

Verica Bakeva Smilkova

Goran Mihajloski

# MATEMATIKA

tekst shkollor  
për vitin e dytë  
të gjimnazit

# II

$$P=?$$

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$





# MATEMATIKA

# II

libër shkollor për vitin e dytë  
të arsimit gjimnazial



Shkup, 2026  
(Botimi i parë)

**MATEMATIKA II libër shkollor për vitin e dytë të arsimit gjimnazial**

*Botimi i parë, 2026*

Të drejtat autoriale © 2026, Albi DOO

|                                          |                                                                 |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <b>Botues</b>                            | Albi DOO, Shkup 2026                                            |
| <b>Autorë</b>                            | Dr. Verica Bakeva Smiljkova<br>prof. Goran Mihajloski           |
| <b>Bashkëpunëtor profesional</b>         | Aleksandra Popovska-Mitrović                                    |
| <b>Redaktor</b>                          | Elena Stefanovska                                               |
| <b>Titulli origjinal</b>                 | Математика II учебник за втора година<br>гимназиско образование |
| <b>Përkthim nga maqedonisht në shqip</b> | Krutan Rasimi                                                   |
| <b>Lektor</b>                            | Ahmet Osmani                                                    |
| <b>Dizajn dhe rregullimi teknik</b>      | Mladen Jakimovski                                               |
| <b>Shtypi</b>                            | Poliesterday DOOEL, Shkup 2026                                  |
| <b>Tirazhi</b>                           | 2 000                                                           |

Të gjitha të drejtat janë të rezervuara. Asnjë pjesë e këtij libri nuk lejohet të rishtypet ose të transferohet në çfarëdo lloj forme apo me çfarëdo lloj pajisjeje, elektronike apo mekanike, duke përfshirë edhe fotokopjimin, dokumentimin ose ruajtjen në sistemet e kërkimit pa marrë pëlqimin me shkrim nga botuesi.

Libri shkollor është miratuar për përdorim në arsimin gjimnazial me Vendimin për Miratimin dhe Përdorimin e Tekstit Shkollor për Lëndën e MATEMATIKA II libër shkollor për vitin e dytë të arsimit gjimnazial, Nr. 26-644/1 të datës 21.05.2026, i lëshuar nga Ministria e Arsimit dhe Shkencës e Republikës së Maqedonisë së Veriut.

Komisioni recensues: Dr. Aljit Ibraimi, Prof. Dr. Xhevair Beqiri, Suzana Nichota

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)=18

BAKEVA Smiljkova, Verica

Matematika II : libër shkollor për vitin e dytë të arsimit gjimnazial / Verica Bakeva Smiljkova, Goran Mihajloski ; [përkthim nga maqedonisht në shqip Krutan Rasimi]. - (Botimi i parë). - Shkup : Albi, 2026. - 330 стр. : илустр. ; 27 см

Превод на делото: Математика II : учебник за втора година гимназиско образование. - Библиографија: стр. 330

ISBN 978-608-241-098-2

1. Mihajloski, Goran [автор]

COBISS.MK-ID 69434373



## PARATHËNIE

Ky tekst shkollor është dedikuar për të mësuarit sistematik dhe të thelluar të koncepteve dhe metodave kyçe matematike për nxënësit e vitit të dytë të gjimnazit dhe përbën bazë për arsimimin e mëtejshëm, si dhe për zbatimin e matematikës në shkencat e natyrës dhe ato teknike, ekonomi dhe në përditshmëri. Në këtë tekst shkollor janë përfaqësuar detyra që janë në përputhje me drejtimet bashkëkohore arsimore që vënë theksin mbi orientimin STEM (shkencë, teknologji, inxhinieri dhe matematikë) dhe mbi rëndësinë e matematikës si gjuhë dhe vegël për të kuptuarit, modelimin dhe zgjidhjen e problemeve reale. Qëllimi i këtij teksti nuk është vetëm përvetësimi i veprimeve formale, por edhe zhvillimi i mendimit analitik, logjik dhe kritik, si dhe aftësimi për zbatimin e dijeve matematike në kontekste të ndryshme.

Teksti shkollor Matematika për vitin e II përbëhet nga gjashtë tema, të konceptuara sipas programit mësimor të matematikës për vitin e II të arsimit në gjimnaz.

Në temën e parë shqyrtohen rrënjëzimi dhe numrat kompleksë, me qëllim zgjerimin e operacioneve në bashkësinë e numrave realë, si dhe zgjerimin e kësaj bashkësie deri në bashkësinë e numrave kompleksë. Këto përmbajtje mundësojnë të kuptuarit më të thellë të operacioneve algjebrike dhe paraqesin veglën e domosdoshme për zgjidhjen e ekuacioneve të llojeve përkatëse dhe zgjidhjen e problemeve në matematikë, fizikë dhe shumë sfera të tjera.

Në dy temat në vijim theksi është vendosur mbi ekuacionet kuadratike (të fuqisë së dytë) dhe ekuacionet që sillen në formën e tyre, si dhe mbi funksionin kuadratik, vetitë e tij dhe interpretimin grafik. Këto tema ofrojnë lidhje të qartë mes qasjes algjebrike dhe asaj gjeometrike si dhe shërbejnë si bazë për hulumtimin e mëtejshëm të funksioneve. Në vijim përpunohen inekuacionet kuadratike dhe sistemet e inekuacioneve kuadratike me një të panjohur, me theks në të menduarit logjik, analizën e zgjidhjeve dhe interpretimin e tyre.

Në temën e katërt “Elementet e probabilitetit” prezantohen konceptet bazike të kombinatorikës dhe gjasës (probabilitetit), d.m.th., principet themelore të numërimit dhe llogaritjes së gjasës. Këto përmbajtje zhvillojnë të menduarit kombinatorik dhe statistikor dhe mundësojnë modelimin dhe analizën e ngjarjeve të rastit, prania e të cilave sa vjen e shtohet në shkencat bashkëkohore dhe në teknologji.

Pjesa e parë e temës së pestë i kushtohet trigonometrisë, e cila studiohet si një instrument shumë i fuqishëm për analizën e këndeve, trekëndësheve dhe identiteteve të ndryshme trigonometrike, me një lidhje shumë të qartë me gjeometrinë, fizikën dhe inxhinierinë. Prezantohen funksionet trigonometrike dhe përdorimi i tyre në zgjidhjen e detyrave teorike dhe atyre praktike. Në pjesën e dytë të kësaj teme, që i kushtohet drejtëzës dhe rrafshit, shpjegohet dallimi mes aksiomës dhe teoremës, studiohen aksiomat e gjeometrisë hapësinore dhe shpjegohet e skicohet varshmëria e ndërsjellë e dy rrafsheve, drejtëzës dhe rrafshit, ose e dy drejtëzave në hapësirë. Në pjesën e fundit të temës së pestë hulumtohen format 3D dhe prerjet e tyre me rrafshin. Përmes këtyre përmbajtjeve zhvillohet paraqitja hapësinore, pamore dhe aftësia për analizën e objekteve gjeometrike në rrafsh dhe hapësirë.

Në temën e gjashtë hulumtohen format 2D, perimetri i tyre dhe syprina e tyre, si dhe format 3D me syprinat dhe vëllimet e tyre. Këto koncepte përpunohen përmes shembujve praktikë lidhur me matjet, analizën hapësinore dhe modelimin e objekteve reale, sikurse janë elementet arkitektonike, konstruksionet teknike, paketimet dhe trupat natyrorë.

Teksti shkollor është strukturuar asisoj që secila temë është përshkruar me përkufizime të qarta, veti, shembuj të ilustruar dhe detyra të shumëllojshme me nivel të ndryshëm ndërlikimi. Theks i veçantë është vënë në ndërlidhjen mes teorisë dhe zbatimit praktik të matematikës si dhe zhvillimin e mendimit matematik, logjikës dhe pavarësimin e nxënësve në punën e tyre. Në fillim të çdo njësie mësimore ka një pjesë "Rikujtoni!", ku janë dhënë koncepte të njohura nga më parë, por të cilët nxënësit duhet t'i rikujtojnë me qëllim nxënien e dijeve të reja. Gjithë shembujt në tekst janë dhënë bashkë me zgjidhjet. Pas shembujve, si zakonisht, ka një numër detyrash për verifikim nëse nxënësit e kanë përvetësuar materien e njësisë mësimore. Në fund të çdo njësie mësimore ka "Detyra për ushtrime", kurse në fund të çdo teme ka detyra për përsëritje dhe përforsim të materies mësimore.

Edhe përkundër punës së madhe të investuar në përpilimin e këtij teksti shkollor, për shkak të kohës së shkurtër të përgatitjes së tij, ka mundësi të ketë gabime të vogla teknike të cilat, nëse vërehen, do të përmirësohen në botimet e radhës së tekstit shkollor. Sigurisht, vërejtjet e juaja, të cilës natyrë qofshin ato, do të jenë të mirëpritura nga ana jonë dhe për të njëjtat u falënderojmë paraprakisht.

Shpresojmë që ky tekst shkollor do të jetë një udhërrëfyes i sigurt për nxënësit në të mësuarit e matematikës dhe mbështetje e vyer për mësuesin në procesin mësimor.



# PËRMBAJTJA

|                                                                                                                  |               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>PARATHËNIE</b> .....                                                                                          | <b>3</b>      |
| <b>TEMA 1 RRËNJËT DHE NUMRAT KOMPLEKSË</b> .....                                                                 | <b>8</b>      |
| 1.1 Fuqitë dhe operacionet me fuqi .....                                                                         | 8             |
| 1.2 Koncepti për rrënjën .....                                                                                   | 13            |
| 1.3 Fuqia me tregues numër racional. Paraqitja e rrënjës përmes fuqisë. ....                                     | 18            |
| 1.4 Zgjerimi dhe thjeshtimi i rrënjës .....                                                                      | 25            |
| 1.5 Rrënjëzimi i produktit dhe herësit. ....                                                                     | 29            |
| 1.6 Mbledhja dhe zbritja e rrënjëve .....                                                                        | 34            |
| 1.7 Shumëzimi, pjesëtimi, fuqizimi dhe rrënjëzimi i rrënjëve. ....                                               | 39            |
| 1.8 Shprehjet irracionale. Racionalizimi i emëruesit të thyesës. ....                                            | 44            |
| 1.9 Zgjerimi i bashkësive numerike. ....                                                                         | 50            |
| 1.10 Mbledhja dhe zbritja e numrave kompleksë .....                                                              | 57            |
| 1.11 Shumëzimi i numrave kompleksë. Fuqia e numrit kompleks .....                                                | 60            |
| 1.12 Pjesëtimi i numrave kompleksë .....                                                                         | 64            |
| 1.13 Detyra me zbatime të numrave kompleksë .....                                                                | 66            |
| Detyra për përsëritje dhe përforsim .....                                                                        | 72            |
| <br><b>TEMA 2 EKUACIONET KUADRATIKE DHE EKUACIONET QË SHNDËRROHEN NË EKUACIONE KUADRATIKE</b> .....              | <br><b>74</b> |
| 2.1 Koncepti për ekuacionin kuadratik. Llojet e ekuacioneve kuadratike.<br>Zgjidhja e ekuacionit kuadratik ..... | 74            |
| 2.2 Zgjidhja e ekuacioneve kuadratike jo të plota .....                                                          | 80            |
| 2.3 Zgjidhja e ekuacioneve kuadratike të plota .....                                                             | 84            |
| 2.4 Diskutimi i zgjidhjeve të ekuacionit kuadratik .....                                                         | 90            |
| 2.5 Formulatat e Vietit .....                                                                                    | 94            |
| 2.6 Ndërtimi i ekuacionit kuadratik përmes zgjidhjeve të dhëna.<br>Zbërthimi në trinom kuadratik .....           | 98            |
| 2.7 Ekuacionet racionale thyesore .....                                                                          | 103           |
| 2.8 Ekuacionet bikuadratike .....                                                                                | 107           |
| 2.9 Sistemi me një ekuacion linear me dy ndryshore dhe<br>një ekuacion kuadratik me dy ndryshore .....           | 109           |
| Detyra për përsëritje dhe përforsim .....                                                                        | 112           |

|               |                                                                                                             |            |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>TEMA 3</b> | <b>FUNKSIONI KUADRATIK, INEKUACIONI KUADRATIK DHE SISTEMI I INEKUACIONEVE KUADRATIKE ME NJË TË PANJOHUR</b> | <b>114</b> |
| 3.1           | Funksioni kuadratik. Grafiku i funksionit $f(x) = x^2$                                                      | 114        |
| 3.2           | Grafiku i funksioneve $f(x) = ax^2$ dhe $f(x) = ax^2 + b$                                                   | 118        |
| 3.3           | Trajta kanonike e ekuacionit kuadratik dhe grafiku i $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$                       | 124        |
| 3.4           | Grafiku i funksionit $f(x) = ax^2 + bx + c$                                                                 | 127        |
| 3.5           | Vetitë e funksionit kuadratik                                                                               | 131        |
| 3.6           | Ecuria dhe grafiku i funksionit kuadratik                                                                   | 138        |
| 3.7           | Inekuacionet kuadratike                                                                                     | 141        |
| 3.8           | Sistemi i inekuacioneve kuadratike me një të panjohur                                                       | 145        |
|               | Detyra për përsëritje dhe përforsim                                                                         | 152        |
| <b>TEMA 4</b> | <b>ELEMENTE TË PROBABILITETIT</b>                                                                           | <b>154</b> |
| 4.1           | Variacionet me përsëritje                                                                                   | 154        |
| 4.2           | Variacionet pa përsëritje                                                                                   | 159        |
| 4.3           | Permutacionet                                                                                               | 164        |
| 4.4           | Kombinacionet                                                                                               | 170        |
| 4.5           | Disa detyra të kombinuara                                                                                   | 176        |
| 4.6           | Eksperimentet dhe ngjarjet                                                                                  | 181        |
| 4.7           | Bashkësia e ngjarjeve elementare. Ngjarjet e rastit                                                         | 185        |
| 4.8           | Operacione me ngjarje                                                                                       | 188        |
| 4.9           | Përkufizimi klasik i probabilitetit                                                                         | 193        |
| 4.10          | Veti të probabilitetit. Ngjarjet e pavarura                                                                 | 198        |
|               | Detyra për përsëritje dhe përforsim                                                                         | 205        |
| <b>TEMA 5</b> | <b>GJEOMETRIA</b>                                                                                           | <b>208</b> |
| 5.1           | Këndet dhe matja e këndeve                                                                                  | 208        |
| 5.2           | Përkufizimi i funksioneve trigonometrike të këndit të ngushtë                                               | 213        |
| 5.3           | Funksionet trigonometrike të këndit komplementar                                                            | 217        |
| 5.4           | Lidhja mes funksioneve trigonometrike të këndit të njëjtë                                                   | 220        |
| 5.5           | Thjeshtimi i shprehjeve trigonometrike                                                                      | 223        |
| 5.6           | Zbatimi i funksioneve trigonometrike                                                                        | 227        |
| 5.7           | Aksiomat e gjeometrisë hapësinore                                                                           | 231        |
| 5.8           | Pozita e ndërsjellë e drejtëzës dhe rrafshit, dy rrafsheve dhe dy drejtëzave                                | 236        |
| 5.9           | Prizmi. Prerjet e prizmit me rrafshin                                                                       | 241        |
| 5.10          | Piramida. Prerjet e piramidës me rrafshin                                                                   | 247        |
| 5.11          | Cilindri. Prerjet e cilindrit me rrafshin                                                                   | 251        |
| 5.12          | Koni. Prerjet e konit me rrafshin                                                                           | 255        |
|               | Detyra për përsëritje dhe përforsim                                                                         | 259        |

|                     |                                                          |            |
|---------------------|----------------------------------------------------------|------------|
| <b>TEMA 6</b>       | <b>MATJET</b>                                            | <b>262</b> |
| 6.1                 | Perimetri dhe syprina e katrorit dhe drejtkëndëshit      | 262        |
| 6.2                 | Perimetri dhe syprina e paralelogramit                   | 267        |
| 6.3                 | Perimetri dhe syprina e trekëndëshit                     | 271        |
| 6.4                 | Perimetri dhe syprina e trapezit dhe deltoidit           | 278        |
| 6.5                 | Perimetri dhe syprina e rrethit dhe e pjesëve të rrethit | 284        |
| 6.6                 | Syprina dhe vëllimi i piramidës                          | 290        |
| 6.7                 | Syprina dhe vëllimi i trungut të piramidës               | 296        |
| 6.8                 | Syprina dhe vëllimi i konit                              | 302        |
| 6.9                 | Syprina dhe vëllimi i trungut të konit                   | 306        |
| 6.10                | Syprina e sipërfaqes sferike dhe pjesëve të saj          | 312        |
| 6.11                | Vëllimi i sferës dhe pjesëve të saj                      | 319        |
|                     | Detyra për përsëritje dhe përforcim                      | 325        |
| <b>PREZULTATET</b>  | <b>NGA PËRVETËSIMI I MATERIALIT</b>                      | <b>328</b> |
| <b>BIBLIOGRAFIA</b> |                                                          | <b>330</b> |



# RRËNJËT DHE NUMRAT KOMPLEKSË

Në shumë situata reale nuk mjafton të përdoren vetëm operacionet themelore aritmetike: mbledhje, zbritje, shumëzim, pjesëtim dhe fuqizimi. Shpesh dihet syprina, vëllimi ose ndonjë madhësi tjetër fizike, kurse nevojitet të caktohet gjatësia, brinja ose masa përkatëse. Për shembull, gjatë llogaritjes së gjatësisë së diagonales, largësisë mes dy pikave, shpejtësisë, energjisë ose rezistencës elektrike, shfaqet operacioni i rrënjëzimit. Me anë të këtij operacioni për numrin e dhënë A caktohet numri B fuqia përkatëse e të cilit jep numrin A. Operacioni i tillë quhet rrënjëzim dhe ka zbatim të rëndësishëm në gjeometri, fizikë, teknikë dhe inxhinieri, si dhe në modelimin e detyrave STEM. Në këtë temë do të njihemi me konceptin e rrënjës, vetitë e saj dhe mënyrën e llogaritjes së saj, si dhe me zbatimin e shprehjeve me rrënjë në probleme praktike.

## 1.1 FUQITË DHE OPERACIONET ME FUQI

### Rikujtoni!

- Numri 16 mund të shkruhet si  $4 \cdot 4$ .
- Shprehja  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$  shkurt mund të shkruhet si  $5^4$ .

### Mbani mend!

Nëse  $a$  është numër i çfarëdoshëm real, kurse  $n$  një numër i plotë pozitiv, atëherë fuqia e  $n$ -të e numrit  $a$  përkufizohet me:

$$a^1 = a; \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ herë}}, \quad n \geq 2.$$

Numri  $a$  quhet *bazë* e fuqisë  $a^n$ , kurse numri  $n$  quhet *tregues* (eksponent) i fuqisë.

### Detyra 1

Të paraqiten në trajtë të fuqisë produktet në vijim:

a)  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ;

b)  $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$ ;

c)  $x \cdot x \cdot x \cdot x$ .

**Detyra 2**

Fuqitë në vijim, të paraqiten në trajtën e produktit me shumëzues të njëjtë:

a)  $4^6$ ;      b)  $(-3)^2$ ;      c)  $y^3$ .

**Detyra 3**

Të llogariten fuqitë e mëposhtme të numrave 1 dhe -1:

a)  $1^{34}$ ;      b)  $(-1)^{2025}$ ;      c)  $1^{2025}$ ;      ç)  $(-1)^{2026}$ .

**Mbani mend!**

Nëse  $a$  është numër real i çfarëdoshëm,  $a \neq 0$ , kurse  $n$  numër i plotë pozitiv, atëherë  $a^0 = 1$  dhe  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

**Shembulli 1**

a)  $5^0 = 1$ ;      b)  $(-4)^0 = 1$ ;      c)  $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ ;      ç)  $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$ .

**Detyra 4**

Të llogariten fuqitë në vijim:

a)  $10^0$ ;      b)  $(-15)^0$ ;      c)  $1^{-5}$ ;      ç)  $(-3)^{-4}$ .

**Mbani mend!**

Nëse  $a$  dhe  $b$  janë numra realë të çfarëdoshëm, kurse  $m$  dhe  $n$  janë numra të plotë të çfarëdoshëm, atëherë vlejnë rregullat në vijim për fuqizimin:

1. Produkti i fuqive me bazë të njëjtë

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

2. Herësi i fuqive me bazë të njëjtë

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ për } a \neq 0;$$

3. Fuqizimi i fuqisë

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

4. Fuqia e produktit

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

5. Fuqia e herësit

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ për } b \neq 0.$$

**Shembulli 2**

Duke shfrytëzuar rregullat për fuqizim do t'i thjeshtojmë shprehjet:

$$x^2 \cdot x^6 = x^{2+6} = x^8$$

$$y^4 \cdot y^{-2} = y^{4-2} = y^2$$

$$(3a)^4 = 3^4 a^4 = 81a^4$$

$$(c^3)^5 = c^{3 \cdot 5} = c^{15}$$

**Detyra 5**

Të thjeshtohen shprehjet në vijim:

a)  $b^{10}b^{-5}$ ;    b)  $\left(\frac{c}{3}\right)^3$ ;    c)  $\frac{d^6}{d^3}$ .

**Shembulli 3**

Të eliminohen fuqitë negative në shprehjet në vijim:

a)  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ ;    b)  $\frac{a^{-m}}{b^{-n}}$ ,  $a, b \neq 0$ .

**Zgjidhje:**

a)  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ ;    b)  $\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{b^n}{a^m}$ .

Mbani mend!

a)  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ ;    b)  $\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}$ .

**Shembulli 4**

Të eliminohet fuqia negative dhe të thjeshtohet shprehja:  $\left(\frac{x}{3y^4}\right)^{-2}$ .

