

Верица Бакева Смиљкова

Горан Михајлоски

МАТЕМАТИКА

учебник за
втора година
гимназиско
образование

II

$$P=?$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



МАТЕМАТИКА

учебник за втора година
гимназиско образование

II



Скопје, 2026
(Прво издание)

МАТЕМАТИКА II учебник за втора година гимназиско образование

Прво издание, 2026

Авторски права © 2026, Алби ДОО

Издава	Алби ДОО, Скопје 2026
Автори	Д-р Верица Бакева Смиљкова проф. Горан Михајлоски
Стручен соработник	Александра Поповска-Митровиќ
Уредник	Елена Стефановска
Лектор	Ивана Кузманоска
Дизајн и графичко уредување	Младен Јакимовски
Печати	Полиестердеј ДООЕЛ, Скопје 2026
Тираж	4 000

Сите права се задржани. Ниту еден дел од оваа книга не смее да биде препечатуван или пренесуван во каква било форма или со какви било средства, електронски или механички, вклучувајќи и фотокопирање, документирање или да биде зачуван во систем за повторно пронаоѓање без писмена согласност од издавачот.

Овој учебник е одобрен за употреба во гимназиско образование со Одлука за одобрување и употреба на учебник по наставниот предмет МАТЕМАТИКА II учебник за втора година гимназиско образование, бр. 26-644/1 од 21.05.2026, издадено од Министерството за образование и наука на РС Македонија.

Рецензентска комисија: проф. д-р Аљит Ибраими, проф. д-р Џеваир Беќири, Сузана Ничота

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)

БАКЕВА Смиљкова, Верица

Математика II : учебник за втора година гимназиско образование / Верица Бакева Смиљкова, Горан Михајлоски. - 1. изд. - Скопје : Алби, 2026. - 330 стр. : илустр. ; 27 см

Библиографија: стр. 330

ISBN 978-608-241-093-7

1. Михајлоски, Горан [автор]

COBISS.MK-ID 69295621

ПРЕДГОВОР

Овој учебник е наменет за систематско и продлабочено изучување на клучни математички поими и методи за учениците од втора година во гимназиското образование и претставува основа за понатамошно школување, како и за примена на математиката во природните и техничките науки, економијата и секојдневниот живот. Во учебникот се застапени задачи кои се во согласност со современите образовни насоки кои ги нагласуваат СТЕМ-ориентацијата (наука, технологија, инженерство и математика) и улогата на математиката како јазик и алатка за разбирање, моделирање и решавање реални проблеми. Целта на учебникот не е само усвојување формални постапки, туку и развивање аналитичко, логичко и критичко размислување, како и способност за примена на математичките знаења во различни контексти.

Учебникот Математика за II година се состои од шест теми, конципирани според наставната програма по математика за II година гимназиско образование.

Во првата тема се разгледуваат коренувањето и комплексните броеви, со цел проширување на операциите над множеството на реалните броеви, како и проширување на тоа множество до множеството на комплексни броеви. Овие содржини овозможуваат подлабоко разбирање на алгебарските операции и претставуваат неопходна алатка за решавање одредени типови равенки и проблеми во математиката, физиката и многу други области.

Во следните две теми е посветено особено внимание на квадратните равенки и равенките што се сведуваат на квадратни, како и на квадратната функција, нејзините својства и графичка интерпретација. Овие теми овозможуваат јасна врска меѓу алгебарскиот и геометрискиот пристап и се основа за понатамошно изучување на функции. Во продолжение се обработуваат квадратните неравенки и системите од квадратни неравенки со една непозната, со акцент на логичко размислување, анализа на решенија и нивна интерпретација.

Во четвртата тема „Елементи од веројатност“ се воведуваат основните концепти на комбинаторика и веројатност, т.е. основните принципи на броење и пресметување на веројатности. Овие содржини го развиваат комбинаторното и статистичкото размислување и овозможуваат моделирање и анализа на случајни појави, кои се сè поприсутни во современите науки и технологијата.

Првиот дел од петтата тема е посветен на тригонометријата, која се изучува како моќен инструмент за анализа на агли, триаголници и тригонометриски идентитети, со јасна поврзаност со геометријата, физиката и инженерството. Се воведуваат тригонометриските функции и нивната примена при решавање практични и теоретски задачи. Во вториот дел од оваа тема, посветен на права и рамнина, се објаснува разликата меѓу теорема и аксиома, се изучуваат аксиомите за просторна геометрија и се објаснува и скицира заемниот однос на две рамнини, права и рамнина, или две прави во просторот. Во последниот дел од третата тема се изучуваат 3Д-форми и нивни пресеци со рамнина. Преку овие содржини се развива просторната претстава, визуализацијата и способноста за анализа на геометриски објекти во рамнина и простор.

Во шестата тема се изучуваат 2Д-формите, нивниот периметар и нивната плоштина, како и 3Д-форми со нивните плоштина и волумен. Овие поими се обработуваат преку практични примери поврзани со мерење, просторна анализа и моделирање на реални објекти, како што се архитектонски елементи, технички конструкции, пакувања и природни тела.

Учебникот е структуриран така што секоја тема е проследена со јасни дефиниции, својства, илустративни примери и разновидни задачи со различен степен на сложеност. Посебен акцент е ставен на поврзувањето на теоријата со практични примени и на развивањето на математичкото размислување, логиката и самостојноста кај учениците. На почетокот на секоја лекција има дел „Потсети се!“, во кој се дадени работи кои се познати од порано, но учениците треба да се потсетат на нив за да може да ги усвојат новите знаења. Сите примери во учебникот се дадени со решенија. По примерите, обично, има задачи за проверка дали учениците го усвоиле знаењето од наставната лекција. На крајот од секоја лекција има „Задачи за вежбање“, а на крајот од секоја тема има задачи за повторување и усвојување.

И покрај големиот труд вложен во учебникот, поради краткото време за подготовка, можни се некои технички грешки кои ќе бидат поправени во следното издание. Доколку ни укажете на нив, ќе ви бидеме благодарни.

Се надеваме дека овој учебник ќе им биде сигурен водич на учениците во изучувањето на математиката и корисна поддршка на наставниците во наставниот процес.

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР.....	3
ТЕМА 1 КОРЕНИ И КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ	8
1.1 Степени и операции со степени.....	8
1.2 Поим за корен.....	13
1.3 Степен со показател рационален број. Претставување на корен преку степен	18
1.4 Проширување и скратување на корени.....	25
1.5 Коренување на производ и количник	29
1.6 Собирање и одземање на корени.....	34
1.7 Множење, делење, степенување и коренување на корени	39
1.8 Ирационални изрази. Рационализација на именител на дробка.....	44
1.9 Проширување на множествата на броеви.....	50
1.10 Собирање и одземање на комплексни броеви.....	57
1.11 Множење на комплексни броеви. Степен на комплексен број	60
1.12 Делење на комплексни броеви	64
1.13 Задачи од примена на комплексни броеви	66
Задачи за повторување и утврдување.....	72
ТЕМА 2 КВАДРАТНИ РАВЕНКИ И РАВЕНКИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА КВАДРАТНИ	74
2.1 Поим за квадратна равенка. Видови квадратни равенки. Решение на квадратна равенка.....	74
2.2 Решавање неполни квадратни равенки.....	80
2.3 Решавање полни квадратни равенки	84
2.4 Дискусија за решенијата на квадратната равенка.....	90
2.5 Виетови формули.....	94
2.6 Составување квадратна равенка со дадени решенија. Разложување на квадратен трином	98
2.7 Дробно рационални равенки	103
2.8 Биквадратни равенки.....	107
2.9 Систем од една линеарна равенка со две непознати и една квадратна равенка со две непознати.....	109
Задачи за повторување и утврдување.....	112

ТЕМА 3	КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА, КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА И СИСТЕМ ОД КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА	114
3.1	Квадратна функција. График на функцијата $f(x) = x^2$	
3.2	График на функциите $f(x) = ax^2$ и $f(x) = ax^2 + c$	118
3.3	Каноничен облик на квадратна равенка и график на $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$	123
3.4	График на функцијата $f(x) = ax^2 + bx + c$	127
3.5	Својства на квадратна функција	131
3.6	Тек и график на квадратна функција	138
3.7	Квадратни неравенки	141
3.8	Систем од квадратни неравенки со една непозната	145
	Задачи за повторување и утврдување	152
ТЕМА 4	ЕЛЕМЕНТИ ОД ВЕРОЈАТНОСТ	154
4.1	Варијации со повторување	154
4.2	Варијации без повторување	159
4.3	Пермутации	164
4.4	Комбинации	170
4.5	Некои комбинирани задачи	176
4.6	Експерименти и настани	181
4.7	Множество елементарни настани. Случајни настани	185
4.8	Операции со настани	188
4.9	Класична дефиниција на веројатност	193
4.10	Својства на веројатност. Независни настани	198
	Задачи за повторување и утврдување	205
ТЕМА 5	Геометрија	208
5.1	Агли и мерење агли	208
5.2	Дефинирање тригонометриски функции од остар агол	213
5.3	Тригонометриски функции од комплементни агли	217
5.4	Врска меѓу тригонометриски функции од ист агол	220
5.5	Упростување тригонометриски изрази	223
5.6	Примена на тригонометриски функции	227
5.7	Аксиоми за просторна геометрија	231
5.8	Замен однос на права и рамнина, две рамнини и две прави	236
5.9	Призма. Пресеци на призма со рамнина	241
5.10	Пирамида. Пресеци на пирамида со рамнина	247
5.11	Цилиндар. Пресеци на цилиндар со рамнина	251
5.12	Конус. Пресеци на конус со рамнина	255
	Задачи за повторување и утврдување	260

ТЕМА 6	МЕРЕЊЕ	262
6.1	Периметар и плоштина на квадрат и правоаголник	262
6.2	Периметар и плоштина на паралелограм	267
6.3	Периметар и плоштина на триаголник	271
6.4	Периметар и плоштина на трапез и делтоид	278
6.5	Периметар и плоштина на круг и делови од круг	284
6.6	Плоштина и волумен на пирамида	290
6.7	Плоштина и волумен на потсечена пирамида	296
6.8	Плоштина и волумен на конус	302
6.9	Плоштина и волумен на потсечен конус	306
6.10	Плоштина на сфера и делови од сфера	312
6.11	Волумен на топка и нејзини делови	319
	Задачи за повторување и утврдување	325
РЕЗУЛТАТИ ОД УЧЕЊЕ ОД ПРОГРАМАТА		328
ЛИТЕРАТУРА		330

КОРЕНИ И КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Во многу реални ситуации не е доволно да се користат само основните аритметички операции: собирање, одземање, множење, делење и степенување. Често е позната површина, волумен или некоја физичка величина, а потребно е да се одреди соодветна должина, страна или мерка. На пример, при пресметување на должината на дијагонала, растојание меѓу двете точки, брзина, енергија или електричен отпор, се појавува операцијата коренување. Со оваа операција за даден број A се одредува бројот B при чие степенување се добива бројот A . Ваквата операција се нарекува коренување и таа има важна примена во геометрија, физика, техника и инженерство, моделирање во СТЕМ-задачи. Во оваа тема ќе се запознаеме со поимот корен, неговите својства и начини на пресметување, како и со примени на коренските изрази во практични проблеми. Исто така, се воведува и множеството на комплексни броеви кое претставува проширување на множеството на реалните броеви. Во новото множество може да се решаваат равенки кои немаат решение во множеството на реалните броеви.

1.1 СТЕПЕНИ И ОПЕРАЦИИ СО СТЕПЕНИ

Потсети се!

- Бројот 16 може да се запише како $4 \cdot 4$.
- Изразот $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ може кратко да се запише како 5^4 .

Запомни!

Ако a е произволен реален број, а n е позитивен цел број, тогаш n -ти степен на бројот a се дефинира со:

$$a^1 = a; \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ фактори}}, \quad n \geq 2.$$

Бројот a се нарекува *основа* на степенот a^n , а бројот n се нарекува *степенов показател*.

Задача 1

Претстави ги во вид на степен производите:

- а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; б) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$; в) $x \cdot x \cdot x \cdot x$.

Задача 2

Претстави ги следните степени во вид на производ на еднакви множители:

а) 4^6 ; б) $(-3)^2$; в) y^3 .

Задача 3

Пресметај ги следните степени на броевите 1 и -1:

а) 1^{34} ; б) $(-1)^{2005}$; в) 1^{2025} ; г) $(-1)^{2026}$.

Запомни!

Ако a е произволен реален број, $a \neq 0$, а n е позитивен цел број, тогаш $a^0 = 1$ и $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Пример 1

а) $5^0 = 1$; б) $(-4)^0 = 1$; в) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; г) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$.

Задача 4

Пресметај ги следните степени:

а) 10^0 ; б) $(-15)^0$; в) 1^{-5} ; г) $(-3)^{-4}$.

Запомни!

Ако a и b се произволни реални броеви, а m и n се произволни цели броеви, тогаш важат следните правила за степенување:

1. Производ на степени со иста основа

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

2. Количник на степени со иста основа

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad \text{за } a \neq 0;$$

3. Степенување на степен

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

4. Степен на производ

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

5. Степен на количник

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{за } b \neq 0.$$

Пример 2

Со користење на правилата за степенување ќе ги упростиме следните изрази:

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

$$y^4 \cdot y^{-2} = y^{4-2} = y^2$$

$$(3a)^4 = 3^4 a^4 = 81a^4$$

$$(c^3)^5 = c^{3 \cdot 5} = c^{15}$$

Задача 5

Упрости ги следните изрази:

а) $b^{10}b^{-5}$; б) $\left(\frac{c}{3}\right)^3$; в) $\frac{d^6}{d^3}$.

Пример 3

Да се елиминираат негативните степени во:

а) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$; б) $\frac{a^{-m}}{b^{-n}}$, $a, b \neq 0$.

Решение:

$$\text{а) } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n; \quad \text{б) } \frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{b^n}{a^m}.$$

Запомни!

$$\text{а) } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n; \quad \text{б) } \frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}.$$

Пример 4

Да се елиминира негативниот степен и да се упрости изразот: $\left(\frac{x}{3y^4}\right)^{-2}$.

Решение:

$$\left(\frac{x}{3y^4}\right)^{-2} = \left(\frac{3y^4}{x}\right)^2 = \frac{(3y^4)^2}{x^2} = \frac{3^2(y^4)^2}{x^2} = \frac{9y^8}{x^2}.$$

Задача 6

Да се елиминира негативниот степен и да се упрости изразот: $\left(\frac{y}{5x^{-4}}\right)^{-3}$.

Пример 5

Просечната длабочина на Тихиот Океан е 4280 m, а површината на океанот е $1,7 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$. Ако волуменот се пресметува како производ од површината и длабочината на океанот, колку е вкупниот волумен на океанот во литри? (Еден кубен метар содржи 1000 литри)

Решение:

Нека просечната длабочина ја означиме со $d = 4280 \text{ m}$, а површината со $B = 1,7 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$. Волуменот на океанот се пресметува по формулата $V = B \cdot d$, па

$$V = B \cdot d = 1,7 \cdot 10^{14} \cdot 4280 = 7276 \cdot 10^{14} = 7,276 \cdot 10^{17} \text{ m}^3.$$

Имајќи предвид дека 1 кубен метар содржи 1000 литри, т.е. $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ l}$, добиваме дека вкупниот волумен во литри е

$$V = 7,276 \cdot 10^{17} \cdot 10^3 = 7,276 \cdot 10^{20} \text{ l}.$$

Пример 6

Запечатена просторија во болница е со следните димензии: ширина 5 m, должина 10 m и висина 3 m. Таа е исполнета со чист кислород. Еден кубен метар содржи 1000 литри, а 22,4 литри од кој било гас содржат $6,02 \cdot 10^{23}$ молекули (Авогадров број). Колку молекули кислород има во просторијата?

Решение:

Волуменот на собата е $V = 5 \cdot 10 \cdot 3 = 150 \text{ m}^3 = 150 \cdot 10^3 \text{ l}$. Бидејќи $6,02 \cdot 10^{23}$ молекули се содржат во 22,4 литри од кој било гас, следува дека во еден литар гас се содржат $\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4}$ молекули. Оттука, вкупниот

број на молекули кислород кои се во просторијата е $150 \cdot 10^3 \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4} = 40,3 \cdot 10^{26} = 4,03 \cdot 10^{27}$.

АКТИВНОСТ

- Парче дрво целосно гори на 600°C за една секунда. Времето потребно за согорување на дрвото се удвојува со намалување на температурата за секои 10°C и се преполовува со зголемување на температурата за секои 10°C . За колку секунди ќе изгори парче дрво на:

а) 550°C ; б) 650°C ?

- Дадени се следниве равенства:

а) $2^{-2} - 2^{-3} : 2^{-4} = 2^1$; б) $3^{-3} + 3^{-2} : 3^{-2} - 3^{-3} - 3^0 = 3^a$

Во групи, дискутирајте за местата каде треба да ги запишат заградите за да се добијат точни бројни равенства.

Задачи за вежбање!

1. Пресметај го секој израз:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} (2^3)^2; & \text{б)} (2^3)^0; & \text{в)} \frac{10^6}{10^4}; & \text{г)} \frac{6^6}{6^{-4}}; \quad \text{д)} \left(\frac{1}{32}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{4}{9}\right)^{-3}; \\ \text{е)} \frac{3^2 \cdot 4^{-2} \cdot 5^3}{2^{-4} \cdot 3^3 \cdot 25}; & \text{ж)} 2^{-2} + 2^{-3}; & \text{з)} \left(\frac{1}{3}\right)^3 (-3)^5. \end{array}$$

2. Да се упрости секој од изразите:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} x^{-8} x^4; & \text{б)} (3y^2)(4y^3); & \text{в)} z^3 z^{-4} z^{-7}; & \text{г)} \frac{a^9 a^{-2}}{a^3}; \quad \text{д)} (3z^2)(9z^3)^{-2}; \\ \text{е)} b^4(3ab^3)(2a^2b^{-3})^{-4}; & \text{ж)} \left(\frac{x^4 z^2}{3y^3}\right)^3 \left(\frac{6x^3 z^{-2}}{2y^4}\right)^{-1}; & \text{з)} \left(\frac{xy^{-2} z^{-3}}{x^2 y^3 z^{-4}}\right)^{-2}. \end{array}$$

3. Индексот на телесна маса е мерка што ја користат медицинските истражувачи за да утврдат дали некое лице има нормална тежина, дали е со прекумерна тежина или е под нормалната тежина. За лице што тежи W килограми и е високо H метри, индексот на телесна маса B се пресметува со

$$B = \frac{W}{H^2}.$$

и се смета за нормален ако задоволува $18,5 \leq B \leq 24,9$, додека лице со индекс на телесна маса $B \geq 30$ се смета за лице со прекумерна тежина.

а) Пресметајте го индексот на телесна маса за секое лице наведено во табелата, а потоа утврдете дали тој е со нормална тежина, под нормална тежина или со прекумерна тежина.

	Тежина во kg	Висина во m	Индекс на телесна маса	Заклучок
Петар	43	1,6		
Лука	47	1,54		
Милош	95	1,84		
Ведран	105	1,55		

б) Пресметај го твојот индекс на телесна маса.

4. Ако се инвестира сума од 5000 денари, каматата по n години се пресметува со формулата:

$$I = 5000 (1,0025^{12n} - 1).$$

Пополни ја следната табела со каматата по дадениот број години.

Години	Камата во денари
1	152,08
2	
3	
4	
5	

5. Нека a , b и c се реални броеви така што $a > 0$, $b < 0$ и $c < 0$. Определи го знакот на секој израз:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} b^5; & \text{б)} b^{10}; & \text{в)} ab^2c^3; & \text{г)} (b-a)^3; \quad \text{д)} (b-a)^4; \quad \text{е)} \frac{a^2c^3}{b^6c^6}. \end{array}$$

1.2 ПОИМ ЗА КОРЕН

Пример 1

Во парк треба да се проектира квадратна цветна градина со површина од 64 m^2 . Колкава треба да биде должината на страната на квадратот?

Решение:

Нека должината на страната на квадратот е x . Треба да се определи x така што

$$x^2 = 64.$$

Должината на страната на квадратот е ненегативен број, па прашањето е кој е тој ненегативен број x кој помножен сам со себе дава 64? Јасно е дека $8^2 = 64$, т.е. $x = 8$. Пишуваме $x = \sqrt{64} = 8$.

Пример 2

При слободно паѓање, поминатиот пат s (во метри) е приближно даден со формулата $s = t^2$, каде што t е времето во секунди. По колку секунди телото ќе помине пат од 36 m?

Решение:

Во овој случај се бара времето t , кое е ненегативен број, така што $t^2 = 36$. Бидејќи $6^2 = 36$, заклучуваме дека $t = 6$. Значи, при слободно паѓање, телото ќе помине пат од 36 m за време $t = 6$ секунди. Пишуваме $t = \sqrt{36} = 6$.

Запомни!

Квадратниот корен (корен со коренов показател 2) од ненегативен реален број x е ненегативниот реален број y , таков што $y^2 = x$.

Пишуваме, $y = \sqrt{x}$ и читаме „ y е квадратен корен од x “.

Во изразот $\sqrt{x}$, бројот x се нарекува **поткоренов израз** (или **поткоренова величина**).

Да воочиме дека операциите степенување на степенов показател 2 и квадратен корен се инверзни операции една на друга. Имено,

$$\sqrt{36} = 6, \text{ бидејќи } 6^2 = 36;$$

$$\sqrt{225} = 15, \text{ бидејќи } 15^2 = 225;$$

$$\sqrt{1} = 1, \text{ бидејќи } 1^2 = 1;$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ бидејќи } 0^2 = 0.$$

Задача 1

Пресметај ги вредностите на следните квадратни корени:

а) $\sqrt{144}$; б) $\sqrt{196}$; в) $\sqrt{625}$.

Во општ случај, кога се решава равенка од облик $x^2 = 25$, без да имаме ограничување за знакот на x , тогаш се бараат сите реални броеви x за кои равенката станува точно бројно равенство. За оваа равенка постојат две решенија: $x = -5$ и $x = 5$, затоа што $(-5)^2 = 25$ и $5^2 = 25$.

Пишуваме $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$. Но, внимавајте, по дефиниција, $\sqrt{25} = 5$. Знакот $\pm$ доаѓа пред знакот за корен.

Пример 3

Да се реши равенката $x^2 = 100$.

Решение:

Според претходната дискусија, $x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$.

Задача 2

Да се решат следните равенки:

а) $x^2 = 324$; б) $x^2 - 36 = 64$; в) $289 - x^2 = 0$.

Пример 4

Во градежништвото се користат бетонски блокови во форма на коцка. Еден таков блок има волумен од 64 m^3 . Колку е должината на еден раб од таков блок?

Решение:

Ако a е должината на работ на еден блок, тогаш се бара таков број a за кој важи $a^3 = 64$. Единствен број a за кој е задоволено равенството е $a = 4$. Пишуваме $a = \sqrt[3]{64} = 4$.

Запомни!

Кубен корен (корен со коренов показател 3) од реален број x е реалниот број y така што $y^3 = x$. Пишуваме, $y = \sqrt[3]{x}$ и читаме „ y е кубен корен од x “.

Воочи дека операциите степенување на степенов показател 3 и кубен корен се инверзни една на друга. Имено,

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ бидејќи } 2^3 = 8;$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3, \text{ бидејќи } (-3)^3 = -27;$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1, \text{ бидејќи } (-1)^3 = -1;$$

$$\sqrt[3]{0} = 0, \text{ бидејќи } 0^3 = 0.$$

Задача 3

Пресметај ги вредностите на следните кубни корени:

а) $\sqrt[3]{-125}$; б) $\sqrt[3]{1000}$; в) $\sqrt[3]{-1000}$.

Сега се поставува прашањето дали поимот за корен може да се обопшти за произволен коренов показател n , каде што n ($n \geq 2$) е произволен природен број.

Запомни!

1. Ако n е парен број, тогаш n -ти корен е функција која на секој ненегативен реален број x го придружува ненегативниот реален број y за кој важи $y^n = x$.
2. Ако n е непарен број, тогаш n -ти корен е функција која на секој реален број x го придружува реалниот број y за кој важи $y^n = x$.

И во двата случаи пишуваме, $y = \sqrt[n]{x}$ и читаме „ y е n -ти корен од x “.

Да воочиме дека ако кореновиот показател n е парен број, тогаш функцијата е дефинирана за сите ненегативни реални броеви, т.е. дефиниционата област на оваа функција е $D = [0, +\infty)$. Вредностите што ги добива оваа функција се, исто така, ненегативни броеви, па множеството вредности на функцијата е $V = [0, +\infty)$.

Од друга страна, ако кореновиот показател n е непарен број, тогаш функцијата е дефинирана за сите реални броеви, т.е. дефиниционата област на оваа функција е $D = \mathbb{R}$. Вредностите што ги добива оваа функција се, исто така, реални броеви, кои може да бидат и позитивни и негативни, па множеството вредности е $V = \mathbb{R}$.

Во општ случај, дефиниционата област и множеството вредности на функцијата n -ти корен може да се запишат како

$$D = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{ако } n \text{ е парен број} \\ \mathbb{R}, & \text{ако } n \text{ е непарен број} \end{cases} \quad V = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{ако } n \text{ е парен број} \\ \mathbb{R}, & \text{ако } n \text{ е непарен број} \end{cases}$$

Пример 5

- а) Изразите $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[4]{-64}$, $\sqrt{-25}$ не се дефинирани затоа што негативните броеви не се во дефиниционата област на функцијата n -ти корен, за парен број n .
- б) Изразите $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-32}$ се дефинирани затоа што дефинициона област на функцијата n -ти корен, за непарен број n , е целото множество реални броеви. Притоа, $\sqrt[3]{-8} = -2$ и $\sqrt[3]{-32} = -2$.

Задача 4

Определете кои од изразите се дефинирани, а кои не се:

- а) $\sqrt[4]{-25}$; б) $\sqrt[4]{-49}$; в) $\sqrt[3]{30}$; г) $\sqrt[4]{100}$.

Пример 6

Да се пресметаат вредностите на следните корени:

- а) $\sqrt[3]{3^3}$; б) $\sqrt[3]{(-3)^3}$; в) $\sqrt[3]{3^4}$; г) $\sqrt[3]{(-3)^6}$.

Решение:

- а) $\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27} = 3$;

$$\text{б) } \sqrt[3]{(-3)^3} = \sqrt[3]{-243} = -3;$$

$$\text{в) } \sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{81} = 3 = |3|;$$

г) Воочи дека $(-3)^6$ е позитивен број, па коренот $\sqrt[4]{(-3)^6}$ е дефиниран. Така, $\sqrt[4]{(-3)^6} = \sqrt[4]{(-3)^6} = \sqrt[4]{729} = 3 = |-3|$. Значи, вредноста на $\sqrt[4]{(-3)^6}$ не е -3 , туку е $3 = |-3|$.

Запомни!

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{ако } n \text{ е непарен број} \\ |a|, & \text{ако } n \text{ е парен број} \end{cases}$$

Задача 5

Одреди ја вредноста на изразот:

$$\text{а) } \sqrt[6]{6^6}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{(-6)^6}; \quad \text{в) } \sqrt[3]{6^5}; \quad \text{г) } \sqrt[3]{(-6)^5}.$$

Пример 7

Пресметај ги следните изрази:

$$\text{а) } (\sqrt{9})^2; \quad \text{б) } (\sqrt[4]{16})^4; \quad \text{в) } (\sqrt[3]{-27})^3.$$

Решение:

$$\text{а) } (\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9; \quad \text{б) } (\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16; \quad \text{в) } (\sqrt[3]{-27})^3 = (-3)^3 = -27.$$

Запомни!

Ако изразот $\sqrt[n]{a}$ е дефиниран, тогаш $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Воочи, дека $(\sqrt[4]{-16})^4 \neq -16$, бидејќи -16 не е во дефиниционата област на функцијата 4-ти корен.

Пример 8

Полицијата ја користи формулата $v = \sqrt{254fd}$ за да ја процени брзината v (во km/h) со која автомобилот се движи ако се лизга d метри откако нагло ќе се притиснат сопирачките (сликата подолу). Бројот f е коефициент на триење на патот, што е мерка за „лизгавоста“ на патот. Следната табела дава некои типични процени за f .

	Асфалт	Бетон	Калдрма
Влажен	0,5	0,4	0,1
Сув	1,0	0,8	0,2

- а) Ако автомобилот се лизга 10 метри на влажен бетон, колку брзо се движел кога биле притиснати сопирачките?
 б) Ако автомобилот се движи со 20 km/h, колку далеку ќе се лизга на влажна калдрма?



Решение:

- а) Автомобилот се лизга 10 метри на влажен бетон, значи $d = 10$, а $f = 0,4$. Согласно дадената формула, имаме дека $v = \sqrt{254fd} = \sqrt{254 \cdot 0,4 \cdot 10} = 31,87$ km/h.
 б) Автомобилот се движи со 20 km/h по сува калдрма, па $v = 20$, а $f = 0,2$. Во овој случај се бара растојанието d . Од дадената формула определуваме $v^2 = 254fd$, т.е.

$$d = \frac{v^2}{254f}.$$

Со замена на вредностите добиваме:

$$d = \frac{20^2}{254 \cdot 0,2} = 7,87 \text{ m}.$$

Задачи за вежбање!

- Кои од следните искази се вистинити:
 - бројот 6 е квадратен корен од 72;
 - бројот 7 е квадратен корен од 49;
 - петти корен од 243 е 3;
 - петти корен од -243 е -3;
 - четврти корен од 16 е -4.
- Кои од дадените изрази се дефинирани:
 - $\sqrt{-4}$;
 - $\sqrt[3]{-125}$;
 - $\sqrt[4]{64}$;
 - $-\sqrt{25}$.
- За кои вредности на променлива x следните изрази се дефинирани:
 - $\sqrt{2x-5}$;
 - $\sqrt[3]{x+4}$;
 - $\sqrt[4]{10-x}$;
 - $\sqrt[3]{x-1}$;
 - $\sqrt[4]{x^2+9}$.
- Пресметај ја вредноста на следните изрази:
 - $3\sqrt{\frac{1}{9}} + 2\sqrt{16} - \sqrt{\frac{1}{4}}$;
 - $\sqrt{196} - \sqrt[3]{-64} + \sqrt[4]{81}$;
 - $\sqrt[3]{-27} - \sqrt{49} - \sqrt[4]{-32}$.
- Кои од дадените равенства се точни:
 - $\sqrt{4^2} = 4$;
 - $\sqrt{(-4)^2} = -4$;
 - $5\cos 41^\circ = 2$;
 - $\sqrt[3]{(-3)^2} = -3$;
 - $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$;
 - $\sqrt[3]{1^3} = 1$.
- За кои вредности на променливата x е точно равенството?
 - $\sqrt{x^2} = x$;
 - $\sqrt[3]{x^3} = x$;
 - $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$;
 - $\sqrt[4]{(2-x)^4} = |2-x|$.
- Еден електроинженер работи на проект за соларни панели. Тој сака да постави $n \times n$ панели во еден систем (т.е. n редови и n колони панели). Еден панел произведува 40 ват-часа на ден. Колку панели ќе му бидат потребни на инженерот ако сака системот да произведува 1000 ват-часа дневно?

1.3 СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ РАЦИОНАЛЕН БРОЈ. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА КОРЕН ПРЕКУ СТЕПЕН

Потсети се!

- Ако $n \in \mathbb{Z}^+$, тогаш
 - $a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n$, за $n \geq 2$;
 - $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, за $a \neq 0$;
 - $a^0 = 1$, за $a \neq 0$.
- Ако $r \in \mathbb{Q}$, тогаш r може да се претстави како $r = \frac{m}{n}$, каде $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Степен со показател рационален број

Поимот степенување со показател природен и цел број ќе го обопштиме со степенување со показател рационален број. Целта на ова обопштување е да важат истите правила за степенување што важат и за степени со показател кој е природен или цел број.

Најпрво ќе го дефинираме степенувањето со степенов показател $\frac{1}{n}$, каде $n \in \mathbb{N}$.

Запомни!

- Ако a е ненегативен реален број и n е позитивен парен број, тогаш $a^{\frac{1}{n}}$ е ненегативниот број за кој важи $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.
- Ако a е реален број и n е позитивен непарен број, тогаш $a^{\frac{1}{n}}$ е реалниот број за кој важи $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

Пример 1

- $9^{\frac{1}{2}} = 3$, бидејќи $3^2 = 9$;
- $16^{\frac{1}{4}} = 2$, бидејќи $2^4 = 16$;
- $(-27)^{\frac{1}{3}} = -3$, бидејќи $(-3)^3 = -27$.

Задача 1

Пресметај: а) $27^{\frac{1}{3}}$; б) $81^{\frac{1}{4}}$; в) $(-243)^{\frac{1}{5}}$.

Во продолжение ќе ја обопштиме претходната дефиниција за степенување со степенев показател $r = \frac{m}{n}$, како $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Како што споменавме претходно, треба да важат истите правила за степенување што важат и за степени со показател кој е природен или цел број.

Запомни!

1. Нека a е позитивен реален број и $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, каде што $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ и n е парен број. Степенот на бројот a со показател рационален број $\frac{m}{n}$ се дефинира со $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.
2. Нека a е реален број ($a \neq 0$) и $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, каде што $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ и n е непарен број. Степенот на бројот a со показател рационален број $\frac{m}{n}$ се дефинира со $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Пример 2

Пресметај: а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $81^{\frac{5}{4}}$; в) $(-125)^{\frac{4}{5}}$.

Решение:

$$\text{а) } 27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^2 = 9;$$

$$\text{б) } 81^{\frac{5}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^5 = 3^5 = 243;$$

$$\text{в) } (-125)^{\frac{4}{5}} = \left((-125)^{\frac{1}{5}}\right)^4 = (-5)^4 = 625.$$

Задача 2

Пресметај: а) $216^{\frac{2}{3}}$; б) $2401^{\frac{3}{4}}$; в) $(-64)^{\frac{7}{3}}$.

Според дефиницијата за степен со показател рационален број, правилата за степенување остануваат исти како и во случај на степенување со показател цел број, но само во случај кога степенувањето е дефинирано, т.е. има смисла.

Запомни!

За сите реални броеви $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и за секои $\frac{m}{n}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, каде што $m, r \in \mathbb{Z}, n, s \in \mathbb{N}$, важат следните правила:

1. Производ на степени со иста основа

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m+r}{n \cdot s}};$$

2. Количник на степени со иста основа

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m-r}{n \cdot s}};$$

3. Степенување на степен

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m \cdot r}{n \cdot s}};$$

4. Степенување на производ

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}};$$

5. Степенување на количник

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

Во сите овие правила, ако n е парен број, тогаш a, b треба да се позитивни.

Пример 3

Пресметај:

а) $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}}$; б) $16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}}$; в) $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Решение:

Според претходно формулираните правила за степенување го добиваме следното:

а) $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1+1}{2 \cdot 4}} = 16^{\frac{2}{4}} = 2^2 = 4;$

б) $16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1-1}{2 \cdot 4}} = 16^{\frac{0}{4}} = 1;$

в) $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2.$

Задача 3

Пресметај:

а) $256^{\frac{1}{4}} \cdot 256^{\frac{1}{8}}$; б) $256^{\frac{1}{2}} : 256^{\frac{1}{4}}$; в) $\left(256^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Пример 4

Нека $a, b > 0$. Изврши ги назначените операции:

а) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; б) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(a \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}}$.

Решение:

а) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3+2}{4}} = a^{\frac{5}{4}}$;

б) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3+1}{4}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{13}{12}} : a^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{13}{12}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{13}{12}}}{a^{\frac{4}{12}}} = a^{\frac{13-4}{12}} = a^{\frac{9}{12}} = a^{\frac{3}{4}}$;

в) $\left(a \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{4}{5}} \cdot b^{\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}} = a^{\frac{4}{5}} \cdot b^{\frac{8}{15}}$.

Задача 4

Нека $a > 0$. Пресметај:

а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{1}{2}}$; б) $a^{\frac{1}{5}} : a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Пример 5

Пресметај ги степените $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3$ и $\left(4^3\right)^{\frac{1}{2}}$ и спореди ги.

Решение:

$\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$ и $\left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = 8$, па можеме да заклучиме дека двата степени се еднакви.

Имено, еднаквоста на степените во претходниот пример важи не само во конкретниот случај, туку и поопшто. Всушност, важи следното својство.

Запомни!

За секој реален број a и за секој $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, каде што $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, важи:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Притоа, ако n е парен број, правилото важи за $a \geq 0$.

Претставување на степен со показател рационален број преку корен и обратно

Претходно дефиниравме дека n -ти корен е функција која на секој реален број x го придружува реалниот број y за кој важи $y^n = x$. Притоа, ако n е парен број, тогаш функцијата е дефинирана за $x \geq 0$, а ако n е непарен број, тогаш дефиниционата област на функцијата е множеството реални броеви. Значи, за x од дефиниционата област на функцијата важи следната еквивалентност:

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^n.$$

За наоѓање врска на степен со показател рационален број и корени, ќе тргнеме од дефиницијата на $a^{\frac{1}{n}}$. Ако го степенуваме изразот $a^{\frac{1}{n}}$ со степенов показател n , каде што $n \in \mathbb{N}$, добиваме:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$

Значи, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$, па од претходната еквивалентност следува дека $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Запомни!

Ако $n \in \mathbb{N}$, тогаш $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Притоа, ако n е парен број, тогаш равенството важи за $a \geq 0$, а ако n е непарен број, тоа важи за секој реален број a .

Пример 6

а) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4;$

б) $(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2.$

Задача 5

Пресметај: а) $64^{\frac{1}{3}}$; б) $(-27)^{\frac{1}{3}}$.

Нека $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Ако $a^{\frac{m}{n}}$ се степенува на n , се добива:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Од $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$ следува дека $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Запомни!

Ако $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, тогаш $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Притоа, ако n е парен број, тогаш $a^{\frac{m}{n}}$ е дефиниран за $a \geq 0$, а ако n е непарен број, тогаш $a^{\frac{m}{n}}$ е дефиниран за секој реален број a .

Пример 7

а) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9;$

б) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 8;$

в) $(-32)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-32)^3} = -8.$

Пример 8

Брзината со која едрилицата е способна да плови е одредена од три фактори: нејзината вкупна должина L , плоштината A на нејзините едра и волуменот V на водата што ја поместува, како што е прикажано на скицата.

Општо земено, едрилицата е способна за поголема брзина ако е подолга, има поголема плоштина на едрата или поместува помалку вода. За да бидат фер трките со едрилица, само чамци од истата „класа“ можат да се квалификуваат да се натпреваруваат заедно. За одредена трка, чамецот се смета за квалификуван ако важи



$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} \leq 16,$$

каде што L се мери во метри (m), A во m^2 , а V во m^3 . Користете го ова неравенство за да одговорите на следните прашања.

- Едрилицата има должина од 18 m, плоштина на едрата $316 m^2$ и волумен на водата што ја поместува од $19 m^3$. Дали овој чамец се квалификува за трката?
- Едрилицата има должина од 20 m и волумен на водата што ја поместува од $17 m^3$. Која е најголемата можна плоштина на едрата што може да му овозможи на чамецот да се квалификува за трка?

Решение:

- Од условите на задачата имаме $L = 18$, $A = 316$ и $V = 19$. Прашањето е дали за овие вредности на L , A и V е задоволен условот за квалификување на едрилицата за натпревар? Добиваме:

$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} = 0,98 \cdot 18 + 1,25 \cdot \sqrt{316} - 9,84 \cdot \sqrt[3]{19} = 13,6 \leq 16,$$

т.е. условот за квалификација е задоволен.

- б) За $L = 20$, а $V = 17$, се бара најголемата можна плоштина на едрата што може да му овозможи на чамецот да се квалификува за трка. Всушност, се бара вредноста на плоштината A за која горното неравенство (за квалификација) ќе важи како равенство, т.е.

$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} = 16,$$

Каде што $L = 20$, $V = 17$. Со замена добиваме:

$$0,98 \cdot 20 + 1,25 \cdot \sqrt{A} - 9,84 \cdot \sqrt[3]{17} = 16.$$

$$\text{Оттука } \sqrt{A} = \frac{16 - 0,98 \cdot 20 + 9,84 \cdot \sqrt[3]{17}}{1,25} = 17,36, \text{ па } A = 17,36^2 = 301,37 \text{ m}^2.$$

Задача 6

Брзината што еден тркачки дрон може да ја постигне зависи од неговата маса m (во килограми), вкупната плоштина на пропелерите S (во квадратни метри) и капацитетот на батеријата E (во ватт-часови). Дронот може да постигне поголема брзина ако има помала маса, поголема плоштина на пропелерите или помал капацитет на батеријата. За учество на дронот на одредена трка, неговите перформанси треба да го задоволуваат следните неравенства:

$$0 \leq 0,6m + 4\sqrt{S} - 1,5E^{\frac{1}{3}} \leq 20,$$

каде што m е масата во kg, S е површината во m^2 , а E е капацитетот на батеријата во Wh.

- Дрон има маса 3 kg, површина на пропелерите $0,50 \text{ m}^2$ и батерија со капацитет 54 Wh. Дали овој дрон може да учествува на трката?
- Дрон има маса 2,5 kg и батерија со капацитет 64 Wh. Која е најголемата можна плоштина на пропелерите што може да се користи, а дронот сè уште да се квалификува за оваа трка?

Задачи за вежбање!

1. Определи ја вредноста на степените:

а) $9^{\frac{5}{2}}$; б) $125^{\frac{2}{3}}$; в) $(-343)^{\frac{2}{3}}$.

2. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$; б) $\left(\frac{1}{512}\right)^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot \left(\frac{36}{81}\right)^{\frac{1}{2}} - 3$.

3. Нека $a > 0$. Пресметај

а) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}}$; б) $a^{\frac{1}{2}} : \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-1}\right)$; в) $\left(\left(a : a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{6}} : a^{\frac{1}{24}}$.

4. Запиши ги како корен степените:

а) $a^{\frac{1}{3}}$; б) $2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}$; в) $4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{4}}$.

5. Запиши ги како степен корените:

а) $\sqrt{a^3}$; б) $\sqrt[3]{2a^2b^4}$; в) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b^4}$.

1.4 ПРОШИРУВАЊЕ И СКРАТУВАЊЕ НА КОРЕНИ

Потсети се!

- $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$, за $k \neq 0$;
- $\frac{m}{n} = \frac{m : k}{n : k}$, за $k \neq 0$;
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Во примерите и задачите во продолжение ќе претпоставиме дека во изразите $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $a \geq 0$, ако n е парен број и $a \in \mathbb{R}$, ако n е непарен број, т.е. дека $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ е секогаш дефиниран.

Пример 1

Спореди ги вредностите на корените $\sqrt[4]{16}$ и $\sqrt[4]{256}$.

Решение:

Бидејќи $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ и $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2$, заклучуваме дека овие два корени имаат иста вредност.

Воочи дека $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{16^2}$. Имено, ако во првиот корен, кореновиот показател и степеновиот показател во поткореновиот израз се помножат со ист број, се добива вториот корен.

Во општ случај, ако $m, n, k \in \mathbb{N}$, тогаш

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}.$$

Ова својство се нарекува **проширување на корени**.

Запомни!

Ако кореновиот показател и степеновиот показател на поткореновиот израз се помножат со ист број, различен од 0, тогаш вредноста на коренот не се менува.

Пример 2

Корените $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ прошири ги со 3.

Решение:

Со примена на постапката опишана погоре,

$$\sqrt{3} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{125}.$$

Задача 2

Корените $\sqrt{7}$ и $\sqrt[3]{4}$ прошири ги со 4.

Пример 3

Прошири ги со 2 корените:

а) $\sqrt{x^2}$; б) $\sqrt[4]{x^2 y^3}$; в) $\sqrt[3]{x^3 y^2 z}$.

Решение:

а) $\sqrt{x^2} = \sqrt[2]{x^2} = \sqrt[4]{x^4}$;

б) $\sqrt[4]{x^2 y^3} = \sqrt[4]{(x^2 y^3)^2} = \sqrt[8]{x^4 y^6}$;

в) $\sqrt[3]{x^3 y^2 z} = \sqrt[3]{(x^3 y^2 z)^2} = \sqrt[6]{x^6 y^4 z^2}$.

Задача 3

Прошири ги со 3 корените:

а) $\sqrt{a^2 b^3}$; б) $\sqrt[4]{ab^2 c^3}$.

Пример 4

Корените $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{3}$, сведи ги на ист коренов показател.

Решение:

При сведување на корените на ист коренов показател, најчесто го избираме бројот кој е најмалиот заеднички содржател (НЗС) на кореновите показатели. Во овој случај, $\text{НЗС}(2,3,4) = 12$. Значи, сите корени ќе ги прошириме до коренов показател 12. Добиваме:

$$\sqrt{3} = \sqrt[2]{3} = \sqrt[12]{3^6};$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4};$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3}.$$

Задача 4

Сведи ги корените $\sqrt{a^2 b^3}, \sqrt[4]{ab^2 c^3}, \sqrt[3]{c^3}$ на ист коренов показател.

Пример 5

Спореди ги вредностите на корените $\sqrt[3]{2^4}$ и $\sqrt[2]{2^3}$.

Решение:

За да ги споредиме вредностите на корените, најпрво треба да ги сведеме на ист коренов показател. Бидејќи $\text{НЗС}(5,3) = 15$, двата корени ќе ги сведеме на коренов показател 15. Добиваме:

$$\sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{2^{4 \cdot 3}} = \sqrt[15]{2^{12}} = \sqrt[15]{4096} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^{3 \cdot 5}} = \sqrt[15]{1024}.$$

Од двата корени кои се сведени на ист коренов показател, поголем е оној што има поголем поткоренов израз. Во овој случај тоа е $\sqrt[5]{2^4}$.

Задача 5

Подреди ги по големина следните корени:

а) $\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{17}$; б) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{7}$.

Пример 6

Корените $\sqrt[6]{2^6}, \sqrt[3]{2^3}, \sqrt{2}$ запиши ги како степени со показател рационален број и спореди ги.

Решение:

Со користење на врската помеѓу корени и степени со показател рационален број имаме

$$\sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{12}}, \quad \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}}, \quad \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

Бидејќи $\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, заклучуваме дека сите три корени се еднакви.

Во општ случај, ако кореновиот показател и степеновиот показател на поткореновиот израз имаат заеднички множител k , тогаш

$$\sqrt[k]{a^{m \cdot k}} = a^{\frac{m \cdot k}{k}} = a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[k]{a^m}.$$

Оваа постапка се нарекува **скратување на корени**.

Запомни!

Ако кореновиот показател и степеновиот показател на поткореновиот израз ги поделиме со некој нивни заеднички делител, тогаш вредноста на коренот не се менува.

Пример 7

Скрати ги корените: а) $\sqrt[12]{x^6}$; б) $\sqrt[15]{x^3 y^9 z^6}$.

Решение:

а) Најголем заеднички делител на кореновиот показател и степеновиот показател на поткореновиот израз е НЗД(12,6) = 6, па ако скратиме со 6, добиваме: $\sqrt[12]{x^6} = \sqrt[12 \div 6]{x^{6 \div 6}} = \sqrt{x}$.

б) Бидејќи $\sqrt[15]{x^3 y^9 z^6} = \sqrt[15]{(xy^3 z^2)^3}$, а НЗД(15,3) = 3, можеме да скратиме со 3:

$$\sqrt[15]{x^3 y^9 z^6} = \sqrt[15]{(xy^3 z^2)^3} = \sqrt[15 \div 3]{(xy^3 z^2)^{3 \div 3}} = \sqrt[3]{xy^3 z^2}.$$

Задача 6

Скрати ги корените: а) $\sqrt[3]{y^4}$; б) $\sqrt[3]{a^{12}b^8}$; в) $\sqrt[9]{a^6b^{12}c^9}$.

Запомни!

Ако кореновиот показател n е делител на степеновиот показател m на поткореновиот израз, т.е. $m = n \cdot k$, тогаш коренот $\sqrt[n]{a^m}$ се сведува на:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{n \cdot k}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = \begin{cases} |a^k|, & \text{ако } n \text{ е парен број} \\ a^k, & \text{ако } n \text{ е непарен број} \end{cases}$$

Пример 8

Упрости ги изразите:

а) $\sqrt[3]{x^6}$; б) $\sqrt{x^4y^2z^6}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{x^{2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{(x^2)^3} = x^2$; б) $\sqrt{x^4y^2z^6} = \sqrt{(x^2yz^3)^2} = |x^2yz^3|$.

Задача 7

Упрости ги изразите:

а) $\sqrt[3]{2^6}$; б) $\sqrt{4^4 \cdot 3^6 \cdot 2^8}$; в) $\sqrt[3]{(x-2)^{12}}$.

Задачи за вежбање!

1. Прошири ги со 4 корените:

а) $\sqrt{3a}$; б) $\sqrt[3]{5b}$; в) $\sqrt[4]{4a^2b}$; г) $\sqrt[3]{2ab^2}$.

2. Сведи ги корените на заеднички коренов показател:

а) $\sqrt[3]{a^3}$ и $\sqrt[4]{a^5}$; б) $\sqrt[3]{3x^2}$ и $\sqrt[4]{x}$; в) $\sqrt{ab}$ и $\sqrt[3]{a^3b}$;

г) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt[4]{5}$; д) $\sqrt[3]{a^3b}$, $\sqrt[4]{a}$ и $\sqrt{ab}$; е) $\sqrt[3]{2xy^3}$, $\sqrt[4]{x}$ и $\sqrt[5]{y^3}$.

3. Упрости ги корените:

а) $\sqrt[3]{4a^4b^2}$; б) $\sqrt[4]{a^6b^3}$; в) $\sqrt[5]{a^6b^4}$.

4. Упрости ги корените:

а) $\sqrt[3]{8a^3}$; б) $\sqrt[4]{16b^4}$; в) $\sqrt[3]{32x^5}$; г) $\sqrt{25a^2b^6}$.

5. Упрости:

а) $\sqrt[3]{x^4}$; б) $\sqrt[5]{x^{12}}$; в) $\sqrt[3]{x^9}$; г) $\sqrt[4]{x^{11}}$;

1.5 КОРЕНУВАЊЕ НА ПРОИЗВОД И КОЛИЧНИК

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.
- Степенувај: $(x \cdot y)^2$; $(x : y)^2$; $(x \cdot y)^{(3/4)}$; $(x : y)^{(3/4)}$.

Пример 1

Провери ја точноста на следните равенства:

$$\text{а) } \sqrt{49 \cdot 81} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{81}; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}.$$

Решение:

а) Левата страна на равенството е еднаква $\sqrt{49 \cdot 81} = \sqrt{3969} = 63$, а за десната страна се добива:

$$\sqrt{49} \cdot \sqrt{81} = 7 \cdot 9 = 63.$$

Значи, двете страни од равенството се еднакви, па равенството е точно.

б) На ист начин покажи ја точноста и на ова равенство.

Овие својства важат не само во конкретните случаи, туку и во општ случај.

Запомни!

1. Ако кореновиот показател n е парен број ($n \geq 2$), тогаш

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ за секои } a, b \geq 0$$

$$\text{и } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ за секое } a \geq 0 \text{ и секое } b > 0.$$

2. Ако кореновиот показател n е непарен број ($n \geq 3$), тогаш

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ за секои } a, b \in \mathbb{R};$$

$$\text{и } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ за секое } a \in \mathbb{R} \text{ и секое } b \neq 0.$$

Овие правила се познати како правила за коренување на производ и количник.

Задача 1

Пресметај:

$$\text{а) } \sqrt[4]{16 \cdot 256}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{\frac{64}{729}}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{(-64) \cdot 81}; \quad \text{г) } \sqrt[4]{\frac{32}{-283}}.$$

Пример 2

Упрости го изразот:

$$\text{а) } \sqrt[5]{a^5 b^{15} c^{10}}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\frac{x^6 y^3 z^9}{a^6 b^9}}, a, b \neq 0.$$

Решение:

$$\text{а) } \sqrt[5]{a^5 b^{15} c^{10}} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^{15}} \cdot \sqrt[5]{c^{10}} = ab^3 c^2.$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{\frac{x^6 y^3 z^9}{a^6 b^9}} = \frac{\sqrt[3]{x^6 y^3 z^9}}{\sqrt[3]{a^6 b^9}} = \frac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{z^9}}{\sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^9}} = \frac{x^2 y z^3}{a^2 b^3}.$$

Задача 2

Упрости го изразот:

$$\text{а) } \sqrt[4]{a^8 b^4 c^{12}}, \text{ ако } a, b, c \geq 0;$$

$$\text{б) } \sqrt[6]{\frac{x^6 y^{18} z^{12}}{a^{24} b^6}}, \text{ ако } x, y, z \geq 0, \text{ а } a, b > 0.$$

Пример 3За кои вредности на променливата x се точни равенствата:

$$\text{а) } \sqrt[4]{(x+3)(x-2)} = \sqrt[4]{x+3} \cdot \sqrt[4]{x-2}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{\frac{x+3}{x-2}} = \frac{\sqrt[4]{x+3}}{\sqrt[4]{x-2}}.$$

Решение:а) Кореновиот показател е непарен, па оттука равенството е точно за секој реален број x ;б) Во овој случај имаме парен коренов показател, па равенството ќе биде точно кога x го задоволува следниот систем од линеарни неравенки:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases}.$$

Добиваме дека равенството ќе биде точно ако $x > 2$.**Задача 3**Определи ги вредностите на променливата x за кои се точни равенствата:

$$\text{а) } \sqrt[4]{x(x-4)} = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x-4}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\frac{2x+4}{x-3}} = \frac{\sqrt[3]{2x+4}}{\sqrt[3]{x-3}}.$$

Пример 4

Упрости го изразот $\sqrt{25x^2y}$, ако $x, y \geq 0$.

Решение:

$$\sqrt{25x^2y} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = 5x\sqrt{y}$$

Запомни!

Според претходната постапка за коренување на производ, добиваме:

$$\sqrt[n]{\alpha^n \beta} = \sqrt[n]{\alpha^n} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \alpha \sqrt[n]{\beta}.$$

Ваквата постапка се нарекува **извлекување множител пред знакот за корен**. Притоа, $\alpha, \beta \geq 0$, ако n е парен број.

Пример 5

Извлечи ги множителите пред знакот за корен:

а) $\sqrt{3a^2}$; б) $\sqrt[3]{8ab^3}$; в) $\sqrt[4]{a^4b}$, $a \geq 0$; г) $\sqrt[3]{5ab^3}$.

Решение:

а) $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2} = |a| \sqrt{3}$;

б) $\sqrt[3]{8ab^3} = \sqrt[3]{(2b)^3 a} = \sqrt[3]{(2b)^3} \cdot \sqrt[3]{a} = 2b \sqrt[3]{a}$;

в) $\sqrt[4]{a^4b} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b} = a \sqrt[4]{b}$. Тука е искористено дека $\sqrt[4]{a^4} = a$, бидејќи $a \geq 0$.

г) $\sqrt[3]{5ab^3} = \sqrt[3]{b^3(5a)} = \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{5a} = b \sqrt[3]{5a}$.

Задача 4

Извлечи ги множителите пред знакот за корен:

а) $\sqrt{5b^2c}$, $b, c \geq 0$; б) $\sqrt[3]{27x^2}$; в) $\sqrt[4]{a^4b^3}$, $a, b \geq 0$.

Воочи дека пред корен може да се извлечат само множителите во поткореновиот израз чии степенски показатели се поголеми или еднакви на кореновиот показател. Нека е даден $\sqrt[n]{a^m}$. Ако $m \geq n$, тогаш $m = nk + r$, каде што k е природен број и $0 \leq r < n$. Во тој случај,

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk+r}} = \sqrt[n]{a^{nk} \cdot a^r} = \sqrt[n]{(a^k)^n \cdot a^r} = a^k \sqrt[n]{a^r}.$$

Запомни!

Ако $m = nk + r$, каде $k \geq 1, 0 \leq r < n$, тогаш

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk+r}} = a^k \sqrt[n]{a^r}.$$

Притоа, треба да се внимава на дефинираноста на корените, т.е. ако n е парен број, тогаш $a \geq 0$.

Пример 6

Извлечи ги множителите пред знакот за корен:

- а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt[3]{24}$; в) $\sqrt[4]{a^9}, a \geq 0$;
 г) $\sqrt[3]{108a^5b^4}$; д) $\sqrt{\frac{a^4b}{cd^2}}, a, b \geq 0, c, d > 0$.

Решение:

- а) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;
 б) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$;
 в) $\sqrt[4]{a^9} = \sqrt[4]{(a^2)^4 \cdot a} = \sqrt[4]{(a^2)^4} \cdot \sqrt[4]{a} = a^2 \sqrt[4]{a}$;
 г) $\sqrt[3]{108a^5b^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 4 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b} = \sqrt[3]{(3ab)^3 \cdot 4a^2b} = \sqrt[3]{(3ab)^3} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} = 3ab\sqrt[3]{4a^2b}$;
 д) $\sqrt{\frac{a^4b}{cd^2}} = \frac{\sqrt{a^4b}}{\sqrt{cd^2}} = \frac{a^2\sqrt{b}}{d\sqrt{c}}$.

Задача 5

Извлечи ги множителите пред знакот за корен:

- а) $\sqrt{32}$; б) $\sqrt[3]{54}$; в) $\sqrt[4]{b^7}, b \geq 0$; г) $\sqrt[3]{40x^2y^7}$.

Разгледај го равенството $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ оддесно налево. Може да се воочи дека множителот 2 е внесен под знакот на корен така што е степенуван со показател 2, а кореновиот показател е, исто така, еднаков на 2. Имено, $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$. Ова постапка се нарекува **внесување на множител под знакот на корен**.

Запомни!

Множител се внесува под знакот на корен, така што тој се степенува со кореновиот показател и така добиениот израз се множи со поткореновиот израз, т.е. ако $\alpha \geq 0$, тогаш

$$\alpha \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha^n \beta}.$$

Притоа, ако n е парен број β треба да е ненегативен број.

Пример 7

Нека $x, y > 0$. Внеси ги множителите под знакот за корен:

а) $x\sqrt{x}$; б) $\frac{x}{y}\sqrt[6]{\frac{y^5}{x^5}}$; в) $\frac{x}{2y}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}$.

Решение:

а) $x\sqrt{x} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3}$;

б) $\frac{x}{y}\sqrt[6]{\frac{y^5}{x^5}} = \sqrt[6]{\left(\frac{x}{y}\right)^6 \frac{y^5}{x^5}} = \sqrt[6]{\frac{x^6}{y^6} \cdot \frac{y^5}{x^5}} = \sqrt[6]{\frac{x}{y}}$;

в) $\frac{x}{2y}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} = \sqrt[3]{\left(\frac{x}{2y}\right)^3 \frac{y^2}{x}} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{8y^3} \cdot \frac{y^2}{x}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{8y}}$.

Задача 6

Нека $a, b > 0$. Внеси ги множителите под знакот за корен:

а) $a^2\sqrt{a}$; б) $\frac{a^3}{b}\sqrt[4]{\frac{b^4}{a^3}}$; в) $\frac{2a}{b^2}\sqrt[4]{\frac{b^3}{4a}}$.

Пример 8

Спореди ги броевите $3\sqrt{7}$ и $2\sqrt{10}$, без да ја пресметувааш вредноста на корените.

Решение:

Најпрво, во двата изрази ги внесуваме множителите под знакот за корен:

$$3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{63}, \quad 2\sqrt{10} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = \sqrt{40}.$$

Бидејќи $\sqrt{63} > \sqrt{40}$, може да заклучиме дека $3\sqrt{7} > 2\sqrt{10}$.

Задача 7

Спореди ги броевите $4\sqrt[3]{6}$ и $2\sqrt[2]{11}$, без да ја пресметувааш вредноста на корените.

Задачи за вежбање!

1. Пресметај ја вредноста на корените:

а) $\sqrt{49 \cdot 81}$; б) $\sqrt[3]{64 \cdot (-125) \cdot 8}$; в) $\sqrt[4]{\frac{625 \cdot 16}{1296}}$.

2. Нека $a, b \geq 0$. Пресметај ги корените:

а) $\sqrt{a^2 b^4}$; б) $\sqrt[3]{a^6 b^9}$; в) $\sqrt[5]{\frac{a^{10} b^5}{c^{15}}}$, $c \neq 0$.

3. Извлечи ги множителите пред знакот на корен:

а) $\sqrt{a^5 b^3 c^2}$, $a, b, c \geq 0$; б) $\sqrt[3]{a^7 b^{11}}$; в) $\sqrt[3]{\frac{a^9 b^4}{c^{12}}}$, $c \neq 0$.

4. Внеси ги множителите под знакот на корен:

а) $3\sqrt{3}$; б) $x^2 \sqrt{x^3 y}$; в) $\frac{4x}{y} \sqrt{\frac{y^4}{x^2}}$.

5. Без пресметување на корените, спореди ги броевите:

а) $3\sqrt{11}$ и $5\sqrt{8}$; б) $2\sqrt[3]{9}$ и $4\sqrt[3]{3}$.

1.6 СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА КОРЕНИ

Потсети се!

- Во изразот $\sqrt[3]{a^7 b^3 c^9}$, извлечи ги множителите пред знакот на корен.
- Скрати го коренот $\sqrt[3]{a^4 b^2 c^6}$.

Запомни!

Еден корен е во **нормален вид** ако се исполнети следните услови:

- Поткореновиот израз не содржи именител различен од 1;
- Поткореновиот израз не содржи множители кои може да се извлечат пред знакот на корен;
- Кореновиот показател и степеновиот показател на поткореновиот израз немаат заеднички делител што е различен од 1.

Пример 1

- а) Коренот $\sqrt{\frac{1}{2}}$ не е во нормален вид затоа што поткореновиот израз содржи именител различен од 1.
- б) Коренот $\sqrt{8}$ не е во нормален вид затоа што $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$, т.е. содржи множител кој може да се извади пред знакот на корен.
- в) Коренот $\sqrt[3]{a^3 b^6 c^9}$ не е во нормален вид бидејќи $\sqrt[3]{a^3 b^6 c^9} = \sqrt[3]{(ab^2 c^3)^3}$, т.е. кореновиот показател и степеновиот показател на поткореновиот израз имаат заеднички делител 3 (различен од 1).

Пример 2

Запиши ги корените од претходниот пример во нормален вид.

Решение:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\text{б) } \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2};$$

$$\text{в) } \sqrt[12]{a^3 b^6 c^9} = \sqrt[12]{(ab^2 c^3)^3} = \sqrt[12]{(ab^2 c^3)^{3 \cdot 3}} = \sqrt[4]{ab^2 c^3}.$$

Задача 1

Запиши ги корените во нормален вид:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{16}{3}}; \quad \text{б) } xy\sqrt{\frac{12}{xy}}, \quad x, y > 0; \quad \text{в) } \frac{x}{y}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}}, \quad x > y > 0.$$

Запомни!

Ако коренот е доведен во нормален вид, рационалниот множител што се наоѓа пред знакот за корен се нарекува **рационален коефициент** (или само, **коефициент**) на коренот.

Пример 3

Во $2\sqrt{2}$, рационалниот коефициент на коренот е 2, а во $3x^2\sqrt{xy}$, рационалниот коефициент на коренот е $3x^2$.

Пример 4

Доведи ги корените во нормален вид и определи го нивниот рационален коефициент:

$$\text{а) } \sqrt[3]{8x^3 - 16x^5}; \quad \text{б) } a\sqrt{\frac{1}{a}}, \quad a > 0.$$

Решение:

$$\text{а) } \sqrt[3]{8x^3 - 16x^5} = \sqrt[3]{8x^3(1 - 2x^2)} = 2x \cdot \sqrt[3]{1 - 2x^2}. \text{ Рационалниот коефициент пред коренот е } 2x.$$

$$\text{б) } a\sqrt{\frac{1}{a}} = a\sqrt{\frac{a}{a^2}} = \frac{a}{a}\sqrt{a} = \sqrt{a}. \text{ Рационалниот коефициент пред коренот е } 1.$$

Задача 2

Доведи ги корените во нормален вид и определи го нивниот рационален коефициент:

$$\text{а) } \sqrt[4]{64a^4 - 16a^8}; \quad \text{б) } b\sqrt{\frac{a^2}{b}}, \quad a, b > 0.$$

Запомни!

Два или повеќе корени во нормален вид кои се разликуваат само во своите рационални коефициенти се викаат **слични корени**.

Пример 5

Корените $\sqrt[3]{a^2b}$, $2a \cdot \sqrt[3]{a^2b}$ и $\frac{a}{b^2} \sqrt[3]{a^2b}$ се слични корени. Нивните рационални коефициенти се 1, $2a$ и $\frac{a}{b^2}$.

Пример 6

Провери дали се слични корените:

а) $\sqrt{12}$ и $\sqrt{48}$; б) $\sqrt[3]{a^4bc^5}$ и $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}}$; в) $\sqrt[3]{a^5bc^7}$ и $\sqrt[3]{a^7b^5c^9}$.

Решение:

Најпрво ги доведуваме корените до нормален вид, па потоа проверуваме дали се слични.

а) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, а $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Заклучуваме дека $\sqrt{12}$ и $\sqrt{48}$ се разликуваат само во рационалните коефициенти, па тие се слични корени;

б) $\sqrt[3]{a^4bc^5} = ac \cdot \sqrt[3]{abc^2}$, а $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}} = a^2b^2c^3 \cdot \sqrt[3]{abc^2}$. Значи, $\sqrt[3]{a^4bc^5}$ и $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}}$ се слични корени.

в) $\sqrt[3]{a^5bc^7} = ac \cdot \sqrt[3]{bc^2}$, а $\sqrt[3]{a^7b^5c^9} = abc \cdot \sqrt[3]{a^2c^4}$. Оттука, $\sqrt[3]{a^5bc^7}$ и $\sqrt[3]{a^7b^5c^9}$ не се слични корени.

Задача 3

Провери дали се слични корените:

а) $\sqrt[3]{54}$ и $\sqrt[3]{128}$; б) $\sqrt[3]{a^6b^3c^7}$ и $\sqrt[3]{a^{10}b^3c^3}$.

Собирање и одземање може да се дефинира само на слични корени.

Запомни!

Ако a , b и c се реални броеви (или реални изрази), тогаш собирање и одземање на слични корени се дефинира на следниот начин:

$$a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c} = (a+b)\sqrt[n]{c}$$

$$a\sqrt[n]{c} - b\sqrt[n]{c} = (a-b)\sqrt[n]{c}$$

Притоа, треба $c \geq 0$, ако n е парен број.

Пример 7

Пресметај:

а) $\sqrt{3} + 2\sqrt{12}$; б) $\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$.

Решение:

Најпрво ги сведуваме корените во нормален вид, а потоа ако се слични, може да ги спроведеме операциите собирање и одземање.

а) $\sqrt{3} + 2\sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = (1+4)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$;

б) $\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{2^3 \cdot 5} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} = (1+4-3)\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$.

Задача 4

Пресметај:

а) $\sqrt{72} - 2\sqrt{18} - \sqrt{8}$; б) $\sqrt[3]{250} - 3\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{2}$.

Пример 8Упрости го изразот $\sqrt[3]{125a} - \sqrt[3]{8a} - (\sqrt[3]{27a} - \sqrt[3]{64a})$.**Решение:**

$$\sqrt[3]{125a} - \sqrt[3]{8a} - (\sqrt[3]{27a} - \sqrt[3]{64a}) = 5\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a} - (3\sqrt[3]{a} - 4\sqrt[3]{a}) = 3\sqrt[3]{a} - (-\sqrt[3]{a}) = 4\sqrt[3]{a}.$$

Задача 5

Упрости го изразот:

а) $\frac{3}{a}\sqrt{a^3} - \frac{4}{b}\sqrt{ab^2}$, $a, b > 0$; б) $2x\sqrt{x^4y} - 3y\sqrt{xy^4} - x^2\sqrt{\frac{y^4}{x^2}} + 2y^3\sqrt{\frac{x}{y^2}}$.

Пример 9Едно детско игралиште има форма на правоаголник со страни $(6\sqrt{3} + 8\sqrt{2})\text{ m}$ и $7\sqrt{2}\text{ m}$.

а) Колку метри едната страна е поголема од другата?

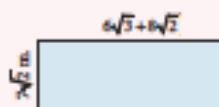
б) Колку метри ограда ќе биде потребно за оградување на игралиштето?

Решение:Страните на правоаголникот се $a = 6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$ и $b = 7\sqrt{2}$.а) Страната a е поголема од страната b за

$$a - b = (6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}) - 7\sqrt{2} = 6\sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ метри.}$$

б) Периметарот на правоаголникот е

$$L = 2a + 2b = 2 \cdot (6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}) + 2 \cdot 7\sqrt{2} = 12\sqrt{3} + 16\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 12\sqrt{3} + 30\sqrt{2}.$$

Значи, за оградување ќе биде потребна ограда со должина од $12\sqrt{3} + 30\sqrt{2}$ метри

Задача 6

Една градина има форма на рамнокрак трапез со основи чии должини се $(10\sqrt{7} + 7\sqrt{3})\text{ m}$ и $5\sqrt{7}\text{ m}$ и крак со должина $10\sqrt{3}\text{ m}$. Колку е периметарот на трапезот?

Задачи за вежбање!

1. Сведи ги во нормален вид следните корени:

а) $\sqrt{72}$; б) $\sqrt[3]{250}$; в) $\sqrt[3]{162}$; г) $\sqrt{75x^2y}$; д) $\sqrt[4]{125a^3b^6}$.

2. Сведи ги во нормален вид следните корени:

а) $\sqrt{50x^2y^3}$, $x, y > 0$; б) $\sqrt[3]{54a^4b^2}$; в) $\sqrt[3]{32x^2y^6}$, $x, y > 0$;

г) $\sqrt{108a^3}$, $a > 0$; д) $\sqrt[4]{125a^3b^6}$.

3. Провери дали се слични корените:

а) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{27}$; б) $\sqrt{20}, \sqrt{45}$ и $\sqrt{80}$; в) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}, \sqrt[3]{\frac{8x}{y}}$ и $\sqrt[3]{\frac{x}{8y}}$, $y \neq 0$;

г) $\sqrt[3]{a^2b^2}, \sqrt[3]{16a^4b^2}$ и $\sqrt[3]{\frac{a^2b^{30}}{81}}$, $a, b > 0$.

4. Пресметај:

а) $7\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$; б) $20\sqrt{\frac{1}{2}} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{8}$; в) $\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{64} + 3\sqrt[4]{8}$;

г) $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \frac{1}{2}\sqrt{72}$; д) $(\sqrt{50} + \sqrt{2} - 2\sqrt{8}) - (\sqrt{32} - \sqrt{18})$.

5. Пресметај:

а) $3\sqrt{16a} - 2\sqrt{9a} + \sqrt{25a}$, $a \geq 0$;

б) $3a \cdot \sqrt[3]{ab^4} - a^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}} + 2b^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2}}$, $a, b \neq 0$.

6. Пресметај:

а) $\sqrt[3]{16a} + \sqrt[3]{81a} - \sqrt[3]{625a} + \sqrt[3]{a}$, $a > 0$; б) $(\sqrt{12x} - \sqrt[3]{27y}) - (\sqrt[3]{81y} - \sqrt{3x})$, $x > 0$.

7. Инженерите треба да трасираат оптички кабел кој се состои од три сегменти со должини (во метри): $3\sqrt{12}$, $2\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$. Определи ја вкупната должина на кабелот.

8. Еден ултразвучен сензор мери растојание x (во cm). При калибрација е утврдено дека збирот од две измерени компоненти на растојанието е еднаков на вкупното растојание, и тоа $\sqrt{2x} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$.

а) Определи го растојанието x .

б) Провери дали добиеното решение има физичка смисла.

9. Робот се движи по права линија така што поминува растојание $s_1 = \sqrt{200}\text{ m}$ во десно, а потоа во лево се придвижува двапати поминувајќи растојанија од $s_2 = \sqrt{50}\text{ m}$ и $s_3 = 3\sqrt{8}\text{ m}$. Определи каде ќе стигне роботот во однос на почетната позиција.

1.7 МНОЖЕЊЕ, ДЕЛЕЊЕ, СТЕПЕНУВАЊЕ И КОРЕНУВАЊЕ НА КОРЕНИ

Потсети се!

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$;
- $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$;
- Сведи ги корените $\sqrt[n]{3}$ и $\sqrt[n]{4}$ на ист коренов показател.

Да го пресметаме производот $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ и количникот $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Запомни!

Производот на два корена со ист коренов показател n ($n \geq 2$) е еднаков на n -ти корен од производот на поткореновите изрази, а нивниот количник е еднаков на n -ти корен од количникот на поткореновите изрази, т.е. важат следните равенства:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0.$$

Притоа, ако кореновиот показател n е парен број, првото равенство важи за $a, b \geq 0$, а второто за $a \geq 0$ и $b > 0$.

Пример 1

Пресметај:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$; в) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$, $x \neq 0$; г) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Решение:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10};$

б) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^3};$

в) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x}} = \sqrt[3]{x};$

г) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
 $= \sqrt{3 \cdot 3} - \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} - \sqrt{2^2} = 3 - 2 = 1.$

Задача 1

Пресметај:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{11};$ б) $3 \cdot \sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[3]{x^2 y^4}, \quad x, y \geq 0;$ в) $\sqrt[3]{9a^2} : \sqrt[3]{\frac{a^2}{3}}.$

Ако корените се со различни коренови показатели, тогаш тие може да се множат и делат откако ќе се сведат на ист коренов показател.

Пример 2

Пресметај:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{11};$ б) $3 \cdot \sqrt[3]{x^2 y} \cdot \sqrt[3]{x^3 y^4};$ в) $\sqrt{4x^3} : \sqrt[4]{\frac{x^3}{2}}.$

Решение:

Најпрво ќе ги сведеме корените на ист коренов показател, а потоа ќе ги извршиме операциите множење или делење.

а) НЗС(2, 3) = 6, па ќе ги сведеме двата корена на коренов показател еднаков на 6. Добиваме:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{121} = \sqrt[6]{8 \cdot 121} = \sqrt[6]{968}.$$

б) НЗС(3, 5) = 15, па

$$3 \cdot \sqrt[3]{x^2 y} \cdot \sqrt[5]{x^3 y^4} = 3 \cdot \sqrt[15]{(x^2 y)^5} \cdot \sqrt[15]{(x^3 y^4)^3} = 3 \cdot \sqrt[15]{x^{10} y^5} \cdot \sqrt[15]{x^9 y^{12}} = 3 \cdot \sqrt[15]{x^{19} y^{17}} = 3xy \cdot \sqrt[15]{x^4 y^2}.$$

в) НЗС(2, 4) = 4. Добиваме:

$$\sqrt{4x^3} : \sqrt[4]{\frac{x^3}{2}} = \sqrt[4]{(4x^3)^2} : \sqrt[4]{\frac{x^3}{2}} = \sqrt[4]{\frac{16x^6}{x^3/2}} = \sqrt[4]{32x^3} = 2\sqrt[4]{2x^3}.$$

Да напоменеме дека при решавање задачи со корени, ако во крајниот резултат остане корен, тогаш се препорачува тој да се доведе во нормален вид.

Задача 2

Пресметај:

$$\text{а) } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}; \quad \text{б) } \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{a^2b}; \quad \text{в) } \frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[3]{x^2y}}.$$

Пример 3

Архитект проектира парк во форма на правоаголник со страни $\sqrt{50} \text{ m}$ и $\frac{\sqrt{32}}{2} \text{ m}$. Определи ја плоштината на тој парк.

Решение:

Страните на правоаголникот се $a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ и $b = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Плоштината на паркот е

$$P = ab = \sqrt{50} \cdot \frac{\sqrt{32}}{2} = 5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2 \cdot 2} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ m}^2.$$

Задача 3

Рамнокрак трапез има основи со должина $\sqrt[3]{24}$ и $\sqrt[3]{192}$ и крак со должина $\sqrt{6}$. Пресметај ја плоштината на трапезот.

Во продолжение ќе го степенуваме $\sqrt[n]{a}$ на степен m , каде што $m, n \geq 2$. Добиваме:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Запомни!

Корен се степенува на степен m така што поткореновиот израз се степенува на m , а добиениот степен се коренува со истиот коренов показател n , т.е. за $m, n \geq 2$, важи следното равенство:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Притоа, ако n е парен број, треба $a \geq 0$.

Пример 4

Пресметај:

$$\text{а) } (\sqrt[3]{5})^2; \quad \text{б) } (\sqrt[3]{5a^2b})^3, b \geq 0; \quad \text{в) } \left(\frac{x}{y} \cdot \sqrt{xy}\right)^3, x \geq 0, y > 0.$$

Решение:

$$\text{а) } (\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25};$$

$$\text{б) } (\sqrt[3]{5a^2b})^3 = \sqrt[3]{(5a^2b)^3} = \sqrt[3]{125a^6b^3} = a \cdot \sqrt[3]{125a^2b^3};$$

$$\text{в) } \left(\frac{x}{y} \cdot \sqrt{xy}\right)^3 = \left(\frac{x}{y}\right)^3 \sqrt{(xy)^3} = \frac{x^3}{y^3} \sqrt{x^3y^3} = \frac{x^3}{y^3} \cdot xy \cdot \sqrt{xy} = \frac{x^4}{y^2} \cdot \sqrt{xy}.$$

Задача 4

Пресметај:

а) $(\sqrt[3]{7})^3$; б) $(\sqrt[3]{4ab^2})^3$; в) $(a \cdot \sqrt{ab^2})^3$, $a, b \geq 0$.

Пример 5

Една фирма сака да постави на савем изложбен штанд во форма на коцка со страна $\sqrt{8} \text{ m}$. Изнајмувачот платил закуп за 24 m^3 . Дали штандот одговара на платениот закуп?

Решение:

Штандот има форма на коцка со страна $a = \sqrt{8}$. Волуменот на штандот е

$$V = (\sqrt{8})^3 = \sqrt{8^3} = \sqrt{(2^3)^3} = \sqrt{2^9} = 2^4 \cdot \sqrt{2} \approx 22,63 \text{ m}^3.$$

Штандот кој планира да го постави фирмата е во согласност со платениот закуп.

Задача 5

Маркетинг-компанија поставува квадратен билборд со страна $\sqrt{50}$. Колкава плоштина ќе зафаќа овој билборд?

На крај, ќе видиме како од $\sqrt[n]{a}$ може да се пресмета m -ти корен, каде што $m, n \geq 2$. Добиваме:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Запомни!

Ако од поткореновиот израз прво се земе n -ти корен, а потоа од добиениот резултат се земе m -ти корен, тоа е исто како од поткореновиот израз да се земе nm -ти корен, т.е. ако $m, n \geq 2$, тогаш важи

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Притоа, ако n или m се парни броеви, треба $a \geq 0$.

Пример 6

Пресметај:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3x^2y}}$, $x, y \geq 0$; в) $\sqrt[4]{a\sqrt{2ab}}$, $a, b \geq 0$.

Решение:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{4}$;

б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3x^2y}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{3x^2y}} = \sqrt[12]{3x^2y}$;

в) $\sqrt[4]{a\sqrt{2ab}} = \sqrt[4]{\sqrt{a^2 2ab}} = \sqrt[4]{\sqrt{2a^3b}} = \sqrt[8]{2a^3b}$.

Задача 6

Пресметај:

$$\text{а) } \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[4]{a}}, \quad a \geq 0; \quad \text{в) } \sqrt[4]{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}, \quad a \geq 0.$$

Пример 7

Квадратна плоча има плоштина $P = \sqrt{128} \text{ cm}^2$. Да се определи дијагоналата на плочата.

Решение:

Ако a е должината на страната на плочата, тогаш $P = a^2 = \sqrt{128} = \sqrt{2^7}$. Оттука,

$$a = \sqrt{\sqrt{2^7}} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3} = 2\sqrt[4]{8} \text{ cm}.$$

Должината d на дијагоналата на квадратот е

$$d = a\sqrt{2} = 2\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{4} = 2\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2^5} = 4\sqrt[4]{2} \text{ cm}.$$

Задача 7

На еден ѕид има простор $90 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$ и на тој простор треба да се смести телевизор кој има форма на квадрат. Дали тоа ќе може да се направи ако плоштината на телевизорот е $P = 1600\sqrt{3} \text{ cm}^2$?

Задачи за вежбање!

- Пресметај ги производите на корените:
 - $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3}$; б) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{2}$; в) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$; г) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{5a}$, $a \geq 0$; д) $2\sqrt[3]{3a^2} \cdot 4\sqrt[3]{5a}$.
- Пресметај ги производите на корените:
 - $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$, $a \geq 0$; б) $3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{2x^2} \cdot \sqrt[4]{x}$, $x \geq 0$.
- Пресметај ги количниците на корените:
 - $\sqrt{27} : \sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}$; в) $6 \cdot \sqrt{\frac{5}{9}} : \sqrt{\frac{5}{36}}$; г) $\sqrt{6a} : \sqrt{a}$, $a > 0$; д) $\sqrt[3]{12a^2} : \sqrt[3]{3a}$; е) $\sqrt[4]{16a^3} : \sqrt[4]{a}$, $a > 0$.
- Пресметај ги количниците на корените:
 - $\sqrt[3]{8} : \sqrt{2}$; б) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$; в) $\sqrt[3]{8a^2} : \sqrt[4]{2a^3}$, $a > 0$; г) $4a\sqrt{a^2} : \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$.
- Пресметај:
 - $(3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 2\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}$; б) $(4\sqrt{50} - 6\sqrt{8} + 2\sqrt{32}) : \sqrt{2}$.
- Пресметај ги степените на дадените корени:
 - $\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{8}\right)^3$; б) $(\sqrt[3]{5x^2})^2$; в) $(\sqrt[3]{a^2b})^6$; г) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.
- Пресметај:
 - $\sqrt{\sqrt{16a}}$, $a \geq 0$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^3}}$, $a \geq 0$; в) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$, $a \geq 0$; г) $\sqrt{x^2\sqrt{xy}} : \sqrt{y\sqrt{xy}}$, $x, y > 0$; д) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{a^2}$, $a \geq 0$.

1.8 ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. РАЦИОНАЛИЗАЦИЈА НА ИМЕНТЕЛ НА ДРОПКА

Рационален алгебарски израз е израз од броеви и/или променливи поврзани со операциите собирање, одземање, множење, делење и степенување со степен показател кој е цел број. Овие операции се нарекуваат и **рационални операции**.

Изразите во кои покрај рационалните операции е застапена и операцијата коренување, т.е. степенување со рационален показател, кој не е цел број, се нарекуваат **ирационални изрази**.

Пример 1

Кои од изразите се рационални, а кои ирационални алгебарски изрази?

а) $\frac{1}{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) $x^2 - 3xy$; г) $3 + \sqrt{x}$; д) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; е) $2a^{\frac{1}{3}}b^{-2}$.

Решение:

Рационални изрази се под а) и в). Останатите се ирационални изрази.

Ирационалните изрази што вклучуваат променливи ќе ги разгледуваме само за оние вредности на променливите за кои изразот е дефиниран, т.е. има смисла.

Пример 2

За која вредност на променливата ирационалниот израз е дефиниран:

а) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x-4}$; б) $\sqrt{x^2+4} - (x-3)^{\frac{1}{3}}$; в) $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-5}}$.

