 cm и 5 cm и висином $H = 12$ cm.

Пример 3

Површине основа једне зарубљене пирамиде су 36 cm^2 и 16 cm^2 , а њена висина је 5 cm. Израчунај запремину целе пирамиде и запремину допуњеног дела.

Решење:

Из услова задатка дато је да је $B = 36 \text{ cm}^2$, $B_1 = 16 \text{ cm}^2$ и $H = 5$ cm. Користећи однос површина основа и висина целе пирамиде и допуњене пирамиде, имамо:

$$B : B_1 = (H + x)^2 : x^2,$$

тј.

$$36 : 16 = (5 + x)^2 : x^2.$$

Кореновањем обе стране једнакости добијамо

$$6 : 4 = (5 + x) : x,$$

$$6x = 20 + 4x,$$

тј. $x = 10$ cm. Запремина целе пирамиде је

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 15 = 180 \text{ cm}^3,$$

а запремина допуњеног дела је $V_1 = \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 10 = \frac{160}{3} \text{ cm}^3$.

Задатак 2

Површине основа једне зарубљене пирамиде су 200 dm^2 и 50 dm^2 , а висина целе пирамиде је 24 dm. Израчунај запремину зарубљене пирамиде.

Пример 4

Једна лимена посуда у облику правилне четвороугаоне зарубљене пирамиде, са основним ивицама 20 dm и 10 dm (већа основа је одозго), напуњена је шећером. Целокупна количина шећера продата је за 56 000 денара.

- Колика је запремина посуде ако се зна да је сваки килограм шећера продат за 20 денара и да 1 dm^3 садржи приближно 1 kg шећера?
- Колико је дубока посуда?
- Колико је лима употребљено за израду посуде без поклопца (поклопцем се сматра већа основа)?

Решење:

а) Будући да је укупна количина шећера продата за 56 000 денара, а 1 kg шећера је продат за 20 денара, масу шећера, односно запремину посуде, израчунаћемо као $V = 56000 : 20 = 2800 \text{ kg}$. Пошто 1 dm^3 садржи приближно 1 kg шећера, добијемо $V = 2800 \text{ dm}^3$.

б) услову задатка дато је да је $a = 20 \text{ dm}$, $a_1 = 10 \text{ dm}$, па применом формуле за запремину зарубљене пирамиде $V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}]$ имамо:

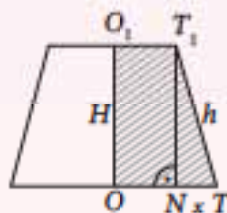
$$2800 = \frac{H}{3} \cdot [20^2 + 10^2 + \sqrt{20^2 \cdot 10^2}],$$

одакле следи да је дубина посуде $H = \frac{3 \cdot 2800}{700} = 12 \text{ dm}$.

в) Будући да је бочна страна једнакокраки трапез (цртеж 4), најпре израчунавамо x , $x = \frac{a - a_1}{2} = \frac{20 - 10}{2} = 5 \text{ dm}$, а затим за висину бочног зида добијемо

$$h^2 = H^2 + x^2 = 12^2 + 5^2 = 169,$$

па добијемо $h = 13 \text{ dm}$.



Цртеж 4

Свака бочна страна је једнакокраки трапез, па за површину целе бочне површине добијемо:

$$M = 4 \cdot \frac{a + a_1}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{20 + 10}{2} \cdot 13 = 780 \text{ dm}^2.$$

Површина доње основе износи $B_1 = 10^2 = 100 \text{ dm}^2$, па је укупна површина зарубљене пирамиде (без поклопца) збир површине мање основе и површине бочне површине, тј.

$$P = B + M = 780 + 100 = 880 \text{ dm}^2.$$

Значи, употребљено је укупно 880 dm^2 лима за израду посуде.

Задатак 3

У једном музеју поставља се декоративни постамент у облику правилне четвороугаоне зарубљене пирамиде. Већа основа је одозго, а мања одоздо. Ивица горње основе је $a = 18 \text{ dm}$, а ивица доње основе је $a_1 = 6 \text{ dm}$. Унутрашњост постамента потпуно се испуњава бетоном. Познато је да је за 1 dm^3 бетона потребна маса од $2,4 \text{ kg}$, а укупна маса бетона износи $3\,600 \text{ kg}$.

а) Израчунај запремину постамента.

б) Одреди висину постамента.

в) Колика је површина материјала потребног за облагање постамента ако се доња основа не облаже?

Задаци за вежбање!

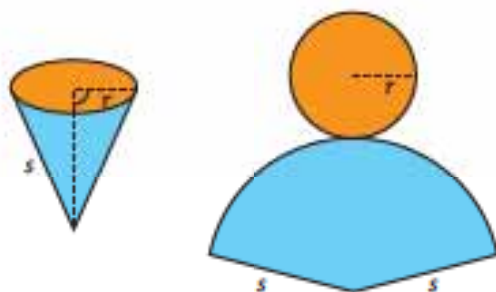
1. Израчунај површину правилне четвороугаоне зарубљене пирамиде са основним ивицама 30 cm и 20 cm и висином 12 cm.
2. Израчунај површину правилне четвороугаоне зарубљене пирамиде са основним ивицама 18 cm и 10 cm и бочним зидом који је нагнут према већој основи под углом од 45° .
3. Одреди површину бочне површине правилне шестоугаоне зарубљене пирамиде са основним ивицама 12 cm и 6 cm и висином 2 cm.
4. Израчунај запремину зарубљене пирамиде ако су површине основа 162 cm^2 и 72 cm^2 , а висина одговарајуће целе пирамиде износи 18 cm.
5. Висина троугаоне зарубљене пирамиде је 6 cm. Ивице једне основе су 5 cm, 12 cm и 13 cm, а обим друге основе је 15 cm. Израчунај запремину зарубљене пирамиде.
6. За изградњу бетонског темеља за стуб користи се темељ у облику зарубљене правилне четвороугаоне пирамиде са ивицама основа 6 m и 2 m и висином 3 m. Цена 1 m^3 бетона износи 100 евра, а планирана је резерва бетона од 10 %.
 - а) Која количина бетона ће се употребити за изградњу темеља?
 - б) Коју количину бетона треба укупно обезбедити?
 - в) Колико ће укупно коштати изградња бетонског темеља?

6.8 ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА КУПЕ

Подсети се!

- Шта је кружни исечак који одговара централном углу α у кружници полупречника s ?
- Дужина лука кружног исечка одређеног централним углом α у кружници полупречника s израчунава се по формули $l = \frac{s\pi\alpha}{180^\circ}$.
- Површина кружног исечка одређеног централним углом α у кружници полупречника s израчунава се по формули $P = \frac{s^2\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{s\pi\alpha}{180^\circ} \cdot \frac{s}{2} = \frac{l \cdot s}{2}$, где је l дужина лука који одговара исечку.

Да бисмо одредили површину купе са полупречником основе r и изводницом s , купу развијамо као на цртежу 1.



Цртеж 1

Основа купе је круг полупречника r , па је површина основе $B = r^2\pi$.

Бочна површина купе је кружни исечак круга полупречника s , чији одговарајући лук има дужину једнаку дужини обима основе купе, тј. $l = 2\pi r$. Отуда је површина бочне површине купе

$$M = \frac{l \cdot s}{2} = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi rs.$$

Запамти!

Површина P купе је збир површине основе B и бочне површине M

$$P = \pi r^2 + \pi rs, \text{ т.е. } P = \pi r(r + s).$$

Пример 1

Израчунај површину купе са висином $H = 24$ cm и изводницом $s = 26$ cm.