**Zgjidhje:**

$$\left(\frac{x}{3y^4}\right)^{-2} = \left(\frac{3y^4}{x}\right)^2 = \frac{(3y^4)^2}{x^2} = \frac{3^2(y^4)^2}{x^2} = \frac{9y^8}{x^2}.$$

**Detyra 6**

Të eliminohet fuqia negative dhe të thjeshtohet shprehja:  $\left(\frac{y}{5x^{-4}}\right)^{-3}$ .

### Shembulli 5

Thellësia mesatare e Oqeanit të Qetë është 4280 m, kurse syprina e oqeanit është  $1,7 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ . Nëse vëllimi llogaritet si produkt i syprinës dhe i thellësisë së oqeanit, atëherë sa është vëllimi i përgjithshëm i oqeanit i shprehur në litra? (Një metër kub përmban 1000 litra)

**Zgjidhje:**

Thellësinë mesatare le ta shënojmë me  $d = 4280 \text{ m}$ , kurse syprinën me  $B = 1,7 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ . Vëllimin e oqeanit e llogaritim me formulën  $V = B \cdot d$ , prandaj kemi

$$V = B \cdot d = 1,7 \cdot 10^{14} \cdot 4280 = 7276 \cdot 10^{14} = 7,276 \cdot 10^{17} \text{ m}^3.$$

Nëse kemi parasysh se 1 metër kub përmban 1000 litra, d.m.th.  $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ l}$ , atëherë fitojmë se vëllimi i përgjithshëm i oqeanit në litra është

$$V = 7,276 \cdot 10^{17} \cdot 10^3 = 7,276 \cdot 10^{20} \text{ l}.$$

### Shembulli 6

Një hapësirë e mbyllur, e izoluar, spitalore ka dimensionet: gjerësinë 5 m, gjatësinë 10 m dhe lartësinë 3 m. Ajo është e mbushur vetëm me oksigjen. Një metër kub përmban 1000 litra, kurse 22,4 litra gaz i çfarëdoshëm përmban  $6,02 \cdot 10^{23}$  molekula (numri i Avogadros). Sa molekula oksigjeni ka në këtë hapësirë?

**Zgjidhje:**

Vëllimi i hapësirës së dhënë është  $V = 5 \cdot 10 \cdot 3 = 150 \text{ m}^3 = 150 \cdot 10^3 \text{ l}$ . Meqenëse në 22,4 litra ka  $6,02 \cdot 10^{23}$  molekula të cilit do gaz, del se në një litër gaz ka  $\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4}$  molekula. Kështu, numri i përgjithshëm i

molekulave të oksigjenit në këtë hapësirë të izoluar është  $150 \cdot 10^3 \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{22,4} = 40,3 \cdot 10^{26} = 4,03 \cdot 10^{27}$ .

### Aktivitet

- Një copë druri, në temperaturë  $600^\circ\text{C}$  digjet plotësisht për një sekondë. Kohëzgjatja e nevojshme e djegies së drurit dyfishohet me uljen e temperaturës për çdo  $10^\circ\text{C}$ , kurse përgjysmohet me rritjen e temperaturës për çdo  $10^\circ\text{C}$ . Për sa sekonda do të digjet një copë druri në:

a)  $550^\circ\text{C}$ ;                      b)  $650^\circ\text{C}$ ?

- Jepen barazimet në vijim:

a)  $2^{-2} - 2^{-3} : 2^{-4} = 2^1$ ;      b)  $3^{-3} + 3^{-2} : 3^{-2} - 3^{-3} - 3^0 = 3^a$

Në grupe, diskutoni në lidhje me vendin ku duhet shënuar kllapat që të fitohen barazime të sakta numerike.



## Detyra për ushtrime!

1. Të llogaritet secila prej shprehjeve:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } (2^3)^2; & \text{b) } (2^3)^0; & \text{c) } \frac{10^6}{10^4}; & \text{ç) } \frac{6^6}{6^{-4}}; \end{array} \quad \text{d) } \left(\frac{1}{32}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{4}{9}\right)^{-3};$$

$$\text{dh) } \frac{3^2 \cdot 4^{-2} \cdot 5^3}{2^{-4} \cdot 3^3 \cdot 25}; \quad \text{e) } 2^{-2} + 2^{-3}; \quad \text{ë) } \left(\frac{1}{3}\right)^3 (-3)^5.$$

2. Të thjeshtohen shprehjet:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } x^{-8}x^4; & \text{b) } (3y^2)(4y^3); & \text{c) } z^5z^{-4}z^{-7}; & \text{ç) } \frac{a^8a^{-2}}{a^3}; \end{array} \quad \text{d) } (3z^2)(9z^2)^{-2};$$

$$\text{dh) } b^4(3ab^3)(2a^2b^{-3})^{-4}; \quad \text{e) } \left(\frac{x^4z^2}{3y^3}\right)^3 \left(\frac{6x^3z^{-2}}{2y^4}\right)^{-1}; \quad \text{ë) } \left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}.$$

3. Indeksi i masës trupore është një masë që përdoret nga hulumtuesit mjekësorë për të përcaktuar nëse ndonjë individ ka ose jo peshë normale trupore, pra nëse është mbipeshë ose nënpeshë në raport me peshën normale. Për individin që peshon
- $W$
- kilogramë dhe ka lartësi
- $H$
- , indeksi i masës trupore
- $B$
- , llogaritet me formulën

$$B = \frac{W}{H^2},$$

dhe konsiderohet se ka vlerë normale nëse kënaq mosbarazimin  $18,5 \leq B \leq 24,9$ , kurse për personin me indeks të masës trupore që kap vlerat  $B \geq 30$  thuhet se është mbipeshë.

- a) Të llogaritet indeksi i masës trupore për secilin person të shënuar në tabelë, e më pas përcaktoni nëse personi në fjalë është me peshë normale, është nënpeshë ose mbipeshë.

|         | Pesha në kg | Lartësia në m | Indeksi i masës trupore | Përfundimi |
|---------|-------------|---------------|-------------------------|------------|
| Pjetri  | 43          | 1,6           |                         |            |
| Lluka   | 47          | 1,54          |                         |            |
| Miloshi | 95          | 1,84          |                         |            |
| Vedrani | 105         | 1,55          |                         |            |

- b) Llogarit indeksin tënd të masës trupore

4. Nëse investoni një shumë prej 5000 denarësh, interesi (kamata) pas
- $n$
- vitesh llogaritet me formulën:

$$I = 5000 (1,0025^{12n} - 1).$$

Përplotësoni tabelën në vijim me interesin (kamatën) për numrin e dhënë të viteve.

| Vite | Interesi në denarë |
|------|--------------------|
| 1    | 152,08             |
| 2    |                    |
| 3    |                    |
| 4    |                    |
| 5    |                    |

5. Le të jenë
- $a$
- ,
- $b$
- dhe
- $c$
- numra realë të tillë që
- $a > 0$
- ,
- $b < 0$
- dhe
- $c < 0$
- . Përcaktoni shenjën e secilës prej shprehjeve:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } b^5; & \text{b) } b^{10}; & \text{c) } ab^2c^3; & \text{ç) } (b-a)^3; \end{array} \quad \text{d) } (b-a)^4; \quad \text{dh) } \frac{a^3c^3}{b^6c^6}.$$

## 1.2 KONCEPTI PËR RRËNJËN

### Shembulli 1

Në një park duhet të projektohet një kopsht lulesh në formë katrore me syprinë  $64 \text{ m}^2$ . Sa duhet të jetë gjatësia e brinjës së katrorit?

**Zgjidhje:**

Le ta shënojmë me  $x$  gjatësinë e brinjës së katrorit. Brinja  $x$  duhet të plotësojë, kënaq, ekuacionin

$$x^2 = 64.$$

Gjatësia e brinjës së katrorit është numër jonegativ, prandaj pyetja është se cili është ai numër  $x$  i cili kur shumëzohet me vetveten jep 64? Është më se e qartë se  $8^2 = 64$ , d.m.th.  $x = 8$ . Shkruajmë  $x = \sqrt{64} = 8$ .

### Shembulli 2

Gjatë rënies së lirë, rruga  $s$  (e matur me metra) që e kalon trupi jepet me formulën, që e përshkruan në mënyrë të përafërt rrugën,  $s = t^2$ , ku  $t$  është koha e dhënë në sekonda. Pas sa sekondash trupi do të kalojë rrugën prej 36 m?

**Zgjidhje:**

Në këtë rast kërkohet koha  $t$ , që është numër jonegativ, kështu që  $t^2 = 36$ . Meqenëse  $6^2 = 36$ , vijmë në përfundimin se  $t = 6$  s. Pra, gjatë rënies së lirë, trupi rrugën prej 36 m do ta kalojë për kohën  $t = 6$  s. Shkruajmë  $t = \sqrt{36} = 6$ .

### Mbani mend!

**Rrënja katrore** (rrënja me tregues të rrënjës 2) e një numri real jonegativ  $x$  është një numër jonegativ real  $y$ , i tillë që  $y^2 = x$ .

Shkruajmë,  $y = \sqrt{x}$  dhe lexojmë „ $y$  është rrënja katrore e „ $x$ “.

Në shprehjen  $\sqrt{x}$ , numri  $x$  quhet **shprehje nën rrënjë** (ose **madhësi nën rrënjë**).

Vërejmë se operacioni i fuqizimit me tregues fuqie 2 dhe operacioni i rrënjës katrore janë operacione inverse për njëri-tjetrin. Me të vërtetë,

$$\sqrt{36} = 6, \text{ sepse } 6^2 = 36;$$

$$\sqrt{225} = 15, \text{ sepse } 15^2 = 225;$$

$$\sqrt{1} = 1, \text{ sepse } 1^2 = 1;$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ sepse } 0^2 = 0.$$

### Detyra 1

Të llogariten vlerat e rrënjëve katrore të mëposhtme:

a)  $\sqrt{144}$ ;   b)  $\sqrt{196}$ ;   c)  $\sqrt{625}$ .

Në përgjithësi, kur zgjidhet ekuacioni i formës  $x^2 = 25$ , nëse nuk kemi kufizime në lidhje me parashenjën e numrit  $x$ , atëherë kërkohen gjithë numrat realë  $x$  për të cilët ekuacioni kalon, bëhet, identitet numerik. Për këtë ekuacion kemi dy zgjidhje:  $x = -5$  dhe  $x = 5$ , sepse  $(-5)^2 = 25$  dhe  $5^2 = 25$ .

Shkruajmë  $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ . Mirëpo, kini kujdes, sipas përkufizimit,  $\sqrt{25} = 5$ . Shenja  $\pm$  vjen përpara shenjës së rrënjës.

### Shembulli 3

Të zgjidhet ekuacioni  $x^2 = 100$ .

**Zgjidhje:**

Nga diskutimi më sipër, kemi,  $x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$ .

### Detyra 2

Të zgjidhen ekuacionet në vijim:

a)  $x^2 = 324$ ;    b)  $x^2 - 36 = 64$ ;    c)  $289 - x^2 = 0$ .

### Shembulli 4

Në ndërtimtari përdoren blloqe betoni në formë kubi. Një bllok i tillë ka vëllim  $64 \text{ m}^3$ . Sa është gjatësia e tehut të kubit të tillë?

**Zgjidhje:**

Nëse me  $a$  e shënojmë tehun e bllokut, kubit, atëherë numri i tillë  $a$  kënaq ekuacionin  $a^3 = 64$ . Numri i vetëm  $a$  që plotëson ekuacionin e tillë është  $a = 4$ . Shkruajmë  $a = \sqrt[3]{64} = 4$ .

### Mbani mend!

**Rrënja kubike (rrënja me tregues rrënje 3)** e numrit real  $x$  është numri real  $y$ , i tillë që  $y^3 = x$ .

Shkruajmë,  $y = \sqrt[3]{x}$  dhe lexojmë „ $y$  është rrënja kubike e  $x$ ”.

Vëreni se operacioni i fuqizimit me tregues fuqie 3 dhe operacioni i rrënjës kubike janë operacione të ndërsjella inverse. Me të vërtetë,

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ sepse } 2^3 = 8;$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3, \text{ sepse } (-3)^3 = -27;$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1, \text{ sepse } (-1)^3 = -1;$$

$$\sqrt[3]{0} = 0, \text{ sepse } 0^3 = 0.$$

### Detyra 3

Të llogariten vlerat e mëposhtme të rrënjëve kubike:

a)  $\sqrt[3]{-125}$ ;    b)  $\sqrt[3]{1000}$ ;    c)  $\sqrt[3]{-1000}$ .

Parashtrohet pyetja, tani, nëse koncepti i rrënjës mund të përgjithësohet për tregues të çfarëdoshëm  $n$ , të rrënjës, ku  $n$  ( $n \geq 2$ ) është numër i çfarëdoshëm natyror.



**Mbani mend!**

1. Nëse  $n$  është numër çift, atëherë rrënja e  $n$ -të është funksion që çdo numri real jonegativ  $x$  i shoqëron numrin real jonegativ  $y$  për të cilin vlen  $y^n = x$ .
2. Nëse  $n$  është numër tek, atëherë rrënja e  $n$ -të është funksion që çdo numri real  $x$  i shoqëron numrin real  $y$  për të cilin vlen  $y^n = x$ .

Në të dy rastet shkruajmë,  $y = \sqrt[n]{x}$  dhe lexojmë „ $y$  është rrënja e  $n$ -të e  $x$ ”.

Le të nënvizojmë se nëse treguesi  $n$  i rrënjës është numër çift, atëherë funksioni është i përkufizuar për gjithë numrat realë jonegativë, d.m.th., fusha e përkufizimit e këtij funksioni është  $D = [0, +\infty)$ . Vlerat që merr ky funksion, gjithashtu, janë numra realë jonegativë, prandaj bashkësia e vlerave e këtij funksioni është  $V = [0, +\infty)$ .

Nga ana tjetër, nëse treguesi  $n$  i rrënjës është numër tek, atëherë funksioni është i përkufizuar për gjithë numrat realë, d.m.th., fusha e përkufizimit e këtij funksioni është  $D = \mathbb{R}$ . Vlerat që merr ky funksion, gjithashtu, janë numra realë, të cilët mund të jenë si pozitivë ashtu edhe negativë, prandaj bashkësia e vlerave  $V = \mathbb{R}$ . Në rastin e përgjithshëm, fusha e përkufizimit dhe bashkësia e vlerave që merr funksioni rrënja e  $n$ -të mund të shkruhen si

$$D = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{nëse } n \text{ është numër çift} \\ \mathbb{R}, & \text{nëse } n \text{ është numër tek} \end{cases} \quad V = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{nëse } n \text{ është numër çift} \\ \mathbb{R}, & \text{nëse } n \text{ është numër tek} \end{cases}$$

**Shembulli 5**

- a) Shprehjet  $\sqrt[4]{-16}$ ,  $\sqrt[4]{-64}$ ,  $\sqrt{-25}$  nuk janë të përkufizuara pasi numrat negativë nuk janë në fushën e përkufizimit të funksionit rrënja e  $n$ -të, për numrin çift  $n$ .
- b) Shprehjet  $\sqrt[3]{-8}$ ,  $\sqrt[3]{-32}$  janë të përkufizuara pasi fusha e përkufizimit funksionit rrënja e  $n$ -të, për numrin tek  $n$ , është e gjithë bashkësia e numrave realë. Në këtë rast kemi,  $\sqrt[3]{-8} = -2$  dhe  $\sqrt[3]{-32} = -2$ .

**Detyra 4**

Të caktohet se cilat nga shprehjet e mëposhtme janë të përkufizuara, e cilat jo:

- a)  $\sqrt[3]{-25}$ ;      b)  $\sqrt[4]{-49}$ ;      c)  $\sqrt[5]{30}$ ;      ç)  $\sqrt[4]{100}$ .

**Shembulli 6**

Të njehsohen vlerat e rrënjëve në vijim:

- a)  $\sqrt[3]{3^3}$ ;      b)  $\sqrt[2]{(-3)^5}$ ;      c)  $\sqrt[4]{3^4}$ ;      ç)  $\sqrt[6]{(-3)^6}$ .

**Zgjidhje:**

- a)  $\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27} = 3$ ;



$$b) \sqrt[3]{(-3)^3} = \sqrt[3]{-243} = -3;$$

$$c) \sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{81} = 3 = |3|;$$

c) Vëreni se  $(-3)^6$  është numër pozitiv, prandaj rrënja  $\sqrt[6]{(-3)^6}$  është e përkufizuar. Kështu,  $\sqrt[6]{(-3)^6} = \sqrt[6]{(-3)^6} = \sqrt[6]{729} = 3 = |-3|$ . Me fjalë tjera, vlera e  $\sqrt[6]{(-3)^6}$  nuk është  $-3$ , por është  $3 = |-3|$ .

### Mbani mend!

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{nëse } n \text{ është numër tek} \\ |a|, & \text{nëse } n \text{ është numër çift} \end{cases}$$

### Detyra 5

Caktoni vlerën e shprehjes:

$$a) \sqrt[6]{6^6}; \quad b) \sqrt[4]{(-6)^6}; \quad c) \sqrt[3]{6^5}; \quad d) \sqrt[5]{(-6)^5}.$$

### Shembulli 7

Llogaritni shprehjet në vijim:

$$a) (\sqrt{9})^2; \quad b) (\sqrt[4]{16})^4; \quad c) (\sqrt[3]{-27})^3.$$

Zgjidhje:

$$a) (\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9; \quad b) (\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16; \quad c) (\sqrt[3]{-27})^3 = (-3)^3 = -27.$$

### Mbani mend!

Nëse është e përkufizuar shprehja  $\sqrt[n]{a}$ , atëherë  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ .

Vëreni se  $(\sqrt[4]{-16})^4 \neq -16$ , sepse  $-16$  nuk është në fushën e përkufizimit të funksionit rrënja e 4-të.

### Shembulli 8

Policia përdor formulën  $v = \sqrt{254fd}$  për të vlerësuar shpejtësinë  $v$  (në km/h) me të cilën lëviz automjeti nëse rrëshqet  $d$  metra pasi të ketë frenuar furishëm (figura më poshtë). Numri  $f$  është koeficienti i fërkimit i rrugës, që paraqet masën se sa e rrëshqitshme është rruga. Në tabelën vijuese janë dhënë disa vlerësime tipike për koeficientin  $f$ .

|            | Asfalt | Beton | Kalldrëm |
|------------|--------|-------|----------|
| I lagështë | 0,5    | 0,4   | 0,1      |
| I thatë    | 1,0    | 0,8   | 0,2      |

- a) Nëse automjeti rrëshqet 10 metra në betonin e lagshtë deri sa ndalon, sa shpejt ka qenë duke lëvizur në çastin kur ka shtypur frenat?
- b) Nëse automjeti lëviz me shpejtësi 20 km/h në rrugën e shtruar me kalldrëm të thatë, sa rrugë do të kalojë nga momenti i frenimit deri sa të ndalojë?



#### Zgjidhje:

- a) a) Meqenëse automjeti rrëshqet 10 metra në betonin e lagshtë, kjo do të thotë se  $d = 10$ , kurse  $f = 0,4$ . Në pajtueshmëri me formulën e dhënë, kemi se  $v = \sqrt{254fd} = \sqrt{254 \cdot 0,4 \cdot 10} = 31,87$  km/h.
- b) Automjeti lëviz me shpejtësi 20 km/h nëpër kalldrëm të thatë, prandaj  $v = 20$ , kurse  $f = 0,2$ . Në këtë rast kërkohet distanca, rruga e kaluar,  $d$ . Nga formula e dhënë e përcaktojmë  $v^2 = 254fd$ , përkatësisht

$$d = \frac{v^2}{254f}.$$

Me zëvendësimin e vlerave, fitojmë:

$$d = \frac{20^2}{254 \cdot 0,2} = 7,87 \text{ m}.$$

#### Detyra për ushtrime!

- Cilat nga gjykimet e mëposhtme janë të sakta:
  - Numri 6 është rrënjë katrore e 72;
  - Numri 7 është rrënjë katrore e 49;
  - Rrënja e pestë e 243 është 3;
  - Rrënja e pestë e -243 është -3;
  - Rrënja e katërt e 16 është -4.
- Cilat nga shprehjet e dhëna janë të përkufizuara:
  - $\sqrt{-4}$ ;
  - $\sqrt[3]{-125}$ ;
  - $\sqrt[4]{64}$ ;
  - $-\sqrt{25}$ .
- Për cilat vlera të ndryshores  $x$  janë të përkufizuara shprehjet e mëposhtme:
  - $\sqrt{2x-5}$ ;
  - $\sqrt[3]{x+4}$ ;
  - $\sqrt[4]{10-x}$ ;
  - $\sqrt[3]{x-1}$ ;
  - $\sqrt[4]{x^2+9}$ .
- Llogaritni vlerën e shprehjeve në vijim:
  - $3\sqrt{\frac{1}{9}} + 2\sqrt{16} - \sqrt{\frac{1}{4}}$ ;
  - $\sqrt{196} - \sqrt[3]{-64} + \sqrt[4]{81}$ ;
  - $\sqrt[3]{-27} - \sqrt{49} - \sqrt[4]{-32}$ .
- Cilat nga barazimet e dhëna janë të sakta
  - $\sqrt{4^2} = 4$ ;
  - $\sqrt{(-4)^2} = -4$ ;
  - $5 \cos 41^\circ = 2$ ;
  - $\sqrt[3]{(-3)^2} = -3$ ;
  - $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$ ;
  - $\sqrt[3]{1^3} = 1$ .
- Për cilat vlera të ndryshores  $x$  është i saktë barazimi?
  - $\sqrt{x^2} = x$ ;
  - $\sqrt[3]{x^3} = x$ ;
  - $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$ ;
  - $\sqrt[4]{(2-x)^4} = |2-x|$ .
- Një inxhinier elektrike punon në një projekt për panele diellore. Ai dëshiron të vendos  $n \times n$  panele në një sistem (d.m.th.  $n$  rreshta dhe  $n$  kolona me panele). Një panel prodhon 40 vat-orë në ditë. Sa panele do t'i nevojiten inxhinierit nëse dëshiron që sistemi të prodhojë 1000 vat-orë në ditë?