Решение:

- а) Коренот $\sqrt{x^2}$ е дефиниран за секој реален број x , т.е. $x \in (-\infty, +\infty)$, додека коренот $\sqrt{x-4}$ е дефиниран за секој x , за кој $x-4 \geq 0$, $x \geq 4$, т.е. $x \in [4, +\infty)$. Според тоа,

$$x \in (-\infty, +\infty) \cap [4, +\infty) = [4, +\infty).$$
- б) Двата корени $\sqrt{x^2+4}$ и $(x-3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x-3}$ се дефинирани за секој реален број x , т.е. $x \in (-\infty, +\infty)$, па и целиот израз е дефиниран за $x \in (-\infty, +\infty)$.
- в) Коренот $\sqrt{x+3}$ е дефиниран за $x+3 \geq 0$, $x \geq -3$, т.е. $x \in [-3, +\infty)$. Вториот корен $\sqrt{x-5}$ се наоѓа во именителот, па тој не смее да биде еднаков на 0, т.е. $\sqrt{x-5} \neq 0$. Од друга страна, за коренот да биде дефиниран, потребно е $x-5 \geq 0$. Оттука добиваме дека $x-5 > 0$, $x > 5$, т.е. $x \in (5, +\infty)$. Сега, целиот израз $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-5}}$ е дефиниран ако $x \in [-3, +\infty) \cap (5, +\infty) = (5, +\infty)$.

Задача 1

За која вредност на променливата ирационалниот израз е дефиниран:

а) $\sqrt[4]{x^3} - 2x$; б) $\sqrt{x-7} - (x+3)^{\frac{1}{5}}$; в) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+4}} + x^2$.

По извршување на некои операции со корени (како множење, делење, степенување, извлекување множител пред знакот за корен или внесување множител под знакот за корен), некои ирационални изрази може да се трансформира во еквивалентна форма во која не се појавува знакот за корен, т.е. во рационални изрази.

Пример 3

Кои од дадените ирационални изрази се сведуваат на рационални:

- а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt[3]{81}$; в) $\sqrt[3]{x^3 y^9}$;
 г) $\sqrt{x^2 y}$, $x, y \geq 0$; д) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Решение:

- а) $\sqrt{4} = 2$ е рационален израз.
 б) $\sqrt[3]{81} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$ не се сведува на рационален израз затоа што во изразот останува корен.
 в) $\sqrt[3]{x^3 y^9} = xy^3$, па изразот се сведува на рационален.
 г) $\sqrt{x^2 y} = x \cdot \sqrt{y}$. Во изразот останува квадратен корен, па изразот не може да се сведе на рационален.
 д) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x} \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt{x} = \sqrt[6]{x^{12}} = x^2$. Јасно е дека во овој случај изразот се сведува на рационален.

Задача 2

Кои од дадените ирационални изрази се сведуваат на рационални:

- а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt[3]{27}$; в) $\sqrt[3]{x^2 y^9 z^3}$; г) $\sqrt{x^2 y^2}$, $x, y \geq 0$.

Активност

Пресметај:

- а) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$, $a > 0$; б) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a}$; в) $\sqrt[3]{a^m} \cdot \sqrt[3]{a^{n-m}}$, $a > 0$, $m < n$.

Запомни!

Рационализирање на именител на дробка е постапка со која именителот на дробката се трансформира од ирационален во рационален израз, при што вредноста на дробката не се менува.

Пример 3

Рационализирај го именителот на дробката $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Решение:

Именителот на дробката содржи $\sqrt{5}$. За да се отстрани коренот во именителот, дробката ја помножиме со $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$. Добиваме:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Со тоа добиваме дробка која во именителот не содржи корен, т.е. именителот не е ирационален израз. Воочи дека дробката ја помноживме со $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$, па нејзината вредност не се промени.

Пример 4

Рационализирај го именителот на дробката:

а) $\frac{2}{\sqrt[3]{5^2}}$; б) $\frac{7}{\sqrt[3]{4^3}}$.

Решение:

а) Именителот на дробката содржи $\sqrt[3]{5^2}$. Бидејќи $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^3} = 5$, за да се отстрани коренот во именителот, дробката ја помножиме со $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$. Имаме,

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}.$$

б) Во овој случај дробката ја прошируваме со $\frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}}$ и добиваме:

$$\frac{7}{\sqrt[3]{4^3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^5}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{4}.$$

Задача 3

Рационализирај го именителот на дробката:

а) $\frac{6}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{9}{\sqrt[3]{3^3}}$; в) $\frac{-3}{\sqrt[3]{6^2}}$.

Да ја проследиме постапката за рационализирање на дробка од облик $\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}$, каде што $m < n$, а A и $B \neq 0$ се дадени броеви или изрази (при што $B > 0$, ако n е парен број). За да се отстрани коренот од дробката, истата ќе ја прошириме со $\frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}}$. На тој начин добиваме:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{m+n-m}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^n}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{B}.$$

Ако $m \geq n$, тогаш најпрво дробката се доведува во нормален вид, а потоа се рационализира новодобиената дробка.

Пример 5

Рационализирај го именителот на дробката:

а) $\frac{10}{3\sqrt{7}}$; б) $\frac{x+2y}{\sqrt[3]{(x-2y)^2}}$, $x-2y > 0$; в) $\frac{-x+y}{x \cdot \sqrt[3]{y^2}}$, $y \neq 0$.

Решение:

а) $\frac{10}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{3\sqrt{7^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{21};$

б) $\frac{x+2y}{\sqrt[3]{(x-2y)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-2y)^5}}{\sqrt[3]{(x-2y)^5}} = \frac{(x+2y) \cdot \sqrt[3]{(x-2y)^5}}{\sqrt[3]{(x-2y)^7}} = \frac{(x+2y) \cdot \sqrt[3]{(x-2y)^2}}{x-2y};$

в) $\frac{-x+y}{x \cdot \sqrt[3]{y^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{y^5}}{\sqrt[3]{y^5}} = \frac{(-x+y) \cdot \sqrt[3]{y^5}}{x \cdot \sqrt[3]{y^7}} = \frac{(-x+y) \cdot \sqrt[3]{y^5}}{xy}.$

Задача 4

Рационализирај го именителот на дробката:

а) $\frac{8}{4\sqrt{a^2+1}}$; б) $\frac{5}{\sqrt[3]{3a}}$, $a > 0$; в) $\frac{3y}{4 \cdot \sqrt[3]{5y^2}}$, $y \neq 0$.

АКТИВНОСТ

Пресметај:

а) $(a+b)(a-b)$; б) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$; в) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

Нека е дадена дробката $\frac{A}{a+\sqrt{b}}$, каде што A , a и b ($b \geq 0$) се дадени броеви или изрази, така што $a+\sqrt{b} \neq 0$. Рационализација на именителот на оваа дробка се врши така што дробката се проширува со $\frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$. Се добива следното:

$$\frac{A}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{A \cdot (a-\sqrt{b})}{a^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{A \cdot (a-\sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

Ако именителот содржи $a-\sqrt{b}$, тогаш се проширува со $\frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$.

Пример 6

Рационализирај го именителот на дробката:

а) $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$; б) $\frac{a}{a+\sqrt{3}}$, $a \neq -\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$.

Решение:

а) $\frac{4}{2+\sqrt{3}} = \frac{4}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot (2-\sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 \cdot (2-\sqrt{3})}{1} = 4 \cdot (2-\sqrt{3});$

б) $\frac{a}{a+\sqrt{3}} = \frac{a}{a+\sqrt{3}} \cdot \frac{a-\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}} = \frac{a(a-\sqrt{3})}{a^2-3};$

в) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)}{4}.$

Задача 5

Рационализирај го именителот на дробката:

а) $\frac{5}{\sqrt{3}-1}$; б) $\frac{b+\sqrt{b}}{b-\sqrt{2}}$, $b \neq \sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{11}-3}.$

На крај, да видиме како ќе се рационализира именител на дробка кој има облик $\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, каде што A , a и b ($a, b > 0$) се дадени броеви или изрази, така што $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq 0$, т.е. $a \neq b$. Рационализација на именителот на оваа дробка се врши така што дробката се проширува со $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Се добива следното:

$$\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{A \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{A \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

Ако именителот содржи $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, тогаш се проширува со $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Пример 7

Рационализирај го именителот на дробката:

а) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; в) $\frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$.

Решение:

а) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{7-5} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$;

б) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2} = 13+2\sqrt{6}$;

в) $\frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \frac{54-23\sqrt{6}}{-6} = -9 + \frac{23}{6}\sqrt{6}$.

Задачи за вежбање!

1. За кои вредности на променливата x изразот е дефиниран:

а) $\sqrt{x+11}$; б) $\sqrt[3]{x-4} - \sqrt{x^2+12}$; в) $\frac{\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x+4}}{x}$; г) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}$;

2. Кои од следните изрази се сведуваат на рационални:

а) $\sqrt{a}-a$, $a \geq 0$; б) $\sqrt{a^2}-a$, $a \geq 0$;
в) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} - 3a$; г) $\sqrt[3]{64a^3} - \sqrt{9a^2}$, $a \geq 0$.

3. Упрости ги изразите, а потоа одреди кои од нив се ирационални изрази:

а) $\sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^6}$, $x \geq 0$; б) $\sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{ab^5}$;
в) $\frac{3}{5}\sqrt{50} : \frac{5}{5}\sqrt{2}$; г) $\sqrt{a^4b} : \sqrt{ab}$, $a, b > 0$.

Во задачите 4-7 рационализирај го именителот на дробката:

4. а) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}$; в) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$; г) $\frac{-7}{\sqrt[3]{4^3}}$.
5. а) $\frac{2x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$; б) $\frac{\sqrt{2}a^3}{\sqrt{a}}$, $a > 0$; в) $\frac{5}{\sqrt[3]{3a}}$, $a \neq 0$; г) $\frac{a-6}{\sqrt[4]{a^2}}$, $a > 0$.
6. а) $\frac{2(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, $x > 1$; б) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$, $a+b > 0$; в) $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a+b}}$, $a+b \neq 0$.
7. а) $\frac{5-\sqrt{7}}{7+\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17-4}}$; в) $\frac{\sqrt{5}-4}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$; г) $\frac{a-3}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}$, $a \neq 3$.

1.9 ПРОШИРУВАЊЕ НА МНОЖЕСТВАТА НА БРОЕВИ

Множество на природни броеви

Множеството на природни броеви се означува со

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Ова множество е затворено во однос на операциите собирање и множење, т.е. збир и производ на два природни броја повторно е природен број.

Меѓутоа, операцијата одземање не е затворена во множеството на природни броеви. На пример, $2 - 5 \notin \mathbb{N}$. Поради тоа, некои равенки немаат решение во $\mathbb{N}$, како на пример, равенките $6 + x = 3$, $x + 3 = 2$, итн.

Множество на цели броеви

За да може да се решаваат и вакви равенки, множеството на природни броеви се проширува со бројот 0 и со негативните броеви. Така се добива *множеството на цели броеви*, кое се означува со

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Во множеството $\mathbb{Z}$, операциите собирање, одземање и множење се затворени. Но, постојат равенки кои и во ова множество немаат решение. На пример, равенката $2x = 5$ нема решение во $\mathbb{Z}$, бидејќи не постои цел број кој помножен со 2 дава резултат 5. Причината за ова е што операцијата делење не е затворена во множеството на цели броеви, т.е. количник на два цели броја не е секогаш цел број.

Множество на рационални броеви

За да се реши претходниот проблем, се воведува *множеството на рационални броеви*, кое се означува со

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Во множеството $\mathbb{Q}$, равенката $2x = 5$ има решение $x = \frac{5}{2}$.

Ирационални броеви

И покрај тоа, постојат равенки кои немаат решение ниту во множеството на рационалните броеви. На пример, равенката $x^2 = 5$ нема решение во $\mathbb{Q}$. За решавање вакви равенки, се воведуваат *ирационалните броеви*. Тие не можат да се запишат како количник на два цели броја и се непериодични децимални броеви со бесконечно многу децимали. Примери за ирационални броеви се:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots, \sqrt{3} = 1,7320508\dots, \pi = 3,14159265\dots,$$

Множеството на ирационални броеви најчесто се означува со $\mathbb{J}$.

Множество на реални броеви

Унијата на множеството на рационални и множеството на ирационални броеви го дава *множеството на реални броеви*, кое се означува со $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Во множеството на реални броеви можат да се решат сите равенки од облик $x^2 = a$, каде што $a > 0$.

Возачи дека $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Во сите овие множества операциите собирање и множење се комутативни и асоцијативни, а множењето е дистрибутивно во однос на собирањето.

Вовед во комплексни броеви

Сепак, не секоја равенка има решение во секое множество на броеви. Затоа често се поставува прашањето во кое множество постои решение на дадена равенка?

Пример 1

Да испитаме во кои множества има решение равенката:

а) $x + 3 = 5$; б) $x + 3 = 1$; в) $2x - 3 = 0$; г) $x^2 = 5$; д) $x^2 + 1 = 0$.

Решение:

- а) Решение на равенката $x + 3 = 5$ е $x = 2$. Бројот $2 \in \mathbb{N}$. Значи, равенката има решение во $\mathbb{N}$, а бидејќи $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, таа има решение и во $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$.
- б) Решение на равенката $x + 3 = 1$ е $x = -2$. Бројот $-2 \in \mathbb{Z}$, што значи дека равенката има решение во $\mathbb{Z}$, па и во $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, но нема решение во $\mathbb{N}$.
- в) Решение на равенката $2x - 3 = 0$ е $x = \frac{3}{2}$. Бројот $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$, што значи дека равенката има решение во $\mathbb{Q}$, а со тоа и во $\mathbb{R}$.
- г) Равенката $x^2 = 5$ има две решенија $x_1 = \sqrt{5}$ и $x_2 = -\sqrt{5}$. Овие решенија припаѓаат во $\mathbb{R}$, но не припаѓаат во $\mathbb{Q}$, т.е. тие се ирационални броеви.
- д) Равенката $x^2 + 1 = 0$ може да се запише во облик:

$$x^2 = -1.$$

Но, квадратот на ниеден реален број не може да биде негативен. Затоа оваа равенка нема решение во множеството на реалните броеви.

Задача 1

Испитај во кои множества има решение равенката:

а) $3x - 4 = 5$; б) $3 + x = 6$; в) $x + 2 = 0$; г) $x^2 - 4 = 5$; д) $x^2 + 4 = 0$.

Од пример 1 гледаме дека постојат равенки кои немаат решение ниту во множеството на реалните броеви $\mathbb{R}$. За да може и тие да се решаваат, се јавува потреба од проширување на множеството на реалните броеви. Но, притоа мора да се води сметка за следното:

1. новото множество треба да ги содржи сите реални броеви;
2. во новото множество треба да постои број чиј квадрат е -1 ;

3. во новото множество да бидат дефинирани операциите собирање и множење и за нив да важат комутативното и асоцијативното својство, како и дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето.

За да се исполни второто барање, по дефиниција се воведува нов број кој се означува со i , таков што неговиот квадрат е -1 .

Запомни!

Бројот i се вика **имагинарна единица** и неговиот квадрат е -1 , т.е. $i^2 \stackrel{\text{def}}{=} -1$.

За степените на имагинарната единица, се добива следното:

$$\begin{aligned} i^1 &= i, \\ i^2 &= -1, \\ i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \\ i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1, \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i, \\ i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = -1, \\ i^7 &= i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \\ i^8 &= i^7 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1 \\ &\text{итн.} \end{aligned}$$

Може да се воочи дека за секој природен број n , степенот i^n прима вредност i , -1 , $-i$, 1 и дека овие четири вредности периодично се менуваат.

За $n = 0$, по дефиниција, $i^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Запомни!

Ако n е ненегативен цел број, тогаш $i^n \in \{i, -1, -i, 1\}$ и сите четири вредности периодично се менуваат. Притоа, ако $n = 4k + r$ ($0 \leq r \leq 3$), т.е. ако r е остатокот од делењето на n со 4 , тогаш $i^n = i^r$.

Пример 2

Пресметај ги степените на имагинарната единица:

- а) i^{21} ; б) i^{48} ; в) i^{27} ; г) i^{54} .

Решение:

- а) $i^{21} = i^{4 \cdot 5 + 1} = i^1 = i$;
 б) $i^{48} = i^{4 \cdot 12 + 0} = i^0 = 1$;
 в) $i^{27} = i^{4 \cdot 6 + 3} = i^3 = -i$;
 г) $i^{54} = i^{4 \cdot 13 + 2} = i^2 = -1$.

Задача 2

Пресметај ги следните степени:

- а)
- i^{101}
- ; б)
- i^{97}
- ; в)
- i^{84}
- ; г)
- i^{26}
- .

Множество на комплексни броеви

Бројот $a + ib$, каде што a и b се дадени реални броеви, а i е имагинарната единица, се вика **комплексен број**. Множеството од сите броеви од ваков облик се вика **множество на комплексни броеви** и се означува со $\mathbb{C}$. Така,

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ако

$$z = a + ib,$$

тогаш бројот a се вика **реален дел** на бројот z и се означува со $\operatorname{Re}(z)$, а бројот b се вика **имагинарен дел** на бројот z и се означува со $\operatorname{Im}(z)$. Притоа, по дефиниција важи:

$$0 \cdot i = 0, \quad 1 \cdot i = i, \quad a + 0i = a, \quad 0 + bi = bi.$$

Пример 3

Запиши ги комплексните броеви ако се дадени нивните реални и имагинарни делови:

- а) $\operatorname{Re}(z) = 4, \operatorname{Im}(z) = -3$; б) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 4$;
 в) $\operatorname{Re}(z) = 3, \operatorname{Im}(z) = 0$; г) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 0$.

Решение:

- а) $z = 4 - 3i$; б) $z = 0 + 4i = 4i$; в) $z = 3 + 0i = 3$; г) $z = 0 + 0i = 0$.

Задача 3

Запиши ги комплексните броеви ако се дадени нивните реални и имагинарни делови:

- а) $\operatorname{Re}(z) = -2, \operatorname{Im}(z) = -5$; б) $\operatorname{Re}(z) = 5, \operatorname{Im}(z) = 0$; в) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 5$.

За даден комплексен број $z = a + bi$, воочи го следното:

- Ако $\operatorname{Im}(z) = b = 0$, тогаш $z = a + 0i = a \in \mathbb{R}$. Оттука следува дека секој реален број е и комплексен, односно $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Според тоа, првиот услов за проширување на множеството на реалните броеви е исполнет.
- Ако $\operatorname{Re}(z) = 0$, тогаш $z = 0 + bi$, и ако $b \neq 0$, тогаш бројот bi се нарекува **чист имагинарен број**.

Задача 4

Одреди ги реалниот и имагинарниот дел на секој од дадените комплексни броеви:

- а) $1 + 3i$; б) $-4 - 3i$; в) $7i$; г) 0 ; д) 4 .

Запомни!

Комплексниот број $-z = -a - bi$ се вика **спротивен** на комплексниот број $z = a + bi$.
 Комплексниот број $a - bi$ се вика **конјугиран комплексен број** на бројот $z = a + bi$ и се означува со $\bar{z}$, т.е. $\bar{z} = a - bi$.

Пример 4

Запиши ги спротивниот и конјугираниот комплексен број на броевите:

- а) $z = 3 - i$; б) $z = 2i$; в) $z = 3$; г) $z = 0 + 0i$.

Решение:

- а) Спротивен број на $z = 3 - i$ е $-z = -3 + i$, а конјугирано комплексен е $\bar{z} = 3 + i$.
 б) Спротивен број на $z = 2i = 0 + 2i$ е $-z = -0 - 2i = -2i$, а конјугирано комплексен е $\bar{z} = 0 - 2i = -2i$.
 Може да се заклучи дека за чист имагинарен број, спротивниот и конјугираниот комплексен број се еднакви.
 в) Спротивен број на $z = 3 = 3 + 0i$ е $-z = -3 - 0i = -3$, а конјугирано комплексен е $\bar{z} = 3 - 0i = 3$.
 г) Спротивен број на $z = 0 = 0 + 0i$ е $-z = -0 - 0i = 0$, а конјугирано комплексен е $\bar{z} = 0 - 0i = 0$.

Задача 5

Дополни: Спротивен број на $z = 6i$ е _____, а неговиот конјугирано комплексен е _____.

Пример 5

Ако $z = a + bi$, покажи дека: а) $\bar{\bar{z}} = z$; б) $\overline{(-z)} = -\bar{z}$.

Решение:

- а) $\bar{\bar{z}} = \overline{(a + bi)} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$;
 б) $\overline{(-z)} = \overline{(-a - bi)} = -a + bi = -(a - bi) = -\bar{z}$.

Знаеме дека во множеството на реалните броеви квадратен корен од негативен број не постои, односно не е дефиниран, бидејќи квадратот на секој реален број е ненегативен. Но, со воведување на имагинарната единица i , за која важи $i^2 = -1$, добиваме дека

$$\sqrt{-1} = i.$$

Ако a е негативен реален број, односно $a < 0$, тогаш можеме да запишеме:

$$a = -|a|.$$

Сега, за квадратниот корен од бројот $a < 0$, се добива:

$$\sqrt{a} = \sqrt{-|a|} = \sqrt{(-1)|a|} = \sqrt{-1}\sqrt{|a|} = \sqrt{|a|} i.$$

На овој начин, квадратниот корен од секој негативен број се изразува преку имагинарната единица. Но, треба да нагласиме дека во овој случај работиме во множеството на комплексни броеви.

Пример 6

- а) $\sqrt{-4} = \sqrt{4}i = 2i$;
 б) $\sqrt{-9} = \sqrt{9}i = 3i$;
 в) $\sqrt{-81} = \sqrt{81}i = 9i$.

Задача 5

Запиши го имагинарниот број:

- а) $\sqrt{-225}$; б) $\sqrt{-196}$; в) $\sqrt{-121}$.

Два комплексни броја се еднакви ако реалните делови им се еднакви и имагинарните делови им се еднакви.

Запомни!

Комплексните броеви $a + bi$ и $c + di$ се еднакви ако $a = c$ и $b = d$.

Пример 7

За кои реални броеви x и y важи равенството:

- а) $x + 3i = 5 - yi$; б) $(x + y) + (x - y)i = 3 + 5i$.

Решение:

- а) За да важи равенство на комплексните броеви, треба $x = 5$ и $-y = 3$, т.е. $y = -3$.
 б) Во овој случај, равенство ќе важи кога x и y се решение на системот линеарни равенки:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Решение на овој систем равенки е $x = 4$ и $y = -1$.

Задача 6

За кои реални броеви x и y важи равенството $(2x - y) + (3x + 2y)i = x + 12i$.

Задачи за вежбање!

- Одреди во кои множества следните равенки имаат решение:
 а) $x^2 - 6 = 0$; б) $x - 10 = 5$; в) $x + 10 = 5$; г) $3x - 4 = 0$.
- Опреди ги следните степени на имагинарната единица:
 а) i^{301} ; б) i^{199} ; в) i^{203} ; г) i^{551} .
- Запиши ги комплексните броеви ако се дадени нивниот реален и нивниот имагинарен дел.
 а) $\operatorname{Re}(z) = -2, \operatorname{Im}(z) = 10$; б) $\operatorname{Re}(z) = 5, \operatorname{Im}(z) = 0$;
 в) $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = -4$; г) $\operatorname{Re}(z) = 11, \operatorname{Im}(z) = 12$.
- За дадените комплексни броеви, определи ги нивните реален и имагинарен дел:
 а) $-1 + 5i$; б) $6 + 2i$; в) 6 ; г) $-8i$.
- Запиши ги спротивниот и конјугираниот комплексен број на броевите:
 а) $z = -10 - 2i$; б) $z = -3i$; в) $z = 4$.
- Нека $z = 4 - 5i$. Опреди ги чекор по чекор $\bar{z}$ и $\overline{(-z)}$.
- Запиши го имагинарниот број:
 а) $\sqrt{-324}$; б) $\sqrt{-625}$; в) $\sqrt{-10000}$.
- За кои реални броеви a и b се точни следните равенства:
 а) $5 + ai = b - 4i$;
 б) $2a - 9i = 8 + 3bi$;
 в) $(a - 2b) - (3a + 4b)i = 3a + 2 + 3bi$.

1.10 СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Потсети се!

- Бројот i се вика **имагинарна единица** и $i^2 = -1$.
- Кој е реалниот, а кој имагинарниот дел на бројот $15 - 10i$?
- Кој е конјугирано комплексниот број на бројот $z = 5 + 13i$?

Во оваа лекција ќе дефинираме збир и разлика на два комплексни броја.

Збир на два комплексни броја е комплексен број чиј реален дел е збир на реалните делови, а имагинарниот дел е збир на имагинарните делови на двата броја.

Разликата на два комплексни броја е комплексен број чиј реален дел се добива кога од реалниот дел на првиот број ќе се одземе реалниот дел на вториот број, а имагинарниот дел се добива кога од имагинарниот дел на првиот број ќе се одземе имагинарниот дел на вториот број.

Запомни!

Ако $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, тогаш збирот и разликата на овие два броја се дефинираат на следниот начин:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \\ z_1 - z_2 &= (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i. \end{aligned}$$

Пример 1

Пресметај ги збирот и разликата на следните броеви:

- $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 - 2i$;
- $z_1 = 4 - 2i$ и $z_2 = 2i$;
- $z_1 = 3 - 6i$ и $z_2 = 5$.

Решение:

- $$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + (3 + (-2))i = 5 + i,$$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (3 - 2i) = (2 - 3) + (3 - (-2))i = -1 + 5i.$$
- $$z_1 + z_2 = (4 - 2i) + 2i = (4 + 0) + (-2 + 2)i = 4 + 0i = 4,$$

$$z_1 - z_2 = (4 - 2i) - 2i = (4 - 0) + (-2 - 2)i = 4 - 4i.$$
- $$z_1 + z_2 = (3 - 6i) + 5 = (3 + 5) + (-6i) = 8 - 6i,$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 6i) - 5 = (3 - 5) + (-6i) = -2 - 6i.$$

Задача 1

Пресметај ги збирот и разликата на следните броеви:

а) $z_1 = 22 + 31i$ и $z_2 = 21 - 25i$;

б) $z_1 = 8 - 3i$ и $z_2 = 10i$;

в) $z_1 = 7 - 2i$ и $z_2 = 29$.

Пример 2

Нека $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 2 + 5i$ и $z_3 = -1 - 7i$. Провери дали се точни равенствата:

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; б) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Решение:

а) $z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (-4 + 5)i = 5 + i$,

$z_2 + z_1 = (2 + 5i) + (3 - 4i) = (2 + 3) + (5 - 4)i = 5 + i$.

Може да заклучиме дека првото равенство важи, т.е. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

б) $(z_1 + z_2) + z_3 = ((3 - 4i) + (2 + 5i)) + (-1 - 7i) = (5 + i) + (-1 - 7i) = 4 - 6i$,

$z_1 + (z_2 + z_3) = (3 - 4i) + ((2 + 5i) + (-1 - 7i)) = (3 - 4i) + (1 - 2i) = 4 - 6i$.

Значи и второто равенство е точно, т.е. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Равенствата од примерот 2 важат не само за конкретните броеви z_1 , z_2 и z_3 , туку и за произволни комплексни броеви.

Запомни!

Операцијата собирање е комутативна и асоцијативна во множеството на комплексни броеви, т.е. за кои било комплексни броеви z_1 , z_2 и z_3 важи:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ (комутативно својство) и} \\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ (асоцијативно својство).}$$

Пример 3

Нека $z = 3 - 2i$. Пресметај:

а) $z + \bar{z}$; б) $z - \bar{z}$.

Решение:

а) $z + \bar{z} = (3 - 2i) + (3 + 2i) = 6 + 0i = 6 \in \mathbb{R}$,

б) $z - \bar{z} = (3 - 2i) - (3 + 2i) = 0 - 4i = -4i$.

Добивме дека збирот на комплексниот број z со неговиот конјугирано комплексен број е реален број, а нивната разлика е чист имагинарен број.

Овие својства важат за кој било комплексен број. Имено, ако $z = a + bi$ е даден комплексен број, тогаш

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a + 0i = 2a$$

е реален број, а

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 0 + 2bi = 2bi$$

е чист имагинарен број.

Пример 4

Дадени се броевите $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 3 - 4i$. Да се провери точноста на равенството $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Решение:

Најпрво, пресметуваме $z_1 + z_2 = (2 + i) + (3 - 4i) = 5 - 3i$, па $\overline{z_1 + z_2} = 5 + 3i$. Од друга страна, $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (2 - i) + (3 + 4i) = 5 + 3i$. Оттука следува дека равенството е точно.

Ова равенство важи и во општ случај, за произволни броеви $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$. Навистина, $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, па $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$. За десната страна на равенството, добиваме: $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$, што ја потврдува точноста на равенството.

Запомни!

За кои било два комплексни броја z_1 и z_2 , важи равенството $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Задачи за вежбање!

1. Пресметај збир и разлика на комплексните броеви:

а) $z_1 = 5 - 6i$ и $z_2 = -4 + 9i$;

б) $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$ и $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$;

в) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5}i$ и $z_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{5}i$;

г) $z_1 = 3 - 9i$ и $z_2 = 5 - 11i$.

2. Нека $z_1 = 7 - 6i$. Да се пресмета $\bar{z} - z$ и $\overline{z - \bar{z}}$.

3. Нека $z_1 = 3 - 2i$ и $z_2 = 5 + 3i$. Да се провери точноста на равенството $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Дали равенството важи во општ случај?

1.11 МНОЖЕЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ. СТЕПЕН НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

Во овој дел ќе дефинираме множење на комплексни броеви.

Најпрво, ќе го разгледаме случајот на множење на два чисти имагинарни броја. Нека $z_1 = ai$, а $z_2 = bi$. Тогаш,

$$z_1 \cdot z_2 = ai \cdot bi = abi^2 = -ab.$$

Значи, производ на два чисти имагинарни броја е реален број.

Запомни!

Производ на два чисти имагинарни броја е реален број.

Пример 1

Пресметај го производот на чистите имагинарни броеви $z_1 = 3i$ и $z_2 = -4i$.

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = 3i \cdot (-4i) = -12i^2 = (-12)(-1) = 12.$$

Задача 1

Пресметај го производот на чистите имагинарни броеви:

$$\text{а) } z_1 = 2i \text{ и } z_2 = 3i; \quad \text{б) } z_1 = -3i \text{ и } z_2 = -5i; \quad \text{в) } z_1 = -10i \text{ и } z_2 = 2i.$$

Во општ случај, множењето на комплексни броеви се сведува на множење на биноми.

Нека $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$. Тогаш за производот на z_1 и z_2 се добива:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Запомни!

Ако $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, производот на овие два броја се дефинира со

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Да напоменеме дека не е потребно формулата да се знае напамет. Многу поедноставно е множењето на комплексни броеви да се прави како множење на биноми.

Пример 2

Пресметај го производот на комплексните броеви $z_1 = 3 - 2i$ и $z_2 = 2 + 4i$.

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 2i)(2 + 4i) = 6 + 12i - 4i - 8i^2 = 6 + 12i - 4i + 8 = 14 + 8i.$$

Задача 2

Пресметај го производот на комплексните броеви:

а) $z_1 = -4 - 3i$ и $z_2 = 5 - 3i$; б) $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 1 - i$; в) $z_1 = 4 + 3i$ и $z_2 = -7 - 2i$.

Пример 3

Нека $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -8i$ и $z_3 = 3 - 4i$. Провери дали се точни равенствата:

а) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$; б) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$; в) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Решение:

а) $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(-8i) = -16i - 24i^2 = 24 - 16i$.

$z_2 \cdot z_1 = (-8i)(2 + 3i) = -16i - 24i^2 = 24 - 16i$.

Од еднаквоста на десните страни следува еднаквост и на левите, т.е. за дадените комплексни броеви важи равенството $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

б) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = ((2 + 3i)(-8i)) \cdot (3 - 4i) = (24 - 16i)(3 - 4i) = 72 - 96i - 48i + 64i^2 = 8 - 144i$.

$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (2 + 3i) \cdot ((-8i)(3 - 4i)) = (2 + 3i)(-32 - 24i) = -64 - 48i - 96i - 72i^2 = 8 - 144i$.

Значи, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

в) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = ((2 + 3i) + (-8i)) \cdot (3 - 4i) = (2 - 5i) \cdot (3 - 4i) = 6 - 8i - 15i + 20i^2 = -14 - 23i$.

$z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = (2 + 3i)(3 - 4i) + (-8i)(3 - 4i) = (18 + i) + (-32 - 24i) = -14 - 23i$.

Оттука, и третото равенство е точно.

Може да се покаже дека овие три равенства важат и за кои било комплексни броеви.

Запомни!

Операцијата множење во множеството на комплексни броеви е **комутативна** и **асоцијативна**, т.е. ако z_1 , z_2 и z_3 се кои било комплексни броеви, тогаш важат:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \text{ (комутативно својство)}$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \text{ (асоцијативно својство)}$$

Исто така, во множеството на комплексни броеви операцијата множење е **дистрибутивна** во однос на операцијата собирање, т.е. за кои било комплексни броеви z_1 , z_2 и z_3 важи:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 \text{ (дистрибутивно својство)}$$

Пример 4

Пресметај $z \cdot \bar{z}$, ако $z = a + bi$.

Решение:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

Воочи дека производот $z \cdot \bar{z}$ е реален број.

Запомни!

За произволен комплексен број $z = a + bi$ производот $z \cdot \bar{z}$ е реален број. Квадратниот корен од тој број се означува со $|z|$ и се вика **модул** или **апсолутна вредност** на комплексниот број z .
Значи:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Пример 5

Пресметај го модулот на комплексниот број:

- а) $1 + i$; б) $2 - i$; в) $4 - 3i$; г) $-3i$.

Решение:

а) $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$

б) $|2 - i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5};$

в) $|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5;$

г) $|-3i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$

Задача 3

Пресметај го модулот на комплексниот број:

- а) $8 + 6i$; б) $3 - 4i$; в) $12i$.

Пример 6

Дадени се комплексните броеви $z_1 = -5 + 3i$ и $z_2 = 4 - 2i$. Да се провери дали за овие броеви е точно равенството $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Решение:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(-5 + 3i)(4 - 2i)} = \overline{(-14 + 22i)} = -14 - 22i,$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (-5 - 3i)(4 + 2i) = -14 - 22i.$$

Значи, десните страни на двете равенства се еднакви, па следува дека и левите страни се еднакви, т.е. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Тврдењето важи и во општ случај, т.е. за произволни комплексни броеви $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.
Имено,

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

Од друга страна, $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$.

Запомни!

Ако z_1 и z_2 се кои било комплексни броеви, тогаш $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Во продолжение, користејќи ја операцијата множење на комплексни броеви за која важи асоцијативното својство, ќе дефинираме степен на комплексен број.

Запомни!

За произволен комплексен број z и за произволен природен број n , степенот z^n се дефинира со:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n$$

Пример 7

Пресметај ги следните степени:

а) $(2 - 3i)^3$; б) $(1 - i)^8$.

Решение:

а) $(2 - 3i)^2 = (2 - 3i)(2 - 3i) = -5 - 12i$

$(2 - 3i)^3 = (2 - 3i)^2(2 - 3i) = (-5 - 12i)(2 - 3i) = -46 - 9i$.

б) $(1 - i)^2 = (1 - i)(1 - i) = -2i$.

Ако искористиме дека $(1 - i)^8 = ((1 - i)^2)^4$, добиваме

$$(1 - i)^8 = (-2i)^4 = (-2)^4 i^4 = 16.$$

Задача 4

Пресметај ги следните степени:

а) $(1 + i)^4$; б) $(2 - i)^3$; в) $(1 - 3i)^5$.

Задачи за вежбање!

- Пресметај го производот на комплексните броеви z_1 и z_2 ако
 - $z_1 = 5 - 6i$ и $z_2 = 4 - 9i$;
 - $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$ и $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$;
 - $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ и $z_2 = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}i$;
 - $z_1 = 3 - 9i$ и $z_2 = 5 - 11i$.
- Пресметај ги следните степени:
 - $(2 + 5i)^3$; б) $(2 - 6i)^4$; в) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}i)^4$.
- Пресметај го модулот на комплексниот број z ако
 - $z = 4 + 7i$; б) $z = 3 - 8i$; в) $z = -7i$.
- Решај ги дадените равенки и провери ја точноста на решенијата:
 - $x^2 - 16 = 0$; б) $x^2 + 16 = 0$.

1.12 ДЕЛЕЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Потсети се!

За произволен комплексен број z , важи дека $z \cdot \bar{z}$ е реален број.

Во овој дел ќе дефинираме делење на два комплексни броја. Нека $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ ($z_2 \neq 0$). Имајќи предвид дека производ на произволен комплексен број со неговиот конјугиран комплексен број е реален број, изразот $\frac{z_1}{z_2}$ го множиме со $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$ и на тој начин во именителот се добива реалниот број $z_2 \cdot \bar{z}_2$. Имено,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

Запомни!

Ако $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ ($z_2 \neq 0$), тогаш количникот на овие два броја се дефинира со:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Пример 1

Пресметај го количникот на броевите z_1 и z_2 ако

- а) $z_1 = 3 - i$ и $z_2 = 2 + 3i$;
- б) $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 - 4i$;
- в) $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ и $z_2 = \sqrt{3} - 2i$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3-i}{2+3i} = \frac{3-i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{(3-i)(2-3i)}{2^2+3^2} = \frac{3-11i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{11}{13}i; \\ \text{б) } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2+3i}{3-4i} = \frac{2+3i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(2+3i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{-6+17i}{25} = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i; \\ \text{в) } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i} \cdot \frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+2i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+2i)}{(\sqrt{3})^2+2^2} = \\ &= \frac{(\sqrt{6}-2\sqrt{3})+(2\sqrt{2}+3)i}{7} = \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{7} + \frac{2\sqrt{2}+3}{7}i. \end{aligned}$$

Задача 1

Пресметај ги количниците:

$$\text{а) } \frac{1-3i}{1+3i}; \quad \text{б) } \frac{2-5i}{6+8i}; \quad \text{в) } \frac{1-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}.$$

Пример 2

Пресметај ги реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број $z = \frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i}$.

Решение:

$$z = \frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i} = \frac{2-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} + \frac{2+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{2^2+1^2} + \frac{(2+i)^2}{2^2+1^2} = \frac{3-4i}{5} + \frac{3+4i}{5} = \frac{6}{5}.$$

Добивме дека $\operatorname{Re}(z) = \frac{6}{5}$, а $\operatorname{Im}(z) = 0$.

Задача 2

Пресметај ги реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број $z = \frac{1-2i}{2+i} + \frac{2+3i}{2-i}$.

Пример 3

Нека $z_1 = 1 - 2i$, а $z_2 = 3 + 4i$. Да се провери точноста на равенството $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Решение:

Најпрво, пресметуваме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{3+4i} = \frac{1-2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{(1-2i)(3-4i)}{3^2+4^2} = \frac{-5-10i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Сега, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$

Од друга страна, $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$

Со ова е покажана точноста на равенството за дадените броеви z_1 и z_2 .

Ова равенство е точно и во општ случај, за произволни броеви z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$).

Запомни!

Ако z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$) се кои било комплексни броеви, тогаш $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$

Задачи за вежбање!

- Пресметај го количникот на комплексните броеви z_1 и z_2 ако
 - $z_1 = 5 - 6i$ и $z_2 = 4 - 9i$
 - $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$ и $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$
 - $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ и $z_2 = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}i$
 - $z_1 = 3 - 9i$ и $z_2 = 5 - 11i$
- Покажи дека равенството $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ е точно за произволни комплексни броеви z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$).
- Упрости ги изразите:
 - $\frac{(2+i)(3-i)}{1+i}$
 - $\frac{(1+2i)^2}{2-i} \cdot \frac{(3-i)^2 + 2i}{1+i}$

1.13 ЗАДАЧИ ОД ПРИМЕНА НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Пред да преминеме на решавање задачи од примена на комплексните броеви, треба да објасниме кога некоја величина може да прими како вредност комплексен број. За тоа ќе треба да видиме како може комплексните броеви да се претстават геометриски.

Геометриско претставување на комплексни броеви

Секој комплексен број $z = a + bi$ е напoлно определен со неговиот реален дел a и неговиот имагинарен дел b , каде што $a, b \in \mathbb{R}$. Оттука, комплексниот број $z = a + bi$ може да се претстави со подредениот пар реални броеви (a, b) , и обратно, секој подреден пар (a, b) може да се запише како комплексен број $z = a + bi$. Значи, постои заемно еднозначно соодветство помеѓу комплексните броеви и подредените парови реални броеви. На пример:

$$z = 3 - 2i = (3, -2);$$

$$z = 5i = (0, 5);$$

$$z = 3 = (3, 0).$$

Исто така, $z = (2, 3) = 2 + 3i$, $z = (1, 0) = 1$, $z = (0, 2) = 2i$.

Од друга страна, познато е дека на секој подреден пар (a, b) соодветствува точно една точка $M(a, b)$ од координатната рамнина, и обратно, на секоја точка $N(x, y)$ од координатната рамнина соодветствува

точно еден подреден пар реални броеви (x, y) , т.е. постои заемно еднозначно соодветство помеѓу подредените парови реални броеви и точките од координатната рамнина. Оттука, може да се заклучи дека постои заемно еднозначно соодветство помеѓу комплексните броеви и точките од координатната рамнина. Тоа значи дека на секој комплексен број $z = a + bi$ соодветствува една точка $M(a, b)$ од координатната рамнина, и обратно, на секоја точка $N(x, y)$ од координатната рамнина соодветствува точно еден комплексен број $z = x + yi$.

Пример 1

Претстави ги комплексните броеви $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 3$ и $z_4 = -3i$ во координатна рамнина.

Решение:

Според претходното објаснување,

$$z_1 = 2 + 3i = (2, 3),$$

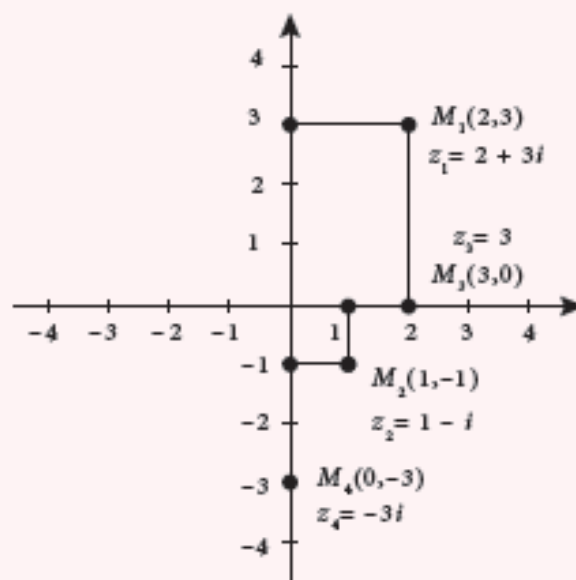
$$z_2 = 1 - i = (1, -1),$$

$$z_3 = 3 = (3, 0),$$

$$z_4 = -3i = (0, -3)$$

На цртеж 1 овие точки се претставени во координатната рамнина.

Воочи дека на реалниот број $z_3 = 3$ му соодветствува точката $M_3(3, 0)$, која лежи на x -оската, а на имагинарниот број $z_4 = -3i$ му соодветствува точката $M_4(0, -3)$, која лежи на y -оската.



Цртеж 1

Задача 1

Претстави ги комплексните броеви $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 2i$ и $z_4 = -4$ во координатна рамнина.

Рамнината чии точки претставуваат комплексни броеви се нарекува *комплексна* или *Гаусова рамнина*. Апцисната оска на таа рамнина се нарекува *реална оска*, а ординатната оска се нарекува *имагинарна оска*.

Во геометрија, векторот чиј почеток е во координатниот почеток, а крајот е во точката $M(a, b)$ се нарекува *радиус-вектор* на точката M и се означува со $\vec{OM}$. Координатите на радиус-векторот се совпаѓаат со координатите на точката M . Притоа, секоја точка во рамнината е напoлно определена со нејзиниот радиус-вектор.

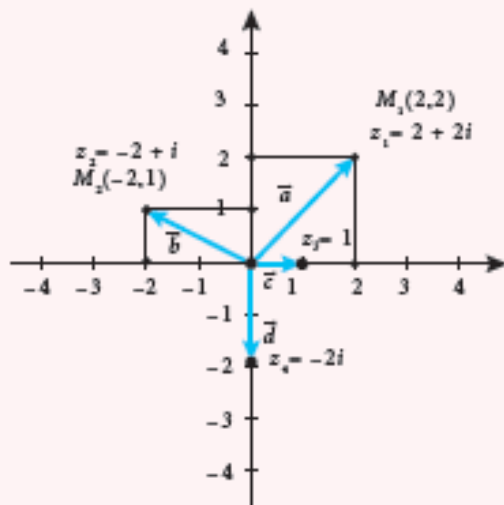
Бидејќи претходно покажавме дека на секој комплексен број соодветствува точно една точка од рамнината, а секоја точка од рамнината е определена со нејзиниот радиус-вектор, може да се заклучи дека помеѓу комплексните броеви и радиус-векторите постои заемно еднозначно соодветство.

Пример 2

Претстави ги во координатна рамнина радиус-векторите $\vec{a} = (2, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1)$, $\vec{c} = (1, 0)$ и $\vec{d} = (0, -2)$. Кои комплексни броеви ги определуваат овие радиус-вектори?

Решение:

На цртеж 2 се претставени соодветните радиус-вектори. Радиус-векторот $\vec{a} = (2, 2)$ го определува комплексниот број $z_1 = 2 + 2i$, радиус-векторот $\vec{b} = (-2, 1)$ го определува $z_2 = -2 + i$, векторот $\vec{c} = (1, 0)$ - бројот $z_3 = 1$, а векторот $\vec{d} = (0, -2)$ бројот $z_4 = -2i$.



Цртеж 2

Задача 2

Претстави ги во координатна рамнина радиус-векторите $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (-2, -4)$, $\vec{c} = (0, -3)$ и $\vec{d} = (5, 0)$. Кои комплексни броеви ги определуваат овие радиус-вектори?

Зошто некои величини се претставуваат со комплексен број?

Ова е суштинското прашање на кое треба да одговориме за да може да ги користиме комплексните броеви во реални задачи од примена.

Во физиката, техниката, роботика и во многу други области, многу величини не се опишуваат само со еден број, туку имаат две важни информации. На пример, кај силата не е важно само *колкава* е по големина, туку и во која насока дејствува. Затоа веламе дека силата е векторска величина, таа има:

- јачина (големина),
- насока.

Како може да ја поврземе силата со комплексен број?

Комплексниот број $z = a + bi$ содржи две компоненти: реален дел a и имагинарен дел b . Овие две компоненти можат да се толкуваат како две меѓусебно нормални насоки (на пример, хоризонтална и вертикална). Затоа, силата може да се запише како комплексен број:

$$F = F_x + iF_y$$

каде што:

- F_x е хоризонталната компонента на силата,
- F_y е вертикалната компонента на силата.

Во ова претставување, всушност, силата се претставува како радиус-вектор затоа што видовме дека помеѓу комплексните броеви и радиус-векторите постои заемно еднозначно соодветство.

Ова претставување на силата, а на ист начин и на многу други векторски величини, е многу корисно бидејќи на ваков начин:

- собирањето на сили станува обично собирање на комплексни броеви, наместо собирање на вектори;
- пресметките се поедноставуваат;
- полесно се решаваат задачи со осцилации, бранови, наизменична струја и многу други примери каде што се среќаваат променливи кои се вектори.

Врз основа на ова, може да се каже дека комплексните броеви не претставуваат „нова“ физичка величина, туку се математичка алатка со која полесно ги опишуваме величините што имаат две компоненти.

Пример 3

Основни величини кои се пресметуваат за електрично коло се: јачина на електричната струја I , која се мери во ампери (ознака A), привиден електричен отпор Z , мерен во оми (симбол Ω) и напонот U , мерен во волти (симбол V). Овие величини се поврзани со формулата $U = I \cdot Z$. За да се избегне забуна со симболот за јачина на електрична струја I , инженерите ја запишуваат имагинарната единица со j .

- Во електрично коло, јачината на електричната струја е $(8 + 3j) A$, а отпорот е $(4 - j) \Omega$. Колку изнесува напонот?
- Во електрично коло со напон од $110 V$, јачината на електричната струја е $(4 + 3j) A$. Колку е отпорот?

Решение:

- Од условите на задачата $I = 8 + 3j$, а $Z = 4 - j$. Напонот на електричната струја се пресметува по формулата $U = I \cdot Z$. Со замена на вредностите за I и Z , добиваме:

$$U = I \cdot Z = (8 + 3j)(4 - j) = (35 + 4j) V.$$

На добиениот резултат може да му се даде следното физичко толкување. Напонот U ќе биде определен со радиус-векторот $\vec{u} = (35, 4)$, па

- реалниот дел ($35 V$) е активниот напон;
- имагинарниот дел ($4j V$) е реактивниот напон.

$$6) Z = \frac{U}{I} = \frac{110}{4 + 3j} = \frac{110}{4 + 3j} \cdot \frac{4 - 3j}{4 - 3j} = \frac{110(4 - 3j)}{4^2 + 3^2} = 4,4 \cdot (4 - 3j) = 17,6 - 13,2j.$$

АКТИВНОСТ

Во електрично коло со напон од 110 V, отпорот е $(6 - 2j) \Omega$. Колку е јачината на електричната струја?

Пример 4

Во електрично коло два извора создаваат комплексни напони $U_1 = (6 + 4j) \text{ V}$ и $U_2 = (3 - 2j) \text{ V}$. Пресметај го вкупниот напон во колото U ако тој е еднаков на збирот на напоните U_1 и U_2 .

Решение:

$$U = U_1 + U_2 = (6 + 4j) + (3 - 2j) = (9 + 2j) \text{ V}.$$

Пример 5

Робот се движи со трансформација претставена со комплексен број $z_1 = 2 + j$, а потоа се применува дополнителна ротација и скалирање $z_2 = 1 - j$. Одреди го резултатот од вкупната трансформација $z = z_1 \cdot z_2$.

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + j)(1 - j) = 3 - j.$$

АКТИВНОСТ

Низ телекомуникациски канал е пратен сигнал $S = 10 + 6j$, а шумот во каналот е $N = 2 - j$. На излезот од каналот се добива сигнал кој е збир од пратениот сигнал и шумот.

- Одреди го примениот сигнал $R = S + N$.
- Од примениот сигнал одреди го чистиот сигнал со одземање на шумот.

Пример 6

Точка во рамнината е зададена со комплексен број $z = 3 + 2j$ (Ова подразбира дека координатите на точката се $(3, 2)$). На точката се применува трансформација $z' = (1 + j) \cdot z$. Одреди ја новата положба на точката.

Решение:

Новата положба на точката ќе биде

$$z' = (1 + j) \cdot z = (1 + j) \cdot (3 + 2j) = 1 + 5j.$$

Задачи за вежбање!

- Претстави ги во комплексна рамнина следните комплексни броеви:
 $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = 1 - 5i$, $z_3 = 2 - 6i$ и $z_4 = -i$.
- Опреди ги комплексните броеви кои соодветствуваат на подредените парови реални броеви $(2, 1)$, $(-2, 4)$, $(-3, -2)$, $(0, 4)$, $(2, 0)$, а потоа претстави ги во координатна рамнина.
- Опреди ги радиус-векторите соодветни на комплексните броеви $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 2 - 4i$, $z_3 = 3 - 5i$ и $z_4 = -2i$ и претстави ги во координатна рамнина.
- Една локација е претставена со бројот $z = -2 + 4i$.
 - Запиши ја локацијата со координати.
 - Дали точката е северно или јужно од координатниот почеток?
 - Дали точката е источно или западно од координатниот почеток?
 Претпостави дека во координатната рамнина лево е запад, десно е исток, горе е север, а долу – југ.
- Позицијата на еден сателит во рамнина е дадена со $z = 9 - 6i$.
 - Ореди ги реалниот и имагинарниот дел.
 - Дали сателитот се наоѓа над или под хоризонталната оска?
 - Колку единици е оддалечен од y -оската?
- Движењето на еден мал чамец во рамнина е опишано со комплексниот број $z_1 = 6 + 2i$. Поради струењето на водата, дополнително поместување е $z_2 = -1 + 3i$.
 - Ореди го вкупното поместување на чамецот.
 - Во која насока е поголемо влијанието: по хоризонтала или по вертикала?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Да се упрости секој од изразите:

а) $x^{-2} \cdot x^{-4} \cdot x^6$; б) $\left(\frac{3x^2}{4x^4}\right)^3$; в) $\left(\frac{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}{y^{-3}zx^{-8}}\right)^{-1}$.

2. Кои од следните искази се вистинити:

- а) квадратен корен од 0 не постои;
 б) квадратен корен од 0 е 0;
 в) изразот $\sqrt{15}$ нема смисла;
 г) изразот $\sqrt[3]{-15}$ е дефиниран, има смисла;
 д) $\sqrt[3]{-343} = -7$?

3. За која вредност на x , изразот има смисла:

а) $\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{x}$; б) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{2x^2+4}$.

4. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\sqrt{25} - 3\sqrt[3]{64} + 4\sqrt[3]{-32}$; б) $9^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}}$.

5. Изврши ги назначените операции:

а) $x^3 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 : x^{\frac{1}{4}} \quad x > 0$; б) $2a^2b^{\frac{1}{2}} : \left(a^{-1}b^{\frac{2}{3}}\right)^2, \quad a \neq 0, b > 0$.

6. Запиши го степенот во вид на корен:

а) $5^{\frac{1}{2}}$; б) $2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}, \quad x \geq 0$; в) $2x+3y^{\frac{1}{2}}, \quad y \geq 0$.

7. Запиши го коренот како степен со рационален степен показател:

а) $\sqrt{21}$; б) $\sqrt[3]{18}$; в) $\sqrt[4]{a^2b^4}, \quad a, b \geq 0$.

8. Колкав е дијаметарот на една бура со траење од 18 часа ако метеоролозите утврдиле дека силните бури можат да се опишат со формулата $D = 9,4 \cdot t^{\frac{2}{3}}$, каде што D е дијаметарот на бурата, а t е времетраењето на бурата?

9. Сведи ги корените на заеднички коренов показател:

а) $\sqrt[3]{x^2}, \sqrt[4]{xy^2}, \sqrt[5]{xy}, \quad x, y \geq 0$; б) $\sqrt{a}, \sqrt[4]{a^2b}, \sqrt[5]{a^5b^5}, \quad a, b \geq 0$.

10. Подреди ги по големина корените:

а) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[4]{45}$; б) $\sqrt[3]{16}, \sqrt[4]{250}, \sqrt[5]{150}$.

11. Запиши го коренот во нормален вид:

а) $\sqrt{250}$; б) $\sqrt[3]{8a^6b^5}$; в) $\frac{b}{a^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{2b^4}}, \quad a \geq 0, b > 0$.

12. Изврши ги назначените операции:

а) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{12}) \cdot \sqrt{3}$; б) $(\sqrt[3]{x^4y^2} - 3\sqrt[3]{x^6y^7}) : \sqrt[3]{x^2y^2}, \quad x, y > 0$;
 в) $(\sqrt[3]{ab^2})^2 \cdot \sqrt[3]{ab}$; г) $\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a^3}}$; д) $\sqrt{x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}}$; е) $\sqrt[3]{b \cdot \sqrt{b^3} \cdot \sqrt[3]{b^2}}$.

13. Кои од дадените изрази се сведуваат на рационални:

а) $a + \sqrt{a}$, $a \geq 0$; б) $\frac{2}{a} + \sqrt{a^4}$, $a > 0$; в) $a - \sqrt[5]{64a^6}$.

14. Рационализирај го именителот на дропката:

а) $\frac{23}{6 - \sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$; в) $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, $a, b > 0$.

15. Упрости го изразот $\left(\frac{16}{\sqrt{6} + 1} + \frac{3}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}} \right) (\sqrt{6} + 11)$.

16. Низата на Фибоначи може да се пресмета со користење на формулата на Бинет, така што n -тиот

член на низата е $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$. Со користење на оваа формула определи ги првите четири члена на оваа низа.

17. Запиши ги комплексните броеви ако се дадени:

а) $\operatorname{Re}(z) = 15$, $\operatorname{Im}(z) = -13$; б) $\operatorname{Re}(z) = -99$, $\operatorname{Im}(z) = 1$; в) $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) = -21$.

18. Пресметај ги збирот и разликата на z_1 и z_2 ако

а) $z_1 = 14 - 5i$, $z_2 = -12 + 6i$; б) $z_1 = 4 - 9i$, $z_2 = -11 + 9i$; в) $z_1 = 12 - 3i$, $z_2 = -12 + 8i$.

19. Пресметај ги производот и количникот на z_1 и z_2 ако

а) $z_1 = 7 - 6i$, $z_2 = -1 + 5i$; б) $z_1 = -1 - 4i$, $z_2 = -10 + 4i$; в) $z_1 = -7 + 3i$, $z_2 = 2 - 5i$.

20. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{24}$; б) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \dots + \frac{1}{i^{24}}$.

21. Изврши го степенувањето и одреди го модулот на добиениот комплексен број:

а) $(2 + i)^2$; б) $(1 - 4i)^3$; в) $(\sqrt{3} + 3i)^2$.

22. Упрости го изразот:

а) $\frac{2 - 3i}{6 + 8i} + (2 + i)(4 - i) - (1 - i)^2$; б) $\frac{(1 + 2i)^3 + (3 + 3i) \cdot 5i}{(3 - 4i)^2}$.

23. Даден е комплексниот број $z_1 = 1 - 2i$. Определи комплексен број $z = x + yi$, таков што

$\operatorname{Re}(z \cdot z_1) = -4$, а $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z_1}\right) = -\frac{7}{5}$.

24. Провери ја точноста на равенството $(\sqrt{3} - i)^6 + (\sqrt{3} + i)^6 = -128$.

25. Комплексните броеви $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 1 + 6i$, $z_3 = 4 - 2i$, $z_4 = -3$ и $z_5 = -5i$ претстави ги во комплекс-на рамнина со:

- а) точки од рамнината;
б) радиус-вектори.

26. Векторот на ветерот е опишан со комплексниот број $z = -4 + 5i$.

- а) Запиши го бројот како подреден пар.
б) Дали ветерот дува повеќе во западна или северна насока?
в) Во кој квадрант се наоѓа точката што му одговара?

27. Состојбата на еден технички систем е опишана со бројот $z_0 = 3 - i$. По интервенција, состојбата се менува за $\Delta z = -2 + 4i$.

- а) Одреди ја новата состојба на системот.
б) Кој дел од промената е поголем: реалниот или имагинарниот?

КВАДРАТНИ РАВЕНКИ И РАВЕНКИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА КВАДРАТНИ

Квадратните равенки претставуваат еден од најважните типови на равенки во алгебра и претставуваат основа за понатамошно изучување на многу математички дисциплини, за моделирање и решавање на нелинеарни зависимости и проблеми. Тие, заедно со равенките што се сведуваат на квадратни се клучни за разбирање и анализа на нелинеарните зависимости кои се појавуваат во различни научни полиња и моделирање на различни реални проблеми во применетите науки. Изучувањето на квадратните равенки и методите за нивно решавање е важно бидејќи тие се појавуваат во многу математички и реални проблеми и овозможуваат моделирање на различни појави.

Квадратните равенки наоѓаат примена во многу различни научни дисциплини. Во физика се користат за пресметка на траектории на проектили, во економија за оптимизација на трошоци и профити, во биологија за моделирање на растот на популациите, а во инженерство за анализа на оптоварување на конструкции каде деформациите се нелинеарни.

2.1 ПОИМ ЗА КВАДРАТНА РАВЕНКА. ВИДОВИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ. РЕШЕНИЕ НА КВАДРАТНА РАВЕНКА

Потсети се!

- Равенката од облик $ax + b = 0$ е линеарна равенка со една непозната. На пример, $3x - 1 = 0$, $5 - 2y = 0$, $4x = 6$ се линеарни равенки со една непозната.
- Збирот на два или повеќе мономи се вика полином.
- Степенот на полиномот е максималниот степен на мономите што влегуваат во неговиот запис со коефициент различен од нула.

Активност

Кои од следните полиноми $7x + x^2 - 2x^3 - 1$, $5x^2 - 2x - 1$, $-3x + 2$, $4x^4 - x^2$, $-3x^2 + 2$, $x^2 - x$ се полиноми од втор степен?

Запомни!

- Равенката од облик $ax^2 + bx + c = 0$, каде што x е променлива, a, b, c се реални броеви и $a \neq 0$ се вика **квадратна равенка со една непозната**.
- Мономот ax^2 е **квадратен член**, bx е **линеарен член**, а c е **слободен член** на квадратната равенка.
- Бројот a е коефициент на квадратниот член, b е коефициент на линеарниот член, а c е слободен коефициент.

На пример, квадратни равенки се $x^2 = 5$, $x^2 - 16 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $2 = x^2 + 3x$.

Некои формули во физиката се квадратни равенки, на пример изминатиот пат при рамномерно забрзано праволиниско движење, се изразува со квадратна равенка по променливата t , т.е.

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Равенката $5x^2 - 2x - 1 = 0$ е квадратна равенка со коефициенти $a = 5$, $b = -2$ и $c = -1$.

Пример 1

Равенката $(x - 1)^2 = 3x - 2$ е квадратна равенка. За да ги определиме коефициентите, со следните операции ја сведуваме равенката во облик $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 &= 3x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 3x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 - 3x + 2 &= 0 \\ x^2 - 5x + 3 &= 0\end{aligned}$$

Значи, $a = 1$, $b = -5$ и $c = 3$.

Задача 1

Кои од следните равенки се квадратни? За равенките што се квадратни, определи ги коефициентите.

- а) $x^2 - 1 = 0$; б) $2x + 3 = 0$; в) $5x^2 - 2x^2 + 1 = 0$; г) $(2x + 1)^2 + 1 = 0$; д) $(2x + 2)^2 = (x + 3)^2$.

Запомни!

- Равенката од облик $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ се нарекува **општ вид на квадратна равенка со една непозната**.
- Условот $a \neq 0$ мора да е исполнет бидејќи ако $a = 0$, тогаш равенката не е квадратна.

Задача 2

Трансформирај ги равенките во општ вид:

- а) $2x(x - 1) = x - 3$; б) $\frac{x-3}{2} + \frac{x(x-3)}{3} = 1$; в) $(3 - 2x)^2 - 5 = (2 - x)^2$.

Запомни!

- Квадратна равенка во која $a = 1$ велиме дека е во **нормален вид** и вообичаено ја запишуваме како $x^2 + px + q = 0$.
- Секоја квадратна равенка може да ја трансформираме во нормален вид, така што прво ќе ја трансформираме во општ вид, а потоа целата равенка ќе ја поделиме со коефициентот a .

Пример 2

Равенката $-2x^2 - 5x + 4 = 0$ ќе ја сведеме на квадратна равенка во нормален вид ако ја поделиме со коефициентот $a = -2$:

$$-2x^2 - 5x + 4 = 0 : (-2)$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - 2 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 2,5x - 2 = 0$$

Притоа, $p = \frac{5}{2} = 2,5$, $q = -2$.

Задача 3

Запиши ја равенката во нормален вид.

а) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;

б) $(3 - 2x)^2 - 5 = x$;

в) $-2x(x + 3) + (x - 3)(x + 1) = 6$;

г) $(3x - 2)^2 = (x + 3)^2$.

Запомни!

- Ако $b \neq 0$ и $c \neq 0$ (секако $a \neq 0$), тогаш равенката $ax^2 + bx + c = 0$ се нарекува **полна квадратна равенка**. Значи, равенката е полна квадратна равенка ако во нејзиниот општ вид сите три коефициенти се различни од нула.
- Равенките од видот $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$; $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$ и $ax^2 = 0$ се нарекуваат **неполни квадратни равенки**.
- Ако еден од коефициентите a , b или c на равенката $ax^2 + bx + c = 0$ зависи од некој параметар, тогаш таа равенка се нарекува **параметарска квадратна равенка** (квадратна равенка со параметри или со општи коефициенти). Параметарот е константа чија вредност зависи од поставениот услов во задачата.

Пример 3

Одреди ги коефициентите на параметарската равенка $(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 5 = 0$.

Решение:

Равенката $(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 5 = 0$ е параметарска квадратна равенка во која коефициентите зависат од параметарот m . Нејзините коефициенти се: $a = m - 1$, $b = -2(m + 2)$ и $c = m - 5$.

Пример 4

За кои вредности на параметарот m равенката $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$ е:

- полна квадратна равенка,
- неполна квадратна равенка?

Решение:

Коефициентите на равенката се $a = 2m - 1$, $b = -3(m + 2)$ и $c = 5$.

- За равенката $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$ да биде квадратна равенка, треба $a \neq 0$.

Добиваме $2m - 1 \neq 0$, односно $m \neq \frac{1}{2}$.

За да биде полна квадратна равенка, треба и линеарниот член b и слободниот член c да бидат различни од нула. Слободниот член е $c = 5 \neq 0$.

Од $b \neq 0$ имаме:

$$-3(m + 2) \neq 0$$

$$m + 2 \neq 0$$

$$m \neq -2$$

Значи, равенката $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$ ќе биде полна квадратна равенка за сите вредности на m различни од $\frac{1}{2}$ и различни од -2 .

- Бидејќи во оваа равенка слободниот коефициент е различен од нула, равенката ќе биде неполна равенка само ако линеарниот член b е еднаков на нула, т.е.

$$-3(m + 2) = 0,$$

$$m + 2 = 0$$

$$m = -2$$

Значи, равенката $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$ ќе биде неполна квадратна равенка за $m = -2$.

Задача 4

За кои вредности на k равенката $(k + 2)x^2 - 3x - k + 1 = 0$ е:

- полна квадратна равенка,
- неполна квадратна равенка?

Решавање квадратна равенка

Потсети се!

- За $x = 2$, равенката $3x - 6 = 0$ станува точно бројно равенство.

- $\sqrt{x^2} = |x|$.

- Разложување на полиноми на множители:

$$4x^2 + 2x = 2x(2x + 1)$$

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$

- Парен корен од негативен број е комплексен број. На пример, $\sqrt{-9} = 3i$; $\sqrt[4]{-16} = 2i$

Активност

За кои вредности на $x \in [-2, -1, 0, 1, 3]$ равенката $x^2 - x - 6 = 0$ ќе премине во точно бројно равенство?

Запомни!

Вредноста на непознатата за која квадратната равенка станува точно бројно равенство се вика **решение** или **корен** на равенката.

Пример 5

Провери дали $x = 4$ е решение на равенката $2x^2 - 6x - 8 = 0$.

Решение:

За да провериме дали $x = 4$ е решение на равенката $2x^2 - 6x - 8 = 0$ ќе замениме во равенката. Имаме,

$$2 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 8 = 0$$

$$2 \cdot 16 - 24 - 8 = 0$$

$$32 - 32 = 0$$

$$0 = 0$$

Гледаме дека со замената на $x = 4$, равенката станува точно бројно равенство.

Според тоа, $x = 4$ е решение на равенката $2x^2 - 6x - 8 = 0$.

Пример 6

За која вредност на параметарот k бројот 2 е решение на равенката $(k + 2)x^2 - 3x - k + 1 = 0$?

Решение:

Ако во равенката го замениме x со 2, добиваме

$$2^2 \cdot (k+2) - 3 \cdot 2 - k + 1 = 0$$

$$4(k+2) - 6 - k + 1 = 0$$

$$3k + 3 = 0$$

$$k = -1$$

Значи, за $k = -1$ равенката е $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $x = 2$ е решение на оваа квадратна равенка.

Задача 5

Дадена е равенката $(2m-1)y^2 - 3(m+2)y + 5 = 0$, $m \neq \frac{1}{2}$. Определи ја вредноста на параметарот m , за $y = 1$ да биде решение на равенката.

Задачи за вежбање!

1. Кои од дадените равенки се квадратни?

а) $7x^2 - 3 = 3x$; б) $0 \cdot x^2 + 2x - 3 = 0$; в) $(x^2 + 5)^2 - 1 = 0$; г) $\frac{1}{2}x^2 = 0$.

2. Определи ги коефициентите a , b и c на следните равенки:

а) $8x^2 - 3x + 9 = 0$; б) $-9x = 8x^2$; в) $\sqrt{3}x^2 - 5 = 8x$.

3. Трансформирај ги во општ вид следните равенки:

а) $2(x+5)(x-2) = 3$; б) $(4x+3)(2x-1) = (x+1)(x+3)$;

в) $\frac{3x-4}{2} + \frac{(x-1)(x+2)}{3} = 1$; г) $(2x-1)(x+3) = \frac{x-2}{4}$.

4. Запиши ги следните равенки во нормален вид:

а) $-2x^2 - 4x + 16 = 0$; б) $3x^2 = 9x$;

в) $3(x+2)^2 - 24 = 0$; г) $\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3 = 0$.

5. Кои од следните квадратни равенки се полни, а кои неполни квадратни равенки?

а) $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$; б) $(x+5)(x+2) = 10$; в) $\sqrt{2}x^2 = 8x$.

6. За која вредност на m дадената равенка ќе биде квадратна?

а) $(3m-1)x + (2m+1)x^2 = 5m$; б) $(m+1)x^2 + (2m+3) = 0$

в) $(m-3)x^2 + (m-3)x + (m-3) = 0$.

7. За кои вредности на параметарот k равенката $(k-3)t^2 - (2k+1)t = 2k-1$ ќе биде:

а) квадратна равенка;

б) полна квадратна равенка;

в) неполна квадратна равенка од видот $at^2 + c = 0$;

г) неполна квадратна равенка од видот $at^2 + bt = 0$.

8. Дадена е равенката $2x^2 - 4x + 1 = 0$. Провери дали некој од броевите 0 , 1 , $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ е решение на равенката.

9. За која вредност на параметарот k равенката $(k+2)y^2 + (2k-3)y - 5 = 0$ има решение:

а) $y = -1$ б) $y = \frac{1}{2}$?

2.2 РЕШАВАЊЕ НЕПОЛНИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Запомни!

- Да се реши една равенка значи да се најдат сите нејзини решенија.
- Производот на два или повеќе броја е нула ако и само ако барем еден од броевите е еднаков на нула.

Активност

Реша ја равенката $(3x + 6)(x - 1) = 0$.

Дадената равенка е производ на $3x + 6$ и $x - 1$ и за определување на решенијата на оваа равенка ќе го користиме фактот дека производ на два или повеќе множители е еднаков на нула ако барем еден од множителите е еднаков на нула. Според тоа, оваа равенка ќе биде точно бројно равенство ако $3x + 6 = 0$ или $x - 1 = 0$, односно ако $x = -2$ или $x = 1$. Значи, решенијата на равенката се $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$.

Задача 1

Определи ги решенијата на следните равенки:

- а) $(x + 2)(3x - 5) = 0$; б) $2(6x - 3)(2x - 5) = 0$;
в) $(x + 3)(2x - 1)(5x - 8) = 0$; г) $(x + 3)(x - 3)(2x - 5)(4x - 10) = 0$.

Пример 1

Реша ја неполната квадратна равенка

- а) $ax^2 + bx = 0$; б) $ax^2 = 0$.

Решение:

- а) Равенката $ax^2 + bx = 0$ може да ја запишеме како $x(ax + b) = 0$ и јасно е дека решенија на оваа равенка се $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$.
- б) Равенката $ax^2 = 0$ ќе биде точно бројно равенство ако $x^2 = 0$, т.е. за оваа равенка $x_1 = x_2 = 0$.

Запомни!

Ако квадратната равенка станува точно бројно равенство само за една вредност на променливата x , на пример $x = d$, т.е. $x_1 = x_2 = d$, тогаш велиме дека $x_1 = x_2 = d$ е **двоен (двократен) корен** на квадратната равенка.

Пример 2

Решете ги равенките:

а) $3x^2 + 8x = 0$;

б) $(2x - 1)^2 = 1$;

в) $(x - 2)(2x - 3) = 6$.

Решение:

а) $3x^2 + 8x = 0$

$x(3x + 8) = 0$

$x = 0$ или $3x + 8 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3}$

б) $4x^2 - 4x + 1 = 1$

$x(4x - 4) = 0$

$x = 0$ или $4x - 4 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 1$

в) $2x^2 - 3x - 4x + 6 = 6$

$x(2x - 7) = 0$

$x = 0$ или $2x - 7 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{2}$

Запомни!

- Решенија на равенката $ax^2 + bx = 0, a \neq 0, b \neq 0$ се $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$.
- Решенија на равенката $ax^2 = 0, a \neq 0$ се $x_1 = x_2 = 0$.

Задача 2

Определи ги решенијата на следните равенки:

а) $(x + 3)(x - 5) = -15$;

б) $(x - 1)(3x + 2) = x - 2$;

в) $\frac{x(x-2)}{2} - \frac{1-4x}{3} = \frac{x-1}{3}$.

Пример 3

Решете ја неполната квадратна равенка $ax^2 + c = 0, a \neq 0, c \neq 0$.

Решение:

Равенката $ax^2 + c = 0$ може да ја запишеме како $ax^2 = -c$, односно $x^2 = -\frac{c}{a}$, $\left(|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$. Сега за решенијата на равенката имаме два различни случаи:

- Ако $-\frac{c}{a} > 0$ (a и c се со различни знаци), тогаш равенката има две различни решенија кои

се спротивни реални броеви: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, т.е. $x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

- Ако $-\frac{c}{a} < 0$ (a и c се со исти знаци), тогаш решенијата на равенката не се реални броеви,

т.е. решенија на равенката се комплексните броеви $x_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}}$.

Запомни!

Решенијата на неполната квадратна равенка $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$ се:

1. Ако $-\frac{c}{a} > 0$ (a и c се со различни знаци), тогаш

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad \text{т.е. } x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

2. Ако $-\frac{c}{a} < 0$ (a и c се со исти знаци), тогаш

$$x_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Пример 4

Решете ги равенките:

а) $6x^2 - 30 = 0;$

б) $3x^2 + 12 = 0;$

в) $(x+3)^2 - 3 - 5x = x.$

Решение:

а) $6x^2 - 30 = 0$

$$6x^2 = 30$$

$$x^2 = 5$$

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_2 = -\sqrt{5}$$

б) $3x^2 + 12 = 0$

$$3x^2 = -12$$

$$x^2 = -4$$

$$x_1 = 2i, \quad x_2 = -2i$$

в) $(x+3)^2 - 3 - 5x = x$

$$x^2 + 6x + 9 - 3 - 5x = x$$

$$x^2 = -6$$

$$x_1 = \sqrt{6}i, \quad x_2 = -\sqrt{6}i.$$

Задача 3

Определете ги решенијата на равенките:

а) $2x^2 - 18 = 0;$

б) $(x+2)(x-1) = x;$

в) $(2x-1)^2 = 2 - 4x.$

Пример 5

За кои вредности на параметарот m равенката $(3m-6)x^2 + m + 4 = 0$ ќе има реални решенија?

Решение:

$$(3m-6)x^2 + m + 4 = 0$$

$$(3m-6)x^2 = -m-4$$

$$x^2 = \frac{-m-4}{3m-6}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{-m-4}{3m-6}}$$

За да има реални решенија, треба $\frac{-m-4}{3m-6} \geq 0$, односно треба $3m-6$ и $-m-4$ да се со ист знак.

Оттука ги добиваме следните системи неравенки за определување на вредностите на m :

$$\begin{cases} -m-4 \geq 0 \\ 3m-6 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -m-4 \leq 0 \\ 3m-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m > 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m \geq -4 \\ m < 2 \end{cases}.$$

Првиот систем нема решение, а од вториот систем добиваме $[-4, 2)$. Значи, равенката ќе има реални корени ако $m \in [-4, 2)$.

Задача 4

За кои вредности на параметарот k равенката $(2k-4)x^2 - k + 6 = 0$ ќе има комплексни решенија?

Задачи за вежбање!

Опреди ги решенијата на равенката $(1-7)$:

1. а) $(2x+5)(4-3x)=0$; б) $\left(2-\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{5}{4}x-1\right)=0$.
2. а) $x(x+4)=x(2x-5)$; б) $(x-2)^2-4=0$.
3. а) $8x^2+3x=0$; б) $9x^2-\frac{5}{2}x=0$.
4. а) $(3-\sqrt{3})x^2=0$; б) $-\frac{5\sqrt{5}}{2}x^2=0$.
5. а) $3x^2-27=0$; б) $\frac{1}{3}x^2=\frac{3}{4}$.
6. а) $36+x^2=0$; б) $-\frac{5}{2}x^2-4=0$.
7. а) $x(x-3)-x+16=-2x(2-x)$; б) $\frac{3x^2-5x}{2}-\frac{2(x^2-3)}{3}=\frac{5x^2+8}{4}$.
8. За кои вредности на параметарот k равенката $(k+1)x^2+k-3=0$ ќе има реални решенија?

2.3 РЕШАВАЊЕ ПОЛНИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

АКТИВНОСТ

Разложи ги полиномите на множители:

а) $x^2 + x - 12$; б) $x^2 - 6x + 8$.

Решение:

а) $x^2 + x - 12 = x^2 + 4x - 3x - 12 = x(x + 4) - 3(x + 4) = (x + 4)(x - 3)$.

б) Прво се дополнува до полн квадрат со додавање и одземање 9, со што се добива
 $x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x - 4)(x - 2)$.

Пример 1

Реша ја равенката $x^2 + 5x + 6 = 0$ на два начини:

а) со разложување на множители; б) со дополнување до полн квадрат.

Решение:

а) $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) + 2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$.

Производот $(x + 3)(x + 2)$ ќе биде еднаков на нула ако $x + 3 = 0$ или $x + 2 = 0$. Значи, решенија на равенката се $x_1 = -3$ и $x_2 = -2$.

б) Линеарниот член $5x$ може да го запишеме како $2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x$ и може да дополниме до полн квадрат

со додавање и одземање на $\left(\frac{5}{2}\right)^2$.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0.$$

Исто како под а) заклучуваме дека решенијата се $x_1 = -3$ и $x_2 = -2$.

Задача 1

Реша ги равенките на два начини:

1) со разложување на множители; 2) со дополнување до полн квадрат.

а) $x^2 - 8x = 0$; б) $x^2 + 7x = 0$; в) $x^2 - ax = 0$; г) $x^2 + \frac{b}{a}x = 0, a \neq 0$.

За да ги определиме решенијата на полната квадратна равенка $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, прво равенката ја делиме со a и добиваме $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, односно $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$. Сега, за изразот на левата страна да го дополниме до полн квадрат, на двете страни од равенството додаваме $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Со тоа ја добиваме равенката $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$, т.е. $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Со коренување на двете страни на равенството добиваме $\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, односно $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$. Значи, решенија (корени) на равенката $ax^2 + bx + c = 0$ се $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, кои заедно може да ги запишеме со формулата $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Запомни!

Решенијата на равенката $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ги одредуваме со формулата $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Пример 2

Реши ги квадратните равенки:

а) $x^2 - 2x - 8 = 0$; б) $2x^2 = 4x + 1$.

Решение:

а) Вредностите на коефициентите $a = 1$, $b = -2$, $c = -8$ ги заменуваме во формулата

$$x_{1/2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2},$$

т.е. $x_1 = 4$ и $x_2 = -2$.

б) Прво равенката ја запишуваме во општ вид, $2x^2 - 4x - 1 = 0$, па вредностите на коефициентите $a = 2$, $b = -4$, $c = -1$ ги заменуваме во формулата и добиваме

$$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 6}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

Решенија на равенката се $x_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$ и $x_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$.

Запомни!

Формулата за решавање полни квадратни равенки може да се применува и за решавање неполни квадратни равенки.

Пример 3

Со примена на формулата за решавање квадратна равенка, реши ги равенките:

а) $9x^2 = 0$; б) $3x^2 - 12x = 0$; в) $5x^2 - 10 = 0$.

Решение:

а) $a = 9, b = 0$, па $x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0+0}}{2 \cdot 9} = 0$, т.е. $x_1 = x_2 = 0$.

б) $a = 3, b = -12, c = 0$, $x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-0}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 12}{6}$, $x_1 = \frac{12+12}{6} = 4$, $x_2 = \frac{12-12}{6} = 0$.

в) $a = 5, b = 0, c = -10$, $x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0+200}}{2 \cdot 5} = \frac{\pm \sqrt{2 \cdot 100}}{10} = \frac{\pm 10\sqrt{2}}{10} = \pm \sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

Воочи дека со примена на формулата имаме:

- Ако $b = c = 0$, тогаш решенијата на неполната равенка $ax^2 = 0$ се $x_1 = x_2 = 0$.
- Ако $b = 0$, тогаш решенијата на неполната равенка $ax^2 + c = 0$ се $x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.
- Ако $c = 0$, тогаш решенијата на неполната равенка $ax^2 + bx = 0$ се $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Задача 2

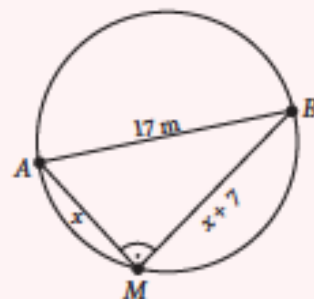
Опреди ги решенијата на равенката:

а) $4x^2 - 4x - 24 = 0$; б) $5x^2 + 2x - 1 = 0$.

Пример 4

Во еден кружен парк со дијаметар 17 метри има две порти А и В кои се наоѓаат една спроти друга (на спротивни краеве од дијаметарот). На работ на паркот треба да се постави столб така што разликата на растојанијата од столбот до двете порти А и В да биде 7 метри.

- Дали е можно да се постави таков столб?
- Ако е можно, на кое растојание од портата А и на кое растојание од портата В ќе се наоѓа столбот?



Решение:

За полесно решавање ќе направиме скица. Нека AB е дијаметарот на кружниот парк во чии крајни точки се двете порти. Со M ќе ја означиме положбата на бараниот столб. Растојанието AM ќе го означиме со x .

Разликата на растојанијата од столбот до двете порти A и B е 7 метри, имаме: $\overline{BM} - \overline{AM} = 7\text{ m}$ од каде што добиваме $\overline{BM} = x + 7$.

Триаголникот AMB е триаголник сместен во полукружницата (едната страна е дијаметарот на кружницата, а спротивното теме лежи на кружницата). Според Талесова теорема, овој триаголник е правоаголен. Со примена на Питагоровата теорема, добиваме:

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 17^2$$

$$x^2 + (x+7)^2 = 289$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 - 289 = 0$$

$$2x^2 + 14x - 240 = 0 : 2$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-120)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-7 \pm 23}{2}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 23}{2} = 8, x_2 = \frac{-7 - 23}{2} = -15$$

Добивме решенија 8 и -15.

Бидејќи решението на равенката треба да даде растојание помеѓу две точки, тоа не може да биде негативен број, т.е. бројот -15 нема да биде решение.

Решение е бројот 8.

Според тоа, столбот ќе биде поставен на растојание од 8 m од портата A и $8 + 7 = 15\text{ m}$ од портата B .

Дискриминанта на квадратна равенка

Активност

Одреди ја вредноста на изразот $b^2 - 4ac$, ако a , b и c се коефициентите на равенката $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Видовме дека решенијата на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$) ги определуваме со формулата

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Запомни!

Поткореновиот израз $b^2 - 4ac$ се означува со D , т.е. $D = b^2 - 4ac$ и се вика **дискриминанта** на квадратната равенка.

Со користење на ознаката за дискриминанта, формулата за определување на решенијата може да ја

запишеме како $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

1. Ако коефициентите a , b , c на квадратната равенка се реални броеви, тогаш за определување

на решенијата користи ја формулата $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

2. Ако некој од коефициентите a , b или c е параметар или израз, тогаш поедноставно е прво да

се определи дискриминантата $D = b^2 - 4ac$, а потоа да се користи формулата $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Пример 7

Равенката $x^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{3})x + \sqrt{21} = 0$ ќе ја решиме така што прво ќе ја определиме дискриминантата

$$D = (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{21} = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{21} = (\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{21} + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2.$$

Потоа, добиената дискриминанта ја заменуваме во формулата $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ и за

решенијата на равенката добиваме $x_{1/2} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} \pm (\sqrt{7} - \sqrt{3})}{2}$, односно $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 = \sqrt{3}$.