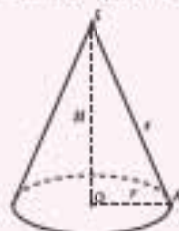
Решење:

Применом Питагорине теореме на правоугли троугао $\triangle AOS$ имамо:

$$r^2 = s^2 - H^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100,$$

па добијамо да је полупречник $r = 10$ cm. Сада, заменом вредности за s и r у формулу за површину купе добијамо:

$$P = \pi(r + s) = \pi \cdot 10 \cdot (10 + 26) = 360\pi \text{ cm}^2.$$



Цртеж 2

Задатак 1

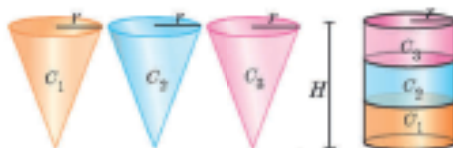
Израчунај површину купе са висином 21 cm и обимом основе 56π cm.

Подсети се!

- Која је формула за израчунавање запремине ваљка?
- Који део запремине призме је испуњен запремином пирамиде ако призма и пирамида имају једнаке основе и једнаке висине?

Да бисмо одредили формулу за запремину купе, размотрићемо три једнака купе са полупречником основе r и висином H . Претпоставимо да су они напуњени песком. Ако се песак из три купе узастопно пресипа у цилиндар са истим полупречником основе r и истом висином H , приметимо да се цилиндар напуни тачно до врха, без остатка (цртеж 3). Отуда закључујемо да је запремина једног купе једнака једној трећини запремине цилиндра са истим полупречником основе и истом висином, тј.

$$V_{\text{купе}} = \frac{1}{3} V_{\text{цилиндар}} = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$



Цртеж 3

Запамти!

Запремина купе са полупречником основе r и висином H израчунава се по формули:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$

Пример 2

Израчунај запремину купе са полупречником основе 8 cm и површином бочне површине 136π cm². Решење проверити коришћењем GeoGebra.

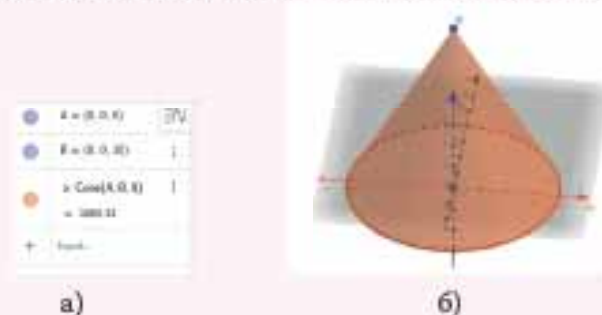
Решење:

Из формуле за површину бочне површине $M = \pi rs$, имамо $136\pi = \pi \cdot 8 \cdot s$, па следи $s = \frac{136}{8} = 17$ cm. Из Питагорине теореме, висину H можемо изразити као $H^2 = s^2 - r^2$ (цртеж 2).

Заменом вредности за r и s добијамо $H^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$, т.е. $H = 15$ cm. На крају, користећи формулу за запремину купе, добијамо

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 320\pi \text{ cm}^3.$$

Решење ћемо проверити коришћењем GeoGebra. У поље за унос („Input Bar“) уносимо тачку $A(0, 0, 0)$, која представља центар основе купе, и тачку $B(0, 0, 15)$, која представља врх купе и налази се на висини 15 јединица изнад основе. На крају уносимо $\text{Cone}(A, B, 8)$ (слика 1, а)). Притиском на дугме „Enter“ нацртаће се права кружна купа са полупречником 8 cm и висином 15 cm (слика 1, б)), а у пољу за унос аутоматски ће се приказати запремина купе (слика 1, а)).



Слика 1

Задатак 2

Израчунај запремину једнакостраничне купе са површином 108π cm².

Пример 3

Израчунај површину и запремину купе чија је изводница за 2 cm већа од висине, а пречник основе износи 12 cm.

Решење:

Из услова задатка дато је да је $s = H + 2$ и $d = 12$ cm, па је полупречник основе

$$r = 12 : 2 = 6 \text{ cm}.$$

Сада заменом у формулу $s^2 = H^2 + r^2$ и имамо $(H + 2)^2 = H^2 + 6^2$, т.е.

$$\begin{aligned} H^2 + 4H + 4 &= H^2 + 36, \\ 4H &= 32, \end{aligned}$$

па је висина $H = 8$ cm.

За изводницу добијамо $s = 8 + 2 = 10$ cm.

Заменом у формуле за површину и запремину купе добијамо:

$$P = \pi r(r + s) = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 10) = 96\pi \text{ cm}^2 \quad \text{и} \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \text{ cm}^3.$$

Пример 4

Колико кубних метара има једна копа сена у облику купе ако је обим основе 37,68 m, а изводница 10 m.

Решење:

Дато је да је обим основе $l = 37,68$ m и изводница $s = 10$ m, па из формуле за обим круга имамо $2\pi r = 37,68$. Отуда се за полупречник основе добија:

$$r = \frac{37,68}{2\pi} = \frac{37,68}{6,28} = 6 \text{ m}.$$

Надаље, из формуле $s^2 = H^2 + r^2$ имамо $H^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, па $H = 8$ m.

Запремину купе добијамо $V = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \approx 301 \text{ m}^3$, значи, копа има приближно 301 m^3 сена.

Задатак 3

У једној башти формира се гомила сувог песка (за игралиште) у облику купе. Обим кружне основе је $l = 31,4$ m, изводница купе је $s = 8$ m, а густина песка је $\rho = 1,6 \text{ t/m}^3$.

- Колико кубних метара песка има у гомили?
- Колика је укупна маса песка у тонама?

Задаци за вежбање!

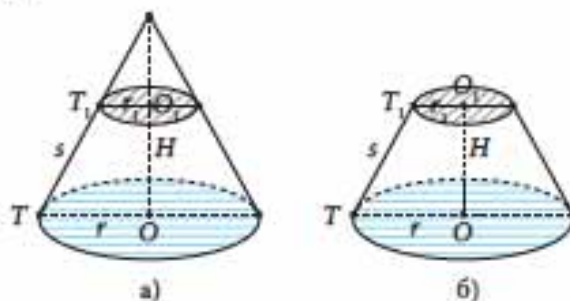
- У ком односу су запремине два купе са једнаким висинама ако су пречници њихових основа 40 cm и 1 m, редом? Резултат проверити у GeoGebri, ако је висина купе $H = 20$ cm.
- Правоугли троугао са катетама 30 cm и 40 cm ротира око хипотенузе. Одреди површину и запремину тако добијеног тела.
- Однос полупречника и висине код правог купе је $2 : 3$, а бочна површина износи $8\pi\sqrt{13} \text{ cm}^2$. Израчунај запремину тог купе.
- Из посуде која садржи 5 l воде пуне се чаше у облику купе са полупречником 4 cm и изводницом 4 cm. Колико целих чаша може да се напуни?
- Израчунај колико кошта платно којим је покривен шатор у облику купе, са висином 4 m и обимом основе 18,84 m, ако 1 m^2 платна кошта 150 динара?
- Колико петотонских камиона је потребно за превоз 15 једнаких гомила песка у облику купе са обимом основе 12 m и висином сваке гомиле 9 m? Маса 1 m^3 песка износи 1,5 t.

6.9 ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА ЗАРУБЉЕНЕ КУПЕ

Подсети се!

- Шта је паралелни, а шта осни пресек купе?
- Шта је једнакостранична купа?
- Какав је сваки осни пресек зарубљене купе?

На цртежу 1, а) приказана је купа и један њен паралелни пресек, док је на цртежу 1, б) посебно приказан део између основе и пресека.

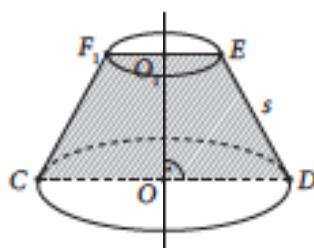


Цртеж 1

Запамти!

- Део купе који се налази између основе и једног паралелног пресека купе назива се **зарубљена купа**.
- Основа и паралелни пресек купе називају се **основе** зарубљене купе, док се дуж чије су крајње тачке центри основа назива **оса** зарубљене купе.
- Растојање између основа назива се **висина**, а део изводнице купе који се налази између основа назива се **генератриса** или **изводница зарубљене купе**.