## 1.3 FUQIA ME TREGUES NUMËR RACIONAL. PARAQITJA E RRËNJËS PËRMES FUQISË

### Rikujtoni!

- Nëse  $n \in \mathbb{Z}^+$ , atëherë
  - $a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n$ , për  $n \geq 2$ ;
  - $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , për  $a \neq 0$ ;
  - $a^0 = 1$ , për  $a \neq 0$ .
- Nëse  $r \in \mathbb{Q}$ , atëherë  $r$  mund të paraqitet si  $r = \frac{m}{n}$ , ku  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

### Fuqia me tregues numër racional

Konceptin e fuqizimit me tregues numër natyror dhe të plotë do ta përgjithësojmë me konceptin e fuqizimit me tregues numër racional. Qëllimi i këtij përgjithësimi është që të vlejnjë rregullat e njëjta të fuqizimit që vlejnjë edhe për fuqitë me tregues numër natyror ose numër të plotë.

Në fillim do ta përkufizojmë fuqizimin me tregues të fuqisë të formës  $\frac{1}{n}$ , ku  $n \in \mathbb{N}$ .

### Mbani mend!

- Nëse  $a$  është numër real jonegativ dhe  $n$  numër pozitiv çift, atëherë  $a^{\frac{1}{n}}$  është numër jonegativ për të cilin vlen  $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ .
- Nëse  $a$  është numër real dhe  $n$  numër pozitiv tek, atëherë  $a^{\frac{1}{n}}$  është numri real për të cilin vlen  $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ .

### Shembulli 1

- $9^{\frac{1}{2}} = 3$ , sepse  $3^2 = 9$ ;
- $16^{\frac{1}{4}} = 2$ , sepse  $2^4 = 16$ ;
- $(-27)^{\frac{1}{3}} = -3$ , sepse  $(-3)^3 = -27$ .



**Detyra 1**

Të llogaritet: a)  $27^{\frac{1}{3}}$ ; b)  $81^{\frac{1}{4}}$ ; c)  $(-243)^{\frac{1}{5}}$ .

Në vazhdim do ta përgjithësojmë përkufizimin e mëparshëm për fuqizimin me tregues fuqie  $r = \frac{m}{n}$ , ku  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ . Siç përmendëm më sipër, duhet të sigurohemi që të vlejnjë rregullat e njëjta për fuqizimin sikurse ato për fuqitë me tregues numër natyror ose numër të plotë.

**Mbani mend!**

1. Le të jetë  $a$  numër real pozitiv dhe  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ , ku  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$  dhe  $n$  numër çift. Atëherë fuqia e numrit  $a$  me tregues numrin racional  $\frac{m}{n}$  përkufizohet me  $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ .
2. Le të jetë  $a$  numër real ( $a \neq 0$ ) dhe  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ , ku  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$  dhe  $n$  numër tek. Atëherë fuqia e numrit  $a$  me tregues numrin racional  $\frac{m}{n}$  përkufizohet me  $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ .

**Shembulli 2**

Llogaritni: a)  $27^{\frac{2}{3}}$ ; b)  $81^{\frac{5}{4}}$ ; c)  $(-125)^{\frac{4}{5}}$ .

**Zgjidhje:**

$$\text{a) } 27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^2 = 9;$$

$$\text{b) } 81^{\frac{5}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^5 = 3^5 = 243;$$

$$\text{c) } (-125)^{\frac{4}{5}} = \left((-125)^{\frac{1}{5}}\right)^4 = (-5)^4 = 625.$$

**Detyra 2**

Llogaritni: a)  $216^{\frac{5}{3}}$ ; b)  $2401^{\frac{3}{4}}$ ; c)  $(-64)^{\frac{7}{5}}$ .

Sipas përkufizimit për fuqinë me tregues numër racional, rregullat për fuqizimin mbeten të njëjta si edhe në rastin e fuqizimit me tregues numër të plotë, por vetëm në rastin kur fuqizimi është përkufizuar, d.m.th. kur ka kuptim.



**Mbani mend!**

Për të gjithë numrat realë  $a \neq 0$  dhe  $b \neq 0$  dhe për çdo  $\frac{m}{n}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ , ku  $m, r \in \mathbb{Z}$ ,  $n, s \in \mathbb{N}$ , vlejnë rregullat në vijim:

1. Produkti i fuqive me bazë të njëjtë

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m+r}{n}};$$

2. Herësi i fuqive me bazë të njëjtë

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m-r}{n}};$$

3. Fuqizimi i fuqisë

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m \cdot r}{n \cdot s}};$$

4. Fuqizimi i produktit

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}};$$

5. Fuqizimi i herësit

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

Në të gjitha këto rregulla, nëse  $n$  është numër çift, atëherë  $a, b$  duhet të jenë numra pozitivë.

**Shembulli 3**

Llogaritni:

a)  $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}}$ ;    b)  $16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}}$ ;    c)  $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Zgjidhje:**

Sipas rregullave, më sipër të formuluar, të fuqizimit, fitojmë:

a)  $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1+1}{2}} = 16^{\frac{2}{2}} = 2^3 = 8;$

b)  $16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1-1}{2}} = 16^{\frac{0}{2}} = 16^0 = 1;$

c)  $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2.$

**Detyra 3**

Llogaritni:

a)  $256^{\frac{1}{4}} \cdot 256^{\frac{1}{8}}$ ;    b)  $256^{\frac{1}{2}} : 256^{\frac{1}{4}}$ ;    c)  $\left(256^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Shembulli 4**

Le të jetë  $a, b > 0$ . Kryeni operacionet e mëposhtme:

$$\text{a) } a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}; \quad \text{b) } a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{1}{3}}; \quad \text{c) } \left(a \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}}.$$

**Zgjidhje:**

$$\text{a) } a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3+2}{4}} = a^{\frac{5}{2}};$$

$$\text{b) } a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{3+1}{4}} : a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{13}{12}} : a^{-\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{13}{12}}}{a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{13}{12}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}} = a^{\frac{13}{12}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{13+4}{12}} = a^{\frac{17}{12}};$$

$$\text{c) } \left(a \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{4}{5}} \cdot b^{\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}} = a^{\frac{4}{5}} \cdot b^{\frac{8}{15}}.$$

**Detyra 4**

Le të jetë  $a > 0$ . Llogaritni:

$$\text{a) } a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} - a^{\frac{1}{2}}; \quad \text{b) } a^{\frac{1}{5}} : a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{2}}; \quad \text{c) } \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

**Shembulli 5**

Llogaritni fuqitë  $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3$  dhe  $\left(4^3\right)^{\frac{1}{2}}$  dhe krahasoni rezultatet.

**Zgjidhje:**

$$\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8 \text{ dhe } \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = 8, \text{ prandaj mund të përfundojmë se të dy fuqitë janë të barabarta.}$$

Në fakt, barazia e fuqive në shembullin paraprak vlen jo vetëm në rastin konkret, por në përgjithësi. Në të vërtetë, vlen vetia në vijim.

**Mbani mend!**

Për çdo numër real  $a$  dhe për  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ , ku  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ , vlen:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Këtu, nëse  $n$  është numër çift, atëherë rregulla vlen për  $a \geq 0$ .

## Paraqitja e fuqisë me tregues numër racional përmes rrënjës dhe anasjellas

Më herët kemi përkufizuar se rrënja e  $n$ -të është funksion që secilit numër real  $x$  i shoqëron numrin real  $y$  për të cilin vlen  $y^n = x$ . Por, nëse  $n$  është numër çift, atëherë funksioni është i përkufizuar për  $x \geq 0$ , kurse nëse  $n$  është numër tek, atëherë fusha e përkufizimit është e gjithë bashkësia e numrave realë. Domethënë, për  $x$  nga fusha e përkufizimit vlen ekuivalenca e mëposhtme:

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^n.$$

Për gjetjen e lidhjes së fuqisë me tregues numër racional dhe rrënjës, do të nisemi nga përkufizimi i  $a^{\frac{1}{n}}$ . Nëse shprehjen  $a^{\frac{1}{n}}$  e fuqizojmë me tregues fuqie  $n$ , ku  $n \in \mathbb{N}$ , fitojmë:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$

Pra,  $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ , prandaj nga ekuivalenca e mëparshme del se  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ .

### Mbani mend!

Nëse  $n \in \mathbb{N}$ , atëherë  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ .

Në këtë rast, nëse  $n$  është numër çift, atëherë barazimi vlen për  $a \geq 0$ , kurse nëse  $n$  është numër tek, atëherë vlen për çdo numër real  $a$ .

### Shembulli 6

a)  $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4;$

b)  $(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2.$

### Detyra 5

Llogaritni: a)  $64^{\frac{1}{3}};$  b)  $(-27)^{\frac{1}{3}}.$

Le të jetë  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Nëse  $a^{\frac{m}{n}}$  fuqizohet me  $n$ , fitojmë:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Nga  $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$  del se  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ .

**Mbani mend!**

Le të jetë  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , atëherë  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ .

Në këtë rast, nëse  $n$  është numër çift, atëherë  $a^{\frac{m}{n}}$  është i përkufizuar për  $a \geq 0$ , kurse nëse  $n$  është numër tek, atëherë  $a^{\frac{m}{n}}$  është përkufizuar për çdo numër real  $a$ .

**Shembulli 7**

a)  $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9;$

b)  $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 8;$

c)  $(-32)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-32)^3} = -8.$

**Shembulli 8**

Shpejtësia me të cilën anija me vela mund të lundrojë është e përcaktuar nga tre faktorë: gjatësia e përgjithshme e saj  $L$ , syprina  $A$  e velave të saj dhe vëllimi  $V$  i ujit që ajo zhvendos, sikurse është treguar në skicë.

Marrë në përgjithësi, anija me vela është e aftë për shpejtësi më të madhe nëse është më e gjatë, ka syprinë më të madhe të velave ose nëse zhvendos më pak ujë. Që garat me anijet me vela të jenë në kushte të barabarta, bashkërisht mund të kualifikohen për garë vetëm anijet e "klasës" së njëjtë. Për garën përkatëse, anija konsiderohet se është kualifikuar nëse vlen



$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} \leq 16,$$

ku  $L$  matet me metra (m), syprina  $A$  me  $m^2$ , kurse  $V$  me  $m^3$ . Shfrytëzoni mosbarazimin e dhënë dhe jepni përgjigje pyetjeve në vijim:

- Anija me vela ka gjatësi 18 m, syprinë të velave  $316 m^2$  dhe vëllim të ujit që zhvendos  $19 m^3$ . Kjo anije a mund të kualifikohet për të garuar?
- Anija me vela ka gjatësi 20 m dhe vëllim të ujit që zhvendos prej  $17 m^3$ . Cila është syprina më e madhe e mundshme e velave që do të mundësonte kualifikimin e anijes për të garuar?

**Zgjidhje:**

- Nga kushtet e detyrës kemi  $L = 18$ ,  $A = 316$  dhe  $V = 19$ . Pyetja është nëse për këto vlera të  $L$ ,  $A$  dhe  $V$  është plotësuar kushti për kualifikim në garë të kësaj anijeje me vela? Le të njehsojmë si në vazhdim:

$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} = 0,98 \cdot 18 + 1,25 \cdot \sqrt{316} - 9,84 \cdot \sqrt[3]{19} = 13,6 \leq 16,$$

d.m.th. kushti për kualifikim është plotësuar dhe anija mund të garojë.



- b) Për  $L = 20$ , dhe  $V = 17$ , kërkohet syprina më e madhe e mundshme për të cilën arrihet kushti i kualifikimit të anijes për garë. Në fakt, kërkohet vlera e syprinës  $A$  për të cilën mosbarazimi i mësipërm (për kualifikim) do të kalonte në barazim, pra kushti i detyrës nënkupton gjetjen e vlerës për  $A$  nga barazimi:

$$0,98L + 1,25A^{\frac{1}{2}} - 9,84V^{\frac{1}{3}} = 16,$$

ku  $L = 20$ ,  $V = 17$ . Duke zëvendësuar vlerat e dhëna në barazimin më sipër, fitojmë:

$$0,98 \cdot 20 + 1,25 \cdot \sqrt{A} - 9,84 \cdot \sqrt[3]{17} = 16.$$

Nga këtu  $\sqrt{A} = \frac{16 - 0,98 \cdot 20 + 9,84 \cdot \sqrt[3]{17}}{1,25} = 17,36$ , prandaj  $A = 17,36^2 = 301,37 \text{ m}^2$ .

### Detyra 6

Shpejtësia që një dron mund ta arrij varet nga masa e tij  $m$  (në kilogram), syprina e përgjithshme,  $S$ , e propelerëve (në metra katrorë) dhe kapaciteti i baterisë  $E$  (në vat-orë). Droni mund të arrijë shpejtësi më të madhe nëse ka masë më të vogël, syprinë më të madhe të propelerëve ose kapacitet më të vogël të baterisë. Për pjesëmarrje të dronit në një garë shpejtësie të caktuar, performancat e tij duhet të kënaqin mosbarazimin në vijim:

$$0 \leq 0,6m + 4\sqrt{S} - 1,5E^{\frac{1}{3}} \leq 20,$$

ku  $m$  është masa në kg,  $S$  është syprina në  $\text{m}^2$ , kurse  $E$  është kapaciteti i baterisë në Wh.

- Droni ka masë 3 kg, syprinë të propelerëve  $0,50 \text{ m}^2$  dhe bateri me kapacitet 54 Wh. Ky dron, a mund të merr pjesë në garë?
- Droni ka masë 2,5 kg dhe bateri me kapacitet 64 Wh. Cila është syprina më e madhe e mundshme e propelerëve që mund të shfrytëzohet, ashtu që droni akoma të mund të kualifikohet për të marrë pjesë në këtë garë?

### Detyra për ushtrime!

1. Caktoni vlerat e fuqive në vijim:

a)  $9^{\frac{5}{2}}$ ;      b)  $125^{\frac{7}{3}}$ ;      c)  $(-343)^{\frac{2}{3}}$ .

2. Llogaritni vlerat e shprehjeve:

a)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$ ;      b)  $\left(\frac{1}{512}\right)^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot \left(\frac{36}{81}\right)^{\frac{1}{2}} - 3$ .

3. Le të jetë  $a > 0$ . Njehsoni

a)  $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}}$ ;      b)  $a^{\frac{1}{2}} : \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-1}\right)$ ;      c)  $\left(\left(a : a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{6}} : a^{\frac{1}{24}}$ .

4. Shkruani si rrënjë fuqitë:

a)  $a^{\frac{1}{3}}$ ;      b)  $2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}$ ;      c)  $4a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{4}}$ .

5. Shkruani si fuqi rrënjët:

a)  $\sqrt{a^3}$ ;      b)  $\sqrt[3]{2a^2b^4}$ ;      c)  $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b^4}$ .

## 1.4 ZGJERIMI DHE THJESHTIMI I RRËNJËVE

### Rikujtoni!

- $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$ , për  $k \neq 0$ ;
- $\frac{m}{n} = \frac{m : k}{n : k}$ , për  $k \neq 0$ ;
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ .

Në shembujt dhe detyrat në vijim do të supozojmë se shprehja  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ,  $a \geq 0$ , nëse  $n$  është numër çift dhe  $a \in \mathbb{R}$ , nëse  $n$  numër tek, d.m.th se shprehja  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$  është gjithmonë e përkufizuar.

### Shembulli 1

Krahasoni vlerat e rrënjëve  $\sqrt[4]{16}$  dhe  $\sqrt[4]{256}$ .

**Zgjidhje:**

Meqenëse  $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$  dhe  $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2$ , përfundojmë se këto dy rrënjë kanë vlera të barabarta.

Vëreni se  $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{16^2}$ . Me të vërtetë, nëse në rrënjën e parë, treguesi i rrënjës dhe treguesi i fuqisë në shprehjen nën rrënjë shumëzohen me numër të njëjtë, fitohet rrënja e dytë. Në rastin e përgjithshëm, nëse  $m, n, k \in \mathbb{N}$ , atëherë

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Kjo veti quhet *zgjerim i rrënjëve*.

### Mbani mend!

Nëse treguesi i rrënjës dhe treguesi i fuqisë në shprehjen nën rrënjë shumëzohen me numër të njëjtë, të ndryshëm nga 0, atëherë vlera e rrënjës nuk ndryshon.

### Shembulli 2

Rrënjët  $\sqrt{3}$  dhe  $\sqrt[3]{5}$  zgjeroni me 3.

**Zgjidhje:**

Duke e përdorur metodën e përshkruar më sipër,

$$\sqrt{3} = \sqrt[2]{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5} = \sqrt[9]{5^3} = \sqrt[9]{125}.$$

**Detyra 2**

Rrënjët  $\sqrt{7}$  dhe  $\sqrt[4]{4}$  zgjeroni me 4.

**Shembulli 3**

Zgjeroni me 2 rrënjët:

$$\text{a) } \sqrt[3]{x^2}; \quad \text{b) } \sqrt[4]{x^2 y^3}; \quad \text{c) } \sqrt[3]{x^3 y^2 z}.$$

**Zgjidhje:**

$$\text{a) } \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^{2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{x^4};$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{x^2 y^3} = \sqrt[4]{(x^2 y^3)^2} = \sqrt[8]{x^4 y^6};$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{x^3 y^2 z} = \sqrt[3]{(x^3 y^2 z)^2} = \sqrt[6]{x^6 y^4 z^2}.$$

**Detyra 3**

Zgjeroni me 3 rrënjët:

$$\text{a) } \sqrt{a^2 b^3}; \quad \text{b) } \sqrt[4]{ab^2 c^3}.$$

**Shembulli 4**

Rrënjët  $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{3}$ , sillni në rrënjë me tregues të njëjtë.

**Zgjidhje:**

Gjatë sjelljes së rrënjëve në tregues të njëjtë të rrënjës, shpesh e përzgjedhim numrin që është shumëfishi më i vogël i përbashkët (SHVP) i treguesve të rrënjëve. Në këtë rast,  $\text{SHVP}(2, 3, 4) = 12$ . Domethënë, gjitha rrënjët do t'i zgjerojmë deri në treguesin 12 të rrënjës. Fitojmë:

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{3^6};$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{3^4};$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{3^3}.$$

**Detyra 4**

Rrënjët  $\sqrt{a^2 b^3}, \sqrt[4]{ab^2 c^3}, \sqrt[5]{c^3}$  sillni në tregues të njëjtë rrënje.

**Shembulli 5**

Krahasoni vlerat e rrënjëve  $\sqrt[3]{2^4}$  dhe  $\sqrt[4]{2^3}$ .

**Zgjidhje:**

Për të krahasuar vlerat e rrënjëve të dhëna, fillimisht do t'i shndërrojmë në rrënjë me tregues të njëjtë rrënje. Meqë  $\text{SHVP}(3, 4) = 12$ , të dyja rrënjët do ti shndërrojmë në rrënjë me tregues rrënje 12. Fitojmë:

$$\sqrt[3]{2^4} = {}^5\sqrt{2^{4 \cdot 3}} = {}^{15}\sqrt{2^{12}} = \sqrt[15]{4096} \quad \text{dhe} \quad \sqrt[3]{2^2} = {}^5\sqrt{2^{2 \cdot 3}} = \sqrt[15]{1024}.$$

Nga dy rrënjët e shndërruara me rrënjë me tregues të njëjtë, më e madhe është ajo e cila ka shprehje më të madhe nën rrënjë. Në këtë rast më e madhe është rrënjja  $\sqrt[3]{2^4}$ .

#### Detyra 5

Radhitni, sipas madhësisë, rrënjët në vijim:

a)  $\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{17}$ ;      b)  $\sqrt{5}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{7}$ .

#### Shembulli 6

Rrënjët  $\sqrt[6]{2^6}, \sqrt[3]{2^3}, \sqrt{2}$  shkruani si fuqi me tregues numër racional dhe më pas krahasoni ato.

**Zgjidhje:**

Duke shfrytëzuar lidhjen mes rrënjëve dhe fuqive me tregues numër racional, kemi

$$\sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}}, \quad \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}}, \quad \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

Pasi  $\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , përfundojmë se të tri rrënjët janë të barabarta.

Në rastin e përgjithshëm, nëse treguesi i rrënjë dhe treguesi i fuqisë i shprehjes nën rrënjë kanë shumëzues të përbashkët  $k$ , atëherë

$$\sqrt[k]{a^{m \cdot k}} = a^{\frac{m \cdot k}{k}} = a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[k]{a^m}.$$

Kjo procedurë njihet si *thjeshtim i rrënjës*.

#### Mbani mend!

Nëse treguesin e rrënjës dhe treguesin e fuqisë së shprehjes nën rrënjë i pjesëtojmë me ndonjë pjesëtues të tyre të përbashkët, atëherë vlera e rrënjës mbetet e pandryshuar.

#### Shembulli 7

Thjeshtoni rrënjët: a)  $\sqrt[3]{x^6}$ ; b)  $\sqrt[3]{x^3 y^3 z^6}$ .

**Zgjidhje:**

a) Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i treguesit të rrënjës dhe treguesit të fuqisë të shprehjes nën rrënjë është PMP(12, 6) = 6, prandaj nëse thjeshtojmë me 6, fitojmë:  $\sqrt[3]{x^6} = {}^{12}\sqrt{x^{6 \cdot 6}} = \sqrt{x}$ .

b) Pasi  $\sqrt[3]{x^3 y^3 z^6} = \sqrt[3]{(xy^3 z^2)^3}$ , kurse PMP(15, 3) = 3, mund të thjeshtojmë me 3:

$$\sqrt[3]{x^3 y^3 z^6} = \sqrt[3]{(xy^3 z^2)^3} = {}^{15}\sqrt{(xy^3 z^2)^{3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{xy^3 z^2}.$$



**Detyra 6**

Thjeshtoni rrënjët: a)  $\sqrt[16]{y^4}$ ; b)  $\sqrt[16]{a^{32}b^8}$ ; c)  $\sqrt[10]{a^6b^{12}c^9}$ .