Задача 3

Реша ги равенките:

а) $x^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{5})x + \sqrt{35} = 0$;

б) $x^2 + 2x - 7 = 2x - 1$.

Задачи за вежбање!

1. Во равенката $3x^2 + 5x + m - 4 = 0$ определи го параметарот m ако $x = 0$ е едно нејзино решение. За добиената вредност на m определи го другото решение на равенката.

Опреди ги решенијата на равенките (2–7):

2. а) $4x^2 - 4x - 24 = 0$;

б) $5x^2 + 2x - 1 = 0$.

3. а) $3(2 - y) + y(y + 3) = 5y$;

б) $6t^2 - 7t + 2 = 0$.

4. а) $5x^2 + 2x = 0$;

б) $6x^2 - 25 = 0$;

в) $16x^2 + 1 = 0$.

5. а) $1 + \frac{x-3}{2} = \frac{x(x-2)}{4}$;

б) $\frac{x(x+4)}{2} - \frac{7x}{4} = 3 - \frac{5x-4}{6}$.

6. а) $x^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{3})x + \sqrt{18} = 0$;

б) $x^2 - 4\sqrt{3}x - 1 = 0$.

7. а) $x^2 - 5kx + 6k^2 = 0$;

б) $mx^2 - (m+1)x = 1$.

8. За кои вредности на x триномот $2x^2 + x - 8$ е еднаков на биномот $7x + 1$?

9. Производот на два последователни парни природни броја е 224. Кои се тие броеви?

10. Должината на еден правоаголник е за 6 cm подолга од неговата ширина. Одреди ги страните на правоаголникот ако неговата плоштина е 112 cm^2 .

2.4 ДИСКУСИЈА ЗА РЕШЕНИЈАТА НА КВАДРАТНАТА РАВЕНКА

Дискриминанта на квадратна равенка

Потсети се!

Поткореновиот израз $b^2 - 4ac$ во формулата $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ се означува со D , т.е. $D = b^2 - 4ac$ и се нарекува **дискриминанта** на квадратната равенка.

Пример 1

За следните равенки прво определи ја дискриминантата, а потоа и решенијата:

а) $x^2 + 2x - 15 = 0$;

б) $x^2 + 2x + 1 = 0$;

в) $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Решение:

а) $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0$, $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$, $x_1 = 3, x_2 = -5$.

Значи, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 \neq x_2$.

б) $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$, $x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$, $x_1 = -1, x_2 = -1$.

Значи, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 = x_2$.

в) $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$. Равенката нема реални решенија.

Запомни!

- Ако $D > 0$, тогаш решенијата на квадратната равенка се реални и различни.
- Ако $D = 0$, тогаш решенијата на квадратната равенка се реални и еднакви, т.е. равенката има двоен корен.
Значи, ако $D \geq 0$, тогаш решенијата на квадратната равенка се реални броеви.
- Ако $D < 0$, тогаш квадратната равенка нема реални решенија.

Пример 2

Без да ги решаваме, одреди ја природата на решенијата на равенките:

а) $-2x^2 + x + 10 = 0$; б) $-x^2 + 3x - 10 = 0$; в) $4x^2 + 12x + 9 = 0$.

Решение:

а) $D = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 10 = 81 > 0$. Значи, равенката има две различни реални решенија.

б) $D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10) = -31 < 0$. Значи, равенката нема реални решенија.

в) $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$. Значи, равенката има две еднакви реални решенија.

Задача 1

Без да ги решаваме, одреди ја природата на решенијата на следните равенки:

а) $x^2 - 5x + 7 = 0$; б) $-x^2 + x + 4 = 0$.

Кај параметарските квадратни равенки, со помош на дискриминантата може да одредиме за кои вредности на параметарот равенката ќе има еднакви реални решенија, различни реални решенија или ќе нема реални решенија.

Пример 3

Во зависност од вредноста на параметарот m , одреди ја природата на решенијата на следните равенки:

а) $4x^2 - 2x + m = 0$; б) $(m - 1)x^2 + 2x + 4 = 0$.

Решение:

а) $D = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot m = 4 - 16m$.

- Равенката ќе има две различни реални решенија ако $D = 4 - 16m > 0$, односно за сите вредности на m кои го задоволуваат неравенството $m < \frac{1}{4}$, т.е. $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$.
- Равенката ќе има еднакви реални решенија ако $D = 4 - 16m = 0$, односно ако $m = \frac{1}{4}$.
- Равенката ќе нема реални решенија ако $D = 4 - 16m < 0$, односно за сите вредности на m кои го задоволуваат неравенството $m > \frac{1}{4}$, т.е. $m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

б) $D = 2^2 - 4 \cdot (m - 1) \cdot 4 = 20 - 16m$.

- Равенката ќе има две различни реални решенија ако $D = 20 - 16m > 0 \Rightarrow m < \frac{5}{4}$, т.е. за сите вредности на $m \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$.
- Равенката ќе има еднакви реални решенија ако $D = 20 - 16m = 0$, односно ако $m = \frac{5}{4}$.
- Равенката ќе нема реални решенија ако $D = 20 - 16m < 0 \Rightarrow m > \frac{5}{4}$, т.е. за сите вредности на $m \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$.

Примена на квадратни равенки

Решавањето голем број задачи, во различни области на науката и техниката, се сведува на решавање квадратни равенки. Во следните примери ќе покажеме како се решаваат некои проблеми со примена на квадратни равенки.

Пример 4

Во кој многуаголник бројот на сите дијагонали е седумпати поголем од бројот на неговите страни?

Решение:

Бројот на сите дијагонали во многуаголник со n страни е $\frac{n(n-3)}{2}$. Треба да го определиме n , така што бројот на дијагоналите ќе биде еднаков на $7n$, т.е.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 7n \Leftrightarrow n^2 - 17n = 0 \Leftrightarrow n(n-17) = 0.$$

Решенија на оваа равенка се $n_1 = 0$, $n_2 = 17$. Бидејќи n е број на страни во многуаголник, n треба да е поголем од нула. Според тоа, бараниот многуаголник има 17 страни.

Пример 5

Бројот 74 запиши го како збир на два броја чиј производ е 1173.

Решение:

Нека едниот собиор е x . Тогаш другиот собиор ќе биде $74 - x$. Производот на двата собироци треба да биде 1173, па вредноста на x ќе ја определиме со решавање на равенката

$$x(74 - x) = 1173,$$

т.е. $x^2 - 74x + 1173 = 0$. Решенија на добиената квадратна равенка се 23 и 51, што значи дека бараните собироци се 23 и 51.

Пример 6

Колку години има Јован, ако по 3 години тој ќе има толку години колку што е квадратот на бројот на годините што ги имал пред 3 години?

Решение:

Нека x е бројот на години на Јован (сегашната возраст). Тогаш, пред три години Јован имал $x - 3$ години, по 3 години ќе има $x + 3$ години. Според условот во задачата ја добиваме равенката

$$x + 3 = (x - 3)^2,$$

т.е. $x^2 - 7x + 6 = 0$. Решенија на оваа равенка се 1 и 6. Но, ако Јован сега има 1 година, тогаш пред 3 години би има -2 години, што нема смисла. Значи, Јован има 6 години.

Пример 7

Дали може да се направи зграда со правоаголна основа така што периметарот на основата ќе биде 60 m, а плоштината на основата ќе биде 150 m²?

Решение:

Нека страните на основата се a и b (во метри). Тогаш, периметар ќе биде $2(a + b)$, а плоштината ќе биде ab . Периметарот на основата на зградата треба да биде $2(a + b) = 60$, од каде што добиваме дека $b = 30 - a$, а од условот за плоштината на основата ја добиваме равенката

$$a(30 - a) = 150,$$

т.е. $a^2 - 30a + 150 = 0$. За да може да се изгради зградата, оваа равенка треба да има реални решенија. Дискриминантата на равенката е $D = 30^2 - 4 \cdot 1 \cdot 150 = 300 > 0$, што значи дека има реални решенија, односно може да се изгради зграда со таква основа. Со решавање на равенката може да ги определиме и должините на страните на основата. Со примена на формулата за определување решенија на квадратна равенка се добива дека страните на основата треба да бидат $a = 5(3 - \sqrt{3}) \approx 6,34\text{m}$, $b = 5(3 + \sqrt{3}) \approx 23,66\text{m}$.

Задачи за вежбање!

- Без да ги решаваш равенките, одреди ја природата на решенијата:
 а) $x^2 + x - 12 = 0$; б) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; в) $x^2 - 6x + 25 = 0$.
- Одреди го параметарот m , така што равенката да има двоен корен:
 а) $x^2 + 3x + m = 0$; б) $3x^2 - 2mx + 3 = 0$; в) $x^2 + 2(3 - m)x + 2k - 3 = 0$.
- За кои вредности на параметарот m равенката има реални и различни корени?
 а) $x^2 - 2x + 3m = 0$; б) $2x^2 - 8x + m + 6 = 0$; в) $mx^2 - (2m + 3)x + m - 2 = 0$.
- За кои вредности на параметарот k равенката нема реални корени?
 а) $x^2 + 2x + k = 0$; б) $kx^2 + (2k - 3)x + k - 1 = 0$; в) $(k - 2)x^2 - 4x - 1 = 0$.
- За кои вредности на параметарот m равенката $x^2 - 2ax + m^2 - m + 3 = 0$ ќе има реални решенија?
- За која вредност на параметарот a триномот ќе биде полн квадрат?
 а) $ax^2 + 6x + 1$; б) $ax^2 - 8x + 9a$.
- Одреди ја природата на решенијата на следните квадратни равенки, во зависност од параметарот m :
 а) $x^2 - 2x + m - 3 = 0$; б) $3mx^2 + 8x - 5 = 0$; в) $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 3 = 0$.
- Бројот 123 запиши го како збир на два броја чиј производ е 3710.
- Во кој многуаголник може да се повлечат вкупно 170 дијагонали?
- Должините на страните на еден триаголник се 5 cm, 9 cm и 13 cm. Секоја од трите страни се продолжува за иста должина. Колкава треба да биде таа должина за новодобиениот триаголник да биде правоаголен?

2.5 ВИЕТОВИ ФОРМУЛИ

Потсети се!

- Квадратна равенка $ax^2 + bx + c = 0$ во која $a = 1$ велиме дека е во нормален вид и вообичаено ја запишуваме како $x^2 + px + q = 0$.
- Одреди ги p и q на равенката $x^2 + 7x - 9 = 0$.

Пример 1

Одреди го збирот и производот на решенијата на равенката $x^2 - 4x - 21 = 0$.

Решение:

Равенката е во нормален вид, а коефициенти се $p = -4$, $q = -21$. За решенијата на равенката добиваме:

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = 2 \pm 5, \text{ т.е., } x_1 = 7, x_2 = -3.$$

Збирот на решенијата е $x_1 + x_2 = 7 - 3 = 4$, а производот е $x_1 \cdot x_2 = 7 \cdot (-3) = -21$.

Да воочиме дека збирот на решенијата $x_1 + x_2 = 4$ е еднаков на $-p$, а производот $x_1 \cdot x_2 = -21$ е еднаков на q .

Задача 1

Трансформирај ја квадратната равенка $3x^2 - 7x + 2 = 0$ во нормален вид, а потоа одреди ги коефициентите p и q , збирот и производот на нејзините решенија.

Ќе покажеме дека врската меѓу решенијата на квадратната равенка и коефициентите на нормалниот вид на равенката која ја воочивме во претходните примери важи за секоја квадратна равенка.

Знаеме дека решенијата на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ се $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. За збирот и производот на решенијата добиваме:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{(2a)^2} = \frac{c}{a}.$$

Ако равенката $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ја запишеме во нормален вид, тогаш $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Значи, збирот на решенијата е еднаков на $-p$, а производот на решенијата е еднаков на коефициентот q од нормалниот облик на равенката.

Запомни!

- Ако x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, тогаш важат формулите

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

- Овие формули се викаат **Виетови формули**.
- Виетовите формули за равенка во нормален вид $x^2 + px + q = 0$ се:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Пример 2

Без да ја решавааш равенката, определи ги збирот и производот на нејзините решенија.

- а) $4x^2 - 3x + 9 = 0$; б) $x^2 - (m-1)x + 2m + 5 = 0$.

Решение:

- а) Равенката е во општ вид со коефициенти $a = 4$, $b = -3$ и $c = 9$. Според Виетовите формули, ако x_1 и x_2 се решенија на равенката, тогаш

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{9}{4}.$$

- б) Равенката е во нормален вид со коефициенти $p = -(m-1)$, $q = 2m + 5$. Од Виетовите формули следува дека

$$x_1 + x_2 = -p = m - 1 \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = q = 2m + 5.$$

Сега ќе покажеме дека ако за броевите x_1 и x_2 важи $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, тогаш x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2 + px + q = 0$.

Од $x_1 + x_2 = -p$ следува дека $p = -(x_1 + x_2)$, па равенката е $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$. Ако во оваа равенка земеме $x = x_1$, добиваме $x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_1^2 - x_1x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0$, т.е. $0 = 0$. Значи, за $x = x_1$ равенката станува точно бројно равенство, т.е. $x = x_1$ е решение на равенката. Слично, за $x = x_2$, добиваме $x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 - x_2^2 - x_1x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0$, т.е. $0 = 0$, што значи дека и $x = x_2$ е решение на равенката.

Со ова и претходното изведување на Виетовите формули го докажавме следното тврдење (теорема).

Запомни!

Броевите x_1 и x_2 се решенија на равенката $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ако и само ако

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ако равенката е во нормален вид $x^2 + px + q = 0$, тогаш $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$.

Пример 3

Со користење на Виетовите формули провери дали

- а) 2 и -3 се решенија на $x^2 + 7x - 12 = 0$;
 б) $1 + \sqrt{2}$ и $1 - \sqrt{2}$ се решенија на $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Решение:

За дадениот пар броеви да бидат решенија на равенката, броевите треба да ги задоволуваат Виетовите формули.

- а) За равенка $x^2 + 7x - 12 = 0$ треба $x_1 + x_2 = -p = -7$ и $x_1 \cdot x_2 = q = -12$.
 Бидејќи $2 + (-3) = -1 \neq -7$, заклучуваме дека 2 и -3 не се решенија на $x^2 + 7x - 12 = 0$.
 б) За оваа равенка треба $x_1 + x_2 = -p = 2$ и $x_1 \cdot x_2 = q = -1$. Бидејќи $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 = -p$
 и $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1 = q$, $1 + \sqrt{2}$ и $1 - \sqrt{2}$ се решенија на $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Пример 4

Нека x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$. Докажи дека $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$.

Решение:

Изразот $x_1^2 + x_2^2$ го дополнуваме до полн квадрат со додавање и одземање на $2x_1x_2$ и добиваме $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Според Виетовите формули имаме дека $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, па од претходното равенство добиваме $x_1^2 + x_2^2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$.

Запомни ја формулата $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$, т.е. $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$.

Задача 2

Нека x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка $3x^2 - 2x + 6 = 0$. Без да ја решавааш равенката, одреди ја вредноста на изразите:

- а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $3x_1 - 5x_1^2 + 3x_2 - 5x_2^2$.

Задачи за вежбање!

- Запиши ја равенката во нормален вид и одреди ги p и q :
 - $2x^2 + 3x - 5 = 0$;
 - $mx^2 - (m+3)x + 2m = 0$.
- Напиши ги Виетовите формули за следните равенки:
 - $3x^2 - 8x + 6 = 0$;
 - $2x^2 - 7x = 0$
 - $x^2 + 6 = 0$;
 - $(m-3)x^2 - (3m+1)x + 2 = 0$;
 - $4mx^2 - x + 2m - 3 = 0$.
- Реша ги равенките со користење на Виетовите формули:
 - $x^2 - 8x + 15 = 0$;
 - $x^2 + 7x + 12 = 0$;
 - $x^2 + 8x + 15 = 0$;
 - $2x^2 - 7x + 5 = 0$.
- Со примена на Виетовите формули утврди дали дадениот пар броеви е решение на соодветната равенка:
 - 2 и 6, $x^2 - 8x + 12 = 0$;
 - 3 и 5, $x^2 - 2x - 15 = 0$;
 - $3 + \sqrt{2}$ и $3 - \sqrt{2}$, $x^2 + 6x + 7 = 0$;
 - 3 и 7, $x^2 - 9x + 12 = 0$.
- Опреди ја вредноста на параметарот k , така што збирот на решенијата на равенката $x^2 + (2k+1)x - 5 = 0$ да биде еднаков на 4. За добиената вредност на k определи ги решенијата на равенката.
- Со користење на Виетовите формули одреди ја вредноста на параметарот k и другото решение на равенката:
 - $2kx^2 + kx - 1 = 0$, ако $x_1 = \frac{3}{2}$;
 - $x^2 - 5x + k = 0$, ако $x_1 = -2$;
 - $x^2 - 2bx + k = 0$, ако $x_1 = b - a$.
- За која вредност на параметарот m корените на равенката $x^2 + 6x - m + 3 = 0$ го задоволуваат условот $x_1 - x_2 = 0$?
- Без решавање на равенката $4x^2 - 3x + 2 = 0$, одреди ја вредноста на изразот:
 - $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$;
 - $x_1^2 + x_2^2$;
 - $\frac{5}{x_1} + \frac{5}{x_2}$;
 - $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

2.6 СОСТАВУВАЊЕ КВАДРАТНА РАВЕНКА СО ДАДЕНИ РЕШЕНИЈА. РАЗЛОЖУВАЊЕ НА КВАДРАТЕН ТРИНОМ

Составување квадратна равенка со дадени решенија

Потсети се!

- $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$ се нули на триномот $x^2 - 7x + 12$, па тој може да се запише како
$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4).$$
- $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$ се решенија на равенката $x^2 - x - 12 = 0$. Провери дали е точно равенството
$$x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4).$$

Со користење на Виетовите формули може да составиме равенка чии корени ќе бидат x_1 и x_2 . Имено, според Виетовите формули, x_1 и x_2 се решенија на равенката

$$x^2 + px + q = 0, p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2.$$

Пример 1

Состави квадратна равенка чии решенија се $x_1 = -3, x_2 = 5$.

Решение:

Со Виетовите формули ги определуваме коефициентите p и q :

$$p = -(x_1 + x_2) = -((-3) + 5) = -2,$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot 5 = -15.$$

Бараната равенка е $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Пример 2

Состави квадратна равенка чии решенија се

$$\text{а) } x_1 = 3 - 4i, x_2 = 3 + 4i; \quad \text{б) } x_1 = 2 - \sqrt{3}, x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Решение:

Со Виетовите формули ги определуваме коефициентите p и q .

$$\text{а) } p = -(x_1 + x_2) = -((3 - 4i) + (3 + 4i)) = -6, q = x_1 \cdot x_2 = (3 - 4i) \cdot (3 + 4i) = 25.$$

Бараната равенка е $x^2 - 6x + 25 = 0$.

$$\text{б) } p = -((2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})) = -4, q = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1,$$

Бараната равенка е $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Задача 1

Состави квадратна равенка чии решенија се

$$\text{а) } x_1 = 0,75, x_2 = -\frac{1}{3}; \quad \text{б) } x_1 = a - b, x_2 = a + b.$$

Запомни!

Ако броевите x_1 и x_2 се решенија на квадратна равенка, тогаш равенката е од обликот $x^2 + px + q = 0$, каде што $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 \cdot x_2$.

Ако $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1 \cdot x_2$ ги замениме во равенката $x^2 + px + q = 0$ чии решенија се x_1 и x_2 , тогаш ја добиваме равенката $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$, т.е. равенката

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Значи, ако броевите x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка, тогаш равенката може да ја составиме и со примена на равенството $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

На пример, ако $x_1 = -3$, $x_2 = 5$ се решенија на квадратната равенка, тогаш равенката е $(x + 3)(x - 5) = 0$, т.е. $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Пример 3

Состави квадратна равенка така што збирот на нејзините корени е -5 , а производот на корените е 6 .

Решение:

Ако збирот на корените -5 , нивниот производ е 6 , тогаш за коефициентите на нормалниот облик на равенката добиваме $p = -(x_1 + x_2) = 5$ и $q = x_1 \cdot x_2 = 6$. Бараната равенка е $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Пример 4

За која вредност на параметарот m едниот корен на равенката $x^2 - 9x + m = 0$ е двапати поголем од другиот?

Решение:

Според Виетовите формули, $x_1 + x_2 = 9$. Ако замениме $x_1 = 2 \cdot x_2$ добиваме $2 \cdot x_2 + x_2 = 9$, т.е. $x_2 = 3$, а $x_1 = 2 \cdot 3 = 6$. Сега, во равенката $q = m$, а според Виетовите формули $q = x_1 \cdot x_2 = 18$. Оттука следува дека вредноста на m е 18 .

Пример 5

Опреди ја вредноста на параметарот m , така што решенијата на равенката $mx^2 - (2m + 2)x + 1 = 0$ ќе го задоволуваат равенството $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4$.

Решение:

Од Виетовите формули добиваме $x_1 + x_2 = -\frac{-(2m+2)}{m}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m}$, $m \neq 0$. Од $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4$

следува $x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = 4$, па со замена добиваме $\frac{1}{m} \cdot \frac{2m+2}{m} = 4$ или $4m^2 - 2m - 2 = 0$, т.е. $2m^2 - m - 1 = 0$, чии решенија се $m = 1$ и $m = -\frac{1}{2}$.

Разложување на квадратен трином на линеарни множители

Потсети се!

- Како гласат Виетовите формули за квадратна равенка?
- За равенката $2x^2 - 4x + 3 = 0$ имаме:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}.$$

Активност

Разложи го квадратниот трином $x^2 - 7x + 12$ на линеарни множители:

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = x(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 4).$$

Воочи дека $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$ се нули на дадениот квадратен трином, т.е. решенија на равенката $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Ако x_1 и x_2 се нули на квадратниот трином $ax^2 + bx + c$, т.е. решенија на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, тогаш според Виетовите формули $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, па

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 \right) = \\ &= a \left(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 \right) = a \left(x(x - x_1) - x_2(x - x_1) \right) = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Запомни!

Ако x_1 и x_2 се нули на квадратниот трином $ax^2 + bx + c$, тогаш разложувањето на триномот на линеарни множители е $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Пример 6

Разложи го триномот на множители:

а) $2x^2 + 6x - 8$; б) $2x^2 - 3x - 5$.

Решение:

а) Ги определуваме нулите на триномот $x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm 10}{4}$, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.
Значи, $2x^2 + 6x - 8 = 2(x + 4)(x - 1)$.

б) $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 7}{4}$, $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -1$, следува

$$2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1) = (2x - 5)(x + 1).$$

Задача 2

Разложи го триномот на линеарни множители:

а) $2x^2 + 7x - 15$; б) $x^2 - 2x - 2$.

Равенството за разложување на квадратен трином на линеарни множители може да го користиме и за составување квадратна равенка со дадени решенија. Имено од $ax^2 + bx + c = 0$, бидејќи $a \neq 0$ следува $a(x - x_1)(x - x_2)$. На пример, равенката чиј решенија се $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -3$ може да ја определиме со $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 0$, односно $x^2 + 3x - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$, па бараната равенка е $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Потсети се!

За да скратиме дадена алгебарска дробка, треба броителот и именителот да ги разложиме на множители.

Пример 7

Скрати ја дробката $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 12}$

Решение:

За броителот имаме $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, за да го разложиме именителот на множители, ќе ги определуваме решенијата на $x^2 - x - 12 = 0$. Добиваме:

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

па $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, па $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$. Оттука следува

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 12} = \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 4)} = \frac{x + 3}{x - 4}.$$

Да воочиме дека дробката може да се скрати, само ако $x + 3$ е различно од 0.

Задача 3

Скрати ја дробката

$$\text{a) } \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}; \quad \text{б) } \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 8x + 15}.$$

Задачи за вежбање!

Во задачите (1 – 5) состави квадратна равенка чии корени се:

- | | | |
|---|--|--|
| 1. а) -2 и 3 ; | б) 7 и -1 ; | в) -5 и -1 . |
| 2. а) $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$; | б) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{3}{4}$; | в) $-\frac{3}{4}$ и $-1\frac{1}{3}$. |
| 3. а) $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$; | б) $-4\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$; | в) $6-\sqrt{2}$ и $6+\sqrt{2}$. |
| 4. а) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; | б) $3-2i$ и $3+2i$; | в) $\frac{1-2i}{3}$ и $\frac{1+2i}{3}$. |
| 5. а) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$; | б) $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a-b}$. | |

6. Состави квадратна равенка така што збирот на нејзините решенија е -1 , а производот на решенијата е $-2\frac{1}{2}$.

7. За која вредност на параметарот m едниот корен на равенката $2x^2 - 3x + m - 2 = 0$ е двапати помал од другиот?

8. Определи ја вредноста на параметарот k така што корените на равенката $2x^2 - 4x + k = 0$ ќе го задоволуваат равенството $x_1^2 + x_2^2 = 12$.

9. Состави квадратна равенка со реални коефициенти ако еден од нејзините корени е:

- а) $2-3\sqrt{2}$; б) $2-3i$.

10. Разложи го триномот на линеарни множители:

- а) $x^2 - 4x - 21$; б) $3x^2 + 5x - 2$; в) $x^2 - 4x + 1$.

11. Скрати ја дробката:

- а) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4}$; б) $\frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 + 7x + 12}$; в) $\frac{3x^2 + 21x}{x^2 + 3x - 28}$.

2.7 ДРОБНО РАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Како се определува најмал заеднички содржател на броеви и полиноми.
- НЗС($x - 2, x^2 - 4$) = $(x - 2)(x + 2)$.
- НЗС($x + 3, x - 1, x^2 - 9$) = $(x + 3)(x - 3)(x - 1)$.
- Дробно рационална дробка има облик $\frac{P(x)}{Q(x)}$, каде што $P(x)$ и $Q(x)$ се два полинома и $Q(x) \neq 0$.

Активност

Опреди НЗС на $x^2 + 2x - 1$ и $x^2 - 1$.

Решавањето квадратни равенки овозможува решавање на равенки кои со одредени трансформации се сведуваат на квадратни.

Запомни!

Равенка во која променливата, т.е. непознатата се содржи и во именителот на некоја дробно рационална дробка се вика **дробно рационална равенка**. Овие равенки се дефинирани за вредностите на непознатата за кои сите именители во равенката се различни од нула.

Пример 1

$\frac{3(x-5)}{x-1} = 3x+8$ е дробно рационална равенка, која е дефинирана за сите x , за кои $x - 1 \neq 0$, т.е. $x \neq 1$. Значи, дефиниционото множество (множеството допуштени вредности) на равенката е $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Најчесто постапката за решавање дробно рационални равенки е следната:

- именителите на дропките се разложуваат на множители;
- се определува дефиниционото множество на равенката;
- се множи со НЗС за именителите на дропките;
- се определуваат решенијата на добиената равенка;
- се проверува кои од добиените решенија се решенија на почетната (дробно рационалната) равенка, т.е. кои од добиените решенија припаѓаат во дефиниционото множество на равенката.

Пример 2

Решете ги равенките:

$$\text{а) } \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x} = 3; \quad \text{б) } \frac{-2x+7}{x-2} = x-2; \quad \text{в) } \frac{3x}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = \frac{2x^2-6x}{x^2-1}.$$

Решение:

- а) Равенката е дефинирана за $x-1 \neq 0$ и $x \neq 0$, т.е. $x \neq 1$ и $x \neq 0$. Значи, дефиниционото множество на равенката е $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Именители во оваа равенка се $x-1$ и x и нивниот НЗС е $x(x-1)$. Равенката ја множиме со НЗС на именителите и добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x} &= 3 / \cdot x(x-1) \\ 3x + 5(x-1) &= 3x(x-1) \\ 3x^2 - 11x + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Решенија на добиената равенка се $x_1 = \frac{11-\sqrt{61}}{6}$, $x_2 = \frac{11+\sqrt{61}}{6}$ и бидејќи и двете решенија припаѓаат во множеството D , следува дека двете решенија се решенија на дадената дробно рационална равенка.

- б) Равенката е дефинирана за $x-2 \neq 0$, т.е. $x \neq 2$, па дефиниционото множество на равенката е $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Во равенката има само еден именител, па равенката ја множиме со $x-2$.

$$\begin{aligned} \frac{-2x+7}{x-2} &= x-2 / \cdot (x-2) \\ -2x+7 &= (x-2)^2 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Решенија на добиената квадратна равенка се -1 и 3 . Бидејќи и двете решенија се во дефиниционото множество на дробно рационалната равенка, двете решенија се решенија на дадената равенка.

- в) Равенката е дефинирана за $x-1 \neq 0$ и $x+1 \neq 0$ т.е. $x \neq 1$ и $x \neq -1$. Значи, дефиниционото множество на равенката е $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Равенката ја множиме со НЗС $(x-1, x+1, x^2-1) = x^2-1$ и добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-1} + \frac{4x}{x+1} &= \frac{2x^2-6x}{x^2-1} / \cdot (x^2-1) \\ 3x(x+1) + 4x(x-1) &= 2x^2-6x \\ 5x^2 + 5x &= 0 \end{aligned}$$

Решенија на добиената квадратна равенка се $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Бидејќи $x_2 = -1$ не припаѓа во дефиниционото множество на дробно рационалната равенка, решение на равенката е само $x = 0$.

Задача 1

Решете ги равенките:

$$\text{а) } \frac{6}{x^2-1} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{2}{x-1}; \quad \text{б) } \frac{3x-5}{2x-1} = \frac{2x-3}{x+1}.$$

Пример 3

Реша ја равенката $\frac{2x+1}{x^2+x-6} - \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{6}{x^2-9}$.

Решение:

Прво именителите ги разложуваме на множители:

Решенија на $x^2 + x - 6 = 0$ се -3 и 2 , а на $x^2 - 5x + 6 = 0$ решенија се 2 и 3 . Оттука разложувањето на именителите на множители е:

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3), \quad x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \quad x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Равенката е дефинирана за $x \neq 2$, и $x \neq -3$, и $x \neq 3$. Значи, дефиниционото множество на равенката е $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2, 3\}$. Равенката ја множиме со НЗС $((x - 2)(x + 3), (x - 2)(x - 3), (x - 3)(x + 3)) = (x - 2)(x - 3)(x + 3)$ и добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^2+x-6} - \frac{x-1}{x^2-5x+6} &= \frac{6}{x^2-9} \\ \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} - \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} &= \frac{6}{(x-3)(x+3)} \quad / \cdot (x-2)(x-3)(x+3) \\ (2x+1)(x-3) - (x-1)(x+3) &= 6(x-2) \\ x^2 - 13x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

Решенија на добиената квадратна равенка се $x_1 = 1$, $x_2 = 12$. Двете решенија се во дефиниционото множество на дробно рационалната равенка, па 1 и 12 се решенија на дадената равенка.

Задача 2

Реша ја равенката $\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} - \frac{x-4}{2x-4} = 0$.

Пример 4

Брзината на моторен чамец во мирна вода е 15 km/h . Ако чамецот се движи по течението на реката растојанието од 72 km го поминува за 2 часа помалку отколку ако се движи спроти течението. Определи ја брзината на реката.

Решение:

Ако брзината на реката е $x \text{ km/h}$, тогаш брзината на чамецот по течението на реката е $15 + x$, спроти течението е $15 - x$. Од формулата $s = v \cdot t$ следува дека $72 = (15 + x) \cdot t_1$ и $72 = (15 - x) \cdot t_2$.

Оттука добиваме $t_1 = \frac{72}{15+x}$ и $t_2 = \frac{72}{15-x}$. Бидејќи $t_2 - t_1 = 2$, добиваме $\frac{72}{15-x} - \frac{72}{15+x} = 2$.

По множењето на равенката со НЗС од именителите се добива

$$72(15+x) - 72(15-x) = 2(15+x)(15-x),$$

т.е.

$$x^2 + 72x - 225 = 0.$$

Решенија на оваа равенка се $x_1 = 3$, $x_2 = -75$, но $x_2 = -75$ не може да биде решение на задачата бидејќи x е брзина и не може да прими негативна вредност. Значи, брзината на реката е 3 km/h .

Пример 5

Еден штедач добил 15 евра камата за одредена сума пари орочени на една година. Потоа на таа сума додал уште 85 евра и ги орочил уште на една година со истата камата. По истекот на таа година штедачот на сметката имал вкупно 420 евра. Колку била почетната сума на пари и колку проценти е годишната камата?

Решение:

Нека вложената (почетната) сума пари е K , а каматата е $x\%$. Тогаш $\frac{K \cdot x}{100} = 15$, т.е. $K = \frac{100 \cdot 15}{x}$.

Значи, на почетокот на втората година штедачот на сметката имал $\frac{1500}{x} + 15 + 85 = \frac{1500}{x} + 100$

евра, а на крајот на втората година имал $\left(\frac{1500}{x} + 100\right) + \left(\frac{1500}{x} + 100\right) \cdot \frac{x}{100}$. Знаеме дека на крајот на втората година штедачот на сметката имал 420 евра, па ја добиваме следната равенка:

$$\left(\frac{1500}{x} + 100\right) + \left(\frac{1500}{x} + 100\right) \cdot \frac{x}{100} = 420.$$

Од оваа дробно рационална равенка се добива квадратната равенка $x^2 - 305x + 1500 = 0$, чии решенија се $x_1 = 5$, $x_2 = 300$, што значи дека каматата е 5%, а сумата вложена на почетокот била $\frac{1500}{5} = 300$ евра. Второто решение не може да биде решение на задачата бидејќи каматата не може да биде 300 %.

Задачи за вежбање!

1. Реши ги равенките:

а) $8x + 11 + \frac{7}{x} = \frac{21 + 65x}{7}$;

б) $\frac{6}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} = 2 - \frac{x + 4}{x + 1}$;

в) $\frac{3x + 5}{x - 2} - \frac{x - 2}{x + 2} = -\frac{3}{2}$;

г) $\frac{2x}{x + 1} + \frac{2x}{x - 1} = \frac{16}{3}$;

д) $\frac{2x - 3}{x + 1} = \frac{3x - 5}{2x - 1}$;

е) $\frac{5x}{2x^2 - x - 1} + \frac{5}{2x + 1} = \frac{4x - 5}{x^2 - 1}$.

- Разликата од реципрочните вредности на два цели последователни броја е $\frac{1}{30}$. Кои се тие броеви?
- Група ученици треба да соберат 6000 денари така што секој дава еднаква сума на пари. Двајца од нив се откажале, па затоа останатите морале да доплатат уште по 150 денари. Колку ученици имало во групата?
- Еден воз го поминува растојанието од 650 km за три часа помалку од друг воз чија брзина е 15 km/h помала од брзината на првиот воз. Одреди ги брзините на двата воза.

2.8 БИКВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Од кој степен е равенката $x^4 - 9x^2 = 0$?
- Колку решенија има оваа равенка?
- Провери кои од броевите $-3, 3, 4, -4, 0$ се решенија на равенката!

Активност

Одреди ги сите решенија на равенката $x^4 - 9x^2 = 0$.

Пример 1

Определи ги решенијата на равенките:

а) $x^4 = 0$; б) $x^4 - 81 = 0$; в) $x^4 - 16x^2 = 0$.

Решение:

- а) Од $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ следува дека решенијата на оваа равенка се $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, односно равенката има четирикратен корен еднаков на 0.
- б) $x^4 - 81 = 0$ може да го запишеме како $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$, т.е. $(x - 3)(x + 3)(x - 3i)(x + 3i) = 0$. Значи, решенија на равенката се $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 3i, x_4 = -3i$, т.е. равенката има 4 различни корени, два реални и два комплексни.
- в) Бидејќи $x^4 - 16x^2 = x^2(x^2 - 16)$, ја добиваме равенката $x \cdot x(x - 4)(x + 4) = 0$. Решенија на равенката се $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = -4$, па равенката има еден двократен корен и два различни реални корени.

Запомни!

Равенката од облик $ax^4 + bx^2 + c = 0$, каде што $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$, се нарекува **биквадратна равенка**.

За да ги определиме решенијата на биквадратната равенка $ax^4 + bx^2 + c = 0$, равенката ја запишуваме како $a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$ и воведуваме нова променлива, т.е. замена $y = x^2$. На овој начин добиваме квадратна равенка по y , а таа е $ay^2 + by + c = 0$. Нејзините решенија y_1, y_2 може да ги определиме со формулата за решавање квадратна равенка. Потоа, за да ги определиме решенијата на биквадратната равенка, ја враќаме замената, т.е. ги решаваме равенките $x^2 = y_1$ и $x^2 = y_2$, со што добиваме дека

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{y_1}, \quad x_{3/4} = \pm\sqrt{y_2}.$$

Пример 2

Решете ја равенката $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Решение:

Равенката ја запишуваме во облик $(x^2)^2 - 7x^2 + 12 = 0$ и ја воведуваме смената $y = x^2$. Со тоа ја добиваме квадратната равенка $y^2 - 7y + 12 = 0$. Решенија на оваа равенка се $y_1 = 3$ и $y_2 = 4$. Со враќање на смената добиваме $x^2 = 3$ и $x^2 = 4$. Од $x^2 = 3$ следува $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, а од $x^2 = 4$ следува $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. Значи, равенката има 4 различни реални решенија.

Задача 1

Решете ја равенката $x^4 - 13x^2 + 12 = 0$.

Задача 2

Скратете ја дропката $\frac{x^2 - 9}{x^4 - 13x^2 + 36}$.

Задачи за вежбање!

- Решете ги равенките:
а) $10x^4 = 0$; б) $4x^4 - 64 = 0$; в) $x^4 - 9x^2 = 0$.
- Определете ги решенијата на равенките:
а) $\frac{30 - 2x^2}{x^2 - 6} + \frac{5x^2 - 16}{10} = \frac{2x^2 + 3}{5}$; б) $(x^2 - 5)(4x^2 + 5) = 6x^2$.
- Плоштината на еден правоаголник е 60 cm^2 , а неговата дијагонала е 13 cm . Определете ги должините на страните на правоаголникот.
- Состави биквадратна равенка чиј решенија се $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$, $x_3 = 4$, $x_4 = -4$.
- Скратете ја дропката $\frac{x^4 - 20x^2 + 64}{x^2 + 2x - 8}$.

2.9 СИСТЕМ ОД ЕДНА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ И ЕДНА КВАДРАТНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

- Како се решава систем линеарни равенки со метод на замена.
- Реши го системот $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ со метод на замена.

АКТИВНОСТ

Провери кој од подредените парови $(x, y) \in \left\{ (1, 1), (0, 2), (2, 0), \left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right) \right\}$ е решение на системот $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

Пример 1

Реши го системот $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

Решение:

Да воочиме дека системот $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ се состои од една линеарна равенка со две непознати и една квадратна равенка со истите две непознати. Овој систем може да се реши исто како и системот од две линеарни равенки со две непознати, со метод на замена. Имено, од линеарната равенка ја изразуваме едната променлива, на пример, во дадениот систем равенки од првата равенка може да го изразиме y со $y = 2 - 2x$. Со замена во квадратната равенка добиваме:

$$x^2 + (2 - 2x)^2 = 4,$$

т.е.

$$5x^2 - 8x = 0.$$

Решенија на квадратната равенка се $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{8}{5}$. За $x_1 = 0$ добиваме $y_1 = 2 - 2 \cdot 0 = 2$, а за $x_2 = \frac{8}{5}$ добиваме $y_2 = 2 - 2 \cdot \frac{8}{5} = -\frac{6}{5}$. Значи, решенија на системот равенки се подредените парови $(0, 2)$ и $\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right)$.

Запомни!

- Системот $\begin{cases} mx+ny+p=0 \\ ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \end{cases}$, каде што барем еден од коефициентите a, b , или c е различен од нула е **општ вид на систем од една линеарна равенка со две непознати и една квадратна равенка со две непознати**.
- Ваков систем на равенки се решава со метод на замена и неговите решенија се подредени парови.

Пример 2

Реша го системот $\begin{cases} x+3y=6 \\ x^2+xy+y^2=9 \end{cases}$.

Решение:

Од линеарната равенка имаме $x = 6 - 3y$ и со замена во квадратната равенка добиваме:

$$(6-3y)^2 + (6-3y)y + y^2 = 9,$$

т.е.

$$7y^2 - 30y + 27 = 0.$$

Решенија на квадратната равенка се $y_1 = 3$ и $y_2 = \frac{9}{7}$. За $y_1 = 3$ добиваме $x_1 = 6 - 3 \cdot 3 = -3$, а за

$y_2 = \frac{9}{7}$ добиваме $x_2 = 6 - 3 \cdot \frac{9}{7} = \frac{15}{7}$. Значи, решенија на системот равенки се подредените парови

$(-3, 3)$ и $(\frac{15}{7}, \frac{9}{7})$.

Задача 1

Реша ги системите равенки:

$$\text{а) } \begin{cases} x \cdot y = 6 \\ 4x - y = 10 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x^2 + 4y + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Пример 3

Два многуаголници имаат вкупно 15 страни и вкупно 40 дијагонали. Кои се тие многуаголници?

Решение:

Нека x е бројот на страни на едниот многуаголник, а y бројот на страни на другиот многуаголник. Според условите во задачата една равенка ќе биде $x + y = 15$. Бројот на дијагонали во многуаголник

со x страни е $\frac{x(x-3)}{2}$, па втората равенка ќе биде $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{y(y-3)}{2} = 40$.

За определување на бројот на страните во многуаголниците го добиваме следниот систем равенки:

$$\begin{cases} x+y=15 \\ x(x-3)+y(y-3)=80 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y=15 \\ x^2-3x+y^2-3y=80 \end{cases}$$

Од линеарната равенка имаме $x = 15 - y$ и со замена во квадратната равенка добиваме

$$(15-y)^2 - 3(15-y) + y^2 - 3y = 80,$$

т.е.

$$y^2 - 15y + 50 = 0.$$

Решенија на оваа квадратна равенка се $y_1 = 5$ и $y_2 = 10$. За $y_1 = 5$ се добива $x_1 = 10$, а за $y_2 = 10$ се добива $x_2 = 5$. Значи, едниот многуаголник има 5 страни, а другиот 10.

Задачи за вежбање!

1. Реши ги системите:

а) $\begin{cases} x-3y=-3 \\ 3x^2+2x+3y^2-3=0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y-x=1 \\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{9}{10} \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=2 \\ \frac{y+3}{x}+\frac{x-4}{y}=1 \end{cases}$

2. Реши ги системите: $\begin{cases} x \cdot y = 3m^2 \\ x + y = 4m \end{cases}$.

3. Збирот на една дробка и нејзината реципрочна вредност е $\frac{29}{10}$, а збирот на броителот и именителот на дробката е 7. Определи која е дробката.

4. Еден фармер сака да огради градина во форма на правоаголник, но така што само една од страните да не е оградена. Тој има 40 метри жица за ограда. Исто така, тој сака градината да има плоштина од 150 m^2 . Најди ги димензиите на градината.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

- За која вредност на m равенката $(2m-1)x^2 - 4mx + 3 = 0$ е квадратна равенка?
- Запиши ги следните равенки во нормален вид:
 - $3x^2 - 9x + 36 = 0$;
 - $2x^2 = 8x$;
 - $\frac{2}{3}x^2 - 4x + 1 = 0$.
- За кои вредности на параметарот m равенката $(m+2)x^2 + m - 5 = 0$ ќе има реални решенија?
- Одреди ја природата на решенијата на равенките:
 - $x^2 + x - 3 = 0$;
 - $3x^2 + 2x + 1 = 0$;
 - $4x^2 - 40x + 25 = 0$;
 - $x^2 - 8x + 15 = 0$.
- Реша ги равенките:
 - $(x+1)^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-1)$;
 - $x^2 - 10 = 3(x^2 - 4)$;
 - $\frac{x^2}{4} - 6x = 0$;
 - $\frac{2x^2 - 9x}{2} = \frac{5x^2 + 7x}{4}$;
 - $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
 - $x^2 - 2x - 15 = 0$.
- Реша ја равенката $x^2 - (a+b)x + ab = 0$.
- За кои вредности на параметарот k равенката $kx^2 + 2kx + k + 1 = 0$
 - ќе има двоен корен
 - ќе има две различни реални решенија
 - ќе нема реални решенија.
- Со примена на Виетовите формули состави квадратна равенка чии решенија се
 - $x_1 = -2$ и $x_2 = -7$;
 - $x_1 = 3 + \sqrt{5}$ и $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.
- Нека е x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка $3x^2 - 2x + 6 = 0$. Без да ја решаваеш равенката определи ја вредноста на $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$.
- Разложи го триномот на линеарни множители:
 - $2x^2 - \frac{22}{3}x + 4 = 0$;
 - $2x^2 + 5x - 3 = 0$.
- Без користење на Виетови формули состави квадратна равенка чии решенија се -2 и 6 .
- Скрати ги дропките
 - $\frac{x^2 - x - 12}{(x+3)^2}$;
 - $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1}$.
- Реша ги равенките:
 - $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+2} = 1$;
 - $\frac{x+5}{5-x} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{100}{25-x^2}$;
 - $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = 2\frac{1}{6}$.
- Реша ги равенките:
 - $12x^4 = 0$;
 - $5x^4 = 125$;
 - $x^4 - 36x^2 = 0$.
- Определи ги решенијата на равенките:
 - $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$;
 - $(x^2 - 4x + 3)^2 + 8x(x^2 + 3) + 12 = 0$.

16. Скрати ја дропката $\frac{x^4-1}{x^4-5x^2+4}$.

17. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2-29=0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 3x^2+2y^2+3x-4y=-2xy \end{cases}$

18. Срна рачно изработува капи и ги продава. Својот дневен приход од продажбата на капите го пресметува со формулата $x(x-47)$, каде што x е цената во евра на една капа. Срна сака да оствари дневен приход од 150 евра. По која цена треба да ги продава капите?

19. Правоаголен плац кој е широк 6 m и долг 4 m е заобиколен со пат. Ширината на патот е секаде еднаква. Ако патот и плацот имаат еднаква плоштина, колку е широк патот?

20. Производител на мали апарати за домаќинство заклучил дека профитот P (во долари) остварен со производство на x микробранови печки неделно може да го пресмета со формулата

$P = \frac{1}{10}x(300-x)$ под услов $0 \leq x \leq 200$. Колку печки мора да се произведат во дадена недела за да се оствари профит од 1250 долари?

21. Јарболот е прицврстен од спротивните страни со две сајли, од кои секоја е 2 метри подолга од јарболот. Растојанието помеѓу точките каде што сајлите се прицврстени на земјата е еднакво на должината на една сајла. Колку е висок јарболот?



22. Дел од учениците од еден клас учествувале во шаховски натпревар. Вкупниот број на одиграни мечеви бил 253.

а) Колку ученици учествувале во натпреварот?

б) Кое решение од квадратната равенка ќе биде отфрлено и зошто?

23. Еден трговски патник вози од град А до град Б, кои се на растојание од 120 km, со постојана брзина. Потоа ја зголемува брзината за 10 km/h и со таа брзина вози 150 km од градот Б до Скопје. Ако втората етапа од неговото патување траела 6 минути повеќе од првата етапа, колку брзо возел на патот од А до Б?

24. Определи ги двата броја чиј збир е 20, а збирот на нивните квадрати е 272.

25. Производот на цифрите на еден двоцифрен број е 8, а при делење на тој број со збирот на неговите цифри се добива 4. Определи го бројот.

КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА, КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА И СИСТЕМ ОД КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Квадратната функција е една од најважните функции во алгебрата и претставува природно продолжение на изучувањето на квадратните равенки. Во оваа тема ќе се запознаеме со својствата на оваа функција, обликот на нејзиниот график, како и со квадратните неравенки и нивното решавање. Квадратните функции и квадратните неравенки се клучни елементи за графичко и нумеричко истражување на параболични модели, овозможувајќи длабоко разбирање на нелинеарните феномени. Изучувањето на квадратните функции овозможува разбирање на параболата (која е нивниот график) и нејзините трансформации, додека решавањето на квадратните неравенки ни овозможува одредување на интервалите каде квадратната функција е поголема или помала од некоја вредност.

Квадратната функција и решавањето на квадратни неравенки има широка примена во решавање на многу практични проблеми. На пример, во физиката за моделирање на траектории на проектили и висина на падот како функција на времето, во економијата за анализа на трошоци и определување на максимални и минимални трошоци и добивки, а во фармакологија за моделирање на ефекти на лекови со квадратно однесување.

3.1 КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА. ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $f(x) = x^2$

Потсети се!

- Функцијата од облик $y = ax + b$, каде што a и b се реални броеви, а x е независна променлива, се нарекува линеарна функција.
- Дефиниционата област D на линеарната функција е множеството реални броеви, т.е. $D = \mathbb{R}$.
- Множеството вредности V на линеарната функција е, исто така, множеството реални броеви, т.е. $D = \mathbb{R}$.
- Графикот на линеарна функција е права и за да го нацртаме графикот на линеарна функција, доволно е да определиме две точки од графикот на ваквата функција.

Активност

Претстави ги табеларно вредностите на функцијата $f(x) = x^2$, за $x \in D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
Добиените подредени парови $(x, f(x))$ претстави ги графички во координатен систем.

Запомни!

- Функцијата од облик $f(x) = ax^2 + bx + c$, каде што a, b и c се реални броеви и $a \neq 0$, се нарекува **квадратна функција**.
- Дефиниционата област на квадратната функција е $D_f = \mathbb{R}$.
- Често, наместо $f(x) = ax^2 + bx + c$, пишуваме $y = ax^2 + bx + c$.
- График на квадратна функција е множеството точки $G_f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = ax^2 + bx + c\}$.
- Кривата што се добива со графикот на квадратната функција се нарекува **парабола**.

Пример 1

Опреди ги коефициентите a, b и c на функцијата $f(x) = ax^2 + bx + c$, ако $f(0) = 0, f(1) = 5, f(2) = 16$.

Решение:

Со заменување на соодветните вредности на x во формулата на функцијата добиваме

$f(0) = c, f(1) = a + b + c, f(2) = 4a + 2b + c$, т.е. го добиваме следниот систем равенки

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 16 \end{cases}, \text{ чие решение е } a = 3, b = 2 \text{ и } c = 0. \text{ Бараната функција е } f(x) = 3x^2 + 2x.$$

Задача 1

Опреди ја квадратната функција $f(x) = x^2 + bx + c$, чиј график ги содржи точките $A(-1, 0)$ и $B(4, 0)$.

Пример 2

За кои вредности на параметарот m дадената функција ќе биде квадратна:

а) $f(x) = 4x^2 + (m - 3)x$; б) $f(x) = (m + 5)x^2 - 2x - 7$.

Решение:

За да биде функцијата квадратна треба да е исполнет условот $a \neq 0$.

а) Во функцијата $f(x) = 4x^2 + (m - 3)x$, коефициентот $a = 4 \neq 0$.

Според ова, вредноста на параметарот m не влијае на тоа дали функцијата ќе биде квадратна или не, значи $m \in \mathbb{R}$.

б) Во $f(x) = (m + 5)x^2 - 2x - 7$, коефициентот $a = m + 5$.

Според условот за квадратна функција $a \neq 0$, имаме $m + 5 \neq 0$, односно $m \neq -5$.

- Ако $b = c = 0$, тогаш квадратната функција го добива обликот $f(x) = ax^2, a \neq 0$.
- Ако $a = 1, b = c = 0$, се добива наједноставната квадратна функција $y = x^2$.

Пример 3

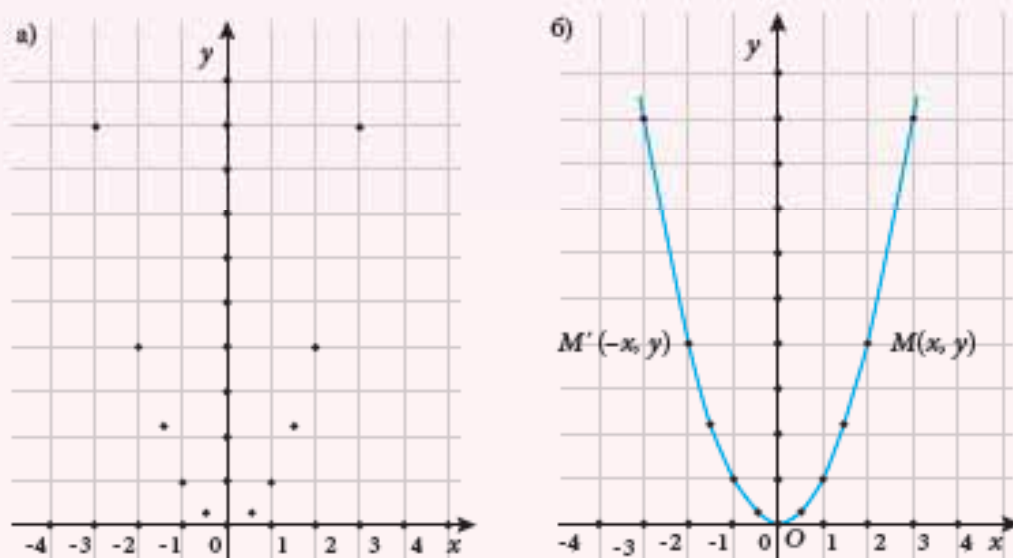
За функцијата $y = x^2$ направи табела на вредности на функцијата за $x \in \{-3; -2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 3\}$. Нацртај ги соодветните точки од графикот во координатен систем и поврзи ги за да го добиеш геометрискиот изглед на графикот на функцијата.

Решение:

Бараната табела е:

x	-3	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
x^2	9	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	9

Од табелата може да заклучиме дека $(-3, 9), (-2, 4), (-1,5; 2,25), \dots, (1,5; 2,25), (2, 4), (3, 9)$ се точки од графикот на функцијата $y = x^2$. Овие точки се претставени во координатниот систем даден на цртеж 1а). Колку повеќе точки од графикот на функцијата внесеме во координатниот систем, толку подобра претстава за геометрискиот изглед на графикот ќе добиеме.



Цртеж 1

- Ако во координатниот систем се внесат сите точки (x, x^2) , за $x \in \mathbb{R}$ од графикот на $y = x^2$ точките ќе формираат парабола (цртеж 1б).
- Координатниот почеток $O(0, 0)$ е најниската точка од графикот. Оваа точка е *теме* на параболата.
- Може да воочиме дека за секоја точка $M(x, y)$ од параболата $\{(x, y) | y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$ и точката $M'(-x, y)$, која е симетрична на M во однос на y -оската е исто така на параболата. Ова значи дека y -оската е оска на симетрија на оваа парабола.

Задачи за вежбање!

1. Која од дадените функции е квадратна:

а) $f(x) = x^2 - 2x^2$;

б) $f(x) = 5x^2$;

в) $f(x) = x(2x - 3)$;

г) $f(x) = 2 - 3x - x^2$;

д) $f(x) = -2x + 3x^2 - 5$

2. За кои вредности на параметарот m дадената функција ќе биде квадратна:

а) $f(x) = 2x^2 - (m+1)x + 7$;

б) $f(x) = (m-3)x^2 + x + 1$;

в) $f(x) = (m^2 - 9)x^2 - 4x - 5 + m$.

3. Нека $f(x) = 2x^2$.

а) Препиши ја во тетратка и пополни ја табелата:

x	-2,5	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	2,5
x^2									

б) Нацртај го графикот на функцијата и со користење на графикот спореди ги следните вредности на функцијата:

- $f(-4)$ и $f(-2)$;
- $f(-4)$ и $f(2)$;
- $f(x_1)$ и $f(x_2)$ ако $x_1 < x_2 < 0$;
- $f(x_1)$ и $f(x_2)$ ако $0 < x_1 < x_2$.

4. Дадена е функцијата $f(x) = -x^2 + bx + c$. Определи ги вредностите на b и c , ако

а) $f(1) = -3, f(0) = 1$;

б) $f(-2) = -10, f(2) = -6$.

5. Определи ја функцијата $f(x) = ax^2 + bx + c$, ако $f(1) = 2, f(-2) = 29, f(2) = 5$.6. Определи го параметарот m така што графикот на функцијата $f(x) = 2x^2 - (m+1)x + 1$ да минува низ точката $(-1, 5)$.7. Докажи дека за функцијата $f(x) = x^2 + x + k$ важи $f(k-1) = k^2$.8. Определи ја функцијата $f(x) = ax^2 + c$, ако

а) $f(1) = 0$ и $f(-2) = 3$;

б) $f(0) = -1$ и $f(4) = 12$.

3.2 ГРАФИК НА ФУНКЦИИТЕ

$$f(x) = ax^2 \text{ И } f(x) = ax^2 + c$$

Потсети се!

- Како се вика кривата која е график на функцијата $y = x^2$?
- Која точка е теме на параболата $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$?
- Која права е оска на симетрија на параболата $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$?

Пример 1

Нацртај го графикот на дадените функции во ист координатен систем:

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x^2$, $h(x) = \frac{1}{3}x^2$ б) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = -3x^2$.

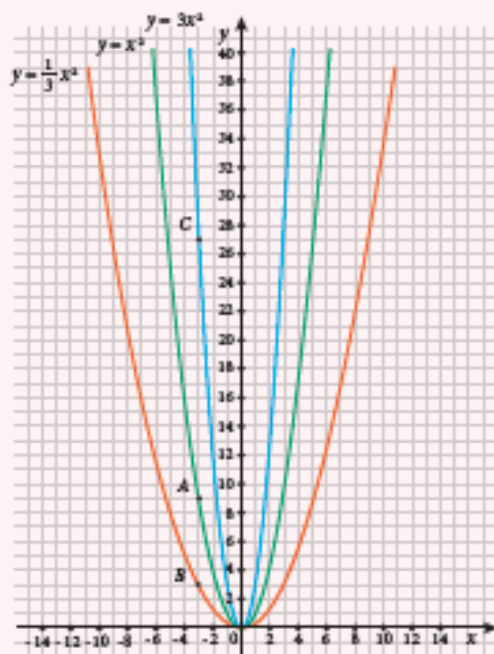
Решение:

- а) Одбираме неколку вредности за променливата x и ги пресметуваме вредностите на функциите за да определиме неколку точки од нивните графици.

x	-3	-1	0	1	3
x^2	9	1	0	1	9
$3x^2$	27	3	0	3	27
$\frac{1}{3}x^2$	3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3

Со користење на податоците во табелата и поврзување на добиените точки од графиците на овие три функции ги претставуваме функциите графички (види цртеж 1).

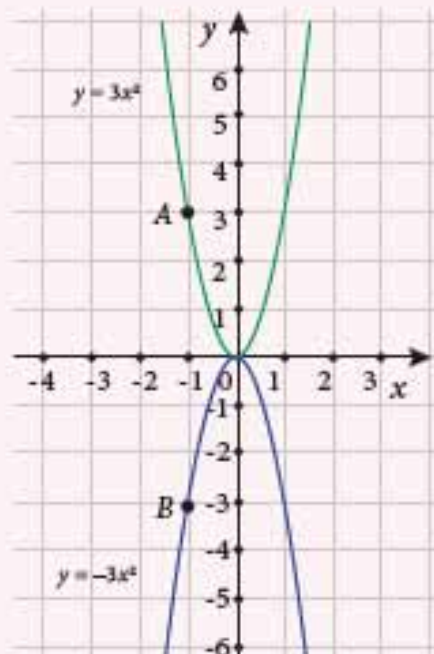
Трите означени точки A , B и C се точки од графиците на овие три функции добиени за $x = -3$ (кај сите три точки x -координатата е -3). Од y -координатите на овие три точки може да воочиме дека за поголеми позитивни вредности на коефициентот пред x^2 (коефициентот a во квадратната функција), се добиваат и поголеми y -координати (ординати) за иста вредност на x ($x \neq 0$).



б) Табелата со вредности за овие две функции за истите вредности на x е

x	-3	-1	0	1	3
$3x^2$	27	3	0	3	27
$-3x^2$	-27	-3	0	-3	-27

На цртежот функциите се претставени графички. Може да воочиме дека ординатите на точките A и B се спротивни броеви. Ова важи за сите точки од графици за кои $x \neq 0$. Тоа покажува дека графикот на функцијата $y = -3x^2$ може да се добие од графикот на функцијата $y = 3x^2$ со рефлексija во однос на x -оската.



Запомни!

- Графикот на функцијата $y = ax^2$, $a \neq 0$ е крива која се вика **парабола**.
- Најниската точка од графикот (кога $a > 0$), односно највисоката точка од графикот (кога $a < 0$) се вика **теме на параболата**.
- Темето на параболата која е график на $y = ax^2$ е координатниот почеток.
- Ако $a > 0$, тогаш со зголемување на вредноста на коефициентот a се зголемуваат и ординатите на точките од графикот на $y = ax^2$ за иста вредност на променливата x , т.е. како се зголемува вредноста на a , така графикот е сè пострмен, т.е. сè поблиску до y -оската.
- Ако $a > 0$, тогаш параболата е свртена со отворот нагоре, а ако $a < 0$, тогаш параболата е свртена со отворот надолу.
- За функцијата $y = ax^2$, $a \neq 0$ важи $f(-x) = f(x)$, што значи дека графикот на функцијата е симетричен во однос на y -оската.

Задача 1

Нацртај го графикот на дадените функции во ист координатен систем.

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \frac{1}{2}x^2$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

Потсети се!

Ако A е точка со координати $(1, 2)$, одреди ги координатите на точката B која се добива со транслација на A за 2 единици нагоре и на точката C која се добива со транслација на A за 5 единици надолу.

Пример 2

Нацртај ги графиците на функциите

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 4, \quad h(x) = x^2 - 2,$$

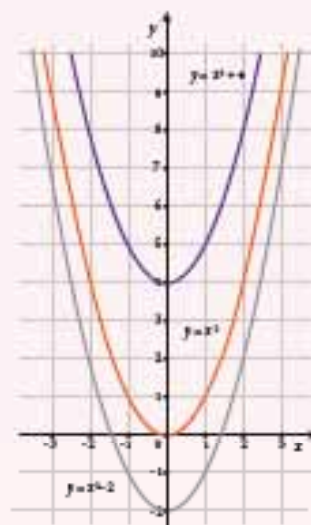
во ист координатен систем и воочи ја врската помеѓу нивните графици.

Решение:

Прво правиме табела на вредности за дадените функции.

Потоа, со помош на добиените точки ги цртаме параболите кои се графици на функциите (цртеж 2).

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 4$	$h(x) = x^2 - 2$
-2	4	$4 + 4 = 8$	$4 - 2 = 2$
-1	1	$1 + 4 = 5$	$1 - 2 = -1$
0	0	$0 + 4 = 4$	$0 - 2 = -2$
1	1	$1 + 4 = 5$	$1 - 2 = -1$
1,5	2,25	$2,25 + 4 = 6,25$	$2,25 - 2 = 0,25$
3	9	$9 + 4 = 13$	$9 - 2 = 7$



Ако ги споредиме вредностите на $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^2 + 4$, може да воочиме дека за секоја вредност на x , вредноста $g(x)$ е за 4 поголема од $f(x)$. Аналогно, $h(x)$ е за 2 помала од $f(x)$.

Оттука следува дека графикот на $g(x) = x^2 + 4$ може да се добие со поместување, т.е. транслација на графикот на $f(x) = x^2$ за 4 единици нагоре.

Значи, графикот на функцијата $g(x) = x^2 + 4$ е параболa која е симетрична во однос на y -оската, а најниската точка на графикот е точката $(0, 4)$ и таа е теме на параболата.

Аналогно, графикот на функцијата $h(x) = x^2 - 2$ е параболa, симетрична во однос на y -оската, која се добива со поместување, т.е. транслација на графикот на $f(x) = x^2$ за 2 единици надолу. Теме на оваа параболa е точката $(0, -2)$.

Задача 2

Нацртај ги графиците на функциите $g(x) = -\frac{1}{3}x^2$, $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ и $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}$ во ист координатен систем и согледај некои нивни својства.

Запомни!

Графикот на функцијата $y = ax^2 + c$ е парабола со теме $T(0, c)$, која се добива со транслација на параболата $y = ax^2$ за c единици нагоре ако $c > 0$, или за $|c|$ единици надолу ако $c < 0$.

Својства на функцијата $f(x) = ax^2 + c$, $a \neq 0$:

- Функцијата е дефинирана за сите реални броеви, т.е. $D_f = \mathbb{R}$.
- Темето на параболата е во точката $T(0, c)$.
- Ако $a > 0$, тогаш темето $T(0, c)$ е најниската точка од графикот, т.е. $f(0) = c$ е најмалата вредност на функцијата. Оттука следува дека множеството вредности на функцијата е $V_f = [c, +\infty)$.
Ако $a < 0$, темето е највисоката точка од графикот, т.е. $f(0) = c$ е најголемата вредност на функцијата. Значи, множеството вредности на функцијата е $V_f = (-\infty, c]$.
- Од претходното следува дека функцијата $f(x) = ax^2 + c$, $a \neq 0$ во темето на графикот (параболата) има најмала или најголема вредност, т.е. екстремна вредност.

Имено,

ако $a > 0$, $y_{\min} = c$ за $x = 0$,

ако $a < 0$, $y_{\max} = c$ за $x = 0$.

- Оска на симетрија на графикот на функцијата (параболата) е y -оската.

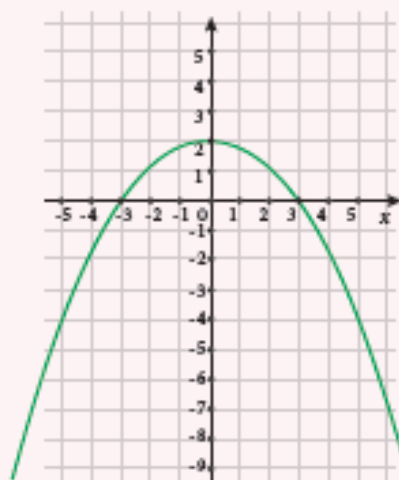
Пример 3

Запиши ги својствата $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$.

Решение:

- Дефиниционата област на функцијата е $D_f = \mathbb{R}$.
- Множеството вредности на функцијата е $V_f = (-\infty, 2]$.
- Темето на параболата е $T(0, 2)$.
- Од $a = -\frac{1}{4} < 0$ следува дека функцијата има максимум $y_{\max} = 2$ за $x = 0$.
- Графикот на функцијата е симетричен во однос на y -оската.

Графикот на функцијата е даден на цртежот, од каде што може да се забележи дека овој график се добива со рефлексија на $y = \frac{1}{4}x^2$ во однос на x -оската и транслација на добиената парабола за 2 единици нагоре.

**Задача 3**

Запиши ги својствата на функцијата $y = -x^2 - 2$. Со рефлексија и транслација на графикот на која функција може да го добиеш графикот на $y = -x^2 - 2$.

Задача 4

- а) Направи табела на вредности на функцијата $y = \frac{1}{2}x^2$ за 5 различни вредности на независната променлива x .
- б) Со користење на табелата скицирај го графикот на $y = \frac{1}{2}x^2$.
- в) Со користење на графикот на $y = \frac{1}{2}x^2$, скицирај го графикот на $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ и напиши ги својствата на функцијата $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$.

Задачи за вежбање!

Нацртај ги графиците на дадените функции, така што прво ќе го скицираш графикот на првата функција, а графиците на другите две функции ќе ги добиеш од графикот на првата функција. (1–3)

1. $y = x^2$, $y = x^2 - 2$, $y = x^2 + 2$;
2. $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 1$;
3. $y = -x^2$, $y = 3 - x^2$, $y = -4 - x^2$.

За дадената функција определи ги множеството вредности, темето на графикот и екстремната вредност (4–6).

4. а) $y = x^2 + 5$; б) $y = -x^2 + 1$.
5. а) $y = 3x^2 - 1$; б) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$.
6. а) $y = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}$; б) $y = \frac{4}{3}x^2 - 2$.

7. Која функција ќе се добие ако ординатата на секоја точка од графикот на функцијата

$$y = -\frac{2}{3}x^2$$

- а) се намали за 3; б) се зголеми за 4?
8. За колку единици и во која насока треба да се помести параболата $y = ax^2 + 2$ за да се добие параболата
- а) $y = ax^2$; б) $y = ax^2 + 7$; в) $y = ax^2 - 4$?

3.3 КАНОНИЧЕН ОБЛИК НА КВАДРАТНА РАВЕНКА И ГРАФИК НА $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Потсети се!

- Нека A е точката со координати $(1, 4)$. Кои се координатите на точките A_1 и A_2 , ако A_1 е добиена со транслација на точката A за 4 единици налево, а A_2 е добиена со транслација на точката A за 2 единици надесно?
- Функцијата $f(x) = ax^2 + bx + c$, каде што a, b и c се реални броеви и $a \neq 0$, се нарекува квадратна функција.
- Кои од следните функции се квадратни функции?
 а) $y = -(x - 3)^2$; б) $y = 4(x - 1)^2 + 3$; в) $y = 2(x - 1)^2 - x^2 + 1$.

Пример 1

Нацртај ги во ист координатен систем графичите на функциите

$f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 3)^2$, $h(x) = (x - 2)^2$,
и согледај ја врската помеѓу добиените графици.

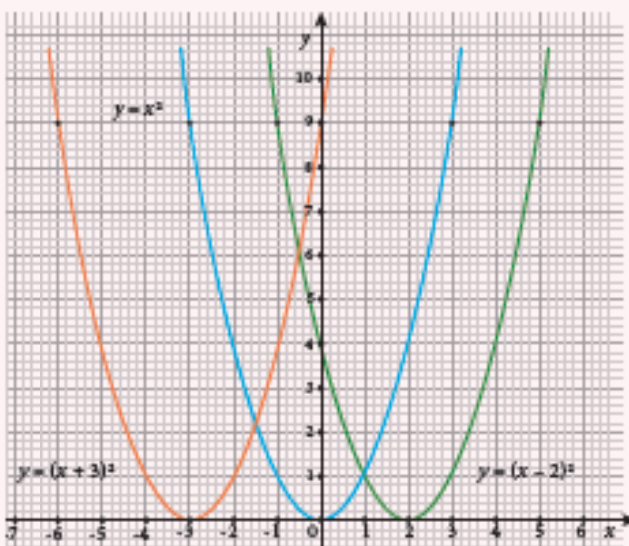
Решение:

За да ги добиеме параболите кои се графичи на овие три функции, ќе направиме табела со вредности на функциите за неколку вредности на x .

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 3)^2$	$h(x) = (x - 2)^2$
-2	4	1	16
-1	1	4	9
0	0	9	4
1	1	16	1
2	4	25	0

Од графичите на функциите можеме да го воочиме следното:

- графикот на функцијата $y = (x + 3)^2$ се добива со транслација на графикот на функцијата $y = x^2$ по x -оската за 3 единици налево;
- графикот на функцијата $y = (x - 2)^2$ се добива со транслација на графикот на функцијата $y = x^2$ по x -оската за 2 единици надесно;
- оска на симетрија на секоја од параболите е правата што минува низ темето на параболата и е паралелна со y -оската.



Запомни!

- Графикот на функцијата $f(x) = a(x - \alpha)^2$ е парабола со теме $T(\alpha, 0)$ која може да се добие со трансформација на параболата $f(x) = ax^2$ по x -оската за α единици надесно ако $\alpha > 0$, или за $|\alpha|$ налево ако $\alpha < 0$.
- Оска на симетрија на параболата $f(x) = a(x - \alpha)^2$ е правата $x = \alpha$, која минува низ темето на параболата и е паралелна со y -оската.

Задача 1

Нацртај ги графиците на функциите $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2$ и $g(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^2$.

Пример 2

Нацртај го графикот на функцијата $y = -3x^2 + 12x - 12$ и испитај ги нејзините својства.

Решение:

Функцијата може да ја запишеме како $y = -3(x^2 - 4x + 4)$, т.е. $y = -3(x - 2)^2$.

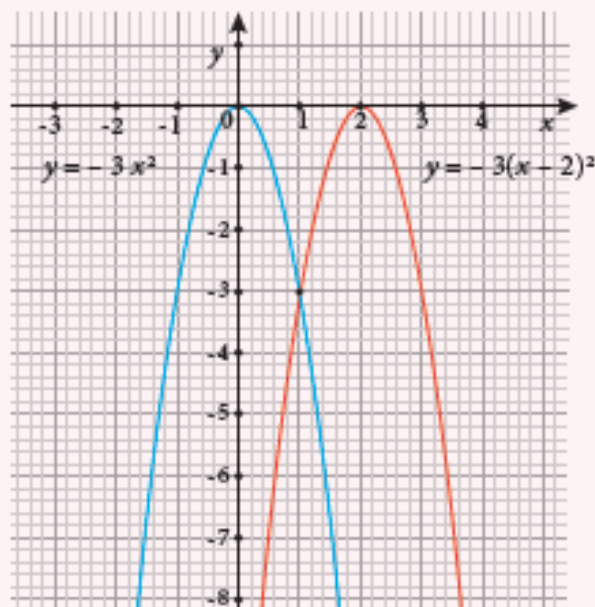
Прво правиме табела за неколку вредности на $y = -3x^2$ и ја цртаме параболата која е график на оваа функција.

Графикот на $y = -3(x - 2)^2$ го добиваме со трансформација на графикот на $y = -3x^2$ по x -оската за 2 единици надесно.

Од графикот на $y = -3(x - 2)^2$ може да ги воочиме следните својства на функцијата:

- Дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R}$. Множеството вредности на функцијата е $V_f = (-\infty, 0]$.
- Темето на параболата е во точката $T(2, 0)$.
- Параболата е свртена надолу ($a = -3 < 0$), па функцијата има максимум $y_{\max} = 0$ за $x = 2$.
- Оска на симетрија на графикот е правата $x = 2$.

x	-2	-1	0	1	2
$-3x^2$	-12	-3	0	-3	-12



Задача 2

Нацртај го графикот на функцијата $y = 2(x - 1)^2$ и напиши ги својствата на функцијата.

Потсети се!

Како ќе се променат координатите на точката која се добива со транслација на точка $A(x, y)$ надесно за 3 единици и надолу за 2 единици.

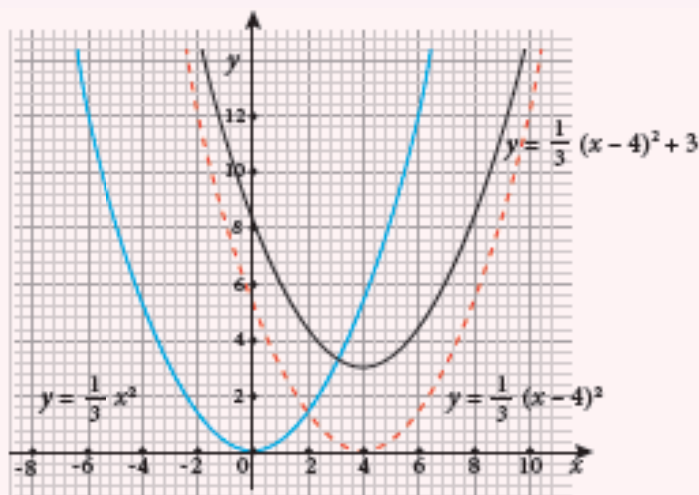
Пример 3

Нацртај го графикот на $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3$.

Решение:

Прво со користење табела на вредности ќе ја скицираме параболата $y = \frac{1}{3}x^2$ (сината параболоа на цртежот). Потоа ќе го нацртаме графикот на функцијата $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2$ со транслација на графикот на $y = \frac{1}{3}x^2$ по x -оската за 4 единици надесно (параболата со испрекинатата црвена линија на цртежот).

На крај, со транслација на графикот на $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2$ за 3 единици нагоре ќе го добиеме графикот на $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3$.
Може да воочиме дека графикот на $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3$ е параболоа која е свртена нагоре (бидејќи $a = \frac{1}{3} > 0$), со теме во точката $T(4, 3)$ и оска на симетрија $x = 4$.

**Запомни!**

- Обликот $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ се нарекува каноничен облик на квадратната равенка.
- Графикот на функцијата е параболоа со теме во точката $T(\alpha, \beta)$ и оска на симетрија $x = \alpha$.

Пример 4

Нацртај го графикот на $y = (x + 2)^2 - 3$.

Решение:

Функцијата е дадена во каноничен облик

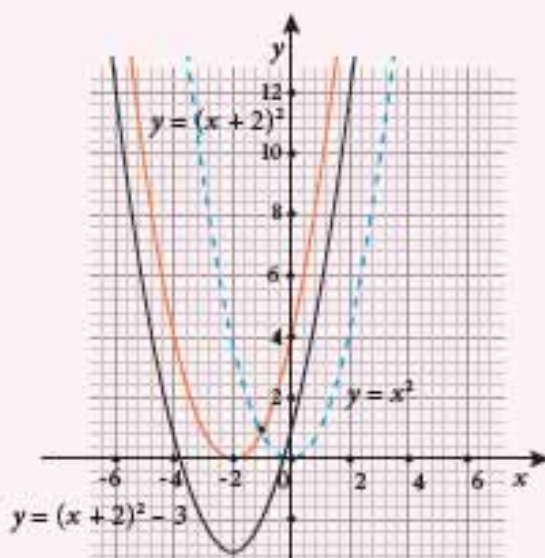
$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

притоа

$$a = 1, \alpha = -2, \text{ а } \beta = -3.$$

Значи, темето на параболата ќе биде $T(-2, -3)$.

Прво ја цртаме параболата $y = x^2$ (сината испрекината линија). Потоа, со транслација за 2 единици налево ($\alpha = -2$) го добиваме графикот на $y = (x + 2)^2$ (жолтата линија), и на крај со транслација на вториот график за 3 единици надолу ($\beta = -3$) го добиваме графикот на дадената функција (црната линија).



Задачи за вежбање!

1. Определи која точка е теме на параболата:

а) $y = 4(x + 1)^2$; б) $y = 4(x + 2)^2 - 3$; в) $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$.

2. Нацртај го графикот на функцијата:

а) $f(x) = 3(x + 2)^2$; б) $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$; в) $f(x) = -5(x - 3)^2$.

г) $f(x) = x^2 + 6x + 9$; д) $f(x) = -4x^2 + 24x - 36$; е) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$.

3. Нацртај ги графици на функциите во ист координатен систем

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 4)^2$, $h(x) = (x + 2)^2$;

б) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -(x - 4)^2$, $h(x) = -(x + 2)^2$.

4. Определи ги темето, оската на симетрија и екстремната вредност на параболата определена со функцијата

а) $f(x) = -4(x + 2)^2$; б) $y = \frac{1}{5}(x + 1)^2 - 3$; в) $y = \frac{2}{3}(x - 6)^2 + \frac{1}{2}$.

5. За колку единици и во која насока треба да се помести параболата $y = 3(x - 2)^2$ за да се добие параболата

а) $y = 3(x + 2)^2$; б) $y = 3(x - 5)^2 - 2$; в) $y = 3(x + 1)^2 + 4$?

6. Определи ги вредностите на a и α така што параболата $y = a(x - \alpha)^2$ ќе минува низ точката $A(-3, 2)$ и темето на параболата ќе биде во точката $T(4, 0)$.

7. Определи ја функцијата чиј график е симетричен во однос на x -оската со графикот на функцијата

а) $f(x) = (x - 5)^2$; б) $f(x) = -(x + 1)^2$; в) $f(x) = 3x^2 - 4$.

3.4 ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $f(x) = ax^2 + bx + c$

Потсети се!

- Графикот на функцијата $f(x) = a(x - \alpha)^2$ е парабола со теме $T(\alpha, 0)$.
- Обликот $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ се вика каноничен облик на квадратната равенка. Графикот на функцијата е парабола со теме во точката $T(\alpha, \beta)$ и оската на симетрија $x = \alpha$.

АКТИВНОСТ

Функцијата $y = x^2 - 6x$ трансформирај ја во облик $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Пример 1

Трансформирај ја во каноничен облик функцијата $y = 3x^2 - 24x + 12$ и одреди го темето на нејзиниот график.

Решение:

Коефициентот пред квадратниот член го вадиме пред заграда и добиваме $y = 3(x^2 - 8x + 4)$.

Во заградата дополнуваме до полн квадрат:

$$y = 3(x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 + 4)$$

$$y = 3((x - 4)^2 - 12)$$

$$y = 3(x - 4)^2 - 36$$

Со ова ја трансформиравме функцијата во каноничен облик. Од каноничниот облик следува дека теме на графикот на функцијата е точката $T(4, -36)$.

Во општ случај, квадратната функција $y = ax^2 + bx + c$ ја трансформираме во каноничен облик на следниот начин.

- Во првите два члена коефициентот a го вадиме пред заграда и добиваме $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$.
- Линеарниот член $\frac{b}{a}x$ во заградата го запишуваме како $\frac{b}{a}x = 2 \cdot \frac{b}{2a}x$ и добиваме

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c.$$

- Изразот во заградата го дополнуваме до полн квадрат со додавање и одземање на $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ и

$$\text{добиваме } y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c, \text{ т.е.}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Со ова квадратната функција ја трансформираме во каноничен облик $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ и за параметрите α и β добивме $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Од каноничниот облик на квадратната функција јасно е дека темето на графикот ќе биде точката $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Запомни!

- Графикот на функцијата $f(x) = ax^2 + bx + c$ е парабола со теме $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.
- Секоја квадратна функција може да се запише во каноничен облик $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
- Со опишаната постапка квадратната функција $y = ax^2 + bx + c$ се сведува во каноничен облик

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

За попрецизно цртање на параболата $y = ax^2 + bx + c$, треба да се определат нејзините *карактеристични точки*. Тоа се темето и пресечните точки на параболата со координатните оски.

Пример 2

Сведи ја во каноничен облик функцијата $y = 3x^2 - 12x + 7$ и нацртај го нејзиниот график.

Решение:

Каноничниот облик на функцијата може да го определиме со директна замена на вредностите на коефициентите a , b и c во изведената формула или да ја примениме постапката со дополнување до полн квадрат за добивање каноничен облик.

Начин 1 (со постапка за трансформација)

$$\begin{aligned} y &= 3(x^2 - 4x) + 7 \\ y &= 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 7 \\ y &= 3((x - 2)^2 - 4) + 7 \\ y &= 3(x - 2)^2 - 12 + 7 \\ y &= 3(x - 2)^2 - 5 \end{aligned}$$

Начин 2 (со користење на изведените формули за α и β)

Коефициенти на дадената функција се $a = 3$, $b = -12$ и $c = 7$.

$$\text{Оттука, } \alpha = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = 2, \quad \beta = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7 - (-12)^2}{4 \cdot 3} = -5, \text{ т.е. } y = 3(x - 2)^2 - 5.$$

Од каноничниот облик на функцијата добиваме дека графикот на функцијата има теме во $T(2, -5)$ и е симетричен во однос на правата $x = 2$.

За попрецизно да го скицираме графикот, ги определуваме и пресеците со координатните оски. За определување на пресечната точка со y -оската, ја определуваме вредноста на функцијата за $x = 0$. За $x = 0$, $y = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 7 = 7$, па пресечната точка е $A(0, 7)$.