Такође, зарубљена купа може се добити и ротацијом правоуглог трапеза око краћег крака (трапез $ODEO_1$ на цртежу 2) или ротацијом једнакокраког трапеза око његове осе симетрије (трапез $CDEF$ на цртежу 2).



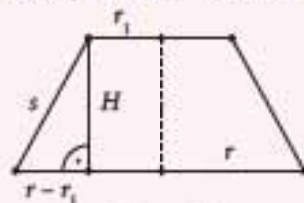
Цртеж 2

Пример 1

Израчунај полупречник мање основе зарубљене купе ако је његова висина 10 cm, полупречник веће основе 8 cm, а површина осног пресека 130 cm^2 .

Решење:

Дато је да је $H = 10 \text{ cm}$, $r = 8 \text{ cm}$ и $Q = 130 \text{ cm}^2$. Осни пресек је једнакокраки трапез (цртеж 3) са основицама $2r$ и $2r_1$. Из формуле за површину једнакокраког трапеза $Q = \frac{2r+2r_1}{2} \cdot H = (r+r_1) \cdot H$, добијамо да $r+r_1 = \frac{Q}{H}$. Отуда је полупречник мање основе $r_1 = \frac{Q}{H} - r = \frac{130}{10} - 8 = 5 \text{ cm}$.



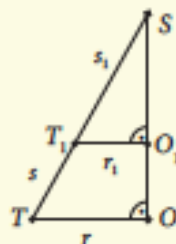
Цртеж 3

Задатак 1

Полупречници основа једног зарубљене купе су 13 cm и 8 cm, а његова изводница износи 13 cm. Израчунај површину осног пресека зарубљене купе.

Подсети се!

- Која су два троугла на цртежу 4 слична?
- У каквом су односу одговарајуће странице сличних троуглова?



Цртеж 4

Запамти!

Површина зарубљене купе једнака је збиру површина основа и површине бочне површине: $P = B + B_1 + M$, где су $B = \pi r^2$, $B_1 = \pi r_1^2$ површине основа, а M је површина бочне површине.

Бочна површина зарубљене купе израчунава се као разлика између бочне површине целе купе и бочне површине допуњеног дела (до целе купе). Према цртежу 4, добијамо:

$$M = \pi \cdot r \cdot \overline{ST} - \pi \cdot r_1 \cdot \overline{ST_1} = \pi \cdot r \cdot (s + s_1) - \pi \cdot r_1 \cdot s_1 = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r \cdot s_1 - \pi \cdot r_1 \cdot s_1,$$

тј.

$$M = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot (r - r_1) \cdot s_1$$

У овим формулама s је изводница зарубљене купе, а $s + s_1$ је изводница целе купе.

Будући да су троуглови SOT и SO_1T_1 слични, следи да су њихове одговарајуће странице пропорционалне, па $\frac{r}{r_1} = \frac{s_1 + s}{s_1}$. Добијамо да $s_1 = \frac{s \cdot r_1}{r - r_1}$. Заменом s_1 у последњој једнакости за M , добија

$$M = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot (r - r_1) \cdot \frac{s \cdot r_1}{r - r_1} = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r_1 \cdot s = \pi \cdot s \cdot (r + r_1).$$

Запамти!

Површина зарубљене купе са полупречницима основа r и r_1 и изводницом s израчунава се по формули:

$$P = \pi r^2 + \pi r_1^2 + \pi \cdot s \cdot (r + r_1),$$

тј.

$$P = \pi(r^2 + r_1^2 + s \cdot (r + r_1)).$$

Пример 2

Зарубљена купа која се добија ротацијом једнакокраког трапеза око осе симетрије има пречнике основа 18 cm и 8 cm и висину 12 cm. Израчунај површину те зарубљене купе.

Решење:

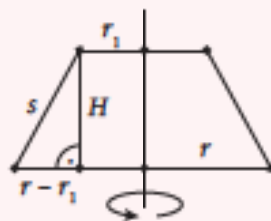
Дато је да су пречници основа 18 cm и 8 cm, па су полупречници основа ове зарубљене купе

$r = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}$ и $r_1 = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$. Од правоуглог троугла на цртежу 5 налазимо

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}.$$

Заменом у формулу за површину добијамо:

$$P = \pi (9^2 + 4^2 + 13 \cdot (9 + 4)) = 266\pi \text{ cm}^2.$$



Цртеж 5

Задатак 2

Израчунај бочну површину и површину зарубљеног купа чији су полупречници основа 12 cm и 6 cm, а изводница 8 cm.

Пример 3

Израчунај површину зарубљене купе са висином 15 cm и полупречницима основа 28 cm и 8 cm.

Решење:

У услову задатка дато је: $H = 15$ cm, $r = 28$ cm и $r_1 = 8$ cm.

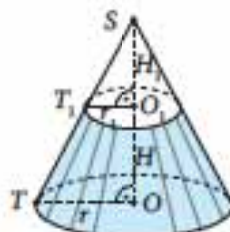
Из правоуглог троугла на цртежу 5 добијамо

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{(28 - 8)^2 + 15^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ cm}.$$

Заменом у формулу за површину добијамо:

$$P = \pi(r^2 + r_1^2 + s \cdot (r + r_1)) = \pi(28^2 + 8^2 + 25 \cdot (28 + 8)) = 1748\pi \text{ cm}^2.$$

Запремину зарубљене купе одредићемо као разлику запремине целе купе и запремине допуњеног дела (цртеж 6).



Цртеж 6

Према формулама за запремину купе имамо

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \overline{SO} - \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot \overline{SO_1} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot (H + H_1) - \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot H_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi (r^2 - r_1^2) H_1.$$

У последњој формули H је висина зарубљене купе, а $H + H_1$ је висина целе купе (заједно са допуњеним делом).

У наставку ћемо изразити висину H_1 допуњеног дела купе преко r , r_1 и H . Из сличности троуглова

$\triangle SOT$ и $\triangle SO_1T_1$ имамо: $\frac{r}{r_1} = \frac{H + H_1}{H_1}$, одакле имамо да $H_1 = \frac{r_1 H}{r - r_1}$. Заменом H_1 у формулу за запремину

она добија следећи облик

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi (r - r_1)(r + r_1) \frac{r_1 H}{r - r_1} = \frac{H \pi}{3} (r^2 + r_1^2 + r r_1).$$

Запамти!

Запремина зарубљене купе са полупречницима основа r и r_1 и висином H одређује се по формули:

$$V = \frac{H \pi}{3} (r^2 + r_1^2 + r r_1).$$

Пример 4

Саксија за цвеће има облик зарубљене купе са висином 12 cm и полупречницима основа 15 cm и 10 cm.

- Колико земље може да стане у саксију?
- Израчунај бочну површину саксије.

Решење:

У услову задатка дате су вредности $H = 12$ cm, $r = 15$ cm и $r_1 = 10$ cm.

- Заменом у формулу добијамо $V = \frac{12\pi}{3}(15^2 + 10^2 + 15 \cdot 10) = 1900\pi$ cm³.

Значи, у саксију може да стане 1900π cm³ ≈ 6000 cm³ односно 6 dm³ земље.

- Са цртежа 5 за изводницу имамо $s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm, па за бочну површину добијамо:

$$M = \pi \cdot s \cdot (r + r_1) = \pi \cdot 13 \cdot (15 + 10) = 325\pi$$
 cm².

Пример 5

Једна канта направљена од лима има облик зарубљене купе са пречницима основа 20 cm и 36 cm и висином 28 cm.

- Колико литара воде може да стане у канту?
- Колико квадратних метара лима је набављено за израду 40 таквих канти ако се зна да је 10% употребљеног лима отпад?

Решење:

- Дати су следећи подаци: $d = 20$ cm, $d_1 = 36$ cm и $H = 28$ cm. За полупречнике основа добијамо $r = 10$ cm и $r_1 = 18$ cm. Да би се израчунало колико литара воде може да стане у канту, потребно је израчунати запремину зарубљеног купа. Заменом у формулу за запремину добијамо:

$$V = \frac{28\pi}{3}(10^2 + 18^2 + 10 \cdot 18) = 5637,33\pi$$
 cm³ $\approx 17701,23$ cm³ $= 17,7$ dm³ $= 17,7$ l.