**Mbani mend!**

Nëse treguesi i rrënjës  $n$  është pjesëtues i treguesit të fuqisë  $m$  të shprehjes nën rrënjë, d.m.th.  $m = n \cdot k$ , atëherë rrënjja  $\sqrt[n]{a^m}$  shndërrohet në:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{n \cdot k}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = \begin{cases} |a^k|, & \text{nëse } n \text{ është numër çift} \\ a^k, & \text{nëse } n \text{ është numër tek} \end{cases}$$

**Shembulli 8**

Thjeshtoni shprehjet:

a)  $\sqrt[3]{x^6}$ ; b)  $\sqrt{x^4y^2z^6}$ .

**Zgjidhje:**

a)  $\sqrt[3]{x^6} = \sqrt[3]{x^{2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{(x^2)^3} = x^2$ ; b)  $\sqrt{x^4y^2z^6} = \sqrt{(x^2yz^3)^2} = |x^2yz^3|$ .

**Detyra 7**

Thjeshtoni shprehjet:

a)  $\sqrt[3]{2^6}$ ; b)  $\sqrt{4^4 \cdot 3^6 \cdot 2^8}$ ; c)  $\sqrt[3]{(x-2)^{12}}$ .

**Detyra për ushtrime!**

1. Zgjeroni me 4 rrënjët:

a)  $\sqrt{3a}$ ; b)  $\sqrt[3]{5b}$ ; c)  $\sqrt[4]{4a^2b}$ ; ç)  $\sqrt[3]{2ab^2}$ .

2. Rrënjët e dhëna shndërroni në rrënjë me tregues të njëjtë rrënjë:

a)  $\sqrt[4]{a^3} \mp \sqrt[4]{a^5}$ ; b)  $\sqrt[3]{3x^2} \mp \sqrt[4]{x}$ ; c)  $\sqrt{ab} \mp \sqrt[3]{a^2b}$ ;

ç)  $\sqrt[3]{5}, \sqrt{5} \mp \sqrt[4]{5}$ ; d)  $\sqrt[3]{a^3b}, \sqrt[4]{a} \mp \sqrt{ab}$ ; dh)  $\sqrt[3]{2xy^3}, \sqrt[4]{x} \mp \sqrt[3]{y^3}$ .

3. Thjeshtoni rrënjët:

a)  $\sqrt[3]{4a^4b^2}$ ; b)  $\sqrt[4]{a^6b^3}$ ; c)  $\sqrt[5]{a^6b^4}$ .

4. Thjeshtoni rrënjët:

a)  $\sqrt[3]{8a^3}$ ; b)  $\sqrt[4]{16b^4}$ ; c)  $\sqrt[3]{32x^5}$ ; ç)  $\sqrt{25a^2b^6}$ .

5. Thjeshtoni:

a)  $\sqrt[4]{x^4}$ ; b)  $\sqrt[6]{x^{12}}$ ; c)  $\sqrt[3]{x^9}$ ; ç)  $\sqrt[5]{x^{11}}$ ;

## 1.5 RRËNJËZIMI I PRODUKTIT DHE HERËSIT

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ .
- Fuqizo:  $(x \cdot y)^2$ ;  $(x : y)^2$ ;  $(x \cdot y)^{(3/4)}$ ;  $(x : y)^{(3/4)}$ .

### Shembulli 1

Verifikoni saktësinë e barazimeve në vijim:

$$\text{a) } \sqrt{49 \cdot 81} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{81}; \quad \text{b) } \sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}.$$

**Zgjidhje:**

- a) Ana e majtë e barazimit është e barabartë me  $\sqrt{49 \cdot 81} = \sqrt{3969} = 63$ , kurse për anën e djathtë fitohet:

$$\sqrt{49} \cdot \sqrt{81} = 7 \cdot 9 = 63.$$

Pra, të dyja anët e barazimit janë të barabarta, andaj barazimi është i saktë.

- b) Në mënyrë të njëjtë vërtetoni saktësinë edhe të këtij barazimi.

Këto veti nuk vlejné vetëm për këtë rast konkret, por edhe në rastin e përgjithshëm.

### Mbani mend!

1. Nëse treguesi i rrënjës  $n$  është numër çift ( $n \geq 2$ ), atëherë

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ për çdo } a, b \geq 0$$

$$\text{dhe } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ për çdo } a \geq 0 \text{ dhe çdo } b > 0.$$

2. Nëse treguesi i rrënjës  $n$  është numër tek ( $n \geq 3$ ), atëherë

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ për çdo } a, b \in \mathbb{R};$$

$$\text{dhe } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ për çdo } a \in \mathbb{R} \text{ dhe çdo } b \neq 0.$$

Këto rregulla janë të njohura si rregullat për rrënjëzimin e produktit dhe herësit.

### Detyra 1

Llogaritni:

$$\text{a) } \sqrt[4]{16 \cdot 256}; \quad \text{b) } \sqrt[4]{\frac{64}{729}}; \quad \text{c) } \sqrt[4]{(-64) \cdot 81}; \quad \text{ç) } \sqrt[4]{\frac{32}{-283}}.$$

**Shembulli 2**

Thjeshtoni shprehjen:

$$\text{a) } \sqrt[5]{a^5 b^{15} c^{10}}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{\frac{x^6 y^3 z^9}{a^6 b^9}}, \quad a, b \neq 0.$$

**Zgjidhje:**

$$\text{a) } \sqrt[5]{a^5 b^{15} c^{10}} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^{15}} \cdot \sqrt[5]{c^{10}} = ab^3 c^2.$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{\frac{x^6 y^3 z^9}{a^6 b^9}} = \frac{\sqrt[3]{x^6 y^3 z^9}}{\sqrt[3]{a^6 b^9}} = \frac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{z^9}}{\sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^9}} = \frac{x^2 y z^3}{a^2 b^3}.$$

**Detyra 2**

Thjeshtoni shprehjen:

$$\text{a) } \sqrt[4]{a^8 b^4 c^{12}}, \quad \text{nëse } a, b, c \geq 0;$$

$$\text{b) } \sqrt[6]{\frac{x^6 y^{18} z^{12}}{a^{24} b^6}}, \quad \text{nëse } x, y, z \geq 0, \text{ kurse } a, b > 0.$$

**Shembulli 3**

Për cilat vlera të ndryshores  $x$  janë të sakta ekuacionet:

$$\text{a) } \sqrt[4]{(x+3)(x-2)} = \sqrt[4]{x+3} \cdot \sqrt[4]{x-2}; \quad \text{b) } \sqrt[4]{\frac{x+3}{x-2}} = \frac{\sqrt[4]{x+3}}{\sqrt[4]{x-2}}.$$

**Zgjidhje:**

a) Treguesi i rrënjës është tek, prandaj ekuacioni është i saktë për çdo numër real  $x$ ;

b) Në këtë rast treguesi i rrënjës është numër çift, prandaj ekuacioni do të jetë i saktë për  $x$  që kënaq sistemin në vijim të inekuacioneve:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases}.$$

Pra, ekuacioni do të jetë i saktë për  $x > 2$ .

**Detyra 3**

Caktoni vlerat e ndryshores  $x$  për të cilat janë të sakta ekuacionet:

$$\text{a) } \sqrt[4]{x(x-4)} = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x-4}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{\frac{2x+4}{x-3}} = \frac{\sqrt[3]{2x+4}}{\sqrt[3]{x-3}}.$$

**Shembulli 4**

Thjeshtoni shprehjen  $\sqrt{25x^2y}$ , nëse  $x, y \geq 0$ .

**Zgjidhje:**

$$\sqrt{25x^2y} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = 5x\sqrt{y}$$

**Mbani mend!**

Sipas procedurës së mësipërme për rrënjëzimin e produktit, fitojmë:

$$\sqrt[n]{\alpha^n \beta} = \sqrt[n]{\alpha^n} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \alpha \sqrt[n]{\beta}.$$

Procedura e tillë quhet *nxjerrja e shumëzuesit para shenjës së rrënjës*. Këtu,  $\alpha, \beta \geq 0$ , nëse  $n$  është numër çift.

**Shembulli 5**

Nxirrni shumëzuesit para shenjës së rrënjës:

a)  $\sqrt{3a^2}$ ;    b)  $\sqrt[3]{8ab^3}$ ;    c)  $\sqrt[4]{a^4b}$ ,  $a \geq 0$ ;    ç)  $\sqrt[3]{5ab^3}$ .

**Zgjidhje:**

a)  $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2} = |a| \sqrt{3}$ ;

b)  $\sqrt[3]{8ab^3} = \sqrt[3]{(2b)^3 a} = \sqrt[3]{(2b)^3} \cdot \sqrt[3]{a} = 2b \sqrt[3]{a}$ ;

c)  $\sqrt[4]{a^4b} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b} = a \sqrt[4]{b}$ . Këtu është shfrytëzuar se  $\sqrt[4]{a^4} = a$ , sepse  $a \geq 0$ .

ç)  $\sqrt[3]{5ab^3} = \sqrt[3]{b^3(5a)} = \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{5a} = b \sqrt[3]{5a}$ .

**Detyra 4**

Nxirrni shumëzuesit para shenjës së rrënjës:

a)  $\sqrt{5b^2c}$ ,  $b, c \geq 0$ ;    b)  $\sqrt[3]{27x^2}$ ;    c)  $\sqrt[4]{a^4b^3}$ ,  $a, b \geq 0$ .

Vëreni se para rrënjës mund të nxirren vetëm shumëzuesit në shprehjen nën rrënjë treguesit e fuqive të të cilëve janë më të mëdhenj ose të barabartë me treguesin e rrënjës. Le të jetë dhënë  $\sqrt[n]{a^m}$ . Nëse  $m \geq n$ , atëherë  $m = nk + r$ , ku  $k$  është numër natyror dhe  $0 \leq r < n$ . Në këtë rast,

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk+r}} = \sqrt[n]{a^{nk} \cdot a^r} = \sqrt[n]{(a^k)^n \cdot a^r} = a^k \sqrt[n]{a^r}.$$



**Mbani mend!**

Nëse  $m = nk + r$ , ku  $k \geq 1$ ,  $0 \leq r < n$ , atëherë

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nk+r}} = a^k \sqrt[n]{a^r}.$$

Këtu, duhet të bëhet kujdes në lidhje me përkufizueshmërinë e rrënjëve, d.m.th. nëse  $n$  është numër çift, atëherë  $a \geq 0$ .

**Shembulli 6**

Nxirrni shumëzuesit para shenjës së rrënjës:

a)  $\sqrt{12}$ ;                      b)  $\sqrt[3]{24}$ ;                      c)  $\sqrt[4]{a^3}$ ,  $a \geq 0$ ;

ç)  $\sqrt[3]{108a^5b^4}$ ;                      d)  $\sqrt{\frac{a^4b}{cd^2}}$ ,  $a, b \geq 0, c, d > 0$ .

**Zgjidhje:**

a)  $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ;

b)  $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$ ;

c)  $\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4]{(a^2)^2 \cdot a} = \sqrt[4]{(a^2)^2} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{a}$ ;

ç)  $\sqrt[3]{108a^5b^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 4 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b} = \sqrt[3]{(3ab)^3 \cdot 4a^2b} = \sqrt[3]{(3ab)^3} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} = 3ab\sqrt[3]{4a^2b}$ ;

d)  $\sqrt{\frac{a^4b}{cd^2}} = \frac{\sqrt{a^4b}}{\sqrt{cd^2}} = \frac{a^2\sqrt{b}}{d\sqrt{c}}$ .

**Detyra 5**

Nxirrni shumëzuesit para shenjës së rrënjës:

a)  $\sqrt{32}$ ;    b)  $\sqrt[3]{54}$ ;    c)  $\sqrt[4]{b^7}$ ,  $b \geq 0$ ;    ç)  $\sqrt[3]{40x^2y^7}$ .

Shqyrtoni barazimin  $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$  nga e djathta në të majtë. Mund të vërehet se shumëzuesi 2 është futur nën shenjën e rrënjës ashtu që është ngritur në fuqinë 2, kurse treguesi i rrënjës, po ashtu, është i barabartë me 2. Në fakt,  $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$ . Kjo procedurë quhet *futje e shumëzuesit nën shenjën e rrënjës*.

**Mbani mend!**

Një shumëzues futet nën shenjën e rrënjës, ashtu që fillimisht ngritët në fuqi sa është treguesi i rrënjës dhe shprehja e fituar shumëzohet me shprehjen nën rrënjë, d.m.th. nëse  $\alpha \geq 0$ , atëherë

$$\alpha \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha^n \beta}.$$

Këtu, nëse  $n$  është numër çift, atëherë  $\beta$  duhet të jetë numër jonegativ.

**Shembulli 7**

Le të jenë  $x, y > 0$ . Futni shumëzuesit nën shenjën e rrënjës:

$$\text{a) } x\sqrt{x}; \quad \text{b) } \frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^5}{x^5}}; \quad \text{c) } \frac{x}{2y}\sqrt{\frac{y^2}{x}}.$$

**Zgjidhje:**

$$\text{a) } x\sqrt{x} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3};$$

$$\text{b) } \frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^5}{x^5}} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^6 \frac{y^5}{x^5}} = \sqrt{\frac{x^6}{y^6} \cdot \frac{y^5}{x^5}} = \sqrt{\frac{x}{y}};$$

$$\text{c) } \frac{x}{2y}\sqrt{\frac{y^2}{x}} = \sqrt{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 \frac{y^2}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{4y^2} \cdot \frac{y^2}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{4x}} = \sqrt{\frac{x}{4}}.$$

**Detyra 6**

Le të jenë  $a, b > 0$ . Futni shumëzuesit nën shenjën e rrënjës:

$$\text{a) } a^2\sqrt{a}; \quad \text{b) } \frac{a^3}{b}\sqrt{\frac{b^4}{a^3}}; \quad \text{c) } \frac{2a}{b^2}\sqrt{\frac{b^3}{4a}}.$$

**Shembulli 8**

Krahasoni numrat  $3\sqrt{7}$  dhe  $2\sqrt{10}$ , pa i njehsuar vlerat e rrënjëve.

**Zgjidhje:**

Fillimisht, në të dyja shprehjet, i futim shumëzuesit nën shenjën e rrënjës:

$$3\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = \sqrt{63}, \quad 2\sqrt{10} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = \sqrt{40}.$$

Pasi  $\sqrt{63} > \sqrt{40}$ , mund të përfundojmë se  $3\sqrt{7} > 2\sqrt{10}$ .

**Detyra 7**

Krahasoni numrat  $4\sqrt[3]{6}$  dhe  $2\sqrt[3]{11}$ , pa njehsuar vlerat e rrënjëve.

**Detyra për ushtrime!**

1. Llogaritni vlerat e rrënjëve:

$$\text{a) } \sqrt{49 \cdot 81}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{64 \cdot (-125) \cdot 8}; \quad \text{c) } \sqrt[4]{\frac{625 \cdot 16}{1296}}.$$

2. Le të jenë  $a, b \geq 0$ . Llogaritni rrënjët:

$$\text{a) } \sqrt{a^2 b^4}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{a^6 b^9}; \quad \text{c) } \sqrt[5]{\frac{a^{10} b^5}{c^{15}}}, \quad c \neq 0.$$

3. Nxirrni shumëzuesit para shenjës së rrënjës:

a)  $\sqrt{a^5 b^3 c^2}$ ,  $a, b, c \geq 0$ ;    b)  $\sqrt[3]{a^7 b^{11}}$ ;    c)  $\sqrt[3]{\frac{a^9 b^4}{c^{12}}}$ ,  $c \neq 0$ .

4. Futni shumëzuesit nën shenjën e rrënjës:

a)  $3\sqrt{3}$ ;    b)  $x^2 \sqrt{x^3 y}$ ;    c)  $\frac{4x}{y} \sqrt{\frac{y^4}{x^2}}$ .

5. Pa i llogaritur rrënjët, krahasoni numrat:

a)  $3\sqrt{11}$  dhe  $5\sqrt{8}$ ;    b)  $2\sqrt[3]{9}$  dhe  $4\sqrt[3]{3}$ .

## 1.6 MBLEDHJA DHE ZBRITJA E RRËNJËVE

### Rikujtoni!

- Në shprehjen  $\sqrt[3]{a^7 b^2 c^3}$ , nxirrni shumëzuesit para shenjës së rrënjës.
- Thjeshtoni rrënjën  $\sqrt[3]{a^4 b^2 c^6}$ .

### Mbani mend!

Për një rrënjë themi se është në **formën normale** nëse janë plotësuar kushtet në vijim:

- Shprehja nën rrënjë nuk përmban emërues të ndryshëm nga 1;
- Shprehja nën rrënjë nuk përmban shumëzues që mund të nxirren para shenjës së rrënjës;
- Treguesi i rrënjës dhe treguesi i fuqisë së shprehjes nën rrënjë nuk kanë pjesëtues të përbashkët të ndryshëm nga 1.

### Shembulli 1

- Rrënjja  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  nuk është në formën normale sepse shprehja nën rrënjë përmban emërues të ndryshëm nga 1.
- Rrënjja  $\sqrt{8}$  nuk është në formën normale sepse  $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ , d.m.th. përmban shumëzues që mund të nxirret para rrënjës.
- Rrënjja  $\sqrt[3]{a^3 b^6 c^9}$  nuk është në formën normale sepse  $\sqrt[3]{a^3 b^6 c^9} = \sqrt[3]{(ab^2 c^3)^3}$ , d.m.th. treguesi i rrënjës dhe treguesi i fuqisë së shprehjes nën rrënjë kanë pjesëtues të përbashkët 3 (të ndryshëm nga 1).

**Shembulli 2**

Shkruani në formën normale rrënjët nga shembulli paraprak.

**Zgjidhje:**

$$a) \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$b) \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2};$$

$$c) \sqrt[12]{a^3b^6c^9} = \sqrt[12]{(ab^2c^3)^3} = \sqrt[12]{(ab^2c^3)^{3 \cdot 3}} = \sqrt[4]{ab^2c^3}.$$

**Detyra 1**

Shkruani në formën normale rrënjët:

$$a) \sqrt{\frac{16}{3}}; \quad b) xy\sqrt{\frac{12}{xy}}, \quad x, y > 0; \quad c) \frac{x}{y}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}}, \quad x > y > 0.$$

**Mbani mend!**

Nëse rrënja është shndërruar në formën normale, shumëzuesi racional që gjendet para shenjës së rrënjës quhet **koeficient racional** (ose vetëm, **koeficient**) i rrënjës.

**Shembulli 3**

Në  $2\sqrt{2}$ , koeficienti racional i rrënjës është 2, kurse në  $3x^2\sqrt{xy}$ , koeficienti racional i rrënjës është  $3x^2$ .

**Shembulli 4**

Shndërroni në formën normale rrënjët dhe përcaktoni koeficientin përkatës racional të tyre:

$$a) \sqrt{8x^3 - 16x^5}; \quad b) a\sqrt{\frac{1}{a}}, \quad a > 0.$$

**Zgjidhje:**

$$a) \sqrt{8x^3 - 16x^5} = \sqrt{8x^3(1 - 2x^2)} = 2x \cdot \sqrt{1 - 2x^2}. \text{ Koeficienti racional para rrënjës është } 2x.$$

$$b) a\sqrt{\frac{1}{a}} = a\sqrt{\frac{a}{a^2}} = \frac{a}{a}\sqrt{a} = \sqrt{a}. \text{ Koeficienti racional para rrënjës është } 1.$$

**Detyra 2**

Shndërroni në formën normale rrënjët dhe përcaktoni koeficientin përkatës racional të tyre:

$$a) \sqrt[4]{64a^6 - 16a^4}; \quad b) b\sqrt{\frac{a^2}{b}}, \quad a, b > 0.$$



**Mbani mend!**

Dy ose më shumë rrënjë në formën normale që dallojnë vetëm në koeficientët racionalë të tyre quhen *rrënjë të ngjashme*.

**Shembulli 5**

Rrënjët  $\sqrt[3]{a^2b}$ ,  $2a \cdot \sqrt[3]{a^2b}$  dhe  $\frac{a}{b^2} \sqrt[3]{a^2b}$  janë rrënjë të ngjashme. Koeficientët e tyre racionalë janë 1,  $2a$  dhe  $\frac{a}{b^2}$  përkatësisht.

**Shembulli 6**

Kontrolloni nëse janë të ngjashme rrënjët:

- a)  $\sqrt{12}$  dhe  $\sqrt{48}$ ;    b)  $\sqrt[3]{a^4bc^5}$  dhe  $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}}$ ;    c)  $\sqrt[3]{a^5bc^7}$  dhe  $\sqrt[3]{a^7b^3c^9}$ .

**Zgjidhje:**

Fillimisht rrënjët e dhëna i shndërrojmë në formën normale, e më pas bëjmë verifikimin nëse janë të ngjashme.

- a)  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ , kurse  $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ . Përfundojmë se rrënjët  $\sqrt{12}$  dhe  $\sqrt{48}$  dallojnë vetëm në koeficientët racionalë, prandaj ato janë të ngjashme.
- b)  $\sqrt[3]{a^4bc^5} = ac \cdot \sqrt[3]{abc^2}$ , kurse  $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}} = a^2b^2c^3 \cdot \sqrt[3]{abc^2}$ . Pra,  $\sqrt[3]{a^4bc^5}$  dhe  $\sqrt[3]{a^7b^7c^{11}}$  janë rrënjë të ngjashme.
- c)  $\sqrt[3]{a^5bc^7} = ac \cdot \sqrt[3]{bc^2}$ , kurse  $\sqrt[3]{a^7b^3c^9} = abc \cdot \sqrt[3]{a^2c^4}$ . Nga këtu,  $\sqrt[3]{a^5bc^7}$  dhe  $\sqrt[3]{a^7b^3c^9}$  nuk janë rrënjë të ngjashme.

**Detyra 3**

Kontrolloni nëse janë të ngjashme rrënjët:

- a)  $\sqrt[3]{54} \nmid \sqrt[3]{128}$ ;    b)  $\sqrt[4]{a^6b^3c^7} \nmid \sqrt[4]{a^{10}b^3c^3}$ .