Точката $A_1(4, 7)$ е симетрична со точката $A(0, 7)$ во однос на оската на симетрија $x = 2$. За определување на пресечните точки со x -оската, ги определуваме вредностите на x за кои $y = 0$. Добиваме

$$3x^2 - 12x + 7 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{6}$$

$$x_1 \approx 0,71, x_2 \approx 3,29$$

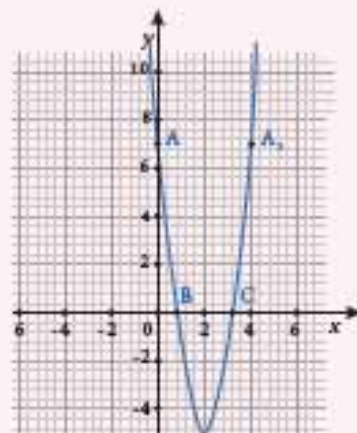
Пресечните точки се $B(0,71, 0)$ и $C(3,29, 0)$.

Графикот е прикажан на цртежот.

Може да воочиме дека за цртање на параболата треба да определиме најмалку 5 нејзини точки. Ако равенката $ax^2 + bx + c = 0$ нема

реални решенија, тоа ќе значи дека параболата не ја сече x -оската. Во тој случај определуваме уште најмалку две други точки за произволно избрани вредности на x .

Графикот на функцијата $y = 3x^2 - 12x + 7$, т.е. $y = 3(x - 2)^2 - 5$ може да го добиеме и со транслации на графикот на $y = 3x^2$. Во тој случај, за да го скицираме графикот на $y = 3x^2$, прво треба да определиме неколку точки од графикот. Потоа, добиената параболоа треба да ја поместиме за 2 единици надесно ($\alpha = 2$) со што ќе ја добиеме параболата $y = 3(x - 2)^2$. На крај, параболата $y = 3(x - 2)^2$ ја поместуваме за 5 единици надолу ($\beta = -5$) и го добиваме графикот на $y = 3x^2 - 12x + 7$.



Пример 3

Нацртај го графикот на функцијата со определување на карактеристичните точки на параболата:

а) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$; б) $y = 2x^2 + 3x + 5$.

Решение:

а) Коэффициентите се $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 4$.

- Темето: $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot (-\frac{1}{3})} = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot 4 - (\frac{1}{3})^2}{4 \cdot (-\frac{1}{3})} = \frac{49}{12}$, па темето е $T(\frac{1}{2}, \frac{49}{12})$.

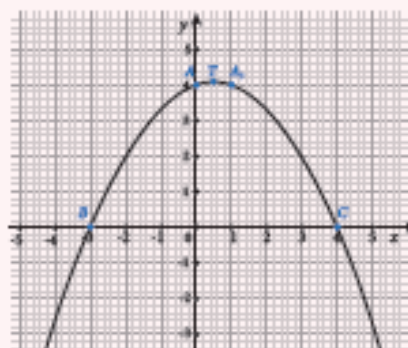
- Пресек со y -оската: $f(0) = 4$, пресечната точка е $A(0, 4)$.

- Пресеци со x -оската: за $y = 0$ имаме $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4 = 0$ чии решенија се $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$. Параболата ја сече x -оската во $B(-3, 0)$ и $C(4, 0)$.

- Оска на симетрија е правата $x = \frac{1}{2}$, па точката $A_1(1, 4)$ е симетрична со точката $A(0, 4)$ во однос на оваа оска.

- $a = -\frac{1}{3} < 0$, па параболата е свртена со отворот надолу.

Графикот е прикажан на цртежот.

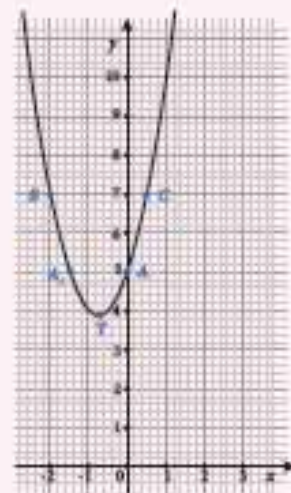


6) Коефициентите се $a=2$, $b=3$, $c=5$.

- Теме: $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5 - 3^2}{4 \cdot 2} = \frac{31}{8} = 3,875$, па темето е $T\left(-\frac{3}{4}, \frac{31}{8}\right)$.
- Оската на симетрија е правата $x = -\frac{3}{4}$.
- Пресек со y -оската: $f(0) = 5$, пресечната точка е $A(0, 5)$, а $A_1\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$ е симетрична со точката $A(0, 5)$ во однос на правата $x = -\frac{3}{4}$.
- Пресеци со x -оската: равенката $2x^2 + 3x + 5 = 0$ нема реални решенија, бидејќи дискриминантата е $D = -31 < 0$. Значи, параболата не ја сече x -оската.
- За попрецизно цртање на параболата, ќе одредиме уште две точки од графикот.

За $x = -2$, $f(-2) = 7$, па една точка од графикот е $B(-2, 7)$. За $x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 7$, па ја добиваме точката $C\left(\frac{1}{2}, 7\right)$.

- $a = 2 > 0$ па параболата е свртена со отворот нагоре. Графикот е прикажан на цртежот.



Задачи за вежбање!

1. Залиши ја функцијата во каноничен облик:

а) $f(x) = x^2 + 4x$; б) $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$; в) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

2. Определи го темето на функцијата:

а) $f(x) = 4x^2 + 5x - 3$; б) $f(x) = -5x^2 + 6x$; в) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 2x - 1$.

3. Нацртај го графикот на функцијата:

а) $y = -(x+1)^2 + 2$; б) $y = 2(x-2)^2 + 1$; в) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{3}{2}$.

4. Нацртај го графикот со помош на карактеристични точки:

а) $f(x) = x^2 + x - 2$; б) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$; в) $f(x) = x^2 - 4x$.

5. Нацртај го графикот на функцијата:

а) $f(x) = x^2 - 2x + 2$; б) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$; в) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$.

6. За кои вредности на p и q , точката $T(-3, 2)$ ќе биде теме на параболата $y = x^2 + px + q$?

7. Параболата $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ минува низ точката $A(8, 5)$ и има теме во $T(6, 3)$. Определи ги a , α и β .

8. Определи ги коефициентите a , b и c на функцијата $f(x) = ax^2 + bx + c$, така што функцијата ќе ја сече x -оската во $A(3, 0)$, ќе има екстремна вредност за $x = 1$ и $f(1) = -4$.

3.5 СВОЈСТВА НА КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

Одреди ја најголемата вредност на функцијата $f(x) = -3x^2 + 2x$.
Потсети се на својствата на квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Да ги испитаме својствата на квадратната функција $y = ax^2 + bx + c$.

1) Дефинициона област

Квадратната функција е дефинирана за сите реални броеви, т.е. $D_f = \mathbb{R}$.

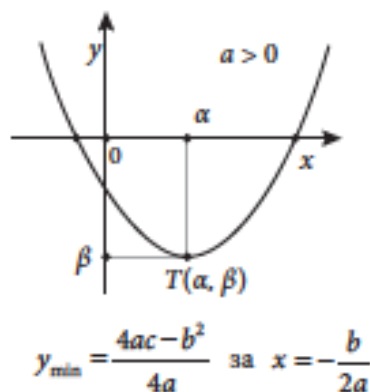
2) Темена на параболата

За да го определиме темето на параболата која е график на функцијата, функцијата ја запишуваме во каноничен облик $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$, каде што $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$, па темето е точката $T(\alpha, \beta)$.

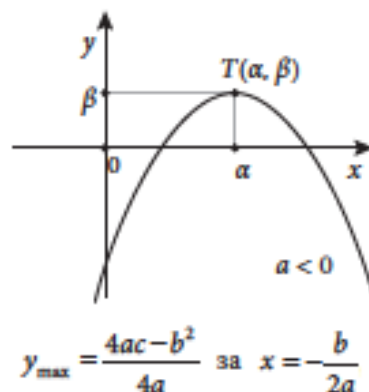
3) Екстремна вредност

Функцијата има екстремна вредност во темето која, во зависност од знакот на коефициентот a , ќе биде максимум или минимум.

- Ако $a > 0$, параболата ќе биде свртена со отворот нагоре и во темето ќе има минимум.



- Ако $a < 0$, параболата ќе биде свртена со отворот надолу и во темето ќе има максимум.



Пример 1

За функцијата $y = 3x^2 - 5x - 4$ определи ги:

- а) дефиниционата област; б) координатите на темето; в) екстремната вредност.

Решение:

а) $D_f = \mathbb{R}$

б) Координатите на темето ќе ги определиме според формулите $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$,

Коефициентите на квадратната функција се $a = 3$, $b = -5$, $c = -4$.

$$\alpha = \frac{-5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6} \quad \beta = \frac{4 \cdot 3 \cdot (-4) - (-5)^2}{4 \cdot 3} = \frac{-48 - 25}{12} = -\frac{73}{12}.$$

Темето на параболата е $T\left(\frac{5}{6}, -\frac{73}{12}\right)$.

- в) Бидејќи $a > 0$, параболата ќе биде свртена со отворот нагоре и во темето ќе има минимум

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 3 \cdot (-4) - (-5)^2}{4 \cdot 3} = -\frac{73}{12}, \quad \text{за } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}.$$

Пример 2

За која вредноста на параметарот m функцијата $y = mx^2 - 3x + 2$ има максимум еднаков на 4?

Решение:

Квадратната функција ќе има максимум ако $m < 0$ и притоа $y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot m \cdot 2 - (-3)^2}{4 \cdot m}$.

Максимумот треба да биде 4, па ја добиваме следната равенка $\frac{4 \cdot m \cdot 2 - (-3)^2}{4 \cdot m} = 4$.

Со решавање на равенката добиваме $m = -\frac{9}{8}$.

Пример 3

Најди го најмалиот можен производ на два реални броја, ако се знае дека нивната разлика е 12.

Решение:

Нека едниот број го означиме со x .

Бидејќи разликата меѓу двата броја е 12, другиот број може да биде $x - 12$ или $x + 12$.

Да земеме дека другиот број е $x + 12$.

Производот на двата броја ќе го запишеме како функција

$$y = x \cdot (x + 12)$$

$$y = x^2 + 12x, \text{ каде } a = 1, b = 12 \text{ и } c = 0.$$

Треба да го одредиме $y_{\min}$.

Од формулата за темето на функцијата имаме

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad x_{\min} = -\frac{b}{2a}$$

$$y_{\min} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 0 - 12^2}{4 \cdot 1} = \frac{-144}{4} \quad x_{\min} = -\frac{12}{2 \cdot 1}$$

$$y_{\min} = -36 \quad x_{\min} = -6$$

Од овде заклучуваме дека едниот број е бројот -6 .

Другиот број ќе биде $-6 + 12 = 6$.

Најмалиот производ на два броја чија разлика е 12 е $-6 \cdot 6 = -36$.

Задача 1

Одреди ја најголемата плуштина на триаголник во кој збирот на основата и соодветната висина е 8 cm.

4) Множество вредности на функцијата

Екстремната вредност го определува множеството вредности на функцијата кое го означуваме со V_f .

- Ако $a > 0$, $V_f = [\beta, +\infty)$.
- Ако $a < 0$, $V_f = (-\infty, \beta]$.

Пример 4

Опреди го множеството вредности на функцијата $y = -2x^2 - 4x - 5$.

Решение:

Коефициентот $a < 0$, што значи дека параболата е свртена со отворот надолу и има максимум

$$y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -3. \text{ Значи, множеството вредности е } V_f = (-\infty, -3].$$

5) Нули на функцијата

Нули на функцијата $y = ax^2 + bx + c$ се вредностите на x за кои $y = 0$. Значи, нули на функцијата се решенијата на равенката $ax^2 + bx + c = 0$.

Со нулите на функцијата ги определуваме x -координатите на точките во кои графикот ја сече x -оската. Ако равенката $ax^2 + bx + c = 0$ нема реални решенија, тогаш графикот не ја сече x -оската.

Задача 2

Опреди ги нулите на функциите:

$$\text{а) } y = 2x^2 - 2x + 5; \quad \text{б) } y = 2x^2 + 3x - 2; \quad \text{в) } y = x^2 - 4x + 4.$$

Што воочуваш?

Запомни!

Нека $D = b^2 - 4ac$ е дискриминантата на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$.

- Ако $D > 0$, тогаш функцијата $y = ax^2 + bx + c$ има две реални нули, т.е. параболата $y = ax^2 + bx + c$ ја сече x -оската во две точки.
- Ако $D = 0$, тогаш нула на функцијата $y = ax^2 + bx + c$ е $x = -\frac{b}{2a}$, т.е. параболата $y = ax^2 + bx + c$ ја допира x -оската во точката $T\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.
- Ако $D < 0$, тогаш функцијата $y = ax^2 + bx + c$ нема реални нули, т.е. параболата $y = ax^2 + bx + c$ нема заеднички точки со x -оската.

Задача 3

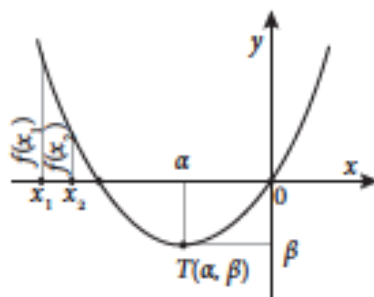
За кои вредности на b и c графикот на квадратната функција $y = x^2 + bx + c$ ја сече x -оската во точките $A(3, 0)$ и $B(1, 0)$?

6) Монотоност на функцијата

Да се испита монотоност (растење, опаѓање) на една функција, значи да се испита што се случува со вредностите на функцијата ако вредноста на x се зголемува.

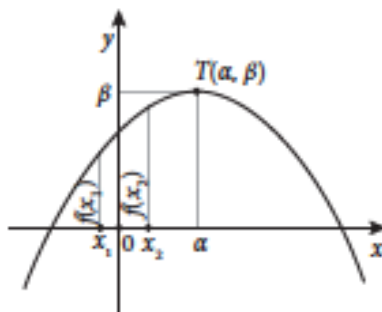
- Ако $a > 0$, функцијата има минимум. Оската на симетрија на параболата, $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$, ја дели дефиниционата област на функцијата $y = ax^2 + bx + c$ на два интервали $(-\infty, \alpha)$ и $(\alpha, +\infty)$. Бидејќи функцијата има минимум во $x = \alpha$, во првиот интервал (лево од минимумот) функцијата опаѓа (вредностите на функцијата се намалуваат со зголемување на x), а во вториот интервал (десно од минимумот) функцијата расте (вредностите на функцијата се зголемуваат со зголемување на x).

На цртежот може да воочиме дека за $x_1 < x_2 < \alpha$, $f(x_1) > f(x_2)$, т.е. функцијата монотонно опаѓа за $x \in (-\infty, \alpha)$, додека таа монотонно расте за $x \in (\alpha, +\infty)$.



- Ако $a < 0$, функцијата има максимум во $x = \alpha$, па во првиот интервал (лево од максимумот) функцијата расте, а во вториот интервал (десно од максимумот) функцијата опаѓа.

На цртежот може да воочиме дека во овој случај за $x_1 < x_2 < \alpha$, $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. функцијата монотонно расте за $x \in (-\infty, \alpha)$, додека таа монотонно опаѓа за $x \in (\alpha, +\infty)$.



Пример 4

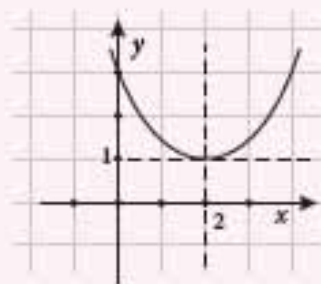
Испитај монотоност на функцијата $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

Решение:

Да испитае монотоност на функција значи да ги одредиме интервалите на растење и на опаѓање на функцијата.

Бидејќи $a = \frac{1}{2} > 0$, функцијата има минимум $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = 1$,
за $x = -\frac{b}{2a} = 2$.

Значи, интервалите во кои треба да се разгледува монотоноста се $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$ (види слика). Бидејќи во $x = 2$ вредноста на функцијата е најмала, таа монотонно опаѓа во интервалот $(-\infty, 2)$, а монотонно расте во интервалот $(2, +\infty)$.

**Задача 3**

Опреди ги интервалите на растење и опаѓање на функциите:

- а) $y = -x^2 + x$; б) $y = x^2 + 4$; в) $y = 3x^2 - 2x + 7$

7) Знак на функцијата

Да се одреди знакот на квадратна функција, значи да се одредат интервалите со вредности на x за кои функцијата е позитивна и оние за кои функцијата е негативна.

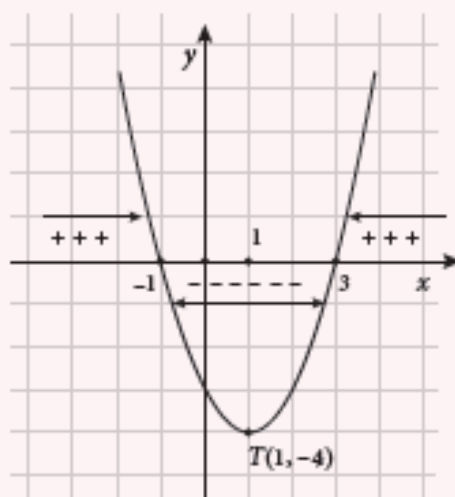
Пример 5

Одреди го знакот на квадратната функција $y = x^2 - 2x - 3$.

Решение:

Прво, ги определуваме темето на графикот на функцијата и пресечните точки со x -оската за да може да ја скицираме параболата. Теме на параболата $y = x^2 - 2x - 3$ е $T(1, -4)$. Решенија на равенката $x^2 - 2x - 3 = 0$ се $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$, па параболата ја сече x -оската во точките $(-1, 0)$ и $(3, 0)$. Со овие три точки го цртаме графикот на функцијата прикажан на цртежот.

Од графикот на функцијата воочуваме дека функцијата е позитивна, т.е. $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, а негативна, т.е. $f(x) < 0$ за $x \in (-1, 3)$.



Пример 6

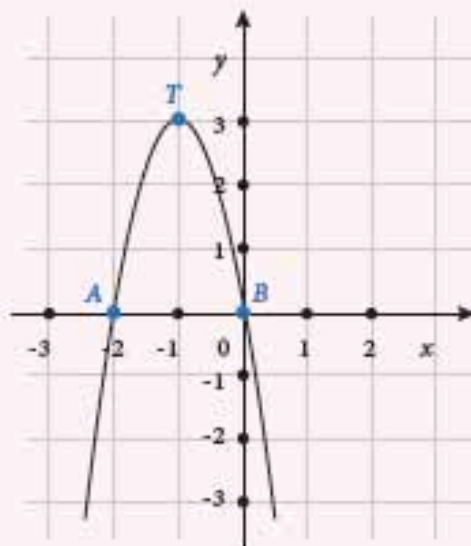
Одреди го знакот на функцијата:

а) $y = -3x^2 - 6x$; б) $y = x^2 + 2x + 3$

Решение:

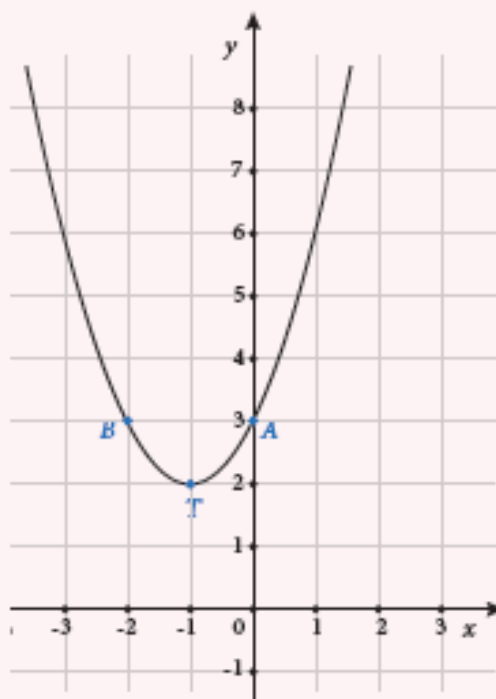
- а) Темето на параболата е $T(-1, 3)$. За $y = 0$ ја добиваме равенката $-3x^2 - 6x = 0$, чии решенија се $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$, па параболата ја сече x -оската во точките $(-2, 0)$ и $(0, 0)$. Со овие три точки ја скицираме параболата која со отворот е свртена надолу бидејќи $a = -3 < 0$.

Графикот на функцијата е даден на цртежот. Од графикот на функцијата воочуваме дека функцијата е позитивна за $x \in (-2, 0)$, а негативна за $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.



- б) Теме на параболата $y = x^2 + 2x + 3$ е $T(-1, 2)$. За $y = 0$, ја добиваме равенката $x^2 + 2x + 3 = 0$, која нема реални решенија, т.е. параболата не ја сече x -оската. За $x = 0$, добиваме $y = 3$, па параболата ја сече y -оската во $A(0, 3)$. Симетрична на A е точката $B(-2, 3)$. Со овие три точки го цртаме графикот на функцијата кој е параболоа свртена со отворот нагоре бидејќи $a = 1 > 0$.

Бидејќи параболата нема пресечни точки со x -оската и е свртена со отворот нагоре, целата параболоа е над x -оската, односно функцијата е позитивна за секој реален број, т.е. $f(x) > 0$ за секој $x \in (-\infty, +\infty)$.



Пример 7

Кошаркарски тим игра во арена со капацитет за 15 000 гледачи. Цената на билетот е 14 долари и просечната посетеност на неодамнешните натпревари била 9500 гледачи. Анкетата на пазарот покажува дека за секое намалување на цената на билетот за 1 долар, просечната посетеност се зголемува за 1000 гледачи.

- Опреди ја функција со која се пресметува приходот од продадените билети, во зависност од цената на билетот.
- Опреди ја цената на билетот за која приходот од продажба на билети ќе биде најголем.
- Опреди ја цената на билетот која ќе биде толку висока што никој нема да присуствува на натпреварите и нема да има приход.

Решение:

- Нека x е цената на билетот. Треба да определиме функција $f(x)$ со која за дадена вредност на цената на билет, ќе го пресметаме остварениот приход од продадените билети. Ако n е бројот на гледачи (продадени билети), јасно е дека $f(x) = n \cdot x$.

Знаеме дека ако цената на еден билет е 14 долари, тогаш ќе има (во просек) 9500 продадени билети, и дека за секое намалување на цената за 1 долар, бројот на продадени билети се зголемува за 1000 (ако цената се намали за 3 долари, бројот на гледачи ќе биде $9500 + 3000$). Ако x е цената на билетот, тогаш со $14 - x$ пресметуваме за колку долари таа е помала од 14 долари. Значи, ако цената на билетот е x долари, бројот за продадени билети ќе се зголеми за $1000(14 - x)$, т.е. вкупниот број на продадени билети ќе биде $n = 9500 + 1000(14 - x)$.

Сега за функцијата $f(x)$ добиваме

$$f(x) = x \cdot (9500 + 1000(14 - x))$$

$$f(x) = x \cdot (23500 - 1000x)$$

$$f(x) = -1000x^2 + 23500x$$

- Треба да се определи максимумот на $f(x)$. Функцијата е квадратна функција со коефициент $a = -1000 < 0$, што значи дека графикот е парабола свртена со отворот надолу и во темето има максимум. Тој максимум се добива за $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23500}{2(-1000)} = 11,75$. Значи, ако цената на билетот е 11,75 долари, профитот ќе биде најголем.

- Треба да се определи цената на билетот x така што остварениот приход $f(x) = 0$.

$$-1000x^2 + 23500x = 0$$

$$x(23500 - 1000x) = 0$$

Решенија на добиената равенка се $x = 0$ и $x = 23,5$. Значи, 23,5 долари би била превисока цена на билетот и никој не би купил билет. Јасно е дека и за цена 0 долари приходот ќе биде нула, но во задачата треба да се определи која цена ќе биде толку висока што никој нема да присуствува на натпреварите и затоа одговорот на прашањето е 23,5 долари.

Задачи за вежбање!

Одреди ги својствата на функциите (теме, екстремна вредност, множество вредности, нули, интервали на растење и опаѓање) (1–5)

1. $y = x^2 - 4x + 1$

2. $y = -x^2 + x + 6$

3. $y = 2x^2 - 7x + 3$

4. $y = 5x^2 + 7x + 3$

5. $y = -2x^2 + 4x$

6. $y + 16 = -x^2 + 8x$

7. Одреди го знакот на функцијата:

а) $y = x^2 - 5x + 6$;

б) $y = x^2 + 2$;

в) $y = -2x^2 - 6x$.

8. Определи ги коефициентите a и c на функцијата $f(x) = ax^2 + 3x + c$, ако $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ се нули на функцијата.9. За која вредност на x дробката $\frac{4}{6x^2 - 5x - 3}$ ќе има најголема вредност?10. Продавач на безалкохолни пијалаци на една популарна плажа ги анализира своите продажни евиденции и открива дека ако во еден ден продаде x лименки газирани сок, неговиот профит (во долари) е даден со $P(x) = -0,001x^2 + 3x - 1800$. Колкав е максималниот дневен профит и колку лименки треба да продаде за да има максимален профит?11. Ефективноста на телевизиска реклама зависи од тоа колку пати гледачот ја гледа. По неколку експерименти, една рекламна агенција открила дека ефективноста E може да се определи со следната формула

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2,$$

каде што n е колку пати гледачот ја гледал дадената реклама. Колку пати треба гледачот да ја гледа рекламата за таа да има максимална ефикасност?

3.6 ТЕК И ГРАФИК НА КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$ се нули на функцијата $y = x^2 - 4$, а во темето $T(0, -4)$ функцијата има минимум. На интервалот $(0, +\infty)$ функцијата расте, а на интервалот $(-\infty, 0)$ опаѓа.
- Одреди ги и другите својства на $y = x^2 - 4$.

Многу често се поставува барањето: „Нацртај го графикот и испитај го текот на квадратната функција...“

За да одговориш на ова барање, треба да определиш

- 1) дефинициона област на функцијата;
- 2) теме на параболата која е график на функцијата;
- 3) пресеци на параболата со координатните оски;
- 4) оска на симетрија на параболата.

Со овие податоци може да го нацрташ графикот на функцијата, а потоа да определиш и:

- 5) екстремна вредност на функцијата;
- 6) множество вредности на функцијата;
- 7) монотоност на функцијата;
- 8) знак на функцијата.

Редоследот по кој ќе ги запишеш одговорите (својствата на функцијата) не е битен.

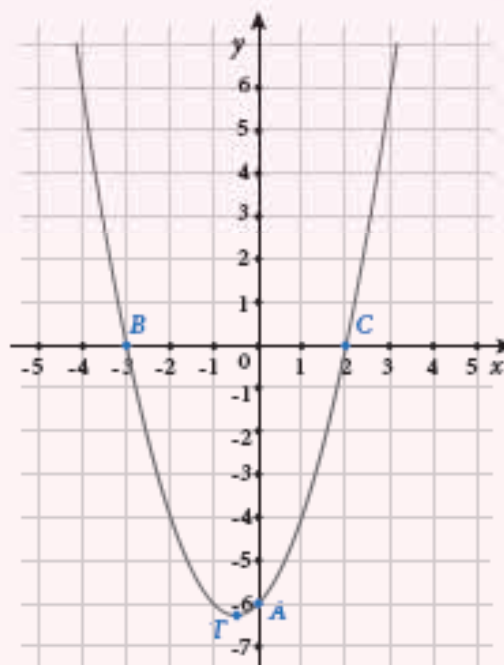
Пример 1

Нацртај го графикот и испитај го текот на функцијата

$$y = x^2 + x - 6.$$

Решение:

- Дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R}$.
- $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{25}{4} = -6,25$,
па темето на параболата е $T(-0,5; -6,25)$.
- Пресеците со координатните оски се:
 - пресек со y -оската: $f(0) = -6$, $A(0, -6)$
 - пресек со x -оската (нули на функцијата):
решенија на $x^2 + x - 6 = 0$ се $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$, $B(-3, 0)$, $C(2, 0)$.
- Оска на симетрија е $x = -\frac{1}{2}$.



Со овие својства може да го нацртаме графикот на функцијата кој е даден на цртежот.

- Екстремна вредност: $a = 1 > 0$, па функцијата има минимум $y_{\min} = -6,25$ за $x = -0,5$.
- Множеството вредности е $V_f = [-6,25; +\infty)$.
- Монотоност на функцијата: функцијата монотонно опаѓа за $x \in (-\infty; -0,5)$, а функцијата монотонно расте за $x \in (-0,5; +\infty)$.
- Знак на функцијата: функцијата е позитивна за $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$, а негативна за $x \in (-3, 2)$.

Пример 2

Нацртај го графикот и испитај го текот на функцијата $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$.

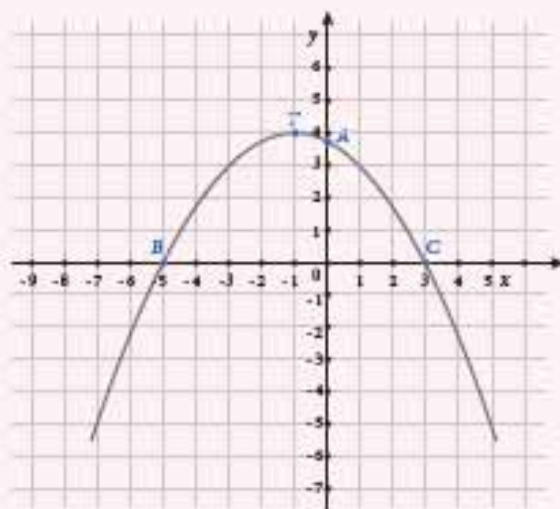
Решение:

Прво одредуваме график на функцијата:

- Дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R}$.
- $\alpha = -1$, $\beta = 4$, па темето на параболата е $T(-1, 4)$.
- Пресеците со координатните оски се:
 - пресек со y -оската:

$$f(0) = \frac{15}{4} = 3,75, A(0, 3,75)$$
 - пресек со x -оската (нули на функцијата):
 решенија на $-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4} = 0$
 се $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$, $B(-5, 0)$, $C(3, 0)$.
- Оска на симетрија е $x = -1$.

Графикот на функцијата е даден на цртежот.



Од графикот испитуваме тек на функцијата:

- Екстремна вредност: $a = 1 < 0$, па функцијата има максимум $y_{\max} = 4$ за $x = -1$.
- Множеството вредности е $V_f = (-\infty, 4)$.
- Монотоност на функцијата: функцијата монотонно расте за $x \in (-\infty, -1)$, а монотонно опаѓа за $x \in (-1, +\infty)$.
- Знак на функцијата: $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$, а $f(x) > 0$ за $x \in (-5, 3)$.

Задача 1

Нацртај го графикот и испитај го текот на функцијата

а) $y = x^2 + 2x$; б) $y = -x^2 + 2x$; в) $y = -x^2 - 2x$

Задачи за вежбање!

Нацртај го графикот и испитај го текот на функцијата $(1 - 5)$

1. $y = x^2 - 3$
2. $y = -2(x - 1)^2$
3. $y = 2x^2 - 4x - 3$
4. $y = (x + 2)^2$
5. $y = \frac{1}{4}(x + 4)^2 - \frac{1}{4}$
6. $y = -4x^2 + 25$

3.7 КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ

Потсети се!

- За кои вредности на $x \in [-3, -2, 0, 1]$, неравенката $x - 3 > 0$ преминува во точен броен израз?
- Ако x_1 и x_2 се нули на квадратниот трином $ax^2 + bx + c$, тогаш разложувањето на триномот на линеарни множители е $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Производот $a \cdot b$ е позитивен ако и двата множители се позитивни или двата множители се негативни.
- Производот $a \cdot b$ е негативен ако едниот множител е позитивен, а другиот негативен.
- Кое е множеството решенија на неравенката $x + 3 > 0$?

Активност

Опреди за кои вредности на x , производот $x(x - 2)$ ќе биде позитивен.

Запомни!

- Неравенките од облик
 $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$
 $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$
 каде што $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$ се нарекуваат **квадратни неравенки**.
- Овој облик на квадратната неравенка е **општ вид на квадратна неравенка**.

Пример 1

Реша ја квадратната неравенка $x^2 + 2x - 8 < 0$.

Решение:

Треба да го определиме множеството вредности на x за кои неравенката ќе биде точен броен израз. Може да постапиме на два начини.

Прв начин.

Квадратниот трином на левата страна од неравенката го разложуваме на линеарни множители.

Ги определуваме нулите на триномот $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-8)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$, т.е. $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Оттука, $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$, па неравенката може да ја запишеме како $(x + 4)(x - 2) < 0$.

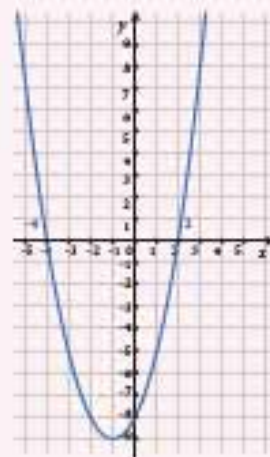
За производот $(x + 4)(x - 2)$ да биде негативен, множителите треба да се со спротивен знак, па ги добиваме следните два системи од линеарни неравенки:

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+4 < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x > -4 \\ x < 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < -4 \\ x > 2 \end{cases}$$

Решение на првиот систем равенки е $M_1 = (-4, 2)$, а на вториот $M_2 = \emptyset$. Решение на дадената неравенка ќе биде унијата од множествата решенија на двата системи, односно множество решенија на квадратната неравенка е $M = M_1 \cup M_2 = (-4, 2) \cup \emptyset = (-4, 2)$.

Втор начин.

За определување на множеството решенија на квадратната неравенка, може да го користиме графикот на соодветната квадратна функција. Во тој случај решавањето на квадратната неравенка се сведува на одредување на вредностите на x за кои квадратната функција $y = x^2 + 2x - 8$ има негативни вредности. За оваа функција, нули на функцијата се $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$, а коефициентот a пред квадратниот член е позитивен, па параболата е свртена со отворот нагоре. Од графикот на функцијата (даден на цртежот) ги читаме вредностите на x за кои функцијата е негативна, т.е. вредностите за кои нејзиниот график е под x -оската. На овој начин добиваме дека $x^2 + 2x - 8 < 0$ за $x \in (-4, 2)$.



Пример 2

Реша ја неравенката $\frac{x^2 - 5}{4} - \frac{3x^2 + 1}{2} \geq -2$. Потоа одреди ги целобројните решенија на неравенката.

Решение:

Прво, неравенката ја сведуваме на општ вид. Откако ќе ја помножиме со НЗС од именителите, т.е. со 4, добиваме

$$x^2 - 5 - 2(3x^2 + 1) \geq -8.$$

Со средување ја добиваме неравенката $5x^2 - 1 \leq 0$. Нулите на соодветната квадратна функција ги наоѓаме со решавање на равенката $5x^2 - 1 = 0$,

од каде што добиваме $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Бидејќи $a = 5$ е позитивно, параболата $y = 5x^2 - 1$ е свртена со отворот нагоре и $f(x) \leq 0$ за $x \in \left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$.

Целобројни решенија на неравенката ќе бидат целите броеви кои припаѓаат во множеството решенија $\left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$. Оттука, за дадената неравенка множеството целобројни решенија е $M = \{0\}$.



Задача 1

Решете ги неравенките:

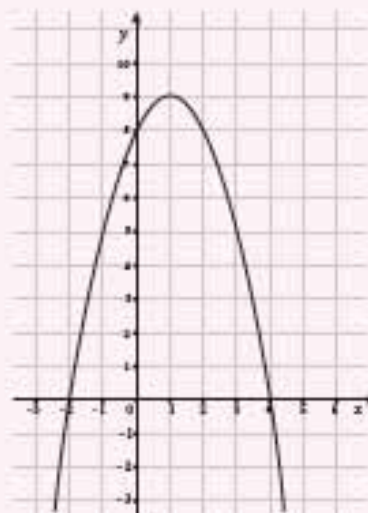
а) $2x^2 + 6x - 8 > 0$; б) $2x^2 - 3x \leq 5$; в) $(2x - 1)^2 > 2 - 4x$; г) $2x^2 - 18 \leq 0$.

Пример 3

Определете ја дефиниционата област на $f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}$.**Решение:**

Квадратниот корен ќе биде реален број само ако изразот под коренот е ненегативен број. Според тоа, дефиниционата област на функцијата ќе биде множеството решенија на неравенката $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$.

Решенија на $-x^2 + 2x + 8 = 0$ се $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$, а $a = -1 < 0$, па параболата е свртена со отворот надолу. Значи, $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$ за $x \in [-2, 4]$, т.е. $D_f = [-2, 4]$.



Задача 2

Одредете ја дефиниционата област на функциите:

а) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 6}$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$.

Пример 4

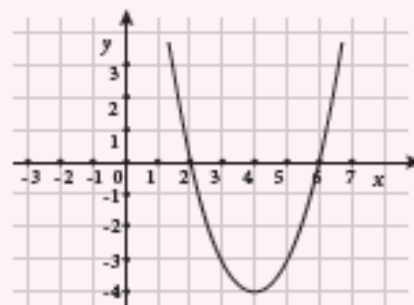
За кои вредности на параметарот m , равенката $x^2 + (2 - m)x - 2 + m = 0$ ќе има реални решенија?**Решение:**

Дискриминантата на равенката е

$$D = (2 - m)^2 - 4(-2 + m) = m^2 - 8m + 12.$$

За да има реални решенија, треба $D \geq 0$, т.е. $m^2 - 8m + 12 \geq 0$.

Решенија на $m^2 - 8m + 12 = 0$ се $m_1 = 2$ и $m_2 = 6$ и параболата е свртена со отворот нагоре. Оттука следува дека $m^2 - 8m + 12 \geq 0$ за $m \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$.



Задача 3

За која вредност на параметарот m , равенката $mx^2 + 2(m + 2)x + 2m + 4 = 0$ нема реални решенија ако $m < 0$?

Пример 5

Група ученици сакаат да одат на концерт. Трошокот за изнајмување автобус, кој ќе ги однесе на концертот, е 450 долари и треба да се подели еднакво меѓу учениците. Организаторите на концертот нудат попуст (на билетот за концертот) за групи кои ќе дојдат со автобус. Редовната цена на еден билет е 50 долари, но за лицата што ќе дојдат со автобус, цената на билетот се намалува по 10 центи за секое лице во групата (т.е. ако во групата има 10 лица, секој од нив ќе добие попуст од 100 центи). Колку ученици треба да се соберат за вкупниот трошок по ученик да биде помал од 54 долари?

Решение:

Нека x е бројот на ученици во групата. Тогаш секој ученик треба да плати $\frac{450}{x}$ долари за автобусот и $50 - 0,1 \cdot x$ долари за билет. Вкупниот трошок за секој ученик треба да биде помал од 54 долари, па ја добиваме следната неравенка:

$$\begin{aligned} \frac{450}{x} + (50 - 0,1x) &< 54 \quad (\text{множиме со } x, x > 0, \text{ па не се менува знакот на неравенството}) \\ 450 + 50x - 0,1x^2 &< 54x \\ -0,1x^2 - 4x + 450 &< 0 \end{aligned}$$

Решенија на равенката $-0,1x^2 - 4x + 450 = 0$ (т.е. нули на $y = -0,1x^2 - 4x + 450$) се $x_1 = -90$ и $x_2 = 50$. Притоа, $a = -0,1 < 0$, па параболата е свртена со отворот надолу, од каде што следува дека множеството решенија на неравенката $-0,1x^2 - 4x + 450 < 0$ е $(-\infty, -90) \cup (50, +\infty)$. Но, x е број на ученици во групата и не може да биде негативен број, па решението е $x \in (50, +\infty)$, односно треба да се соберат повеќе од 50 ученици за секој од нив да има трошок помал од 54 долари.

Задачи за вежбање!

Решете ги квадратните неравенки (1 – 4):

1. а) $x^2 - 9 < 0$; б) $16 - x^2 \geq 0$; в) $x^2 - 2x > 0$.
2. а) $(3x + 1)(x - 1) \geq 0$; б) $x^2 - 3x - 18 \leq 0$; в) $x^2 + 2x > 3$.
3. а) $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$; б) $x^2 < x + 2$; в) $(x + 2)(x - 3) \geq 0$.
4. а) $(x + 4)^2 \geq 0$; б) $(x + 4)^2 > 0$; в) $(x + 4)^2 < 0$; г) $(x + 4)^2 \leq 0$.

5. Решете ја неравенката сведувајќи ја на квадратната неравенка $\frac{(x-1)^2}{4} \leq 1 - \frac{3-x}{2}$.

6. Определи ја дефиниционата област на $f(x) = \sqrt{24 - x - 3x^2}$.

7. За кои вредности на параметарот m , равенката $(m + 1)x^2 + 2(1 - m)x + 2m - 5 = 0$ ќе нема реални решенија?

8. Ако производителот продаде x единици од одреден производ, приходот R и трошокот C (во долари) се дадени со

$$R = 20x$$

$$C = 2000 + 8x + 0,0025x^2$$

Притоа, остварениот профит е приходот намален за трошокот. Определи колку единици треба да продаде производителот за да оствари профит од најмалку 2400 долари.

3.8 СИСТЕМ ОД КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Потсети се!

Претстави го графички множеството решенија на системот $\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 3 \end{cases}$.

Одреди го пресекот на множествата $M_1 = (-3, 10]$ и $M_2 = (-\infty, -1] \cup (5, +\infty)$.

За кои вредности на a и b изразот $\frac{a}{b}$ е негативен?

Активност

Реша го системот од линеарни неравенки $\begin{cases} x - 5 \geq -1 \\ 5 - 2x < 3 \end{cases}$.

Пример 1

Определи го решението на системот од линеарна неравенка и квадратна неравенка со една непозната $\begin{cases} 3x + 5 \leq 10 \\ x^2 + 3x - 10 < 0 \end{cases}$.

Решение:

Ја решаваме линеарната неравенка $3x + 5 \leq 10$.

Добиваме $x \leq \frac{5}{3}$, т.е. множеството решенија на линеарната неравенка е $M_1 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$.

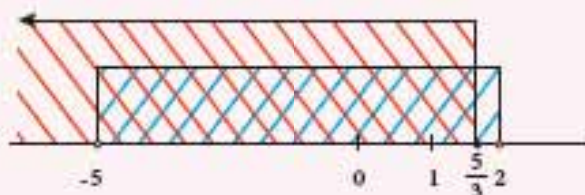
Го определуваме множеството решенија на квадратната неравенка $x^2 + 3x - 10 < 0$.

Решенија на $x^2 + 3x - 10 = 0$ се $x_1 = -5$ и $x_2 = 2$, и $a = 1 > 0$, па параболата е свртена со отворот нагоре. Значи, $x^2 + 3x - 10 < 0$ за $x \in (-5, 2)$, т.е. множеството решенија е $M_2 = (-5, 2)$.

Множеството решенија на системот е пресек од множествата решенија на неравенките во системот. Оттука, за решение на системот добиваме $M = M_1 \cap M_2 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \cap (-5, 2) = \left(-5, \frac{5}{3}\right]$.

Пресекот на множествата решенија на двете неравенки може да го определиме и графички со претставување на двете множества на реална права (види го цртежот). Пресекот е во делот каде што има коси линии со двете бои. Множеството M_1 е претставено со црвени линии, а M_2 со сини линии, па таму каде што има линии од двете бои е пресекот на овие две множества, односно пресекот е двојно прецртаната област. Исто така, доколку некој интервал е затворен во некоја од крајните точки, тоа на реалната права се означува со полно кружче.

Множеството $M_1 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ е интервал кој е затворен оддесно, што значи дека $\frac{5}{3}$ припаѓа во множеството и затоа на цртежот кај оваа точка има полно крукче. Ако некој интервал е отворен во некоја од крајните точки, тогаш на реалната права тоа се означува со празно крукче во точката во која интервалот е отворен. Во овој пример, точките -5 и 2 не припаѓаат во $M_2 = (-5, 2)$ и затоа на цртежот во овие точки има празно крукче.



Задача 1

Решете го системот неравенки
$$\begin{cases} 2x+5 \leq 0 \\ x^2+2x-3 < 0 \end{cases}$$

Пример 2

Решете го системот квадратни неравенки со една непозната
$$\begin{cases} x^2-7x+10 \leq 0 \\ x^2-8x+7 > 0 \end{cases}$$

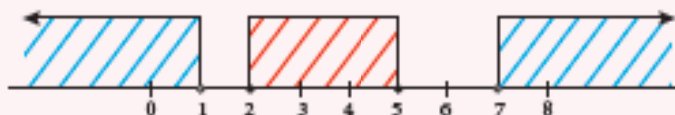
Решение:

Имаме систем од две квадратни неравенки со една непозната. Прво, го определуваме множеството решенија на секоја од неравенките во системот, а потоа за определување на решението на системот бараме пресек на двете добиени множества решенија.

Решенија на $x^2 - 7x + 10 = 0$ се $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$, а $a = 1 > 0$, па параболата е свртена со отворот нагоре. Значи, $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ за $x \in [2, 5]$, т.е. множеството решенија е $M_1 = [2, 5]$.

Решенија на $x^2 - 8x + 7 = 0$ се $x_1 = 1$ и $x_2 = 7$, а $a = 1 > 0$, па и оваа параболата е свртена со отворот нагоре. Значи, $x^2 - 8x + 7 > 0$ за $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$, т.е. множеството решенија е $M_2 = (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$.

Добиените множества решенија на двете неравенки се претставени графички на цртежот.



Гледаме дека пресекот на двете добиени множества решенија е празно множество, па дадениот систем неравенки нема решение.

Пример 3

Решете го системот квадратни неравенки со една непозната

$$\begin{cases} (x-1)^2 - 2x > -3 \\ x(x-3) \leq x+5 \end{cases}$$

Решение:

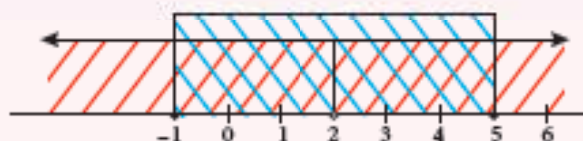
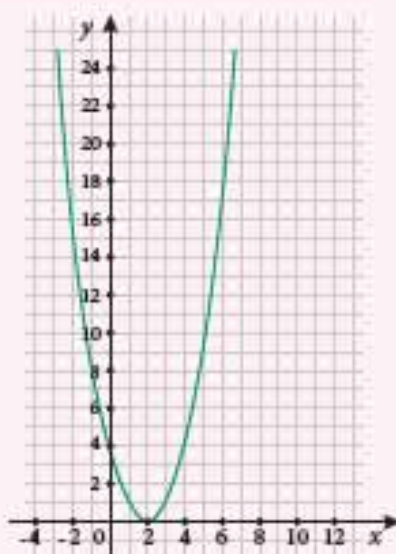
Прво ги сведуваме двете неравенки во општ вид. Добиваме

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - 2x + 3 > 0 \\ x^2 - 3x - x - 5 \leq 0 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x^2 - 4x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

Равенката $x^2 - 4x + 4 = 0$ има едно решение $x = 2$ и бидејќи параболата е свртена со отворот нагоре, целиот график на $y = x^2 - 4x + 4$ е над x -оската со теме во $(2, 0)$ (види цртеж). Значи, $x^2 - 4x + 4 > 0$ за $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, т.е. множеството решенија е $M_1 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Решенија на $x^2 - 4x - 5 = 0$ се $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$, па $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ за $x \in [-1, 5]$, т.е. множеството решенија е $M_2 = [-1, 5]$.

Добиените множества на двете равенки се претставени графички на цртежот.



Множеството решенија на системот е $M = M_1 \cap M_2 = ((-\infty, 2) \cup (2, +\infty)) \cap [-1, 5] = [-1, 2) \cup (2, 5]$.

Задача 2

Решете го системот квадратни неравенки со една непозната $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0 \end{cases}$

Пример 4

Решете ја неравенката $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} < 0$.

Решение:

Знаеме дека количникот е негативен ако именителот и броителот се со спротивни знаци. Оттука, множеството решенија на оваа неравенка ќе биде унија од множествата решенија на следните два системи од квадратни неравенки:

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 16 > 0 \\ x^2 - 12x + 11 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0 \\ x^2 - 12x + 11 > 0 \end{cases}$$

Решенија на $x^2 - 6x - 16 = 0$ се $x_1 = -2$ и $x_2 = 8$, а на $x^2 - 12x + 11 = 0$ се $x_1 = 1$ и $x_2 = 11$.

Решение на првиот систем.

- $x^2 - 6x - 16 > 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$, т.е. множеството решенија е $(-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$
- $x^2 - 12x + 11 < 0$ за $x \in (1, 11)$, т.е. множеството решенија е $(1, 11)$.

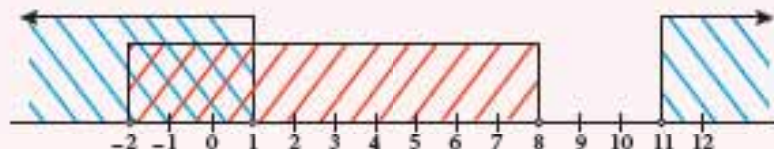
Множеството решенија на првиот систем неравенки е пресекот на овие две множества, т.е. $M_1 = (8, 11)$ (види цртеж).



Решение на вториот систем.

- $x^2 - 6x - 16 < 0$ за $x \in (-2, 8)$, т.е. множеството решенија е $(-2, 8)$.
- $x^2 - 12x + 11 > 0$ за $x \in (-\infty, 1) \cup (11, +\infty)$, т.е. множеството решенија е $(-\infty, 1) \cup (11, +\infty)$.

Множеството решенија на вториот систем неравенки е пресекот на овие две множества, т.е. $M_2 = (-2, 1)$ (види цртеж).



Решение на $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} < 0$ е $M = M_1 \cup M_2 = (-2, 1) \cup (8, 11)$.

Пример 5

Решете ја неравенката $\frac{x^2 + 2x + 1}{-x^2 - 2x + 3} \geq 0$.

Решение:

Количникот ќе биде ненегативен ако именителот и броителот се со ист знак и притоа броителот може да биде и еднаков на нула. Оттука, множеството решенија на оваа неравенка ќе биде унија од множествата решенија на следните два системи од квадратни неравенки:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 1 \leq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 < 0 \end{cases}$$

Решенија на $x^2 + 2x + 1 = 0$ се $x_1 = x_2 = -1$ (и параболата $y = x^2 + 2x + 1$ е свртена со отворот нагоре), а решенија на $-x^2 - 2x + 3 = 0$ се $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$ (и параболата $y = -x^2 - 2x + 3$ е свртена со отворот надолу).

Решение на првиот систем.

- $x^2 + 2x + 1 \geq 0$ за $x \in \mathbb{R}$, т.е. множеството решенија е $(-\infty, +\infty)$
- $-x^2 - 2x + 3 > 0$ за $x \in (-3, 1)$, т.е. множеството решенија е $(-3, 1)$.

Множеството решенија на првиот систем неравенки е пресекот на овие две множества, т.е. $M_1 = (-3, 1)$.

Решение на вториот систем.

- $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ за $x = -1$, т.е. множеството решенија е $\{-1\}$.
- $-x^2 - 2x + 3 < 0$ за $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, т.е. множеството решенија е $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Множеството решенија на вториот систем неравенки е пресекот на овие две множества, т.е. $M_2 = \emptyset$.

Решение на дадената неравенка е $M = M_1 \cup M_2 = (-3, 1)$.

Задача 3

Реша ја неравенката $(x^2 - 3x - 10)(x^2 + 3x - 4) \leq 0$.

Задача 4

Опреди ја дефиниционата област на функцијата $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 12}}$.

Пример 6

Реша ја неравенката $\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} < 3$.

Решение:

$$\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} - 3 < 0$$

Бројот 3 го префрламе од левата страна на неравенството.

$$\frac{-x^2 + 2x - 3 - 3(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 4x + 3} < 0$$

Го средуваме изразот од левата страна.

$$\frac{-4x^2 + 14x - 12}{x^2 - 4x + 3} < 0$$

Множеството решенија на добиената неравенка ќе биде унија од множествата решенија на следните два системи од квадратни неравенки:

$$\begin{cases} -4x^2 + 14x - 12 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x^2 + 14x - 12 < 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases}$$

Решенија на $-4x^2 + 14x - 12 = 0$ се $x_1 = \frac{3}{2}$ и $x_2 = 2$ (и параболата $y = -4x^2 + 14x - 12$ е свртена надолу), а на $x^2 - 4x + 3 = 0$ се $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ (и параболата $y = x^2 - 4x + 3$ е свртена нагоре).

Решение на првиот систем.

$$-4x^2 + 14x - 12 > 0 \text{ за } x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right),$$

$$-x^2 - 4x + 3 < 0 \text{ за } x \in (1, 3).$$

Множеството решенија на првиот систем неравенки е пресекот на овие две множества, т.е.

$$M_1 = \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

Решение на вториот систем.

$$-4x^2 + 14x - 12 < 0 \text{ за } x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty),$$

$$-x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ за } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

Множеството решенија на вториот систем неравенки е пресекот на овие две множества, т.е.

$$M_2 = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

Решение на дадената квадратна неравенка е $M = M_1 \cup M_2 = (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (3, +\infty)$.

Задача 5

Решете ја неравенката $\frac{2x^2 + x - 13}{x^2 - 2x - 3} > 1$.

Пример 7

Еден 3Д-печатач за t часа произведува $P(t) = -t^2 + 16t$ објекти. Ако печатачот работи t часа, тогаш бројот на дефектните објекти е даден со функцијата $D(t) = t^2 - 9t + 23$. Колку часа треба да работи печатачот за да произведе најмалку 48 објекти и не повеќе од 5 дефектни објекти?

Решение:

Треба да го определиме интервалот на вредности за t - времето на работа на печатачот така што $P(t) \geq 48$ и $D(t) \leq 5$, т.е. да го определиме множеството на решенија на системот неравенки:

$$\begin{cases} -t^2 + 16t \geq 48 \\ t^2 - 9t + 23 \leq 5 \end{cases}$$

Решение на првата неравенка $-t^2 + 16t - 48 \geq 0$ е $M_1 = [4, 12]$, а на втората неравенка $t^2 - 9t + 18 \leq 0$ е $M_2 = [3, 6]$.

Решение на системот е пресекот на овие две множества $M = [4, 6]$.

Значи, печатачот треба да работи од 4 до 6 часа за да произведе барем 48 објекти и не повеќе од 5 дефектни.

Задача 6

Определи два последователни природни броја чиј производ е помал од 90, а збирот од нивните квадрати е поголем од 113.

Задачи за вежбање!

1. Реши го системот неравенки

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x^2 - x - 30 \leq 0 \\ x^2 - 4x - 32 > 0 \end{cases}; & \text{б) } \begin{cases} -2x^2 + 3x + 5 > 0 \\ 2x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}; & \text{в) } \begin{cases} 4x^2 > 4x - 1 \\ (3x - 2)^2 + (x - 2)^2 < 2 \end{cases} \end{array}$$

2. Реши ја неравенката

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x^2 - 3x + 4}{1 - x^2} > 0; & \text{б) } \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x - 8} \leq 0. \\ \text{в) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > -3; & \text{г) } \frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} < -1. \end{array}$$

3. Реши ја неравенката $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x - 3) < 0$.4. Определи ја дефиниционата област на $f(x) = \sqrt{\frac{4x - x^2}{x^2 - x + 1}}$.5. Ефикасноста на автомобилското гориво (во km на литар) при брзина v km/h се определува со

$$E(v) = -0,01v^2 + 1,2v - 10.$$

Од еколошки причини, ефикасноста мора да биде најмалку 20 km/l, а за безбедност на моторот, ефикасноста мора да биде најмногу 30 km/l. Определи го интервалот на дозволени брзини за ефикасноста да биде еколошка и безбедна за моторот.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Која од дадените функции е квадратна?

а) $f(x) = x - x^2$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = (x+3)(3x-1)$; г) $f(x) = 1 + x - x^2$.

2. Нека $f(x) = -3x^2$.

- а) Пополни ја табелата

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$-3x^2$									

- б) Нацртај го графикот на функцијата.

3. Определи го m така што графикот на функцијата $f(x) = 2mx^2 - (m+3)x + 2$ да минува низ точката $(-2, 3)$.

4. а) Направи табела на вредности за функцијата $y = \frac{1}{4}x^2$ за 5 различни вредности на независната променлива x .

- б) Со користење на табелата скицирај го графикот на $y = \frac{1}{4}x^2$.

- в) Со користење на графикот на $y = \frac{1}{4}x^2$ скицирај го графикот на $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3$.

5. Определи множество вредности, теме на график и екстремна вредност на функцијата.

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = -x^2 + 5$; в) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$; г) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}$.

6. За колку единици и во која насока треба да се помести параболата $y = 3x^2 - 2$ за да се добие $y = 3x^2 + 5$?

7. Определи ги темето, оската на симетрија, екстремната вредност и нацртај го графикот на функцијата.

а) $f(x) = -2(x+1)^2$; б) $f(x) = 4(x-2)^2 + 1$; в) $f(x) = 2x^2 + 12x + 9$.

г) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$; д) $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 1$; е) $y = \frac{1}{5}(x-3)^2 + \frac{1}{2}$.

8. За колку единици и во која насока треба да се помести параболата $y = 2(x+1)^2$ за да се добие параболата $y = 2(x-5)^2 + 2$?

9. Определи ја функцијата чиј график е симетричен во однос на x -оската со параболата $y = -2(x+1)^2$.

10. Запиши ја функцијата во каноничен облик:

а) $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$; б) $f(x) = x^2 - 2x$; в) $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$.

11. Нацртај го графикот на $y = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{2}{3}$.

12. Нацртај го графикот на функцијата со помош на карактеристични точки

а) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$; б) $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

13. За кои вредности на p и q , точката $T(2, -5)$ ќе биде теме на параболата $y = x^2 + px + q$?

14. За кои вредности на a , α и β , параболата $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ќе минува низ точката $(2, 3)$ и ќе има теме во $(3, 4)$?

15. Одреди ги својствата на функциите (теме, екстремна вредност, множество вредности, нули, интервали на растење и опаѓање)

а) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$; б) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$; в) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

16. Определи го знакот на функцијата

а) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$; б) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

17. Бројот на јаболка произведени од секое дрво во овоштарник со јаболка зависи од тоа колку густо се засадени дрвјата. Ако n дрвја се засадени на еден хектар земја, тогаш секое дрво произведува $900 - 9n$ јаболка. Колку дрва треба да се засадат на еден хектар овоштарник за да се добие максимален принос на јаболка?

18. Нацртај го графикот и испитај го текот на функцијата

а) $f(x) = -x^2 + x + 6$; б) $f(x) = x^2 - 9$.
в) $f(x) = (x+2)^2$; г) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$.

19. Реши ги квадратните неравенки

а) $x^2 + 3x - 4 < 0$; б) $x^2 + x - 6 > 0$;
в) $6x^2 + x - 1 \geq 0$; г) $x^2 - 25 \leq 0$.

20. Реши ја неравенката сведувајќи ја на квадратна неравенка

а) $\frac{(x+2)^2}{3} - 3 \geq \frac{1-x}{4}$; б) $\frac{(x+2)^2}{3} + 2 \leq \frac{1-x}{4}$.

21. Одреди ја дефиниционата област на функцијата $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x + 6}$.

22. За автомобилот на Стефан, растојанието d (во сантиметри) потребно за запирање на возилото, доколку се движи со брзина v km/h, е дадено со формулата

$$d = v + \frac{v^2}{2}.$$

Тој сака растојанието потребно за запирање на возилото да не надминува 760 сантиметри. Определи го интервалот на брзината со која треба да вози?

23. Еден градинар има ограда со вкупна должина од 120 метри. Тој сака со оградата да огради правоаголна градина со зеленчук во својот двор и сака површината што е оградена да биде најмалку 800 m^2 . Кој е интервалот на можни вредности за должината на неговата градина?

24. Кои вредности на $x \in \{-5, -1, 0, 5\}$ се решенија на системот $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -x^2 + 3x + 4 \leq 0 \end{cases}$?

25. Реши го системот $\begin{cases} 4x - 1 > 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$.

26. Реши го системот

а) $\begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 > 0 \\ 3x^2 + 2x - 1 > 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ -x^2 - 3x + 4 \geq 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases}$.

27. Реши ја неравенката $(2x^2 - 4x - 6)(-x^2 + 3x + 4) \geq 0$.

28. Определи ја дефиниционата област на функцијата $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}}$.

29. Реши ја неравенката $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$.

30. Определи во кој интервал треба да биде должината на страната на квадрат, така што збирот од неговата плоштина и периметар да биде помал од 21, а поголем од 5.

ЕЛЕМЕНТИ ОД ВЕРОЈАТНОСТ

Комбинаториката и веројатноста се две математички области кои се тесно поврзани. Комбинаториката е дел од математиката што се занимава со броење, подредување и избирање елементи според одредени правила. Таа ни помага да одговориме на прашања од типот „На колку начини може...?“, без притоа да ги набројуваме сите можности поединечно. Веројатноста, пак, овозможува математичко опишување на појави во природата и општеството кои не се детерминистички, туку во себе го вклучуваат елементот на случајност. Почетоците на теоријата на веројатност се поврзани со игрите на среќа. Но, денес, теоријата на веројатност наоѓа примена во природните науки, техниката, економијата и во сите сфери од животот.

4.1 ВАРИЈАЦИИ СО ПОВТОРУВАЊЕ

Потсети се!

Декартовиот (директен) производ на множествата A и B е множеството $A \times B$, кое се состои од подредени парови (a, b) , каде што $a \in A$ и $b \in B$, односно

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Активност

Одреди го множеството $A \times B$ ако

а) $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 4\}$;

б) $C = \{0, 1, 2\}$ и $D = \{1, 2, 3, 4\}$

Пример 1

Ако $A = \{1, 2, 3\}$, дефинирај го Декартовиот производ $A \times A$. Колку елементи има овој Декартов производ?

Решение:

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}. \quad \text{Број на елементи во } A \times A \text{ е } 9 (= 3 \cdot 3 = 3^2).$$

Запомни!

Нека A е множество со n елементи. Секој елемент од Декартовиот производ $A \times A$ се нарекува *варијација со повторување од n елементи од класа 2*.

- Ако A е множество со n елементи, колку елементи има во Декартовиот производ $A \times A$, односно колку подредени парови (a, b) постојат, ако a и b се елементи на A ?

Воочи го следново:

- Елементот a може да биде кој било елемент од множеството A . Во A има вкупно n елементи, па a може да се избере на n начини.
- Ако го фиксираме a , елементот b може да биде повторно кој било елемент од множеството A , односно и b може да се избере на n начини.
- Оттука, бројот на елементи во директниот производ $A \times A$ е $n \cdot n = n^2$.

Запомни!

Бројот на варијации со повторувања од n елементи од класа 2 се означува со $\bar{V}_n^2$ и тој е еднаков на $\bar{V}_n^2 = n^2$.

Цртичката во ознаката $\bar{V}_n^2$ ќе означува повторување, т.е. дека станува збор за варијации со повторување.

Нека A е дадено множество. Декартов производ е множеството $A \times A \times A$ кое ги содржи сите подредени тројки (a_1, a_2, a_3) , каде што $a_1, a_2, a_3 \in A$, т.е.

$$A \times A \times A = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in A\}.$$

Пример 2

Нека $A = \{1, 2\}$. Најди го Декартовиот производ $A \times A \times A$. Колку елементи има во ова множество?

Решение:

$$A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}.$$

Множеството $A \times A \times A$ има 8 елементи $(= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3)$.

Задача 1

Најди го Декартовиот производ $A \times A \times A$, каде што $A = \{3, 5, 7\}$. Колку елементи има во ова множество?

Запомни!

Ако A е множество со n елементи, тогаш секој елемент од Декартовиот производ $A \times A \times A$ се нарекува *варијација со повторување од n елементи од класа 3*.

Бројот на варијации со повторување од n елементи од класа 3 се означува со $\bar{V}_n^3$ и тој е еднаков на $\bar{V}_n^3 = n^3$.

Запомни!

Декартовиот производ $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ пати}}$ е множеството кое се состои од подредените k -торки $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, каде што $a_1, a_2, \dots, a_k$ се елементи од множеството A , т.е.

$$A \times A \times \dots \times A = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in A\}.$$
Пример 3

Нека $A = \{c, d\}$. Запиши го множеството $A \times A \times A \times A$. Колку елементи има во ова множество?

Решение:

$A \times A \times A \times A = \{(c, c, c, c), (c, c, c, d), (c, c, d, c), (c, c, d, d), (c, d, c, c), (c, d, c, d), (c, d, d, c), (c, d, d, d),$
 $(d, c, c, c), (d, c, c, d), (d, c, d, c), (d, c, d, d), (d, d, c, c), (d, d, c, d), (d, d, d, c), (d, d, d, d)\}$

Бројот на елементи во $A \times A \times A \times A$ е $16 = 2^4$. Воочи дека 2 е бројот на елементи во множеството A , а 4 е бројот на појавувања на множеството A во Декартовиот производ.

Запомни!

- Ако A е множество од n елементи, тогаш секој елемент од Декартовиот производ $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ пати}}$, се нарекува *варијација со повторување од n елементи од класа k* .
- Бројот на варијации со повторување од n елементи од класа k се означува со $\bar{V}_n^k$ и тој е еднаков на $\bar{V}_n^k = n^k$.

- Воочи дека $(1, 2, 3)$ и $(1, 3, 2)$ се различни подредени тројки, иако се составени од истите елементи. Оттука, може да се заклучи дека распоредот на елементите во една k -торка е важен, односно различните распореди на елементите даваат различни k -торки.

Запомни!

Распоредот (редоследот) на елементите во една варијација со повторување од n елементи од класа k е битен, т.е. со промена на редоследот на елементите во една варијација со повторување се добива друга варијација.

Договор: Во понатамошниот дел од текстот, за поедноставно пишување, варијациите со повторување ќе ги пишуваме без загради и запирки. Така, варијацијата (c, d, c, d) ќе ја пишуваме како $cdcd$. Притоа, нема да забораваме дека сепак станува збор за подредена n -торка и дека распоредот на елементите е битен.

Пример 4

Колку трицифрени броеви може да се формираат со цифрите 1, 2, 3, 4?

Решение:

- Воочи дека позицијата на една цифра во број со повеќе цифри е важна. Имено, 321 и 213, се составени од исти цифри, но се различни броеви.
- Значи, позицијата на цифрата во еден број во позициониот броен систем е важна, и затоа секој k -цифрен број може да се разгледува како подредена k -торка, односно како варијација со повторување од класа k .
- Оттука, бројот на трицифрени броеви составени од четирите цифри 1, 2, 3, 4 е всушност бројот на сите варијации со повторување од 4 елементи од класа 3 и тој број е $\bar{V}_4^3 = 4^3 = 64$.

Активност

Напиши ги сите трицифрени броеви што може да се формираат со цифрите 1, 2, 3, 4.

Пример 5

- Колку четирицифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
- Колку од нив почнуваат со цифрата 5?
- Колку од нив се парни?

Решение:

- Бараните четирицифрени броеви се, всушност, варијации со повторување од 9 елементи од класа 4. Нивниот број е $\bar{V}_9^4 = 9^4 = 6561$.
- Ако на прва позиција (позиција на илјади) се фиксира цифрата 5, останатите три позиции може да се разгледуваат како варијации со повторување од 9 елементи од класа 3. Нивниот број е $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$.
- Еден број е парен ако завршува на парна цифра. Ако на последната позиција (позиција на единици) се фиксира бројот 2, првите три позиции може да се разгледуваат како варијации со повторување од 9 елементи од класа 3. Исто како и претходно, нивниот број е $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$.

Истиот број на варијации се добива и ако на последната позиција се фиксира 4 или 6 или 8. Значи, цифрата на единиците може да биде една од цифрите 2, 4, 6 или 8, т.е. за избор на оваа цифра имаме 4 начини. Која од овие цифри и да се фиксира на позиција на единиците, останатите три цифри може да се пополнат на $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$ начини. Оттука, вкупниот број на парни четирицифрени броеви составени од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 е $4 \cdot \bar{V}_9^3 = 4 \cdot 9^3 = 2916$.

Задача 2

Колку непарни петцифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Пример 6

На сид има 3 закачалки. На колку начини може да се закачат 4 палта на нив, ако на една закачалка може да се закачат и повеќе од едно палто?

Решение:

- Воочи дека на секое палто може да му се додели лабела 1, 2, 3, зависно од тоа на која закачалка ќе се закачи.
- Оттука, секој распоред на 4 палта на 3 закачалки може да се разгледува како варијација со повторување од 3 елементи од класа 4.
- На пример, 1132 означува дека првото и второто палто ќе се закачат на првата закачалка, третото палто ќе се закачи на третата закачалка, а четвртото – на втората закачалка.
- Така, 4 палта може да се закачат на 3 закачалки на $V_3^4 = 3^4 = 81$ начин.

Задачи за вежбање!

1. Дадени се множествата $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Формирај го Декартовиот производ $A \times B$.
2. Дадено е множеството $A = \{a, b\}$. Запиши ги сите варијации со повторување од класа 5 од елементите од множеството A .
3. Колку е бројот на сите трицифрени броеви во кои не се појавуваат цифрите 0 и 3?
4. Одреди го бројот на сите четирицифрени броеви што може да се запишат со цифрите 1, 3, 4, 6 и 8.
5. На колку начини може да се пополни тикет за спортска прогноза со 10 пара? (За секој пар постојат три можности: 1 – победа на првата екипа, 2 – победа на втората екипа, 0 – нерешено).
6. На приземјето во една четирикратница во лифтоот се качиле 6 луѓе. На колку начини тие може да го напуштат лифтоот? Секој од нив може да излезе на некој од четирите ката.
7. На колку начини може 6 писма да се распоредат во 3 различни сандачиња? Во секое сандаче може да се стават повеќе од едно писмо.
8. а) Колку различни петцифрени ПИН-кодови може да се формираат со цифрите 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ако цифрите може да се повторуваат?
 б) Колку од нив завршуваат на 0?
 в) Колку од нив започнуваат со непарен број?

4.2 ВАРИЈАЦИИ БЕЗ ПОВТОРУВАЊЕ

Потсети се!

Ако A е множество од n елементи, тогаш секој елемент од Декартовиот производ $A \times A \times \dots \times A$ (A се јавува k пати како фактор) се нарекува варијација со повторување од n елементи од класа k .

Пример 1

Колку трицифрени броеви со различни цифри може да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4.

Решение:

Броевите ги формираме (во растечки редослед) на следниот начин:

123, 124, 132, 134, 142, 143,
213, 214, 231, 234, 241, 243,
312, 314, 321, 324, 341, 342,
412, 413, 421, 423, 431, 432.

Вкупниот број на троцифрени броеви формирани од цифрите 1, 2, 3 и 4, во кои сите цифри се различни, е 24.

Во претходната лекција рековме дека секој трицифрен број составен од цифрите 1, 2, 3, 4, во кој цифрите може да се повторуваат, се нарекува варијација со повторување од 4 елементи од класа 3. Но, ако во една варијација сите елементи се различни, тогаш таквата варијација ќе ја нарекуваме варијација без повторување.

Запомни!

- Варијација од n елементи од класа k во која сите елементи се различни се нарекува *варијација без повторување од n елементи од класа k* .
- Значи, варијација без повторување од n елементи од класа k е секоја подредна k -торка од меѓусебно различни елементи од множество со n елементи.

Воочи дека за да бидат различни сите елементи во една варијација без повторување од n елементи од класа k , мора да биде исполнет условот $k \leq n$. Исто така, како и кај варијации со повторување, распоредот на елементите е битен, т.е. различен распоред дава различна можност.

Задача 1

Најди ги сите варијации без повторување од елементите од множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ од класа 3.

Нека A е множество со n елементи од кое се формираат варијации без повторување од класа k . Секоја ваква варијација, како елемент од множеството $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ пати}}$, е подредена k -торка $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, каде што $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$. Бројот на сите вакви варијации без повторување од n елементи од класа k се означува со V_n^k и тој број се определува на следниот начин:

- Елементот a_1 на првата позиција може да биде кој било елемент од множеството A . Значи, елементот a_1 може да се избере на n начини.
- За секој избран елемент a_1 на првата позиција, елементот a_2 на втората позиција може да се избере од преостанатите $n - 1$ елементи (тој треба да е различен од a_1).
- Значи, првите две цифри може да се изберат на $n(n - 1)$ начини.
- Откако се избрани елементите a_1 и a_2 на првите две позиции, елементот a_3 на третата позиција може да се избере од преостанатите $n - 2$ елементи (тој треба да е различен од a_1 и од a_2). Значи, тој може да биде избран на $n - 2$ начини.
- Оттука, првите три елементи може да се изберат на $n(n - 1)(n - 2)$ начини.
- Постапката ја продолжуваме на ист начин сè додека не се пополнат сите k позиции. Може да се заклучи дека вкупниот број на можни избори, т.е. вкупниот број на варијации без повторување од n елементи од класа k е

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)).$$

Запомни!

- Производот на првите n природни броеви се вика „ n -факториел“ и се означува со $n!$.
- Значи,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Притоа, $1! \stackrel{\text{def}}{=} 1$, $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

На пример, $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Со користење на оваа ознака формулата за определување на бројот на варијации без повторување може да се запише на следниот начин:

$$\begin{aligned} V_n^k &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Запомни!

Вкупниот број на варијации без повторување од n елементи од класа k ($k \leq n$) може да се пресмета со формулата:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 2

Колку четирицифрени броеви може да се формираат со користење на цифрите од 1 до 9 ако броевите се составени од различни цифри?

Решение:

Бидејќи броевите треба да се составени од различни цифри, вкупниот број на вакви четирицифрени броеви составени од цифрите од 1 до 9 е, всушност, бројот на сите варијации без повторување од 9 елементи од класа 4, односно

$$V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

Задача 2

Колку петцифрени броеви со различни цифри може да се формираат од цифрите од 1 до 9.

Пример 3

Колку петцифрени броеви може да се формираат од цифрите 0, 1, 2, ..., 9, ако броевите се составени од различни цифри.

Решение:

- Во овој случај треба да се води сметка дека бројот не смее да започнува со 0. На пример, 01234 е четирицифрен, а не петцифрен број. Затоа, за да се добијат сите петцифрени броеви составени од цифрите 0, 1, 2, ..., 9, од вкупниот број на варијации без повторување од 10 елементи од класа 5 треба да се одземе бројот на оние варијации што започнуваат со 0.
- Вкупниот број на варијации без повторување од 10 елементи од класа 5 е $V_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 30240$.
- Бројот на оние варијации без повторување што започнуваат со 0 може да се определи така што на прва позиција ќе се фиксира 0, а останатите четири позиции ќе се пополнат со броевите од 1 до 9. Вкупниот број на такви варијации е $V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 3024$.
- Оттука, бројот на петцифрени броеви со различни цифри е

$$V_{10}^5 - V_9^4 = 30240 - 3024 = 27216.$$

Задача 3

Колку шестцифрени броеви со различни цифри може да се состават од цифрите 0, 1, 2, ..., 9, ако броевите не почнуваат со 1 или 2.

Пример 4

На 9 карти се запишани цифрите од 1 до 9, така што на секоја карта има по една цифра. Картите добро се мешаат, а потоа од нив се извлекуваат 4 карти една по една и се поредуваат по редот на извлекувањето. На колку начини може да се изврши извлекувањето за да се добие парен четирицифрен број?

Решение:

- Во секое извлекување на 4 карти и поредување по редоследот на нивното извлекување се добива една варијација без повторување од 9 елементи од класа 4. Но, потребни се само оние варијации што даваат парен број, т.е. завршуваат на една од парните цифри 2, 4, 6 или 8.
- Ако на последната позиција се фиксира цифрата 2, претходните 3 позиции може да се пополнат со останатите 8 цифри (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) на $V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$ начини.
- Ако на последната позиција се фиксира цифрата 4, претходните три позиции може да се пополнат со останатите 8 цифри, исто така, на 336 начини.
- Истиот број се добива и ако на последната позиција се фиксира цифрата 6 или 8.
- Значи, имаме 4 можности за избор на цифра на последната позиција (позицијата единици) и за секој избор на таа цифра, претходните три позиции може да се пополнат на 336 начини. Оттука, вкупниот број на парни четирицифрени броеви формирани од цифрите од 1 до 9 е $4 \cdot V_8^3 = 4 \cdot 336 = 1344$.

Задача 4

Колку различни трицифрени броеви може да се формираат од цифрите од 2 до 8 ако:

- а) цифрите може да се повторуваат;
- б) броевите се составени од различни цифри?

Пример 5

Во автобус во кој има 7 празни места влегуваат 5 лица. На колку начини може да седнат тие на празните места.

Решение:

- Секое од лицата си одбира позиција од 1 до 7 каде ќе седне. Притоа, не може двајца или повеќе лица да изберат исто место за седење.
- Затоа станува збор за варијација без повторување од 7 елементи од класа 5, па бараниот број на можни распореди е $V_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$.

Задачи за вежбање!

- Пресметај: а) $7!$; б) $4!$; в) $\frac{8!}{4!}$.
- Пресметај: а) V_{11}^3 ; б) V_{14}^4 .
- Реша ја равенката по непознатата n :
а) $V_n^2 = 72$; б) $9 \cdot V_n^3 = 5 \cdot \bar{V}_n^3$; в) $V_n^{10} + V_n^9 = 9 \cdot V_n^8$; г) $5 \cdot V_n^2 = \bar{V}_n^2$.
- На една географска карта се претставени 4 држави и секоја од нив може да се обои во една од 9 дадени бои. На колку различни начини може да се направи боењето ако секоја држава се бои со различна боја?
- Колкав е бројот на сите петцифрени броеви составени од различни цифри кои завршуваат на 67?
- Колку тричлени делегации може да се формираат од 12 луѓе ако секоја делегација се состои од претседател, секретар и благајник?
- Одреди го бројот на сите парни четирицифрени броеви што можат да се запишат со броевите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 ако цифрите не можат да се повторуваат.
- Во една библиотека има 5 читатели и 8 различни книги. Секој читател избира по една книга, при што една книга може да ја избере само еден читател.
На колку начини може да се направи распределбата на книгите?

4.3 ПЕРМУТАЦИИ

Потсети се!

Што е варијација со повторување од n елементи од класа k , а што е варијација без повторување од n елементи од класа k ?

Активност

Напиши ги сите трицифрени броеви со различни цифри што може да се формираат со цифрите 1, 2 и 3. Колкав е нивниот број?

Воочи дека бараните трицифрени броеви се, всушност, сите варијации без повторување од 3 елементи од класа 3. Нивниот број е $V_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 3! = 6$. Тоа се броевите: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Запомни!

Варијација без повторување од n елементи од класа n се нарекува **пермутација без повторување од n елементи**.

Пример 1

Да ги формираме сите пермутации без повторување од елементите a , b , c и d . Согледај ја постапката за формирање на пермутациите:

$abcd$	$abdc$	$acbd$	$acdb$	$adbc$	$adcb$
$bacd$	$badc$	$bcad$	$bcda$	$bdac$	$bdca$
$cabd$	$cadb$	$cbad$	$cbda$	$cdab$	$cdba$
$dabc$	$dacb$	$dbac$	$dbca$	$dcab$	$dcba$

Воочи дека пермутациите се подредени по абецеден (лексикографски) редослед. Исто така, еднаков број (по 6) пермутации започнуваат со секој од дадените елементи.

Запомни!

Пермутациите се специјален вид на варијации, па бидејќи распоредот (редоследот) на елементите кај варијациите е битен, тој распоред е битен и кај пермутациите, односно различни распореди на елементите даваат различна пермутација.

Бројот на пермутации без повторување од n елементи се означува со P_n . Согласно дефиницијата на пермутација без повторување од n елементи преку варијација без повторување од n елементи, за P_n се добива:

$$P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

Запомни!

Бројот на пермутации без повторување од n елементи е $n!$.

Пример 2

На колку начини може да се наредат 4 различни книги на една полица ако распоредот на книгите на полицата е битен?

Решение:

Секој распоред на четирите книги може да се разгледува како една пермутација без повторување од 4 елементи. Оттука, бараниот број на распореди е $P_4 = 4! = 24$.

Задача 1

Во една кошница има 7 овошја: едно јаболко, една круша, една праска, една банана, еден ананас, еден лимон и еден портокал. На колку начини може овошјето да им се подели на 7 деца без да се пресече.

Пример 3

- Колку четирицифрени броеви со различни цифри може да се формираат од цифрите 2, 3, 4 и 5?
- Колку од нив започнуваат со цифрата 4?
- Кај колку од нив 4 е прва, а 3 е втора цифра?

Решение:

- Бројот на четирицифрени броеви со различни цифри формирани од четирите дадени цифри е, всушност, бројот на сите пермутации без повторување со 4 елементи. Тој број е $P_4 = 4! = 24$.
- Ако цифрата 4 се фиксира на првата позиција (позиција на илјадарки), останатите три позиции треба да се пополнат со останатите три цифри, па бројот на можности е $P_3 = 3! = 6$.
- Ако се фиксира 4 на прва и 3 на втора позиција, останатите две позиции треба да се пополнат со останатите две цифри. Оттука, бројот на можности е $P_2 = 2! = 2$.

Пример 4

Која е 243-тата по ред пермутација составена од елементите a, b, c, d, e и f ?

Решение:

- Претходно воочивме дека пермутациите се формираат по лексикографски редослед и еднаков број на пермутации започнуваат со секој од наведените 6 елементи.
- Вкупниот број на пермутации е $P_6 = 6! = 720$. Значи, со секој елемент започнуваат точно 120 пермутации.
- Значи, со a започнуваат првите 120 пермутации, со b започнуваат следните 120 пермутации, т.е. пермутациите со реден број 121 до 240.
- Првата пермутација која започнува со c е пермутацијата со реден број 241. Таа е $cabdef$. По неа следуваат $cabdfe$ (како 242-ра по ред) и $cabedf$ (како 243-та по ред). Значи, бараната пермутација е $cabedf$.

Активност

Запиши ги сите пермутации без повторување со елементите a_1, a_2, a_3, b . Потоа во секоја пермутација замени $a_1 = a_2 = a_3$. По колку пати ќе се појавува ист распоред на елементите, т.е. иста пермутација?

Запомни!

Нека $a_1, a_2, \dots, a_k$ се k различни елементи. Секој различен распоред каде што a_i се појавува n_i пати, a_2 се појавува n_2 пати, $\dots$, a_k се појавува n_k пати ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) се нарекува **пермутација со повторување од n елементи од тип $(n_1, n_2, \dots, n_k)$** .

Да го определиме бројот на пермутации со повторување од n елементи во кој еден елемент (на пример, елементот a) се појавува m пати, а сите останати по еднаш, т.е. бројот на пермутации со повторување од n елементи од тип $(m, 1, \dots, 1)$.

- Најпрво, нека секое од m појавувања на a го разгледуваме како различен елемент, односно да сметаме дека во пермутацијата се појавуваат елементи $a_1, a_2, \dots, a_m$, кои ќе бидат различни меѓу себе и различни од останатите елементи во пермутацијата. Тогаш ќе имаме пермутации без повторување од n елементи. Нивниот број е $n!$.
- Ако, потоа, замениме $a_1 = a_2 = \dots = a_m = a$, некои од пермутациите ќе бидат еднакви. Всушност, секоја пермутација ќе се повторува $m!$ пати (кога m елементи a се пермутираат на m позиции).
- Оттука, вкупниот број на пермутации со повторување од n елементи од тип $(m, 1, \dots, 1)$ ќе се добие со делење на $n!$ со $m!$.

Запомни!

Бројот на пермутации со повторување од n елементи од кои еден елемент се повторува m пати, а останатите елементи се појавуваат точно еднаш се означува со $P_n(m, 1, \dots, 1)$ и тој број се пресметува по формулата

$$P_n(m, 1, \dots, 1) = \frac{n!}{m!}.$$

Задача 2

Опреди го бројот на петцифрени броеви составени од елементите 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4.