Значи, канта може да прими приближно 17,7 литара воде.

- Да бисмо израчунали површину канте, најпре треба да одредимо дужину изводнице s :

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{8^2 + 28^2} = 29,1$$
 cm.

Затим треба да одредимо површину канте без горње основе. Треба напоменути да се код канте већа основа налази са горње стране, па ће тражена површина бити:

$$\begin{aligned} P &= B + M = \pi r^2 + \pi \cdot s \cdot (r + r_1) = \pi \cdot (10^2 + 29,1 \cdot (10 + 18)) = \\ &= 914,8\pi$$
 cm² $= 2872,5$ cm² $\approx 0,287$ m².

За 40 канти потребно је $40 \cdot 0,287$ m² $= 11,5$ m² лима. Укупна количина набављеног лима, заједно са отпадом, износи $11,5 / 0,9 \approx 12,8$ m².

Задатак 3

У фабрици за хемијске производе користи се метални резервоар у облику зарубљене купе, која је отворена са горње стране. Горњи пречник је 2,4 m, доњи пречник је 3,6 m, а висина резервоара је 2 m.

- Израчунај колика је запремина течности која може да се складишти у резервоару.
- Колика је унутрашња бочна површина коју треба обложити заштитним слојем?
- Ако 1 m^2 заштитног слоја кошта 18 евра, колика је укупна цена облагања?

Задаци за вежбање!

- Израчунај површину зарубљене купе са полупречницима основа 10 cm и 6 cm ако је висина допуњеног дела купа 12 cm.
- Једнакокраки трапез са основицама 50 cm и 30 cm и површином 960 cm^2 ротира око своје осе симетрије. Израчунај површину и запремину добијеног тела.
- Израчунај површину зарубљене купе која се добија ротацијом око мањег крака правоуглог трапеза са основицама 22 cm и 14 cm и мањим краком 15 cm.
- Полупречници основа једне зарубљене купе односе се као 5 : 3. Израчунај површину и запремину ако је дато да висина зарубљене купе износи 12 cm, а површина веће основе $100\pi \text{ cm}^2$.
- Одреди полупречник цилиндра који има једнаку висину и једнаку бочну површину као зарубљена купа са полупречницима основа 10 dm и 4 dm и изводницом 10 dm.
- У једној башти планирано је да се изради бетонска жардињера за цвеће у облику зарубљене купе, која ће примити $4961,2 \text{ cm}^3$ земље. Колика ће бити висина жардињере ако су полупречници њених основа 14 cm и 6 cm.

6.10 ПОВРШИНА СФЕРЕ И ДЕЛОВИ СФЕРЕ

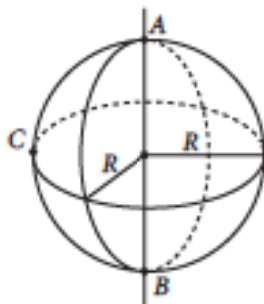
Подсети се!

Како се назива скуп свих тачака у равни које се налазе на једнаком растојању од једне тачке?

Запамти!

- Скуп свих тачака у простору које се налазе на датом растојању R од дате тачке O назива се **сфера** и означава се са $S(O, R)$. Тачка O назива се **центар** сфере.
- Дуж чије су крајње тачке центар сфере и било која тачка сфере назива се **полупречник** сфере и означава се са R .
- **Тетива** се назива дуж чије су крајње тачке било које две тачке сфере.
- Тетива која пролази кроз центар сфере назива се **пречник** сфере.

Уочи да је сфера ротациона површ која се добија ротацијом полукружнице око њеног пречника (цртеж 1).



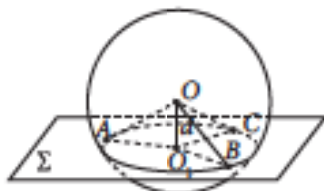
Цртеж 1

Нормално растојање d од центра O сфере до дате равни Σ назива се **централно растојање** сфере и равни.

Ако је $d > R$, тада сфера и раван немају заједничких тачака.

Ако је $d = R$, тада сфера и раван имају једну заједничку тачку, па у том случају раван додирује сферу и назива се **тангентна раван**.

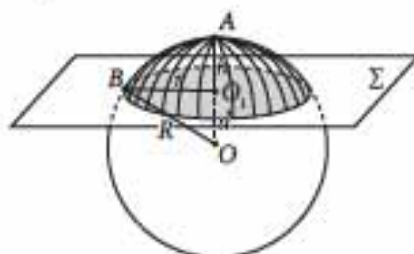
Ако је $d < R$, тада раван сече сферу, при чему је пресек кружница (цртеж 2).



Цртеж 2

Ако раван пролази кроз центар сфере, тада је пресек равни и сфере кружница чији је полупречник једнак полупречнику сфере. Та кружница је највећа кружница која се може добити као пресек сфере и равни и дели сферу на две полусфере. Такве кружнице називамо **велике кружнице сфере**.

Ако раван Σ сече сферу, а не пролази кроз њен центар, тада је сфера подељена на два неједнака дела, од којих се сваки назива сферна калота. По договору, калотом се сматра мањи део сфере, при чему калота има своју висину h (цртеж 3).



Цртеж 3

Пример 1

Одреди висину калоте која се добија када се сфера пресече равни на растојању од 12 cm од центра, а обим пресечне кружнице износи 10π cm.

Решење:

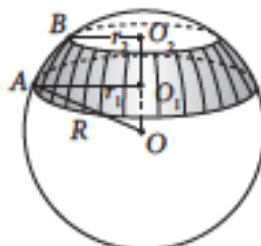
Из формуле за обим кружнице имамо $L = 2\pi r$, одакле, заменом добијамо $2\pi = 10\pi$ и $r = 5$ cm, па је $d = \overline{OO_1}$, а полупречник је $r = \overline{O_1B}$, па из правоуглог троугла $\triangle OO_1B$ добијамо $R^2 = 12^2 + 5^2$, па кореновањем добијамо да је полупречник сфере $R = 13$ cm.

Висина калоте износи $h = \overline{OA} - d = R - d = 13 - 12 = 1$ cm.

Део сфере који се налази између два међусобно паралелна пресека назива се **сферни појас** или само **појас** (цртеж 4).

Растојање између два паралелна пресека представља **висину појаса**. На цртежу 4, висина појаса је дужина дужи $\overline{O_1O_2}$ тј. $h = \overline{O_1O_2}$.

Ако $d_1 = \overline{OO_1}$ и $d_2 = \overline{OO_2}$ у централна растојања пресека, тада је $h = d_2 - d_1$ ако су пресеци са исте стране у односу на центар, а $h = d_1 + d_2$ ако су пресеци са различитих страна у односу на центар.



Цртеж 4

Задатак 1

Сфера је пресечена равни која се налази на растојању 15 cm од центра сфере. Висина добијене калоте износи 10 cm. Одреди обим пресечне кружнице.

Активност 1

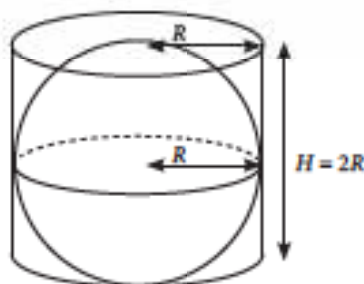
Потребни су мала лопта (на пример, лоптица за стони тенис) и папирна трака или танак папир. Папирном траком обавијте лопту по највећој кружници (екватору).

- Измерите дужину траке – то је приближно обим $2\pi R$.
- Припремите правоугаоник од папира са:
 - ширином једнаком измереном обиму
 - висином приближно једнаком пречнику лопте $2R$.
- Правоугаоник, савијен око лопте, представља бочну површину цилиндра око сфере.

Одредите везу између површине сфере и површине бочне површине ваљка.

Плоштина сфере

Нека је дата сфера са полупречником R . Око ње опишимо цилиндар са полупречником основе R и висином $H = 2R$. Сфера додирује цилиндар у горњој и доњој основи и по једној великој кружници (цртеж 5).