Mbledhja dhe zbritja mund të përkufizohen vetëm për rrënjë të ngjashme.

**Mbani mend!**

Nëse  $a$ ,  $b$  dhe  $c$  janë numra realë (ose shprehje reale), atëherë mbledhja dhe zbritja e rrënjëve të ngjashme përkufizohet me sa vijon:

$$a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c} = (a+b)\sqrt[n]{c}$$

$$a\sqrt[n]{c} - b\sqrt[n]{c} = (a-b)\sqrt[n]{c}$$

Këtu, duhet që  $c \geq 0$ , nëse  $n$  është numër çift.

**Shembulli 7**

Llogaritni:

a)  $\sqrt{3} + 2\sqrt{12}$ ;    b)  $\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$ .

**Zgjidhje:**

Fillimisht rrënjët i kthejmë në formën normale, e më pas nëse janë të ngjashme, mund t'i kryejmë operacionet e mbledhjes dhe zbritjes.

a)  $\sqrt{3} + 2\sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = (1+4)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ ;

b)  $\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{2^3 \cdot 5} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} = (1+4-3)\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$ .

**Detyra 4**

Llogaritni:

a)  $\sqrt{72} - 2\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ;    b)  $\sqrt[3]{250} - 3\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{2}$ .

**Shembulli 8**Thjeshtoni shprehjen  $\sqrt[3]{125a} - \sqrt[3]{8a} - (\sqrt[3]{27a} - \sqrt[3]{64a})$ .**Zgjidhje:**

$$\sqrt[3]{125a} - \sqrt[3]{8a} - (\sqrt[3]{27a} - \sqrt[3]{64a}) = 5\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a} - (3\sqrt[3]{a} - 4\sqrt[3]{a}) = 3\sqrt[3]{a} - (-\sqrt[3]{a}) = 4\sqrt[3]{a}.$$

**Detyra 5**

Thjeshtoni shprehjen:

a)  $\frac{3}{a}\sqrt{a^3} - \frac{4}{b}\sqrt{ab^2}$ ,  $a, b > 0$ ;    b)  $2x\sqrt{x^4y} - 3y\sqrt{xy^4} - x^2\sqrt{\frac{y^4}{x^2}} + 2y^3\sqrt{\frac{x}{y^2}}$ .

**Shembulli 9**Një fushë loje për fëmijë ka formë drejtkëndore me brinjë  $(6\sqrt{3} + 8\sqrt{2})$  m dhe  $7\sqrt{2}$  m.

a) Sa metra është më e madhe njëra nga brinja tjetër?

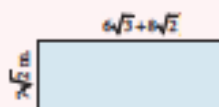
b) Sa metra gardh do të duhet për ta rrethuar fushën e lojës?

**Zgjidhje:**Brinjët e drejtkëndëshit janë  $a = 6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$  dhe  $b = 7\sqrt{2}$ .a) Brinja  $a$  është më e madhe se brinja  $b$  për

$$a - b = (6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}) - 7\sqrt{2} = 6\sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ metra.}$$

b) Perimetri i drejtkëndëshit është

$$P = 2a + 2b = 2 \cdot (6\sqrt{3} + 8\sqrt{2}) + 2 \cdot 7\sqrt{2} = 12\sqrt{3} + 16\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 12\sqrt{3} + 30\sqrt{2}.$$

Pra, për ta rrethuar fushën e lojës duhet gardh me gjatësi  $12\sqrt{3} + 30\sqrt{2}$  metra.

**Detyra 6**

Një kopsht ka formën e trapezit barakrahës me baza, gjatësitë e të cilave janë  $(10\sqrt{7} + 7\sqrt{3})$  m dhe  $5\sqrt{7}$  m dhe krah me gjatësi  $10\sqrt{3}$  m. Sa është perimetri i trapezit?

**Detyra për ushtrime!**

1. Rrënjët e mëposhtme shndërroni në formën normale:

a)  $\sqrt{72}$ ; b)  $\sqrt[3]{250}$ ; c)  $\sqrt[3]{162}$ ; ç)  $\sqrt{75x^2y}$ ; d)  $\sqrt[4]{125a^3b^6}$ .

2. Rrënjët e mëposhtme shndërroni në formën normale:

a)  $\sqrt{50x^2y^3}$ ,  $x, y > 0$ ; b)  $\sqrt[3]{54a^4b^2}$ ; c)  $\sqrt[3]{32x^2y^5}$ ,  $x, y > 0$ ;

ç)  $\sqrt{108a^3}$ ,  $a > 0$ ; d)  $\sqrt[4]{125a^3b^6}$ .

3. Kontrolloni nëse janë të ngjashme rrënjët:

a)  $\sqrt{3} \neq \sqrt{27}$ ; b)  $\sqrt{20}, \sqrt{45} \neq \sqrt{80}$ ; c)  $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}, \sqrt[3]{\frac{8x}{y}}$  dhe  $\sqrt[3]{\frac{x}{8y}}$ ,  $y \neq 0$ ;

ç)  $\sqrt[3]{a^2b^2}, \sqrt[3]{16a^4b^2}$  dhe  $\sqrt[3]{\frac{a^2b^{10}}{81}}$ ,  $a, b > 0$ .

4. Llogaritni:

a)  $7\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$ ; b)  $20\sqrt{\frac{1}{2}} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{8}$ ; c)  $\sqrt{2} - 2\sqrt[4]{64} + 3\sqrt[4]{8}$ ;

ç)  $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \frac{1}{2}\sqrt{72}$ ; d)  $(\sqrt{50} + \sqrt{2} - 2\sqrt{8}) - (\sqrt{32} - \sqrt{18})$ .

5. Llogaritni:

a)  $3\sqrt{16a} - 2\sqrt{9a} + \sqrt{25a}$ ,  $a \geq 0$ ;

b)  $3a \cdot \sqrt[3]{ab^4} - a^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}} + 2b^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2}}$ ,  $a, b \neq 0$ .

6. Llogaritni:

a)  $\sqrt[4]{16a} + \sqrt[4]{81a} - \sqrt[4]{625a} + \sqrt[4]{a}$ ,  $a > 0$ ; b)  $(\sqrt{12x} - \sqrt[3]{27y}) - (\sqrt[3]{81y} - \sqrt{3x})$ ,  $x > 0$ .

7. Inxhinierët duhet të trasojnë kabullin optik i cili përbëhet nga tre segmente me gjatësitë përkatëse (në metra):  $3\sqrt{12}$ ,  $2\sqrt{27}$ ,  $\sqrt{48}$ . Caktoni gjatësinë e përgjithshme të kablllos.

8. Një sensor ultrazëri mat largësinë  $x$  (në cm). Gjatë kalibrimit është konstatuar se shumta e dy komponentëve të matur të largësisë është sa largësia e përgjithshme, dhe atë  $\sqrt{2x} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$ .

a) Caktoni largësinë  $x$ .

b) Kontrolloni nëse zgjidhja e fituar ka kuptim fizik.

9. Një robot lëviz në vijë të drejtë ashtu që kalon distancën  $s_1 = \sqrt{200}$  m djathtas, e më pas në të majtë lëviz dy herë duke kaluar distancat  $s_2 = \sqrt{50}$  m dhe  $s_3 = 3\sqrt{8}$  m. Caktoni se ku do të arrij roboti në raport me pozicionin e tij fillestar.

## 1.7 SHUMËZIMI, PJESËTIMI, FUQIZIMI DHE RRËNJËZIMI I RRËNJËVE

### Rikujtoni!

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ;
- $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$ ;
- Rrënjët  $\sqrt[3]{3}$  dhe  $\sqrt[4]{4}$  shndërrojnë në rrënjë me tregues të njëjtë të rrënjës.

Le ta llogaritim produktin  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  dhe herësin  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ .

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

### Mbani mend!

Produkti i dy rrënjëve me tregues të njëjtë rrënjësh  $n$  ( $n \geq 2$ ) është i barabartë me rrënjën e  $n$ -të të produktit të shprehjeve nën rrënjë, kurse herësi i tyre është i barabartë me rrënjën e  $n$ -të të herësit të shprehjeve nën rrënjë, d.m.th. vlejné barazimet në vijim:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad b \neq 0.$$

Këtu, nëse treguesi i rrënjës,  $n$ , është numër çift, barazimi i parë vlen për  $a, b \geq 0$ , kurse barazimi i dytë vlen për  $a \geq 0$  dhe  $b > 0$ .

### Shembulli 1

Llogaritni:

$$\text{a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}; \quad \text{c) } \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0; \quad \text{ç) } (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$



**Zgjidhje:**

a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10};$

b)  $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^3};$

c)  $\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{x}} = \sqrt{x};$

$$\begin{aligned} \text{ç) } (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\ &= \sqrt{3 \cdot 3} - \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} - \sqrt{2^2} = 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

**Detyra 1**

Llogaritni:

a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{11};$  b)  $3 \cdot \sqrt{xy} \cdot \sqrt{x^3 y^3}, \quad x, y \geq 0;$  c)  $\sqrt[3]{9a^2} : \sqrt[3]{\frac{a^2}{3}}.$

Nëse rrënjët kanë tregues të ndryshëm të rrënjëve, atëherë ato mund të shumëzohen dhe të pjesëtohen pasi të jenë shndërruar në rrënjë me tregues të njëjtë.

**Shembulli 2**

Llogaritni:

a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{11};$  b)  $3 \cdot \sqrt{x^2 y} \cdot \sqrt{x^3 y^4};$  c)  $\sqrt{4x^3} : \sqrt{\frac{x^3}{2}}.$

**Zgjidhje:**

Fillimisht i shndërrojmë rrënjët në rrënjë me tregues të njëjtë, e më pas i kryejmë operacionet e shumëzimit dhe të pjesëtimit.

a) SHVP(2, 3) = 6, prandaj të dy rrënjët do t'i shndërrojmë në rrënjë me tregues të njëjtë 6. Fitojmë

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{11} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{11^2} = \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{121} = \sqrt[6]{8 \cdot 121} = \sqrt[6]{968}.$$

b) SHVP(3, 5) = 15, prandaj

$$3 \cdot \sqrt{x^2 y} \cdot \sqrt{x^3 y^4} = 3 \cdot \sqrt[15]{(x^2 y)^5} \cdot \sqrt[15]{(x^3 y^4)^3} = 3 \cdot \sqrt[15]{x^{10} y^5} \cdot \sqrt[15]{x^9 y^{12}} = 3 \cdot \sqrt[15]{x^{19} y^{17}} = 3xy \cdot \sqrt[15]{x^4 y^2}.$$

c) SHVP(2, 4) = 4. Fitojmë:

$$\sqrt{4x^3} : \sqrt{\frac{x^3}{2}} = \sqrt[4]{(4x^3)^2} : \sqrt[4]{\frac{x^3}{2}} = \sqrt[4]{\frac{16x^6}{x^3}} = \sqrt[4]{32x^3} = 2\sqrt[4]{2x^3}.$$

Të theksojmë se gjatë zgjidhjes së detyrave me rrënjë, nëse në rezultatin përfundimtar mbetet rrënjë, atëherë është e pëlqyeshme që ajo të shndërrohet në formën normale.

**Detyra 2**

Llogaritni:

$$\text{a) } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}; \quad \text{b) } \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{a^2b}; \quad \text{c) } \frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[3]{x^5y}}.$$

**Shembulli 3**

Një arkitekt projektton një park në formë të drejtkëndëshit me brinjë  $\sqrt{50}$  m dhe  $\frac{\sqrt{32}}{2}$  m. Caktoni syprinën e këtij parku.

**Zgjidhje:**

Brinjët e drejtkëndëshit janë  $a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$  dhe  $b = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ . Syprina e parkut është

$$S = ab = \sqrt{50} \cdot \frac{\sqrt{32}}{2} = 5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2 \cdot 2} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ m}^2.$$

**Detyra 3**

Trapezi barakrahës ka bazat me gjatësi  $\sqrt[3]{24}$  dhe  $\sqrt[3]{192}$  dhe krah me gjatësi  $\sqrt{6}$ . Njehsoni syprinën e këtij trapezi.

Në vijim do të marrim fuqinë e  $m$ -të të rrënjës  $\sqrt[m]{a}$ , ku  $m, n \geq 2$ . Fitojmë:

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

**Mbani mend!**

Rrënja fuqizohet në treguesin e fuqisë  $m$  ashtu që shprehja nën rrënjë ngritet në fuqinë  $m$ , kurse fuqia e fituar rrënjëzohet me të njëjtin tregues të rrënjës  $n$ , d.m.th. për  $m, n \geq 2$ , vlen barazimi në vijim:

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

Këtu, e kemi parasysh se, nëse  $n$  është numër çift, atëherë duhet që  $a \geq 0$ .

**Shembulli 4**

Llogaritni:

$$\text{a) } (\sqrt[3]{5})^2; \quad \text{b) } (\sqrt[3]{5a^2b})^3, b \geq 0; \quad \text{c) } \left(\frac{x}{y} \cdot \sqrt{xy}\right)^3, x \geq 0, y > 0.$$

**Zgjidhje:**

$$\text{a) } (\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25};$$

$$\text{b) } (\sqrt[3]{5a^2b})^3 = \sqrt[3]{(5a^2b)^3} = \sqrt[3]{125a^6b^3} = a \cdot \sqrt[3]{125a^2b^3};$$

$$\text{c) } \left(\frac{x}{y} \cdot \sqrt{xy}\right)^3 = \left(\frac{x}{y}\right)^3 \sqrt{(xy)^3} = \frac{x^3}{y^3} \sqrt{x^3y^3} = \frac{x^3}{y^3} \cdot xy \cdot \sqrt{xy} = \frac{x^4}{y^2} \cdot \sqrt{xy}.$$

**Detyra 4**

Llogaritni:

$$a) (\sqrt[3]{7})^3; \quad b) (\sqrt[3]{4ab^2})^3; \quad c) (a \cdot \sqrt{ab^2})^3, \quad a, b \geq 0.$$

**Shembulli 5**

Një kompani, në panair, dëshiron të vendos një stendë për reklamë në formë të kubit me brinjë  $\sqrt{8}$  m. Qiramarrësi pagoi qiranë për  $24 \text{ m}^3$ . A i përgjigjet stenda pagesës së qirasë?

**Zgjidhje:**

Stenda ka formën e kubit me brinjë  $a = \sqrt{8}$ . Vëllimi i stendës është

$$V = (\sqrt{8})^3 = \sqrt{8^3} = \sqrt{(2^3)^3} = \sqrt{2^9} = 2^4 \cdot \sqrt{2} \approx 22,63 \text{ m}^3.$$

Stenda të cilën kompania dëshiron ta vendos i përgjigjet pagesës së qirasë.

**Detyra 5**

Një kompani marketingu vendos një kornizë kuadratike me brinjë  $\sqrt{50}$ . Sa është syprina e kornizës në fjalë?

Në fund, do të shohim se si nga  $\sqrt[n]{a}$  mund të llogaritet rrënja e  $m$ -të, ku  $m, n \geq 2$ . Fitojmë:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[nm]{a}.$$

**Mbani mend!**

Nëse nga shprehja nën rrënjë, fillimisht, merret rrënja e  $n$ -të, e më pas nga rezultati i fituar merret rrënja e  $m$ -të, kjo është e njëjtë sikurse nga shprehja nën rrënjë të merret rrënja e  $nm$ -të, d.m.th. nëse  $m, n \geq 2$ , atëherë vlen

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Këtu, kemi parasysh se, nëse  $n$  ose  $m$  janë numra çift, atëherë duhet që  $a \geq 0$ .

**Shembulli 6**

Llogaritni:

$$a) \sqrt{2\sqrt{4}}; \quad b) \sqrt[3]{2\sqrt{3x^2y}}, \quad x, y \geq 0; \quad c) \sqrt[3]{a\sqrt{2ab}}, \quad a, b \geq 0.$$

**Zgjidhje:**

$$a) \sqrt{2\sqrt{4}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{4};$$

$$b) \sqrt[3]{2\sqrt{3x^2y}} = \sqrt[6]{3x^2y} = \sqrt[6]{3x^2y};$$

$$c) \sqrt[3]{a\sqrt{2ab}} = \sqrt[6]{a^2 2ab} = \sqrt[6]{2a^3b} = \sqrt[6]{2a^3b}.$$

**Detyra 6**

Llogaritni:

$$a) \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}; \quad b) \sqrt[3]{\sqrt{a^2} \cdot \sqrt[4]{a}}, \quad a \geq 0; \quad c) \sqrt[4]{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}, \quad a \geq 0.$$

**Shembulli 7**

Pllaka katrore ka syprinë  $S = \sqrt{128} \text{ cm}^2$ . Të caktohet diagonalja e pllakës së dhënë.

**Zgjidhje:**

Nëse me  $a$  shënojmë gjatësinë e njërës anë të pllakës, atëherë meqë ajo është katrore, kemi  $S = a^2 = \sqrt{128} = \sqrt{2^7}$ . Nga këtu, kemi

$$a = \sqrt{\sqrt{2^7}} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3} = 2\sqrt[4]{8} \text{ cm.}$$

Gjatësia  $d$  e diagonales së katrorit është

$$d = a\sqrt{2} = 2\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{4} = 2\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2^5} = 4\sqrt[4]{2} \text{ cm.}$$

**Detyra 7**

Në mur ka një hapësirë me dimensione  $90 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$  dhe në të duhet të vendoset një televizor me formë katrore. A do mund të vendoset televizori në këtë hapësirë, nëse syprina e tij është  $S = 1600\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ?

**Detyra për ushtrime!**

1. Llogaritni produktet e rrënjëve:

$$a) 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3}; \quad b) \sqrt{12} \cdot \sqrt{2}; \quad c) \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}; \quad d) \sqrt{a} \cdot \sqrt{5a}, \quad a \geq 0; \quad e) 2\sqrt[3]{3a^2} \cdot 4\sqrt[3]{5a}.$$

2. Llogaritni produktet e rrënjëve:

$$a) \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}, \quad a \geq 0; \quad b) 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{2x^2} \cdot \sqrt[4]{x}, \quad x \geq 0.$$

3. Llogaritni herësit e rrënjëve:

$$a) \sqrt{27} : \sqrt{3}; \quad b) \sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}; \quad c) 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{9}} : \sqrt{\frac{5}{36}};$$

$$d) \sqrt{6a} : \sqrt{a}, \quad a > 0 \quad e) \sqrt[3]{12a^2} : \sqrt[3]{3a}; \quad f) \sqrt[4]{16a^3} : \sqrt[4]{a}, \quad a > 0.$$

4. Llogaritni herësit e rrënjëve:

$$a) \sqrt[3]{8} : \sqrt{2}; \quad b) \sqrt{a} : \sqrt[3]{a^2}, \quad a > 0; \quad c) \sqrt[3]{8a^2} : \sqrt[3]{2a^3}, \quad a > 0; \quad d) 4a\sqrt{a^2} : \sqrt[3]{a^2}, \quad a > 0.$$

5. Llogaritni:

$$a) (3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 2\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}; \quad b) (4\sqrt{50} - 6\sqrt{8} + 2\sqrt{32}) : \sqrt{2}.$$

6. Llogaritni fuqitë e rrënjëve të dhëna:

$$a) \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{8}\right)^3; \quad b) (\sqrt[3]{5x^2})^2; \quad c) (\sqrt[3]{a^2b})^6; \quad d) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2.$$

7. g) Llogaritni:

$$a) \sqrt{\sqrt{16a}}, \quad a \geq 0; \quad b) \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}, \quad a \geq 0; \quad c) \sqrt{a\sqrt[4]{a}}, \quad a \geq 0;$$

$$d) \sqrt{x^2 \sqrt{xy}} : \sqrt{y \sqrt{xy}}, \quad x, y > 0; \quad e) \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{a^2}, \quad a \geq 0.$$



## 1.8 SHPREHJET IRRACIONALE. RACIONALIZIMI I EMËRUESIT TË THYESËS

*Shprehje racionale algjebrike* është shprehja e përbërë prej numrave dhe/ose ndryshoreve të lidhura me operacionet mbledhje, zbritje, shumëzim, pjesëtim dhe fuqizim me tregues, eksponent, numër të plotë. Këto operacione quhen edhe *operacione algjebrike*.

Shprehjet në të cilat përveç operacioneve algjebrike është i përfshirë edhe operacioni i rrënjëzimit, d.m.th. fuqitë me tregues që nuk është numër i plotë, quhen *shprehje irracionale*.

### Shembulli 1

Cilat nga shprehjet janë shprehje algjebrike racionale, e cilat janë shprehje irracionale?

- a)  $\frac{1}{3}$ ;    b)  $\sqrt{3}$ ;    c)  $x^2 - 3xy$ ;    ç)  $3 + \sqrt{x}$ ;    d)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ;    dh)  $2a^{\frac{1}{3}}b^{-2}$ .

**Zgjidhje:**

Shprehje racionale janë nën a) dhe c). Shprehjet e tjera janë shprehje irracionale..

Shprehjet irracionale të cilat përfshijnë ndryshore do t'i shqyrtojmë vetëm për ato vlera të ndryshoreve për të cilat shprehja është e përkufizuar, d.m.th. për vlerat për të cilat shprehja ka kuptim.

### Shembulli 2

Për cilat vlera të ndryshores është e përkufizuar shprehja irracionale:

- a)  $\sqrt{x^2} - \sqrt{x-4}$ ;    b)  $\sqrt{x^2+4} - (x-3)^{\frac{1}{3}}$ ;    c)  $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-5}}$ .