Со слично размислување како претходно, формулата за број на пермутации со повторување n елементи од тип $(m, 1, \dots, 1)$ може да се обопшти во формула за број на пермутации со повторување n елементи од тип $(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Запомни!

Бројот на пермутации со повторување n елементи од тип $(n_1, n_2, \dots, n_k)$, каде што $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, се пресметува со следната формула:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Пример 5

Колку различни пермутации може да се направат од зборот БАБАТА?

Решение:

Во овој збор буквата Б се јавува 2 пати, буквата А – 3 пати, а буквата Т – еднаш. Оттука, бројот на различни пермутации со повторување од 6 елементи од тип $(2, 3, 1)$ е

$$P_6(2, 3, 1) = \frac{6!}{2! 3! 1!} = 60.$$

Пример 6

- Колку седумцифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 4 и 8 ако цифрата 1 се јавува 4 пати, цифрата 4 се јавува 2 пати, а цифрата 8 се јавува еднаш?
- Колку од нив почнуваат на цифрата 4?
- Колку од нив започнуваат со 41?

Решение:

- а) Вкупниот број на шестцифрени броеви составени од 4 единици, 2 четворки и 1 осумка е

$$P_7(4,2,1) = \frac{7!}{4!2!1!} = 105.$$

- б) Ако на прва позиција се фиксира цифрата 4, останатите 6 позиции треба да се пополнат со 4 единици, 1 четворка и 1 осумка. Вкупниот број на такви седумцифрени броеви е

$$P_6(4,1,1) = \frac{6!}{4!1!1!} = 30.$$

- в) Слично како и претходно, ако првите две позиции се пополнат со '41', останатите 5 позиции треба да се пополнат со 3 единици, 1 четворка и 1 осумка, па бараниот број на седумцифрени броеви е

$$P_5(3,1,1) = \frac{5!}{3!1!1!} = 20.$$

Задача 3

Определете го бројот на различни пермутации со повторување што може да се направат од зборот ПАРАЛЕЛА.

Задача 4

Во една продавница за облека се продаваат маици во четири големина: мала (S), средна (M), голема (L) и екстра голема (XL).

Во магацинот има 2 маици со големина S, 3 со големина M, 4 со големина L и 2 со големина XL. На колку различни начини може да се одвива редоследот на продажба на сите маици, ако маиците со иста големина се сметаат за еднакви?

Пример 7

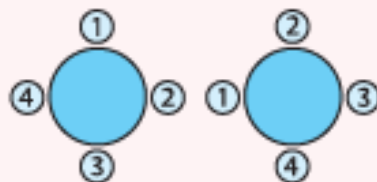
На колку начини може да се распоредат на кружна маса k луѓе ако не е битно кој на кој стол седи, туку само редоследот по кој се распоредени?

Решение:

Воочи дека двата распореди дадени на сликата се еднакви.

За да се добијат сите различни распореди, доволно е да се фиксира еден човек на еден стол, а останатите да се распоредуваат на сите можни начини на другите столови.

Бројот на сите пермутации со 3 елементи е $P_3 = 3! = 6$.



Воочи дека k луѓе може да се распоредат околу кружна маса на $(k-1)!$ начини. Имено, еден се фиксира на еден стол, а другите се распоредуваат на сите можни начини.

Задачи за вежбање!

1. Пет гости ноќеваат во еден хотел во кој има 5 соби. На колку начини може да отседнат тие во собите ако во ниедна соба нема повеќе од еден гостин?
2. Во првиот ред на една училишна претстава има 7 места за седење резервирани за директорот и 6 наставници од раководниот тим на училиштето. На колку начини може да седнат на резервираните столови ако директорот секогаш седи на средниот стол?
3. Со секое подредување на 4 свеќи (бела, црвена, зелена и сина) на една маса одлево надесно се задава еден сигнал. Колку различни сигнали може да се зададат?
4. Колку различни зборови може да се формираат од буквите на зборовите:
а) КНИГА; б) МАТЕМАТИКА.
5. Најди ја 51-та по ред пермутација на буквите од зборот КНИГА ако почетната пермутација се добива со азбучно подредување на буквите од овој збор.
6. Колку осумцифрени броеви може да се формираат од броевите 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4?
7. Колку шестцифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 1, 0, 0, 0, 2?
8. На колку начини може 4 црвени, 3 сини и 3 бели балони да им се поделат на 10 деца ако е битна и бојата на балонот што ќе го добие секое дете?
9. Во група од 6 луѓе само двајца се познајници. На колку начини може да се смести оваа група на кружна маса така што познајниците секогаш да седат еден покрај друг?
10. Во една фабрика се печатат 15 етикети со ознаки а, б, в, г, д. Потребно е да се испечатат: 5 етикети со ознака а, 3 со б, 3 со в, 2 со г и 2 со д. Етикетите се редат во низа. На колку различни начини може да се подредат етикетите?

4.4 КОМБИНАЦИИ

АКТИВНОСТ

Од учениците A, B, C, D и E треба да се направи тим од двајца ученици кои ќе учествуваат на натпревар во шах. На колку начини може да се направи тимот? Дали $\{A, B\}$ и $\{B, A\}$ се различни тимови?

Пример 1

Дадено е множеството $A = \{a, b, c, d\}$. Определи ги сите негови подмножества што имаат по 3 елементи. Дали распоредот на елементите во едно подмножество е битен, т.е. дали различен распоред дава различно подмножество?

Решение:

Подмножествата од A кои содржат по 3 елементи се:

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

Воочи дека распоредот на елементите не е битен. На пример, $\{a, b, c\}$ и $\{b, a, c\}$ се едно исто множество.

Запомни!

Секое подмножество со k елементи од едно множество со n елементи се вика **комбинација без повторување од n елементи од класа k** .

Важно!

- Секоја комбинација од n елементи од класа k е едно подмножество со k елементи од дадено множество со n елементи.
- Распоредот (редоследот) на елементите во една комбинација **не е битен**, т.е. различен распоред на исти елементи во едно подмножество дава иста комбинација.
- Со оглед на тоа што комбинација без повторување е множество, за ознака на комбинациите ќе ги користиме големите загради $\{\}$, наместо малите $(\)$.

Пример 2

Колку различни букети од по 3 цвѐта може да се аранжираат од цвѐтовите на роза, лале, کالا, гербер и хризантема ако букетите содржат најмногу по еден цвѐт од секој вид?

Решение:

Распоредот на цвѐтовите во еден букет не е битен и букетите треба да содржат 3 различни цвѐта. Затоа станува збор за комбинации без повторување од 5 елементи од класа 3. Ако ги користиме кратките ознаки: Р (роза), Л (лале), К (кала), Г (гербер) и Х (хризантема), ги добиваме следните букети:

{Р, Л, К}, {Р, Л, Г}, {Р, Л, Х}, {Р, К, Г}, {Р, К, Х}, {Р, Г, Х}, {Л, К, Г}, {Л, К, Х}, {Л, Г, Х}, {К, Г, Х}.

Вкупниот број на различни букети, т.е. вкупниот број на комбинации без повторување од 5 елементи од класа 3 е 10.

Да го определиме бројот на комбинации без повторување од n елементи од класа k .

- Бројот на сите варијации без повторување од n елементи од класа k е V_n^k .
- Од друга страна, ако се избере една комбинација без повторување од n елементи од класа k , на неа ќе соодветствуваат $k!$ различни варијации без повторување од n елементи од класа k , кои се добиваат со различен распоред на елементите. На пример, на комбинацијата $\{a, b, c\}$ соодветствуваат варијациите (a, b, c) , (a, c, b) , (b, a, c) , (b, c, a) , (c, a, b) , (c, b, a) (вкупно $6 = 3!$ варијации).
- Оттука, вкупниот број на комбинации без повторување од n елементи од класа k се добива кога вкупниот број на варијации без повторување од n елементи од класа k ќе се подели со $k!$.

Запомни!

Вкупниот број на комбинации без повторување од n елементи од класа k се означува со C_n^k и се определува со формулата:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 3

Од 5 момчиња и 7 девојчиња треба да се формира екипа од 6 члена. На колку начини може да се направи изборот ако:

- а) нема ограничување на бројот на кандидати од секој пол;
- б) во екипата треба да има точно 2 момчиња;
- в) во екипата треба да има барем 4 девојчиња.

Решение:

Сите членови во екипата се со ист ранг, па затоа не е битен распоредот на членовите. Значи, станува збор за комбинации.

а) Ако нема ограничување за полот, тоа се комбинации од 12 елементи од класа 6, па нивниот

број е $C_{12}^6 = \frac{12!}{6!(12-6)!} = 924$ различни можности за формирање на екипата.

б) Ако бројот на момчиња во екипата треба да е точно 2, тогаш бројот на девојчиња треба

да е 4. Од 5 момчиња може да се изберат 2 на $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ начини.

За секој избор на 2 момчиња, 4 девојчиња (од вкупно 7) може да се изберат на

$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$ начини. Оттука, вкупниот број на можни избори е

$$C_5^2 \cdot C_7^4 = 10 \cdot 35 = 350.$$

в) Во екипата ќе има барем 4 девојчиња во следните три случаи:

- 4 девојчиња и 2 момчиња (бројот на можности е $C_7^4 \cdot C_5^2 = 35 \cdot 10 = 350$);
- 5 девојчиња и 1 момче (бројот на можности е $C_7^5 \cdot C_5^1 = 21 \cdot 5 = 105$);
- 6 девојчиња и 0 момчиња (бројот на можности е $C_7^6 \cdot C_5^0 = 7 \cdot 1 = 7$).

Значи, вкупниот број на различни екипи со барем 4 девојчиња е

$$C_7^4 \cdot C_5^2 + C_7^5 \cdot C_5^1 + C_7^6 \cdot C_5^0 = 350 + 105 + 7 = 462.$$

Задача 1

Ана има 10 непочитани книги во нејзината библиотека. На одмор сака да понесе 3 од тие книги. На колку начини може да го направи изборот?

Запомни!

Бројот на комбинации C_n^k се означува со $\binom{n}{k}$ и се чита „ n над k “. Значи, $C_n^k = \binom{n}{k}$.

За секој природен број, точни се следните равенства:

$$C_n^0 = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1, \quad C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1, \quad C_n^1 = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n.$$

Пример 4

Покажи дека $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Решение:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}.$$

Пример 5

Во една цвекарница има цветови од роза и хризантема. Колку различни букети со по 3 цвета може да се формираат ако во букетите може да се јават и повеќе цветови од исти вид? Кои се тие букети?

Решение:

Секој букет може да се разгледува како група од 3 цвета. Можните групи се:

R R R R R X R X X X X X.

Значи, вкупниот број на вакви групи (букети) е 4.

Запомни!

Секоја група од k елементи од множество со n елементи, во која елементите може и да се повторуваат, се нарекува **комбинација со повторување од n елементи од класа k** .

Воочи дека во една група распоредот на елементите не е битен, па оттука и во комбинација со повторување од n елементи од класа k распоредот на елементите не е битен. Тоа значи дека различен распоред на дадени елементи дава иста комбинација со повторување.

Запомни!

Бројот на сите различни комбинации со повторување од n елементи од класа k се означува со $\bar{C}_n^k$ и тој број се определува со формулата

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Во претходната задача бројот на различни букети со 3 цвета што може да се направат од 2 вида цвета кои ги има во цвекарницата е $\bar{C}_2^3 = C_{2+3-1}^3 = \binom{4}{3} = 4$.

Пример 6

Во една слаткарница има сладолед од чоколадо, ванила, јагода, орев, лешник и лимон. Колку различни порции со по три топки сладолед може да се направат ако:

- сите топки во една порција се со различен вкус;
- во порцијата може да има и топки со ист вкус.

Решение:

Редоследот на топките сладолед во една порција не е битен, па затоа станува збор за комбинации со 6 елементи од класа 3. Во првиот случај, тоа се комбинации без повторување, а во вториот случај – комбинации со повторување.

$$\text{а) } C_6^3 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20. \quad \text{б) } \bar{C}_6^3 = C_{6+3-1}^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$$

Задача 2

На колку начини може да се изберат 4 бонбони од 5 различни вкусови ако може да избереме повеќе бонбони од еден вкус?

Пример 7

За едно натпреварување од 6 кандидати треба да се избере жири составено од тројца, од нив треба да се избере еден претседател на жирито и уште двајца членови. Притоа, двата члена имаат ист ранг.

На колку начини може да се состави вакво жири?

Решение:

- Најпрво, бројот на избори за претседател на жирито е $C_6^1 = 6$.
- За секој избор на претседател, останува да се изберат двата члена од останатите 5 кандидати. Членовите се исти по ранг, па затоа не е битен распоредот на елементите и станува збор за комбинации без повторување од 5 елементи од класа 2. Вкупниот број на вакви избори е $C_5^2 = 10$.
- Значи, вкупниот број на избори на претседател на жирито и двајца членови (со исти ранг) е

$$C_6^1 \cdot C_5^2 = 6 \cdot 10 = 60.$$

Задача 3

Meѓу седумте кандидати за две слободни места во една компанија има тројца мажи и четири жени.

На колку начини можат да се пополнат двете места:

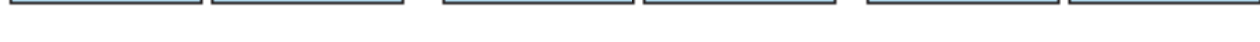
- со кои било двајца кандидати?
- со две жени?
- со еден маж и една жена?

Задачи за вежбање!

1. Напиши ги сите комбинации без повторување од класа 4 од елементите на множеството $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.
2. Пресметај: а) C_7^4 ; б) C_9^5 ; в) $C_8^1 \cdot C_5^2$; г) $\frac{C_{11}^9}{C_1^4}$.
3. На колку начини од 8 книги може да се изберат 5?
4. На колку начини 24 луѓе може да се поделат во две групи по 12 луѓе?
5. На колку начини 16 ученици и 20 ученички може да се распоредат во две одделенија, така што во секое одделение да има 8 ученици и 10 ученички?
6. Пет девојки и шест машки се номинирани за избор на мис и мистер на една матурска забава. На колку начини може да се избере мис, мистер и двајца придружници ако придружниците може да бидат од кој било пол?
7. Во еден магацин има маркери во 7 различни бои. Вработените треба да ги пакуваат во кутии по 3 маркери така што боите на сите три маркери да се различни. Колку различни пакувања со маркери може да се направат?
8. Тренер има 11 играчи во игра и треба да избере 5 кои ќе шутираат пенали на крајот од натпреварот, кој завршил нерешено. На колку начини може да го направи изборот?
9. Колку комбинации на лото 7 од 37 треба да се уплатат за да се обезбеди сигурна добивка?
10. Напиши ги сите комбинации со повторување од класа 4 од елементите од множеството $A = \{a, b, c\}$.
11. Во една цвекарница има цветови во пет различни бои: црвена, бела, сина, розова и жолта. На колку начини може да се формира букет со 5 цвета ако:
 - а) сите цветови се со различна боја;
 - б) во букетот може да има цветови и со иста боја.

Потсети се!

- Што е варијација, пермутација, комбинација?
- Распоредот (редоследот) на елементите кај комбинациите не е битен, а кај варијациите и пермутациите – распоредот на елементите е битен.



Ако се следи шематски претставениот алгоритам, постапката за распознавање на комбинации, варијации и пермутации оди на следниот начин:

- Најпрво, се поставува прашањето: Дали распоредот на елементите е битен?
- Ако одговорот на ова прашање е „не“, веднаш може да се заклучи дека станува збор за комбинации.
- Ако одговорот на ова прашање е „да“, тогаш се работи или за варијации или за пермутации зависно од тоа дали се распоредуваат сите елементи или не. Затоа се поставува следното прашање: Дали се распоредуваат сите елементи?
- Ако одговорот на ова прашање е „да“, тогаш станува збор за пермутации, во спротивно станува збор за варијации.
- Откако ќе се утврди за која категорија (комбинации, варијации или пермутации) станува збор, следното прашање е: Дали елементите се повторуваат?, па оттука се утврдува дали ќе имаме, на пример, варијации со повторување или без повторување.

Пример 1

На колку начини од кутија со 15 моливи може да се изберат 9?

Решение:

Дали распоредот на елементите е битен? Не!

Значи, станува збор за комбинации. Елементите не се повторуваат (не може еден молив да се избере повеќе од еднаш), па затоа се бара бројот на комбинации без повторување од 15 елементи од класа 9. Тој број е

$$C_{15}^9 = \binom{15}{9} = \frac{15!}{9!(15-9)!} = 5005.$$

Задача 1

На една лотарија учествуваат 10 лоза со различни добивки. Еден учесник извлекува 3 лоза. На колку начини може да добие по 3 различни награди?

Пример 2

Наставникот по математика испрашал четворица ученици и ги оценил со оценките 2, 3, 4 и 5. На колку начини може да се распоредат оценките ако:

- сите се оценети со различна оценка;
- учениците се оценуваат само со 4 или 5.

Решение:

Да воочиме дека распоредот на елементите (оценките) е битен. Различен распоред на оценките на учениците дава различна можност. Значи, станува збор или за варијации или за пермутации.

- Во овој случај се распоредуваат 4 различни оценки на четворица ученици, па станува збор за пермутации без повторување од 4 елементи. Нивниот број е $P_4 = 4! = 24$.
- Ако сите ученици се оценуваат само со 4 или 5, тогаш бројот на вакви оценувања е број на варијации со повторување од 2 елементи (елементите се 4 или 5) од класа 4, а тој број е $\bar{V}_2^4 = 2^4 = 16$.

Задача 2

Еден човек го заборавил шестцифрениот PIN за најава на електронско банкарство. Тој се сеќава дека PIN-от се состои од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и дека цифрите 1 и 6 не се ниту на првата ниту на последната позиција. Колку обиди се потребни за да се открие заборавениот PIN?

Пример 3

До крајот на првенството во Првата фудбалска лига еден тим треба да одигра уште 7 натпревари. Според пресметката на тренерот, потребниот минимум за опстанок во лигата се 8 бода. На колку начини може да се обезбеди тој минимум ако победа носи 3 бода, нерешен резултат – 1 бод и пораз – 0 бодови? Да напоменеме дека се бара освојување на точно 8 бода, а не и повеќе од тоа.

Решение:

Потребниот минимум може да се освои на следните начини:

- 2 победи, 2 нерешени и 3 порази;
- 1 победа, 5 нерешени и 1 пораз.

Да воочиме дека распоредот на елементите е битен. Различен распоред на победи, нерешени и порази носи различна можност. Притоа, се распоредуваат 7 елементи на 7 позиции, од кои некои од елементите (победи, нерешени, порази) се еднакви. Значи, станува збор за пермутации со повторување, и тоа, во првиот случај, од тип (2, 2, 3), а во вториот случај, од тип (1, 5, 1). Оттука, вкупниот број на можни исходи е

$$P_7(2,2,3) + P_7(1,5,1) = \frac{7!}{2!2!3!} + \frac{7!}{1!5!1!} = 252.$$

Задача 3

На еден јарбол се наредени 9 знаменца. Секој распоред на знаменцата претставува одреден сигнал. Колку сигнали може да бидат претставени со знаменцата ако меѓу нив има 4 бели, 3 црвени и 2 сини знаменца?

Пример 4

На еден турнир се одиграни 36 партии шах. Според правилата на турнирот, секој шахист одиграл со секого по една партија шах. Колку учесници имало на турнирот?

Решение:

Да воочиме дека бројот n на шахисти што учествуваат на турнирот не е познат. Притоа, секоја партија шах се игра помеѓу двајца шахисти и секои двајца одигруваат само по една партија, па редоследот на шахистите (во секоја партија) не е битен. Затоа, станува збор за комбинации без повторување од n елементи од класа 2. Оттука, вкупниот број на одиграни партии на турнирот е C_n^2 , а според условите на задачата, тој број е 36. Добиваме

$$C_n^2 = 36 \quad \binom{n}{2} = 36 \quad \frac{n(n-1)}{2} = 36$$

Последното равенство се сведува на квадратната равенка $n^2 - n - 72 = 0$. За решенијата на оваа равенка, се добива:

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-72)}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2},$$

т.е. $n_1 = 9$, $n_2 = -8$. Бидејќи станува збор за број на учесници на турнирот, тој број не може да биде негативен. Значи, бројот на учесници на турнирот е 9.

Задача 4

Во последната сезона на првата македонска лига во фудбал се одиграни 132 натпревари. Според правилата на лигата, секоја екипа одигрува со секоја друга по два натпревари (еден на домашен, а еден на гостински терен). Колку екипи играат во првата македонска лига во фудбал?

Пример 5

Се разгледуваат шесторки составени од цифрите 0, 1, 2. Да се определи бројот на оние шесторки кај кои стои цифрата 2 на последната (шестата) позиција?

Решение:

Со оглед на тоа што станува збор за шесторки, јасно е дека редоследот на елементите во секоја шесторка е битен. Шесторките се составени од три цифри 0, 1, 2, па јасно е дека секоја шесторка е варијација со повторување од 3 елементи од класа 6. Во задачата се бараат оние варијации кај кои на последна позиција стои цифрата 2. Нивниот број може да се определи на следниот начин: ако на последната позиција се фиксира 2, првите пет позиции може да се пополнат на $\bar{V}_5^3 = 3^5 = 243$ начини.

Задача 5

Се разгледуваат седумторки составени од цифрите 0, 1, 2, 3, 4. Да се определи бројот на оние седумторки кај кои цифрите 1 и 2 стојат на првата и втората позиција, соодветно.

Пример 6

Колку дијагонали може да се повлечат во еден десетаголник?

Решение:

Да го разгледаме множеството темиња на десетаголникот. Ако секое теме се поврзе со сите останати, ќе се добијат сите дијагонали и сите страни на десетаголникот. Секое поврзување на двете темиња може да се разгледува како една комбинација од 10 елементи од класа 2 (редоследот на темињата не е битен, две темиња определуваат точно една дијагонала или точно една страна).

Вкупниот број на дијагонали и страни е $C_{10}^2 = \binom{10}{2} = 45$. Бидејќи десетаголникот има 10

страни, вкупниот број на дијагонали ќе биде $C_{10}^2 - 10 = 45 - 10 = 35$.

Задача 6

Колку дијагонали може да се повлечат во еден дванаесетаголник?

Пример 7

На една полица треба да се распоредат 7 книги, помеѓу кои и два дела на еден роман. На колку начини може да се направи распоредот ако двата тома на романот треба да стојат еден до друг во кој било редослед?

Решение:

Двата тома на романот може да се третираат како една книга (значи ќе се распоредуваат 6 книги) и притоа има две можности: да се во редослед 1 – 2 или да се во редослед 2 – 1. Ако се постават во редослед 1 – 2, тогаш бројот на распореди на шесте книги на полицата е $P_6 = 720$. Истиот број се добива и ако двете книги се постават во редослед 2 – 1. Оттука, вкупниот број на распореди на книгите е

$$2 \cdot P_6 = 2 \cdot 720 = 1440.$$

Задачи за вежбање!

- Од петте непарни цифри се формираат четирицифрени броеви.
 - Колку четирицифрени броеви може да се формираат?
 - Кај колку од нив цифрите се различни?
 - Колку завршуваат на цифра што е делива со 3?
 - Колку почнуваат и завршуваат на иста цифра?
- На светското првенство во ракомет учествуваат 16 репрезентации. На колку начини може да се доделат трите медали (златен, сребрен и бронзен)?
- Еден уред има 8 различни копчиња на командната табла. Притискање (по ред) на 5 од тие копчиња доведува до активирање на една активност на уредот. Колку активности може да се активираат на тој уред?
- Колку различни пермутации може да се формираат од цифрите 0, 1, 2, ..., 9 во кои цифрите 2, 3 и 4 стојат една по друга во кој било распоред?
- Три момчиња и три девојчиња се поредуваат во редица. На колку начини може да се изврши поредувањето ако:
 - трите момчиња треба да стојат едно до друго;
 - одредени две девојчиња треба да седат заедно.
- Од стандарден шпил карти се земени само картите со слики (џандари, дами и кралеви). Од издвоените карти се одбираат 3. На колку начини може да се изберат барем две карти со црвена боја?
- На полица во една книжарница се наоѓаат 9 книги, од кои 7 се математички и 2 информатички. На колку начини може да се изберат 4 од овие книги така што меѓу избраните да има барем една информатичка книга?
- Во една продавница има 4 вида крофни. На колку начини може да се купат 6 крофни ако видовите може да се повторуваат?

4.6 ЕКСПЕРИМЕНТИ И НАСТАНИ

Активност

1. Изведи експеримент со фрлање коцка за играње и набљудувај го појавувањето на бројот 2. Дали со сигурност може да кажеш дека при фрлање на коцката ќе се појави бројот 2?
2. Повтори го експериментот со фрлање коцка за играње повеќе пати и број колку пати се појавил бројот 2. Каков заклучок може да извлечеш од бројот на појавувања на бројот 2?

Запомни!

Експеримент е постапка или активност која се изведува за да се набљудува, измери или испита некоја појава, однесувањето на некој систем или процес и да се добијат податоци за понатамошна анализа.

Неколку примери на експерименти:

1. Една монета се фрла во воздух и по нејзиното паѓање на земја, на горната страна може да се појави „писмо“ или „грб“. Со фрлањето на монетата сме извршиле еден експеримент и како резултат на тој експеримент може да се добие еден од следните исходи: „на горната страна од монетата се појави писмо“ или „на горната страна од монетата се појави грб“.
2. Ако вода се загрева на $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, тогаш таа ќе почне да врие. Овде е извршен еден експеримент (загревање на вода) и како резултат на тој експеримент се јавува исходот „водата врие“.
3. Се проверува исправноста на производите во една фабрика, така што се зема еден производ, се проверува неговиот квалитет и се утврдува дали е исправен или не. Значи, извршен е еден експеримент (проверка на квалитет), а можни исходи се: „производот е исправен“ и „производот не е исправен“.
4. Се спроведува тест за да се провери знаењето на еден ученик. Оценувањето на тестот се прави со поени од 0 до 100. Тогаш експериментот е оценување на ученикот, а можни исходи се „ученикот освои i поени“, каде што $i = 0, 1, \dots, 100$.

Секој резултат (исход) од експериментот S се нарекува *настан* во врска со експериментот S . Настаните ќе ги означуваме со големи печатни букви од почетокот на абecedата: $A, B, C, \dots$

Еден експеримент може да биде детерминистички и недетерминистички. Ако исходот на еден експеримент е однапред познат, тогаш тој експеримент е *детерминистички*, во спротивно, ако исходот не може со сигурност да се знае однапред, тој експеримент е *недетерминистички*.

Задача 1

За секој експеримент од примерите 1,2,3,4 утврди дали е детерминистички или недетерминистички.

Теоријата на веројатност се занимава со проучување на недетерминистичките експерименти. Нејзина цел е да најде законитост во експериментите со нееднозначен исход. Да го разгледаме следниот пример.

Пример 1

Да го разгледаме експериментот фрлање монета и настанот A : „падна писмо“. Ако експериментот се изведува еднаш, тогаш не може со сигурност да се каже кој ќе биде неговиот исход.

Затоа, нека се изведени 10 серии од по $n = 1000$ експерименти под еднакви услови. Со $n_i(A)$ се означува бројот на експериментите од i -тата серија во кои се појавил настанот A . Резултатите од овие десет серии се претставени во следната табела.

i	$n_i(A)$	$\frac{n_i(A)}{n}$
1	502	0,502
2	504	0,504
3	492	0,492
4	498	0,498
5	500	0,500
6	510	0,510
7	505	0,505
8	490	0,490
9	493	0,493
10	509	0,509

Во последната колона се дадени вредностите на количникот $\frac{n_i(A)}{n}$, каде што n е бројот на изведени експерименти во една серија. Во нашиот случај $n = 1000$. Може да се воочи дека вредностите во таа колона се блиску до 0,5. Притоа, ако бројот на експерименти во една серија се зголеми, тогаш тој количник сè повеќе се доближува до 0,5. Значи, и покрај тоа што со едно изведување на експериментот фрлање монета не можеме со сигурност да предвидиме кој исход ќе се случи, при изведување на серија од повеќе експерименти се воочува одредена законитост во појавување на настанот „падна писмо“, а тоа е дека во приближно половина од експериментите ќе се појави овој настан.

Запомни!

- Бројот $\frac{n_i(A)}{n}$ се нарекува **релативна фреквенција** за настанот A во i -тата серија експерименти.
- Реалниот број околу кој се натрупуваат овие релативни фреквенции се нарекува **статистичка (или емпириска) веројатност** на настанот A .
- Ако се разгледува серија од n експерименти, тогаш бројот $n(A)$ на појавувања на настанот A е најмалку 0, а најмногу n , т.е. $0 \leq n(A) \leq n$. Оттука, $\frac{0}{n} \leq \frac{n(A)}{n} \leq \frac{n}{n}$, па $0 \leq \frac{n(A)}{n} \leq 1$. Можеме да заклучиме дека релативната фреквенција на појавување на настанот A е број помеѓу 0 и 1, па и статистичката веројатност на настанот A е помеѓу 0 и 1.
- Статистичката веројатност на настанот A е објективна мерка за можноста да се појави овој настан.
- Во претходниот пример со фрлање монета статистичката веројатност на настанот A : „падна писмо“ е 0,5. Тоа е бројот околу кој се натрупуваат релативните фреквенции дадени во последната колона од претходната табела.

Задача 2

Колку изнесува релативната фреквенција на појавување на настанот B : „падна бројот 2“ во серијата експерименти со фрлање коцка за играње кои ги изведе во претходната активност?

Запомни!

За даден настан A може да се примени статистичката дефиниција на веројатност ако се исполнети следните два услова:

1. Експериментот S може да се повтори при исти услови колку што сакаме пати;
2. Релативните фреквенции на настанот A , во секоја од повеќе изведени серии експерименти, се броеви кои се приближно еднакви. Тоа значи дека ако се изведат серии од по $n_1, n_2, \dots, n_k$ експерименти, тогаш:

$$\frac{n_1(A)}{n_1} \approx \frac{n_2(A)}{n_2} \approx \dots \approx \frac{n_k(A)}{n_k}.$$

Условот 2 обезбедува статистичка стабилност, а условот 1 обезбедува проверка на условот 2. Настанот A во врска со даден експеримент за кој се исполнети условите 1 и 2 се нарекува *случаен настан*.

Пример 2

Да ги разгледаме следните експерименти и настаните во врска со нив.

- а) Нека експериментот е фрлање коцка за играње. Се разгледуваат настаните:
 A_1 : падна број од 1 до 6;
 A_2 : падна бројот 7.
- б) Експериментот е извлекување топче од кутија во која има 5 бели топчиња. Се разгледуваат настаните:
 B_1 : извлечено е бело топче;
 B_2 : извлечено е црно топче.
- в) Експериментот е оценување на случајно избран ученик. Се разгледуваат настаните:
 C_1 : ученикот доби оценка од 1 до 5;
 C_2 : ученикот доби оценка 10.

Може да се воочи дека настаните A_1, B_1, C_1 се појавуваат при секое изведување на соодветниот експеримент, а настаните A_2, B_2, C_2 не се појавуваат никогаш при изведување на соодветниот експеримент.

Запомни!

- **Сигурен настан** во врска со даден експеримент е настанот кој се појавува при секоја реализација на тој експеримент.
- **Невозможен настан** во врска со даден експеримент е настан што не се појавува никогаш при реализација на дадениот експеримент.

Значи, во пример 2, настаните A_1, B_1, C_1 се сигурни настани, а A_2, B_2, C_2 се невозможни настани.

- Да воочиме дека ако се изведува серија од n експерименти, сигурниот настан се појавува n пати, а невозможниот настан се појавува 0 пати. Оттука, релативната фреквенција на сигурниот настан е $\frac{n}{n} = 1$, а релативната фреквенција на невозможниот настан е $\frac{0}{n} = 0$. Значи, сигурниот и невозможниот настан ги задоволуваат условите 1 и 2, па и тие се случајни настани.

Задачи за вежбање!

1. Нека експериментот е фрлање коцка за играње. Направи 4 серии од по 50 експерименти и определи ја статистичката веројатност за појавување на настаните:
 А: на горната страна на коцката се појави парен број;
 В: на горната страна на коцката се појави број кој е поголем од 4.
2. Експериментот е извлекување карта од стандарден шпил со 52 карти. Направи 5 серии од по 100 експерименти. По секое извлекување регистрирај ги бројот и знакот на картата и врати ја назад во шпилот. Определи колку е статистичката веројатност на настаните:
 А: извлечена е карта со бројот 5;
 В: извлечена е карта со знакот лист;
 С: извлечена е десетка со знакот детелина.
3. Со дигитален термометар се мери температурата во училница. Сензорот може да прикажува температури од -10°C до 50°C . За секој од следните настани утврди дали е сигурен, невозможен настан или ниту еден од нив.
 А: Измерената температура е помеѓу -10°C и 50°C .
 В: Измерената температура е 100°C .
 С: Измерената температура е негативна.
4. Во лабораторија се тестира раствор со лакмус хартија. Растворот е или кисел или неутрален или базен. За секој од следните настани утврди дали е сигурен, невозможен настан или ниту еден од нив.
 А: Растворот да биде неутрален.
 В: Растворот да биде и кисел и базен во исто време.
 С: Растворот да има една од трите наведени состојби.

4.7 МНОЖЕСТВО ЕЛЕМЕНТАРНИ НАСТАНИ. СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ

Пример 1

Да го разгледаме експериментот фрлање коцка за играње. Некои од можните настани во врска со овој експеримент се следните:

A : падна парен број;

B : падна број делив со 3;

E_1 : падна бројот 1;

E_2 : падна бројот 2;

E_3 : падна бројот 3;

E_4 : падна бројот 4;

E_5 : падна бројот 5;

E_6 : падна бројот 6.

Да ги разгледаме настаните A и B , од една, и настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6 , од друга страна. Може да се воочи дека настанот A се појавува ако се појави еден од настаните E_2, E_4 или E_6 , а настанот B се појавува ако се појави настанот E_3 или се појави E_6 . Значи, настанот A може да се разложи на настаните E_2, E_4 и E_6 , а настанот B може да се разложи на настаните E_3 и E_6 .

Од друга страна, настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6 не може да се разложат на други настани. Затоа, тие настани ги нарекуваме елементарни настани. Елементарните настани ќе ги означуваме со симболот E со индекс 1, 2,...

Запомни!

- **Елементарен настан** во врска со даден експеримент е секој логички исход на експериментот кој не може да се разложи на други настани. Притоа, при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден елементарен настан.
- Множеството од сите вакви настани во врска со еден експеримент се нарекува **множество елементарни настани** и се означува со Ω .

Пример 2

Да го определиме множеството елементарни настани ако експериментот е фрлање коцка за играње. Да воочиме дека при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6 , кои се дефинирани во примерот 1, па множеството елементарни настани во врска со овој експеримент е $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$.

Задача 1

Опреди го множеството елементарни настани за експериментот фрлање монета.

Пример 3

Нека експериментот се состои во фрлање две монети. При фрлање една монета, можен исход е „падна писмо“ или „падна грб“ (ќе пишуваме кратко „писмо“ или „грб“). Но, експериментот се состои од фрлање на двете монети заедно, па можните исходи ќе бидат подредени парови, каде што првиот елемент во секој пар ќе го означува исходот на првата монета, а вториот елемент – исходот на втората монета. Множеството елементарни настани е следното:

$$\Omega = \{(\text{грб}, \text{грб}), (\text{грб}, \text{писмо}), (\text{писмо}, \text{грб}), (\text{писмо}, \text{писмо})\}.$$

Во пример 1 заклучивме дека настанот A ќе се појави ако се појави еден од настаните E_2, E_4 или E_6 , а настанот B ќе се појави ако се појави настанот E_3 или се појави E_6 . Оттука, настаните A и B може да се запишат на следниот начин $A = \{E_2, E_4, E_6\}$, $B = \{E_3, E_6\}$. Да воочиме дека настаните A и B се претставени како подмножества од множеството елементарни настани Ω .

Запомни!

- **Случаен настан** е произволно подмножество од множеството елементарни настани Ω .
- Ќе велиме дека се појавил настанот A ако се појавил некој од елементарните настани што припаѓаат на подмножеството елементарни настани соодветно на настанот A .

Пример 4

Експериментот се состои во фрлање две коцки за играње. Опиши го множеството елементарни настани и следните случајни настани:

A : на двете коцки падна парен број;

B : на првата коцка падна парен, а на втората непарен број.

Решение:

Множеството елементарни настани за овој експеримент ќе се состои од подредени парови (x, y) , каде што x е исходот на првата коцка, а y – исходот на втората коцка, $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Оттука,

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

За настанот A се добива следното:

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \{2, 4, 6\}\},$$

или во развиена форма:

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\},$$

а за настанот B имаме:

$$B = \{(x, y) \mid x \in \{2, 4, 6\}, y \in \{1, 3, 5\}\},$$

или

$$B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}.$$

- Сигурниот настан се појавува секогаш кога се реализира експериментот, т.е. секој елементарен настан доведува до негово појавување. Затоа тој се означува со Ω .
- Невозможниот настан, пак, не се појавува никогаш кога се реализира експериментот, односно ниеден елементарен настан не доведува до негово појавување. Оттука, невозможниот настан ќе го означуваме со $\emptyset$.

Задачи за вежбање!

1. Експериментот се состои прво од фрлање монета. Потоа, ако падне писмо, се фрла коцка и се регистрира бројот на точките на горната страна од коцката, а ако падне грб, монетата се фрла уште еднаш. Опиши го множеството елементарни настани.
2. Во една кутија има 5 топчиња нумерирани со броевите од 1 до 5. На случаен начин се извлекуваат едно по едно топче (без враќање), сè додека не се извлече топче со непарен број. Ако се регистрираат броевите на извлечените топчиња, да се опише множеството елементарни настани.
3. Експериментот се состои во фрлање три коцки за играње. Опиши го множеството елементарни настани и следните случајни настани:
 А: на првите две коцки падна парен број, а на третата непарен;
 В: на сите три коцки падна непарен број;
 С: збирот на точките на трите коцки е парен;
 D: на првите две коцки паднала иста вредност;
 F: на трите коцки не се појавила ниедна петка;
 G: на трите коцки се појавила барем една петка.
4. Стрелец има 4 куршуми и гаѓа во целта сè додека не постигне два погодоци последователно или додека не ја изгуби шансата да го исполни тој услов. Опиши го множеството елементарни настани и следните случајни настани:
 А: целта е погодена барем два пати;
 В: еден куршум останал неискористен;
 С: имало повеќе погодоци од промашувања.
5. На една табла за пикадо се наоѓаат полињата 7, 8, 9, 10. Еден играч нишани со стреличките на пикадото трипати. Определи го множеството елементарни настани и следните случајни настани:
 А: трипати е погоден парен број;
 В: двапати е погоден парен, а еднаш непарен број;
 С: во првите две гаѓања е погоден парен, а во третото непарен број;
 D: збирот на погодените броеви е 27.

4.8 ОПЕРАЦИИ СО НАСТАНИ

Потсети се!

- Елементарен настан во врска со даден експеримент е секој логички исход на експериментот кој не може да се разложи на други настани. Притоа, при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден елементарен настан.
- Страните на еден правилен тетраедар се означени со 1, 2, 3, 4. Тетраедарот се фрла на рамна површина и се набљудува страната со која лежи на површината. Кое е множеството елементарни настани за овој експеримент?
- За претходниот експеримент, опиши го настанот A : падна непарен број, како подмножество од Ω .

Пример 1

Нека експериментот се состои во извлекување карта од шпил со 52 карти. Ги означуваме настаните:

A : извлечена е карта со бројот 10;

B : извлечена е карта пик.

C : извлечена е карта пик со бројот 10.

Да воочиме дека настанот C ќе се појави кога ќе се појават настаните A и B истовремено.

Запомни!

- **Производ** на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават и двата настани A и B истовремено. Тој настан е определен со множество елементарни настани што е пресек од множествата елементарни настани на настанот A и настанот B .
- Производот на два настани A и B се означува со $A \cap B$.

Пример 2

Нека експериментот е фрлање коцка за играње. Ги разгледуваме настаните:

A : падна број помал или еднаков на 3;

B : падна број делив со 3;

C : падна број поголем од 4.

Да се определи производот на настаните A и B , како и на настаните A и C .

Решение:

Множеството елементарни настани за овој експеримент е $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, каде што E_i е елементарниот настан „падна бројот i “, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Настаните A, B и C , како подмножества

од Ω се опишуваат на следниот начин: $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_6\}$, $C = \{E_5, E_6\}$. Настанот $A \cap B$ означува дека паднал број кој е помал или еднаков на 3 и делив со 3, па така $A \cap B = \{E_3\}$. Настанот $A \cap C$ означува дека паднал број кој е помал или еднаков на 3 и поголем од 4, што е невозможно. Значи, настаните A и C не може да се појават истовремено, т.е. $A \cap C = \emptyset$.

Задача 1

Определи го производот на настаните B и C од пример 2.

Запомни!

Ако два настани A и B не може да се појават истовремено, тогаш тие се нарекуваат **дисјунктни настани**. Нивниот производ е невозможен настан, т.е. $A \cap B = \emptyset$.

Во пример 2, настаните A и C се дисјунктни настани.

Запомни!

- **Збир** на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните A или B .
- Збирот од настаните A и B е определен со множеството елементарни настани што е унија од множествата елементарни настани на настанот A и настанот B .
- Збирот на два настани A и B , во општ случај, се означува со $A \cup B$.
- Доколку настаните A и B се дисјунктни, тогаш нивниот збир ќе го означуваме со $A + B$.
- Кога се вели дека се појавил барем еден од настаните A или B , тогаш се подразбира дека се појавил или само настанот A или само настанот B или и двата настани истовремено.
- Ако настаните A и B се дисјунктни, тогаш истовремено појавување на двата настани е невозможно, па појавување на настанот $A \cup B$ подразбира да се појави или само настанот A или само настанот B .
- Затоа, во овој случај, за збир на два настани се користи ознаката $A + B$. Значи,

$$A + B = A \cup B \text{ ако } A \cap B = \emptyset.$$

Пример 3

Определи го збирот на настаните A и B , како и на настаните A и C , ако A , B и C се настаните од пример 2.

Решение:

Настаните A , B и C се определени со: $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_6\}$, $C = \{E_5, E_6\}$. Настанот $A \cup B$ означува дека паднал број кој е помал или еднаков на 3 или број делив со 3, и тој може да се опише со $A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_6\}$. Настанот $A \cup C$ означува дека паднал број кој е помал или еднаков на 3 или број кој е поголем од 4. Во пример 2 воочивме дека настаните A и C не може да се појават истовремено, т.е. тие се дисјунктни настани. Оттука, $A \cup C = A + C = \{E_1, E_2, E_3, E_5, E_6\}$.

Задача 2

Опреди го збирот на настаните B и C од примерот 2.

Запомни!

- **Спротивен настан** на настанот A е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога не се појавува настанот A . Овој настан се означува со $\bar{A}$. Множеството елементарни настани на настанот $\bar{A}$ е комплемент на множеството елементарни настани соодветно на настанот A во однос на Ω .
- За секој настан A важи:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad A + \bar{A} = \Omega.$$

Пример 4

Опреди ги спротивните настани на настаните A и B во примерот 1.

Решение:

Настанот A нема да се појави ако се појави број поголем од 3, т.е. се појави еден од елементарните настани E_4 , E_5 или E_6 , па $\bar{A} = \{E_4, E_5, E_6\}$. За спротивниот настан на настанот B се добива дека $\bar{B} = \{E_1, E_2, E_4, E_5\}$.

Задача 3

Опреди го спротивниот настан на настанот C од примерот 2.

Запомни!

Настанот A го повлекува настанот B (пишуваме $A \subseteq B$) ако секогаш кога се појавува настанот A се појавува и настанот B .

Пример 5

Да го разгледаме повторно експериментот фрлање две монети. Нека

A : падна точно една глава

B : падна барем една глава.

Може да се воочи дека секогаш кога ќе се појави настанот A , се појавува и настанот B , т.е. $A \subseteq B$.

Запомни!

Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, тогаш за настаните A и B велиме дека се **еднакви**.

Дефинициите за производ и збир на два настани може да се обопштат и за производ и збир на конечно многу настани.

Запомни!

- Збир на настаните $A_1, A_2, \dots, A_n$ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните $A_1, A_2, \dots, A_n$.
- Овој настан се означува со $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, а неговото множество елементарни настани е унија од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Запомни!

- Производ на настаните $A_1, A_2, \dots, A_n$ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават сите настани $A_1, A_2, \dots, A_n$ истовремено.
- Овој настан се означува со $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, а неговото множество елементарни настани е пресек од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Пример 6

Во цел се стрела три пати. Се разгледуваат настаните A_1, A_2 и A_3 кои означуваат погодување на целта во првото, второто и третото стрелање, соодветно. Со помош на овие настани да се опишат следните случајни настани:

- B : постигнати се три погодоци;
 C : целта е три пати промашена;
 D : постигнат е барем еден погодок;
 F : постигнато е барем едно промашување;

Решение:

- Настанот B ќе се појави ако се појават сите три настани A_1, A_2 и A_3 истовремено. Оттука, $B = A_1 A_2 A_3$.
- Настанот C ќе се појави ако не се појави ниту еден од настаните A_1, A_2 и A_3 , т.е. ако се појават нивните спротивни настани. Така, $C = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$.
- Настанот D ќе се појави ако се појави барем еден од настаните A_1, A_2 или A_3 , па $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Соодветно, $F = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$.

Пример 7

Еден брод има еден управувачки механизам, четири парни котли и две турбини. Ги означуваме следните настани:

- A : управувачкиот механизам е исправен
 B_k : k -тиот парен котел е исправен, $k = 1, 2, 3, 4$
 C_j : j -тата турбина е исправна, $j = 1, 2$

Настанот D означува дека бродот е во возна состојба и тој настапува ако е исправен управувачкиот механизам, барем еден котел и барем една турбина. Да се изрази настанот D преку настаните A , B_k и C_j .

Решение:

$$D = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \cap (C_1 \cup C_2).$$

Задачи за вежбање!

- Експериментот се состои во фрлање три монети. Настаните A_1 , A_2 и A_3 означуваат појавување на писмо на првата, втората и третата монета, соодветно. Со користење на овие настани да се опишат следните случајни настани:
 B : писмо се појави само на првата монета;
 C : писмо се појави на првата и на втората монета;
 D : писмо се појави на сите три монети;
 E : писмо се појави на барем две монети;
 F : писмо се појави на само една монета;
 G : писмо се појави на точно две монети;
 H : писмо се појави на најмногу две монети.
- Двајца шахисти A и B играат турнир во шах. Турнирот се состои од 4 партии, при што нерешените партии не се земаат предвид. Победник е оној што ќе постигне повеќе победи. Во случај на нерешен резултат (2:2) се игра и петта одлучувачка партија. Да се опишат следните настани:
 D : ќе победи шахистот A ;
 E : ќе победи шахистот B ;
 F : ќе се игра и петта партија.
- На тест по математика еден ученик добива три задачи. Со A_i го означуваме настанот дека ученикот знае да ја реши i -тата задача, $i = 1, 2, 3$. Со помош на овие настани да се опишат следните настани:
 B : ученикот знае да ги реши сите задачи;
 C : ученикот знае да реши барем една задача;
 D : ученикот знае да реши барем две задачи;
 E : ученикот знае да реши најмногу две задачи;
 F : ученикот не знае да ги реши сите три задачи;
 G : ученикот не знае да реши ниту една задача.
- Експериментот се состои во избор на три производи од една производна серија. Ги означуваме следните настани:
 A : барем еден од трите производи е неисправен;
 B : сите три производи се исправни.
 На што се еднакви следните настани:
 а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $\bar{A}$; г) $\bar{B}$.

4.9 КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ

Потсети се!

Што е множество елементарни настани?

Како се дефинира случаен настан A ?

Како се дефинира статистичка веројатност на даден настан A ?

Како што споменавме претходно, во недетерминистичките експерименти исходот не е еднозначен. Затоа, кога се изведуваат овие експерименти, не знаеме однапред кој исход ќе се појави. Затоа е потребно да се најде некоја објективна мерка за можноста да се појави одреден настан поврзан со експериментот кој го разгледуваме. За таа цел, ќе го воведеме поимот веројатност, токму како мерка за можноста за појавување на одреден настан.

Овде ќе се задржиме само на експерименти за кои сите елементарни настани имаат еднакви шанси да се појават, т.е. се еднакво веројатни. На пример,

- при фрлање коцка за играње, секоја страна има еднакви шанси да се појави;
- при фрлање паричка, писмо и грб имаат еднаква шанса за појавување;
- при извлекување топче од една кутија со топчиња, секое топче има еднакви шанси да биде извлечено итн.

Како што дефиниравме претходно, секој случаен настан A е подмножество на множеството елементарни настани Ω . Оттука, бројот на елементи во A е секогаш помал или еднаков на бројот на елементи во Ω , т.е. $|A| \leq |\Omega|$.

Запомни!

Класична дефиниција на веројатност. Нека $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ е дадено конечно множество елементарни настани и нека секој од нив има еднакви шанси да се појави. Ако A е случаен настан во врска со дадениот експеримент во кој се содржат k елементарни настани, тогаш (теориската) веројатност на настанот A се определува со:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{број на елементи во } A}{\text{број на елементи во } \Omega}.$$

- Секој елементарен настан може да го толкуваме како „можен случај“ во врска со даден експеримент.
- Од друга страна, k е бројот на елементарни настани кои се содржат во настанот A , т.е. $k = |A|$ и секој елементарен настан од A ќе го толкуваме како „поволен случај“ за појавување на настанот A .

- Согласно класичната дефиниција, веројатноста на даден случаен настан A е еднаква на количникот на бројот на поволни случаи за појавување на настанот A и бројот на сите можни случаи за даден експеримент, т.е. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Пример 1

Опреди ја веројатноста при фрлање коцка за играње да се добие парен број.

Решение:

Ако експериментот е фрлање коцка за играње, множеството елементарни настани $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, каде што E_i е настанот „на горната страна на коцката се појави бројот i “, $i=1, 2, \dots, 6$. Да воочиме дека сите елементарни настани се еднакво веројатни, т.е. при фрлање коцка секоја страна има еднакви шанси да се појави. Настанот A : падна парен број, може да се опише со $A = \{E_2, E_4, E_6\}$. Значи, бројот на поволни можности за појавување на настанот A е 3, а вкупниот број на можности при реализација на експериментот е 6. Оттука, согласно класичната дефиниција на веројатност, за веројатноста на настанот A се добива $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$.

Задача 1

Да се определи веројатноста при фрлање коцка за играње да се добие број кој е поголем од 4.

Пример 2

Експериментот се состои во фрлање три монети. Опреди го множеството елементарни настани и веројатноста на следните случајни настани:

A : се појавиле точно две писма;

B : не се појавило ниту едно писмо.

Решение:

Ќе означуваме кратко „Г“ ако на горната страна на една коцка се појави грб и „П“ ако на горната страна се појави писмо. Множеството елементарни настани за овој експеримент се состои од подредени тројки, каде што i -тиот елемент во тројката е исходот на i -тата монета, $i = 1, 2, 3$. Така, $\Omega = \{(П, П, П), (П, П, Г), (П, Г, П), (Г, П, П), (П, Г, Г), (Г, П, Г), (Г, Г, П), (Г, Г, Г)\}$.

Тогаш настанот A е

$$A = \{(П, П, Г), (П, Г, П), (Г, П, П)\},$$

па согласно класичната дефиниција на веројатност,

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

За настанот B , добиваме:

$$B = \{(Г, Г, Г)\}.$$

Веројатноста на овој настан е $P(B) = \frac{1}{8}$.

Пример 3

Од стандарден шпил со 52 карти случајно се извлекуваат 5. Да се определи веројатноста дека сите извлечени карти се карти пик.

Решение:

Го означуваме настанот A : извлечени се пет карти пик. Бројот на елементи во Ω е бројот на сите можни комбинации од 52 елементи од класа 5, т.е.

$$|\Omega| = C_{52}^5 = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2598960.$$

Аналогно, постојат 13 карти пик, па бројот на елементарни настани во настанот A е

$$|A| = C_{13}^5 = \frac{13!}{5!(13-5)!} = 1287. \text{ Сера,}$$

$$P(A) = \frac{1287}{2598960} = 0,0005.$$

Задача 2

Од стандарден шпил со 52 карти случајно се извлекуваат 3 карти. Да се определи веројатноста дека се извлечени две дами и една десетка.

Пример 4

Во една кутија има 20 тениски топчиња од кои 4 се дефектни. Случајно се избираат две топчиња од таа кутија. Да се определи веројатноста дека е извлечено едно дефектно и едно исправно топче.

Решение:

Го означуваме настанот A : извлечено е едно дефектно и едно исправно топче.

Бројот на елементи во Ω е

$$|\Omega| = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = 190.$$

Настанот A ќе се случи ако се извлече едно дефектно топче (од вкупно 4) и едно исправно топче (од вкупно 16), па бројот на елементи во A е $|A| = C_4^1 \cdot C_{16}^1 = 4 \cdot 16 = 64$. Сера,

$$P(A) = \frac{64}{190} = 0,337.$$

Задача 3

Во една кутија има 5 бели и 4 црни топчиња. Од кутијата се извлекуваат три топчиња наеднаш. Да се определи веројатноста дека трите извлечени топчиња се бели.

Пример 5

Многу генетски особини се контролирани од два гена, еден доминантен и еден рецесивен. Во оригиналните експерименти на Грегор Мендел со грашок, гените што ја контролираат висината на растението се означени со T (високо) и t (ниско). Генот T е доминантен, па растение со генотип (генетски состав) TT или Tt е високо, додека растение со генотип tt е ниско. Со статистичка анализа на потомството во неговите експерименти, Мендел заклучил дека потомството наследува еден ген од секој родител и дека секоја можна комбинација од двата гена е подеднакво веројатна. Ако секој родител го има генотипот Tt , тогаш следната табела ги дава можните генотипови на потомството:

Колку е веројатноста случајно избран потомок од вакви родители (со генотипот Tt) да биде висок, а колку да биде низок?

		Родител 1	
		T	t
Родител 2	T	TT	Tt
	t	tT	tt

Решение:

Од условите на задачата е јасно дека во експериментот $\Omega = \{TT, Tt, tT, tt\}$, т.е. бројот на можни случаи во врска со овој експеримент е 4 и сите елементарни настани (можни комбинации на гени) се еднакво веројатни.

Го означуваме настанот A : случајно избран потомок од родители со генотипот Tt да биде висок. Настанот A ќе се појави ако се појави еден од генотипите TT, Tt, tT , т.е. $A = \{TT, Tt, tT\}$. Значи, постојат 3 поволни можности за појавување на настанот A . Оттука, за веројатноста на настанот A се добива $P(A) = \frac{3}{4}$.

Веројатноста случајно избран потомок да биде низок е, всушност, веројатноста на спротивниот настан на настанот A , па $P(\bar{A}) = \frac{1}{4}$.

Важно!

Веројатноста пресметана според класичната дефиниција на веројатност е теориска веројатност, за разлика од статистичката веројатност која е емпириска, експериментално пресметана. Но, може да се покаже дека за голем број n на изведени експерименти, релативната фреквенција се доближува во теориската веројатност.

Задача 4

Едно тркало на среќата е поделено на 8 еднакви делови, нумерирани од 1 до 8. Тркалото е завртено еднаш. Определи ја веројатноста стрелката да застане на:

- непарен број;
- број делив со 4;
- број помал од 3.

Задача 5

Во една кутија има 12 топчиња со иста форма. Од нив: 3 се црвени, а преостанатите се зелени. Од кутијата се извлекува едно топче. Определи ја веројатноста извлеченото топче да биде:

- а) црвено;
- б) црвено или зелено;
- в) зелено;
- г) бело.

Задачи за вежбање!

1. Во една кутија има 10 топчиња од кои 6 се бели, 3 црвени и 1 црно. Случајно се избираат 3 топчиња одеднаш. Да се определи веројатноста дека:
 - а) сите извлечени топчиња се бели;
 - б) извлечени се 2 црвени и 1 црно топче.
2. Во еден клас има 40 ученици од кои 10 се одлични. Класот се дели во две групи од по 20 ученици. Да се определи веројатноста дека во двете групи ќе има по 5 одлични ученици.
3. Во една игра се фрлаат три коцки и добивка се остварува ако збирот на паднатите броеви на трите коцки е 11 или 12. Да се определи веројатноста на следните настани:
 - A: збирот на паднатите броеви е 11;
 - B: збирот на паднатите броеви е 12;
 - C: остварена е добивка.
4. Дадени се пет отсечки со должини 2, 3, 4, 7 и 9 cm. Да се определи веројатноста дека од три случајно избрани отсечки ќе може да се конструира триаголник.
5. Еден човек купил 7 светилки од 40 W, 5 светилки од 60 W и 3 светилки од 100 W. По пат скршил три светилки. Колкава е веројатноста дека скршените светилки имаат вкупно 180 W?
6. Десет книги случајно се поредуваат на една полица. Да се определи веројатноста на следните настани:
 - A: една фиксна книга ќе биде секогаш на почетокот на редот;
 - B: три тома на еден роман ќе бидат секогаш еден до друг во растечки редослед;
 - C: три тома на еден роман ќе бидат секогаш еден до друг во произволен редослед.
7. Во едно пакување има 8 сензори од кои 5 се исправни, а 3 неисправни. Од пакувањето се избираат 3 сензори потребни при конструкција на една роботска рака. Да се определи веројатноста дека ќе бидат избрани 2 исправни и 1 неисправен сензор.
8. Еден инвеститор случајно избира 3 акции од портфолио со 5 безбедни и 3 ризични акции. Да се определи веројатноста дека ќе избере повеќе безбедни од ризични акции.

4.10 СВОЈСТВА НА ВЕРОЈАТНОСТ. НЕЗАВИСНИ НАСТАНИ

Потсети се!

Како гласи класичната дефиниција на веројатност? Кога може да се примени?

Во овој дел ќе ги разгледаме основните својства на веројатноста.

- Секој настан A е подмножество од множеството елементарни настани Ω , па $0 \leq |A| \leq |\Omega|$.
Оттука, $\frac{0}{|\Omega|} \leq \frac{|A|}{|\Omega|} \leq \frac{|\Omega|}{|\Omega|}$, т.е. $0 \leq P(A) \leq 1$.
- За веројатноста на сигурниот настан се добива дека $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$, а за веројатноста на невозможниот настан имаме $P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = 0$.
- Нека $A = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ и $B = \{E_{k+1}, E_{k+2}, \dots, E_{k+m}\}$ се два дисјунктни настани, т.е. $A \cap B = \emptyset$. Тогаш збирот на настаните A и B е $A+B = \{E_1, E_2, \dots, E_k, E_{k+1}, E_{k+2}, \dots, E_{k+m}\}$ и тој содржи $k+m$ елементарни настани. Оттука,

$$P(A+B) = \frac{k+m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = P(A) + P(B).$$

Запомни!

За веројатноста на настанот A важат следните основни својства:

1. За секој настан A , важи $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(\emptyset) = 0$;
4. Ако A и B се дисјунктни множества, тогаш $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Пример 1

Во една кутија има 4 бели, 6 црвени и 5 црни топчиња. Од кутија случајно се извлекува едно топче. Определи ја веројатноста дека е извлечено бело или црно топче.

Решение:

Ги означуваме настаните

A : извлечено е бело топче;

B : извлечено е црно топче.

Да воочиме дека настаните A и B се дисјунктни. Имено, појавувањето на настанот A го исклучува појавувањето на настанот B , и обратно. Ја бараме веројатноста на настанот $A + B$. Од својството 4 добиваме:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Задача 4

Од шпил со 52 карти се извлекува една карта. Да се определи веројатноста дека е извлечена карта пик или карта херц.

Својството 4 може да се обопшти на следниот начин.

Запомни!

5. Нека $A_1, A_2, \dots, A_k$ се дисјунктни настани, т.е. $A_i \cap A_j = \emptyset$, за $i \neq j$. Тогаш

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k).$$

- Ако настанот A го повлекува настанот B , т.е. ако $A \subseteq B$, тогаш $|A| \leq |B|$, па $\frac{|A|}{|\Omega|} \leq \frac{|B|}{|\Omega|}$. Оттука се добива дека $P(A) \leq P(B)$.

Запомни!

6. Ако $A \subseteq B$, тогаш $P(A) \leq P(B)$.

- Бидејќи $A + \bar{A} = \Omega$ од својствата 2 и 4 се добива дека $P(A + \bar{A}) = P(\Omega)$ т.е.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Оттука, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Запомни!

7. За веројатноста на спротивниот настан на даден настан A , важи $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Пример 2

Во една кутија има 5 бели и 4 црни топчиња. Од кутијата се извлекуваат 3 топчиња наеднаш. Определи ја веројатноста дека извлечено е барем едно бело топче.

Решение:

Го означуваме настанот A : извлечено е барем едно бело топче. Тогаш спротивниот настан $\bar{A}$ означува дека не е извлечено ниту едно бело топче, т.е. трите извлечени топчиња се црни. Затоа,

$$P(\bar{A}) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84} = \frac{1}{21}.$$

Сега, за веројатноста на настанот A се добива:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}.$$

- Ако A и B се два настани во врска со еден експеримент, тогаш бројот на елементи во $A \cup B$ е еднаков на $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Ако овој израз се подели со $|\Omega|$, следува точноста на следното својство.

Запомни!

8. Веројатноста на сумата на два произволни настани во врска со еден експеримент се пресметува со:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Пример 3

Во едно претпријатие има 100 вработени. Од нив 40 знаат англиски, 30 знаат германски, а 15 ги знаат и двата јазика. Случајно се избира едно лице. Определи ја веројатноста на случајните настани:

B : избраното лице знае барем еден јазик;

C : избраното лице не знае ниеден јазик.

Решение:

Ќе ги означиме следните настани:

A : избраното лице знае англиски;

G : избраното лице знае германски.

Од условите на задачата имаме дека

$$P(A) = \frac{40}{100} = 0,4, \quad P(G) = \frac{30}{100} = 0,3, \quad P(A \cap G) = \frac{15}{100} = 0,15.$$

Да воочиме дека настанот B може да се запише како унија на настаните A и G , т.е. $B = A \cup G$. Оттука,

$$P(B) = P(A \cup G) = P(A) + P(G) - P(A \cap G) = 0,4 + 0,3 - 0,15 = 0,55.$$

Од друга страна, настанот C е спротивен настан на настанот B , т.е. $C = \bar{B}$. Оттука,

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,55 = 0,45.$$

Задача 5

Еден играч го врти тркалото на среќата дадено на сликата десно. Да се определи веројатноста на следните настани:

- A: Тркалото ќе запре на портокалово поле;
- B: Тркалото ќе запре на парен број;
- C: Тркалото ќе запре на портокалово поле или на парен број.

**Независност на настани**

За два настани A и B велíme дека се независни ако појавувањето на едниот настан не влијае врз појавувањето на другиот настан, и обратно. На пример, ако се фрлаат две коцки, тогаш исходот на првата коцка за играње не влијае врз исходот на втората коцка, па ако ги дефинираме настаните

- A: на првата коцка падна петка и
- B: на втората коцка падна тројка,

тогаш настаните A и B се независни настани.

Но, не секогаш од самите услови на задачата може да се утврди дали два настани се независни или не. Во тој случај треба да се провери дали е исполнет условот за независност.

Запомни!

Два настани A и B се **независни** ако и само ако $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Пример 4

Од шпил со 52 карти се извлекува една карта. Да ги разгледаме следните настани:

- A: извлечена е карта на која е бројот пет;
- B: извлечената карта е лист.

Провери дали настаните A и B се независни.

Решение:

Поволни можности за појавување на настанот A има 4 (во шпилот има 4 петки), па $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Од друга страна, поволни можности за појава на настанот B има 13 (во шпилот има 13 карти лист). Оттука, $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Настанот $A \cap B$ ќе се појави ако се извлече карта лист со бројот 5.

Поволна можност за појава на овој настан има само една. Добиваме:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = P(A)P(B).$$

Можеме да заклучиме дека условот за независност е задоволен, па настаните A и B се независни настани, иако интуитивно тоа не изгледа така (помеѓу картите со знак лист има петка и меѓу четирите петки има петка лист).

Пример 5

Во една кутија има 6 бели и 4 црни топчиња. Од кутијата се извлекува едно топче, се регистрира неговата боја и се враќа во кутијата. Потоа се извлекува уште едно топче. Определи го веројатноста дека двете извлечени топчиња се бели.

Решение:

Ги означуваме следните настани:

A: првото извлечено топче е бело;

B: второто извлечено топче е бело.

Да воочиме дека настаните *A* и *B* се независни. Имено, првото извлечено топче се враќа во кутијата, па исходот од првото извлекување не влијае врз исходот од второто извлекување. Ја бараме веројатноста на настанот $A \cap B$. Ако ја искористиме независноста, добиваме:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{25}.$$

Задача 6

Ученик добива на тест две прашања на кои треба да одговори со ДА или со НЕ. Ученикот не се подготвувал за тестот, па одговорот на прашањата го погодува. Одговорот на едното прашање не влијае врз одговорот на другото, и обратно. Да се определи веројатноста на следните настани:

A: ученикот точно одговорил на двете прашања;

B: ученикот точно одговорил на само едно прашање;

C: ученикот погрешно одговорил на двете прашања.

Дали два дисјунктни настани може да се независни, и обратно?

- Нека *A* и *B* се дисјунктни настани. Тогаш $A \cap B = \emptyset$, па $P(A \cap B) = 0$. Оттука, равенството

$$P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$$

ќе важи само ако $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$. Значи, ако *A* и *B* се дисјунктни настани и $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, тогаш *A* и *B* не може да бидат независни.

- Важи и обратното. Нека *A* и *B* се независни настани и $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. Тогаш $P(A) \cdot P(B) > 0$. Од независноста следува дека $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$, па *A* и *B* не се дисјунктни настани.

Запомни!

- Независност и дисјунктност на два настани се различни поими!
- Два дисјунктни настани *A* и *B* се независни ако и само ако $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$.

Пример 6

Петар истовремено фрла една монета и една коцка за играње.

- Опреди го множеството елементарни настани.
- Опреди ја веројатноста на следните настани:
 A : се паднало писмо на монетата и парен број точки на коцката;
 B : се паднал грб на монетата и број на точки поголем од 4 на коцката.
- Дали настаните A и B се дисјунктни?
- Дали настаните A и B се независни?

Решение:

- Ако означиме „П“ (писмо) и „Г“ (грб), како исходи од фрлањето на монетата, а 1, 2, 3, 4, 5, 6, како исходи од фрлањето на коцката, множеството елементарни настани е следното:

$$\Omega = \{(П, 1), (П, 2), (П, 3), (П, 4), (П, 5), (П, 6), (Г, 1), (Г, 2), (Г, 3), (Г, 4), (Г, 5), (Г, 6)\}.$$

Значи, бројот на елементи во Ω е $|\Omega| = 12$.

- Настанот A може да се опише со $A = \{(П, 2), (П, 4), (П, 6)\}$, па

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Од друга страна, $B = \{(Г, 5), (Г, 6)\}$ и $P(B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

- Може да се воочи дека $A \cap B = \emptyset$, па A и B се дисјунктни настани.
- Претходно добивме дека $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$ и тие се дисјунктни. Согласно претходната дискусија, тие не може да бидат независни.

Задача 7

Од шпил со 52 карти случајно се извлекува една карта. Нека

- A : извлечената карта е срце;
 B : извлечената карта е пик;
 C : извлечената карта е дама.

- Да се определи $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$.
- Дали настаните A и B се независни настани? Дали тие се дисјунктни настани?
- Дали настаните A и C се независни настани? Дали тие се дисјунктни настани?
- Нека $D = A \cap B$. Дали настаните C и D се независни настани?

Задачи за вежбање!

- Нека $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$, а $P(A \cap B) = 0,3$. Да се определат веројатностите на следните настани $\bar{A}, \bar{B}, A \cup B, \bar{A} \cap \bar{B}, \bar{A} \cup \bar{B}$.
- Да се определи веројатноста на настанот $A \cap B$ ако $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,7$, а $P(A \cup B) = 0,5$.
- Во една кутија има 4 бели, 6 црни и 5 сини топчиња. Од кутијата случајно се извлекува едно топче. Дадени се случајните настани:
 A : извлеченото топче е бело;
 B : извлеченото топче е црно.
 Да се определи веројатноста на збирот на настаните A и B .
- Се фрлаат две коцки за играње. Дадени се следните случајни настани:
 A : збирот на точките на двете коцки е поголем од 9;
 B : на првата коцка паднал бројот 5.
 Да се определи веројатноста на
 а) настаните A и B ;
 б) настаните $\bar{A}$ и $\bar{B}$
 в) $A \cap B$ и $A \cup B$.
- Две тркала A и B (дадени на сликата подолу) се завртуваат во исто време.



A



B

- Дали настаните „тркалото A ќе застане на портокалово поле“ и „тркалото B ќе застане на жолто поле“ се независни настани?
 - Да се определи веројатноста дека тркалото A ќе застане на црвено и тркалото B ќе застане на жолто.
- Коцка се фрла двапати. Да се определи веројатноста дека ќе падне единица во првото или непарен број во второто фрлање.
 - Експериментот се состои во фрлање две фигури: правилен тетраедар и правилен додекаедар. Тетраедарот има четири страни (кои се рамнострани триаголници) нумерирани со броевите 1, 2, 3, 4, а додекаедарот има 12 страни (кои се правилни петоаголници) нумерирани со броевите од 1 до 12. Најди ја веројатноста дека на тетраедарот ќе падне број делив со 3, а на додекаедарот ќе падне број делив со 4.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Колку четирицифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 3, 5, 7, 9 ако цифрите може и да се повторуваат?
2. Колку трицифрени броеви може да се формираат од цифрите 0, 2, 4, 6, 8 ако сите цифри во броевите се различни?
3. На колку начини може да се наредат во линија 12 вработени во една компанија за да направат групна фотографија?
4. Еден флејтист треба да изведе на концерт 7 композиции. На колку начини може да ги распореди композициите на концертот?
5. На колку начини може 6 ученици да седнат на 6 места во првиот ред ако Стефан инсистира да седи на првото столче?
6. Колку различни распореди може да се направат од буквите во зборот ПАРАЛОПИПЕД.
7. Еден ученик купил 3 сладоледи од ванила, 5 од чоколада, 4 од јагода и 8 од малина. На колку начини може да им ги подели сладоледите на 20 другари за да ги почести за роденден?
8. Седум другари на екскурзија треба да се сместат во хотел во кој има слободни: 2 еднокреветни, 1 двокреветна и 1 трокреветна соба. На колку начини може да се сместат другарите во слободните соби?
9. На колку начини може да се изберат 3 различни додатоци за пица ако се достапни 12 додатоци?
10. Ученик треба да избере и одговори 7 од 9 прашања на тестот по историја. На колку начини може да ги избере прашањата?
11. Едно множество има 7 елементи. Колку подмножества со 5 елементи има тоа множество?
12. Тренерот на училишната репрезентација во фудбал повикал на подготовки 4 ученици од прва, 6 од втора, 8 од трета и 10 од четврта година. По подготовките тој треба да состави тим од 11 ученици кои ќе учествуваат на фудбалски куп. На колку начини може да го состави тимот ако во него треба да има 2 ученика од прва, 2 од втора, 3 од трета и 4 од четврта година?
13. Нека експериментот е извлекување карта од шпил со 52 карти. Спроведи 10 серии од по 50 извлекувања. По секое извлекување регистрирај го бројот на картата и врати ја назад во шпилот. Определи ја статистичката веројатност за појавување на настаните:
A: извлечена е карта пик со бројот 10;
B: извлечена е карта со непарен број (за непарен број се смета и карта-дама).
14. Нека експериментот е извлекување карта од шпил со 28 карти во кој има по 4 карти со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Направи 4 серии од по 100 експерименти и одреди ги релативните фреквенции на настаните:
A: извлечена е карта со број не помал од 5;
B: извлечена е карта со број поголем или еднаков на 3;
C: извлечена е карта со парен број.
15. Истовремено се фрлаат монета и тетраедар чии страни се означени со a , b , c и d . Опиши го множеството елементарни настани за овој експеримент.

16. Во една кутија има 4 топчиња нумерирани со броевите 1, 2, 3 и 4. На случаен начин се извлекуваат едно по едно топче, без враќање во кутијата. Извлекувањето се врши сè додека не се извлече топчето со бројот 1. Опиши го множеството елементарни настани за овој експеримент.
17. Стрелец стрела во цел трипати, при што се регистрираат погодоците или промашувањата на целта при секое стрелање. Опиши го множеството елементарни настани и следните случајни настани:
 А: во првото стрелање е постигнат погодок;
 В: целта е промашена двапати;
 С: во сите три стрелања е постигнат ист резултат;
 D: во првите две стрелања целта е промашена.
18. Во една кутија има 10 батерии од кои 3 се неисправни. Од кутијата се избираат наеднаш 5 батерии. Да се определи веројатноста помеѓу нив да има 3 исправни батерии.
19. Коцка за играње се фрла еднаш. Да се определи веројатноста на следните настани:
 А: падна број поголем од 3;
 В: падна непарен број;
 С: падна бројот 3 или бројот 4.
20. Во една трка учествуваат 8 коњи, при што сите можни распоредувања на коњите на целта се еднакво веројатни. Пред почетокот на трката Милош пополнува тикет на кој го прогнозира распоредот на коњите по завршување на трката. Која е веројатноста дека ќе го погоди распоредот?
21. Во една кутија има вкупно 8 црни и бели топчиња. Од кутијата се извлекуваат две топчиња. Веројатноста да се извлечат 2 бели топчиња од кутијата е $15/28$. Да се определи бројот на бели топчиња во кутијата.
22. Да се определи веројатноста дека во случајно избрана година во месец август ќе има точно 4 понеделници.
23. Се разгледуваат пермутации без повторување од n елементи. Колкава е веројатноста дека во една случајно избрана пермутација два фиксни елементи a и b ќе бидат еден до друг?
24. Еден шпил се состои од 52 карти. Картите се распоредуваат во една низа по случаен редослед. Да се определи веројатноста на следните настани:
 А: сите четири единици ќе бидат една до друга;
 В: единиците ќе бидат распоредени на првите четири позиции или на последните четири позиции.
25. Сите страни на една коцка се обоени во црвена боја. Коцката е поделена на 100 еднакви коцкички и тие добро се измешани. Од нив случајно се избира една коцкичка. Да се определи веројатноста на следните настани:
 А: на коцкичката ќе има точно две страни обоени со црвено;
 В: на коцкичката ќе има барем две страни обоени со црвено.
26. Еден играч уплатува во две последователни кола по една комбинација на лото $7/37$. Да се определи веројатноста дека:
 а) ќе добие седумка во првото коло;
 б) ќе добие барем една седумка во двете последователни кола.
27. **Проблем за размислување.** Во крајот на 17-тиот век, англиски математичари составиле и анализираше табlici на смртност кои покажувале колку луѓе умираат на различни возрасти. Од овие табlici можеле да ја проценат веројатноста дека една личност ќе биде жива на некој датум во иднина. Ова довело до основање на првата компанија за животно осигурување во 1699 година.

Компаниите за животно осигурување користат статистики за очекуваниот животен век и стапките на смртност за да ги пресметаат премините што треба да ги наплатат од луѓето кои се осигуруваат кај нив.

Табелата за живот (life table) прикажана е од Австралија. Таа покажува колку од 100 000 родени се преживуваат до различни возрасти, како и очекуваните години на преостанат живот за секоја возраст.

Мажи			Жени		
Години	Број на преживеани	Очекувано време на живот	Години	Број на преживеани	Очекувано време на живот
0	100000	73,03	0	100000	79,46
5	98809	68,90	5	99307	75,15
10	98698	63,97	10	99125	70,22
15	98555	59,06	15	98965	65,27
20	98052	54,35	20	98758	60,40
25	97325	49,74	25	98516	55,54
30	96688	45,05	30	98278	50,67
35	96080	40,32	35	98002	45,80
40	95366	35,60	40	97615	40,97
45	94323	30,95	45	96997	36,22
50	92709	26,45	50	95945	31,59
55	89891	22,20	55	94285	27,10
60	85198	18,27	60	91774	22,76
65	78123	14,69	65	87923	18,64
70	67798	11,52	70	81924	14,81
75	53942	8,82	75	72656	11,36
80	37532	6,56	80	58966	8,38
85	20998	4,79	85	40842	5,97
90	8416	3,49	90	21404	4,12
95	2098	2,68	95	7004	3,00
99	482	2,23	99	1953	2,36

На пример, можеме да видиме дека од 100 000 родени, 98 052 мажи се очекува да преживеат до 20-годишна возраст и од оваа возраст, преживеаните се очекува да живеат уште 54,35 години.

- Колку години живот може да очекува новородено машко и новородено женско дете во Австралија?
- Колкава е веројатноста новородено машко дете да доживее 60 години? А колкава е таа веројатност за женско дете?
- Според табелата, кој пол во просек живее подолго? Образложи.
- Осигурителна компанија нуди животно осигурување со важност од 30 години. Зошто таквото осигурување е поевтино за лице на возраст од 30 години отколку за лице на возраст од 50 години?

ГЕОМЕТРИЈА

Во оваа тема се обработуваат тригонометриските функции и врските помеѓу нив, заемниот однос на права и рамнина, односот меѓу две рамнини или две прави, како и пресеците на 3Д формите со рамнина. Овие содржини овозможуваат прецизно опишување и анализа на положбата, насоката и наклонот на објекти во просторот. Тригонометријата претставува основна алатка за мерење и пресметување на растојанија и агли, додека проучувањето на заемните односи и пресеците со рамнина овозможува геометриско моделирање на сложени просторни ситуации. Знаењата од оваа тема имаат широка примена во архитектурата, инженерството, градежништвото, техничкото цртање, физиката и информатиката, каде што се користат за анализа на конструкции, одредување видливи пресечни форми, стабилност и просторна ориентација.

Во темите 5 и 6 ќе биде потребно дел од примерите и задачите да ги визуелизирате и проверувате во компјутерскиот софтвер GeoGebra. GeoGebra е интерактивен математички софтвер за визуелизација и учење на геометрија, алгебра, функции, статистика и калкулус. Овој софтвер може да го користите онлајн на следниот линк <https://www.geogebra.org/classic> или може да го симнете и инсталирате на вашиот компјутер преку линкот <https://www.geogebra.org/download>.

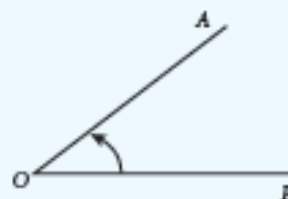
5.1 АГЛИ И МЕРЕЊЕ АГЛИ

Потсети се!

- Какви видови агли постојат?
- Во која единица мерка се мерат аглите?
- Аглите се сретнуваат во многу области од секојдневниот живот, како архитектура, физика, картографија, геодезија, навигација, дизајн, спорт и многу други.

Запомни!

- 2Д-форма формирана од две полуправи со заедничка почетна точка и делот од рамнината ограничен со нив се вика **агол**.
- Заедничката почетна точка на полуправите се нарекува **теме** на аголот, а полуправите што го формираат аголот се нарекуваат **краци** на аголот.
- На цртеж 1 е прикажан агол AOB со теме O и краци OA и OB .



Цртеж 1

Потсети се!

- Остар агол е агол кој е поголем од 0° и помал од 90° (цртеж 2).
- Тап агол е агол кој е поголем од 90° и помал од 180° (цртеж 3).
- Агол кој има точно 90° се нарекува прав агол (цртеж 4), додека агол од 180° е рамен агол (цртеж 5).
- Неконвексен агол е агол кој е поголем од 180° , а е помал од 360° (цртеж 6).
- Полн агол е агол од 360° (цртеж 7).



Цртеж 2



Цртеж 3



Цртеж 4



Цртеж 5



Цртеж 6



Цртеж 7

- Степен е мерка на агол кој се добива кога еден цел круг ќе се подели на 360 еднакви делови. Еден од тие делови се нарекува степен и се означува 1° . Помали единици од степен се минута што се означува со $1'$, и секунда што се означува со $1''$. Притоа, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Пример 1

Претвори ги аглите во минути: а) 23° б) $31^\circ 15'$.

Решение:

$$\text{а) } 23^\circ = (23 \cdot 60)' = 1380'; \quad \text{б) } 31^\circ 15' = (31 \cdot 60 + 15)' = 1875'.$$

Пример 2

Претвори ги аглите во степени: а) $493'$; б) $78^\circ 15'$.

Решение:

$$\text{а) } \frac{493}{60} = 8,2167^\circ; \quad \text{б) } 78^\circ 15' = 78 + \frac{15}{60} = 78 + 0,25 = 78,25^\circ.$$

Запомни!

Радијан е мерка за големината на агол која претставува однос помеѓу должината на лакот кој одговара на тој агол и радиусот на кружницата.

$\varphi = \frac{l}{r}$ (l - должина на кружниот лак што одговара на централен агол во кружница со радиус r).

Најчесто аглите што се изразени во радијани се означуваат со φ (се чита „фи“) или θ (се чита „тета“). Во овој учебник ние ќе ја користиме ознаката φ .

Ако должината на лакот е еднаква на радиусот, тогаш се добива агол од 1 радијан (1 rad) $\varphi = \frac{l}{r} = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad}$.

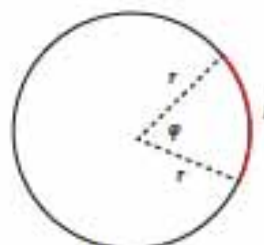
За претворање на агол од степени во радијани и обратно се користи фактот дека еден цел круг изнесува 360° или $2\pi \text{ rad}$. Ако α е аголот во степени, а φ е истиот тој агол во радијани, тогаш следува дека односот на аголот α спрема 360° е еднаков на односот на аголот φ спрема 2π , т.е. $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\varphi}{2\pi}$. Па оттука се добиваат следните формули:

$$\alpha = 360^\circ \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi, \quad \varphi = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha.$$

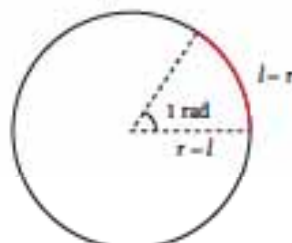
Да нагласиме дека записот на големината на аголот во радијани најчесто го вклучува бројот π .

Запомни!

- Формула за претворање агол од степени во радијани е $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$.
- Формула за претворање агол од радијани во степени е $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi$.
- Ознаката rad за означување радијани обично не се пишува, но се подразбира. Така, ако напишеме $\varphi = \frac{\pi}{6}$, се подразбира дека $\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.



Цртеж 8



Цртеж 9

Пример 3

Правиот, рамниот и полниот агол претвори ги од степени во радијани.

Решение:

Користејќи ја формулата за претворање од степени во радијани, добиваме:

- за правиот агол: $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{2}$;
- за рамниот агол: $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 180^\circ = \pi$;
- за полниот агол: $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 360^\circ = 2\pi$.

Запомни!

- Правиот агол $\alpha = 90^\circ$ изразен во радијани е $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad.
- Рамниот агол $\alpha = 180^\circ$ изразен во радијани е $\varphi = \pi$ rad.
- Полниот агол $\alpha = 360^\circ$ изразен во радијани е $\varphi = 2\pi$ rad.

За да се добие подобра претстава за големината на мерката радијан, треба да се знае дека

$$1 \text{ rad} = 57,296^\circ \text{ и } 1^\circ = 0,01745 \text{ rad.}$$

Пример 4

Аголот од 135° претвори го во радијани.

Решение:

Со примена на формулата за $\alpha = 135^\circ$, добиваме $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$ rad.