Цртеж 5

При извођењу формуле за површину сфере користићемо Архимедов резултат, који је доказао да:

Површина сфере једнака је бочној површини цилиндра описаног око ње.

Према томе, одређивање површине сфере своди се на одређивање површине бочне површине цилиндра који смо описали око сфере (цртеж 5), а та површина је

$$M = 2\pi R \cdot H = 2\pi R \cdot 2 \cdot R = 4\pi R^2.$$

Запамти!

Површина сфере са полупречником r је $P_{\text{сфера}} = 4\pi R^2$.

Површина сфере са полупречником R је 4 пута већа од површине круга са полупречником R .

Пример 2

Полупречник једне сфере $R = 7$ cm. Израчунај површину сфере.

Решење:

Применом формуле добијамо да је површина сфере

$$P_{\text{сфера}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 7^2 = 196\pi \text{ cm}^2.$$

Задатак 2

Метална сфера има површину $324\pi \text{ cm}^2$. Одреди полупречник сфере.

Површина калоте

Нека је R полупречник сфере, а h висина калоте. За одређивање површине ове калоте поново користимо Архимедов резултат, који је показао да:

Површина калоте са полупречником R и висином h једнака је површини бочне површине цилиндра са полупречником R и висином h .

Ово је, заправо, иста идеја коју користимо при одређивању површине целе сфере, али се у овом случају тражи површина само „дела“ сфере. Површина бочне површине цилиндра са полупречником R и висином h је

$$M = 2\pi R \cdot h.$$

Према Архимедовом резултату, истом формулом одређује се и површина калоте.

Запамти!

Површина калоте висине h на сфери полупречника R одређује се по формули:

$$P_{\text{калота}} = 2\pi R \cdot h.$$

Формула не зависи од полупречника кружнице пресека сфере са равни којом је формирана калота.

Пример 3

Сферна калота има површину $40\pi \text{ dm}^2$. Полупречник сфере је $R = 5 \text{ dm}$. Одреди висину калоте.

Решење:

Из формуле за површину калоте $P_{\text{калота}} = 2\pi R \cdot h$ добија се $h = \frac{P_{\text{калота}}}{2\pi R} = \frac{40\pi}{2\pi \cdot 5} = 4 \text{ dm}$.

Задатак 3

Сфера има полупречник $R = 10$ cm. Равни пресечена је калота висине $h = 3$ cm. Израчунај површину калоте.

Површина појаса на сфери

Нека је полупречник сфере R , а висина појаса h , и нека је појас формиран са две паралелне равни које се налазе са исте стране центра. Сваки овако формиран појас може се посматрати као разлика две сферне калоте. Нека калоте имају висине h_1 и h_2 ($h_1 < h_2$), при чему је $h = h_2 - h_1$.

Површине две калоте су

$$P_1 = 2\pi R \cdot h_1 \text{ и } P_2 = 2\pi R \cdot h_2.$$

Површина појаса одређује се као разлика ових двеју површина:

$$P_{\text{појас}} = P_2 - P_1 = 2\pi R \cdot h_2 - 2\pi R \cdot h_1 = 2\pi R (h_2 - h_1) = 2\pi R h.$$

Иста формула за израчунавање површине појаса добија се и ако је појас формиран са две паралелне равни које се налазе са различитих страна центра.

Запамти!

Површина појаса висине h у сфери полупречника R одређује се по формули:

$$P_{\text{појас}} = 2\pi R \cdot h.$$

Поређењем претходне две формуле за површину калоте и појаса може се закључити да, ако калота и појас на једној сфери имају исту висину, онда имају и једнаке површине. Та површина зависи само од R и h , а не и од њиховог положаја на сфери.

Пример 4

Површина једног сферног појаса износи $36\pi \text{ dm}^2$. Полупречник сфере је $R = 6 \text{ dm}$.

- Одреди висину појаса.
- Упореди површину појаса са површином целе сфере.

Решење:

- Из формуле за површину појаса $P_{\text{појас}} = 2\pi R h$ можемо да изразимо висину појаса:

$$h = \frac{P_{\text{појас}}}{2\pi R} = \frac{36\pi}{2\pi \cdot 6} = 3 \text{ dm}.$$

- Површина сфере је :

$$P_{\text{сфера}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi \text{ dm}^2.$$

Ако упоредимо ове две површине, добијамо:

$$\frac{P_{\text{појас}}}{P_{\text{сфера}}} = \frac{36\pi}{144\pi} = \frac{1}{4}.$$

тј.

$$P_{\text{сфера}} = 4 \cdot P_{\text{појас}}.$$

Пример 5

Изračунај површину сферног појаса који је добијен када су са различитих страна у односу на центар сфере конструисана два паралелна пресека са полупречницима 12 cm и 16 cm. Растојање између пресека износи 28 cm.

Решење:

Из услова задатка имамо да је висина појаса $h = 28$ cm, а полупречници основа су $r = 16$ cm и $r_1 = 12$ cm. Потребно је одредити полупречник R сфере, како би се површина појаса могла израчунати по формули $P = 2R\pi h$.

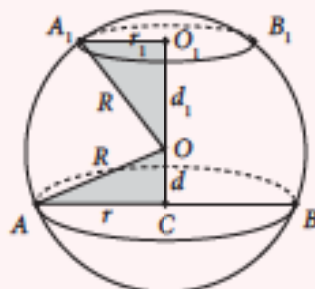
Нека је растојање од центра сфере O до једног пресека d , а растојање од O до другог пресека d_1 . Тада је висина појаса $h = d + d_1$, т.е. $d + d_1 = 28$ и $d_1 = 28 - d$. Посматрамо правоугле троуглове $\triangle OO_1A_1$ и $\triangle OCA$ на цртежу 6. Из њих добијамо једнакости $R^2 = d_1^2 + r_1^2$ и $R^2 = d^2 + r^2$. Изједначавањем ових једнакости добијамо $d^2 + r^2 = d_1^2 + r_1^2$. Ако у једнакости заменимо $r = 16$ cm, $r_1 = 12$ cm и $d_1 = 28 - d$, добија се једначина по d следећег облика:

$$d^2 + 16^2 = (28 - d)^2 + 12^2.$$

Њеним решавањем добијамо:

$$\begin{aligned} d^2 + 256 &= 784 - 56d + d^2 + 144, \\ 56d &= 672, \end{aligned}$$

односно $d = 12$ cm. Према томе, за полупречник сфере добијамо $R = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$ cm, док за површину сферног појаса имамо $P = 2R\pi h = 2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot 28 = 1120\pi$ cm².



Цртеж 6

Задатак 4

Површина сферног појаса, који је ограничен са два паралелна пресека са различитих страна центра сфере, износи 1750π cm². Одреди висину појаса ако су полупречници пресека 15 cm и 20 cm.

Задатак 5

Истражи колико приближно износи ширина озонског омотача око Земље и израчунај приближну укупну површину овог озонског појаса. Зашто је овај појас важан за живот на Земљи?

Задаци за вежбање!

1. Израчунај површину сфере са полупречником 7 cm.
2. Сфера са полупречником 5 cm пресечена је равни, при чему је добијена калота висине 4 cm. Израчунај површину калоте.
3. Једна спортска арена има облик куполе (калоте) добијене од сфере са полупречником 12 m. Одреди висину спортске арене ако се зна да она има површину $100\pi \text{ m}^2$.
4. Израчунај површину сферног појаса који је добијен када су са различитих страна у односу на центар једне сфере конструисана два паралелна пресека са полупречницима 7 cm и 15 cm. Растојање између пресека износи 44 cm.
5. Висина једне калоте је 5 cm, а полупречник њене основе је 15 cm. Одреди растојање пресека од центра сфере.

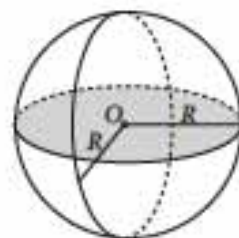
6.11 ЗАПРЕМИНА СФЕРЕ И ЊЕНИХ ДЕЛОВА

Подсети се!