**Zgjidhje:**

- a) Rrënja  $\sqrt{x^2}$  është e përkufizuar për çdo numër real  $x$ , d.m.th.  $x \in (-\infty, +\infty)$ , kurse shprehja  $\sqrt{x-4}$  është e përkufizuar për çdo  $x$ , për  $x - 4 \geq 0$ , përkatësisht  $x \geq 4$ . Pra  $x \in [4, +\infty)$ . Përfundimisht,  $x \in (-\infty, +\infty) \cap [4, +\infty) = [4, +\infty)$ .
- b) Të dyja rrënjët  $\sqrt{x^2+4}$  dhe  $(x-3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x-3}$  janë të përkufizuara për çdo numër real  $x$ , d.m.th.  $x \in (-\infty, +\infty)$ , prandaj edhe e gjithë shprehja irracionale është e përkufizuar, ka kuptim, për çdo  $x \in (-\infty, +\infty)$ .
- c) Rrënja  $\sqrt{x+3}$  është e përkufizuar për  $x + 3 \geq 0$ ,  $x \geq -3$ , d.m.th.  $x \in [-3, +\infty)$ . Rrënja tjetër  $\sqrt{x-5}$  takon emëruesit, prandaj nuk lejohet të merr vlerën 0, d.m.th. për të kërkohet të vlejë  $\sqrt{x-5} \neq 0$ . Nga ana tjetër, që rrënja të jetë e përkufizuar, duhet që  $x - 5 \geq 0$ . Nga këto dy kushte për emëruesin fitojmë se  $x - 5 > 0$ , përkatësisht  $x > 5$ , që mund të shkruhet si  $x \in (5, +\infty)$ . Tani, e gjithë shprehja  $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-5}}$  është e përkufizuar nëse  $x \in [-3, +\infty) \cap (5, +\infty) = (5, +\infty)$ .

**Detyra 1**

Për cilat vlera të ndryshores janë të përkufizuara shprehjet irracionale:

$$\text{a) } \sqrt[4]{x^3} - 2x; \quad \text{b) } \sqrt{x-7} - (x+3)^{\frac{1}{5}}; \quad \text{c) } \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+4}} + x^2.$$

Pas kryerjes së operacioneve me rrënjët (si shumëzimi, pjesëtimi, fuqizimi, nxjerrja e shumëzuesve para shenjës së rrënjës ose futjes së shumëzuesve nën shenjën e rrënjës), disa shprehje irracionale mund të shndërrohen në formë ekuivalente në të cilën nuk paraqitet shenja për rrënjën, d.m.th. në shprehje racionale.

**Shembulli 3**

Cilat nga shprehjet e mëposhtme irracionale mund të shndërrohen në formë racionale:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt{4}; & \text{b) } \sqrt[3]{81}; & \text{c) } \sqrt[3]{x^3 y^9}; \\ \text{ç) } \sqrt{x^2 y}, \quad x, y \geq 0; & \text{d) } \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}, \quad x \geq 0. \end{array}$$

**Zgjidhje:**

- a)  $\sqrt{4} = 2$  është shprehje racionale.
- b)  $\sqrt[3]{81} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$  nuk mund të shndërrohet në shprehje racionale sepse në shprehjen e fituar pas shndërrimit mbetet rrënja.
- c)  $\sqrt[3]{x^3 y^9} = xy^3$ , prandaj shprehja kthehet në shprehje racionale.
- ç)  $\sqrt{x^2 y} = x \cdot \sqrt{y}$ . Në shprehje edhe pas ndërhyrjes mbetet rrënja kuadratike, prandaj e njëjta nuk mund të shndërrohet në shprehje racionale.
- d)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3 \cdot x} \cdot \sqrt[6]{x^4 \cdot x} \cdot \sqrt[6]{x^3} = \sqrt[6]{x^4} \cdot \sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[6]{x^3} = \sqrt[6]{x^{12}} = x^2$ . Është e qartë se në këtë rast shprehja shndërrohet në shprehje racionale.

**Detyra 2**

Cilat nga shprehjet e mëposhtme irracionale mund të shndërrohen në formë racionale:

$$\text{a) } \sqrt{8}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{27}; \quad \text{c) } \sqrt[3]{x^2 y^9 z^3}; \quad \text{ç) } \sqrt{x^2 y^2}, \quad x, y \geq 0.$$

**Aktivitet**

Llogaritni:

$$\text{a) } \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}, \quad a > 0; \quad \text{b) } \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a}; \quad \text{c) } \sqrt[2]{a^m} \cdot \sqrt[2]{a^{n-m}}, \quad a > 0, m < n.$$

**Mbani mend!**

**Racionalizimi i emëruesit të thyesës** është procedurë përmes së cilës emëruesi i thyesës shndërrohet nga shprehje irracionale në racionale, kurse vlera e thyesës mbetet e pandryshuar.

**Shembulli 3**

Racionalizoni emëruesin e thyesës  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ .

**Zgjidhje:**

Emëruesi i thyesës përmban  $\sqrt{5}$ . Që të eliminojmë rrënjën në emërues, thyesën e shumëzojmë me  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ . Fitojmë:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Në këtë mënyrë fitojmë një thyesë e cila në emërues nuk ka rrënjë, d.m.th. emëruesi nuk është shprehje irracionale. Vëreni se thyesën në fakt e kemi shumëzuar me  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$ , kështu që vlera e saj ka ngelur e pandryshuar.

**Shembulli 4**

Racionalizoni emëruesit e thyesave:

a)  $\frac{2}{\sqrt[3]{5^2}}$ ;      b)  $\frac{7}{\sqrt[3]{4^3}}$ .

**Zgjidhje:**

a) Emëruesi i thyesës përmban  $\sqrt[3]{5^2}$ . Meqenëse  $\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ , që të eliminojmë rrënjën në emërues, thyesën e shumëzojmë me  $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$ . Fitojmë,

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}.$$

b) Në këtë rast thyesën e shumëzojmë me  $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$  dhe marrim:

$$\frac{7}{\sqrt[3]{4^3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4^4}} = \frac{7 \cdot \sqrt[3]{4}}{4}.$$

**Detyra 3**

Racionalizoni emëruesit e thyesave:

a)  $\frac{6}{\sqrt{2}}$ ;      b)  $\frac{9}{\sqrt[3]{3^3}}$ ;      c)  $\frac{-3}{\sqrt[3]{6^2}}$ .



Le ta ndjekim procedurën e racionalizimit të thyesës së formës  $\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}$ , ku  $m < n$ , kurse  $A$  dhe  $B \neq 0$  janë numra ose shprehje të dhëna (me kusht  $B > 0$ , nëse  $n$  është numër çift). Për ta eliminuar rrënjën nga emëruesi i thyesës, të njëjtën e zgjerojmë me  $\frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}}$ . Kështu, fitojmë:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{m+n-m}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^n}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{B^{n-m}}}{B}.$$

Nëse  $m \geq n$ , atëherë fillimisht emëruesin e kthejmë në formën normale, e më pas racionalizojmë thyesën e fituar.

### Shembulli 5

Racionalizoni emëruesit e thyesave:

a)  $\frac{10}{3\sqrt{7}}$ ;    b)  $\frac{x+2y}{\sqrt[3]{(x-2y)^2}}$ ,  $x-2y > 0$ ;    c)  $\frac{-x+y}{x \cdot \sqrt[3]{y^2}}$ ,  $y \neq 0$ .

**Zgjidhje:**

a)  $\frac{10}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{3\sqrt{7^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{10 \cdot \sqrt{7}}{21};$

b)  $\frac{x+2y}{\sqrt[3]{(x-2y)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-2y)^5}}{\sqrt[3]{(x-2y)^5}} = \frac{(x+2y) \cdot \sqrt[3]{(x-2y)^5}}{\sqrt[3]{(x-2y)^7}} = \frac{(x+2y) \cdot \sqrt[3]{(x-2y)^2}}{x-2y};$

c)  $\frac{-x+y}{x \cdot \sqrt[3]{y^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{y^4}}{\sqrt[3]{y^4}} = \frac{(-x+y) \cdot \sqrt[3]{y^4}}{x \cdot \sqrt[3]{y^6}} = \frac{(-x+y) \cdot \sqrt[3]{y^4}}{xy}.$

### Detyra 4

Racionalizoni emëruesit e thyesave:

a)  $\frac{8}{4\sqrt{a^2+1}}$ ;    b)  $\frac{5}{\sqrt[3]{3a}}$ ,  $a > 0$ ;    c)  $\frac{3y}{4 \cdot \sqrt[3]{5y^2}}$ ,  $y \neq 0$ .

### Aktivitet

Llogaritni:

a)  $(a+b)(a-b)$ ;    b)  $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$ ;    c)  $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ .



Le të jetë dhënë thyesa  $\frac{A}{a+\sqrt{b}}$ , ku  $A$ ,  $a$  dhe  $b$  ( $b \geq 0$ ) janë numra ose shprehje të dhëna, ashtu që  $a+\sqrt{b} \neq 0$ .

Racionalizimi i emëruesit i kësaj thyese kryhet ashtu që thyesa zgjerohet me  $\frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$ . Fitohet me sa vijon:

$$\frac{A}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{A \cdot (a-\sqrt{b})}{a^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{A \cdot (a-\sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

Nëse emëruesi është i formës  $a-\sqrt{b}$ , atëherë zgjerimi bëhet me  $\frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$ .

### Shembulli 6

Racionalizoni emëruesit e thyesave:

a)  $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$ ;    b)  $\frac{a}{a+\sqrt{3}}$ ,  $a \neq -\sqrt{3}$ ;    c)  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$ .

**Zgjidhje:**

a)  $\frac{4}{2+\sqrt{3}} = \frac{4}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot (2-\sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 \cdot (2-\sqrt{3})}{1} = 4 \cdot (2-\sqrt{3});$

b)  $\frac{a}{a+\sqrt{3}} = \frac{a}{a+\sqrt{3}} \cdot \frac{a-\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}} = \frac{a(a-\sqrt{3})}{a^2-3};$

c)  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)}{4}.$

### Detyra 5

Racionalizoni emëruesit e thyesave:

a)  $\frac{5}{\sqrt{3}-1}$ ;    b)  $\frac{b+\sqrt{b}}{b-\sqrt{2}}$ ,  $b \neq \sqrt{2}$ ;    c)  $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{11}-3}$ .

Në fund, le të shohim se si racionalizohet emëruesi i thyesës që ka formën  $\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ , ku  $A$ ,  $a$  dhe  $b$  ( $a, b >$

0) janë numra ose shprehje të dhëna, ashtu që  $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq 0$ , d.m.th.  $a \neq b$ . Racionalizimi i emëruesit i kësaj thyese bëhet ashtu që thyesën e zgjerojmë me  $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ . Fitojmë me sa vijon:

$$\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{A \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{A \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$$

Nëse emëruesi përmban  $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ , atëherë e zgjerojmë me  $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ .

## Shembulli 7

Racionalizoni emëruesit e thyesave:

a)  $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ ;      b)  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ;      c)  $\frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ .

Zgjidhje:

a)  $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{7-5} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$ ;

b)  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2} = 13+2\sqrt{6}$ ;

c)  $\frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \frac{54-23\sqrt{6}}{-6} = -9 + \frac{23}{6}\sqrt{6}$ .

## Detyra për ushtrime!

1. Për cilat vlera të ndryshores  $x$  është e përkufizuar shprehja:

a)  $\sqrt{x+11}$ ;      b)  $\sqrt[3]{x-4} - \sqrt{x^2+12}$ ;      c)  $\frac{\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x+4}}{x}$ ;      ç)  $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}$ ;

2. Cilat nga shprehjet e dhëna mund të shndërrohen në shprehje racionale:

a)  $\sqrt{a}-a$ ,  $a \geq 0$ ;      b)  $\sqrt{a^2}-a$ ,  $a \geq 0$ ;  
c)  $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} - 3a$ ;      ç)  $\sqrt[3]{64a^3} - \sqrt{9a^2}$ ,  $a \geq 0$ .

3. Të shkruhen në formë më të thjeshtë, e më pas caktoni se cila nga shprehjet e dhëna janë shprehje irracionale:

a)  $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^6}$ ,  $x \geq 0$ ;      b)  $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[3]{ab^2}$ ;  
c)  $\frac{3}{5}\sqrt{50} : \frac{5}{5}\sqrt{2}$ ;      ç)  $\sqrt{a^4b} : \sqrt{ab}$ ,  $a, b > 0$ .

Në detyrat 4 – 7 racionalizoni emëruesin e thyesave:

4. a)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ;      b)  $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8}}$ ;      c)  $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ ;      ç)  $\frac{-7}{\sqrt[3]{4^3}}$ .  
5. a)  $\frac{2x}{\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$ ;      b)  $\frac{\sqrt{2a^3}}{\sqrt{a}}$ ,  $a > 0$ ;      c)  $\frac{5}{\sqrt[3]{3a}}$ ,  $a \neq 0$ ;      ç)  $\frac{a-6}{\sqrt[3]{a^2}}$ ,  $a > 0$ .  
6. a)  $\frac{2(x-1)}{\sqrt{x-1}}$ ,  $x > 1$ ;      b)  $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$ ,  $a+b > 0$ ;      c)  $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a+b}}$ ,  $a+b \neq 0$ .  
7. a)  $\frac{5-\sqrt{7}}{7+\sqrt{5}}$ ;      b)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17-4}}$ ;      c)  $\frac{\sqrt{5}-4}{\sqrt{8-\sqrt{7}}}$ ;      ç)  $\frac{a-3}{\sqrt{a-\sqrt{3}}}$ ,  $a \neq 3$ .

## 1.9 ZGJERIMI I BASHKËSIVE NUMERIKE

### Bashkësia e numrave natyrorë

*Bashkësia e numrave natyrorë* shënohet me

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Kjo bashkësi është e mbyllur në lidhje me operacionet e mbledhjes dhe shumëzimit, d.m.th. shuma dhe produkti i dy numrave natyrorë përsëri është numër natyror.

Mirëpo, operacionet e zbritjes dhe pjesëtimit nuk janë të brendshëm në bashkësinë e numrave natyrorë, përkatësisht bashkësia e numrave natyrorë nuk është e mbyllur në lidhje me to. Për shembull,  $2 - 5 \notin \mathbb{N}$ . Prandaj, disa ekuacione nuk kanë zgjidhje në  $\mathbb{N}$ , sikurse janë, për shembull, ekuacionet  $6 + x = 3$ ,  $x + 3 = 2$ , e të tjera.

### Bashkësia e numrave të plotë

Që të mund të realizohet zgjidhja e ekuacioneve të tilla, bashkësia e numrave natyrorë zgjerohet me numrin 0 dhe me numrat negativë. Kështu fitohet *bashkësia e numrave të plotë*, e cila shënohet me

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Në bashkësinë  $\mathbb{Z}$ , operacionet mbledhje, zbritje dhe shumëzim janë operacione të mbyllura. Por, ekzistojnë ekuacione që edhe në këtë bashkësi nuk kanë zgjidhje. Për shembull, ekuacioni  $2x = 5$ , nuk ka zgjidhje në  $\mathbb{Z}$ , sepse nuk ekziston numri i plotë i cili i shumëzuar me 2 jep rezultatin 5. Arsyeja për këtë qëndron në faktin se pjesëtimi nuk është operacion i mbyllur në bashkësinë e numrave të plotë, d.m.th. herësi i dy numrave të plotë nuk është gjithmonë numër i plotë.

### Bashkësia e numrave racionalë

Që të zgjidhet problemi i mësipërm, prezantojmë *bashkësinë e numrave racionalë*, të cilën e shënojmë me

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Në bashkësinë  $\mathbb{Q}$ , ekuacioni  $2x = 5$  ka zgjidhje  $x = \frac{5}{2}$ .

### Numrat irracionalë

Edhe përkundër kësaj, ka ekuacione të cilat nuk kanë zgjidhje as në bashkësinë e numrave racionalë. Për shembull, ekuacioni  $x^2 = 5$  nuk ka zgjidhje në  $\mathbb{Q}$ . Për të zgjidhur ekuacionet e tilla, prezantojmë *numrat irracionalë*. Ata nuk mund të shkruhen si herës i dy numrave të plotë dhe janë numra dhjetorë joperiodik me pafund shumë shifra dhjetore. Shembuj numrash irracionalë janë:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots, \sqrt{3} = 1,7320508\dots, \pi = 3,14159265\dots,$$

Bashkësia e numrave irracionalë më shpesh shënohet me  $\mathbb{I}$ .



## Bashkësia e numrave realë

Unioni i bashkësisë së numrave racionalë dhe bashkësisë së numrave irracionalë jep bashkësinë e numrave realë, të cilën e shënojmë me  $\mathbb{R}$  dhe  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ .

Në bashkësinë e numrave realë mund të zgjidhen gjitha ekuacionet e formës  $x^2 = a$ , ku  $a > 0$ .

Vëreni se  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Në gjitha këto bashkësi operacionet e mbledhjes dhe shumëzimit janë komutative dhe asociative, kurse shumëzimi është distributiv ndaj mbledhjes.

### Hyrje në numrat kompleksë

Megjithatë, jo çdo ekuacion ka zgjidhje në secilën nga bashkësitë e mësipërme numerike. Prandaj edhe parashtrohet pyetja në cilën bashkësi ekziston zgjidhje e ekuacioni të dhënë?

#### Shembulli 1

Të shqyrtojmë se në cilat bashkësi kanë zgjidhje ekuacionet:

- a)  $x + 3 = 5$ ;    b)  $x + 3 = 1$ ;    c)  $2x - 3 = 0$ ;    ç)  $x^2 = 5$ ;    d)  $x^2 + 1 = 0$ .

**Zgjidhje:**

- a) Zgjidhje e ekuacionit  $x + 3 = 5$  është  $x = 2$ . Numri  $2 \in \mathbb{N}$ . Domethënë, ekuacioni ka zgjidhje në  $\mathbb{N}$ , por meqë  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , ai ka zgjidhje edhe në  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  dhe  $\mathbb{R}$ .
- b) Zgjidhje e ekuacionit  $x + 3 = 1$  është  $x = -2$ . Numri  $-2 \in \mathbb{Z}$ , pra, ekuacioni ka zgjidhje në  $\mathbb{Z}$ , prandaj edhe në  $\mathbb{Q}$  dhe  $\mathbb{R}$ , por nuk ka zgjidhje në  $\mathbb{N}$ .
- c) Zgjidhje e ekuacionit  $2x - 3 = 0$  është  $x = \frac{3}{2}$ . Numri  $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ , çka do të thotë se ekuacioni ka zgjidhje në  $\mathbb{Q}$ , me çka edhe në  $\mathbb{R}$ .
- ç) Ekuacioni  $x^2 = 5$  ka dy zgjidhje  $x_1 = \sqrt{5}$  dhe  $x_2 = -\sqrt{5}$ . Këto dy zgjidhje i takojnë bashkësisë  $\mathbb{R}$ , por nuk i takojnë  $\mathbb{Q}$ , d.m.th. këto janë numra irracionalë.
- d) Ekuacioni  $x^2 + 1 = 0$  mund të shkruhet në formën
- $$x^2 = -1.$$

Por, katroi i asnjë numri real nuk mund të jetë numër negativ. Prandaj ekuacioni në fjalë nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave realë.

### Detyra 1

Shqyrtoni se në cilat bashkësi ka zgjidhje ekuacioni:

- a)  $3x - 4 = 5$ ;    b)  $3 + x = 6$ ;    c)  $x + 2 = 0$ ;    ç)  $x^2 - 4 = 5$ ;    d)  $x^2 + 4 = 0$ .

Nga shembulli 1 vërejmë se ekzistojnë ekuacione që nuk kanë zgjidhje as edhe në bashkësinë e numrave realë  $\mathbb{R}$ . Që të mund të zgjidhim edhe ekuacione të tilla, paraqitet nevoja e zgjerimit të bashkësisë së numrave realë. Por, gjatë këtij zgjerimi patjetër duhet të marrim në konsideratë me sa vijon:

- bashkësia e re duhet të përmbajë gjithë numrat realë;
- në bashkësinë e re duhet të ekzistojë numri kuadratik i të cilit është  $-1$ ;



3. në bashkësinë e re duhet të jenë të përkufizuara operacionet mbledhje dhe shumëzim dhe për to të vlejnë vetia komutative dhe asociative, si dhe vetia distributive e shumëzimit ndaj mbledhjes.

Që të përmbushet kërkesa e dytë, me përkufizim prezantohet numri të cilin e shënojmë me  $i$ , i tillë që katrori i tij është  $-1$ .

### Mbani mend!

Numri  $i$  quhet *njësi imagjinare* dhe katrori i tij është  $-1$ , d.m.th.  $i^2 \stackrel{\text{def}}{=} -1$ .

Për fuqitë e njësisë imagjinare, fitohet me sa vijon:

$$\begin{aligned} i^1 &= i, \\ i^2 &= -1, \\ i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \\ i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1, \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i, \\ i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = -1, \\ i^7 &= i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i, \\ i^8 &= i^7 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1 \\ &\text{etj.} \end{aligned}$$

Vërejmë se për çdo numër natyror  $n$ , fuqia  $i^n$  merr njëren nga vlerat  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$ ,  $1$  dhe se këto katër vlera zënë vend në mënyrë periodike.

Për  $n = 0$ , me përkufizim, vlen  $i^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ .

### Mbani mend!

Nëse  $n$  është numër i plotë jonegativ, atëherë  $i^n \in \{i, -1, -i, 1\}$  dhe të gjitha katër vlerat zënë vend në mënyrë periodike. Këtu, nëse  $n = 4k + r$  ( $0 \leq r \leq 3$ ), d.m.th. nëse  $r$  është mbetje e pjesëtimit të  $n$  me 4, atëherë  $i^n = i^r$ .

### Shembulli 2

Llogaritni fuqitë e njësisë imagjinare:

a)  $i^{21}$ ; b)  $i^{48}$ ; c)  $i^{27}$ ; ç)  $i^{54}$ .

**Zgjidhje:**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad i^{21} &= i^{4 \cdot 5 + 1} = i^1 = i; \\ \text{b)} \quad i^{48} &= i^{4 \cdot 12 + 0} = i^0 = 1; \\ \text{c)} \quad i^{27} &= i^{4 \cdot 6 + 3} = i^3 = -i; \\ \text{ç)} \quad i^{54} &= i^{4 \cdot 13 + 2} = i^2 = -1. \end{aligned}$$

**Detyra 2**

Llogaritni fuqitë në vijim:

- a)  $i^{101}$ ;      b)  $i^{27}$ ;      c)  $i^{24}$ ;      ç)  $i^{26}$ .