Задача 1

Аголот од 150° претвори го во радијани.

Пример 5

Аголот од $\frac{\pi}{12}$ rad претвори го во степени.

Решение:

Со примена на формулата за $\varphi = \frac{\pi}{12}$, добиваме $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\pi}{12} = 15^\circ$.

Задача 2

Аголот од $\frac{4\pi}{3}$ rad претвори го во степени.

Пример 6

Аголот од 3,2 rad претвори го во степени.

Решение:

Со примена на формулата за $\varphi = 3,2$, добиваме $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi = \frac{180^\circ}{3,14} \cdot 3,2 = 183,44^\circ$.

Задача 3

Аголот од 29° претвори го радијани.

Запомни!

- Аглите се мерат во степени или радијани.
- 360° одговара на 2π радијани.
- Степените се попрактични во секојдневни контексти, додека радијаните почесто се применуваат во тригонометријата и при математички анализи.

Задачи за вежбање!

1. Претвори ги аглите во минути:

- а) $78^\circ 32' 50''$; б) $13^\circ 40'$; в) $12^\circ 13' 25''$.

2. Претвори ги аглите од степени во радијани:

- а) $\alpha = 225^\circ$; б) $\alpha = 315^\circ$; в) $\alpha = 210^\circ$; г) $\alpha = 75^\circ$.

3. Изрази ги во степени аглите што се дадени во радијани:

- а) $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ rad; б) $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ rad; в) $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ rad; г) $\varphi = 3,5$ rad.

5.2 ДЕФИНИРАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ

Потсети се!

- Дефинирај слични триаголници!
- Дефинирај размер и пропорција!

Нека е даден еден остар агол $\alpha = \angle XAY$ (цртеж 1) и нека на кракот AY избереме произволни точки $B, B_1, B_2, \dots$. Понатаму, нека од точките $B, B_1, B_2, \dots$ повлечеме нормали кон кракот AX , со што се добиваат правоаголни триаголници $ACB, AC_1B_1, AC_2B_2, \dots$. За сите овие триаголници заеднички агол е α , сите имаат по еден прав агол, што значи дека на сите триаголници сите три агли им се еднакви. Оттука следува дека сите триаголници се слични меѓу себе. Од сличноста на овие триаголници следува дека нивните соодветни страни се пропорционални, односно

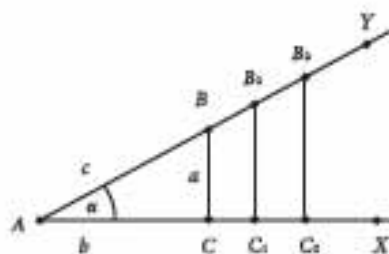
$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \dots \quad \text{и} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \dots$$

Оттука следува дека во сите правоаголни триаголници со остар агол α , односот на спротивната катета на тој агол и хипотенузата на тој триаголник има иста вредност $a : c$, каде што $a = BC, c = AB$. На идентичен начин се доаѓа до заклучокот дека во сите правоаголни триаголници со остар агол α , односот на налегнатата (соседна) катета на тој агол и хипотенузата на тој триаголник има иста вредност $b : c$, каде што $b = AC, c = AB$.

Запомни!

- **Синус** од еден остар агол во правоаголен триаголник претставува односот на спротивната катета на тој агол и хипотенузата.
- **Косинус** од еден остар агол во правоаголен триаголник претставува односот на налегнатата (соседна) катета на тој агол и хипотенузата.

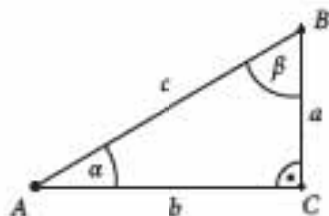
$$\sin \alpha = \frac{\text{спротивна катета}}{\text{хипотенуза}}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{налегната катета}}{\text{хипотенуза}}.$$



Цртеж 1

Ако е даден триаголник кој е стандардно означен како на цртеж 2, според дефиниција 1 имаме:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c}.$$



Цртеж 2

На ист начин како дефинирањето синус и косинус од некој агол, се дефинираат и функциите тангенс и котангенс од некој агол. Тука се користи фактот дека во сите правоаголни триаголници со остар агол α , односот на спротивната катета и налегнатата катета на тој триаголник има иста вредност. Аналогно, и односот на налегнатата и спротивната катета на аголот α во произволен правоаголен триаголник има иста вредност.

Запомни!

- **Тангенс** од еден остар агол во правоаголен триаголник претставува односот на спротивната и налегнатата катета на тој агол и се означува со $\operatorname{tg} \alpha$.
- **Котангенс** од еден остар агол во правоаголен триаголник претставува односот на налегнатата и спротивната катета на тој агол и се означува со $\operatorname{ctg} \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{спротивна катета}}{\text{налегната катета}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{налегната катета}}{\text{спротивна катета}}.$$

Запомни!

- **Основни тригонометриски функции** се $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.
- За кој било остар агол α , вредностите на основните тригонометриски функции се добиваат како количник на должините на страните во еден правоаголен триаголник, кои се позитивни броеви, па и самите се позитивни.
- Областа во математиката која ги изучува тригонометриските функции се нарекува **тригонометрија**.
- Името тригонометрија потекнува од грчките зборови *trigonum*, што значи триаголник, и *metria*, што значи мера.

Пример 1

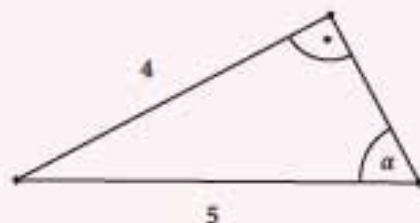
Според дефиниција одреди ги вредностите на тригонометриските функции од аголот α за триаголникот кој е даден на цртежот 3.

Решение:

Од цртежот добиваме дека должината на едната катета на правоаголникот триаголник е $a = 4$, а должината на хипотенузата е $c = 5$. Нека со b ја означиме должината на непознатата катета на триаголникот. Со примена на Питагорова теорема имаме $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ и оттука $b = \sqrt{9} = 3$.

Користејќи ги дефинициите на тригонометриските функции, добиваме

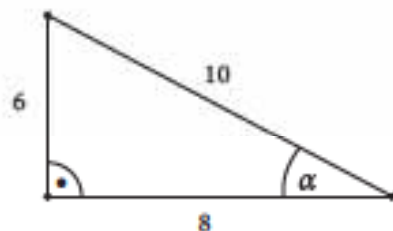
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}.$$



Цртеж 3

Задача 1

Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од аголот α за триаголникот кој е даден на цртежот 4.



Цртеж 4

Пример 2

Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од двата остри агли на правоаголникот триаголник на цртеж 5, ако односот на должините на неговите катети е 8:15.

Решение:

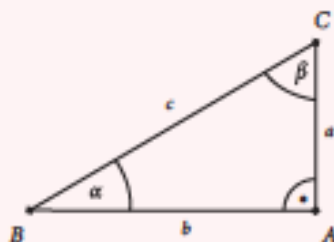
Од условот на задачата за односот на должините на катетите имаме $a:b=8:15$. Оттука добиваме дека $a = 8k$, $b = 15k$. Понатаму, заменувајќи ги добиените вредности на a и b во равенството $c^2 = a^2 + b^2$, добиваме:

$$c^2 = a^2 + b^2 = (8k)^2 + (15k)^2 = 64k^2 + 225k^2 = 289k^2, \text{ т.е. } c = \sqrt{289k^2} = 17k.$$

Од дефиницијата на тригонометриските функции имаме

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}.$$

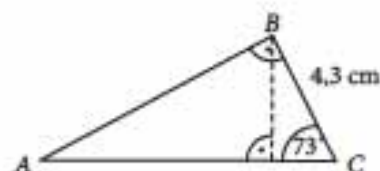
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{8k}{15k} = \frac{8}{15}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{15k}{8k} = \frac{15}{8}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{15k}{8k} = \frac{15}{8}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} = \frac{8k}{15k} = \frac{8}{15}.$$



Цртеж 5

Задача 2

Да се најде плоштина и периметар на дадениот триаголник.



Работа со агли на калкулатор

Калкулаторите работат во различни аголни режими:

- DEG – степени
- RAD – радијани

Ист број што се внесува се толкува различно во зависност од избраниот режим.

1. Работа во DEG (степени)

- 1) Постави го калкулаторот во DEG режим.
- 2) Секој агол што го внесуваш се смета дека е во степени.
- 3) Резултатите се пресметуваат како агли во степени.

Режим: DEG

Внес: 60

 $\sin(60) = 0.866$

(аголот е во степени)

2. Работа во RAD (радијани)

- 1) Постави го калкулаторот во RAD режим.
- 2) Секој агол што го внесуваш се смета дека е во радијани.
- 3) Резултатите се пресметуваат како агли во радијани.

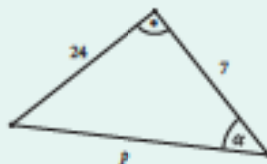
Режим: RAD

Внес: $\pi/3$ $\sin(\pi/3) = 0.866$

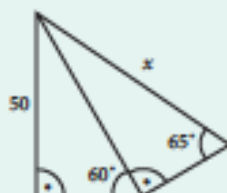
(аголот е во радијани)

Задачи за вежбање!

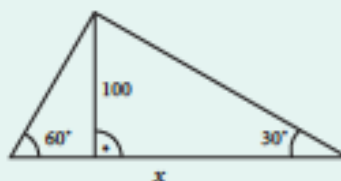
1. Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од аглите α и β на правоаголниот триаголник ако a и b се катети, а c е хипотенуза на триаголникот:
 - а) $a = 3$, $b = 4$;
 - б) $b = 6$, $c = 10$;
 - в) $a = 12$, $c = 37$;
 - г) $b = 15$, $c = 17$.
2. Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од остар агол на правоаголниот триаголник ако е познато дека
 - а) $a : c = 5 : 13$;
 - б) $b : c = 8 : 17$;
 - в) $a : c = 7 : 25$;
 - г) $a : b = 7 : 24$.
3. Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од аголот α на правоаголниот триаголник на цртежот.

4. Да се определи вредноста на x :

а)



б)

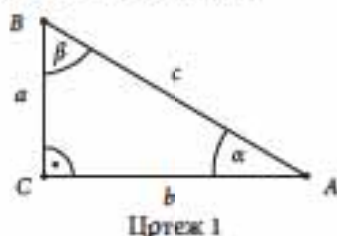


5.3 ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД КОМПЛЕМЕНТНИ АГЛИ

Потсети се!

- Што се комплементни агли?
- Наведи пример на два пара комплементни агли изразени во степени и во радијани.
- Колку изнесува збирот на остриите агли во еден триаголник?

Да го разгледаме триаголникот ABC даден на цртежот 1.



Од триаголникот може да се заклучи следното:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} = \cos \beta, & \cos \alpha &= \frac{b}{c} = \sin \beta, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta, & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta.\end{aligned}$$

Ако во овие равенства се замени $\beta = 90^\circ - \alpha$, тогаш равенствата го добиваат следниот облик:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha, & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

Ако аголот α е зададен во радијани, тогаш $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, па горните равенства за врска помеѓу комплементните агли може да се запишат како

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{tg} \alpha,\end{aligned}$$

Запомни!

Секоја тригонометриска функција од даден остар агол е еднаква со соодветната кофункција на неговиот комплементен агол.

Кофункции се парови тригонометриски функции чии вредности за еден остар агол се еднакви на вредностите на друга функција за неговиот комплементен агол. Така, синус и косинус, како и тангенс и котангенс, претставуваат парови кофункции.

Пример 1

Одреди го остриот агол α ако

а) $\sin(\alpha - 12^\circ) = \sin 28^\circ$; б) $\sin \alpha = \cos 38^\circ$; в) $\operatorname{ctg}(\alpha + 28^\circ) = \operatorname{tg} 21^\circ 40'$.

Решение:

а) Од $\sin(\alpha - 12^\circ) = \sin 28^\circ$ следува $\alpha - 12^\circ = 28^\circ$ и на крај се добива $\alpha = 40^\circ$.

б) Тргувајќи од $\sin \alpha = \cos 38^\circ$, со примена на $\cos 38^\circ = \sin(90^\circ - 38^\circ) = \sin 52^\circ$, се добива $\sin \alpha = \sin 52^\circ$. Оттука, $\alpha = 52^\circ$.

в) Ако се замени $\operatorname{tg} 21^\circ 40' = \operatorname{ctg}(90^\circ - 21^\circ 40') = \operatorname{ctg} 68^\circ 20'$, Оттука се добива дека $\alpha + 28^\circ = 68^\circ 20'$, т.е. $\alpha = 40^\circ 20'$.

Задача 1

Одреди го остриот агол α ако

а) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 49^\circ$; б) $\cos(\alpha - 25^\circ) = \sin 64^\circ 10'$; в) $\operatorname{tg}(\alpha + 15^\circ) = \operatorname{ctg}(2\alpha - 8^\circ)$.

Пример 2

Одреди го остриот агол α , изразен во радијани, ако

а) $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{4})$; б) $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4})$.

Решение:

а) Најпрво, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$. Со замена во $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{4})$, се добива

$\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{4})$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

б) Слично како претходно, $\operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - (2\alpha - \frac{\pi}{4})) = \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$. Со замена на последниот резултат во $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4})$, добиваме $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$.

Оттука, $\alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} - 2\alpha$, т.е. $3\alpha = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$. Добиваме, $\alpha = \frac{11\pi}{36}$.

Задача 2

Одреди го остриот агол α , изразен во радијани, ако

а) $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{6})$; б) $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{8}) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{6})$.

Пример 3

Упрости го изразот:

а) $2\sin 42^\circ - 3\cos 48^\circ$; б) $\frac{4\operatorname{tg} 58^\circ + 6\operatorname{ctg} 32^\circ}{-2\operatorname{ctg} 32^\circ + 3\operatorname{tg} 58^\circ}$.

Решение:

а) $2\sin 42^\circ - 3\cos 48^\circ = 2\sin 42^\circ - 3\sin(90^\circ - 48^\circ) = 2\sin 42^\circ - 3\sin 42^\circ = -\sin 42^\circ$.

$$б) \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{ctg} 32^{\circ}}{-2 \operatorname{ctg} 32^{\circ} + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{tg}(90^{\circ} - 32^{\circ})}{-2 \operatorname{tg}(90^{\circ} - 32^{\circ}) + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{tg} 58^{\circ}}{-2 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{10 \operatorname{tg} 58^{\circ}}{\operatorname{tg} 58^{\circ}} = 10.$$

Пример 4

Упрости го изразот:
$$\frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \cos(\frac{\pi}{6})}{2 \cos(\frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})}.$$

Решение:

Воочи дека аглиите се дадени во радијани, па затоа ќе ги користиме соодветните врски помеѓу $\sin \alpha$ и $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$. Добиваме:

$$\frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \cos(\frac{\pi}{6})}{2 \cos(\frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{2 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \sin(\frac{\pi}{3})}{2 \sin(\frac{\pi}{3}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{-2 \sin(\frac{\pi}{3})}{9 \sin(\frac{\pi}{3})} = -\frac{2}{9}.$$

Задача 3

Упрости ги изразите:

$$\begin{aligned} \text{а) } 2 \operatorname{ctg} 59^{\circ} - 6 \operatorname{ctg} 31^{\circ}; \quad \text{б) } \frac{7 \sin 18^{\circ} - 3 \cos 72^{\circ}}{-\cos 72^{\circ} + 5 \sin 18^{\circ}}; \quad \text{в) } \frac{2 \operatorname{tg} 65^{\circ} - 7 \operatorname{ctg} 25^{\circ}}{2 \operatorname{tg} 65^{\circ} + 3 \operatorname{ctg} 25^{\circ}}; \quad \text{г) } \frac{-5 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{12}) + 9 \operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{12})}{2 \operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{12}) - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{12})} \end{aligned}$$

Задачи за вежбање!1. Одреди го остриот агол α ако

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin(\alpha - 14^{\circ}) &= \cos 29^{\circ} 20'; & \text{б) } \cos(27^{\circ} - \alpha) &= \sin 61^{\circ} 50'; \\ \text{в) } \operatorname{tg}(\alpha + 30^{\circ}) &= \operatorname{ctg} 65^{\circ} 40'; & \text{г) } \operatorname{ctg}(\alpha - 18^{\circ}) &= \operatorname{tg} 52^{\circ} 38'. \end{aligned}$$

2. Одреди го остриот агол α , во радијани, ако

$$\text{а) } \sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{5}); \quad \text{б) } \operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{10}) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - 3\alpha); \quad \text{в) } \sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}).$$

3. Упрости го изразот:

$$\begin{aligned} \text{а) } 5 \cos 41^{\circ} - 2 \sin 49^{\circ} - \sin 49^{\circ} + 3 \cos 41^{\circ}; & \quad \text{б) } 4 \sin 32^{\circ} - 3 \cos 58^{\circ} + 2 \sin 32^{\circ}. \\ \text{в) } \frac{4 \operatorname{tg} 35^{\circ} + 6 \operatorname{ctg} 55^{\circ}}{-3 \operatorname{ctg} 55^{\circ} + 2 \operatorname{tg} 35^{\circ}}; & \quad \text{г) } 3 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}) - 4 \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{8}) + 5 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}) + \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{8}). \end{aligned}$$

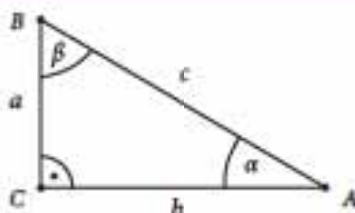
4. Упрости ги изразите ако се знае дека $\alpha + \beta = 90^{\circ}$.

$$\text{а) } \cos \beta + \sin \alpha; \quad \text{б) } \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta \quad \text{в) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta \quad \text{г) } \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta$$

5.4 ВРСКА МЕЃУ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ИСТ АГОЛ

Потсети се!

- Како гласи дефиницијата за тригонометриски функции од остар агол во правоаголен триаголник преку односите на страните на триаголникот?
- Како гласи Питагоровата теорема?



Ако равенството $a^2 + b^2 = c^2$, кое е резултат на Питагоровата теорема, го поделиме со c^2 , добиваме:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \quad \text{т.е.} \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Во ова равенство заменуваме $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ и $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ и добиваме $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Понатаму, $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, т.е. се добива дека $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

На сличен начин, $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$, т.е. се добива дека $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Од последните две равенства се добива дека $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Запомни!

Основните тригонометриски равенства или идентитети за произволен остар агол α се:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Една од примените на овие тригонометриски идентитети е да се определат вредностите на останатите тригонометриски функции ако е дадена вредноста на една тригонометриска функција.

Пример 1

Опреди ги вредностите на останатите тригонометриски функции ако е дадено дека α е остар агол и $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Решение:

Во случај кога е дадена вредноста на $\sin \alpha$ или $\cos \alpha$, се тргнува од идентитетот $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, па во него ја заменуваме вредноста на соодветната кофункција. Во нашиот случај

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1, \text{ па } \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}. \text{ Оттука, } \sin \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Да воочите дека равенството $\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$ е задоволено и за $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, но вредноста на $\sin \alpha$ е позитивна за секој остар агол α .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Задача 1

Ако е дадено дека α е остар агол и $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, определи ги вредностите на останатите тригонометриски функции.

Пример 2

Опреди ги вредностите на останатите тригонометриски функции ако е дадено дека $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$, каде α е остар агол.

Решение:

Постојат два начина за решавање на овој вид задачи, и тоа:

Прв начин

Тргнувајќи од равенството $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{12}$, се добива $\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \cos \alpha$. Ако последното равенство го замениме во равенството $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, се добива $\left(\frac{5}{12} \cdot \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$.

Оттука, $\frac{25}{144} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, па $\left(\frac{25}{144} + 1\right) \cos^2 \alpha = 1$ и $\frac{169}{144} \cos^2 \alpha = 1$.

$$\text{Сера, } \cos^2 \alpha = \frac{1}{\frac{169}{144}} = \frac{144}{169}, \text{ а } \cos \alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

Заменувајќи ја вредноста за $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ во равенството $\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \cos \alpha$, добиваме дека

$$\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13} = \frac{5}{13}.$$

Сера, знаејќи дека $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, вредноста на $\operatorname{ctg} \alpha$ може да се добие како реципрочна

$$\text{вредност на } \operatorname{tg} \alpha, \text{ т.е. } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}.$$

Втор начин

Ако го поделиме равенството $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ од двете страни со $\cos^2 \alpha$, имаме

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ т.е. } \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \text{ Оттука, } \cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}, \text{ т.е. } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}},$$

бидејќи $\cos \alpha$ е позитивен број за секој остар агол α . Со замена на вредноста за $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$

$$\text{добиваме } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{144} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25+144}{144}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{169}{144}}} = \frac{12}{13}.$$

Добиената вредност за $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, ја заменуваме во $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и добиваме $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

Ако е дадена вредноста на $\operatorname{ctg} \alpha$, тогаш равенството $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ треба да се подели со $\sin^2 \alpha$ и се

$$\text{добива } \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ т.е. } 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \text{ Оттука, } \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \text{ т.е. } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}},$$

бидејќи $\sin \alpha$ е позитивен број за секој остар агол α .

Запомни!

За секој остар агол α , точни се равенствата $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$ и $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$.

Задача 2

Опреди ги вредностите на останатите тригонометриски функции ако е дадено дека α е остар агол

и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$.

Задачи за вежбање!

- Опреди ги вредностите на останатите тригонометриски функции ако α е остар агол и дадено е дека:

а) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$; б) $\cos \alpha = \frac{20}{29}$.

- Опреди ги вредностите на останатите тригонометриски функции ако α е остар агол и дадено е дека:

а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{40}$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$.

- Опреди ги вредностите на останатите тригонометриски функции ако α е остар агол и дадено е дека:

а) $\sin \alpha = \frac{2a}{a^2 + 1}$; б) $\cos \alpha = \frac{10a}{a^2 + 25}$.

- Да се пресмета вредноста на изразот $4\operatorname{tg} \alpha + 5\cos \alpha$ ако е дадено дека α е остар агол и $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

5.5 УПРОСТУВАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ИЗРАЗИ

Потсети се!

- Дефиниција на тригонометриски функции од комплементни агли.
- Напиши ги основните тригонометриски идентитети.

Запомни!

Една од најважните примени на основните тригонометриски идентитети е *упростување на тригонометриски изрази*.

За упростување тригонометриски израз, следи ги чекорите:

1. **Дропки и НЗС.** Ако изразот содржи повеќе дропки, именителите се факторизираат и се определува најмалиот заеднички содржател (НЗС). Изразот се запишува како една дробка.
2. **Заеднички множител.** Кај изрази со повеќе членови, се проверува можност за извлекување заеднички множител пред заграда и соодветно групирање.
3. **Основни тригонометриски идентитети.** Се применуваат идентитетите:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

4. **Замена на tg и ctg.** Изразите $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ се заменуваат со $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
 - Ако во изразот има два или повеќе члена, пробај да извлечеш заеднички множител пред заграда.
 - Користи ги идентитетите $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.
 - Ако во изразот има $\operatorname{tg} \alpha$ и/или $\operatorname{ctg} \alpha$, разложи според идентитетите $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Пример 1

Упрости го изразот:

$$\text{а) } 4 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha; \quad \text{б) } (1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha); \quad \text{в) } \frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha}.$$

Решение:

- $4 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 4 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4 - 1 = 3;$
- $(1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha;$
- Бидејќи $1 - \sin \alpha$ и $1 + \sin \alpha$ немаат заеднички делител, следува дека
НЗС = $(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, па оттука добиваме

$$\frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} = \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}.$$

Задача 1

Да се упрости изразот:

$$\text{а) } 7 - 7 \cos^2 \alpha \quad \text{б) } (1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha); \quad \text{в) } \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 - \cos \alpha}.$$

Пример 2

Упрости го изразот:

$$\text{а) } \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \text{б) } \sqrt{1 - \sin \alpha} \cdot \sqrt{1 + \sin \alpha}; \quad \text{в) } \frac{(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha}.$$

Решение:

а) Ако се сведат двете дропки на ист именител, се добива:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha - (1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{б) } \sqrt{1 - \sin \alpha} \cdot \sqrt{1 + \sin \alpha} = \sqrt{(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos^2 \alpha} = \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha} &= \frac{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha + 1}{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{2 + 2 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{2(1 + \sin \alpha)}{2 \sin \alpha(1 + \sin \alpha)} \\ &= \frac{1}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Запомни!

- Постојат два начини на докажување дека едно равенство е точно:
- Прв начин е кога двете страни на равенството се трансформираат сè додека не се доведат до еден ист израз.
- Втор начин е кога ќе се тргне од едната страна и со одредени трансформации ќе се добие другата страна (Најчесто се почнува од таа страна што е посложена).

Пример 3

Докажи ја точноста на равенството:

$$\text{a) } \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha; \quad \text{б) } \frac{\sin \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}; \quad \text{в) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

Решение:

а) **Прв начин:**

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha. \quad (\text{се бара НСЗ на дропките од левата страна на равенството})$$

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha \quad (\text{се извлекува заеднички множител пред заграда})$$

$$\frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad (\text{се применува } 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha)$$

$$\frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

Добивме дека левата страна е еднаква на десната $\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$. Со тоа е докажана точноста на равенството.

Втор начин:

Нека со $D = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ја означиме десната страна на равенството, а со $L = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha$ ја означиме левата страна. Ќе тргнеме од левата страна и сакаме да ја доведеме до облик како десната страна.

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = D \end{aligned}$$

Значи, успеавме левата страна, со примена на тригонометриските идентитети, да ја доведеме до десната страна и со тоа ја докажавме точноста на равенството.

б) Тргуваме од левата страна, најпрвин ги применуваме идентитетите $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Со тоа левата страна се сведува на:

$$L = \frac{\sin \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}.$$

Понатаму, со сведување на двојните дропки на единечни и примена на идентитетот $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, добиваме

$$L = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = D.$$

Со тоа точноста на равенството е докажана.

- в) Во овој случај сложеноста на двете страни е иста, па сејдно е од која страна ќе се тргне. Во овој случај, од која било страна и да тргнеме, најлесно ќе стигнеме до другата страна со примена на идентитетот $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$. Така, ако тргнеме од левата страна и од претходниот идентитет, го изразиме $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$, добиваме:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{1 + \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

Задача 2

Докажи ја точноста на равенството:

$$\text{а) } (1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha}; \quad \text{б) } \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Задача 3

Докажи го идентитетот $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = 2 \operatorname{ctg} \alpha$.

Задачи за вежбање!

1. Упрости го изразот:

$$\text{а) } \sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha; \quad \text{б) } (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha; \quad \text{в) } \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

2. Упрости го изразот:

$$\text{а) } \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\sin^2 \alpha}; \quad \text{б) } \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha}; \quad \text{в) } \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{3 \sin \alpha - 1}{1 - \sin \alpha} - \frac{2}{1 + \sin \alpha}.$$

3. Докажи ја точноста на равенството:

$$\text{а) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0;$$

$$\text{б) } \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha, \quad \sin \alpha \neq 0.$$

5.6 ПРИМЕНА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

Потсети се!

- Скицирај правоаголник, трапез, триаголник и правилно означи ги нивните елементи.
- Дефиниција на тригонометриските функции од остар агол.

Запомни!

- Аголот под кој се гледа телото кога предметот е над хоризонтот се нарекува **агол на елевација**.
- Аголот под кој се гледа телото кога предметот е под хоризонтот се нарекува **агол на депресија**.



Пример 1

Пресметај го периметарот на правоаголник со страна $a = 14$ cm ако аголот меѓу таа страна и дијагоналата е $\alpha = 28^\circ 40'$.

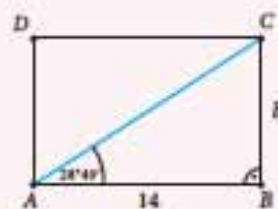
Решение:

Од условите на задачата позната е должината на едната страна на правоаголникот, а за да го определиме неговиот периметар, треба да ја најдеме должината b на другата страна.

Од цртеж 1 е јасно дека треба да избереме тригонометриска функција во која се користи количникот помеѓу спротивната и налегнатата катета за да ги искористиме дадениот агол и страната $a = 14$ за пресметувањето на непознатата должина b . Јасно е дека таа тригонометриска функција е тангенс, т.е. $\operatorname{tg} 28^\circ 40' = \frac{b}{14}$. Оттука, $b = 14 \cdot \operatorname{tg} 28,67^\circ = 14 \cdot 0,547 = 7,7$ cm. (Вредноста на $\operatorname{tg} 28^\circ 40'$ се пресметува на калкулатор.)

За периметарот на правоаголникот добиваме

$$L = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 7,7 = 43,4 \text{ cm}$$



Цртеж 1

Задача 1

Пресметај ги периметарот и висината на рамнокрак триаголник чиј крак изнесува 40 cm и аголот при врвот на триаголникот е 44° .

Пример 2

Рамнокрак трапез има основи 18 cm и 13,4 cm. Аголот меѓу долната основа и кракот е $\frac{\pi}{3}$.

Одреди ги должината на кракот и висината на трапезот.

Решение:

На цртеж 2 е даден рамнокракиот трапез.

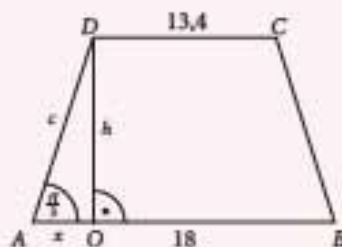
Најпрво ќе го пресметаме делот x кој е карактеристичен за

рамнокрак трапез, $x = \frac{18-13,4}{2} = \frac{4,6}{2} = 2,3$ cm. За определување на непознатата должина c на кракот и непознатата висина

h на трапезот, го разгледуваме триаголникот $\triangle AOD$. Од него наоѓаме:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{x}{c} = \frac{2,3}{c}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{x} = \frac{h}{2,3}.$$

$$\text{Оттука, } c = \frac{2,3}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{2,3}{0,5} = 4,6 \text{ cm, а } h = 2,3 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,3 \cdot \sqrt{3} \approx 2,3 \cdot 1,73 = 3,979.$$



Цртеж 2

Пример 3

Основите на рамнокрак трапез се 18 cm и 13,4 cm, а кракот е 5 cm. Одреди ги аглите на трапезот.

Решение:

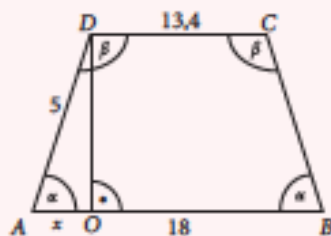
Слично како во претходниот пример, најпрво ќе го пресметаме

делот x според цртеж 3. Добиваме: $x = \frac{18-13,4}{2} = \frac{4,6}{2} = 2,3$ cm.

Од триаголникот $\triangle AOD$, со помош на тригонометриската функција косинус ќе го пресметаме аголот α . Имено,

$$\cos \alpha = \frac{2,3}{5} = 0,46, \text{ од каде што следува } \alpha = \cos^{-1} 0,46 = 62,61^\circ$$

(вредноста на инверзната функција на функцијата косинус се пресметува на калкулатор). Користејќи го фактот дека спротивните агли во рамнокрак трапез се еднакви и дека збирот на внатрешните агли во секој четириаголник е еднаков на 360° , имаме $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, па со замена на вредноста на аголот α добиваме $2 \cdot 62,61^\circ + 2\beta = 360^\circ$. Оттука следува дека $2\beta = 360^\circ - 125,22^\circ$, т.е. $\beta = 234,78^\circ : 2 = 117,39^\circ$.



Цртеж 3

Задача 2

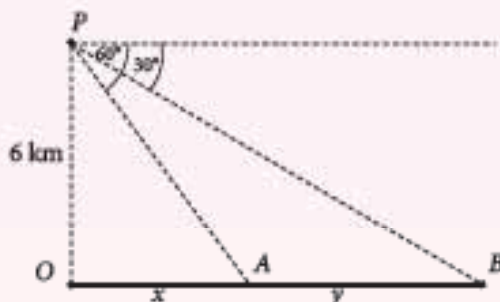
Пресметај го периметарот на правоаголник чија дијагонала е 15 cm и која со поголемата страна зафаќа агол од 36° .

Пример 4

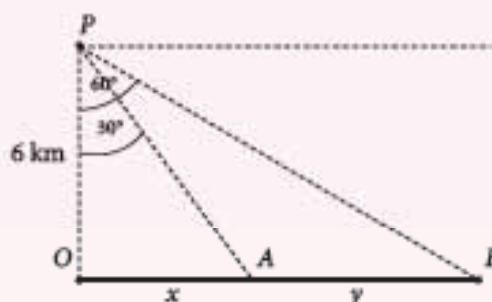
Авион лета на надморска височина од 6 km над морето и забележува два брода. Аглите на депресија од авионот кон двата брода A и B се 60° и 30° , соодветно. Пресметај го растојанието помеѓу двата брода.

Решение:

Нека авионот се наоѓа во точка P и точката вертикално под него ја означиме со O. Бродовите се во точките A и B на морската површина. (цртеж 6)



Цртеж 6



Цртеж 7

Висината на која се наоѓа авионот е означена со PO, а од аглите на депресија од авионот до бродовите се добива дека $\angle OPA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ и $\angle OPB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Нека со x го означиме растојанието од точката O до точката A, т.е. $x = \overline{OA}$ и со y растојанието од точката A до точката B, т.е. $y = \overline{AB}$ (цртеж 7).

Разгледувајќи ги триаголникот $\triangle POA$ и аголот $\angle OPA = 30^\circ$, имаме $\tan 30^\circ = \frac{x}{6}$. Оттука следува дека $x = 6 \cdot \tan 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6 \cdot 0,577 = 3,46 \text{ km}$.

Слично, од триаголникот $\triangle POB$, аголот $\angle OPB = 60^\circ$ и страната $\overline{OB} = x + y$, имаме $\tan 60^\circ = \frac{x+y}{6}$. Оттука следува дека $x + y = 6 \cdot \tan 60^\circ = 6 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 1,732 = 10,39 \text{ km}$.

Оттука добиваме дека растојанието помеѓу бродовите A и B изнесува $y = 10,39 - 3,46 = 6,93 \text{ km}$.

Задача 3

Едно лице гледа дрво што се наоѓа од спротивната страна на брегот на една река под агол од 48° . Потоа лицето се движи 10 m по брегот и застанува. Тогаш го гледа истото дрво под агол од 36° . Одреди ја ширината на реката.

Пример 5

Човек висок 1,8 m стои на растојание 4,5 m од улична светилка и неговата сенка е долга 2,8 m. Да се определи висината на уличната светилка.

Решение:

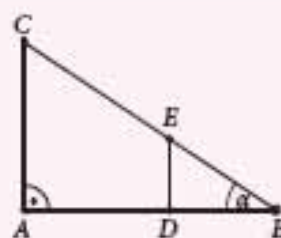
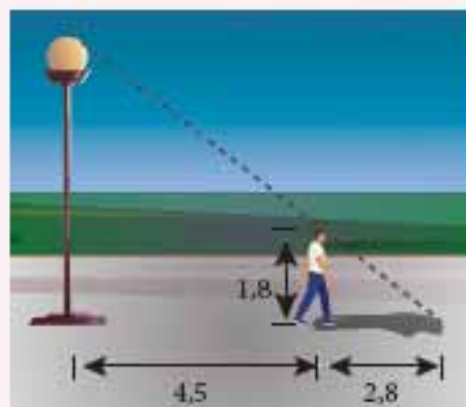
Од сликата се добива цртежот 8. Нека со $x = \overline{DB} = 2,8$ m

ја означиме сенката, а со $y = \overline{DE} = 1,8$ m ја означиме висината на човекот. Тогаш аголот α ќе го добиеме од правоаголниот триаголник DBE , со $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,8}{2,8} = 0,643$, односно $\alpha = \operatorname{tg}^{-1} 0,643 = 32,74^\circ$.

Од правоаголниот триаголник ABC со катети $\overline{AC}$ и $\overline{AB} = 4,5 + 2,8 = 7,3$ m, добиваме

$\operatorname{tg} 32,74^\circ = \frac{\overline{AC}}{7,3}$, односно $\overline{AC} = 7,3 \cdot \operatorname{tg} 32,74^\circ \approx 4,7$ m.

Значи, висината на уличната светилка е 4,7 m.



Цртеж 8

Задача 4

Планинар се искачува по патека долга 2 km, која со хоризонталното подножје зафаќа агол од 12° . На која висина ќе биде планинарот кога ќе стигне на крајот од патеката? Направи скица.

Задачи за вежбање!

1. На која висина допираат пожарникарски скали долги 25 m ако се наведнати под агол од 70° ?
2. Даден е рамнокрак трапез чија поголема основа е 42 cm, а аголот при таа основа е $47^\circ 20'$, и крак $c = 25$ cm. Пресметај ги другата основа и висината на трапезот.
3. На која височина се искачил патникот кој одел по прав пат долг 2 km под агол од $4^\circ 10'$?
4. Од врвот на еден светилник кој е висок 150 m се гледа брод по агол од 9° . Колкаво е растојанието од светилникот до бродот?
5. Камера е монтирана така што гледа еден објект под агол на депресија од 35° . Објектот кон кој е насочена камерата се наоѓа на хоризонтално растојание од 20 m. Да се пресмета висинската разлика на камерата во однос на објектот.
6. Аголот на депресија од врвот на една зграда со висина 56 метри кон автомобил паркиран на земјата е 30° . За колку метри треба автомобилот да се оддалечи од зградата за новиот агол на депресија да биде 15° ?

5.7 АКСИОМИ ЗА ПРОСТОРНА ГЕОМЕТРИЈА

Во просторната геометрија се изучуваат заемните односи меѓу основните геометриски поими: точка, права и рамнина. Нивните својства и заемни положби се утврдуваат врз основа на аксиомите на просторната геометрија, кои претставуваат почетни тврдења што не се докажуваат, туку се прифаќаат како вистинити. Врз оваа аксиоматска основа се разгледуваат можните заемни односи на точка и права, две прави, права и рамнина, како и две рамнини, што овозможува систематско и логички доследно проучување на геометријата во просторот. Аксиомите на просторната геометрија и заемните односи меѓу точка, права и рамнина имаат широка практична примена. Тие се основа за решавање геометриски задачи, за докажување теореми и за правилно толкување на просторни конструкции. Овие поими се применуваат во архитектурата, градежништвото, техничкото цртање, инженерството и физиката, каде што е неопходно прецизно одредување на положбата и ориентацијата на објекти во просторот.

Геометријата е гранка од математиката која ги проучува формата, големината и положбата на објектите во рамнина и во простор. Потеклото на геометријата се поврзува со практичните потреби на човекот, како што се мерење, градење, ориентација во простор и друго.

Во досегашното образование се изучувани многу поими од геометрија како: точка, права, триаголник, коцка, 3Д-форма и многу други. Некои од нив се дефинираат со помош на други познати поими, а некои не се дефинираат. Оние поими што не се дефинираат, туку се објаснуваат со наведување примери се викаат **основни поими** и со нивна помош се дефинираат останатите поими.

Запомни!

- Поимите што не се дефинираат се нарекуваат **основни поими**.
- Поимите што се дефинираат со помош на основните поими се викаат **изведени** или **дефинирани поими**.
- Во геометријата основни поими се **точка, права и рамнина**.

Пример 1

Агол е 2Д-форма составена од две полуправи со една заедничка точка. Значи, поимот агол е целосно објаснет со реченица во која логички се поврзани поимите точка, полуправа и 2Д-форма.

Запомни!

- **Дефиниција** е јасно и прецизно објаснување на еден поим преку која се согледува неговата содржина преку други познати поими.
- **2Д-форма** е множество од точки во рамнина кое има точно определени положба, форма и големина.
- **Основни тврдења** или **аксиоми** се тврдењата што ги прифаќаме за точни без доказ.
- **Изведени тврдења** или **теореме** се нарекуваат сите останати тврдења што се докажуваат.

Теоремата може да биде искажана во форма на **импликација (условна форма)** или во **категорична форма**. На пример: Ако четириаголникот е квадрат, тогаш неговите страни имаат иста должина. Ова е теорема искажана во форма на импликација. Оваа теорема во категорична форма гласи: Сите страни на квадратот имаат иста должина.

Во секоја теорема мора да има:

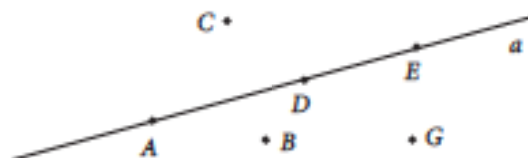
- услови под кои се разгледува објектот (тие услови се нарекуваат **претпоставки**);
- тврдење за тие објекти (тоа тврдење се нарекува **заклучок** на теоремата).

Во продолжение следуваат некои поважни аксиоми и теореме, при што аксиомите ќе бидат означувани со $A_1, A_2, A_3, \dots$, а теоремите со $T_1, T_2, T_3, \dots$

A_1 : На секоја права лежат бесконечно многу точки, а има и бесконечно многу точки што не лежат на таа права.

A_2 : Низ кои било две различни точки минува една и само една права.

Точката A велиме дека припаѓа или лежи на правата a , или дека правата a минува низ точката A , и запишуваме $A \in a$. Исто така, за точката B велиме дека не припаѓа или не лежи на правата a , или дека правата a не минува низ точката B , и запишуваме $B \notin a$ (цртеж 1).



Цртеж 1

Запомни!

Точките што лежат на иста права се викаат **колинеарни точки**.

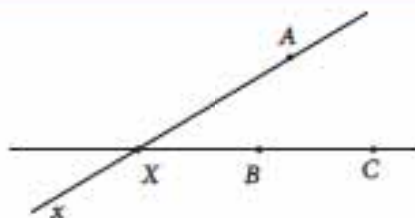
Сега ќе бидат прикажани неколку теореме што следуваат од дадените аксиоми.

T_1 : Во просторот постојат барем три неколинеарни точки.

Доказ: Нека е дадена права p која минува низ две различни точки A и B . Според аксиомата A_1 постои точка C што не лежи на правата a . Значи, точките A , B и C не се колинеарни.

T_2 : Низ секоја точка минуваат бесконечно многу прави.

Доказ: Нека A е произволна точка, а B и C се точки така што точките A , B и C не се колинеарни. Според аксиомата A_2 , низ точките B и C минува единствена права, на која според аксиомата A_1 лежат бесконечно многу точки. Низ секоја точка X од правата BC и низ точката A (цртеж 2) поминува единствена права. Бидејќи на правата BC лежат бесконечно многу точки, значи дека низ точката A ќе минуваат бесконечно многу прави.



Цртеж 2

Пример 2

Колку прави минуваат низ четири точки A , B , C и D ?

Решение:

Од аксиомата A_2 следува дека низ две различни точки минува точно една права. Бројот на прави низ точките A , B , C и D зависи од нивната меѓусебна положба, па затоа ќе разгледаме неколку случаи.

Сите четири точки се колинеарни:

Тогаш постои точно една права која минува низ нив.

Три точки се колинеарни, а четвртата не лежи на таа права:

Трите колинеарни точки определуваат една права. Четвртата точка со секоја од тие три точки определува по една нова права. Вкупниот број на прави е $1 + 3 = 4$.

Било кои три точки не се колинеарни:

Секои две точки определуваат нова права. Вкупниот број на прави е $\binom{4}{2} = 6$ прави. Овој

број на прави се добива на следниот начин: Од множеството од 4 точки избереме произволно подмножество од 2 точки и низ нив повлекуваме една права. Бројот на такви избори на

подмножество со два елементи од множество со 4 елементи е $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$, колку што е и бројот на различни прави.

Можеме да заклучиме дека низ четири точки може да минуваат една, четири или шест различни прави, зависно од местоположбата на точките.

Пример 3

Нека A е произволно дадена точка. Покажи дека постојат точки B и C , такви што точките A , B и C не се колинеарни.

Решение:

Нека B е точка различна од A . Тогаш, според аксиомата A_2 , низ точките A и B минува една и само една права a . Според аксиомата A_1 , постојат точки што не лежат на правата a , па нека C е една таква точка (цртеж 3). Значи, точките A , B и C не се колинеарни.



Цртеж 3

Задача 1

Колку прави определуваат точките A, B, C, D и E ако три од нив се колинеарни?

Задача 2

Покажи дека ако во рамнина се дадени n точки, тогаш бројот на определени прави е најмногу $\binom{n}{2}$. Кога се постигнува еднаквост?

Со следните аксиоми се определува меѓусебната положба на точка и рамнина.

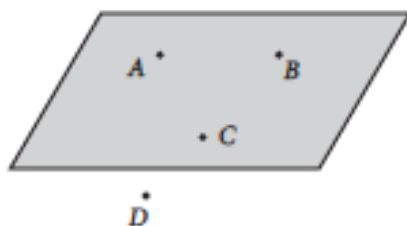
A_3 : На секоја рамнина лежат бесконечно многу точки, а постојат и точки што не припаѓаат на истата рамнина.

A_4 : Низ три неколинеарни точки минува една и само една рамнина.

Во продолжение, ќе ја покажеме точноста на следната теорема.

T_2 : Постојат барем четири точки во просторот што не лежат во иста рамнина.

Доказ: Според теоремата T_1 , во просторот постојат барем три неколинеарни точки. Нека тоа се точките A, B и C . Според аксиомата A_4 , тие определуваат единствена рамнина. Според аксиомата A_3 , постојат точки што не лежат на таа рамнина. Нека D е една таква точка. Тогаш точките A, B, C и D не лежат во иста рамнина.



Цртеж 4

Запомни!

Компланарни точки се точките што лежат на една иста рамнина.

Пример 4

Покажи дека низ дадена права p и точка $A \notin p$ поминува точно една рамнина.

Доказ: На правата p постојат барем две различни точки B и C . Точката A не лежи на правата p , па точките A, B и C не се колинеарни. Според аксиомата A_4 , низ овие три точки минува единствена рамнина.

Пример 5

Колку различни рамнини минуваат низ четири точки A, B, C и D ?

Решение:

Одговорот на ова прашање зависи од меѓусебната положба на точките. Од аксиомата A_4 следува дека низ три неколинеарни точки минува една рамнина. Ќе ги разгледуваме сите можни случаи за положбата на четирите точки.

Сите четири точки не лежат во иста рамнина (барем една точка е „надвор“ од рамнината што ја определуваат другите три):

Тогаш од 4 точки можеме да избереме 4 различни тројки. Секоја тројка дава различна рамнина. Значи, низ 4 точки минуваат 4 рамнини.

Четирите точки лежат во иста рамнина, но не се сите колинеарни

Тогаш кои било три точки лежат во истата рамнина, па сите можни рамнини се совпаѓаат, т.е. низ четирите точки минува точно една рамнина.

Четирите точки се колинеарни (сите лежат на една права):

Во тој случај, низ една права може да се повлечат бесконечно многу рамнини. Значи, низ 4 колинеарни точки минуваат бесконечно многу рамнини.

Значи, низ 4 различни точки може да минуваат една, четири или бесконечно многу рамнини, зависно од местоположбата на точките.

Задача 3

Колку различни рамнини минуваат низ пет точки A, B, C, D и E ?

Задачи за вежбање!

1. Колку прави минуваат низ една дадена точка?
2. Колку прави определуваат три дадени неколинеарни точки?
3. Колку отсечки определуваат три различни точки?
4. Покажи дека со пет различни точки се определени една, пет, шест, осум или десет прави.
5. Нека A е произволна точка. Покажи дека постојат точки B, C и D , така што точките A, B, C и D не се компланарни.

5.8 ЗАЕМЕН ОДНОС НА ПРАВА И РАМНИНА, ДВЕ РАМНИНИ И ДВЕ ПРАВИ

Потсети се!

- Каква може да биде заемната положба на точка и права?
- Што претставуваат ознаките $A \in a$ и $A \in \Sigma$, ако A е дадена точка, a е дадена права, а Σ е дадена рамнина?
- Под заеман однос на две форми се подразбира бројот на заеднички точки кои ги имаат тие две форми.

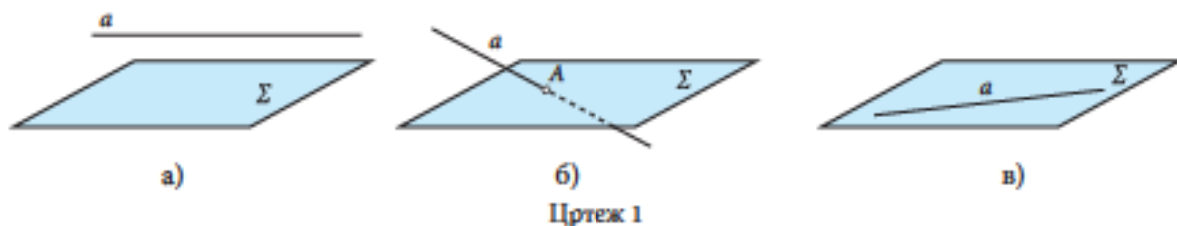
Заемен однос на права и рамнина

Ако секоја точка од правата a лежи на рамнината Σ , тогаш велиме дека правата a лежи на рамнината Σ , т.е. рамнината Σ минува низ правата a .

A_2 : Ако две точки од правата a лежат на рамнината Σ , тогаш и правата a лежи на оваа рамнина.

Права и рамнина може да имаат една и само една од следните заемни положби:

- да немаат заеднички точки, т.е. $a \cap \Sigma = \emptyset$ (цртеж 1, а);
- да имаат само една заедничка точка, т.е. $a \cap \Sigma = \{A\}$ (цртеж 1, б);
- секоја точка од правата a да лежи на рамнината Σ , т.е. $a \cap \Sigma = a$ (цртеж 1, в).



Запомни!

- Ако права a и рамнина Σ немаат заедничка точка, тогаш велиме дека тие се паралелни и се означува со $a \parallel \Sigma$. Исто така, велиме дека правата a и рамнината Σ се паралелни и ако правата a лежи на рамнината Σ .
- Ако правата a и рамнината Σ имаат една заедничка точка A , тогаш велиме дека тие се сечат во точката A , т.е. правата a ја прободува рамнината Σ во точката A .
- Ако правата a и рамнината Σ имаат две заеднички точки тогаш правата лежи на рамнината.

Во продолжение ќе докажеме неколку теореми за заемниот однос на права и рамнина.

T_4 : На секоја рамнина Σ лежи барем една права.

Доказ: Според аксиомата A_2 , имаме дека на рамнината Σ лежат најмалку две точки. Нека тоа се точките A и B , а според аксиомата A_2 , низ точките A и B минува единствена права a . Бидејќи точките A и B лежат на правата a и на рамнината Σ , според аксиомата A_3 , следува дека правата a лежи на рамнината Σ .

T_5 : За секоја точка A што не лежи на правата a , постои една и само една рамнина Σ што минува низ точката A и таа права a .

Доказ: Според аксиомата A_1 , следува дека на правата a лежат најмалку две точки, на пример B и C . Од тоа што $A \notin a$, следува дека точките A , B и C не се колинеарни, па според аксиомата A_4 , тие определуваат единствена рамнина Σ . Значи, низ точката A и правата a минува точно една рамнина.

Пример 1

Покажи дека во секоја рамнина Σ лежат барем три различни прави.

Решение:

Според аксиомата A_1 , секоја рамнина Σ содржи бесконечно многу точки. Оттука, можеме да избереме три различни неколинеарни точки $A, B, C \in \Sigma$. Бидејќи се неколинеарни, тие не лежат на иста права. Оттука, низ кои било две од нив поминува точно една права (аксиома A_2). На тој начин ги добиваме правите: $p_1 = AB$, $p_2 = AC$ и $p_3 = BC$. Според аксиомата A_3 , бидејќи секоја од овие прави со рамнината има две заеднички точки, следува дека правите p_1 , p_2 и p_3 лежат во рамнината Σ .

Заемен однос на две рамнини

Меѓусебниот однос на две рамнини ќе го согледаме преку следнава теорема:

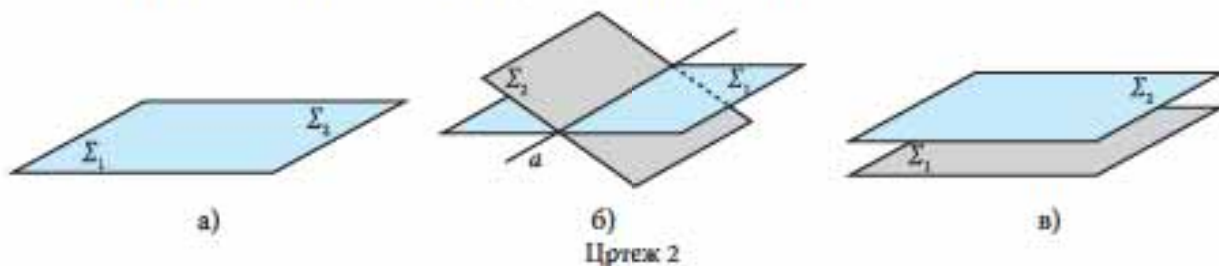
T_6 : Постојат барем две рамнини што имаат заедничка права.

Доказ: Според T_3 во просторот постојат четири точки што не лежат во иста рамнина, на пример A, B, C и D . Според A_4 , со точките A, B и C е определена рамнината Σ_1 , а со точките A, B и D друга рамнина Σ_2 . Бидејќи точките A и B лежат на рамнината Σ_1 , следува дека правата $a = AB$ има две заеднички точки со рамнината Σ_1 , а бидејќи точките A и B лежат и на рамнината Σ_2 , следува дека има две заеднички точки и со рамнината Σ_2 . Според аксиомата A_3 , следува дека правата a лежи во двете рамнини. Бидејќи Σ_1 и Σ_2 се различни рамнини, според A_4 , следува дека тие не може да имаат други заеднички точки освен точките што лежат на правата a . Во спротивно, Σ_1 и Σ_2 би биле една иста рамнина. Според тоа, рамнините Σ_1 и Σ_2 имаат заедничка права a , т.е. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$.

A_6 : Ако две рамнини имаат една заедничка точка, тогаш тие имаат барем уште една заедничка точка.

Оттука, две рамнини Σ_1 и Σ_2 може:

- а) да се совпаѓаат, т.е. $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ (цртеж 2, а))
- б) да имаат заедничка права, т.е. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$ (цртеж 2, б))
- в) да немаат заедничка точка, т.е. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ (цртеж 2, в))



Запомни!

- Рамнините Σ_1 и Σ_2 се паралелни ако немаат заедничка точка. Пишуваме, $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$.
- Рамнините што се сечат имаат само една заедничка права.
- Рамнините Σ_1 и Σ_2 се совпаѓаат ако имаат три заеднички неколинеарни точки. Пишуваме, $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$.

Задача 1

Дали две рамнини може да имаат само една заедничка точка? Образложи го одговорот.

Пример 2

Ако точките A, B и C лежат и во рамнината Σ_1 и во рамнината Σ_2 , тогаш дали оттука следува дека тие две рамнини се совпаѓаат? Образложи го одговорот.

Решение:

Не мора да следува дека рамнините се совпаѓаат затоа што во случај кога точките A, B и C се колинеарни, тогаш рамнините се сечат.

Задача 2

Каква заемна положба може да имаат рамнините определени со точките ABC и ABD ?

Заемна положба на две прави

Две прави a и b може да:

- немаат ниту една заедничка точка, т.е. $a \cap b = \emptyset$;
- да имаат само една заедничка точка, т.е. $a \cap b = \{A\}$;
- да имаат бесконечно многу заеднички точки, т.е. $a \cap b = \{A, B, C, \dots\}$.

Следниве теореми го определуваат заемниот однос на две прави:

T_1 : Ако две прави имаат барем две заеднички точки, тогаш тие се еднакви како множества точки.

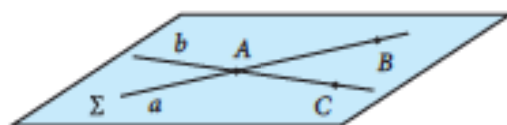
Доказ: Ако A и B се две различни точки што припаѓаат на правата a и на правата b , тогаш според A_2 постои една и само една права што минува низ нив. Таа права не може да биде различна ни од правата a ни од правата b . Значи, правите a и b претставуваат исто множество на точки.

T_2 : Две различни прави не може да имаат повеќе од една заедничка точка.

Доказ: Ако правите a и b имаат повеќе од една заедничка точка, тогаш според T_1 тие се совпаѓаат. Значи, пресекот на две различни прави a и b може да е празен, или да содржи само една точка. Во вториот случај, велиме дека правите a и b се сечат и запишуваме $a \cap b = \{A\}$.

T_3 : Две прави што се сечат определуваат една и само една рамнина.

Доказ: Нека правите a и b се сечат во точката A . Според A_1 , на правата a , освен точката A постои и точка B , а на правата b , освен точката A постои и точка C . Точките A , B и C не се колинеарни, па според A_4 тие определуваат единствена рамнина Σ (цртеж 3). Ако пак, постои друга рамнина Σ_1 што минува низ точките A , B и C , тогаш според A_4 рамнините Σ_1 и Σ се исто множество точки и се совпаѓаат.



Цртеж 3

Запомни!

Две прави што се сечат секогаш лежат во иста рамнина.

Пример 3

Покажи дека со една права и две точки што не лежат на правата се определени една или две рамнини.

Решение:

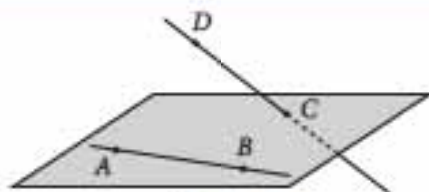
Ако правата определена со двете дадени точки ја сече дадената права, тогаш според T_3 тие две прави определуваат една рамнина. Во спротивен случај, според T_2 , дадената права и секоја точка определуваат по една рамнина или вкупно две рамнини.

Задача 3

Две прави a и b се сечат во точката A . Правата a лежи во рамнината Σ_1 , а правата b во рамнината Σ_2 . Дали рамнините Σ_1 и Σ_2 се совпаѓаат?

T_{10} : Постојат прави што не лежат на иста рамнина.

Доказ: Според T_1 , постојат барем четири точки A, B, C и D што не лежат во иста рамнина. Правите AB и CD сигурно не лежат во иста рамнина, бидејќи ако постои рамнина што минува низ нив, тогаш сите точките A, B, C и D ќе лежат на таа рамнина (цртеж 4).



Цртеж 4

Запомни!

- Две прави што не се сечат или се паралелни или не лежат на иста рамнина.
- Две прави што не лежат на иста рамнина се викаат **разминувачки прави**.
- Две прави a и b што лежат на иста рамнина и не се сечат или не се совпаѓаат се викаат **паралелни прави** и се означува $a \parallel b$.

Задача 4

Дадени се рамнината Σ и правите a и b . Ако правите a и b се сечат во точката A и ако правата a лежи во рамнината Σ , тогаш дали правата b може да лежи во рамнината Σ ?

Задача 5

Нека A и B се две различни точки од рамнината Σ . Докажи дека постојат бесконечно многу прави што минуваат низ точката A , лежат во Σ и се различни од правата AB .

Задача 6

Нека правата a не лежи во рамнината Σ и $a \cap \Sigma = \emptyset$. Докажи дека правата a е паралелна на рамнината Σ , и покажи дека постои рамнина Π која ја содржи правата a и $\Pi \parallel \Sigma$.

Задачи за вежбање!

1. Докажи дека во секоја рамнина Σ лежи барем една права a и барем една точка A , така што $A \notin a$.
2. Покажи дека за секоја рамнина Σ постои барем една права што ја прободува рамнината Σ .
3. Докажи дека низ точката A што лежи на рамнината Σ минуваат бесконечно многу прави што лежат на рамнината Σ .
4. Нека Σ_1 и Σ_2 се две различни рамнини и нека $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. Докажи дека постои барем една права што ги прободува двете рамнини.
5. Нека се дадени права a и рамнина Σ . Одреди дали е можно $a \cap \Sigma = \Sigma$.
6. Правата a ја прободува рамнината Σ . Дали во рамнината Σ лежи права што е паралелна со правата a ?
7. Покажи дека две различни паралелни прави определуваат единствена рамнина.
8. Каква заемна положба може да имаат рамнините определени со точките ABM и ADN ?
9. Докажи дека низ дадена права a минуваат бесконечно многу рамнини.

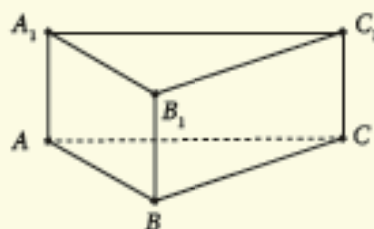
5.9 ПРИЗМА. ПРЕСЕЦИ НА ПРИЗМА СО РАМНИНА

Проучувањето на тродимензионалните геометриски форми и нивните пресеци со рамнина има особено значење и практична примена. Пресекот на едно просторно тело (како призма, пирамида, цилиндар, конус и сл.) со рамнина претставува рамнинска фигура што настанува како заеднички дел на телото и рамнината. Анализата на овие пресеци овозможува подобро разбирање на внатрешната структура, формата и својствата на просторното тело.

Познавањето на пресеците со рамнина има важна практична примена во архитектурата, градежништвото, машинството и техничкото цртање, каде што преку пресеци се прикажуваат скриени делови на објекти, се анализираат конструкции и се изработуваат точни технички прикази.

Потсети се!

- На цртеж 1 е претставена права триаголна призма.
- Каква е заемната положба на рамнините на кои лежат основите?
- Кои се рабови на основата, а кои бочни рабови на призмата?
- Што претставуваат бочните ѕидови на призмата?



Цртеж 1

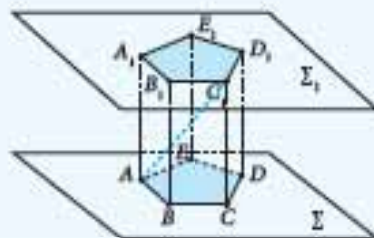
Запомни!

- 3Д-форми ограничени со површини кои се составени само од многуаголници се нарекуваат *рабести 3Д-форми* или *полиедри*.
- Многуаголниците што ја образуваат површината на полиедарот се нарекуваат *ѕидови*, нивните страни се нарекуваат *рабови*, а нивните темиња се нарекуваат *темиња* на полиедарот.

Во секое теме на полиедарот се сретнуваат барем три негови рабови, а секој раб е страна на два и само два негови ѕида.

Запомни!

- Призма е полиедар ограничен со два складни многуаголници што лежат на две паралелни рамнини, а другите видови се паралелограми кои имаат по една заедничка страна со секој од двата многуаголника. (цртеж 2)
- Двата вида што лежат на паралелните рамнини се викаат *основи*, а другите се *бочни видови*. Сите бочни (странични) видови ја сочинуваат *бочната површина* на призмата. Страните на основите се викаат *рабови на основите*, а сите останати рабови се *бочни рабови* на призмата.
- Растојанието меѓу основите се вика *висина* на призмата.
- Отсечката чии крајни точки се две темиња на призмата кои не лежат на ист вид се вика *просторна дијагонала* или само *дијагонала* на призмата.
- Зависно од бројот на страни (агли) на основата на призмата, таа може да биде триаголна, четириаголна, петаголна, и сл.



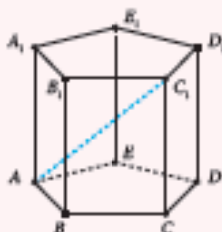
Цртеж 2

Пример 1

За петаголната призма на цртеж 3 напиши ги: основите, бочните видови, основните рабови, бочните рабови, просторните дијагонали.

Решение:

- Основи на призмата се петоаголниците $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ кои лежат на две паралелни рамнини Σ и Σ_1 .
- Останатите видови се бочни видови: ABB_1A_1 , BCC_1B_1 , CDD_1C_1 , DEE_1D_1 , EAA_1E_1 .
- Рабови на основите се: AB , BC , CD , DE , EA , A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , D_1E_1 , E_1A_1 .
- Бочни рабови се: AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , EE_1 .
- Просторни дијагонали на призмата се: AC_1 , AD_1 , BD_1 , BE_1 , CE_1 , CA_1 , DA_1 , DB_1 , EB_1 , EC_1 .



Цртеж 3

Запомни!

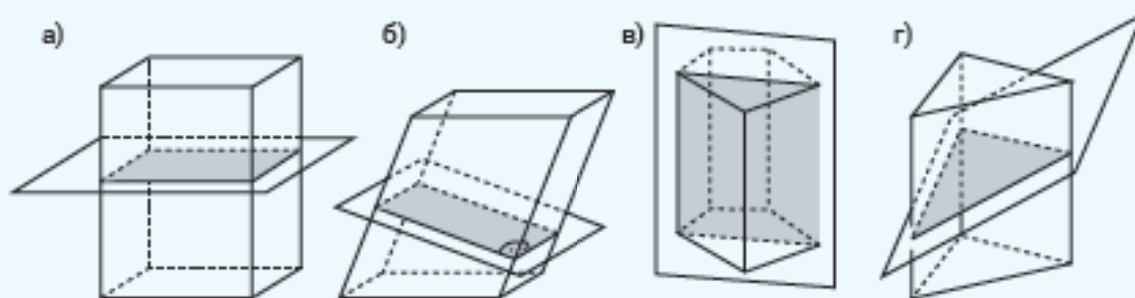
- Ако бочните рабови на една призма се нормални на нејзините основи, тогаш таа призма се вика *права призма*, а во спротивен случај се вика *коса призма*.
- Права призма чии основи се правилни многуаголници се вика *правилна призма*.

Задача 1

- Кој вид четириаголници се бочните ѕидови кај права призма?
- Какви се меѓу себе бочните ѕидови кај правилна призма?
- Ако еден од бочните ѕидови на некоја призма е правоаголник, дали и останатите нејзини бочни ѕидови се исто така правоаголници?

Запомни!

- Ако заедничкиот дел на една 3Д-форма и една рамнина содржи и внатрешни точки од телото, тогаш тој дел се вика *пресек на 3Д-формата со рамнина*.
- Во зависност од положбата на рамнината Σ во однос на призмата, ги разликуваме следните видови пресеци:
 - *паралелен пресек*, ако Σ е паралелна со основите на призмата (цртеж 4, а)
 - *нормален пресек*, ако Σ е нормална на бочните рабови на призмата (цртеж 4, б)
 - *дијагоналан пресек*, ако Σ минува низ два несоседни бочни раба на призмата (цртеж 4, в)
 - *кос пресек*, ако Σ ги сече сите бочни рабови на призмата и не е паралелна со основите (цртеж 4, г)



Цртеж 4

Задача 2

- Каков многуаголник е паралелниот пресек на една шестаголна призма? Што може да се каже за односот на тој пресек со основите?
- Каков многуаголник е дијагоналниот пресек на една шестаголна права призма? А каков многуаголник е тој пресек на произволна n -аголна права призма?
- Каков многуаголник е дијагоналниот пресек на произволна коса призма?
- Каков многуаголник е нормалниот пресек на шестаголна права призма?

Пример 2

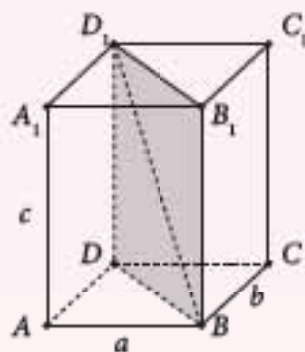
Одреди ја должината на дијагоналата на квадар со димензии $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$. Решението да се провери во компјутерскиот софтвер GeoGebra.

Решение:

Сите четири дијагонали на квадарот се еднакви меѓу себе, се сечат во една точка и се преполовуваат со таа точка.

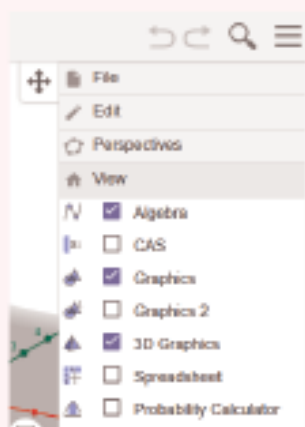
На цртеж 5 е прикажана дијагоналата BD_1 . Таа е дијагонала на дијагоналниот пресек BB_1D_1D , па според Питагоровата теорема од правоаголниот триаголник $\triangle BDD_1$, имаме $\overline{BD_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DD_1}^2$. Понатаму, од правоаголниот $\triangle ABD$ имаме $\overline{BD}^2 = a^2 + b^2$ и од тоа што $\overline{DD_1}^2 = c^2$ заменувајќи во $\overline{BD_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DD_1}^2$ добиваме $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Значи, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$.

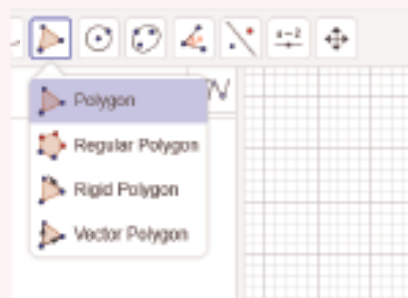


Цртеж 5

Најпрво од главното мени (трите црти десно горе) избираме “View”, па потоа го активираме “3D Graphics” (слика 1, а)). Потоа, го избираме 2D полето, за да бидат активни функциите за 2Д и избираме “Polygon” (слика 1, б)).



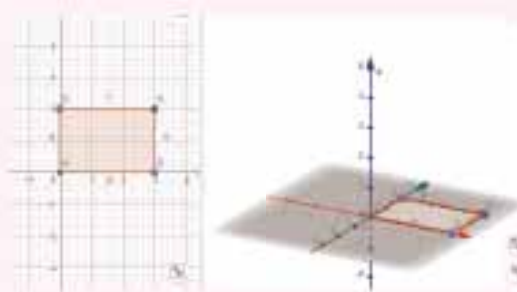
а)



б)

Слика 1

Избираме четири точки за да се добие правоаголник со страни 3 cm и 2 cm (слика 2).



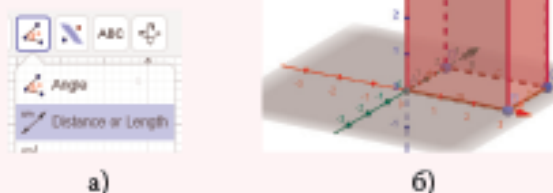
Слика 2

Потоа, го избираме 3D прозорецот за да бидат активни функциите за 3Д и избираме "Extrude to Prism" (слика 3, а)). Во 3Д прозорецот притискаме на правоаголникот (основата), при што се отвора прозорец за да ја внесеме висината на призмата (слика 3, б)).



Слика 3

На крајот, за да ја измериме должината на дијагоналата избираме "Distance or Length" (слика 4, а)), и го означуваме прво темето A па потоа темето K , и добиваме дека должината на дијагоналата на призмата е $AK = 7$ cm. (слика 4, б)).



Слика 4

Запомни!

Должината на дијагоналата на квадар со страни a , b и c се пресметува со формулата $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Задача 3

Одреди ја должината на дијагоналата на коцка со основен раб 7 cm. Резултатот да се провери со GeoGebra.

Пример 3

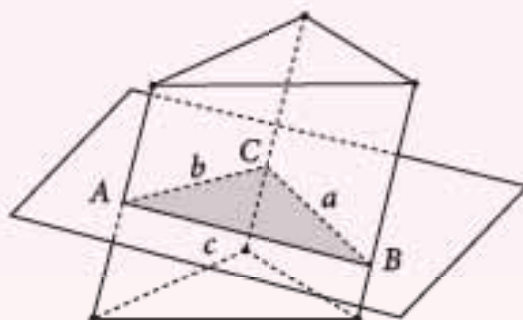
Пресметај ја плоштината на еден нормален пресек на коса триаголна призма ако растојанијата меѓу бочните рабови на призмата се 13 cm, 14 cm и 15 cm.

Решение:

Кај коса триаголна призма, нормалниот пресек е триаголникот $\triangle ABC$ чии страни се еднакви на растојанијата меѓу бочните рабови (цртеж 6). Бидејќи триаголникот е разностран, неговата плоштина ќе ја пресметаме со користење на Хероновата формула.

Најпрво го пресметуваме $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$, кое понатаму го заменуваме во формулата за плоштина и добиваме

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2.$$



Цртеж 6

Задача 4

Дијагоналата на правилна четириаголна призма е 25 cm, а дијагоналата на бочниот ѕид е 20 cm. Најди ја висината на призмата.

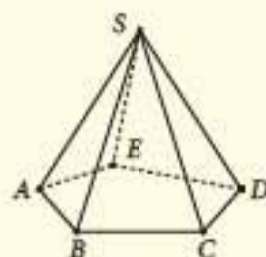
Задачи за вежбање!

- Колку темиња, ѕидови, рабови на основата и бочни рабови има:
а) триаголна призма; б) четириаголна призма; в) n -аголна призма.
- Да се определи должината на дијагоналата на правоаголен паралелолипед со димензии 4 cm, 6 cm и 12 cm. Резултатот да се провери со GeoGebra.
- Правилна четириаголна призма има висина 12 cm, а дијагоналата на бочниот ѕид е 20 cm. Да се определи должината на работ на основата.
- Дијагоналата на правилна четириаголна призма е $\sqrt{194}$ cm, а дијагоналата на бочниот ѕид е 13 cm. Да се определи висината на призмата.
- Основата на коса призма е ромб со дијагонали 24 cm и 10 cm. Да се определат периметарот и плоштината на еден паралелен пресек на призмата.

5.10 ПИРАМИДА. ПРЕСЕЦИ НА ПИРАМИДА СО РАМНИНА

Потсети се!

Каква 2Д форма е основата, а какви 2Д форми се бочните видови на петаголната пирамида претставена на цртеж 1?

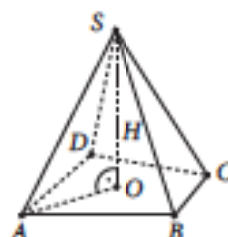


Цртеж 1

Запомни!

- Пирамида е полиедар ограничен со еден конвексен многуаголник, а другите видови се триаголници кои имаат едно заедничко теме.
- Многуаголникот се вика **основа**, триаголниците се нарекуваат **бочни видови**, а нивното заедничко теме е **врв** на пирамидата.
- Ако од врвот на пирамидата се повлече нормала на рамнината на нејзината основа, тогаш должината на отсечката меѓу врвот на пирамидата и подножјето на нормалата се нарекува висина на пирамидата и се означува со H .

На цртежот 2 е дадена пирамидата $SABCD$ со основа $ABCD$ и врв S . Висината на пирамидата е $H = \overline{SO}$.



Цртеж 2

Запомни!

- Според видот на основата, пирамидата може да биде: триаголна, четириаголна, петаголна,....
- Триаголна пирамида се вика уште и **тетраедар** и кај неа за основа може да се земе кој било нејзин сид. Тетраедар чии видови се рамнострани триаголници се вика **правилен тетраедар**.

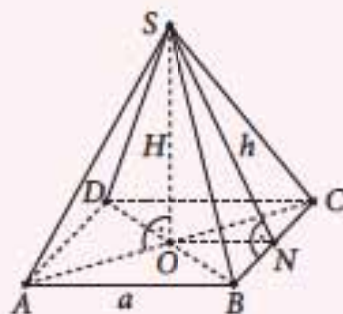
Запомни!

Пирамида чија основа е правилен многуаголник, а бочните рабови се еднакви меѓу себе се вика **правилна пирамида**.

Пример 1

На цртеж 3 е претставена правилна четириаголна пирамида $SABCD$.

- Какви триаголници се бочните сидови и какви се тие меѓу себе?
- Што претставува ортогоналната проекција O на врвот S за основата на правилната пирамида?



Цртеж 3

Решение:

- Бочните сидови се рамнокраки триаголници кои се еднакви меѓу себе.
- Ортогоналната проекција на врвот се наоѓа во пресекот на дијагоналите на основата, односно претставува центар на опишана и впишана кружница на квадратот $ABCD$.

Запомни!

Висината на бочниот сид на правилна пирамида спуштена од врвот се вика **апотема** на пирамидата.

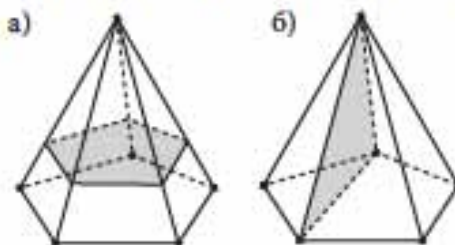
Од правоаголниот триаголник $\triangle SON$, даден на цртеж 3, може да се најде врската помеѓу висината H , апотемата h и основниот раб a . Имено, катетите на $\triangle SON$ се со должини $\overline{ON} = \frac{a}{2}$ и $\overline{SO} = H$, а хипотенузата е $\overline{SN} = h$. Со примена на Питагоровата теорема добиваме $h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$.

Запомни!

Врската помеѓу висината H , апотемата h и основниот раб a на една правилна четириаголна пирамида е $h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$.

Во зависност од положбата на рамнината Σ во однос на пирамидата, ги разликуваме следните видови пресеци:

- **паралелен пресек**, ако Σ е паралелна со основата на пирамидата (цртеж 4, а)
- **дијагонал пресек**, ако Σ минува низ два несоседни бочни рабови на пирамидата (цртеж 4, б).



Цртеж 4

За паралелните пресеци на пирамида со рамнина важи следната теорема.

- 1) Секој паралелен пресек ги дели бочните рабови и висината на пирамидата на пропорционални отсечки.
- 2) Секој паралелен пресек и основата на пирамидата се слични многуаголници.
- 3) Плоштината на даден паралелен пресек и плоштината на основата се однесуваат како квадратите на нивните растојанија до врвот на пирамидата.

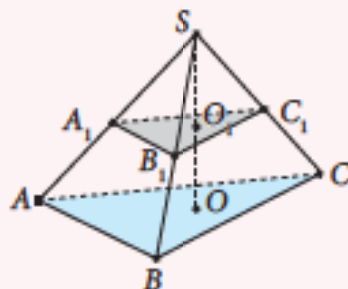
Пример 2

Висината на една триаголна пирамида е 20 cm, а плоштината на нејзината основа е 600 cm^2 . Колку изнесува плоштината на паралелниот пресек кој се наоѓа на растојание од 4 cm од основата.

Решение:

Нека висината на пирамидата ја означиме со $H = \overline{SO}$, растојанието од паралелниот пресек до врвот на пирамидата со $H_1 = \overline{SO_1}$, плоштината на основата со Q , а плоштината на паралелниот пресек со Q_1 (види цртеж 5). Според условите на задачата, $H = 20 \text{ cm}$, $Q = 600 \text{ cm}^2$, а растојанието помеѓу основата и паралелниот пресек на пирамидата со $H - H_1 = 4 \text{ cm}$. Оттука, за H_1 се добива $H_1 = H - 4 = 20 - 4 = 16 \text{ cm}$. Според делот 3) од претходната теорема, имаме $Q_1 : Q = H_1^2 : H^2$.

Заменувајќи ги во последното равенство вредностите за Q , H и H_1 добиваме $Q_1 : 600 = 16^2 : 20^2$ од каде што следува $400 \cdot Q_1 = 256 \cdot 600$, т.е. $Q_1 = \frac{256 \cdot 600}{400} = 384 \text{ cm}^2$.



Цртеж 5

Пример 3

Пресметај ги плоштината на дијагоналниот пресек и апотемата на правилна четириаголна пирамида со основен раб 18 cm и бочен раб 15 cm.

Решение:

Нека ги означиме следните елементи: Q - плоштината на дијагоналниот пресек, a - основниот раб, а s - бочен раб. Од условите на задачата, $a = 18$ cm, $s = 15$ cm.

Од правоаголниот триаголник $\triangle SNC$, според Питагоровата теорема, за апотемата добиваме:

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

На сличен начин, од правоаголниот триаголник $\triangle SON$ имаме:

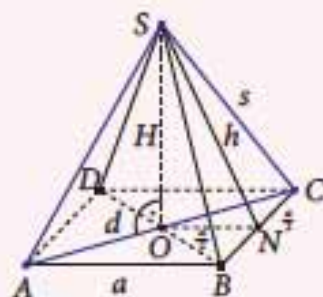
$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{144 - 81} = \sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = 3\sqrt{7} \text{ cm.}$$

Дијагоналниот пресек е триаголникот $\triangle SAC$ чија плоштина ќе ја пресметаме како $Q = \frac{d \cdot H}{2}$, каде што d е должината на дијагоналата на основата. d ќе ја определиме од правоаголниот триаголник $\triangle ABC$. Имено,

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2 \cdot a^2} = \sqrt{2 \cdot 18^2} = \sqrt{2 \cdot 324} = 18\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Заменувајќи ја последната вредност во формулата за плоштина на дијагоналниот пресек, добиваме

$$Q = \frac{18\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{7}}{2} = \frac{54\sqrt{14}}{2} = 27\sqrt{14} \text{ cm}^2.$$



Задача 1

Висината на една триаголна пирамида е 15 cm, а плоштината на нејзината основа е 450 cm^2 . Колку изнесува плоштината на паралелниот пресек кој се наоѓа на растојание од 5 cm од основата.

Задачи за вежбање!

1. Дадена е правилна четириаголна пирамида со основен раб 20 cm и плоштина на дијагоналниот пресек 200 cm^2 . Да се определи висината на пирамидата.
2. Плоштината на основата на една пирамида со висина 24 cm изнесува 800 cm^2 . На кое растојание од основата се наоѓа паралелниот пресек што има плоштина 200 cm^2 .
3. Да се пресмета апотемата на правилна четириаголна пирамида со висина 12 cm и основен раб 10 cm.
4. Да се пресмета основниот раб на правилна четириаголна пирамида со висина 15 cm и апотема 17 cm.

5.11 ЦИЛИНДАР. ПРЕСЕЦИ НА ЦИЛИНДАР СО РАМНИНА

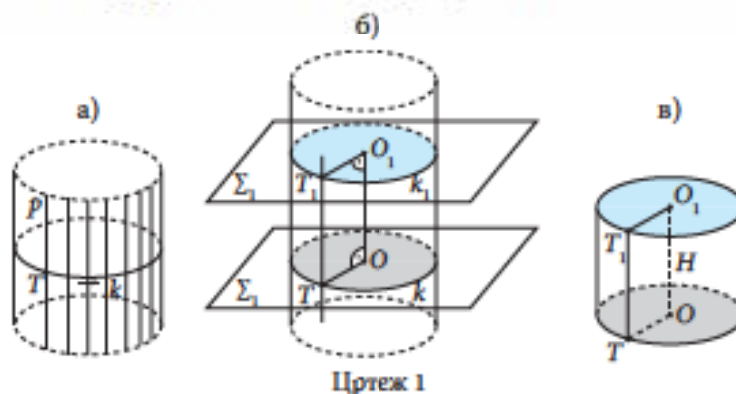
Потсети се!

- Наброј неколку предмети што имаат форма на цилиндар.
- Каква 2Д форма може да се добие при пресек на цилиндар со рамнина?

Нека се дадени кружница k и произволна точка T од кружницата. Нека низ точката T е повлечена права p нормална на рамнината на која лежи кружницата и нека замислиме дека таа права се движи по кружницата останувајќи нормална на рамнината на која лежи кружницата како на цртеж 1, а).

На тој начин подвижната права p опишува една крива површина што се нарекува **цилиндрична површина**. Подвижната права p се вика **генератриса** (изводница), а кружницата по која се движи правата се вика **директриса** на цилиндричната површина.

Ако ја пресечеме цилиндричната површина со две рамнини Σ и Σ_1 кои се паралелни со рамнината на кружницата (цртеж 1, б)) се добиваат кругови со центри во O и O_1 . Овие кругови заедно со делот од просторот на цилиндричната површина помеѓу двете рамнини образуваат една 3Д-форма што се нарекува **прав кружен цилиндар** или само **цилиндар** (цртеж 1, в)).