Која 3Д-форма се добија со ротацију кружнице око њеног пречника?

Део простора ограничен једном сфером назива се лопта. Центар и полупречник сфере су, редом, центар и полупречник лопте. Ако раван пролази кроз центар лопте, тада је лопта подељена на два складна дела који се називају полулопте, а пресек се назива велики **круж** лопте.

На цртежу 1 приказана је скица лопте са њена три главна круга, који припадају трима међусобно нормалним равнима.



Цртеж 1

Запамти!

- Пресек лопте са равни је круг.
- Лопта је ротациона 3Д-форма која се добија ротацијом полукруга око његовог пречника.

Пример 1

Једна лопта је пресечена са две паралелне равни које се налазе са различитих страна центра. Пречници пресека су 30 cm и 18 cm, а растојање између њих износи 24 cm. Одреди површину великог круга.

Решење:

Према подацима из задатка и цртежу 2, имамо:

$$\overline{O_1B} = r_1 = 30 : 2 = 15 \text{ cm}, \quad \overline{O_2A} = r_2 = 18 : 2 = 9 \text{ cm}, \quad \overline{OO_1} = d_1,$$

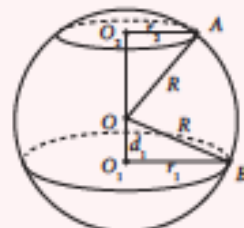
$\overline{OO_2} = 24 - d_1$. Из троугла $\triangle OO_1B$ следи да $R^2 = d_1^2 + 15^2$, а из $\triangle OO_2A$ имамо $R^2 = (24 - d_1)^2 + 9^2$. Изједначавањем последње две једнакости добијамо

$$d_1^2 + 15^2 = (24 - d_1)^2 + 9^2,$$

$$d_1^2 + 225 = 576 - 48d_1 + d_1^2 + 81,$$

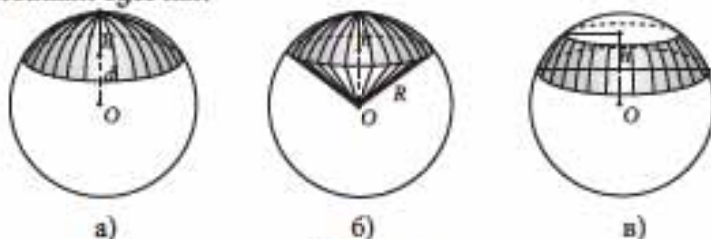
$$48d_1 = 432,$$

одакле добијамо да је $d_1 = 9$ cm. За полупречник великог круга добијамо $R = \sqrt{9^2 + 15^2} = \sqrt{306}$ cm, а за површину великог круга имамо $P = R^2\pi = 306\pi$ cm².



Цртеж 2

Свака равна која не пролази кроз центар лопте дели лопту на два неједнака дела, од којих се сваки назива *сегмент* или *лоптин одсечак*.



Цртеж 3

- Лоптин одсечак ограничен је калотом и кругом. Висина калоте једнака је висини лоптиног одсечка (цртеж 3, а).
- Део лопте који се састоји од лоптиног одсечка и купе чија је основа основа лоптиног одсечка, а врх је центар лопте, назива се *лоптин исечак* или *сектор* (цртеж 3 б).
- Део лопте који се налази између два паралелна пресека назива се *лоптин слој*. Границе лоптиног слоја чине два круга и сферни појас (цртеж 3 в).

Пример 2

Површина основе лоптиног одсечка је $49\pi \text{ cm}^2$, а лук основ пресека одсечка има централни угао од 60° . Одреди полупречник лопте и висину одсечка.

Решење:

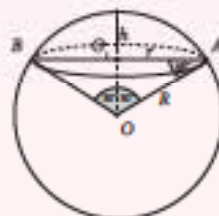
Из формуле за површину круга имамо $r^2\pi = 49\pi$, одакле за полупречник основе лоптиног одсечка добијамо $r = 7 \text{ cm}$. Из услова задатка, угао

$\angle AOB = 60^\circ$, па је $\angle AOO_1 = 30^\circ$ и $\angle OAO_1 = 60^\circ$. Даље, из правоуглог

троугла $\triangle OOO_1A$ имамо $\cos 60^\circ = \frac{r}{R}$, тј. полупречник лопте добијамо је $R = \frac{r}{\cos 60^\circ} = \frac{7}{0,5} = 14 \text{ cm}$.

Слично, $\tan 30^\circ = \frac{r}{OO_1}$, тј. $OO_1 = \frac{r}{\tan 30^\circ} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{21}{\sqrt{3}} = 7\sqrt{3} \text{ cm}$. За висину одсечка добијамо

$$h = R - OO_1 = (14 - 7\sqrt{3}) \text{ cm}.$$



Цртеж 4

У наставку ћемо одредити формулу за израчунавање запремине лопте са полупречником R . И овде поново користимо Архимедов закључак, који је показао да:

Запремина лопте са полупречником R је $\frac{2}{3}$ од запремине цилиндра са истим полупречником основе и висином $2R$.

Запремина цилиндра са полупречником R и висином $H = 2R$ је

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2 \cdot H = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Пошто је запремина лопте једнака двома трећинама запремине цилиндра описаног око ње, добијамо

$$V_{\text{лопта}} = \frac{2}{3} \cdot V_{\text{цил}} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3.$$

Запамти!

Запремина лопте са полупречником R израчунава се по формули:

$$V_{\text{лопта}} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3.$$

Пример 3

Одреди запремину лопте полупречника $R = 6$ cm. Резултат проверити помоћу GeoGebra-е.

Решење:

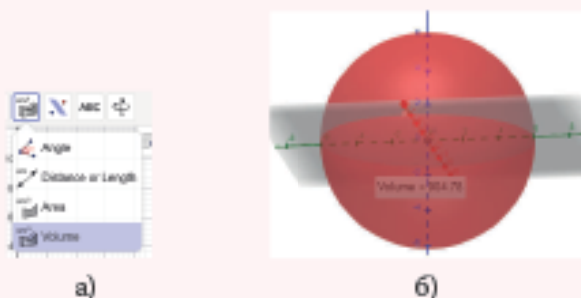
Заменом у формулу коју смо извели добија се $V_{\text{лопта}} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$.

Да би се резултат проверио помоћу GeoGebra-е, поступак је следећи. Најпре кликом изаберемо 3Д-приказ, а затим изаберемо опцију „Sphere: Center & Radius“ (слика 1 а). Потом кликнемо на тачку (0, 0, 0). Отвориће се прозор у којем треба унети полупречник сфере. (слика 1 б).



Слика 1

Затим изаберемо алатку за израчунавање запремине (слика 2 а), па ћемо за сферу добити резултат (слика 2 б). Добија се да је запремина $904,78 \text{ cm}^3$, чиме је потврђен претходно добијени резултат ($288\pi = 904,78$).



Слика 2

Задатак 1

Одреди запремину лопте полупречника 4 dm.

Пример 4

Три тениске лоптице спаковане су у цилиндричну кутију висине 18 cm.

- Одреди запремину једне тениске лоптице.
- Одреди запремину простора у цилиндру који није испуњен тениским лоптицама.

Решење:

- Ако је r полупречник једне тениске лоптице, онда је висина цилиндра једнака збиру пречника три лоптице, тј. $H = 3d = 3 \cdot 2R = 6R$. Отуда имамо $6R = 18$ cm, односно $R = 3$ cm. Будући да су лоптице спаковане у кутију, следи да је и полупречник цилиндра такође, $R_{\text{цилиндр}} = R = 3$ cm.

За запремину једне лоптице, према формули, имамо

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}3^3\pi = 36\pi \text{ cm}^3, \text{ односно, укупна запремина три лоптице}$$

$$V_{\text{л}} = 3 \cdot 36\pi = 108\pi \text{ cm}^3.$$

- Запремина цилиндра је $V_{\text{цилиндр}} = R^2\pi H = 3^2 \cdot \pi \cdot 18 = 162\pi \text{ cm}^3$. Запремина простора у цилиндру који није испуњен тениским лоптицама израчунава се као разлика запремине цилиндра и запремине коју заузимају три лоптице, тј.

$$V = V_{\text{цилиндр}} - V_{\text{л}} = 162\pi - 108\pi = 54\pi \text{ cm}^3.$$



Запамти!