**Bashkësia e numrave kompleksë**

Numri  $a + ib$ , ku  $a$  dhe  $b$  janë numra të dhënë realë, kurse  $i$  është njësia imagjinare, quhet **numër kompleks**. Bashkësia e gjithë numrave të kësaj trajte quhet **bashkësi e numrave kompleksë** dhe shënohet me  $\mathbb{C}$ . Kështu,

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Nëse

$$z = a + ib,$$

atëherë numrin  $a$  e quajmë *pjesë reale e numrit  $z$*  dhe e shënojmë me  $\operatorname{Re}(z)$ , kurse numrin  $b$  e quajmë *pjesë imagjinare e numrit  $z$*  dhe e shënojmë me  $\operatorname{Im}(z)$ . Përveç kësaj, sipas përkufizimit vlen:

$$0 \cdot i = 0, \quad 1 \cdot i = i, \quad a + 0i = a, \quad 0 + bi = bi.$$

**Shembulli 3**

Shkruani numrat kompleksë nëse janë dhënë pjesët reale dhe imagjinare të tyre:

- a)  $\operatorname{Re}(z) = 4, \operatorname{Im}(z) = -3$ ;      b)  $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 4$ ;  
c)  $\operatorname{Re}(z) = 3, \operatorname{Im}(z) = 0$ ;      ç)  $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 0$ .

**Zgjidhje:**

- a)  $z = 4 - 3i$ ;      b)  $z = 0 + 4i = 4i$ ;      c)  $z = 3 + 0i = 3$ ;      ç)  $z = 0 + 0i = 0$ .

**Detyra 3**

Shkruani numrat kompleksë nëse janë dhënë pjesët reale dhe imagjinare të tyre:

- a)  $\operatorname{Re}(z) = -2, \operatorname{Im}(z) = -5$ ;      b)  $\operatorname{Re}(z) = 5, \operatorname{Im}(z) = 0$ ;      c)  $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 5$ .

Për numrin e dhënë kompleks  $z = a + ib$ , vëreni me sa vijon:

- Nëse  $\operatorname{Im}(z) = b = 0$ , atëherë për  $z = a + 0i = a \in \mathbb{R}$ . Nga këtu del se çdo numër real është njëkohësisht edhe numër kompleks, përkatësisht  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Nga këtu, është plotësuar kushti i parë për zgjerimin e bashkësisë së numrave realë.
- Nëse  $\operatorname{Re}(z) = 0$ , atëherë  $z = 0 + bi$ , dhe nëse  $b \neq 0$ , atëherë numri  $bi$  quhet **numër  $i$  pastër kompleks**.

**Detyra 4**

Caktoni pjesën reale dhe imagjinare të numrave të dhënë kompleksë:

- a)  $1 + 3i$ ;      b)  $-4 - 3i$ ;      c)  $7i$ ;      ç)  $0$ ;      d)  $4$ .

**Mbani mend!**

Numri kompleks  $-z = -a - bi$  quhet **numër i kundërt** i numrit kompleks  $z = a + bi$ .

Numri kompleks  $a - bi$  quhet numër kompleks i konjuguar i numrit  $z = a + bi$  dhe e shënojmë me  $\bar{z}$ , d.m.th.  $\bar{z} = a - bi$ .

**Shembulli 4**

Shkruani numrin kompleks të kundërt dhe atë të konjuguar të numrave:

- a)  $z = 3 - i$ ;    b)  $z = 2i$ ;    c)  $z = 3$ ;    ç)  $z = 0 + 0i$ .

**Zgjidhje:**

- a) Numri i kundërt i  $z = 3 - i$  është  $-z = -3 + i$ , kurse numri kompleks i konjuguar është  $\bar{z} = 3 + i$ .  
 b) Numri i kundërt i  $z = 2i = 0 + 2i$  është  $-z = -0 - 2i = -2i$ , kurse numri kompleks i konjuguar është  $\bar{z} = 0 - 2i = -2i$ . Mund të përfundojmë se për numrin e pastër imagjinar, numri i kundërt dhe ai i konjuguar i tij janë të barabartë.  
 c) Numri i kundërt i  $z = 3 = 3 + 0i$  është  $-z = -3 - 0i = -3$ , kurse numri kompleks i konjuguar është  $\bar{z} = 3 - 0i = 3$ .  
 ç) Numri i kundërt i  $z = 0 = 0 + 0i$  është  $-z = -0 - 0i = 0$ , kurse numri i konjuguar kompleks është  $\bar{z} = 0 - 0i = 0$ .

**Detyra 5**

Plotësoni: Numri i kundërt i  $z = 6i$  është \_\_\_\_\_, kurse numri kompleks i konjuguar i tij është \_\_\_\_\_.

**Shembulli 5**

Nëse  $z = a + bi$ , të tregohet se:    a)  $\bar{\bar{z}} = z$ ;    b)  $\overline{(-z)} = -\bar{z}$ .

**Zgjidhje:**

- a)  $\bar{\bar{z}} = \overline{(a + bi)} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$ ;  
 b)  $\overline{(-z)} = \overline{(-a - bi)} = -a + bi = -(a - bi) = -\bar{z}$ .

Dimë se në bashkësinë e numrave realë nuk ekziston rrënja katrore e numrave negativë, respektivisht se rrënja katrore e numrave negativë nuk përkufizohet, sepse katrori i cilit do numri real është numër jonegativ. Mirëpo, me futjen e njësisë imagjinare  $i$ , për të cilën vlen  $i^2 = -1$ , fitojmë se

$$\sqrt{-1} = i.$$

Nëse  $a$  është numër real negativ, përkatësisht  $a < 0$ , atëherë mund të shkruajmë:

$$a = -|a|.$$

Tani, për rrënjën katrore të numrit  $a < 0$ , fitojmë:

$$\sqrt{a} = \sqrt{-|a|} = \sqrt{(-1)|a|} = \sqrt{-1}\sqrt{|a|} = \sqrt{|a|} i.$$

Në këtë mënyrë, rrënja katrore e cilit do numri negativ shprehet përmes njësisë imagjinare. Por, duhet theksuar se, në këtë rast, punojmë në bashkësinë e numrave kompleksë.

### Shembulli 6

- a)  $\sqrt{-4} = \sqrt{4} i = 2i;$
- b)  $\sqrt{-9} = \sqrt{9} i = 3i;$
- c)  $\sqrt{-81} = \sqrt{81} i = 9i.$

### Detyra 5

Shkruani numrin kompleks:

- a)  $\sqrt{-225};$
- b)  $\sqrt{-196};$
- c)  $\sqrt{-121}.$

Dy numra kompleksë janë të barabartë nëse i kanë të barabarta pjesët reale dhe imagjinare, përkatësisht.

### Mbani mend!

Numrat kompleksë  $a + bi$  dhe  $c + di$  janë të barabartë nëse  $a = c$  dhe  $b = d$ .

### Shembulli 7

Për cilët numra realë  $x$  dhe  $y$  vlen barazimi:

- a)  $x + 3i = 5 - yi;$
- b)  $(x + y) + (x - y)i = 3 + 5i.$

**Zgjidhje:**

- a) Që të vlejë barazimi i numrave kompleksë, duhet që  $x = 5$  dhe  $-y = 3$ , d.m.th.  $y = -3$ .
- b) Në këtë rast, barazimi do të vlejë për  $x$  dhe  $y$  që janë zgjidhje të sistemit të ekuacioneve lineare:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Zgjidhje e këtij sistemi të ekuacioneve është  $x = 4$  dhe  $y = -1$ .

### Detyra 6

Për cilët numra realë  $x$  dhe  $y$  vlen barazimi  $(2x - y) + (3x + 2y)i = x + 12i$ .



## Detyra për ushtrime!

- Përcaktoni bashkësitë në të cilat kanë zgjidhje ekuacionet:  
a)  $x^2 - 6 = 0$ ;    b)  $x - 10 = 5$ ;    c)  $x + 10 = 5$ ;    ç)  $3x - 4 = 0$ .
- Përcaktoni fuqitë në vijim të njësise imagjinare  
a)  $i^{202}$ ;    b)  $i^{199}$ ;    c)  $i^{203}$ ;    ç)  $i^{251}$ .
- Shkruani numrat kompleksë nëse janë dhënë pjesa reale dhe imagjinare e tyre  
a)  $\operatorname{Re}(z) = -2, \operatorname{Im}(z) = 10$ ;    b)  $\operatorname{Re}(z) = 5, \operatorname{Im}(z) = 0$ ;  
c)  $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = -4$ ;    ç)  $\operatorname{Re}(z) = 11, \operatorname{Im}(z) = 12$ .
- Për numrat e dhënë kompleksë, caktoni pjesën reale dhe imagjinare të tyre:  
a)  $-1 + 5i$ ;    b)  $6 + 2i$ ;    c)  $6$ ;    ç)  $-8i$ .
- Shkruani numrin e kundërt dhe atë kompleks të konjuguar për numrat:  
a)  $z = -10 - 2i$ ;    b)  $z = -3i$ ;    c)  $z = 4$ .
- Le të jetë  $z = 4 - 5i$ . Caktoni hap pas hapi numrat  $\bar{z}$  dhe  $\overline{(-z)}$ .
- Shkruani numrin imagjinar:  
a)  $\sqrt{-324}$ ;    b)  $\sqrt{-625}$ ;    c)  $\sqrt{-10000}$ .
- Për cilët numra realë  $a$  dhe  $b$  janë të sakta ekuacionet e mëposhtme:  
a)  $5 + ai = b - 4i$ ;  
b)  $2a - 9i = 8 + 3bi$ ;  
c)  $(a - 2b) - (3a + 4b)i = 3a + 2 + 3bi$ .

## 1.10 MBLEDHJA DHE ZBRITJA E NUMRAVE KOMPLEKSË

### Rikujtoni!

- Numri  $i$  quhet njësi imagjinare dhe  $i^2 = -1$ .
- Cili numër është pjesa reale e cili pjesa imagjinare e numrit kompleks  $15 - 10i$ ?
- Cili numër është i konjuguari i numrit kompleks  $z = 5 + 13i$ ?

Në këtë njësi mësimore do ta përkufizojmë shumën dhe ndryshimin e dy numrave kompleksë.

**Shuma e dy numrave kompleksë** është numër kompleks pjesa reale e të cilit është shuma e pjesëve reale të mbledhësve, kurse pjesa imagjinare e tij është shuma e pjesëve imagjinare të mbledhësve.

**Ndryshimi i dy numrave kompleksë** është numër kompleks pjesa reale e të cilit është ndryshimi i pjesës reale të të zbritshmit dhe zbritësit, kurse pjesa imagjinare është ndryshimi i pjesëve imagjinare të të zbritshmit dhe zbritësit.

### Mbani mend!

Nëse  $z_1 = a + bi$  dhe  $z_2 = c + di$ , atëherë shuma dhe ndryshimi i këtyre dy numrave përkufizohet në mënyrën e vijim:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

### Shembulli 1

Llogaritni shumën dhe ndryshimin e numrave të mëposhtëm:

a)  $z_1 = 2 + 3i$  dhe  $z_2 = 3 - 2i$ ;

b)  $z_1 = 4 - 2i$  dhe  $z_2 = 2i$ ;

c)  $z_1 = 3 - 6i$  dhe  $z_2 = 5$ .

**Zgjidhje:**

a)  $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + (3 + (-2))i = 5 + i,$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (3 - 2i) = (2 - 3) + (3 - (-2))i = -1 + 5i.$$

b)  $z_1 + z_2 = (4 - 2i) + 2i = (4 + 0) + (-2 + 2)i = 4 + 0i = 4,$

$$z_1 - z_2 = (4 - 2i) - 2i = (4 - 0) + (-2 - 2)i = 4 - 4i.$$

c)  $z_1 + z_2 = (3 - 6i) + 5 = (3 + 5) + (-6i) = 8 - 6i,$

$$z_1 - z_2 = (3 - 6i) - 5 = (3 - 5) + (-6i) = -2 - 6i.$$

**Detyra 1**

Llogaritni shumën dhe ndryshimin e numrave të mëposhtëm:

- a)  $z_1 = 22 + 31i$  dhe  $z_2 = 21 - 25i$ ;  
 b)  $z_1 = 8 - 3i$  dhe  $z_2 = 10i$ ;  
 v)  $z_1 = 7 - 2i$  dhe  $z_2 = 29$ .

**Shembulli 2**

Le të jenë  $z_1 = 3 - 4i$ ,  $z_2 = 2 + 5i$  dhe  $z_3 = -1 - 7i$ . Kontrolloni nëse janë të vërteta barazimet:

- a)  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ;      b)  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ .

**Zgjidhje:**

- a)  $z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (2 + 5i) = (3 + 2) + (-4 + 5)i = 5 + i$ ,  
 $z_2 + z_1 = (2 + 5i) + (3 - 4i) = (2 + 3) + (5 - 4)i = 5 + i$ .

Mund të përfundojmë se vlen barazimi i parë, d.m.th.  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ .

- b)  $(z_1 + z_2) + z_3 = ((3 - 4i) + (2 + 5i)) + (-1 - 7i) = (5 + i) + (-1 - 7i) = 4 - 6i$ ,  
 $z_1 + (z_2 + z_3) = (3 - 4i) + ((2 + 5i) + (-1 - 7i)) = (3 - 4i) + (1 - 2i) = 4 - 6i$ .

Pra, edhe barazimi i dytë është i saktë, d.m.th.  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ .

Barazimet nga shembulli 2 vlejné jo vetëm për numrat konkret  $z_1$ ,  $z_2$  dhe  $z_3$ , por edhe për numra të çfarëdoshëm kompleksë.

**Mbani mend!**

Në bashkësinë e numrave kompleksë operacioni i mbledhjes është komutativ dhe asociativ, d.m.th. për cilëtdo numra kompleksë  $z_1$ ,  $z_2$  dhe  $z_3$  vlen:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ (vetia komutative) dhe} \\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ (vetia asociative).}$$

**Shembulli 3**

Le të jetë  $z = 3 - 2i$ . Llogaritni:

- a)  $z + \bar{z}$ ;      b)  $z - \bar{z}$ .

**Zgjidhje:**

- a)  $z + \bar{z} = (3 - 2i) + (3 + 2i) = 6 + 0i = 6 \in \mathbb{R}$ ,  
 b)  $z - \bar{z} = (3 - 2i) - (3 + 2i) = 0 - 4i = -4i$ .

Siç mund të vëreni, shuma e numrit kompleks  $z$  me numrin e tij të konjuguar kompleks është numër real, kurse ndryshimi i tyre është numër i pastër imagjinar.

Këto veti vlejnë për cilindo numër kompleks. Në fakt, nëse  $z = a + bi$  është numër kompleks i dhënë, atëherë

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a + 0i = 2a$$

është numër real, kurse

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 0 + 2bi = 2bi$$

është numër i pastër imagjinar.

#### Shembulli 4

Janë dhënë numrat  $z_1 = 2 + i$  dhe  $z_2 = 3 - 4i$ . Të kontrollohet saktësia e barazimit  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .

**Zgjidhje:**

Fillimisht, llogaritim  $z_1 + z_2 = (2 + i) + (3 - 4i) = 5 - 3i$ , prandaj  $\overline{z_1 + z_2} = 5 + 3i$ . Nga ana tjetër,  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (2 - i) + (3 + 4i) = 5 + 3i$ . Nga këtu përfundojmë se barazimi është i saktë.

Ky barazim vlen edhe në rastin e përgjithshëm, për numrat e çfarëdoshëm kompleksë  $z_1 = a + bi$  dhe  $z_2 = c + di$ . Me të vërtetë,  $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ , prandaj  $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$ . Për anën e djathtë barazimit, fitojmë:  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$ , çka edhe e vërteton saktësinë e barazimit.

#### Mbani mend!

Për dy numra të çfarëdoshëm kompleksë  $z_1$  dhe  $z_2$ , vlen barazimi  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .

#### Detyra për ushtrime!

1. Llogaritni shumën dhe ndryshimin e numrave kompleksë:

a)  $z_1 = 5 - 6i$  dhe  $z_2 = -4 + 9i$ ;

b)  $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$  dhe  $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$ ;

c)  $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5}i$  dhe  $z_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{5}i$ ;

ç)  $z_1 = 3 - 9i$  dhe  $z_2 = 5 - 11i$ .

2. Le të jetë  $z_1 = 7 - 6i$ . Të llogaritet  $\bar{z} - z$  dhe  $\overline{z - \bar{z}}$ .

3. Le të jenë  $z_1 = 3 - 2i$  dhe  $z_2 = 5 + 3i$ . Të kontrollohet saktësia e barazimit  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .

A vlen ky barazim edhe në rastin e përgjithshëm?



## 1.11 SHUMËZIMI I NUMRAVE KOMPLEKSË. FUQIA E NUMRIT KOMPLEKS

Në këtë pjesë do ta përkufizojmë produktin e numrave kompleksë.

Fillimisht, do ta marrim në konsideratë rastin e shumëzimit të dy numrave të pastër kompleksë. Le të jetë  $z_1 = ai$ , dhe  $z_2 = bi$ . Atëherë,

$$z_1 \cdot z_2 = ai \cdot bi = abi^2 = -ab.$$

Pra, produkti i dy numrave të pastër kompleksë është numër real.

### Mbani mend!

Produkti i dy numrave të pastër imagjinarë është numër real.

### Shembulli 1

Llogaritni produktin e numrave të pastër kompleksë  $z_1 = 3i$  dhe  $z_2 = -4i$ .

*Zgjidhje:*

$$z_1 \cdot z_2 = 3i \cdot (-4i) = -12i^2 = (-12)(-1) = 12.$$

### Detyra 1

Llogaritni produktin e numrave të pastër kompleksë:

- a)  $z_1 = 2i$  dhe  $z_2 = 3i$ ;      b)  $z_1 = -3i$  dhe  $z_2 = -5i$ ;      c)  $z_1 = -10i$  dhe  $z_2 = 2i$ .

Në rastin e përgjithshëm, shumëzimi i numrave kompleksë shndërrohet në shumëzim të binomeve. Le të jenë  $z_1 = a + bi$  dhe  $z_2 = c + di$ . Atëherë për produktin e numrave  $z_1$  dhe  $z_2$  fitojmë:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

### Mbani mend!

Nëse  $z_1 = a + bi$  dhe  $z_2 = c + di$ , atëherë për këta dy numra përkufizohet

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Le të nënvizojmë se kjo formulë nuk duhet të mësohet përmendësh. Shumë më e thjeshtë është që shumëzimi i numrave kompleksë të realizohet si shumëzimi i binomeve.

### Shembulli 2

Llogaritni produktin e numrave kompleksë  $z_1 = 3 - 2i$  dhe  $z_2 = 2 + 4i$ .

*Zgjidhje:*

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 2i)(2 + 4i) = 6 + 12i - 4i - 8i^2 = 6 + 12i - 4i + 8 = 14 + 8i.$$

**Detyra 2**

Llogaritni produktin e numrave kompleksë:

- a)  $z_1 = -4 - 3i$  dhe  $z_2 = 5 - 3i$ ;    b)  $z_1 = -2 + 3i$  dhe  $z_2 = 1 - i$ ;    c)  $z_1 = 4 + 3i$  dhe  $z_2 = -7 - 2i$ .

**Shembulli 3**Le të jenë  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = -8i$  dhe  $z_3 = 3 - 4i$ . Kontrolloni saktësinë e barazimeve:

- a)  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ ;    b)  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ ;    c)  $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ .

**Zgjidhje:**

$$\text{a) } z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(-8i) = -16i - 24i^2 = 24 - 16i.$$

$$z_2 \cdot z_1 = (-8i)(2 + 3i) = -16i - 24i^2 = 24 - 16i.$$

Produkti i fituar qoftë kur shumëzojmë si në anën e majtë qoftë si në anën e djathtë është numri i njëjtë, d.m.th. vlen barazimi  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ .

$$\text{b) } (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = ((2 + 3i)(-8i)) \cdot (3 - 4i) = (24 - 16i)(3 - 4i) = 72 - 96i - 48i + 64i^2 = 8 - 144i.$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (2 + 3i) \cdot ((-8i)(3 - 4i)) = (2 + 3i)(-32 - 24i) = -64 - 48i - 96i - 72i^2 = 8 - 144i.$$

Pra,  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ .

$$\text{c) } (z_1 + z_2) \cdot z_3 = ((2 + 3i) + (-8i)) \cdot (3 - 4i) = (2 - 5i) \cdot (3 - 4i) = 6 - 8i - 15i + 20i^2 = -14 - 23i.$$

$$z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = (2 + 3i)(3 - 4i) + (-8i)(3 - 4i) = (18 + i) + (-32 - 24i) = -14 - 23i.$$

Nga këtu, vlen edhe barazimi i tretë.

Mund të tregohet se tre barazimet e mësipërme vlejnë për numra kompleksë të çfarëdoshëm.

**Mbani mend!**

Në bashkësinë e numrave kompleksë, operacioni i shumëzimit është komutativ dhe asociativ, d.m.th. nëse  $z_1$ ,  $z_2$  dhe  $z_3$  janë numra të çfarëdoshëm kompleksë, atëherë vlen:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \text{ (vetia komutative)}$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \text{ (vetia asociative)}$$

Po ashtu, në bashkësinë e numrave kompleksë operacioni i shumëzimit është distributiv në raport me operacionin e mbledhjes, d.m.th. për numrat e çfarëdoshëm kompleksë  $z_1$ ,  $z_2$  dhe  $z_3$  vlen:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 \text{ (vetia distributive)}.$$

**Shembulli 4**

Të llogaritet  $z \cdot \bar{z}$ , nëse  $z = a + bi$ .

**Zgjidhje:**

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

Vëreni se produkti  $z \cdot \bar{z}$  është numër real.