Цртеж 1

Елементи на цилиндарот се:

Основи – двата круга.

Бочна или странична површина – делот од цилиндричната површина која се наоѓа меѓу основите.

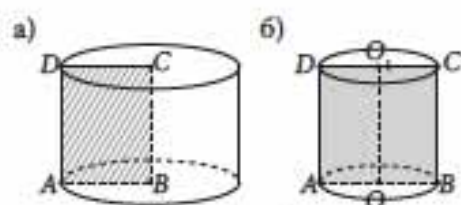
Оска – правата што минува низ центрите на двете основи O и O_1 .

Висина – растојанието меѓу основите кое се означува со H .

Радиуси на основите – отсечките OT и O_1T_1 , кои имаат еднакви должини.

Генератриса или изводница – отсечката TT_1 што ја изведува бочната површина на цилиндарот.

Цилиндар може да се добие и со ротација на правоаголник околу една од своите страни или околу една своја оска на симетрија, и затоа цилиндарот е **ротациона 3Д-форма**. На цртеж 2, а), цилиндарот е добиен со ротација на правоаголникот $ABCD$ околу страната BC , а цилиндарот на цртеж 2, б) е добиен со ротација на правоаголникот $ABCD$ околу неговата оска OO_1 .



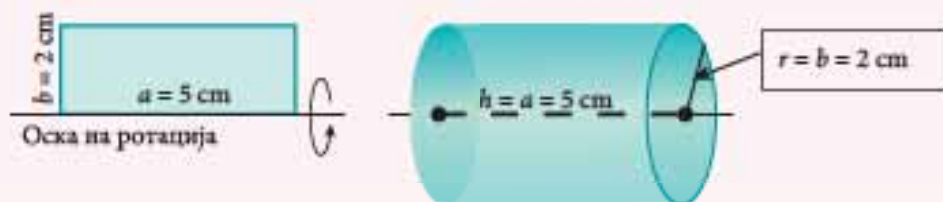
Цртеж 2

Пример 1

Правоаголник со страни $a = 5 \text{ cm}$ и $b = 2 \text{ cm}$ ротира околу страната a . Која 3Д форма се добива со оваа ротација?

Решение:

Со ротирање на правоаголник околу една негова страна се добива цилиндар (Цртеж 3). Правоаголникот ротира околу страната a , па од Цртеж 3 може да се воочи дека основите на цилиндарот имаа радиус $r = b = 2 \text{ cm}$, а висината на цилиндарот е $h = a = 5 \text{ cm}$.



Цртеж 3

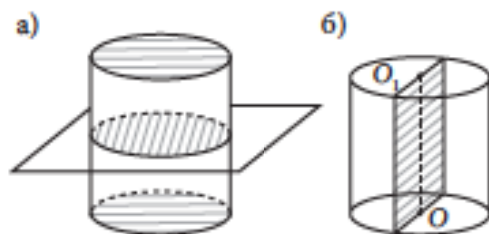
Задача 1

Колку изнесува радиусот на основата, а колку висината на цилиндарот што се добива, ако правоаголник со страни $a = 3$ и $b = 5$ ротира околу:

- страната a ;
- страната b ;
- оската која е нормална на страната a и е нејзина симетрала.

Пресекот на цилиндар со рамнина може да биде:

- паралелен пресек** – ако рамнината е паралелна со основите (цртеж 4, а)),
- осен пресек** – ако рамнината минува низ оската на цилиндарот (цртеж 4, б)).



Цртеж 4

Запомни!

- Секој паралелен пресек на цилиндар со рамнина претставува круг со радиус еднаков на радиусот на основата на цилиндарот.
- Секој осен пресек на цилиндар со рамнина претставува правоаголник чии страни се еднакви на дијаметарот на основата и висината на цилиндарот.

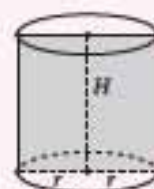
Пример 2

Даден е цилиндар со висина 6 cm и радиус на основата 5 cm. Одреди ја плоштината на осниот пресек на цилиндарот.

Решение:

Осниот пресек на цилиндарот е правоаголник чии страни се дијаметарот $d = 2 \cdot r = 2 \cdot 5 = 10$ cm и висината $H = 6$ cm. Оттука за плоштината Q на осниот пресек добиваме:

$$Q = d \cdot H = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2.$$



Цртеж 5

Задача 2

Одреди ги радиусот и висината на цилиндарот ако неговиот осен пресек е квадрат со плоштина 64 cm^2 .

Запомни!

Рамнострани цилиндар е цилиндар чиј осен пресек е квадрат односно дијаметарот на основата е еднаков на висината.

Пример 3

Плоштината на осниот пресек на еден рамностран цилиндар е 16 cm^2 . Одреди ги висината и радиусот на цилиндарот.

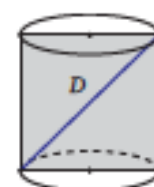
Решение:

Од условот дека цилиндарот е рамностран следува дека осниот пресек е квадрат, т.е. $2r = H$. Оттука, плоштината на осниот пресек може да се изрази како $P = H^2$. Ако замениме $P = 16 \text{ cm}^2$, добиваме $H^2 = 16$. Значи, $H = 4$ cm. Од друга страна, од равенството $2r = H$ може да се изрази

радиусот како $r = \frac{H}{2}$, и оттука имаме дека $r = \frac{H}{2} = \frac{4}{2} = 2$ cm.

Задача 3

Да се определи должината на дијагоналата D на осниот пресек на цилиндар со радиус 9 cm и висина 24 cm (цртеж 6).



Цртеж 6

Пример 4

Висината на еден цилиндар е 7 cm, а радиусот на основата е 13 cm. Цилиндарот е пресечен со рамнина паралелна со оската на цилиндарот која е на растојание од 5 cm од оската. Одреди ја плоштината на добиениот пресек.

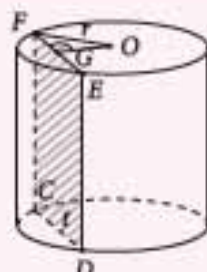
Решение:

На цртеж 7 е прикажан пресекот со рамнината кој е правоаголникот CDEF со страни $DE = H = 7$ cm и $t = \overline{CD}$.

Од правоаголниот триаголник FOG, со примена на Питагоровата формула имаме $\overline{FO}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GO}^2$. Со замена на $\overline{FO} = r = 13$ cm, $\overline{FG} = \frac{t}{2}$ и $\overline{GO} = 5$ cm, добиваме:

$$13^2 = \left(\frac{t}{2}\right)^2 + 5^2.$$

Оттука, $\frac{t}{2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ cm, т.е. $t = 2 \cdot 12 = 24$ cm. Од формулата за плоштина на правоаголник добиваме дека плоштината на пресекот е $Q = t \cdot H = 24 \cdot 7 = 168$ cm².



Цртеж 7

Задача 4

Пресметај ја плоштината на основата на цилиндар со висина 12 cm кој е пресечен со рамнина паралелна со оската на цилиндарот, на растојание од 6 cm од оската. Плоштината на тој пресек изнесува 192 cm².

Задача 5

Пресметај ја плоштината на основата на цилиндар со висина 8 cm кој е пресечен со рамнина паралелна со оската на цилиндарот, на растојание од 4 cm од оската. Плоштината на тој пресек изнесува 48 cm².

Задачи за вежбање!

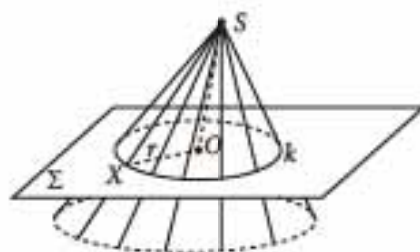
- Одреди го радиусот на цилиндар со висина 12 cm, ако плоштината на неговиот осен пресек изнесува 96 cm².
- Плоштината на осниот пресек на цилиндар изнесува 196 cm². Определи ја висината на цилиндарот ако неговиот радиус на основата е 7 cm.
- Да се одреди дијагоналата на осниот пресек на цилиндар со радиус 8 cm и висина 15 cm.
- Пресметај ја плоштината на основата на цилиндар со висина 6 cm кој е пресечен со рамнина паралелна на оската на растојание од 6 cm од неа. Плоштината на тој пресек изнесува 96 cm².
- Односот на плоштината на основата на еден цилиндар и плоштината на неговиот осен пресек е $\pi : 4$. Најди го аголот помеѓу дијагоналите на осниот пресек.

5.12 КОНУС. ПРЕСЕЦИ НА КОНУС СО РАМНИНА

Потсети се!

Каква 2Д-форма може да се добие при пресек на конус со рамнина?

На сличен начин како што се добива цилиндар може да се добие 3Д формата конус.



Цртеж 1

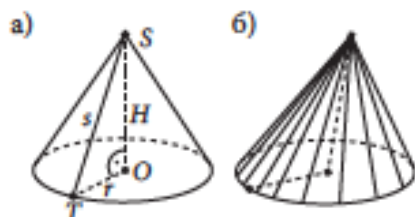
Нека е дадена кружница k со радиус r во рамнината Σ и точка S што не лежи на Σ . Нека на кружницата е избрана точка X и нека е повлечена полуправа SX . Да замислиме дека точката X се движи по кружницата поминувајќи ја целата кружницата како на цртеж 1.

На тој начин се опишува една крива површина што се нарекува **конусна површина**, подвижната полуправа се вика **генератриса** (изводница), кружницата се вика **директриса**, точката S - **врв**, а правата SO се вика **оска** на конусната површина.

Конус претставува делот од просторот ограничен со кругот што го отсекува конусната површина од рамнината, како и делот на конусната површина од врвот до кругот.

Кругот се нарекува **основа**, а делот од конусната површина се вика **бочна површина** на конусот.

Конусот во кој оската SO е нормална на основата се нарекува **прав конус** (цртеж 2, а)), а во случај кога таа не е нормална на основата се вика **кос конус** (цртеж 2, б)).



Цртеж 2

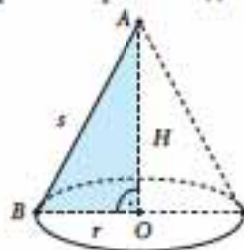
Во практика, ако е кажано само конус, тогаш се подразбира дека се работи за прав конус, ако е случај во кој е даден кос конус, тогаш тоа треба да се нагласи.

Висина на конусот е најкраткото растојание (нормалното) од врвот до основата.

Генератриса (изводница) се нарекува секоја отсечка чии крајни точки се врвот S и која било точка T од кружницата на основата, при што сите генератриси на еден прав конус се еднакви меѓу себе. Кај кос конус генератрисите не се еднакви меѓу себе.

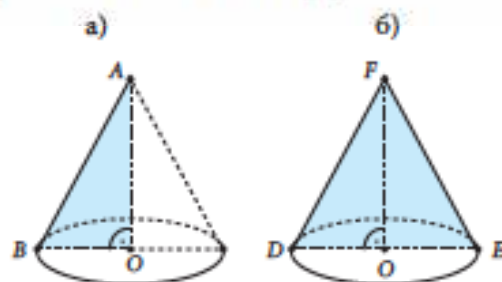
Ако е даден прав конус со радиус на основата r , висина H и изводница s , тогаш се формира еден карактеристичен правоаголен триаголник како на цртеж 3.

Од триаголникот $\triangle BOA$, според Питагорова теорема, го добиваме равенството $s^2 = r^2 + H^2$.



Цртеж 3

Исто така, конус може да се добие со ротација на правоаголен триаголник околу една негова катета или со ротација на рамнокрак триаголник околу неговата оска на симетрија. Затоа и конусот, исто како и цилиндарот, е ротационо тело. Така, конусот на цртеж 4, а) е добиен со ротација на триаголникот $\triangle BOA$ околу катетата OA , а конусот на цртеж 4, б) е добиен со ротирање на рамнокракиот триаголник $\triangle DEF$ околу отсечката OF , која е негова оска на симетрија.



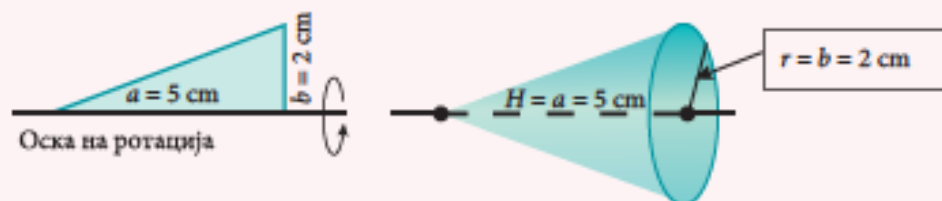
Цртеж 4

Пример 1

Правоаголен триаголник со катети $a = 5$ cm и $b = 2$ cm ротира околу страната a . Која 3Д форма се добива со оваа ротација?

Решение:

Со ротирање на правоаголен триаголник околу една негова катета се добива конус (Цртеж 5). Правоаголниот триаголник ротира околу страната a , па од Цртеж 5 може да се воочи дека основата на конусот има радиус $r = b = 2$ cm, а висината на конусот е $H = a = 5$ cm.



Цртеж 5

Задача 1

Колку е радиусот на основата, а колку висината на конусот што се добива со ротирање на правоаголен триаголник со катети $a = 3$ и $b = 4$ околу

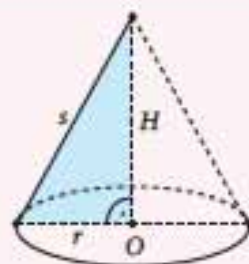
- страната a ;
- страната b .

Пример 2

Да се определи висината на конус со радиус на основата 16 cm и со изводница 34 cm.

Решение:

Од условот на задачата е дадено дека $r = 16$ cm и $s = 34$ cm. Од равенството $s^2 = r^2 + H^2$ добиваме дека $H^2 = s^2 - r^2 = 34^2 - 16^2 = 1156 - 256 = 900$. Оттука, за висината H се добива $H = \sqrt{900} = 30$ cm.



Цртеж 6

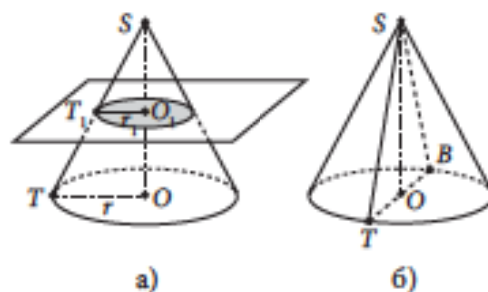
Задача 2

Да се определи должината на изводницата на конус со висина 6 cm и радиус на основата 8 cm.

Видови пресеци на конус со рамнина се:

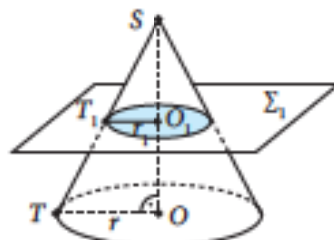
- паралелен пресек** - ако рамнината е паралелна со основата на конусот (цртеж 7, а));
- осен пресек** - ако рамнината минува низ оската на конусот (цртеж 7, б)).

Како што може да се види од цртеж 7, паралелните пресеци на конус со рамнина се кругови, додека осните пресеци се триаголници.



Цртеж 7

На цртеж 8 е прикажан прав конус кој е пресечен со рамнина која е паралелна на основата на конусот.



Цртеж 8

Од сличност на триаголниците $\triangle TOS$ и $\triangle T_1O_1S$ се добива односот $\overline{TO} : \overline{T_1O_1} = \overline{SO} : \overline{SO_1}$. Со квадрирање од двете страни имаме $\overline{TO}^2 : \overline{T_1O_1}^2 = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$. Ако во последното равенство замениме $\overline{TO}^2 = r^2$ и $\overline{T_1O_1}^2 = r_1^2$ и ако ги помножимо и броителот и именителот на левата страна со π , добиваме $r^2\pi : r_1^2\pi = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$.

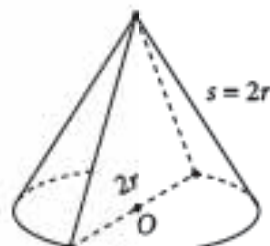
Ако со B ја означиме плоштината на основата, а со B_1 плоштината на паралелниот пресек, тогаш $B = r^2\pi$, а $B_1 = r_1^2\pi$. Со замена во последното равенство добиваме $B : B_1 = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$.

За паралелните пресеци на конус со рамнина важи следната теорема.

Плоштината на основата B и плоштината на паралелниот пресек B_1 се однесуваат како квадратите на нивните растојанија до врвот на конусот.

Висината и генератрисата на еден конус се поделени со пресекот во ист однос.

Ако осниот пресек на конус е рамностран триаголник односно ако $s = 2r$, тогаш тој конус се вика **рамностран конус** (цртеж 9).

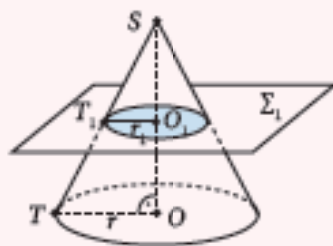


Цртеж 9

Пример 3

Плоштината на основата на еден конус со висина 16 cm изнесува 64 cm^2 . Да се определи плоштината на паралелниот пресек ако тој се наоѓа на растојание од 6 cm од врвот на конусот.

Решение:



Цртеж 10

Од цртеж 10, ако ги означиме со $H = \overline{SO}$ и $H_1 = \overline{SO_1}$, од условот на задачата имаме дека $B = 64 \text{ cm}^2$, $H = 16 \text{ cm}$ и $H_1 = 6 \text{ cm}$. Користејќи ја релацијата $B : B_1 = H^2 : H_1^2$, добиваме $64 : B_1 = 16^2 : 6^2$. Оттука,

$$B_1 = \frac{64 \cdot 36}{256} = 9 \text{ cm}^2.$$

Задача 3

Конус има висина 10 cm и радиус на основата $r = 8 \text{ cm}$. Паралелниот пресек на конусот е круг со радиус 2 cm. Да се определи колку е оддалечен тој пресек од врвот на конусот.

Пример 4

Пресметај ја плоштината на осниот пресек на конус со висина 24 cm и генератриса 26 cm.

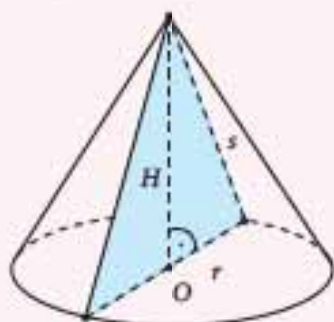
Решение:

Во условите на задачата, дадено е дека $s = 26$ cm и $H = 24$ cm. Оттука, според Питагорова теорема (цртеж 11), имаме

$$r^2 = s^2 - H^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100,$$

па добиваме $r = \sqrt{100} = 10$ cm. Плоштината Q на осниот пресек ќе биде еднаква на

$$Q = \frac{2r \cdot H}{2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 24}{2} = 240 \text{ cm}^2.$$



Цртеж 11

Задача 4

Еден прав конус со радиус на основата 5 cm има осен пресек правоаголен триаголник, каде што правиот агол се наоѓа кај врвот на конусот. Пресметај ја плоштината на осниот пресек.

Задачи за вежбање!

1. Периметарот на осниот пресек на рамностран конус е 30 cm. Пресметај ја плоштината на тој осен пресек.
2. Плоштината на основата на еден конус е 50 cm^2 , а паралелниот пресек што е на растојание од 10 cm од врвот има плоштина 18 cm^2 . Одреди ја неговата висина.
3. Одреди го радиусот на конусот со висина 15 cm, чиј периметар на осниот пресек изнесува 60 cm^2 .
4. Даден е конус со висина 18 cm и радиус на основата 6 cm, чија плоштината на еден негов паралелен пресек е $16\pi \text{ cm}^2$. Одреди го растојанието на пресекот до основата.
5. Пресметај ја плоштината на паралелниот пресек на конус со радиус на основата 9 cm ако тој пресек ја дели висината од врвот кон основата во однос 3:2.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

- Претвори ги од степени во радијани следните агли:
а) 300° ; б) 150° .
- Претвори ги од радијани во степени следните агли:
а) $\frac{7\pi}{6}$ rad; б) $1,7$ rad.
- Одреди ги вредностите на останатите тригонометриски функции ако е дадено:
а) $\cos \alpha = \frac{24}{25}$; б) $\sin \alpha = \frac{7}{24}$; в) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$.
- Одреди ја вредноста на изразот $\frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha}$ ако е дадено дека $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$.
- Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од остар агол на правоаголниот триаголник ако е познато дека $a : c = 9 : 41$.
- Опреди ја вредноста на α ако е дадено дека
а) $\sin(\alpha + 50^\circ) = \cos(\alpha + 10^\circ)$; б) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \operatorname{ctg}(3\alpha - \frac{\pi}{3})$.
- Упрости го изразот: $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{4 - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2 \cos \alpha - \sin \alpha - 1}{1 - \cos \alpha} + \frac{3 \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.
- На еден спортски терен се одржува детски фестивал. Над теренот се издигнува голем шарен балон за фотографирање. Од местото каде што стои еден човек балонот се гледа под агол од $47^\circ 15'$, а растојанието од човекот до точката на земјата веднаш под балонот е 3 km. Пресметај на која висина се наоѓа балонот од земјата.
- Авион започнува со спуштање кон аеродромот под агол од 6° во однос на хоризонталата. Колкава е неговата висина ако хоризонталното растојание до пистата е 950 метри.
- За пристапна рампа дозволен е максимален агол од 6° во однос на хоризонталата. Колкава треба да биде должината на рампата за да се совлада висинска разлика од 0,6 m.
- Кабел е затегнат меѓу земјата и врвот на вертикален столб висок 12 m. Ако кабелот со хоризонталната подлога зафаќа агол од 30° , колкава е неговата должина?
- Дадени се пет различни точки, од кои точно три се колинеарни, а останатите две не лежат на таа права. Колку различни прави се определени?
- Покажи дека со пет точки во простор бројот на определени рамнини може да биде 1, 5, 7 или 10.
- На кое растојание од врвот на дадена пирамида е направен паралелен пресек ако висината на пирамидата е 20 dm, плоштината на основата е 32 dm^2 , а плоштината на пресекот е 8 dm^2 ?
- Дијагоналата на основата на правилна четириаголна призма има должина $4\sqrt{2}$, а дијагоналата на бочниот ѕид има должина 5 cm. Пресметај ја должината на дијагоналата на призмата.
- Пресметај ги плоштината на дијагоналниот пресек и апотемата на правилна четириаголна пирамида со основен раб 16 cm и бочен раб 10 cm.

17. Да се определи висината на правилна четириаголна призма со дијагонала 15 cm и дијагонала на бочниот ѕид од 12 cm.
18. Една четириаголна пирамида има основен раб $10\sqrt{2}$ cm и бочен раб 13 cm. Да се определат апотемата и плоштината на дијагоналниот пресек на пирамидата.
19. Пирамида со висина 15 cm има плоштина на основата 450 cm^2 . Да се пресмета плоштината на паралелниот пресек кој се наоѓа на растојание од 5 cm од основата.
20. Цилиндар со висина 15 cm и радиус на основата 10 cm, е пресечен со рамнина паралелна со неговата оска која се наоѓа на растојание од 6 cm од оската. Определи ја плоштината на добиениот пресек.
21. Да се определи плоштината на паралелниот пресек на конус, ако тој се наоѓа на растојание од 3 cm од основата на конусот. Плоштината на основата на конусот изнесува 144 cm^2 , а неговата висина е 12 cm.
22. Конус има висина 15 cm и радиус на основата 12 cm. Ако еден паралелен пресек на конусот има радиус 4 cm, да се определи на колкаво растојание се наоѓа тој пресек од основата на конусот.
23. Да се пресмета висината на конус со плоштината на основата од 75 cm^2 , ако неговиот паралелен пресек што е на растојание 8 cm од врвот има плоштина 48 cm^2 .
24. Одреди ги плоштината на осниот пресек и радиусот на конусот со висина 12 cm, чиј осен пресек има периметар 36 cm.
25. Да се пресмета плоштината на осниот пресек на прав кружен конус со радиус 8 cm, ако осниот пресек претставува правоаголен триаголник чиј прав агол се наоѓа кај врвот на конусот.
26. Еден паралелен пресек на конус со радиус 12 cm, ја дели висината од врвот кон основата во однос 1:3. Да се определи плоштината на тој паралелен пресек.

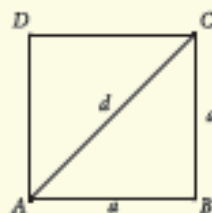
МЕРЕЊЕ

Во оваа тема се изучуваат периметарот и плоштината на рамнински (2Д) форми, како и плоштината и волуменот на просторни (3Д) форми. Овие поими претставуваат основни мерки со кои се опишува големината на објектите – колку простор зафаќаат, колку материјал е потребен за нивна изработка или колкава површина треба да се покрие. Примената на овие знаења е секојдневна: при пресметување количина боја за ѕидови, ограда за двор, површина на земјиште, капацитет на садови или резервоари. Преку решавање практични и СТЕМ-задачи, учениците ќе развијат вештини за моделирање реални ситуации со математички формули, логичко размислување и поврзување на математиката со инженерството, архитектурата, технологијата и науката.

6.1 ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА КВАДРАТ И ПРАВОАГОЛНИК

Потсети се!

Периметарот на квадрат со страна a се пресметува со формулата $L = 4a$, додека плоштината се пресметува со формулата $P = a^2$.



Цртеж 1

Пример 1

Пресметај ја должината на дијагоналата на квадрат ако неговата плоштина изнесува 25 cm^2 . Решението да се провери со GeoGebra.

Решение:

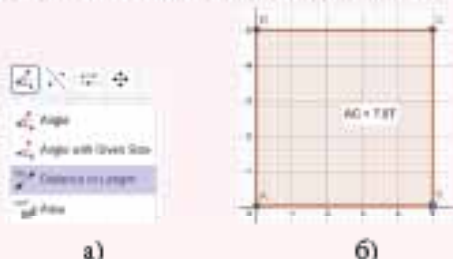
Од формулата за плоштина на квадрат $P = a^2$, добиваме $a^2 = 25$, па страната на квадратот е со должина $a = 5 \text{ cm}$. Според Питагоровата теорема, од триаголникот $\triangle ABC$ (цртеж 1) за должината на дијагоналата добиваме $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, т.е. $d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$.

Постапката за проверка на решението во GeoGebra е дадена во продолжение. Најпрво за да нацртаме квадрат со страна 5 cm, од алатките (Toolbar) ќе ја избереме опцијата за правилен многуаголник (Regular polygon) (слика 1 а)) и ќе нацртаме отсечка со должина 5 cm, при што ќе се отвори прозорец за да го внесеме бројот на темиња на бараниот многуаголник. Тука ќе внесеме 4 (слика 1 б)).



Слика 1

Потоа, за да ја пресметаме дијагоналата на квадратот, од алатките (Toolbar), ќе ја избереме опцијата за растојание (Distance or Length) (слика 2 а)) и ќе ги означиме темињата на дијагоналата AC, со што добиваме дека должината на дијагоналата изнесува $\overline{AC} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ cm. (слика 2 б)).



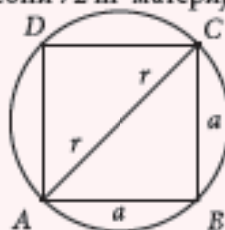
Слика 2

Пример 2

Едно езерце има форма на круг со радиус 6 m. На езерцето треба да се постави платформа во форма на квадрат впишан со кругот (цртеж 2). Пресметај колку m^2 материјал ќе бидат потребни за да се постави платформата?

Решение:

Според цртеж 2, должината на дијагоналата на квадратот е $d = 2r = 2 \cdot 6 = 12$ m. Од равенството $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, се добива дека должината на страната на квадратот е $a = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{12^2}{2}} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ m. Оттука, плоштината на квадратот е $P = a^2 = 72$ m^2 . Значи, за поставување на платформата се потребни 72 m^2 материјал.



Цртеж 2

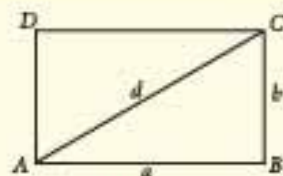
Задача 1

Општина планира да огради квадратна зелена површина наменета за училиштен екопарк. За оградата има 400 m метална жица, со која треба да се огради целата површината двапати, без преклопување и отпад. Одреди ја:

- должината на страната на квадратната површина;
- плоштината на оградената површина.

Потсети се!

Периметарот на правоаголник со страни a и b се пресметува со формулата $L = 2a + 2b$, додека плоштината се пресметува со формулата $P = ab$.



Цртеж 3

Пример 3

Пресметај ја плоштината на правоаголник со страна 12 cm и дијагонала 20 cm.

Решение:

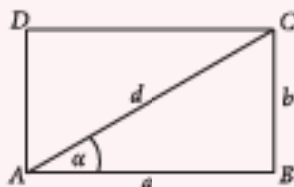
Од правоаголниот триаголник $\triangle ABC$ (цртеж 3), според Питагоровата теорема имаме $d^2 = a^2 + b^2$, од каде што за должината на страната b добиваме $b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm. Со замена во формулата за плоштина на правоаголник добиваме дека $P = 12 \cdot 16 = 192$ cm².

Пример 4

Инженер проектира правоаголна метална плоча за електронски уред. Едната страна на плочата има должина 20 cm. При проверка на димензиите со ласерски мерач е утврдено дека аголот меѓу таа страна и дијагоналата на плочата изнесува 30°. Пресметај ја плоштината на металната плоча.

Решение:

Металната плоча има форма на правоаголник. Според цртеж 4, $\triangle ABC$ е правоаголен, па оттука добиваме $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{b}{a}$, односно $b = a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 11,55$ cm. Плоштината на правоаголникот е $P = 20 \cdot 11,55 \approx 231$ cm².



Цртеж 4

Задача 2

При дизајнирање правоаголен сензорски панел, инженерите го моделираат панелот преку неговите дијагонали бидејќи тие се користат при автоматска калибрација. Измерено е дека должината на дијагоналите изнесува 12 cm, а аголот меѓу дијагоналите е 60° . Колку изнесува плоштината на сензорскиот панел?

Пример 5

При изработка на правоаголна алуминиумска плоча за заштитно кукиште на електронски уред, инженерот мора да ги почитува конструкциските пропорции поради цврстина и естетика. Димензиите на плочата се проектирани така што односот на должините на страните е 3 : 5, а вкупната плоштина на плочата изнесува 135 cm^2 . Колку се долги страните на плочата?

Решение:

Нека a и b се должините на страните на плочата. Од условот имаме дека $a : b = 3 : 5$, од каде што добиваме $a = 3k$, $b = 5k$.

Со замена на a и b во формулата за плоштина имаме

$$3k \cdot 5k = 135$$

$$15k^2 = 135$$

$$k^2 = 9$$

$$k = \sqrt{9} = 3 \text{ cm.}$$

Со замена на добиената вредност за k во a и b добиваме $a = 3k = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}$ и $b = 5k = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}$.

Задача 3

Одреди ги страните на правоаголна рамка ако едната страна е четирипати поголема од другата, а плоштината на рамката е 64 cm^2 .

Пример 6

На цртежот 5 е прикажан соларен панел.

- Пресметај ја активната површина на панелот.
- Пресметај ја површината на заштитната рамка.

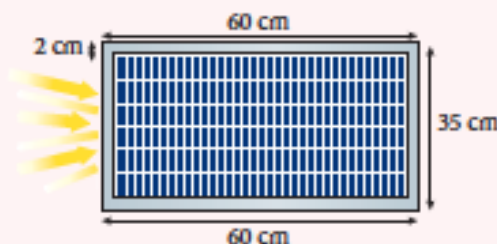
Решение:

- Активната површина на панелот претставува правоаголник со страни $a_1 = 60 - 2 \cdot 2 = 56 \text{ cm}$ и $b_1 = 35 - 2 \cdot 2 = 31 \text{ cm}$, па неговата плоштина е $P = a_1 \cdot b_1 = 56 \cdot 31 = 1736 \text{ cm}^2$.

- Површината на заштитната рамка P_z ќе ја пресметаме како разлика на вкупната плоштина на целиот панел P_{Σ} и плоштината на активната површина P .

Вкупната плоштина ќе се пресмета со формулата за плоштина на правоаголник со страни $a = 60 \text{ cm}$ и $b = 35 \text{ cm}$, $P_{\Sigma} = a \cdot b = 60 \cdot 35 = 2100 \text{ cm}^2$.

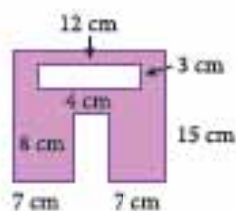
За површината на заштитната рамка добиваме $P_z = P_{\Sigma} - P = 2100 - 1736 = 364 \text{ cm}^2$.



Цртеж 5

Задача 4

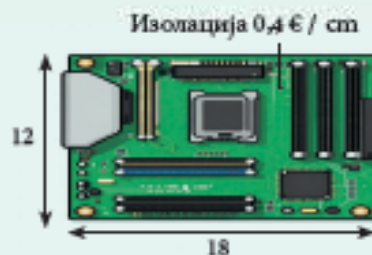
Да се определи плоштината на обоениот регион даден на цртеж 6..



Цртеж 6

Задачи за вежбање!

1. Пресметај ја плоштината на квадрат со дијагонала $7\sqrt{2}$ cm.
2. Пресметај ја плоштината на правоаголник со страна 7 cm и дијагонала 25 cm.
3. Пресметај ја плоштината на правоаголник со дијагонала 10 cm и агол меѓу дијагоналата и страната 45° .
4. Пресметај ја плоштината на правоаголник кај кој дијагоналите зафаќаат агол од 106° , а должината на дијагоналите е 10 cm.
5. Една електронска плочка има правоаголна форма со димензии 18 cm и 12 cm. (Цртеж 7)
 - а) Одреди ја плоштината на плочката.
 - б) Околу плочката се става изолационен слој. Колку ќе чини изолацијата, ако 1 cm изолационен слој чини 0,4 евра?

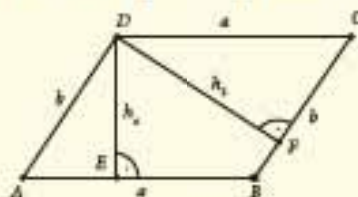


Цртеж 7

6.2 ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА ПАРАЛЕЛОГРАМ

Потсети се!

- Како се викаат отсечките $\overline{DE}$ и $\overline{DF}$ на паралелограмот $ABCD$ на цртеж 1?



Цртеж 1

- Плоштината на паралелограм е еднаква на производот од должината на една негова страна и соодветната висина спуштена на таа страна. Ако паралелограмот има страни со должини a и b , а соодветните висини имаат должини h_a и h_b , тогаш неговата плоштина се пресметува со формулите:

$$P = a \cdot h_a \text{ или } P = b \cdot h_b.$$

Пример 1

Пресметај ја плоштината на паралелограм со страни 12 cm и 5 cm ако аголот меѓу нив е 40° .

Решение:

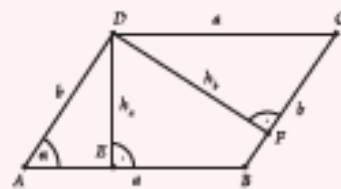
Од правоаголникот $\triangle AED$ (цртеж 2) следува дека $\sin \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{h_a}{b}$

и $h_a = b \cdot \sin \alpha$. Со замена на h_a во формулата за плоштина на

паралелограм добиваме

$$P = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin \alpha.$$

Оттука, бараната плоштина е $P = a \cdot b \cdot \sin \alpha = 12 \cdot 5 \cdot \sin 40^\circ \approx 38,57 \text{ cm}^2$.



Цртеж 2

Задача 1

Пресметај ја висината h_a на паралелограмот со страни 6 cm и 12 cm ако другата висина е 5 cm.

Пример 2

При проектирање кос покрив на индустриски објект, една од покривните површини има форма на паралелограм поради аголот на наклон и поместувањето на носечките греди. Должината на долната носечка греда изнесува 6 m, а растојанието меѓу горната и долната греда, кои се паралелни, е 2,4 m. За стабилност, по површината на покривот се поставуваат заштитни панели, при што на секој квадратен метар се додава материјал со маса 12 kg/m^2 . Определи ја:

- плоштината на покривната површина;
- вкупната маса на поставениот материјал.

Решение:

- Покривната површина е паралелограм со страна $a = 6 \text{ m}$ и висина $h_a = 2,4 \text{ m}$. Со замена на овие вредности во формулата за плоштина добиваме:

$$P = a \cdot h_a = 6 \cdot 2,4 = 14,4 \text{ m}^2.$$

Покривната површина има плоштина од $14,4 \text{ m}^2$.

- На секој квадратен метар се поставува материјал со маса 12 kg/m^2 , па вкупната маса е:

$$m = P \cdot 12 = 14,4 \cdot 12 = 172,8 \text{ kg}.$$

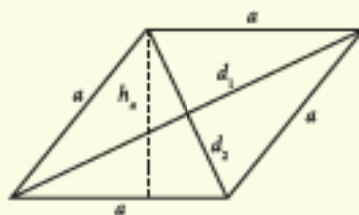
Задача 2

При геодетско мерење на кос дел од земјоделска парцела се утврдува дека површината има форма на паралелограм. Должините на две соседни страни на парцелата се 120 m и 200 m , а аголот меѓу нив изнесува 30° . За наводнување на парцелата, за секој хектар ($1 \text{ ha} = 10000 \text{ m}^2$) се потребни $2,5$ тони вода. Определи ја:

- плоштината на парцелата;
- вкупната количина вода потребна за наводнување на целата парцела.

Потсети се!

- Каков е аголот под кој се сечат дијагоналите на ромбот?
- Ромбот е, всушност, паралелограм во кој сите страни имаат иста должина, па плоштината на ромб е еднаква на производот од должината на една негова страна и соодветната висина, т.е. $P = a \cdot h_a$ (цртеж 3).
- Плоштината на ромб може да се пресмета и со следните формули: $P = a^2 \cdot \sin \alpha$ или $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, каде што α е кој било внатрешен агол на ромбот, а d_1 и d_2 се должините на дијагоналите на ромбот (цртеж 3).



Цртеж 3

Пример 3

Робот-контролор треба да го покрие подот на ромбовиден панел со сензори. Ромбот има страна со должина 12 cm , а радиусот на впишаната кружница е 3 cm .

- Пресметај ја плоштината на ромбот.
- Доколку секој квадратен сантиметар од панелот треба да биде покриен со електронски сензор што троши $0,05 \text{ W}$, колкава е вкупната потрошувачка на енергија за целиот ромб?

Решение:

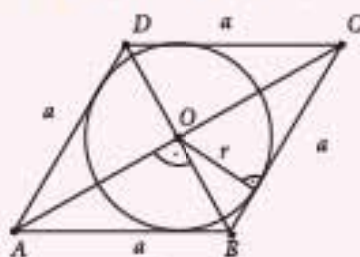
- а) Ромбот со дијагоналите е поделен на 4 еднакви триаголници. Од цртеж 4 може да забележиме дека радиусот r на впишаната кружница претставува висина на $\triangle BOC$, па имаме

$$P_{\triangle BOC} = \frac{a \cdot r}{2} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

За плоштината на ромбот добиваме $P = 4 \cdot P_{\triangle BOC} = 4 \cdot 18 = 72 \text{ cm}^2$.

- б) Ако за секој cm^2 се троши 0,05 W, вкупна потрошувачка на енергија за целиот ромб е

$$E = P \cdot 0,05 = 72 \cdot 0,05 = 3,6 \text{ W}.$$



Цртеж 4

Задача 3

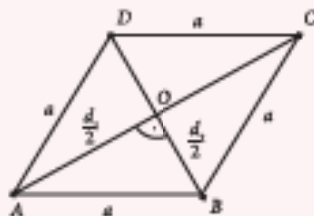
Пресметај ја висината на ромбот ако страната е 12 cm, а неговата плоштина изнесува 102 cm^2 .

Пример 4

Плоштината на ромб, чија една дијагонала е 16 cm, изнесува 240 cm^2 . Пресметај ги должината на другата дијагонала и периметарот на ромбот.

Решение:

Дадено е дека $d_1 = 16 \text{ cm}$ и $P = 240 \text{ cm}^2$. Од формулата за плоштина на ромб $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ добиваме $\frac{16 \cdot d_2}{2} = 240$, па $d_2 = \frac{240}{8} = 30 \text{ cm}$. Од правоаголниот триаголник $\triangle AOB$ (цртеж 5), според Питагоровата теорема имаме $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$, па со замена на d_1 и d_2 добиваме $a^2 = \left(\frac{16}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 289$, т.е. должината на страната на ромбот е $a = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$. Оттука, периметарот на ромбот е $L = 4 \cdot a = 4 \cdot 17 = 68 \text{ cm}$.



Цртеж 5

Задача 4

Пресметај ја плоштината на ромб со страна 12 cm и една дијагонала 10 cm.

Пример 5

Јована подготвува витраж со дизајн составен од 13 идентични ромбови како на цртежот. Вкупната ширина на витражот изнесува 40 cm, додека неговата вкупна плоштина е 260 cm^2 . Да се определат должините на дијагоналите и плоштината на секој ромб.

Решение:

Плоштината на еден ромб изнесува $P = \frac{260}{13} = 20 \text{ cm}^2$. Вкупната

ширина на дизајнот е составена од помалите дијагонали на 5

ромбови, па оттука имаме $5 \cdot d_1 = 40$, односно должината на помалата дијагонала на секој ромб

е $d_1 = 8 \text{ cm}$. Другата дијагонала на ромбот ќе ја најдеме од формулата за плоштина $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Со замена добиваме $20 = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, односно $d_2 = \frac{20}{4} = 5 \text{ cm}$.



Цртеж 6

Задача 5

Плоштината на еден ромб е 24 dm^2 , а една негова дијагонала е 8 dm . Одреди ги висината и периметарот на ромбот.

Задачи за вежбање!

1. Пресметај ја должината на поголемата страна на паралелограмот со висини 3 cm и 5 cm ако помалата страна е 6 cm .
2. Пресметај ја плоштината на паралелограм со висини 3 cm и 4 cm и агол меѓу нив од 30° .
3. Пресметај ја плоштината на ромбот со страна 10 dm и радиус на впишана кружница 4 dm .
4. Плоштината на еден паралелограм е 300 cm^2 , неговиот периметар е 70 cm , а растојанието меѓу поголемите страни е 10 cm . Одреди го растојанието меѓу помалите страни.
5. Катја дизајнира декоративна градина составена од 8 еднакви ромбови, распоредени како на цртеж 7. Плоштината на еден ромб изнесува 120 квадратни метри, а помалата дијагонала е долга 10 метри (цртеж 7). Таа сака по должината на дијагоналите да направи пешачки патеки од камен. Колкава е вкупната должина на пешачките патеки во градината?

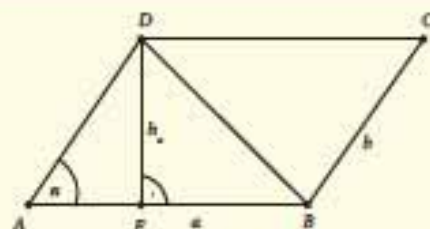


Цртеж 7

6.3 ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

Потсети се!

- Како се делат триаголниците според страните, а како според аглите?
- Колкава е плоштината на триаголник во однос на плоштината на паралелограмот кој има иста основа и иста висина со триаголникот (цртеж 1)?



Цртеж 1

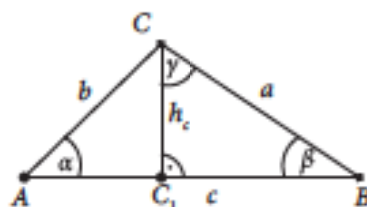
Плоштината на триаголник се пресметува како половина од плоштината на еден паралелограм затоа што $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ се складни триаголници.

Плоштината на триаголник со страни a, b, c и соодветни висини h_a, h_b и h_c се пресметува со користење на која било од следните формули:

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a, \quad P = \frac{1}{2} b \cdot h_b \quad \text{или} \quad P = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

Плоштината на триаголник може да се пресмета и со користење тригонометриски функции, кога триаголникот е зададен со две страни и аголот меѓу нив. Во продолжение ќе ја изведеме таа формула.

За $\triangle ABC$ на цртежот 2 имаме $P = \frac{1}{2} c \cdot h_c$. Од правоаголниот триаголник $\triangle AC_1C$ имаме дека $\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$, т.е. $h_c = b \cdot \sin \alpha$, а од $\triangle CC_1B$ се добива дека $\sin \beta = \frac{h_c}{a}$, односно $h_c = a \cdot \sin \beta$. Заменувајќи во формулата $P = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ добиваме: $P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$ или $P = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta$. На сличен начин се добива дека $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$.



Цртеж 2

Запомни!

Плоштината на триаголник може да се пресметува со користење на која било од следните формули:

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma \quad \text{или} \quad P = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta \quad \text{или} \quad P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

т.е. плоштината на триаголник е еднаква на половина од производот на две негови страни и синусот од аголот меѓу нив.

Пример 1

Пресметај ја плоштината на $\triangle ABC$ ако две негови страни имаат должини 5 cm и 14 cm и аголот помеѓу нив е 36° .

Решение:

Нека се дадени страните $b = 5$ cm, $c = 14$ cm и аголот меѓу нив $\alpha = 36^\circ$. Според формулата за плоштина на триаголник, имаме $P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 14 \cdot \sin 36^\circ \approx 35 \cdot 0,588 \approx 20,58 \text{ cm}^2$.

За рамнострани и правоаголен триаголник, формулите за пресметување на плоштина се сведуваат на следното:

- Во рамностраниот триаголник секој внатрешен агол изнесува 60° и ако ја означиме страната со a , тогаш неговата плоштина изнесува $P = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.
- Во правоаголен триаголник катетите се заемно нормални, па висината $h_a = b$, $h_b = a$ и со замена во формулата за плоштина на триаголник добиваме $P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$.

Запомни!

Плоштина на рамнострани триаголник со страна a се пресметува со формулата $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Плоштина на правоаголен триаголник со катети a и b се пресметува со формулата $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Задача 1

Одреди ја плоштината на правоаголниот триаголник чии катети се 12 cm и 9 cm.

Пример 2**Пример 2**

Еден инженер дизајнира триаголна рамка за спортска инсталација. Триаголната рамка има облик на правоаголен триаголник, а односот на должините на катетите е 5:12. Плоштината на рамката е 480 cm^2 . Пресметај го периметарот на рамката.

Решение:

Од односот на должините на катетите $a : b = 5 : 12$ имаме дека $a = 5k$ и $b = 12k$.

Со замена во формулата за плоштина на правоаголен триаголник $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{5k \cdot 12k}{2} = 480$, се добива $k^2 = \frac{960}{60} = 16$, т.е. $k = 4$.

Оттука, со замена на k добиваме $a = 5 \cdot 4 = 20$ cm, а $b = 12 \cdot 4 = 48$ cm.

Со примена на Питагоровата теорема добиваме $c = \sqrt{20^2 + 48^2} = \sqrt{2704} = 52$ cm.

Периметарот на рамката изнесува

$$L = a + b + c = 20 + 48 + 52 = 120 \text{ cm}.$$

Задача 2

Градежник планира да направи фонтана во форма на рамнострани триаголник. Ако висината на фонтаната (од врвот до спротивната страна) е 10 cm, пресметај:

- ја должината на страната на триаголникот;
- ја плоштината на триаголникот;
- го периметарот на триаголникот.

Запомни!

За пресметување на плоштината на произволен триаголник, ако се познати должините на трите негови страни a , b и c , се користи така наречената Херонова формула $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, каде што $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Пример 3

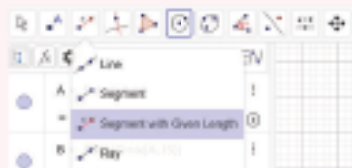
Пресметај ја плоштината на триаголникот чии страни се 15 cm, 13 cm и 14 cm. Резултатот да се провери со користење на компјутерскиот софтвер GeoGebra.

Решение:

Заменувајќи $a = 15$ cm, $b = 13$ cm и $c = 14$ cm, добиваме дека $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+13+14}{2} = 21$ cm. За плоштината на триаголникот се добива:

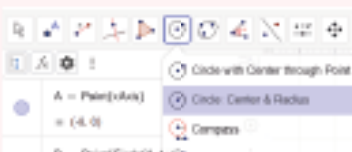
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-15)(21-13)(21-14)} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2.$$

Постапката за проверка на решението во GeoGebra е следната. Најпрво ќе нацртаме отсечка со дадена должина: ("Segment with Given Length") и за должината ќе внесеме 15 (слика 1). Тоа е страната AB на триаголникот.



Слика 1

За да се добие темето C , постапката е следна: прво, ќе нацртаме кружница со центар во точката A и радиус 14 cm и кружница со центар во точката B и радиус 13 cm. Пресекот на двете кружници ја дава точката C . Цртањето на кружници во GeoGebra се прави со избирање на опцијата "Circle: Center & Radius" од менито (слика 2).



Слика 2

За да се добие пресечната точка C , избираме "Intersect" и ја означуваме пресечната точка на кружниците (слика 3).



Слика 3

За да се конструира триаголникот, избираме многуаголник ("Polygon") и правиме триаголник низ темињата A , B и C (слика 4).



Слика 4

И на крај, за да ја пресметаме плоштината, ја избираме опцијата "Area" (слика 5) и со покажувачот притискаме врз триаголникот.



Слика 5

Ќе се добие резултат 84, што значи дека плоштината на триаголникот е $P = 84 \text{ cm}^2$, како што добивме и претходно.

Задача 3

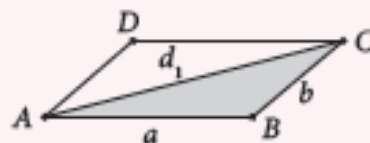
Колкава е плоштината на триаголна парцела со должини на страните 8 m, 15 m и 17 m? Резултатот да се провери со GeoGebra.

Пример 4

Пресметај ја плоштината на паралелограм со страни 10 cm, 17 cm и една дијагонала 21 cm.

Решение:

На цртеж 3 дијагоналата AC го дели паралелограмот $ABCD$ на два складни триаголници, па плоштината на паралелограмот ќе ја пресметаме како збир на плоштините на овие триаголници. Бидејќи за $\triangle ABC$ се дадени трите страни $a = 10 \text{ cm}$, $b = 17 \text{ cm}$ и $d_1 = 21 \text{ cm}$, неговата плоштина ќе ја пресметаме со Херонова формула. Најпрво, $s = \frac{10+17+21}{2} = 24$, па за плоштината на триаголникот се добива:



Цртеж 3

$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{24 \cdot (24-10) \cdot (24-17) \cdot (24-21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2.$$

За плоштината на паралелограмот добиваме $P = 2P_{\triangle ABC} = 2 \cdot 84 = 168 \text{ cm}^2$.

Задача 4

Тим од инженери анализира триаголна носечка конструкција направена од три метални шипки со должини 18 cm, 20 cm и 34 cm. За стабилност на конструкцијата, важно е да се знае најголемата можна висина на триаголникот, односно најдолгото растојание од едно теме до спротивната страна. Одреди ја најголемата висина на триаголникот формиран од овие три страни.

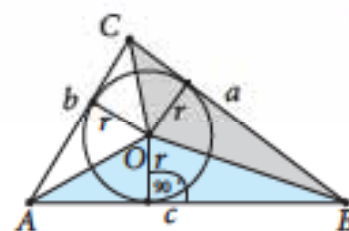
Потсети се!

- Каде се наоѓа центарот на впишана, а каде на опишана кружница во триаголник?
- Каков агол образуваат страната на триаголникот и радиусот на впишаната кружница повлечен во допирната точка?
- Каде лежи центарот на кружницата опишана околу правоаголен триаголник?

Нека r е радиусот на впишана кружница во $\triangle ABC$ со страни a , b и c . Ќе ја изразиме плоштината на триаголникот преку a , b , c и r . Радиусот r е висина на секој од триаголниците $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ и $\triangle AOC$. Плоштината на целиот триаголник $\triangle ABC$ може да се пресмета како збир од плоштините на триаголниците $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ и $\triangle AOC$, т.е. $P_{ABC} = P_{AOB} + P_{BOC} + P_{AOC}$, па оттука имаме:

$$P = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s,$$

каде што $s = \frac{a+b+c}{2}$.



Цртеж 4

Запомни!

- Ако r е радиус на впишана кружница во триаголник, тогаш плоштината на тој триаголник се пресметува со формулата $P = r \cdot s$, каде што $s = \frac{a+b+c}{2}$.
- Ако R е радиус на опишана кружница околу триаголник, тогаш плоштината на тој триаголник се пресметува со формулата $P = \frac{abc}{4R}$.

Пример 5

Во микроскопска анализа на ткиво три различни мембрански граници формираат правоаголен триаголник. Должините на катетите на овој модел се 9 μm и 12 μm . Во рамките на овој регион се наоѓа кружна реакциона зона која се допира до сите три мембрански граници. Пресметај го радиусот на кружната реакциона зона, односно радиусот на впишаната кружница во дадениот правоаголен триаголник.

Решение:

Дадени се должините на катетите $a = 9 \mu\text{m}$ и $b = 12 \mu\text{m}$, па плоштината на триаголникот е

$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54 \mu\text{m}^2.$$

Според Питагорова теорема за хипотенузата добиваме $c = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \mu\text{m}$, па

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = 18 \mu\text{m}.$$

Радиусот на впишаната кружница ќе го пресметаме со користење на формулата $P = r \cdot s$. Оттука,

$r = \frac{P}{s}$, па со замена на вредностите за P и s , добиваме дека радиусот на впишаната кружница е

$$r = \frac{54}{18} = 3 \mu\text{m}.$$

Пример 6

Пресметај го радиусот на опишаната кружница во триаголник со страни 26 cm, 28 cm и 30 cm.

Решение:

Според Хероновата формула, $s = \frac{26+28+30}{2} = 42$, а плоштината на триаголникот е

$$P = \sqrt{42 \cdot (42-26) \cdot (42-28) \cdot (42-30)} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 336 \text{ cm}^2.$$

Радиусот на опишаната кружница ќе го пресметаме со користење на формулата $P = \frac{abc}{4R}$. Оттука може да се изрази бараниот радиус:

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{26 \cdot 28 \cdot 30}{4 \cdot 336} = 16,25 \text{ cm}.$$

Задача 5

Во езерце кое има кружна форма со радиус R има островче во форма на триаголник впишан во кругот. Страните на триаголникот се 15 m, 16 m и 17 m. Во зима водниот дел од езерцето треба да се покрие за да не замрзне. Колку квадратни метри материјал ќе бидат потребни за тоа?

Пример 6

Еден инженер треба да дизајнира триаголен дел од мост (цртеж 5) кој претставува рамнокрак триаголник со основа 12 m и висина 9 m.

- Колку квадратни метри реклама може да се постави на тој дел од мостот?
- Колку метри метална конструкција се потребни за да се направи триаголниот дел од мостот?

Решение:

- а) За да определи колку квадратни метри реклама може да се постави, потребно е да се пресмета плоштината на триаголникот. Добиваме дека $P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54 \text{ m}^2$.

Значи, на триаголниот дел од мостот може да се постави реклама со површина од 54 m^2 .

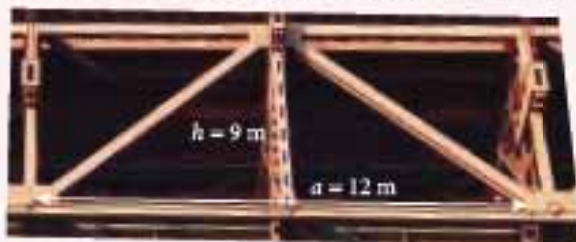
- б) Од правоаголниот триаголник ADC на цртеж 6 со примена на Питагоровата теорема имаме

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} \approx 10,82 \text{ m}.$$

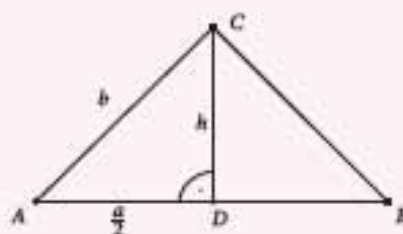
Потребно е да го пресметаме периметарот на триаголникот,

$$L = a + 2b = 12 + 2 \cdot 10,82 = 33,64 \text{ m}.$$

Значи, за да се изработи триаголниот дел од мостот, потребни се $33,64 \text{ m}$ метална конструкција.



Цртеж 5



Цртеж 6

Задачи за вежбање!

- Одреди ја најголемата висина на триаголникот чии страни се 9 cm , 10 cm и 17 cm .
- Пресметај ја плоштината на паралелограм со страни 13 cm , 20 cm и една дијагонала 21 cm .
- Пресметај ја плоштината на триаголникот ако се дадени страните $a = 7 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$ и аголот $\gamma = 36^\circ$.
- Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со основа чија должина е 12 cm и еден од аглите е 48° .
- Основата на еден рамнокрак триаголник е 40 cm , а кракот е 25 cm . Одреди ги радиусите на впишаната и на опишаната кружница.
- Компанија за производство на соларни панели треба да произведе панел како на цртежот 7.
 - Цената на 1 m^2 стакло е 50 евра. Колку чини стаклото за производство на еден соларен панел?
 - За обложување на панелот се користи метална лента која чини 8 евра за еден метар должина. Колку пари ќе чини да се обложат сите три раба на панелот?



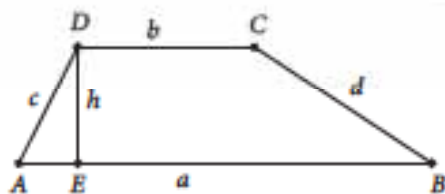
Цртеж 7

6.4 ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА ТРАПЕЗ И ДЕЛТОИД

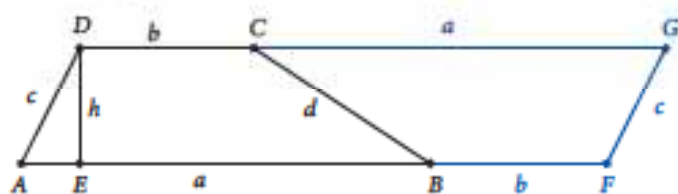
Потсети се!

- Што е траpez?
- Колку паралелни страни има траpezот и како се нарекуваат тие?
- Какви видови трапеzi постојат?

На цртеж 1 е прикажан траpez $ABCD$ со основи a и b , краци c и d и висина h . Ако страната $a = \overline{AB}$ ја продолжиме за должина $b = \overline{BF}$ и страната $b = \overline{DC}$ ја продолжиме за $a = \overline{CG}$, се добива паралелограм $AFGD$ со основа $(a + b)$ и висина h (цртеж 2). Овој паралелограм е составен од два еднакви трапеzi $ABCD$ и $GCBF$ и неговата плоштина се пресметува со формулата $P = (a + b) \cdot h$. Траpezот $ABCD$ претставува една половина од целиот паралелограм $AFGD$ и затоа за плоштината на траpezот ја добиваме формулата $P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h = \frac{a + b}{2} \cdot h$.



Цртеж 1



Цртеж 2

Запомни!

Плоштината на траpez со основи a и b и висина h се пресметува со формулата $P = \frac{a + b}{2} \cdot h$.

Пример 1

Основите на еден траpez се 18 dm и 12 dm, а неговата плоштина е 45 dm². Одреди ја висината на траpezот?

Решение:

Со замена на $a = 18$ dm, $b = 12$ dm и $P = 45$ dm² во формулата за плоштина на траpez добиваме

$$45 = \frac{18 + 12}{2} \cdot h \text{ односно } h = \frac{45}{15} = 3 \text{ dm.}$$

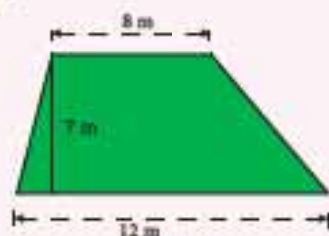
Задача 1

Еден трапез има плоштина 80 cm^2 и висина 4 cm . Должината на едната основа изнесува 25 cm . Одреди ја должината на другата основа на трапезот.

Пример 2

Во еден екопарк се планира да се уреди нова зелена површина во форма на трапез како на цртеж 3, на која ќе се посади трева.

- Колку изнесува плоштината на зелената површина?
- Ако за 1 m^2 се потребни 250 g семе, колкаво количество семе е потребно за да се засади целата површина?
- Ако 1 kg семе апсорбира приближно $1,5 \text{ kg CO}_2$ годишно, колку CO_2 ќе апсорбира новата зелена површина за една година?



Цртеж 3

Решение:

- Од цртеж 3 може да се види дека основите на трапезот се $a = 12 \text{ m}$ и $b = 8 \text{ m}$, а висината на трапезот е $h = 7 \text{ m}$. Ако ги замениме овие вредности во формулата за плоштината на трапез, добиваме:

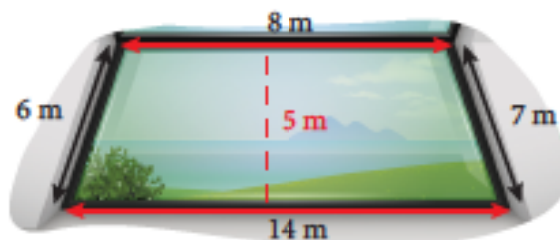
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{12+8}{2} \cdot 7 = 70 \text{ m}^2.$$

- Дадено е дека за засадување на површина од 1 m^2 потребни се 250 g семе, па за да се засади целата површина, ќе бидат потребни $70 \cdot 250 = 17\,500 \text{ g} = 17,5 \text{ kg}$ семе.
- Бидејќи 1 kg семе апсорбира приближно $1,5 \text{ kg CO}_2$ годишно, со новата зелена површина годишно ќе се апсорбираат $17,5 \cdot 1,5 = 26,25 \text{ kg CO}_2$.

Задача 2

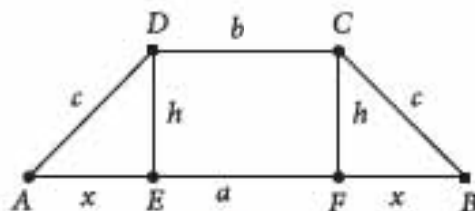
Стаклена фасада на еден модерен објект (цртеж 4) има форма на трапез.

- Колку треба да се плати за фасадата ако 1 m^2 стакло чини 120 евра.
- Ако за рамката се користи алуминиум со цена од 35 евра за метар, колкава е вкупната цена на рамката?



Цртеж 4

Еден трапез се нарекува **рамнокрак** ако двата крака на трапезот имаат еднаква должина. На цртеж 5 е прикажан рамнокрак трапез со основи a и b , крак c и висина h . Од правоаголниот триаголник AED , со примена на Питагоровата теорема добиваме $c^2 = x^2 + h^2$, каде што $x = \frac{a-b}{2}$.



Цртеж 5

Пример 3

Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи 14 cm и 6 cm и крак 5 cm.

Решение:

Од условите на задачата имаме дека $a = 14$ cm, $b = 6$ cm и $c = 5$ cm.

За делот x (цртеж 5) имаме $x = \frac{a-b}{2} = \frac{14-6}{2} = 4$ cm, а висината h ја наоѓаме од равенството

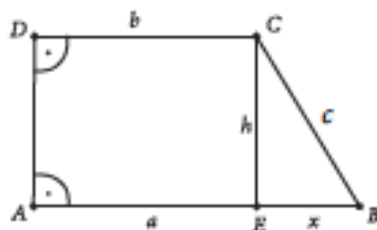
$h^2 = c^2 - x^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$. Оттука, $h = \sqrt{9} = 3$ cm. На крај, за плоштината се добива

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{14+6}{2} \cdot 3 = 30 \text{ cm}^2.$$

Задача 3

Трапез со плоштина 90 cm^2 има висина 10 cm. Одреди ги основите на трапезот ако тие се разликуваат за 4 cm.

Еден трапез се нарекува **правоаголен** ако едниот агол при основата е прав. На цртеж 6 е прикажан правоаголен трапез со основи a и b , крак c и висина h . Во овој случај должината $x = a - b$.



Цртеж 6

Пример 4

Во лабораторија за екологија се дизајнира аквариум за проучување водни растенија чија основа има форма на правоаголен трапез. За правилно движење на водата, димензиите на основата се избрани така што подолгата основа е 20 cm, пократката основа е 15 cm, а висината е 12 cm.

- Пресметај ја плоштината на основата на аквариумот.
- Пресметај го периметарот на основата, кој е потребен за поставување заштитна гумена рамка околу аквариумот.

Решение:

Од условите на задачата имаме $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, а $h = 12$ cm.

- а) За плоштината на основата на аквариумот (која е трапез) добиваме

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{20+15}{2} \cdot 12 = 210 \text{ cm}^2.$$

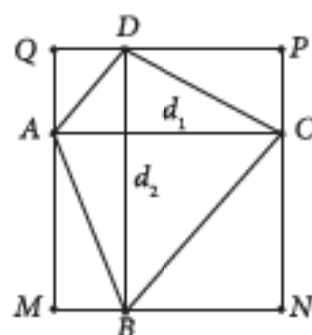
- б) За определување на периметарот на трапезот треба да ја определиме должината на кракот c (цртеж 6). Од Питагоровата теорема добиваме $c^2 = h^2 + x^2 = h^2 + (a-b)^2 = 12^2 + (20-15)^2 = 169$, па $c = 13$ cm. Вториот крак на правоаголниот трапез има иста должина како и висината на трапезот. Оттука, периметарот на трапезот е $L = 20 + 15 + 13 + 12 = 60$ cm.

Задача 4

При истражување на коритото на една река, попречниот пресек на реката се моделира како правоаголен трапез. Подолгата основа на трапезот (ширината на површината на водата) изнесува 24 m, пократката основа (ширината на дното) е 16 m, а косиот крак прави агол од 30° со подолгата основа.

- Опреди ја висината на трапезот (длабочината на реката).
- Пресметај ја плоштината на попречниот пресек на реката.
- Пресметај го периметарот на пресекот.

Нека е даден четириаголник $ABCD$ чии дијагонали d_1 и d_2 се заемно нормални. Ќе ја определиме плоштината на овој четириаголник. Ако низ темињата на тој четириаголник се повлечени прави паралелни со дијагоналите, се добива правоаголникот $MNPQ$ со страни $MN = d_1$ и $MQ = d_2$, кој е составен од четири пара правоаголни триаголници, при што триаголниците во секој пар имаат еднакви плоштини (цртеж 7). Според тоа, плоштината на четириаголникот е двапати помала од плоштината на правоаголникот $MNPQ$. Оттука следува дека плоштината на четириаголникот е $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.



Цртеж 7

Запомни!

Плоштината на четириаголник чии дијагонали се меѓусебно нормални и имаат должини d_1 и d_2 е еднаква на половина од производот на тие должини и се пресметува со формулата

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Четириаголникот кој има два пара еднакви соседни страни се нарекува **делтоид**. Најчесто делтоидот го среќаваме кај облици како змеј за летање, украсни орнаменти, дизајн на разни предмети и друго. Дијагоналите на делтоидот се заемно нормални, па плоштината на делтоидот може да се определи со формулата $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, каде што d_1 и d_2 се должините на дијагоналите на делтоидот.

Пример 5

Една компанија дизајнира дрвен декоративен панел со форма на делтоид за внатрешни видови на еден ресторан. Страните на панелот треба да бидат 10 cm и 17 cm, а дијагоналата што не е оска на симетрија е 16 cm (цртеж 8).

а) Колку квадратни метри дрво се потребни за изработка на панелот?

б) Ако цената на дрвена плоча е 2 евра за cm^2 , колкава е вкупната цена на панелот?

Решение:

а) На цртежот 9 е дадена 2Д-форма на панелот. Оттаму имаме дека $\overline{AD} = a = 10 \text{ cm}$ и $\overline{AB} = b = 17 \text{ cm}$, а $\overline{AC} = d_1 = 16 \text{ cm}$.

Од правоаголниот триаголник $\triangle DOC$ имаме

$$\overline{DO}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{OC}^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 10^2 - 8^2 = 36, \text{ односно } \overline{DO} = 6 \text{ cm.}$$

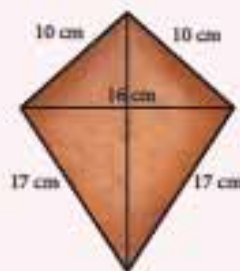
Од правоаголниот триаголник $\triangle BOC$ имаме

$$\overline{OB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 17^2 - 8^2 = 225, \text{ т.е. } \overline{OB} = 15 \text{ cm.}$$

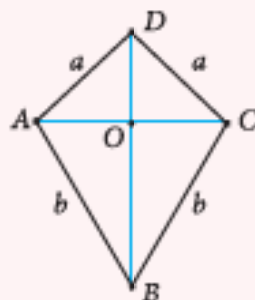
Оттука, за должината на поголемата дијагонала добиваме $d_2 = \overline{DB} = \overline{DO} + \overline{OB} = 6 + 15 = 21 \text{ cm}$, а плоштината ќе

биде еднаква на $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{16 \cdot 21}{2} = 168 \text{ cm}^2$. Значи, за изработка на декоративниот дрвен панел потребни се 168 cm^2 дрво.

б) Цената на дрвена плоча е 2 евра за cm^2 , па цената за изработка на еден дрвен панел е $168 \cdot 2 = 336$ евра.



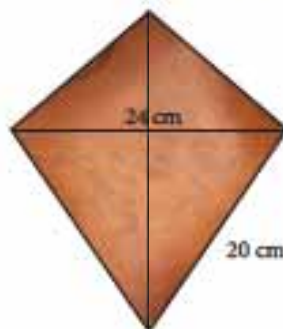
Цртеж 8



Цртеж 9

Задача 5

Една фирма треба да изработи ПВЦ рекламен панел во форма на делтоид кој ќе биде поставен во алуминиумска рамка. Панелот треба да има површина од 216 cm^2 , подолгите страни да се со должина 20 cm, а дијагоналата што не е оска на симетрија треба да има должина 24 cm (цртеж 10). Колку ќе чини изработката на алуминиумската рамка ако 1 cm се набавува по цена од 0,50 евра.



Цртеж 10

Задачи за вежбање!

1. Плоштината на еден трапез е 420 cm^2 , а должините на основите се 28 cm и 14 cm. Пресметај ја висината на трапезот?
2. Еден архитект дизајнира платформа за базен во форма на правоаголен трапез со основи 28 m и 16 m и крак што не е нормален на основата 18 m. Да се пресметаат плоштината на платформата и должината на оградата што треба да се постави околу платформата.
3. Пресметај ги основите на трапез ако нивната разлика е 5 cm, висината на трапезот е 8 cm, а неговата плоштина е 96 cm^2 .
4. Еден еколошки активист сака да направи зелена градина во форма на делтоид на покривот на една училишна зграда. Страните на градината треба да се 13 m и 20 m, а во средината треба да има дијагонални патеки за одвод на дождовницата, при што должината на патеката што е оска на симетрија треба да биде 21 m.
 - а) Пресметај ја должината на другата патека за одвод.
 - б) Ако на 1 m^2 површина можат да се засадат 4 растенија, колку растенија можат да се засадат на целата површина на градината?
5. Една електрична табла има форма на делтоид. Дијагоналата што е оска на симетрија е долга 17 cm, една од страните на делтоидот е долга 10 cm, а плоштината на таблата е 136 cm^2 .
 - а) Пресметај колку лента е потребна како обвивка на електричната табла.
 - б) Ако секоја компонента зазема 2 cm^2 , колку компоненти може да се сместат на таблата?

6.5 ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА КРУГ И ДЕЛОВИ ОД КРУГ

Потсети се!

- Што е кружница?
- Што е круг?
- Колку степени изнесува полниот агол?

Периметарот на кружница со радиус r се пресметува со формулата $L = 2\pi r$, а плоштината на кругот со ист радиус се пресметува со формулата $P = r^2 \pi$. Овие формули се учени во претходните години од образованието и затоа ќе ги користиме како познати.

Пример 1

Кружна соларна платформа (цртеж 1) има периметар 62,8 m.

- Одреди ги радиусот и плоштината на платформата.
- Колкава е вкупната моќност на соларната платформа ако 1 m^2 произведува 240 W електрична енергија?
- Колку вакви платформи се потребни за да се обезбедат најмалку 226 kW електрична енергија?



Цртеж 1

Решение:

- Од формулата за периметар на круг добиваме $62,8 = 2\pi r$, односно $r = \frac{62,8}{2 \cdot 3,14} = 10 \text{ m}$. Со замена на вредноста за радиусот во формулата за плоштина добиваме $P = r^2 \pi = 10^2 \pi = 314 \text{ m}^2$.
- Вкупната моќност на соларната платформа изнесува $314 \cdot 240 = 75360 \text{ W} = 75,36 \text{ kW}$.
- За да се обезбедат најмалку 226 kW електрична енергија, потребни се приближно $226 : 75,36 \approx 3$ вакви соларни платформи.

Задача 1

Во еден земјоделски систем за наводнување се користат две кружни црева кои носат вода до една нива. Дијаметрите на цревата се 10 cm и 24 cm. Планирано е тие да се заменат со едно поголемо црево кое ќе има ист проток на вода. Одреди го дијаметарот на новото црево.

Пример 2

Еден телекомуникациски оператор поставува квадратна основа за антена со плоштина 196 cm^2 . Во основата е сместен кружен заштитен модул, кој е впишан во квадратната основа.

- Колкава е плоштината на кружниот заштитен модул?
- Колкава површина од основата останува непокриена?

Решение:

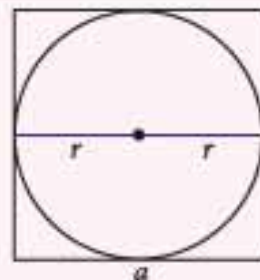
- Од формулата за плоштина на квадрат добиваме $a^2 = 196$ и $a = 14 \text{ cm}$. Потоа, поради тоа што дијаметарот на кругот е еднаков на страната на квадратот (цртеж 2), т.е. $d = a$, за радиусот добиваме

$$r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}.$$

Плоштината на кружниот заштитен модул изнесува $P = r^2\pi = 7^2\pi = 49\pi \text{ cm}^2$.

- Површината од основата која останува непокриена ќе ја пресметаме како разлика од плоштината на целата квадратна основа и плоштината на кружниот модул,

$$P = 196 - 49\pi = 42,14 \text{ cm}^2.$$



Цртеж 2

Задача 2

Една фабрика за слатки прави квадратна картонска кутија за колаче. Плоштината на основата на кутијата е 225 cm^2 . Во кутијата се става тркалезно колаче кое е впишано во квадратната основа (колачето ја допира секоја од четирите страни).

- Колкав е дијаметарот на колачето?
- Колкав е обемот на колачето?
- Колкав процент од основата на кутијата не е покриен од колачето?

Пример 3

Тркалото на еден електричен велосипед има радиус $r = 35 \text{ cm}$. За време од 2 минути тркалото прави 180 целосни ротации.

- Колкаво растојание поминал велосипедот?
- Колкава е средната брзина на велосипедот во m/s ?

Решение:

Една ротација на тркалото одговара на обемот на кружницата, кој изнесува:

$$L = 2r\pi = 2 \cdot 35 \cdot \pi = 70\pi \text{ cm} = 0,7\pi \text{ m}.$$

Тркалото направило 180 целосни ротации, па растојанието кое го поминал велосипедот е

$$s = 180 \cdot L = 180 \cdot 0,7\pi = 126\pi \text{ m}.$$

$$s \approx 126 \cdot 3,14 = 395,6 \text{ m}.$$

- Средната брзина за време од $2 \text{ min} = 120 \text{ s}$ ја пресметуваме со формулата

$$v = \frac{s}{t} = \frac{126\pi}{120} = 1,05\pi \text{ m/s},$$

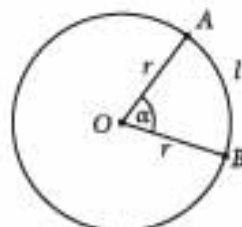
$$\text{или } v = 1,05\pi = 1,05 \cdot 3,14 \approx 3,3 \text{ m/s}.$$

Задача 3

Тркалото на еден електричен скутер има дијаметар од 80 cm. Кое растојание го поминал скутерот ако направил 150 ротации со тркалата?

Делот од кружницата кој му одговара на одреден централен агол се вика **кружен лак** и тој се мери во истата единица мерка во која се мери и периметарот на кружницата. На цртежот 3 е прикажана должината на кружен лак $AB = l$ кој одговара на централен агол α . Периметарот на целата кружница е $L = 2\pi r$ и одговара на централен агол од 360° . Оттука се добива пропорцијата $l : \alpha = 2\pi r : 360^\circ$, од каде што добиваме дека

$$l = \frac{2\pi r \alpha}{360^\circ} = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}.$$



Цртеж 3

Запомни!

Должината на кружниот лак што одговара на централен агол α , во кружница со радиус r , се пресметува со формулата $l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$.

Пример 4

На кружна рекламна табла (цртеж 4) со радиус 15 cm треба да се постави тенка ЛЕД-лента која ќе го покрие кружниот лак од рекламната табла кој одговара на централен агол од 30° . Колкава е должината на таа ЛЕД-лента?



Цртеж 4

Решение:

Во задачата се дадени $r = 15$ cm и $\alpha = 30^\circ$. За да се определи должината на ЛЕД-лентата, потребно е да се пресмета должината на кружниот лак што одговара на кружница со радиус 15 cm и централен агол од 30° , па со замена во формулата добиваме

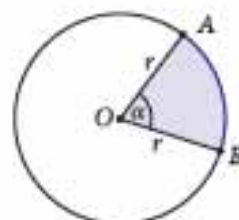
$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ} = \frac{15 \cdot \pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} = 2,5\pi \approx 2,5 \cdot 3,14 = 7,85 \text{ cm}.$$

Задача 4

Една велосипедска патека во парк прави кружна кривина со радиус 600 m. Колкав е централниот агол на делот од патеката што е закривен, ако должината на патеката што соодветствува на него е 150 m.

Кружен исечок или *кружен сектор* се нарекува делот од кругот што е ограничен со два негови радиуси и централниот агол што е зафатен со тие радиуси (обоениот дел на цртеж 5). Односот на плоштината P на делот од кругот што одговара на централен агол α и аголот α е еднаков на односот на плоштината $r^2\pi$ на целиот круг и полниот агол од 360° , односно $P : \alpha = r^2\pi : 360^\circ$. Оттука добиваме дека плоштината на кружниот исечок е еднаква на

$$P = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ}.$$



Цртеж 5

Пример 5

Еден сензор кој е поставен на столб (цртеж 6) има кружен опсег со радиус 12 m. Сензорот покрива само дел од просторот кој одговара на централен агол од 60° . Колкава е плоштината на просторот што го покрива сензорот?

Решение:

Со замена на $r = 12$ m и $\alpha = 60^\circ$ во формулата за плоштина на кружен исечок добиваме

$$P = \frac{12^2 \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} \approx 75,36 \text{ m}^2.$$

Плоштината на просторот што го покрива сензорот изнесува приближно $75,36 \text{ m}^2$.



Цртеж 6

Задача 5

На еден кружен плоштад со радиус 12 m осветлен е само дел од површината во форма на кружен исечок, која има плоштина $36\pi \text{ m}^2$.

- Колкав е централниот агол на осветлениот дел?
- Колкава е должината на кружниот лак што го ограничува осветлениот дел?

Делот од кругот зафатен со еден негов лак и соодветната тетива се вика кружен отсечок. Во кругот на цртежот 7 отсечокот е определен со тетивата AB и со централниот агол α . Плоштината на кружниот отсечок ACB се пресметува како разлика на плоштината P_1 на кружниот исечок AOB и плоштината P_2 на рамнокракиот $\triangle OAB$, т.е.

$$P = P_1 - P_2$$



Цртеж 7

Пример 6

Во кружница со радиус $r = 10$ cm, тетивата AB отсекува кружен отсечок. Централниот агол што го потпира тетивата е $\alpha = 72^\circ$.

- Пресметај ја плоштината на кружниот отсечок.
- Пресметај ја должината на тетивата AB .
- Пресметај ја должината на лакот $\widehat{AB}$ што го ограничува отсечокот.

Решение:

- а) Плоштината на кружниот отсечок, соодветен на централниот агол од $\alpha = 72^\circ$, ќе ја пресметаме како $P = P_1 - P_2$, каде што P_1 е плоштината на кружниот исечок AOB , а P_2 е плоштината на рамнокракиот $\triangle OAB$. Нaoѓаме:

$$P_1 = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{10^2 \pi \cdot 72^\circ}{360^\circ} = 20\pi = 20 \cdot 3,14 = 62,8 \text{ cm}^2;$$

$$P_2 = \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{10^2 \cdot \sin 72^\circ}{2} = 50 \cdot \sin 72^\circ \approx 50 \cdot 0,95 = 47,5 \text{ cm}^2.$$

Оттука, за плоштината на кружниот отсечок добиваме $P = P_1 - P_2 = 62,8 - 47,5 = 15,3 \text{ cm}^2$.

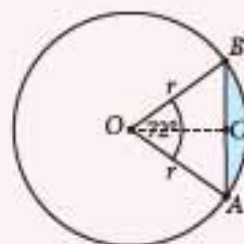
- б) За определување на должината на тетивата, ќе тргнемe од правоаголниот триаголник $\triangle ACO$. Нaoѓаме

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{r}, \text{ т.е. } AC = r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 10 \cdot \sin 36^\circ = 10 \cdot 0,59 = 5,9 \text{ cm}.$$

$$\text{Бидејќи } AB = 2 \cdot AC = 2 \cdot 5,9 = 11,8 \text{ cm}.$$

- в) За должината на лакот $\widehat{AB}$, се добива:

$$l = \frac{r \pi \alpha}{180^\circ} = \frac{10 \cdot \pi \cdot 72^\circ}{180^\circ} = 4\pi \approx 4 \cdot 3,14 = 12,56 \text{ cm}.$$



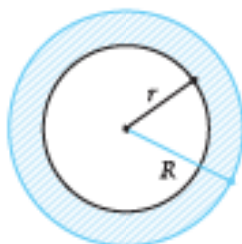
Цртеж 8

Задача 6

Стаклен прозорец на подморница има форма на дел од кружница (кружен отсечок). Прозорецот е изработен од кружно стакло со радиус $r = 40 \text{ cm}$. Металната рамка што го држи прозорецот го ограничува протокот на светлина на тој начин што тетивата на стаклото одговара на централен агол од 60° .

- Пресметај ја површината на стаклото што пропушта светлина (плоштина на кружниот отсечок).
- Пресметај ја должината на металната рамка што оди по работ на прозорецот (збир од должината на лакот и тетивата).
- Ако стаклото тежи 8 kg по m^2 , колкава е масата на прозорецот? (Резултатот изрази го во kg .)

Кружен прстен е делот од рамнината ограничен со две концентрични кружници со различни радиуси. Плоштината на кружниот прстен (цртеж 9) е еднаква на разликата од плоштините на круговите со радиуси R и r , т.е. $P = R^2 \pi - r^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi$.



Цртеж 9

Пример 7

На атлетски стадион се планира да се направи кружна патека со тартан (цртеж 10), при што надворешниот радиус на патеката треба да биде 12 m, додека ширината на тартанот да е 3 m. Колку изнесува површината на тартанот што треба да се постави?

Решение:

Кружната патека со тартан претставува кружен прстен со радиуси $R = 12$ m и $r = 12 - 3 = 9$ m, па според формулата добиваме

$$P = (R^2 - r^2)\pi = (12^2 - 9^2)\pi = 63\pi \approx 198 \text{ m}^2.$$



Цртеж 10

Задача 7

Во водоводен систем се користи гумен заштитен прстен кој има форма на кружен прстен. Надворешниот радиус на прстенот е $R = 12$ cm, а внатрешниот радиус е $r = 8$ cm.