- Запремина сферног одсечка висине h у лопти полупречника R израчунава се по формули

$$V_{\text{т.о.}} = \frac{\pi h}{3}(3R - h).$$

- Запремина сферног исечка висине h у лопти полупречника R израчунава се по формули

$$V_{\text{т.и.}} = \frac{2}{3}R^2\pi h.$$

- Запремина сферног слоја са полупречницима r_1 и r_2 и висином h у лопти полупречника R одређује се по формули

$$V_{\text{т.с.}} = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

Пример 5

Одреди запремину сферног исечка ако је полупречник његове основе $r = 45$ cm, а полупречник лопте $R = 75$ cm.

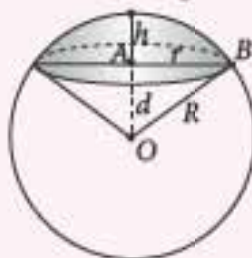
Решење:

Према подацима имамо $R = 75$ cm и $r = 45$ cm. Из $\triangle OAB$ (цртеж 5) имамо

$$d^2 = R^2 - r^2 = 75^2 - 45^2 = 3600,$$

тј. $d = 60$ cm. За висину сферног исечка добијамо $h = R - d = 75 - 60 = 15$ cm. Заменом у формулу

за запремину сферног исечка добијамо $V_{\text{ти}} = \frac{2}{3}R^2\pi h = \frac{2}{3} \cdot 75^2 \cdot \pi \cdot 15 = 56250\pi \text{ cm}^3$.



Цртеж 5

Задатак 2

Једна раван је нормална на пречник лопте и дели пречник на делове дужине 9 cm и 15 cm. Израчунаги запремине добијених делова лопте.

Задатак 3

У процесу индустријске обраде, пуна метална лопта полупречника $r = 20$ cm сече се са две паралелне равни које се налазе на растојањима 5 cm и 3 cm од исте стране центра лопте. Одреди запремину добијеног дела лопте.

Пример 6

Кошарка има приближно савршен облик лопте полупречника 12 cm.

- Израчунаги запремину лопте.
- Израчунаги колико је материјала употребљено за израду лопте.
- Лопта је додатно надувана, при чему се њена запремина повећала за 10%. Колики је нови полупречник лопте?



Решење:

- Заменом $R = 12$ cm у формулу за запремину лопте добијамо

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}12^3\pi = 7234,56\pi \text{ cm}^3.$$

- Да би се израчунало колико је материјала потребно, треба израчунаги површину сфере која одговара датој лопти

$$P = 4R^2\pi = 4 \cdot 12^2 \pi \approx 1809 \text{ cm}^2.$$

- в) Запремина лопте након надувавања је $V = 7234,56 + \frac{7234,56 \cdot 10}{100} = 7958,02 \text{ cm}^3$. Ако ову вредност заменимо у формулу за запремину лопте и ако је нови полупречник лопте R_1 , добијамо $\frac{4}{3}R_1^3 \pi = 7958,02$, одакле имамо $R_1^3 = \frac{3 \cdot 7958,02}{4\pi} \approx 1900,8$.
Отуда је нови полупречник лопте $R_1 \approx 12,39 \text{ cm}$.

Задачи за вежбање!

1. Лопта полупречника $R = 12 \text{ cm}$ пресечена је равни, на растојању од 8 cm од центра. Одреди запремину добијеног сферног исечка.
2. Полупречник лопте је $R = 15 \text{ cm}$, а полупречник кружне основе исечка је $r = 9 \text{ cm}$. Израчунај запремину сферног исечка.
3. Лопта полупречника $R = 21 \text{ cm}$ пресечена је равни, на растојању од 6 cm од центра. Израчунај запремину добијеног сферног одсечка.
4. Лопта полупречника $R = 15 \text{ cm}$ пресечена је са две паралелне равни на растојањима од 5 cm и 7 cm од центра, али са различитих страна у односу на центар. Одреди запремину сферног слоја.
5. Лопта полупречника $R = 18 \text{ cm}$ пресечена је са две паралелне равни на растојањима од 6 cm и 12 cm са исте стране у односу на центар. Одреди запремину добијеног сферног слоја.
6. Површина једне калоте износи $\frac{2}{5}$ површине сфере. Одреди површину калоте и запремину сферног одсечка ако је полупречник њихове заједничке основе $2\sqrt{6} \text{ cm}$.

ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ И УТВРЂИВАЊЕ

1. Израчунај површину правоугаоника чија је једна страница 9 cm, а дијагонала 15 cm. Резултат провери помоћу GeoGebre.
2. Дијагонале правоугаоника заклапају угао од 120° , а свака дијагонала је дужине 16 cm. Израчунај његову површину.
3. Израчунај површину правоугаоника са дијагоном дужине 13 cm ако су дужине његових страница у односу 5 : 12.
4. Соларна плоча је правоугаоног облика, са једном страницом дужине 24 cm и дијагоном дужине 30 cm.
 - а) Израчунај површину плоче.
 - б) Ако се при датом осветљењу из 1 cm^2 добија 0,18 W, колика је приближна снага плоче?
5. Површина паралелограма је 240 cm^2 , његов обим је 64 cm, а растојање између дужих страница је 12 cm. Одреди растојање између краћих страница.
6. Израчунај површину ромба странице дужине 13 cm ако је полупречник уписане кружнице 5 cm.
7. Метална плоча у облику паралелограма уграђује се у кућиште. Растојања између парова паралелних страница су 7 cm и 14 cm. Краћа страница је дужине 10 cm. Колика је дужина дуге странице плоче?
8. Један носач има радну површину у облику паралелограма. Висине су 8 cm и 15 cm, а угао између њих је 30° . Израчунај површину радне површине.
9. Израчунај површину правоуглог троугла са катетом дужине 6 cm и хипотенузом дужине 10 cm. Резултат провери помоћу GeoGebre.
10. Израчунај површину правоуглог троугла са катетом дужине 6 cm и једним углом од 50° .
11. Обим једнакокраког троугла је 64 cm, а разлика дужине крака и основе је 11 cm. Израчунај површину троугла.
12. Сајла дужине 18 m затегнута је тако да са земљом заклапа угао од 40° и придржава врх стуба.
 - а) Колика је висина стуба?
 - б) Колика је хоризонтална удаљеност од подножја стуба до места где је сајла причвршћена за тло?
13. Знак има облик једнакостраничног троугла странице дужине 90 cm.
 - а) Одреди површину знака. Резултат провери помоћу GeoGebre.
 - б) Одреди полу пречник уписане кружнице (место за кружни лого).
 - в) Једну страну знака треба обложити фолијом. Колико кошта облагање ако фолија кошта 2 денара по cm^2 ?
14. Површина једног трапеза је 360 cm^2 , а дужине основа су 30 cm и 15 cm. Израчунај висину трапеза.
15. Правоугли трапез има површину 200 cm^2 , висину 10 cm и једну основу дужине 30 cm. Израчунај дужину друге основе.
16. Платформа има облик једнакокраког трапеза са основама дужине 12 m и 20 m и висином 8 m.
 - а) Израчунај површину платформе.
 - б) Колика је дужина заштитне ограде потребна за оградивање платформе?