- Пресметај ја плоштината на заштитниот прстен.
- Колкава е вкупната должина на работ на прстенот (збир од надворешниот и внатрешниот обем)?
- Ако за изработка на прстенот се потребни 0,09 kg гума по 100 cm^2 , колкава е масата на еден заштитен прстен?
- Ако во еден пакет се ставаат 25 вакви прстени, колкава е вкупната маса на пакетот?

Задачи за вежбање!

- Едно тркало од трактор се свртило 12 пати, при што тракторот изминал 37,68 m.
 - Најди го радиусот на тркалото.
 - Колку метри ќе помине тракторот ако тркалото направи уште 15 ротации?
- Во еден инженерски проект се користат два кружни електрични кабли со радиуси 2 mm и 3 mm, при што инженерот планира да ги замени со еден поголем кабел кој ќе има ист периметар како збирот од периметрите на двата стари кабли, за да не се промени отпорноста. Колку изнесува плоштината на напречниот пресек на новиот кабел?
- Два вентилатори имаат форма на кружници, при што односот на нивните периметри е 3:5, а радиусот на помалиот вентилатор е 18 cm. Одреди ги радиусот и плоштината на поголемиот вентилатор.
- Дел од земјоделска парцела е ограден по кружна линија со радиус 25 m и агол од 144° . Колкава е вкупната цена на оградата ако 1 метар должина чини 12 евра?
 - Кружна нива со радиус 50 m во средината има кружен резервоар за вода со радиус 10 m.
 - Колкава е обработливата површина на нивата?
 - Колкав е вкупниот приход од обработка на нивата ако приходот изнесува 0,8 евра по 1 m^2 .

6.6 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПИРАМИДА

Потсети се!

- Кои се основни елементи на една пирамида?
- Наброј ги пресеците на пирамида со рамнина.

Запомни!

Плоштината P на една пирамида се пресметува како збир на плоштината на основата (B) и плоштината на бочната површина (M), т.е.

$$P = B + M$$

Кај секоја пирамида бочните ѕидови се триаголници.

Пример 1

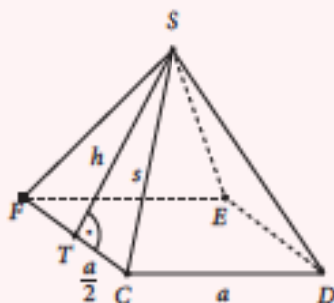
Опреди ја плоштината на правилна четириаголна пирамида со основен раб 10 cm и бочен раб 13 cm.

Решение:

Основата на правилна четириаголна пирамида е квадрат со страна $a = 10$ cm, а должината на нејзиниот бочен раб е $s = 13$ cm. Оттука, плоштината на основата е $B = a^2 = 10^2 = 100$ cm². Од правоаголниот триаголник $\triangle CTS$ (цртеж 1), според Питагоровата теорема имаме $s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, од каде што следува

$$h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 169 - 25 = 144.$$

Значи, должината на апотемата на пирамидата е $h = 12$ cm. Сега, плоштината на една бочна страна е $\frac{a \cdot h}{2}$, па плоштина на бочната површина е $M = 4 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 2 \cdot a \cdot h$. Со замена на вредностите за a и h добиваме: $M = 2 \cdot a \cdot h = 2 \cdot 10 \cdot 12 = 240$ cm². Плоштината на пирамидата е $P = B + M = 100 + 240 = 340$ cm².



Цртеж 1

Активност

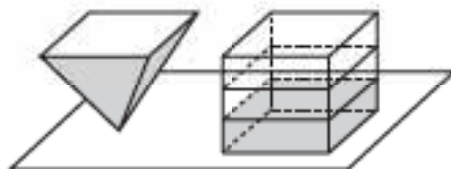
Покривот на една зграда е правилна четириаголна пирамида со основен раб 8 m, а висините на бочните ѕидови изнесуваат 5 m. Ако зградата треба да се покрие со лим кој чини 1800 денари за 1 m², колку ќе изнесува покривањето?

Потсети се!

- Наведи ги основните елементи на призма.
- Волуменот на призма се пресметува по формулата $V = B \cdot H$, каде што B е плоштината на основата на призмата, а H е висината на призмата.

Нека имаме два сада, едниот во форма на призма, а другиот во форма на пирамида, при што тие имаат еднакви основи и висини, како на цртежот 2.

Ако садот со облик на призма го наполниме со ситен песок и потоа тој песок го истуриме во садот со облик на пирамида, ќе забележиме дека со песокот на призмата три пати ќе се наполни садот во облик на пирамида.



Цртеж 2

Од овој експеримент заклучуваме дека волуменот на пирамидата е три пати помал од волуменот на призмата. Бидејќи волуменот на призмата се пресметува со формулата $V = B \cdot H$, добиваме дека волуменот на пирамида е $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$.

Запомни!

Волуменот V на која било пирамида е еднаков на една третина од производот на висината H и плоштината на основата B , т.е. $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$ или $V = \frac{B \cdot H}{3}$.

Пример 2

Опреди го волуменот на триаголна пирамида чии основни рабови се 13 cm, 14 cm и 15 cm, а висината на пирамидата изнесува 24 cm.

Решение:

Прво ќе ја пресметаме плоштината на основата, која е разностран триаголник, со примена на Хероновата формула.

Пресметуваме $s = \frac{13+14+15}{2} = 21 \text{ cm}$, па така добиената вредност ја заменуваме во формулата за плоштина на триаголник, но ја означуваме со B ,

$$B = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} \\ = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \text{ cm}^2.$$

Заменуваме во формулата за волумен и добиваме $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{84 \cdot 24}{3} = \frac{2016}{3} = 672 \text{ cm}^3$.

Задача 1

Пресметај го волуменот на правилна четириаголна пирамида со дијагонала на основата 24 cm и бочен раб 20 cm.

Пример 3

Дадена е пирамида чија основа е ромб со дијагонали 18 cm и 10 cm, нејзиниот помал дијагонален пресек има плоштина 15 dm^2 , а подножјето на висината се наоѓа во пресекот на дијагоналите. Пресметај го волуменот на пирамидата.

Решение:

Ќе ги означиме дадените податоци $d_1 = 18 \text{ cm}$, $d_2 = 10 \text{ cm}$, $Q = 15 \text{ dm}^2 = 1500 \text{ cm}^2$.

Помалиот дијагонален пресек на пирамидата е триаголник со основа $d_2 = 10 \text{ cm}$ и висина H . Оттука, неговата плоштина е $Q = \frac{d_2 \cdot H}{2}$. Со замена добиваме $1500 = \frac{10 \cdot H}{2}$, т.е. $H = \frac{1500 \cdot 2}{10} = 300 \text{ cm}$.

Од формулата за плоштина на ромб ја пресметуваме плоштината на основата на пирамидата

$$B = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{18 \cdot 10}{2} = 90 \text{ cm}^2.$$

За волуменот на пирамидата имаме $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{90 \cdot 300}{3} = 9000 \text{ cm}^3$.

Задача 2

Нека е дадена пирамида со волумен 720 cm^3 чија основа е правоаголник со страни 18 cm и 10 cm, и нека подножјето на висината се наоѓа во пресекот на дијагоналите на основата. Да се одреди бочната плоштина на пирамидата.

Пример 4

Стаклен покрив има форма на правилна четириаголна пирамида со основа 6 cm и висина 4 cm. Дали волуменот на покривната конструкција (просторот што се наоѓа меѓу покривот и таванот на објектот) е поголем од 40 cm^3 ? Решението да се провери со GeoGebra.

Решение:

Од тоа што е дадено дека пирамидата е правилна, следува дека основата на пирамидата е квадрат чија плоштина е $B = 6^2 \text{ cm}^2$. Потоа, од формулата за волумен на пирамида следува $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{36 \cdot 4}{3} = 48 \text{ cm}^3$. Значи волуменот на просторот под покривот е поголем од 48 cm^3 .

Решението ќе го провериме со користење на GeoGebra. Најпрво, избираме правилен многуаголник (Regular Polygon) (слика 1 а)), нанесуваме отсечка со должина 6 cm и во менито го внесуваме бројот на темиња на правилен многуаголник (слика 1 б)).



Слика 1

За да го отвориме прозорецот за 3D во GeoGebra, од трите хоризонтални црти во десниот горен агол избираме "View" (слика 2 а)) и го селектираме полето "3D Graphics" (слика 2 б)).



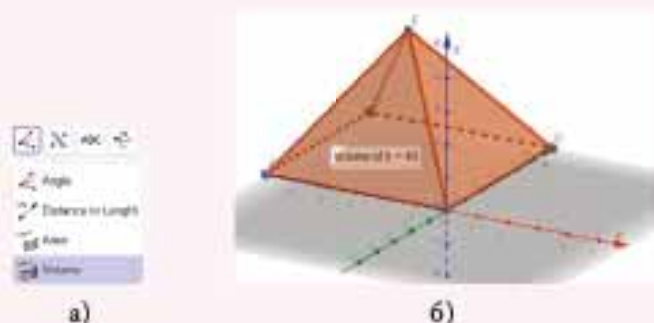
Слика 2

Од 3D делот избираме "Extrude to Pyramid" (слика 3 а)), го селектираме квадратот и задаваме вредност за висината на пирамидата (слика 3 б)).



Слика 3

На крај, за пресметување на волуменот на пирамидата, ја избираме алатката за пресметување волумен (слика 4 а)) и на пирамидата ќе го добиеме резултатот (слика 4 б)).



Слика 4

Се добива дека волуменот е 48, со што се потврдува претходно добиениот резултат.

Пример 5

Изложбена сала има форма на права призма со правоаголна основа со должина $a = 8$ m, ширина $b = 6$ m и висина $H_1 = 4$ m. Покривот на салата е пирамида со истата правоаголна основа и висина $H_2 = 3$ m.

- Се смета дека за удобен престој на секој посетител се потребни најмалку 4 m^3 од внатрешниот волумен на салата. Одредете го максималниот број посетители што може истовремено да престојуваат во салата.
- Колку квадратни метри материјал за покривот се потрошени ако подот (основата на пирамидата) е изработен од друг материјал?

Решение:

- Изложбената сала со покривот е дадена на Цртеж 3. Салата има форма на призма со правоаголна основа со страни $a = 8$ m, ширина $b = 6$ m и висина $H_1 = 4$ m. Оттука, волуменот на призмата е

$$V_1 = B \cdot H_1 = a \cdot b \cdot H_1 = 8 \cdot 6 \cdot 4 = 192 \text{ m}^3.$$

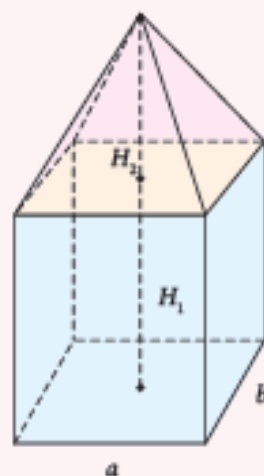
Покривот на салата е пирамида со истата правоаголна основа и со висина $H_2 = 3$ m. Волуменот на покривот е

$$V_2 = \frac{B \cdot H_2}{3} = \frac{a \cdot b \cdot H_2}{3} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 3}{3} = 48 \text{ m}^3.$$

Вкупниот волумен на објектот е $V = V_1 + V_2 = 192 + 48 = 240 \text{ m}^3$.

Бидејќи за секој посетител се потребни 4 m^3 , максималниот број на посетители на салата е $N = \frac{240}{4} = 60$.

- Во овој случај се бара плоштина на бочната површина на пирамидата. Основата е од друг материјал и таа не влегува во пресметката. За да ја определиме оваа плоштина, потребно е да ги определиме висините на триаголниците што ги претставуваат бочните ѕидови. Основата е правоаголник, па ќе имаме два бочни ѕида кои се триаголници со основа $a = 8$ m и два бочни ѕида кои се триаголници со страна $b = 6$ m. Од цртеж 4, за висините на триаголниците со основа a и со основа b , соодветно, наоѓаме:



Цртеж 3

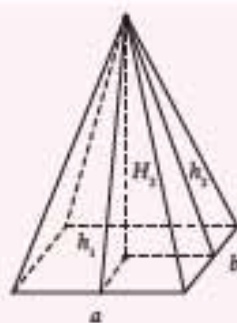
$$\text{— за страните со основа } a: h_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + H_1^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2};$$

$$\text{— за страните со основа } b: h_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H_1^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 3^2} = 5.$$

Плоштината на бочната површина на пирамидата ќе биде

$$M = 2 \cdot \frac{a \cdot h_1}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_2}{2} = a \cdot h_1 + b \cdot h_2 = 8 \cdot 3\sqrt{2} + 6 \cdot 5 = 24\sqrt{2} + 30 \approx 63,9 \text{ m}^2.$$

Значи, за покривот се потрошени приближно 64 m^2 материјал.



Цртеж 4

Задача 3

Резервоар за вода има форма на права призма со квадратна основа, врз која е поставена пирамида со квадратна основа како покрив. Страната на квадратната основа е $a = 4 \text{ m}$, висина на призмата е $H_1 = 5 \text{ m}$, а висина на пирамидата е $H_2 = 3 \text{ m}$.

- Пресметај го вкупниот волумен на резервоарот.
- Колку m^2 лим се потребни за обложување на резервоарот ако подот не се обложува?
- Ако 1 m^3 вода тежи 1000 kg , колкава е масата на водата кога резервоарот е целосно полн (заедно со покривот)?

Задачи за вежбање!

- Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна пирамида со висина 8 dm и плоштина на основата 144 dm^2 .
- Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна пирамида со бочен раб 25 cm и апотема 24 cm .
- Пресметај ја бочната плоштина на правилна триаголна пирамида со висина 6 cm и апотема 10 cm .
- Еден објект за складирање жито има облик на правилна четириаголна пирамида со основен раб 6 m и висина 4 m .
 - Колку жито собира во објектот.
 - Колкави се трошоците за покривање на страните на објектот ако за покривање на 1 m^2 се потребни 2500 денари.
- Скулптура во парк има форма на пирамида со квадратна основа. Страната на основата е долга $a = 6 \text{ m}$, а висината на пирамидата е $H = 4 \text{ m}$.
 - Пресметај го волуменот на скулптурата. Резултатот да се провери со GeoGebra.
 - Колкава е вкупната површина на пирамидата (вклучувајќи ја и основата)?
 - Колку квадратни метри материјал се потребни ако се обложуваат само страничните страни?
- Стаклен покрив на атриум има форма на пирамида со правоаголна основа со димензии $a = 10 \text{ m}$ и $b = 6 \text{ m}$. Вертикалната висина на пирамидата е $H = 3 \text{ m}$.
 - Пресметај го волуменот на воздухот под покривот. Резултатот да се провери со GeoGebra.
 - Пресметај ја површината на стаклото потребно за покривот (без основата).
 - Ако 1 m^2 стакло тежи 25 kg , колкава е вкупната маса на покривот?

6.7 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПОТСЕЧЕНА ПИРАМИДА

Потсети се!

- Што претставува паралелниот пресек на пирамида?
- Какви многуаголници се меѓу себе паралелниот пресек и основата на пирамида?
- Плоштината на рамнокрак трапез со основи a и b и висина h се пресметува со формулата

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Запомни!

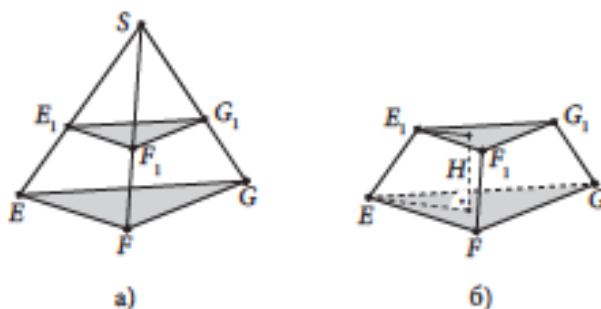
Потсечена пирамида се нарекува делот од пирамидата што се наоѓа помеѓу еден нејзин паралелен пресек и основата.

На цртежот 1 а) е претставена триаголна пирамида $SEFG$ и еден нејзин паралелен пресек $E_1F_1G_1$, а на цртежот 1 б) е претставена потсечената триаголна пирамида $EFGG_1F_1E_1$, која е добиена од пирамидата $SEFG$.

Основата и паралелниот пресек на пирамидата се нарекуваат **основи** на потсечената пирамида.

Растојанието меѓу рамнините на кои лежат основите се нарекува **висина** на потсечената пирамида и се означува со H .

Сидовите што не се основи се нарекуваат **бочни сидови** и тие ја сочинуваат **бочната површина** на потсечената пирамида.



Цртеж 1

Каков вид четириаголници се бочните сидови на потсечената пирамида?

Запомни!

Плоштината P на потсечена пирамида се пресметува со формулата

$$P = B + B_1 + M,$$

каде што B и B_1 се плоштини на основите, а M е плоштината на бочната површина.

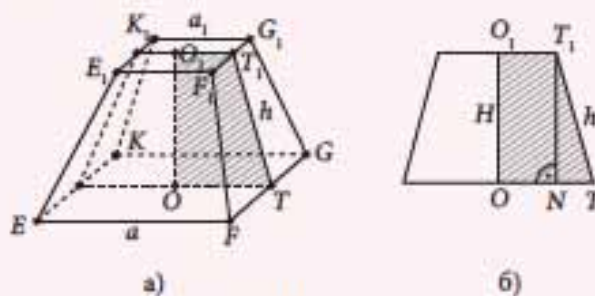
Пример 1

Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна потсечена пирамида со основни рабови 18 cm и 8 cm и висина 12 cm.

Решение:

Дадено е дека должините на страните на основите на потсечената пирамида се $a = 18$ cm, $a_1 = 8$ cm, а нејзината висина е $H = 12$ cm (цртеж 2). Бидејќи основите на потсечената пирамида се квадрати, за нивните плоштини добиваме:

$$B = a^2 = 18^2 = 324 \text{ cm}^2, \quad B_1 = a_1^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2.$$



Цртеж 2

На цртежот 2 б) е претставен пресекот на потсечената пирамида што минува низ пресекот на дијагоналите на основите и низ средините на основните рабови. Од правоаголникот ΔTNT_1 имаме:

$$h^2 = \overline{TT_1}^2 = \overline{TN}^2 + \overline{NT_1}^2 = \left(\frac{a-a_1}{2}\right)^2 + H^2 = \left(\frac{18-8}{2}\right)^2 + 12^2 = 169,$$

од каде што добиваме дека $h = \sqrt{169} = 13$ cm.

Сите четири бочни видови се рамнокраки трапези со висина h , па затоа за бочната плоштина имаме

$$M = 4 \cdot \frac{a+a_1}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{18+8}{2} \cdot 13 = 676 \text{ cm}^2.$$

И на крајот, заменуваме во формулата за плоштина и добиваме

$$P = B + B_1 + M = 324 + 64 + 676 = 1064 \text{ cm}^2.$$

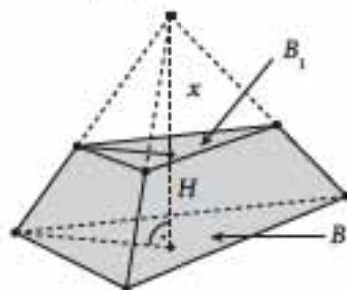
Задача 1

Основните рабови на правилна четириаголна потсечена пирамида се 26 m и 8 m, а бочниот раб е 15 m. Пресметај ја плоштината на таа пирамида.

Потсети се!

- Како се пресметува волумен на пирамида?
- Како се однесуваат паралелните пресеци на пирамида?
- Каква е врската меѓу основите на потсечена пирамида?

За да ја определеме формулата за пресметување волумен на потсечена пирамида, ќе постапиме на следниот начин. Нека е дадена една потсечена пирамида како на цртеж 3, која е дополнета до „цела“ пирамида. Нека висината на дополнетиот дел ја означиме со x .



Цртеж 3

Користејќи го односот на плоштините на паралелните пресеци и висините на пирамидите, добиваме $B : B_1 = (H + x)^2 : x^2$.

Со коренување на двете страни на равенството имаме

$$\sqrt{B} : \sqrt{B_1} = (H + x) : x,$$

т.е.

$$x = \frac{H\sqrt{B_1}}{\sqrt{B} - \sqrt{B_1}} = \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1}.$$

Волуменот на потсечена пирамида го добиваме како разлика на волуменот на целата пирамида и волуменот на дополнетиот дел,

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot (H + x) - \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot H + B \cdot x - B_1 \cdot x] = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot H + (B - B_1) \cdot x].$$

На крајот, ако во последната формула го замениме добиениот израз за x , добиваме:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left[B \cdot H + (B - B_1) \cdot \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1} \right] = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}].$$

Запомни!

Волуменот на потсечена пирамида се пресметува со формулата: $V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}]$

Пример 2

Пресметај го волуменот на правилна четириаголна потсечена пирамида со основни рабови 30 cm и 15 cm и висина $H = 18$ cm.

Решение:

Основите на потсечената пирамида се квадрати со страни $a = 30$ cm и $a_1 = 15$ cm, па плоштините на основите се $B = 30^2 = 900$ cm² и $B_1 = 15^2 = 225$ cm².

Со замена во формулата за волумен на потсечена пирамида се добива:

$$V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}] = \frac{18}{3} [900 + 225 + \sqrt{900 \cdot 225}] = 9450 \text{ cm}^3.$$

Задача 2

Пресметај го волуменот на правилна тристрана потсечена пирамида со основни рабови 10 cm и 5 cm и висина $H = 12$ cm.

Пример 3

Плоштините на основите на една потсечена пирамида се 36 cm^2 и 16 cm^2 , а нејзината висина е 5 cm. Пресметај го волуменот на целата пирамида и волуменот на дополнетиот дел.

Решение:

Од условот на задачата е дадено дека $B = 36 \text{ cm}^2$, $B_1 = 16 \text{ cm}^2$ и $H = 5$ cm. Користејќи го односот на плоштините на основите и висините на целата пирамида и дополнетата пирамида, имаме:

$$B : B_1 = (H + x)^2 : x^2,$$

т.е.

$$36 : 16 = (5 + x)^2 : x^2.$$

Со коренување на двете страни на равенството добиваме

$$6 : 4 = (5 + x) : x,$$

$$6x = 20 + 4x,$$

т.е. $x = 10$ cm. Волуменот на целата пирамида е

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 15 = 180 \text{ cm}^3,$$

а волуменот на дополнителниот дел е $V_1 = \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 10 = \frac{160}{3} \text{ cm}^3$.

Задача 2

Плоштините на основите на една потсечена пирамида се 200 dm^2 и 50 dm^2 , а висината на целата пирамида е 24 dm. Пресметај го волуменот на потсечената пирамида.

Пример 4

Еден лимен сад со форма на правилна четириаголна потсечена пирамида, со основни рабови 20 dm и 10 dm (поголемата основа е одозгора) е наполнет со шеќер. Целото количество шеќер било продадено за 56000 денари.

- Колку изнесува волуменот на садот ако се знае дека секој килограм шеќер е продаден за 20 денари и дека 1 dm^3 содржи приближно 1 kg шеќер?
- Колку е длабок садот?
- Колку лим е употребен да се направи садот без капак (за капак се смета поголемата основа)?

Решение:

- а) Бидејќи вкупната количина шеќер е продадена за 56000 денари, а 1 kg бил продаден за 20 денари, волуменот на садот ќе го пресметаме како $V = 56000 : 20 = 2800 \text{ kg}$, односно $V = 2800 \text{ dm}^3$.
- б) Во условот на задачата е дадено дека $a = 20 \text{ dm}$, $a_1 = 10 \text{ dm}$, па со примена на формулата за

волумен на потсечена пирамида $V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}]$ имаме:

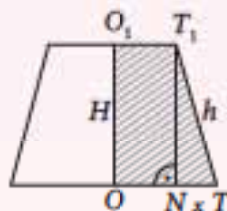
$$2800 = \frac{H}{3} \cdot [20^2 + 10^2 + \sqrt{20^2 \cdot 10^2}],$$

од каде што следува дека длабочината на садот е $H = \frac{3 \cdot 2800}{700} = 12 \text{ dm}$.

- в) Од тоа што садот е рамнокрак трапез (цртеж 4), најпрво го пресметуваме x ,
 $x = \frac{a - a_1}{2} = \frac{20 - 10}{2} = 5 \text{ dm}$, па потоа за висината на бочниот ѕид добиваме

$$h^2 = H^2 + x^2 = 12^2 + 5^2 = 169,$$

па добиваме $h = 13 \text{ dm}$.



Цртеж 4

Секоја бочна страна е рамнокрак трапез, па за плоштината на целата бочна површина добиваме:

$$M = 4 \cdot \frac{a + a_1}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{20 + 10}{2} \cdot 13 = 780 \text{ dm}^2.$$

Плоштината на долната основа изнесува $B_1 = 10^2 = 100 \text{ dm}^2$, па вкупната плоштина на потсечената пирамида (без капак) е збир од плоштината на основата и плоштината на бочната површина, т.е.

$$P = B + M = 780 + 100 = 880 \text{ dm}^2.$$

Значи, биле употребени вкупно 880 dm^2 лим за да се направи садот.

Задача 3

Во еден музеј се поставува декоративен постамент со форма на правилна четириаголна потсечена пирамида. Поголемата основа е одозгора, а помалата одоздола. Работ на горната основа е $a = 18 \text{ dm}$, а работ на долната основа е $a_1 = 6 \text{ dm}$. Внатрешноста на постаментот целосно се исполнува со бетон. Познато е дека за 1 dm^3 бетон е потребна маса од $2,4 \text{ kg}$, а вкупната маса на бетонот изнесува $3\,600 \text{ kg}$.

- Пресметај го волуменот на постаментот.
- Одреди ја висината на постаментот.
- Колкава е површината на материјалот потребен за обложување на постаментот ако долната основа не се обложува?

Задачи за вежбање!

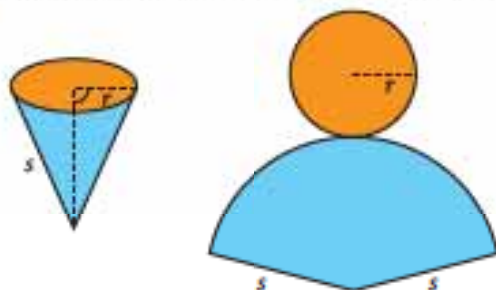
1. Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна потсечена пирамида со основни рабови 30 cm и 20 cm и висина 12 cm.
2. Најди ја плоштината на правилна четириаголна потсечена пирамида со основни рабови 18 cm и 10 cm и бочен ѕид наклонет кон поголемата основа под агол од 45° степени.
3. Одреди ја плоштината на бочната површина на правилна шестаголна потсечена пирамида со основни рабови 12 cm и 6 cm и висина 2 cm.
4. Пресметај го волуменот на потсечена пирамида ако плоштините на основите се 162 cm^2 и 72 cm^2 , а висината на соодветната целосна пирамида е 18 cm.
5. Висината на триаголна потсечена пирамида е 6 cm. Рабовите на едната основа се 5 cm, 12 cm и 13 cm, а периметарот на другата основа е 15 cm. Пресметај го волуменот на потсечената пирамида.
6. За изградба на бетонски темел за столб се користи темел во облик на потсечена правилна четириаголна пирамида со рабови на основите 6 m и 2 m и висина 3 m. Цената на 1 m^3 бетон изнесува 100 евра и планирана е резерва на бетон од 10 %.
 - а) Која количина бетон ќе се употреба за изградба на темелот?
 - б) Која количина бетон треба вкупно да се обезбеди?
 - в) Колку вкупно ќе чини изградбата на бетонскиот темел?

6.8 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА КОНУС

Потсети се!

- Што е кружен исечок соодветен на централен агол α од кружница со радиус s ?
- Должина на лак од кружен исечок определен со централен агол α во кружница со радиус s се пресметува со формулата $l = \frac{s\pi\alpha}{180^\circ}$.
- Плоштина на кружен исечок определен со централен агол α во кружница со радиус s се пресметува со формулата $P = \frac{s^2\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{s\pi\alpha}{180^\circ} \cdot \frac{s}{2} = \frac{l \cdot s}{2}$, каде l е должината на лакот соодветен на исечокот.

За да определиме плоштина на конус со радиус r и изводница s , конусот го развиваме како на цртеж 1.



Цртеж 1

Основата на конусот е круг со радиус r , па плоштината на основата е $B = r^2\pi$.

Бочната обвивка на конусот е кружен исечок од круг со радиус s , за кој соодветниот лак има должина која е еднаква на должината на основата на конусот, т.е. $l = 2\pi r$. Оттука, плоштината на бочната обвивка на конусот е

$$M = \frac{l \cdot s}{2} = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi rs.$$

Запомни!

Плоштината P на конусот е збир од плоштината на основата B и бочната плоштина M

$$P = \pi r^2 + \pi rs, \text{ т.е. } P = \pi r(r + s).$$

Пример 1

Пресметај ја плоштината на конус со висина $H = 24$ cm и изводница $s = 26$ cm.

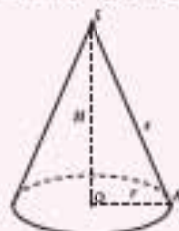
Решение:

Со примена на Питагорова теорема од правоаголниот триаголник AOS имаме:

$$r^2 = s^2 - H^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100,$$

па добиваме дека радиусот $r = 10$ cm. Сега со замена на s и r во формулата за плоштина на конус добиваме:

$$P = \pi(r + s) = \pi \cdot 10 \cdot (10 + 26) = 360\pi \text{ cm}^2.$$



Цртеж 2

Задача 1

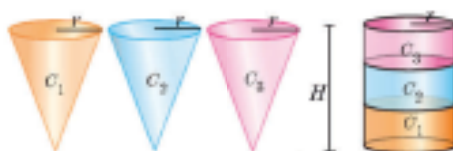
Пресметај ја плоштината на конусот со висина 21 cm и периметар на основата од 56π cm.

Потсети се!

- Која е формулата за пресметување волумен на цилиндар?
- Колкав дел од волуменот на призма е пополнет со волуменот на пирамида, ако призмата и пирамидата имаа иста основа и еднакви висини?

За да ја определиме формулата за волумен на конус, да разгледаме три еднакви конуси со радиус на основата r и висина H . Да претпоставиме дека тие се наполнети со песок. Ако песокот од трите конуси последователно се префрли во цилиндар со ист радиус на основата r и иста висина H , ќе се забележи дека цилиндарот се исполнува точно до врвот, без остаток (цртеж 3). Оттука заклучуваме дека волуменот на еден конус е еднаков на една третина од волуменот на цилиндарот со ист радиус на основата и иста висина, т.е.

$$V_{\text{конус}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{цилиндар}} = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$



Цртеж 3

Запомни!

Волуменот на конус со радиус на основата r и висина H се пресметува со формулата:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$

Пример 2

Пресметај го волуменот на конус со радиус 8 cm и бочна плоштина $136\pi \text{ cm}^2$. Решението да се провери со GeoGebra.

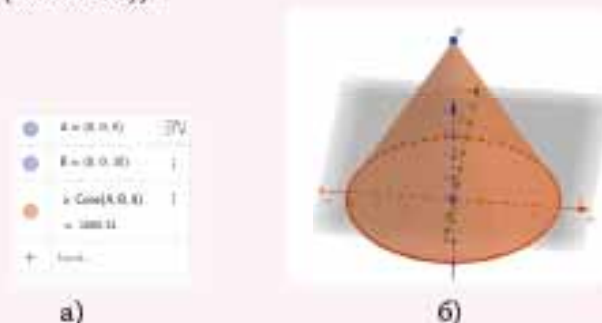
Решение:

Од формулата за плоштина на бочна површина $M = \pi rs$, имаме $136\pi = \pi \cdot 8 \cdot s$, и следува $s = \frac{136}{8} = 17 \text{ cm}$. Од Питагоровата теорема, висината H може да се изрази со $H^2 = s^2 - r^2$ (цртеж 2).

Со замена на вредностите за r и s добиваме $H^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$, т.е. $H = 15 \text{ cm}$. На крај, користејќи ја формулата за волумен на конус, добиваме

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 320\pi \text{ cm}^3.$$

Решението ќе го провериме со користење на GeoGebra. Во полето за внесување ("Input Bar") ја внесуваме точката A(0,0,0) која претставува центар на основата на конусот и точката B(0,0,15) која е врвот на конусот и се наоѓа на висина 15 единици над основата. На крај внесуваме Cone(A, B, 8) (Слика 1 а)). Потоа, со притискање на копчето "Enter" ќе се нацрта прав кружен конус со радиус 8 cm и висина 15 cm (Слика 1 б)) и во полето за внесување автоматски ќе се прикаже волуменот на конусот (Слика 1 а)).



Слика 1

Задача 2

Пресметај го волуменот на рамностран конус со плоштина $108\pi \text{ cm}^2$.

Пример 3

Пресметај ги плоштината и волуменот на конус чија изводница е за 2 cm поголема од висината, а дијаметарот на основата е 12 cm.

Решение:

Од условот на задачата е дадено дека $s = H + 2$ и $d = 12 \text{ cm}$, па за радиусот на основата имаме

$$r = 12 : 2 = 6 \text{ cm}.$$

Сега, заменуваме во формулата $s^2 = H^2 + r^2$ и имаме $(H + 2)^2 = H^2 + 6^2$, т.е.

$$\begin{aligned} H^2 + 4H + 4 &= H^2 + 36, \\ 4H &= 32, \end{aligned}$$

па висината $H = 8$ cm.

За генератрисата добиваме $s = 8 + 2 = 10$ cm.

Со замена во формулите за плоштина и волумен на конус добиваме:

$$P = \pi r(r + s) = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 10) = 96\pi \text{ cm}^2 \text{ и } V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \text{ cm}^3.$$

Пример 4

Колку кубни метри има една копа сено во вид на конус ако периметарот на основата е 37,68 m, а изводницата е 10 m.

Решение:

Дадено е дека периметарот на основата е $l = 37,68$ m и изводница $s = 10$ m, па од формулата за периметар на круг имаме $2\pi r = 37,68$. Оттука, за радиусот на основата се добива:

$$r = \frac{37,68}{2\pi} = \frac{37,68}{6,28} = 6 \text{ m}.$$

Понатаму, од формулата $s^2 = H^2 + r^2$ имаме $H^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, па $H = 8$ m.

За волуменот на конусот се добива $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \approx 301 \text{ m}^3$, значи копата има приближно 301 m³ сено.

Задача 3

Во една градина се формира куп од сув песок (за игралиште) во форма на конус. Периметарот на кружната основа е $l = 31,4$ m, изводница на конусот е $s = 8$ m, а густината на песокот е $\rho = 1,6 \text{ t/m}^3$.

- Колку кубни метри песок има во купот?
- Колкава е вкупната тежина на песокот во тони?

Задачи за вежбање!

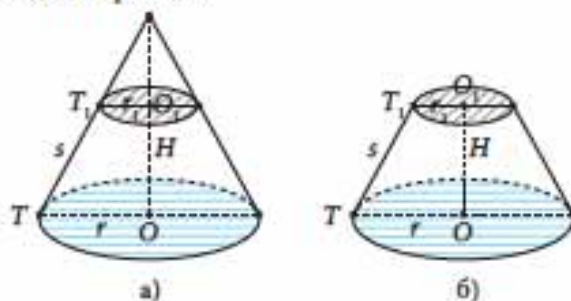
- Во каков однос се волумените на два конуси со еднакви висини ако дијаметрите на основите им се соодветно 40 cm и 1 m? Резултатот да се провери во GeoGebra, ако висината на конусите е $H = 20$ cm.
- Правоаголен триаголник со катети 30 cm и 40 cm ротира околу хипотенузата. Определи ги плоштината и волуменот на така добиеното тело.
- Односот на радиусот и висината кај прав конус е 2:3, а бочната плоштина изнесува $8\pi\sqrt{13} \text{ cm}^2$. Пресметај го волуменот на тој конус.
- Од сад што содржи 5 l вода се полнат чаши во форма на конус со радиус 4 cm и изводница 4 cm. Колку цели чаши може да се наполнат?
- Пресметај колку чини платно со кое е покриен еден шатор во вид на конус, со висина 4 m и периметар на основата 18,84 m, ако 1 m² платно чини 150 денари?
- Колку петтонски камиони се потребни за превоз на 15 еднакви купови песок во вид на конус со периметар на основата 12 m и висина на секој куп од 9 m? Масата на 1 m³ песок е 1,5 тона.

6.9 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПОТСЕЧЕН КОНУС

Потсети се!

- Што е паралелен, а што осен пресек на конус?
- Што е рамностран конус?
- Што е секој осен пресек на потсечен конус?

На цртежот 1 а) е прикажан конус и еден негов паралелен пресек, додека на цртежот 1 б) посебно е претставен делот меѓу основата и пресекот.

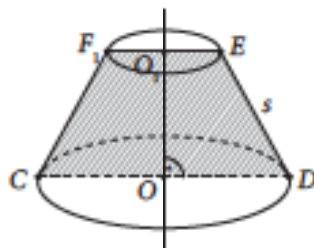


Цртеж 1

Запомни!

- Делот од конусот што се наоѓа меѓу основата и еден паралелен пресек на конусот се вика **потсечен конус**.
- Основата и паралелниот пресек на конусот се нарекуваат **основи** на потсечениот конус, додека отсечката чии крајни точки се центрите на основите се нарекува **оска** на потсечениот конус.
- Растојанието помеѓу основите се вика **висина**, а делот од генератрисата на конусот зафатен меѓу основите се вика **генератриса** или **изводница** на потсечениот конус.

Исто така, потсечен конус може да се добие и со ротација на правоаголен трапез околу помалиот крак (трапезот $ODEO_1$ на цртеж 2) или со ротација на рамнокрак трапез околу неговата оска на симетрија (трапезот $CDEF$ на цртеж 2).



Цртеж 2

Пример 1

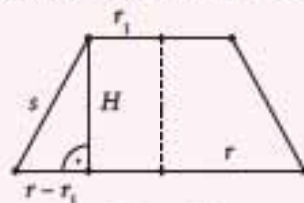
Пресметај го радиусот на помалата основа на потсечен конус ако неговата висина е 10 cm, радиусот на поголемата основа е 8 cm, а плоштината на осниот пресек е 130 cm^2 .

Решение:

Дадено е дека $H = 10 \text{ cm}$, $r = 8 \text{ cm}$ и $Q = 130 \text{ cm}^2$. Осниот пресек е рамнокрак трапез (цртеж 3)

со основи $2r$ и $2r_1$. Од формулата за плоштина на рамнокрак трапез $Q = \frac{2r+2r_1}{2} \cdot H = (r+r_1) \cdot H$,

добиваме дека $r+r_1 = \frac{Q}{H}$. Оттука, радиусот на помалата основа е $r_1 = \frac{Q}{H} - r = \frac{130}{10} - 8 = 5 \text{ cm}$.



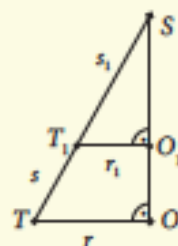
Цртеж 3

Задача 1

Радиусите на основите на еден потсечен конус се 13 cm и 8 cm, а неговата генератриса изнесува 13 cm. Пресметај ја плоштината на осниот пресек на потсечениот конус.

Потсети се!

- Кои два триаголници на цртежот 4 се слични?
- Какви се меѓу себе соодветните страни на слични триаголници?



Цртеж 4

Запомни!

Плоштината на потсечен конус е еднаква на збирот на плоштините на основите и плоштината на бочната површина: $P = B + B_1 + M$, каде што $B = \pi r^2$, $B_1 = \pi r_1^2$ се плоштини на основите, а M е плоштината на бочната површина.

Бочната плоштина на потсечен конус се пресметува како разлика помеѓу бочната плоштина на целиот конус и бочната плоштина на дополнетиот дел (до цел конус). Според цртеж 4, добиваме:

$$M = \pi \cdot r \cdot \overline{ST} - \pi \cdot r_1 \cdot \overline{ST_1} = \pi \cdot r \cdot (s + s_1) - \pi \cdot r_1 \cdot s_1 = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r \cdot s_1 - \pi \cdot r_1 \cdot s_1,$$

т.е.

$$M = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot (r - r_1) \cdot s_1$$

Во овие формули s е генератриса на потсечениот конус, а $s + s_1$ е генератриса на целиот конус.

Бидејќи триаголниците SOT и SO_1T_1 се слични, следува дека нивните соодветни страни се пропорционални, па $\frac{r}{r_1} = \frac{s_1 + s}{s_1}$. Оттука добиваме $s_1 = \frac{s \cdot r_1}{r - r_1}$. Со замена на s_1 во последното равенство за M добиваме

$$M = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot (r - r_1) \cdot \frac{s \cdot r_1}{r - r_1} = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r_1 \cdot s = \pi \cdot s \cdot (r + r_1).$$

Запомни!

Плоштината на потсечен конус со радиуси на основите r и r_1 и генератриса s се пресметува со формулата:

$$P = \pi r^2 + \pi r_1^2 + \pi \cdot s \cdot (r + r_1),$$

т.е.

$$P = \pi(r^2 + r_1^2 + s \cdot (r + r_1)).$$

Пример 2

Потсечен конус што се добива со ротација на рамнокрак трапез околу оската на симетрија има дијаметри на основите 18 cm и 8 cm и висина 12 cm. Пресметај ја плоштината на тој потсечен конус.

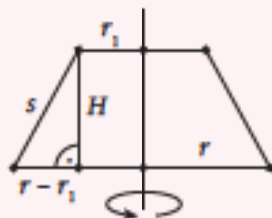
Решение:

Дадено е дека дијаметрите на основите се 18 cm и 8 cm, па радиусите на основите на овој потсечен конус се $r = \frac{18}{2} = 9$ cm и $r_1 = \frac{8}{2} = 4$ cm. Од правоаголниот триаголник на цртеж 5 наоѓаме

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}.$$

Заменувајќи во формулата за плоштина, добиваме:

$$P = \pi(9^2 + 4^2 + 13 \cdot (9 + 4)) = 266\pi \text{ cm}^2.$$



Цртеж 5

Задача 2

Пресметај ги бочната плоштина и плоштината на потсечен конус чии радиуси се 12 cm и 6 cm, а изводницата е 8 cm.

Пример 3

Пресметај ја плоштината на потсечен конус со висина 15 cm и радиуси на основите 28 cm и 8 cm.

Решение:

Во условот на задачата е дадено: $H = 15$ cm, $r = 28$ cm и $r_1 = 8$ cm.

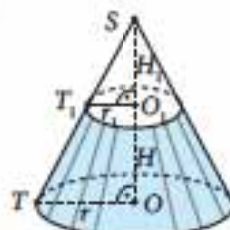
Од правоаголниот триаголник на цртеж 5 добиваме

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{(28 - 8)^2 + 15^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ cm}.$$

Со замена во формулата за плоштина добиваме:

$$P = \pi(r^2 + r_1^2 + s \cdot (r + r_1)) = \pi(28^2 + 8^2 + 25 \cdot (28 + 8)) = 1748\pi \text{ cm}^2.$$

Волуменот на потсечен конус ќе го определиме како разликата од волуменот на целиот конус и волуменот на дополнетиот дел (цртеж 6).



Цртеж 6

Според формулите за волумен на конус имаме

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \overline{SO} - \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot \overline{SO_1} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot (H + H_1) - \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot H_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi (r^2 - r_1^2) H_1.$$

Во последната формула H е висината на потсечениот конус, а $H + H_1$ е висината на целиот конус (заедно со дополнувањето).

Во продолжение ќе ја изразиме висината H_1 на дополнувањето на конусот преку r , r_1 и H . Од сличноста

на триаголниците SOT и SO_1T_1 имаме: $\frac{r}{r_1} = \frac{H + H_1}{H_1}$, од каде што имаме дека $H_1 = \frac{r_1 H}{r - r_1}$. Со замена на

H_1 во формулата за волумен таа го добива следниот облик:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi (r - r_1)(r + r_1) \frac{r_1 H}{r - r_1} = \frac{H \pi}{3} (r^2 + r_1^2 + r r_1).$$

Запомни!

Волуменот на потсечен конус со радиуси на основите r и r_1 и висина H се определува со формулата:

$$V = \frac{H \pi}{3} (r^2 + r_1^2 + r r_1).$$

Пример 4

Саксија за цвеќе има форма на потсечен конус со висина 12 cm и радиуси на основите 15 cm и 10 cm.

- Колку земја собира во саксијата?
- Пресметај ја бочната плоштина на саксијата.

Решение:

Во условите на задачата дадени се вредностите $H = 12$ cm, $r = 15$ cm и $r_1 = 10$ cm.

- Со замена во формулата добиваме $V = \frac{12\pi}{3}(15^2 + 10^2 + 15 \cdot 10) = 1900\pi$ cm³.

Значи во саксијата собира 1900π cm³ ≈ 6000 cm³ или 6 dm³ земја.

- Од цртеж 5 за генератрисата имаме $s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ cm, па за бочната плоштина добиваме:

$$M = \pi \cdot s \cdot (r + r_1) = \pi \cdot 13 \cdot (15 + 10) = 325\pi$$
 cm².

Пример 5

Една кофа направена од лим има форма на потсечен конус со дијаметри на основите 20 cm и 36 cm и висина 28 cm.

- Колку литри вода собира кофата?
- Колку квадратни метри лим е набавен за изработка на 40 такви кофи ако се знае дека 10 % од употребениот лим е отпадок?

Решение:

- Дадени се следните податоци: $d = 20$ cm, $d_1 = 36$ cm и $H = 28$ cm. За радиусите на основите добиваме $r = 10$ cm и $r_1 = 18$ cm. За да се пресмета колку литри вода собира кофата, потребно е да се пресмета волуменот на потсечениот конус, па со замена во формулата за волумен добиваме:

$$V = \frac{28\pi}{3}(10^2 + 18^2 + 10 \cdot 18) = 5637,33\pi$$
 cm³ $\approx 17701,23$ cm³ = 17,7 dm³ = 17,7 l.

Значи, кофата собира приближно 17,7 литри вода.

- За да ја пресметаме плоштината на кофата, најпрво треба да ја определиме должината на генератрисата s :

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{8^2 + 28^2} = 29,1$$
 cm.

Потоа, треба да ја определиме плоштина на кофата без горната основа. Да напоменеме дека кај кофата поголемата основа е од горната страна, па бараната плоштина ќе биде:

$$\begin{aligned} P &= B + M = \pi r^2 + \pi \cdot s \cdot (r + r_1) = \pi \cdot (10^2 + 29,1 \cdot (10 + 18)) = \\ &= 914,8\pi$$
 cm² = 2872,5 cm² $\approx 0,287$ m².

За 40 кофи потребни се $40 \cdot 0,287$ m² = 11,5 m² лим. Вкупната количина набавен лим (заедно со отпадот) е $11,5 / 0,9 \approx 12,8$ m².

Задача 3

Во фабрика за хемиски производи се користи метален резервоар со форма на потсечен конус кој е отворен одозгора. Горниот дијаметар е 2,4 m, долниот дијаметар е 3,6 m, а висината на резервоарот е 2 m.

- Пресметај колкав е волуменот на течност што може да се складира во резервоарот.
- Колкава е внатрешната бочна плоштина што треба да се обложи со заштитен слој?
- Ако 1 m² заштитен слој чини 18 евра, колкава е вкупната цена за обложување?

Задачи за вежбање!

- Пресметај ја плоштината на потсечен конус со радиуси на основите 10 cm и 6 cm ако висината на дополнувањето на конусот е 12 cm.
- Рамнокрак трапез со основи 50 cm и 30 cm и плоштина 960 cm² ротира околу неговата оска на симетрија. Пресметај ги плоштината и волуменот на добиеното тело.
- Пресметај ја плоштината на потсечен конус кој се добива со ротација околу помалиот крак на правоаголен трапез со основи 22 cm, 14 cm и помал крак 15 cm.
- Радиусите на основите на еден потсечен конус се однесуваат како 5 : 3. Пресметај ги плоштината и волуменот ако е дадено дека висината на потсечениот конус изнесува 12 cm, а плоштина на поголемата основа е 100π cm².
- Одреди го радиусот на цилиндар што има еднаква висина и еднаква бочна плоштина како потсечен конус со радиуси на основите 10 dm и 4 dm, и изводница 10 dm.
- Во една градина планирано е да се направи бетонска жардиниера за цвеќе во форма на потсечен конус, која ќе собира 4961,2 cm³ земја. Колкава ќе биде висината на жардиниерата ако радиусите на нејзините основи се 14 cm и 6 cm.

6.10 ПЛОШТИНА НА СФЕРА И ДЕЛОВИ ОД СФЕРА

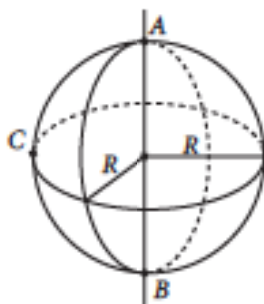
Потсети се!

Како се нарекува множеството од сите точки во рамнина што се наоѓаат на еднакво растојание од една точка?

Запомни!

- Множеството од сите точки во просторот што се на дадено растојание R од една дадена точка O се нарекува **сфера** и се означува $S(O, R)$. Точката O се вика **центар** на сферата.
- Отсечката чии крајни точки се центарот на сферата и која било точка од сферата се вика **радиус** на сферата и се означува со R .
- **Тетива** се нарекува отсечката чии крајни точки се кои било две точки од сферата.
- Тетивата што минува низ центарот на сферата се вика **дијаметар** на сферата.

Воочи дека сферата е ротациона површина која се добива со ротација на полуокружница околу дијаметарот (цртеж 1).



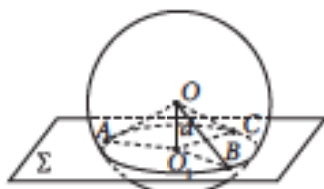
Цртеж 1

Нормалното растојание d од центарот O на сферата до дадената рамнина Σ се вика **централно растојание** на сферата и рамнината.

Ако $d > R$, тогаш сферата и рамнината немаат заеднички точки.

Ако $d = R$, тогаш сферата и рамнината имаат една заедничка точка, па во тој случај рамнината ја допира сферата и се вика **тангентна рамнина**.

Ако $d < R$, тогаш рамнината ја сече сферата, при што пресекот е кружница (цртеж 2).



Цртеж 2

6.101



и ДЕЛОВИ ОД СФЕРА

Пример 1

Решение:

Задача 1

Сфера е пресечена со рамнина која е на растојание 15 cm од центарот на сферата. Висината на калотата што се добива е 10 cm. Одреди го периметарот на пресечната кружница.

Активност 1

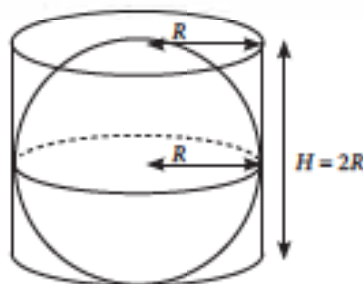
Потребни се мала топка (на пример, пинг-понг топче) и хартиена лента или тенка хартија. Со хартиената лента обвиткај ја топката по најголемиот круг (екватор).

- Измери ја должината на лентата – тоа е приближно обемот $2\pi R$.
- Подготви правоаголник од хартија со:
 - ширина еднаква на измерениот обем
 - висина приближно еднаква на дијаметарот на топката $2R$.
- Правоаголникот, свиткан околу топката, ја претставува бочната површина на цилиндар околу сферата.

Опреди ја врската помеѓу плоштината на сферата и плоштината на бочната површина на цилиндарот.

Плоштина на сфера

Нека е дадена сфера со радиус R . Околу неа опишуваме цилиндар со радиус на основата R и висина $H = 2R$. Сферата се допира до цилиндарот во горната и долната основа и по една главна пресечна кружница (цртеж 5).



Цртеж 5

Во изведување на плоштината на сферата ќе го користиме резултатот на Архимед, кој докажал дека: **Плоштината на сферата е еднаква на страничната плоштина на цилиндарот опишан околу неа.** Значи, определувањето на плоштина на сфера се сведува на определување на плоштината на бочната обвивка на цилиндарот кој го опишавме околу сферата (цртеж 5), а таа плоштина е

$$M = 2\pi R \cdot H = 2\pi R \cdot 2 \cdot R = 4\pi R^2.$$

Запомни!

Плоштината на сфера со радиус r е $P_{\text{сфера}} = 4\pi R^2$.

Плоштината на сфера со радиус R е 4 пати поголема од плоштината на круг со радиус R .

Пример 2

Радиусот на една сфера е $R = 7$ cm. Пресметај ја плоштината на сферата.

Решение:

Со примена на формулата се добива дека плоштината на сферата е

$$P_{\text{сфера}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 7^2 = 196\pi \text{ cm}^2.$$

Задача 2

Метална сфера има плоштина $324\pi \text{ cm}^2$. Определи го радиусот на сферата.

Плоштина на калота

Нека R е радиусот на сферата, а h е висината на калотата. За определување на плоштината на оваа калота, повторно го користиме резултатот на Архимед, кој покажал дека:

Плоштината на калота со радиус R и висина h е еднаква на плоштината на бочната обвивка на цилиндар со радиус R и висина h .

Ова е, всушност, истата идеја што ја користиме при определување плоштина на целата сфера, но во овој случај се бара плоштината само „на дел“ од неа. Плоштината на бочната обвивка на цилиндар со радиус R и висина h е

$$M = 2\pi R \cdot h.$$

Според резултатот на Архимед, со истата формула се определува и плоштината на калотата.

Запомни!

Плоштина на калота со висина h од сфера со радиус R се определува со формулата:

$$P_{\text{калота}} = 2\pi R \cdot h.$$

Формулата не зависи од радиусот на кружниот пресек на сферата со рамнината со која е формирана калотата.

Пример 3

Сферна калота има плоштина $40\pi \text{ dm}^2$. Радиусот на сферата е $R = 5$ dm. Определи ја висината на калотата.

Решение:

Од формулата за плоштина на калота $P_{\text{калота}} = 2\pi R \cdot h$ се добива $h = \frac{P_{\text{калота}}}{2\pi R} = \frac{40\pi}{2\pi \cdot 5} = 4$ dm.

Задача 3

Сфера има радиус $R = 10$ cm. Со рамнина е отсечена калота со висина $h = 3$ cm. Пресметај ја плоштината на калотата.

Плоштина на појас во сфера

Нека радиусот на сферата е R , а висината на појасот е h и нека појасот е формиран со две паралелни рамнини кои се наоѓаат на иста страна од центарот. Секој вака формиран појас може да се разгледува како разлика од две сферни калоти. Нека калотите имаат висини h_1 и h_2 ($h_1 < h_2$), при што $h = h_2 - h_1$. Плоштините на двете калоти се

$$P_1 = 2\pi R \cdot h_1 \text{ и } P_2 = 2\pi R \cdot h_2.$$

Плоштината на појасот се определува како разлика на овие две плоштини:

$$P_{\text{појас}} = P_2 - P_1 = 2\pi R \cdot h_2 - 2\pi R \cdot h_1 = 2\pi R (h_2 - h_1) = 2\pi R h.$$

Истата формула за пресметување на плоштина на појас се добива и ако појасот е формиран со две паралелни рамнини кои се наоѓаат на различна страна од центарот.

Запомни!

Плоштина на појас со висина h во сфера со радиус R се определува со формулата:

$$P_{\text{појас}} = 2\pi R \cdot h.$$

Со споредување на претходните две формули за плоштина на калота и на појас може да се заклучи дека ако калота и појас од една сфера имаат иста висина, тогаш тие имаат иста плоштина. Таа плоштина зависи само од R и h , а не и од нивната положба во сферата.

Пример 4

Плоштината на еден сферен појас изнесува $36\pi \text{ dm}^2$. Радиусот на сферата е $R = 6 \text{ dm}$.

- Одреди ја висината на појасот.
- Спореди ја плоштината на појасот со плоштината на целата сфера.

Решение:

- Од формулата за плоштина на појас $P_{\text{појас}} = 2\pi R h$ може да ја изразиме висината на појасот:

$$h = \frac{P_{\text{појас}}}{2\pi R} = \frac{36\pi}{2\pi \cdot 6} = 3 \text{ dm}.$$

- Плоштина на сферата е:

$$P_{\text{сфера}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi \text{ dm}^2.$$

Ако ги споредиме овие две плоштини, добиваме:

$$\frac{P_{\text{појас}}}{P_{\text{сфера}}} = \frac{36\pi}{144\pi} = \frac{1}{4}.$$

т.е.

$$P_{\text{сфера}} = 4 \cdot P_{\text{појас}}.$$

Пример 5

Пресметај ја плоштината на сферниот појас кој е добиен кога од различни страни во однос на центарот на една сфера се конструирани два паралелни пресеци со радиуси 12 cm и 16 cm. Растојанието меѓу пресеците изнесува 28 cm.

Решение:

Од условите на задачата, висината на појасот $h = 28$, радиусите на основите се $r = 16$ cm, $r_1 = 12$ cm. Треба да се определи радиусот R на сферата, за да може плоштината на појасот да се пресмета по формулата $P = 2R\pi h$.

Нека растојанието од центарот на сферата O до едниот пресек е d , а растојанието од O до другиот пресек е d_1 . Тогаш висината на појасот е $h = d + d_1$, т.е. $d + d_1 = 28$ и $d_1 = 28 - d$. Ги разгледуваме правоаголните триаголници $\triangle OO_1A_1$ и $\triangle OCA$ на цртеж 6. Од нив се добиваат равенките $R^2 = d_1^2 + r_1^2$ и $R^2 = d^2 + r^2$. Со нивно изедначување имаме $d^2 + r^2 = d_1^2 + r_1^2$. Ако во равенството замениме $r = 16$ cm, $r_1 = 12$ cm и $d_1 = 28 - d$, се добива равенка по d од следниот облик:

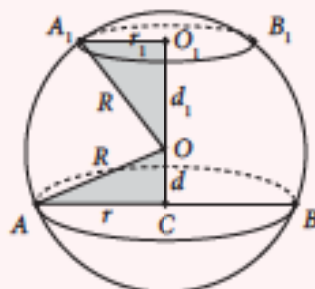
$$d^2 + 16^2 = (28 - d)^2 + 12^2.$$

Со нејзино решавање добиваме:

$$d^2 + 256 = 784 - 56d + d^2 + 144,$$

$$56d = 672,$$

т.е. $d = 12$ cm. Според тоа, за радиусот на сферата добиваме $R = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$ cm, додека за плоштина на сферниот појас имаме $P = 2R\pi h = 2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot 28 = 1120\pi$ cm².



Цртеж 6

Задача 4

Плоштината на сферен појас, кој е ограничен со два паралелни пресеци од различни страни на центарот на сферата, изнесува 1750π cm². Определи ја висината на појасот ако радиусите на пресеците се 15 cm и 20 cm.

Задача 5

Истражи колку приближно изнесува ширината на озонскиот слој околу Земјата и пресметај приближно вкупната површина на овој озонски појас. Зошто овој појас е важен за животот на Земјата?

Задачи за вежбање!

1. Пресметај ја плоштината на сфера со радиус 7 cm.
2. Сфера со радиус 5 cm е пресечена со рамнина, при што е добиена калота со висина 4 cm. Пресметај ја плоштината на калотата.
3. Една спортска арена има форма на купола (калота) добиена од сфера со радиус 12 m. Определи ја висината на спортската арена ако се знае дека таа има плоштина од $100\pi \text{ m}^2$.
4. Пресметај ја плоштината на сферниот појас кој е добиен кога од различни страни во однос на центарот на една сфера се конструирани два паралелни пресеци со радиуси 7 cm и 15 cm. Растојанието меѓу пресеците изнесува 44 cm.
5. Висината на една калота е 5 cm, а радиусот на нејзината основа е 15 cm. Одреди го растојанието на пресекот од центарот на сферата.

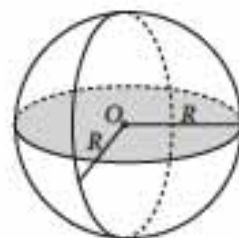
6.11 ВОЛУМЕН НА ТОПКА И НЕЈЗИНИ ДЕЛОВИ

Потсети се!

Која 3Д-форма се добива со ротација на кружница околу нејзиниот дијаметар?

Делот од просторот што е заграден со една сфера се нарекува **топка**. Центарот и радиусот на сферата се центар и радиус на топката, соодветно. Ако рамнината минува низ центарот на топката, тогаш топката е поделена на два складни дела кои се наречени **волутопки**, а пресекот се вика **голем круг** на топката.

На цртеж 1 е прикажана скица на топка со трите нејзини главни кругови, кои припаѓаат во три заемно нормални рамнини.



Цртеж 1

Запомни!

- Пресек на топката со рамнина е круг.
- Топката е ротациона 3Д-форма кое се добива со ротација на полукруг околу неговиот дијаметар.

Пример 1

Една топка е пресечена со две паралелни рамнини кои лежат на различна страна од центарот. Дијаметрите на пресеците се 30 cm и 18 cm, а растојанието меѓу нив изнесува 24 cm. Одреди ја плоштината на главниот круг.

Решение:

Според податоците од задачата и цртеж 2, имаме:

$$\overline{O_1B} = r_1 = 30 : 2 = 15 \text{ cm}, \quad \overline{O_2A} = r_2 = 18 : 2 = 9 \text{ cm}, \quad \overline{OO_1} = d_1,$$

$$\overline{OO_2} = 24 - d_1. \text{ Од } \triangle OO_1B \text{ следува дека } R^2 = d_1^2 + 15^2, \text{ а од } \triangle OO_2A$$

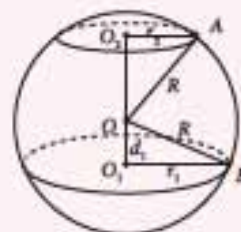
имаме $R^2 = (24 - d_1)^2 + 9^2$. Со изедначување на последните две равенства добиваме

$$d_1^2 + 15^2 = (24 - d_1)^2 + 9^2,$$

$$d_1^2 + 225 = 576 - 48d_1 + d_1^2 + 81,$$

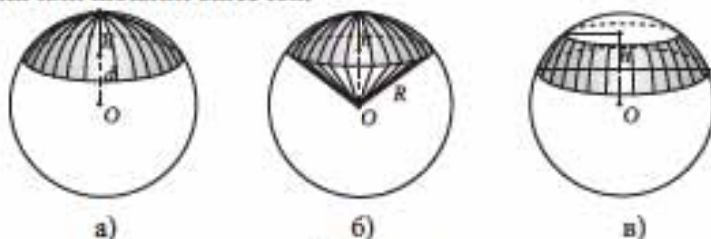
$$48d_1 = 432,$$

од каде што имаме дека $d_1 = 9 \text{ cm}$. За радиусот на главниот круг добиваме $R = \sqrt{9^2 + 15^2} = \sqrt{306} \text{ cm}$, а за плоштината на главниот круг имаме $P = R^2 \pi = 306 \pi \text{ cm}^2$.



Цртеж 2

Секоја рамнина што не минува низ центарот на топката ја дели топката на два нееднакви дела и секој од нив се вика *сеžмент* или *топкиниот отсечок*.



Цртеж 3

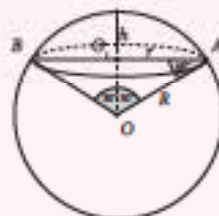
- Топкиниот отсечок е ограничен со калотата и круг. Висината на калотата е висина на топкиниот отсечок (цртеж 3 а).
- Делот од топката што е составен од топкин отсечок и конус чија основа е основата на топкиниот отсечок, а врв е центарот на топката, се вика *топкиниот исечок* или *сектор* (цртеж 3 б).
- Делот од топката што е зафатен меѓу два паралелни пресеци се вика *топкиниот слој*. Границите на топкиниот слој се два круга и сферен појас (цртеж 3 в).

Пример 2

Плоштината на основата на топкин отсечок е $49\pi \text{ cm}^2$, а лакот на оскиниот пресек на отсечокот има централен агол од 60° . Одреди ги радиусот на топката и висината на отсечокот.

Решение:

Од формулата за плоштина на круг имаме $r^2\pi = 49\pi$, од каде што за радиусот на основата на топкиниот отсечок добиваме $r = 7 \text{ cm}$. Од условите на задачата, аголот $\angle AOB = 60^\circ$, па $\angle AOO_1 = 30^\circ$ и $\angle OAO_1 =$



Цртеж 4

60° . Понатаму, од правоаголниот триаголник OO_1A имаме $\cos 60^\circ = \frac{r}{R}$, т.е. радиусот на топката

е $R = \frac{r}{\cos 60^\circ} = \frac{7}{0,5} = 14 \text{ cm}$. Слично, $\tan 30^\circ = \frac{r}{OO_1}$, т.е. $OO_1 = \frac{r}{\tan 30^\circ} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{21}{\sqrt{3}} = 7\sqrt{3} \text{ cm}$. За

висината на отсечокот добиваме $h = R - OO_1 = (14 - 7\sqrt{3}) \text{ cm}$.

Во продолжение ќе определиме формула за пресметување волумен на топка со радиус R . Тука повторно се користи заклучокот на Архимед, кој покажал дека:

Волуменот на топка со радиус R е $\frac{2}{3}$ од волуменот на цилиндар со ист радиус на основата и висина $2R$.

Волуменот на цилиндар со радиус R и висина $H = 2R$ е

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2 \cdot H = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Ако го искористиме заклучокот на Архимед, добиваме дека волуменот на топка е

$$V_{\text{топка}} = \frac{2}{3} \cdot V_{\text{цил}} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3.$$

Запомни!

Волуменот на топка со радиус R се пресметува со формулата:

$$V_{\text{топка}} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3.$$

Пример 3

Опреди го волуменот на топка со радиус $R = 6$ cm. Резултатот да се провери со GeoGebra.

Решение:

Со замена во формулата која ја изведовме се добива $V_{\text{топка}} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$.

За да се провери резултатот со користење на GeoGebra, постапката е следната. Најпрво, со притискање го избираме 3D делот, а потоа избираме "Sphere: Center & Radius" (слика 1 а)), па притискаме на точката (0,0,0). Ќе се отвори прозорец во кој треба да го внесете радиусот на сферата. (слика 1 б)).



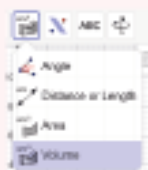
а)



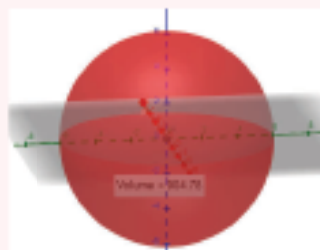
б)

Слика 1

Потоа, ја избираме алатката за пресметување волумен (слика 2 а)) и на сферата ќе го добиеме резултатот (слика 2 б)). Се добива дека волуменот е $904,78 \text{ cm}^3$, со што е потврден претходно добиениот резултат ($288\pi = 904,78$).



а)



б)

Слика 2

Задача 1

Опреди го волуменот на топка со радиус 4 dm.

Пример 4

Три тениски топчиња се слакувани во цилиндрична кутија со висина 18 cm.

- Одреди го волуменот на едно тениско топче.
- Одреди го волуменот на просторот од цилиндарот кој не е опфатен со тениските топчиња.

Решение:

- Ако r е радиусот на едно тениско топче, тогаш висина на цилиндарот е еднаква на збирот на дијаметрите на трите топчиња, т.е. $H = 3d = 3 \cdot 2R = 6R$. Оттука имаме $6R = 18$ cm, односно $R = 3$ cm. Бидејќи топчињата се спакувани во кутијата, следува дека и радиусот на цилиндарот е, исто така, $R_{\text{цилиндр}} = R = 3$ cm.

За волуменот на едно топче, според формулата, имаме $V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}3^3\pi = 36\pi$ cm³, односно вкупниот волумен на трите топчиња е $V_{\text{ст}} = 3 \cdot 36\pi = 108\pi$ cm³.

- Волуменот на цилиндарот е $V_{\text{цилиндр}} = R^2\pi H = 3^2 \cdot \pi \cdot 18 = 162\pi$ cm³. Волуменот на просторот од цилиндарот кој не е опфатен со тениските топчиња се пресметува како разлика на волуменот на цилиндарот и волуменот што го зафаќаат трите топчиња, т.е.

$$V = V_{\text{цилиндр}} - V_{\text{ст}} = 162\pi - 108\pi = 54\pi \text{ cm}^3.$$



Запомни!

- Волуменот на топкин отсечок со висина h од топка со радиус R се пресметува со формулата

$$V_{\text{т.о.}} = \frac{\pi h}{3}(3R - h).$$

- Волуменот на топкин исечок со висина h од топка со радиус R се пресметува со формулата

$$V_{\text{т.и.}} = \frac{2}{3}R^2\pi h.$$

- Волуменот на топкин слој со радиуси r_1 и r_2 и висина h од топка со радиус R се определува со формулата

$$V_{\text{т.с.}} = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

Пример 5

Одреди го волуменот на топкин исечок ако радиусот на неговата основа е 45 cm, а радиусот на топката е 75 cm.

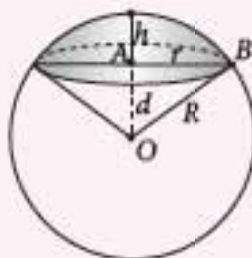
Решение:

Според податоците имаме дека $R = 75$ cm и $r = 45$ cm. Од $\triangle OAB$ (цртеж 5) имаме

$$d^2 = R^2 - r^2 = 75^2 - 45^2 = 3600,$$

т.е. $d = 60$ cm. За висината на топкиниот отсечок добиваме $h = R - d = 75 - 60 = 15$ cm. Со замена

во формулата за волумен на топкин исечок имаме $V_{\text{тк}} = \frac{2}{3} R^2 \pi h = \frac{2}{3} \cdot 75^2 \cdot \pi \cdot 15 = 56250\pi \text{ cm}^3$.



Цртеж 5

Задача 2

Една рамнина е нормална на дијаметарот на топка и го дели дијаметарот на делови од 9 cm и 15 cm. Пресметај ги волумените на добиените делови од топката.

Задача 3

Во процес на индустриска обработка, полна метална топка со радиус $r = 20$ cm се сече со две паралелни рамнини кои се наоѓаат на растојание 5 cm и 3 cm од истата страна од центарот на топката. Одреди го волуменот на добиениот дел од топката.

Пример 6

Кошаркарска топка има приближно совршена форма на топка со радиус 12 cm.

- Пресметај го волуменот на топката.
- Пресметај колку материјал е употребен за да се изработи топката.
- Топката дополнително е напумпана, при што волуменот ѝ се зголемил за 10%. Колку изнесува новиот радиус на топката?



Решение:

- Со замена на $R = 12$ cm во формулата за волумен на топка добиваме

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{4}{3} 12^3 \pi = 7234,56 \pi \text{ cm}^3.$$

- За да се пресмета колку материјал е потребно, треба да се пресмета плоштината на сферата соодветна на дадената топка

$$P = 4R^2 \pi = 4 \cdot 12^2 \pi \approx 1809 \text{ cm}^2.$$

- в) Волуменот на топката по пумпањето е $V = 7234,56 + \frac{7234,56 \cdot 10}{100} = 7958,02 \text{ cm}^3$. Ако ја замениме оваа вредност во формулата за волумен на топка и ако новиот радиус на топката е R_1 , добиваме $\frac{4}{3} R_1^3 \pi = 7958,02$, од каде што имаме $R_1^3 = \frac{3 \cdot 7958,02}{4\pi} \approx 1900,8$. Оттука, новиот радиус на топката е $R_1 \approx 12,39 \text{ cm}$.

Задачи за вежбање!

1. Топка со радиус 12 cm е пресечена со рамнина на растојание од 8 cm од центарот. Одреди го волуменот на добиениот топкин исечок.
2. Радиусот на топката е 15 cm, а радиусот на кружната основа на исечокот е 9 cm. Пресметај го волуменот на топкиниот исечок.
3. Топка со радиус 21 cm е пресечена со рамнина на растојание од 6 cm од центарот. Пресметај го волуменот на добиениот топкин отсечок.
4. Топка со радиус 15 cm е пресечена со две паралелни рамнини на растојание од 5 cm и 7 cm од центарот, но од различни страни во однос на центарот. Одреди го волуменот на топкиниот слој.
5. Топка со радиус 18 cm е пресечена со две паралелни рамнини на растојание од 6 cm и 12 cm од иста страна од центарот. Одреди го волуменот на добиениот топкин слој.
6. Плоштината на една калота е $\frac{2}{5}$ од плоштината на сферата. Одреди ги плоштините на калотата и волуменот на топкиниот отсечок ако радиусот на нивната заедничка основа е $2\sqrt{6} \text{ cm}$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Пресметај ја плоштината на правоаголник со една страна 9 cm и дијагонала 15 cm. Резултатот да се провери со Geogebra.
2. Дијагоналите на правоаголник зафаќаат агол од 120° , а секоја дијагонала е 16 cm. Пресметај ја неговата плоштина.
3. Пресметај ја плоштината на правоаголник со дијагонала 13 cm ако должините на неговите страни се во однос 5 : 12.
4. Соларна плочка е правоаголник со една страна 24 cm и дијагонала 30 cm.
 - а) Пресметај ја површината на плочката.
 - б) Ако од 1 cm^2 се добиваат 0,18 W при дадено осветлување, колкава е приближната моќност?
5. Плоштината на паралелограм е 240 cm^2 , периметарот е 64 cm, а растојанието меѓу поголемите страни е 12 cm. Одреди го растојанието меѓу помалите страни.
6. Пресметај ја плоштината на ромб со страна 13 cm ако радиусот на впишаната кружница е 5 cm.
7. Метална плоча во форма на паралелограм се вградува во кукиште. Растојанијата меѓу паровите паралелни страни се 7 cm и 14 cm. Кратката страна е 10 cm. Која е должината на подолгата страна на плочата?
8. Еден носач има работна површина во форма на паралелограм. Висините се 8 cm и 15 cm, а аголот меѓу нив е 30° . Пресметај ја плоштината на површината.
9. Пресметај ја плоштината на правоаголниот триаголник со катета 6 cm и хипотенуза 10 cm. Резултатот да се провери со Geogebra.
10. Пресметај ја плоштината на правоаголниот триаголник со катета 6 cm и еден од аглиите 50° .
11. Периметарот на рамнокрак триаголник е 64 cm, а разликата на кракот и основата е 11 cm. Пресметај ја плоштината на триаголникот.
12. Сајла од 18 m е затегната така што со земјата прави агол од 40° и држи врв на столб.
 - а) Колкава е висината на столбот?
 - б) Колкава е хоризонталната оддалеченост од основата на столбот до местото каде што е прицврстена сајлата?
13. Знак има форма на рамностран триаголник со страна 90 cm.
 - а) Одреди ја плоштината на знакот. Резултатот да се провери со Geogebra.
 - б) Одреди го радиусот на впишаната кружница (место за кружно лого).
 - в) Од едната страна знакот треба да се обложи со фолија. Колку чини обложувањето ако фолијата чини 2 денари за cm^2 ?
14. Плоштината на еден трапез е 360 cm^2 , а должините на основите се 30 cm и 15 cm. Пресметај ја висината на трапезот.
15. Правоаголен трапез има плоштина 200 cm^2 , висина 10 cm и една основа 30 cm. Пресметај ја должината на другата основа.
16. Платформа има форма на рамнокрак трапез со основи 12 m и 20 m и висина 8 m.
 - а) Пресметај ја плоштината на платформата.
 - б) Колкава должина на заштитна ограда е потребна за да се огради платформата?

17. Декоративна површина во парк има форма на делтоид. Дијагоналата што е оска на симетрија е 18 m, а другата дијагонала е 10 m.
 - а) Пресметај ја плоштината на површината.
 - б) Ако за попложување се потребни 3 плочки по m^2 , колку вкупно плочки се потребни?
18. Кружна плоча се изработува од метал. Ако 1 cm^2 метал тежи 0,015 kg, колкава е масата на плочата со радиус 14 cm?
19. ЛЕД-лента се поставува по кружен лак со радиус 1,2 m и агол 45° . Колкава должина на лента е потребна?
20. Радиусот на кружницата е 15 cm, а растојанието на тетивата од центарот е 9 cm. Пресметај ја плоштината на кружниот отсечок.
21. Плоштината на кружен прстен е $64\pi\text{ cm}^2$, а внатрешниот радиус е 4 cm. Одреди го надворешниот радиус.
22. Правилна триаголна пирамида има страна на основата 12 cm и апотема 10 cm.
 - а) Пресметај ја плоштината на бочната површина.
 - б) Спореди ја бочната плоштина со плоштината на основата.
23. Камен монумент има форма на пирамида со квадратна основа со страна 5 m и висина 9 m.
 - а) Пресметај го волуменот.
 - б) Ако густината на каменот е 2600 kg/m^3 , колкава е масата на монументот?
24. Стаклен покрив има форма на права пирамида со правоаголна основа со димензии 12 m и 8 m. Апотемата на бочните страни со основа 12 m изнесува 5 m.
 - а) Пресметај ја површината на стаклото (без основата).
 - б) Ако максимално дозволената маса на покривот е 2000 kg, дали тој ќе може да се постави ако 1 m^2 стакло тежи 30 kg?
25. Долна основа на потсечена правилна четириаголна пирамида има страна 14 cm, горната 8 cm, а апотемата на потсечената пирамида е 9 cm. Пресметај ја бочната плоштина на потсечената пирамида.
26. Волуменот на потсечена правилна четириаголна пирамида е 1248 cm^3 . Страните на основите се 10 cm и 4 cm. Определи ја висината на потсечената пирамида.
27. Сад за складирање има форма на потсечена правилна четириаголна пирамида со основи 3 m и 1,5 m и висина 2,4 m.
 - а) Колкав е волуменот на садот?
 - б) Колку литри материјал може да собере?
28. Кај еден конус односот на радиусот и висината е 3 : 4, а волуменот е $V = 96\pi\text{ cm}^3$. Пресметај ја бочната плоштина на конусот.
29. Сад содржи 8 литри сок. Се полнат чаши во форма на конус со радиус 3 cm и висина 12 cm.
 - а) Колку цели чаши може да се наполнат?
 - б) Колку сок ќе остане неискористен?
30. Резервоар за течности има конусно дно со радиус 1,2 m и висина 0,8 m.
 - а) Колкав е волуменот на конусниот дел?
 - б) Ако резервоарот се празни со брзина од $0,02\text{ m}^3/\text{min}$, за колку минути ќе се испразни конусниот дел?
31. Потсечен конус има радиуси на основите $R = 9\text{ cm}$ и $r = 3\text{ cm}$, а висината е $h = 10\text{ cm}$.
 - а) Пресметај го волуменот.
 - б) Колкав е волуменот на целиот конус од кој е добиен потсечениот?

32. Два потсечени прави конуси имаат еднакви висини и еднакви поголеми радиуси, а нивните помали радиуси се во однос 1 : 2. Во каков однос се нивните волумени?
33. Светларник има форма на потсечен конус со радиуси 2,2 m и 1,2 m и апотема 1,5 m.
- Пресметај ја бочната површина на стаклото.
 - Ако 1 m² стакло тежи 28 kg, колкава е вкупната маса?
34. Плоштината на една сфера е 324π cm².
- Одреди го радиусот на сферата.
 - Пресметај го волуменот на топката која е ограничена со дадената сфера.
35. Модел на планета е сфера со радиус $R = 20$ cm. „Ледена капа“ е калота со висина $h = 4$ cm.
- Пресметај ја плоштината на ледената капа.
 - Колкав процент од вкупната површина на планетата зафаќа?
36. Топка има радиус $R = 10$ cm. По пресек со рамнина се добива топкин отсечок со волумен $V = \frac{625\pi}{3}$ cm³. Одреди го растојанието d на рамнината од центарот на топката.
37. Куполестиот покрив на подземен резервоар има форма на сферна калота. Покривот припаѓа на сфера со радиус $R = 4$ m, а висината на куполата е $h = 1,5$ m. Внатрешниот простор што го покрива куполата е топкин отсечок од истата сфера.
- Пресметај го волуменот на топкиниот отсечок (во m³).
 - Пресметај ја плоштината на сферната калота.
 - Куполата треба да се обложи со заштитен материјал. Ако обложувањето чини 2000 денари по m², колкав е вкупниот трошок за обложување на куполата?
 - Ако во резервоарот дневно се собира дождовница со волумен од 12 m³, за колку дена ќе се наполни резервоарот (првично тој е празен)?

РЕЗУЛТАТИ ОД УЧЕЊЕ ОД ПРОГРАМАТА

Тема 1:

КОРЕНИ И КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Со изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

1. да решаваш проблеми од реален контекст кои се сведуваат на степени и операции со степени;
2. да користиш коренување за решавање проблеми од секојдневен контекст;
3. да ги разликуваш и применуваш операциите степенување и коренување во реални проблеми;
4. да применуваш рационализација на именител на дробка во упростување на ирационални изрази;
5. да ги користиш операциите со комплексни броеви во решавање задачи;
6. да применуваш комплексни броеви во решавање СТЕМ-проблеми.

Тема 2:

КВАДРАТНИ РАВЕНКИ И РАВЕНКИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА КВАДРАТНИ

Со изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

1. да разликуваш различни видови квадратни равенки и равенки кои се сведуваат на квадратни;
2. да решаваш проблеми од реален контекст кои се сведуваат на квадратни равенки;
3. да користиш равенки што се сведуваат на квадратни во решавање СТЕМ-проблеми;
4. да применуваш систем од една квадратна и една линеарна равенка со две променливи за решавање реални проблеми.

Тема 3:

КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА, КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА И СИСТЕМ ОД КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Со изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

1. да применуваш квадратна функција за решавање СТЕМ-проблеми;
2. да толкуваш решенија на квадратна неравенка со една непозната;
3. да користиш систем од две квадратни неравенки со една непозната за решавање проблеми од секојдневен контекст.

Тема 4:

ЕЛЕМЕНТИ ОД ВЕРОЈАТНОСТ

Со изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

1. да применуваш пермутации, варијации и комбинации во решавање проблеми од реален контекст;
2. да определуваш веројатност на настани во реални проблеми.

Тема 5:

ГЕОМЕТРИЈА

Со изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

1. да користиш синус, косинус, тангенс и котангенс за решавање СТЕМ-проблеми;
2. да испитуваш заемен однос на две рамнини, права и рамнина или две прави во просторот;
3. да ги утврдуваш различните пресеци на 3Д-форма со рамнина.

Тема 6:

МЕРЕЊЕ

Со изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

1. да решаваш проблеми од реален контекст со примена на периметар и плоштина на 2Д-форми;
2. да решаваш СТЕМ-проблеми со плоштина и волумен на 3Д-форми.

ЛИТЕРАТУРА

1. James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson: *Algebra and Trigonometry*, Brooks/Cole, USA
2. Cindy J. Boyd, Jerry Cummins, Carol Malloy, John Carter, Alfino Flores, *Geometry*, Mc Graw Hill, USA
3. Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis: *Calculus*, John Wiley & Sons, Inc., 2012
4. H. Africk: *Elementary College Geometry*, CUNY Academic Works, 2021
5. В.Бакева: *Веројатности*, УКИМ, Скопје, 2015, <https://ukim.edu.mk/e-book/00009/>
6. В.В. Казаков, О.О.Казакова: Геометрия, учебное пособие для 9 класса, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2025
7. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, И. В. Горбунова: Геометрия, учебное пособие для 10 класса, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2020
8. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, И. В. Горбунова, О. Е. Цыбулько: Геометрия, учебное пособие для 11 класса, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2020