17. Декоративна површина у парку има облик делтоида. Дијагонала која је оса симетрије је дужине 18 m, а друга дијагонала је дужине 10 m.
 - а) Израчунај површину површине.
 - б) Ако су за поплочавање потребне 3 плочице по m^2 , колико је укупно плочица потребно?
18. Кружна плоча израђује се од метала. Ако 1 cm^2 метала тежи 0,015 kg, колика је маса плоче полупречника $R = 14\text{ cm}$?
19. ЛЕД трака се поставља дуж кружног лука полупречника $R = 1,2\text{ m}$ и централног угла од 45° . Колика је дужина траке потребна?
20. Полупречник кружнице је $R = 15\text{ cm}$, а растојање тетиве од центра је 9 cm. Израчунај површину кружног одсечка.
21. Површина кружног прстена је $64\pi\text{ cm}^2$, а унутрашњи полупречник је $r = 4\text{ cm}$. Одреди спољашњи полупречник.
22. Правилна троугаона пирамида има страницу основе дужине 12 cm и апотему дужине 10 cm.
 - а) Израчунај површину бочне површине.
 - б) Упореди површину бочне површине са површином основе.
23. Камени споменик има облик пирамиде са квадратном основом странице дужине 5 m и висином 9 m.
 - а) Израчунај запремину споменика.
 - б) Ако је густина камена 2600 kg/m^3 , колика је маса споменика?
24. Стаклени кров има облик праве пирамиде са правоугаоном основом димензија 12 m и 8 m. Апотема бочних страна чија је основа дужине 12 m износи 5 m.
 - а) Израчунај површину стакла (без основе).
 - б) Ако је максимално дозвољена маса крова 2000 kg, да ли се кров може поставити ако 1 m^2 стакла има масу 30 kg?
25. Доња основа зарубљене правилне четворостране пирамиде има страницу дужине 14 cm, горња основа страницу дужине 8 cm, а апотема зарубљене пирамиде је 9 cm. Израчунај бочну површину зарубљене пирамиде.
26. Запремина зарубљене правилне четворостране пирамиде је 1248 cm^3 . Странице основа су дужине 10 cm и 4 cm. Одреди висину зарубљене пирамиде.
27. Посуда за складиштење има облик зарубљене правилне четворостране пирамиде са основама страница дужине 3 m и 1,5 m и висином 2,4 m.
 - а) Колика је запремина посуде?
 - б) Колико литара материјала може да стане у посуду?
28. Код једне купе однос полупречника и висине је $3 : 4$, а запремина је $V = 96\pi\text{ cm}^3$. Израчунај бочну површину купе.
29. Посуда садржи 8 l сока. Сок се сипа у чаше у облику купе полупречника $r = 3\text{ cm}$ и висине $h = 12\text{ cm}$.
 - а) Колико целих чаша може да се напуни?
 - б) Колико сока ће остати неискоришћено?
30. Резервоар за течности има купасто дно полупречника $r = 1,2\text{ m}$ и висине $h = 0,8\text{ m}$.
 - а) Колика је запремина купастог дела?
 - б) Ако се резервоар празни брзином од $0,02\text{ m}^3/\text{min}$, за колико минута ће се испразнити купаста део?

31. Зарубљена купа има полупречнике основа $R = 9 \text{ cm}$ и $r = 3 \text{ cm}$, а висину $h = 10 \text{ cm}$.
- Израчунај запремину.
 - Колика је запремина целе купе од које је добијена зарубљена купа?
32. Две зарубљене праве купе имају једнаке висине и једнаке веће полупречнике, а њихови мањи полупречници су у односу $1 : 2$. У ком односу су њихове запремине?
33. Светларник има облик зарубљене купе са полупречницима $2,2 \text{ m}$ и $1,2 \text{ m}$ и апотемом $1,5 \text{ m}$.
- Израчунај бочну површину стакла.
 - Ако 1 m^2 стакла има масу 28 kg , колика је укупна маса стакла?
34. Површина сфере је $324\pi \text{ cm}^2$.
- Одреди полупречник сфере.
 - Израчунај запремину лопте ограничене датом сфером.
35. Модел планете је сфера полупречника $R = 20 \text{ cm}$. „Ледена капа“ је калота висине $h = 4 \text{ cm}$.
- Израчунај површину ледене капе.
 - Колики проценат укупне површине планете заузима?
36. Лопта има полупречник $R = 10 \text{ cm}$. После пресека равни добија се сферни одсечак запремине $V = \frac{625\pi}{3} \text{ cm}^3$. Одреди растојање d равни од центра лопте.
37. Куполасти кров подземног резервоара има облик сферне калоте. Кров припада сфери полупречника $R = 4 \text{ m}$, а висина куполе је $h = 1,5 \text{ m}$. Унутрашњи простор који покрива купола је сферни одсечак исте сфере.
- Израчунај запремину сферног одсечка (u m^3).
 - Израчунај површину сферне калоте.
 - Куполу треба обложити заштитним материјалом. Ако облагање кошта 2000 денара по m^2 , колики је укупан трошак облагања куполе?
 - Ако се у резервоару дневно сакупља кишница запремине 12 m^3 , за колико дана ће се напунити резервоар, ако је у почетку празан?

РЕЗУЛТАТИ УЧЕЊА

Тема 1:

КОРЕНИ И КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

Изучавањем ове теме оспособићеш се:

1. да решаваш проблеме из реалног контекста који се свode на степене и операције са степенима;
2. да користиш кореновање за решавање проблема из свакодневног контекста;
3. да разликујеш и примењујеш операције степеновања и кореновања у реалним проблемима;
4. да примењујеш рационализацију имениоца разломка у поједностављивању ирационалних израза;
5. да користиш операције са комплексним бројевима при решавању задатака;
6. да примењујеш комплексне бројеве у решавању STEM проблема.

Тема 2:

КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И ЈЕДНАЧИНЕ КОЈЕ СЕ СВОДЕ НА КВАДРАТНЕ

Изучавањем ове теме оспособићеш се:

1. да разликујеш различите врсте квадратних једначина и једначина које се свode на квадратне;
2. да решаваш проблеме из реалног контекста који се свode на квадратне једначине;
3. да користиш једначине које се свode на квадратне при решавању STEM проблема;
4. да примењујеш систем једне квадратне и једне линеарне једначине са две променљиве за решавање реалних проблема

Тема 3:

КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА, КВАДРАТНА НЕЈЕДНАЧИНА И СИСТЕМ КВАДРАТНИХ НЕЈЕДНАЧИНА СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ

Изучавањем ове теме оспособићеш се:

1. да примењујеш квадратну функцију за решавање STEM проблема;
2. да тумачиш решења квадратне неједначине са једном непознатом;
3. да користиш систем од две квадратне неједначине са једном непознатом за решавање проблема из свакодневног контекста.

Тема 4: ЕЛЕМЕНТИ ВЕРОЈАТНОЋЕ

Изучавањем ове теме оспособићеш се

1. да примењујеш пермутације, варијације и комбинације у решавању проблема из реалног контекста;
2. да одређујеш вероватноћу догађаја у реалним проблемима.

Тема 5: ГЕОМЕТРИЈА

Изучавањем ове теме оспособићеш се:

1. да користиш синус, косинус, тангенс и котангенс за решавање STEM проблема;
2. да испитујеш међусобни однос две равни, праве и равни или две праве у простору;
3. да утврђујеш различите пресеке 3Д-форме са равни.

Тема 6: МЕРЕЊЕ

Изучавањем ове теме оспособићеш се:

1. да решаваш проблеме из реалног контекста применом обима и површине 2Д-облика;
2. да решаваш STEM проблеме применом површине и запремине 3Д-облика.

ЛИТЕРАТУРА

1. James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson: *Algebra and Trigonometry*, Brooks/Cole, USA
2. Cindy J. Boyd, Jerry Cummins, Carol Malloy, John Carter, Alfino Flores, *Geometry*, Mc Graw Hill, USA
3. Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis: *Calculus*, John Wiley & Sons, Inc., 2012
4. H. Africk: *Elementary College Geometry*, CUNY Academic Works, 2021
5. В.Бакева: *Веројатности*, УКИМ, Скопје, 2015, <https://ukim.edu.mk/e-book/00009/>
6. В.В. Казаков, О.О.Казакова: *Геометрија*, учебное пособие для 9 класса, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2025
7. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, И. В. Горбунова: *Геометрија*, учебное пособие для 10 класса, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2020
8. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, И. В. Горбунова, О. Е. Цыбулько: *Геометрија*, учебное пособие для 11 класса, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2020