**Mbani mend!**

Për numrin e çfarëdoshëm kompleks  $z = a + bi$ , produkti  $z \cdot \bar{z}$  është numër real. Rrënjën katrore të këtij numri e shënojmë me  $|z|$  dhe e quajmë **modul** ose **vlerë absolute** të numrit komple  $z$ .

Pra:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Shembulli 5**

Llogaritni modulin e numrit kompleks:

- a)  $1 + i$ ;    b)  $2 - i$ ;    c)  $4 - 3i$ ;    ç)  $-3i$ .

**Zgjidhje:**

a)  $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$

b)  $|2 - i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5};$

c)  $|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5;$

ç)  $|-3i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$

**Detyra 3**

Llogaritni modulin e numrit kompleks:

- a)  $8 + 6i$ ;    b)  $3 - 4i$ ;    c)  $12i$ .

**Shembulli 6**

Janë dhënë numrat kompleksë  $z_1 = -5 + 3i$  dhe  $z_2 = 4 - 2i$ . Të kontrollohet nëse për këta numra është i saktë barazimi  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ .

**Zgjidhje:**

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(-5 + 3i)(4 - 2i)} = \overline{(-14 + 22i)} = -14 - 22i,$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (-5 - 3i)(4 + 2i) = -14 - 22i.$$

Pra, anët e djathta të dyja shprehjeve të mësipërme janë të barabarta, prandaj të tilla janë edhe anët e majta, d.m.th.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ .

Ky pohim vlen edhe në rastin e përgjithshëm, d.m.th. për numrat e çfarëdoshëm  $z_1 = a + bi$  dhe  $z_2 = c + di$ . Në fakt,

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

Nga ana tjetër,  $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$ .

**Mbani mend!**

Nëse  $z_1$  dhe  $z_2$  janë numra të çfarëdoshëm kompleksë, atëherë  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ .



Në vazhdim, duke shfrytëzuar operacionin e shumëzimit të numrave kompleksë për të cilin vlen vetia asociative, do ta përkufizojmë fuqinë e numrit kompleks.

### Mbani mend!

Për numrin e çfarëdoshëm kompleks  $z$  dhe numrin e çfarëdoshëm natyror  $n$ , fuqia  $z^n$  përkufizohet me:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ herë}}$$

### Shembulli 7

Llogaritni fuqitë në vijim:

a)  $(2 - 3i)^3$ ;      b)  $(1 - i)^8$ .

**Zgjidhje:**

a)  $(2 - 3i)^2 = (2 - 3i)(2 - 3i) = -5 - 12i$

$(2 - 3i)^3 = (2 - 3i)^2(2 - 3i) = (-5 - 12i)(2 - 3i) = -46 - 9i.$

b)  $(1 - i)^2 = (1 - i)(1 - i) = -2i.$

Nëse e shfrytëzojmë faktin se  $(1 - i)^8 = ((1 - i)^2)^4$ , atëherë fitojmë

$$(1 - i)^8 = (-2i)^4 = (-2)^4 i^4 = 16.$$

### Detyra 4

Llogaritni fuqitë në vijim:

a)  $(1 + i)^4$ ;      b)  $(2 - i)^3$ ;      c)  $(1 - 3i)^5$ .

### Detyra për ushtrime!

1. Llogaritni produktin e numrave kompleksë  $z_1$  dhe  $z_2$  nëse

a)  $z_1 = 5 - 6i$  dhe  $z_2 = 4 - 9i$ ;

b)  $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$  dhe  $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$ ;

c)  $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$  dhe  $z_2 = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}i$ ;

r)  $z_1 = 3 - 9i$  dhe  $z_2 = 5 - 11i$ .

2. Llogaritni fuqitë në vijim:

a)  $(2 + 5i)^3$ ; b)  $(2 - 6i)^4$ ; c)  $(\sqrt{2} - \sqrt{3}i)^4$ .

3. Llogaritni modulën e numrit kompleks  $z$  nëse:

a)  $z = 4 + 7i$ ;      b)  $z = 3 - 8i$ ; c)  $z = -7i$ .

4. Zgjidhni ekuacionet e dhëna dhe kontrolloni saktësinë e zgjidhjeve:

a)  $x^2 - 16 = 0$ ;      b)  $x^2 + 16 = 0$ .



## 1.12 PJESËTIMI I NUMRAVE KOMPLEKSË

### Rikujtoni!

Për numrin e çfarëdoshëm kompleks  $z$ ,  $z \cdot \bar{z}$  është numër real.

Në këtë pjesë do të përkufizojmë pjesëtimin e dy numrave kompleksë. Le të jenë  $z_1 = a + bi$  dhe  $z_2 = c + di$  ( $z_2 \neq 0$ ). Pasi produkti i një numri të çfarëdoshëm kompleks me të konjuguarin e tij kompleks është numër real, shprehjen  $\frac{z_1}{z_2}$  e shumëzojmë me  $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$  dhe në këtë mënyrë në emërues fitojmë numrin real  $z_2 \cdot \bar{z}_2$ . Në fakt,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

### Mbani mend!

Nëse  $z_1 = a + bi$  dhe  $z_2 = c + di$  ( $z_2 \neq 0$ ), atëherë herësi i këtyre dy numrave përkufizohet me:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

### Shembulli 1

Llogaritni herësin e numrave kompleksë:

- $z_1 = 3 - i$  dhe  $z_2 = 2 + 3i$ ;
- $z_1 = 2 + 3i$  dhe  $z_2 = 3 - 4i$ ;
- $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$  dhe  $z_2 = \sqrt{3} - 2i$ .

**Zgjidhje:**

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-i}{2+3i} = \frac{3-i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{(3-i)(2-3i)}{2^2+3^2} = \frac{3-11i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{11}{13}i;$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{3-4i} = \frac{2+3i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(2+3i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{-6+17i}{25} = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i;$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i} \cdot \frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+2i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+2i)}{(\sqrt{3})^2+2^2} =$   
 $= \frac{(\sqrt{6}-2\sqrt{3})+(2\sqrt{2}+3)i}{7} = \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{7} + \frac{2\sqrt{2}+3}{7}i.$

### Detyra 1

Llogaritni herësit:

- $\frac{1-3i}{1+3i};$
- $\frac{2-5i}{6+8i};$
- $\frac{1-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}.$

**Shembulli 2**

Gjeni pjesën reale dhe atë imagjinare të numrit kompleks  $z = \frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i}$ .

**Zgjidhje:**

$$z = \frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i} = \frac{2-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} + \frac{2+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{2^2+1^2} + \frac{(2+i)^2}{2^2+1^2} = \frac{3-4i}{5} + \frac{3+4i}{5} = \frac{6}{5}.$$

Fitojmë se  $\operatorname{Re}(z) = \frac{6}{5}$ , kurse  $\operatorname{Im}(z) = 0$ .

**Detyra 2**

Gjeni pjesën reale dhe atë imagjinare të numrit kompleks  $z = \frac{1-2i}{2+i} + \frac{2+3i}{2-i}$ .

**Shembulli 3**

Le të jenë  $z_1 = 1 - 2i$ , kurse  $z_2 = 3 + 4i$ . Të provohet saktësia e barazimit  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ .

**Zgjidhje:**

Fillimisht, llogaritim:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{3+4i} = \frac{1-2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{(1-2i)(3-4i)}{3^2+4^2} = \frac{-5-10i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

$$\text{Tani, } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

$$\text{Nga ana tjetër, } \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Kështu kemi provuar saktësinë e barazimit për numrat e dhënë kompleksë  $z_1$  dhe  $z_2$ .

Ky barazim është i saktë edhe në rastin e përgjithshëm, për numrat e çfarëdoshëm  $z_1$  dhe  $z_2$  ( $z_2 \neq 0$ ).

**Mbani mend!**

Nëse  $z_1$  dhe  $z_2$  ( $z_2 \neq 0$ ) janë numra të çfarëdoshëm kompleksë, atëherë  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ .

**Detyra për ushtrime!**

- Llogaritni herësin e numrave kompleksë  $z_1$  dhe  $z_2$  nëse
  - $z_1 = 5 - 6i$  dhe  $z_2 = 4 - 9i$ ;
  - $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{2}i$  dhe  $z_2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}i$ ;
  - $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$  dhe  $z_2 = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}i$ ;
  - $z_1 = 3 - 9i$  dhe  $z_2 = 5 - 11i$ .
- Vërtetoni se barazimi  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$  është i saktë për numrat e çfarëdoshëm kompleksë  $z_1$  dhe  $z_2$  ( $z_2 \neq 0$ ).
- Bëni më të thjeshta shprehjet:
  - $\frac{(2+i)(3-i)}{1+i}$ ;
  - $\frac{(1+2i)^2}{2-i} \cdot \frac{(3-i)^2 + 2i}{1+i}$ .

## 1.13 DETYRA ME ZBATIMIN E NUMRAVE KOMPLEKSË

Përpara se të kalojmë në detyrat me zbatimin e numrave kompleksë, duhet të sqarojmë se kur një madhësi mund të merr vlerën numër kompleks. Për këtë arsye do të duhet të shohim se si numrat kompleksë mund të paraqiten gjeometrikisht.

### Paraqitja gjeometrike e numrave kompleksë

Çdo numër kompleks  $z = a + bi$  plotësisht është i përcaktuar me pjesën e tij reale  $a$  dhe pjesën e tij imagjinare  $b$ , ku  $a, b \in \mathbb{R}$ . Nga këtu, numri kompleks  $z = a + bi$  mund të paraqitet si dyshe (çift) i renditur i numrave realë  $(a, b)$ , dhe anasjelltas, çdo dyshe e renditur  $(a, b)$  mund të shkruhet si numër kompleks  $z = a + bi$ . Pra, ekziston korrespondenca e njëvlershme reciproke ndërmjet numrave kompleksë dhe dysheve të renditura të numrave realë. Për shembull:

$$z = 3 - 2i = (3, -2);$$

$$z = 5i = (0, 5);$$

$$z = 3 = (3, 0).$$

Po ashtu,  $z = (2, 3) = 2 + 3i$ ,  $z = (1, 0) = 1$ ,  $z = (0, 2) = 2i$ .

Nga ana tjetër, dihet se çdo dysheje të renditur  $(a, b)$  i përgjigjet saktësisht një pikë  $M(a, b)$  e rrafshit koordinativ, dhe anasjelltas, çdo pike  $N(x, y)$  të rrafshit koordinativ i përgjigjet (i korrespondon) saktësisht

një dyshe e renditur e numrave realë  $(x, y)$ , d.m.th. kemi një korrespondencë të njëvlershme reciproke ndërmjet dysheve të renditura të numrave realë dhe pikave të rrafshit koordinativ. Nga këtu, mund të përfundojmë se ekziston korrespondenca e njëvlershme reciproke ndërmjet numrave kompleksë dhe pikave të rrafshit koordinativ. Kjo do të thotë se secilit numër kompleks  $z = a + bi$  i përgjigjet një pikë  $M(a, b)$  e rrafshit koordinativ, dhe anasjelltas, çdo pike  $N(x, y)$  të rrafshit koordinativ i përgjigjet saktësisht një numër kompleks  $z = x + yi$ .

### Shembulli 1

Paraqitni numrat kompleksë

$$z_1 = 2 + 3i, z_2 = 1 - i, z_3 = 3 \text{ dhe } z_4 = -3i$$

në rrafshin koordinativ.

**Zgjidhje:**

Sipas sqarimit të mësipërm,

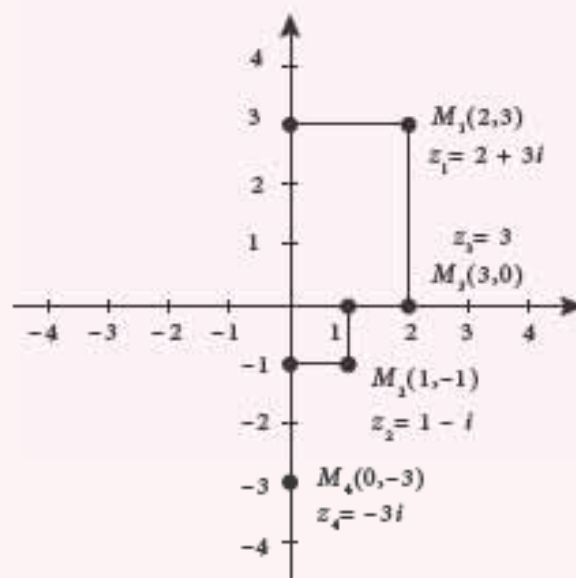
$$z_1 = 2 + 3i = (2, 3),$$

$$z_2 = 1 - i = (1, -1),$$

$$z_3 = 3 = (3, 0),$$

$$z_4 = -3i = (0, -3)$$

Në vizatimin 1 këto pika janë paraqitur në rrafshin koordinativ. Vëreni se numrit real  $z_3 = 3$  i përgjigjet pika  $M_3(3, 0)$ , e cila shtrihet në boshtin  $x$ , kurse numrit të pastër imagjinar  $z_4 = -3i$  i përgjigjet pika  $M_4(0, -3)$ , e cila shtrihet në boshtin  $y$ .



Vizatimi 1

### Detyra 1

Numrat kompleksë  $z_1 = 3 + i$ ,  $z_2 = 3 - 4i$ ,  $z_3 = 2i$  dhe  $z_4 = -4$  paraqitni në rrafshin koordinativ.

Rrafshin, pikat e të cilit paraqesin numra kompleksë quhet rrafsh **kompleks** ose **rrafsh i Gausit**. Boshti i abshisës i këtij rrafshi quhet **bosht real**, kurse boshti i ordinatës quhet **bosht imagjinar**.

Në gjeometri, vektori fillimi i të cilit është në origjinën e koordinatave, kurse mbarimi në pikën  $M(a, b)$  quhet **rreze – vektor** i pikës  $M$  dhe shënohet me  $\overrightarrow{OM}$ . Koordinatat e rreze-vektorit përputhen me koordinatat e pikës  $M$  dhe, në këtë rast, çdo pikë e rrafshit plotësisht është e përcaktuar me rreze-vektorin e saj.



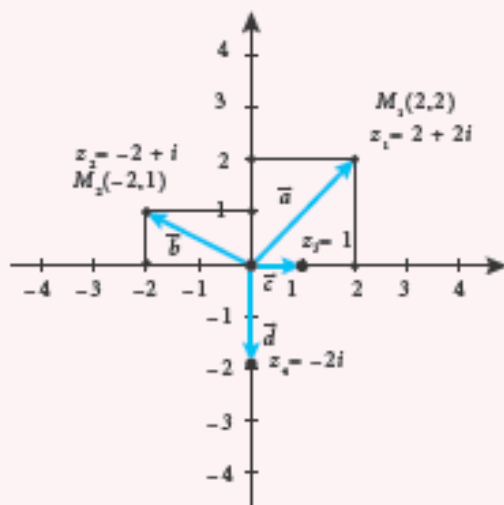
Meqenëse më herët treguam se secilit numër kompleks i përgjigjet saktësisht një pikë e rrafshit, kurse çdo pikë e rrafshit është e përcaktuar me rreze-vektorin e saj, mund të përfundojmë se ndërmjet numrave kompleksë dhe rreze-vektorëve ekziston një korrespondencë e njëvlershme reciproke.

## Shembulli 2

Në rrafshin koordinativ paraqitni rreze vektorët  $\vec{a} = (2, 2)$ ,  $\vec{b} = (-2, 1)$ ,  $\vec{c} = (1, 0)$  dhe  $\vec{d} = (0, -2)$ . Cilët numra kompleksë përcaktojnë këta rreze-vektorë?

### Zgjidhje:

Në vizatimin 2 i kemi paraqitur rreze-vektorët përkatës. Rreze-vektori  $\vec{a} = (2, 2)$  e përcakton numrin kompleks  $z_1 = 2 + 2i$ , rreze vektori  $\vec{b} = (-2, 1)$  e përcakton numrin kompleks  $z_2 = -2 + i$ , rreze vektori  $\vec{c} = (1, 0)$  - e përcakton numrin kompleks  $z_3 = 1$ , kurse rreze vektori  $\vec{d} = (0, -2)$  e përcakton numrin kompleks  $z_4 = -2i$ .



Vizatimi 2

## Detyra 2

Në rrafshin koordinativ paraqitni rreze vektorët  $\vec{a} = (-1, 3)$ ,  $\vec{b} = (-2, -4)$ ,  $\vec{c} = (0, -3)$  dhe  $\vec{d} = (5, 0)$ . Cilët numra kompleksë përcaktojnë këta rreze-vektorë?

Pse disa madhësi paraqiten me numra kompleksë?

Kjo është një pyetje thelbësore të cilës duhet t'i përgjigjemi që të mund të përdorim numrat kompleksë në detyra reale në zbatim.

Në fizikë, teknikë, robotikë dhe shumë disiplina të tjera, shumë nga madhësitë nuk mund të përshkruhen vetëm me një numër, por kanë dy informacione të rëndësishme. Për shembull, te forca nuk është e rëndësishme vetëm se sa është për nga madhësia, por edhe se në cilin drejtim vepron ajo. Prandaj themi se forca është madhësi vektoriale dhe ajo ka:

- intensitetin (madhësinë)
- drejtimin.

Si mund ta vëmë në lidhje forcën me numrin kompleks?

Numri kompleks  $z = a + bi$  përmban dy komponenta: pjesën reale  $a$  dhe pjesën imagjinare  $b$ . Këto dy komponenta mund të interpretohen si dy drejtime mes veti pingule (për shembull, horizontal dhe vertikal). Prandaj, forca mund të shkruhet si numër kompleks:

$$F = F_x + iF_y$$

ku:

- $F_x$  është komponenta horizontale e forcës,
- $F_y$  është komponenta vertikale e forcës.

Në këtë paraqitje, në të vërtetë, forca është paraqitur si rreze-vektor sepse, siç edhe theksuam më sipër, mes numrave kompleksë dhe rreze-vektorëve ekziston korrespondenca e njëvlershme reciproke.

Kjo paraqitje e forcës, dhe në mënyrë të njëjtë edhe e shumë madhësive të tjera vektoriale, është shumë e dobishme sepse në këtë mënyrë:

- mbledhja e forcave shndërrohet në mbledhje të rëndomtë të numrave kompleksë, në vend të mbledhjes së vektorëve;
- thjeshtohen llogaritjet;
- më lehtë zgjidhen detyrat me oscilime, valë, rrymën alternuese dhe shumë shembuj të tjerë ku hasen ndryshore që janë vektorë.

Në bazë të kësaj, mund të thuhet se numrat kompleksë nuk paraqesin madhësi fizike "të re", por se janë një vegël matematike me anë të së cilës më lehtë i përshkruajmë madhësitë që kanë nga dy komponenta.

### Shembulli 3

Madhësitë themelore që llogariten për qarkun elektrik janë: intensiteti i rrymës elektrike  $I$ , i cili matet me amperë (simboli A), impedanca elektrike  $Z$ , që matet me omë (simboli  $\Omega$ ) dhe tensioni  $U$ , të cilin e matim me voltë (simboli V). Këto madhësi janë të lidhura me formulën  $U = I \cdot Z$ .

Për të shmangur hamendësimin me simbolin për intensitetin e rrymës elektrike  $I$ , inxhinierët në vend të  $i$ , për njësinë imagjinare, përdorin shënimin  $j$ .

- Në qarkun elektrik, intensiteti i rrymës elektrike është  $(8 + 3j)$  A, kurse impedanca është  $(4 - j)$   $\Omega$ . Sa është tensioni?
- Në qarkun elektrik me tension prej 110 V, intensiteti i rrymës elektrike është  $(4 + 3j)$  A. Sa është impedanca?

**Zgjidhje:**

- Nga kushtet e detyrës  $I = 8 + 3j$ , kurse  $Z = 4 - j$ . Tensioni i rrymës elektrike llogaritet me formulën  $U = I \cdot Z$ . Me zëvendësimet përkatëse për intensitetin dhe impedancën, fitojmë:

$$U = I \cdot Z = (8 + 3j)(4 - j) = (35 + 4j) \text{ V.}$$

Rezultatit të fituar mund t'i japim interpretimin fizik në vijim. Tensioni  $U$  do të përcaktohet me rreze-vektorin  $\vec{u} = (35, 4)$ , prandaj

- pjesa reale (35 V) është tensioni aktiv;
- pjesa imagjinare (4j V) është tensioni reaktiv.

$$\text{b) } Z = \frac{U}{I} = \frac{110}{4 + 3j} = \frac{110}{4 + 3j} \cdot \frac{4 - 3j}{4 - 3j} = \frac{110(4 - 3j)}{4^2 + 3^2} = 4,4 \cdot (4 - 3j) = 17,6 - 13,2j.$$

**Aktivitet**

Në qarkun elektrik me tension 110 V, rezistenca e përgjithshme (impedanca) është  $(6-2j)\Omega$ . Sa është intensiteti i rrymës elektrike?

**Shembulli 4**

Në qarkun e rrymës elektrike dy burime të energjisë japin tensione komplekse  $U_1 = (6 + 4j)$  V dhe  $U_2 = (3 - 2j)$  V. Llogaritni tensionin e përgjithshëm,  $U$  në qark, nëse ai është i barabartë me shumën e tensioneve  $U_1$  dhe  $U_2$ .

**Zgjidhje:**

$$U = U_1 + U_2 = (6 + 4j) + (3 - 2j) = (9 + 2j) \text{ V.}$$

**Shembulli 5**

Një robot lëviz me transformim të paraqitur përmes numrit kompleks  $z_1 = 2 + j$ , e më pas kryen edhe një rotacion dhe shkallëzim  $z_2 = 1 - j$ . Caktoni rezultatin e transformimit të përgjithshëm  $z = z_1 \cdot z_2$ .

**Zgjidhje:**

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + j)(1 - j) = 3 - j.$$

**Aktivitet**

Nëpër kanalin e telekomunikimeve është dërguar sinjali  $S = 10 + 6j$ , kurse zhurma në kanal është  $N = 2 - j$ . Në dalje të kanalit fitohet sinjali i cili është shumë e sinjalit të dërguar dhe zhurmës.

- Caktoni sinjalin e pranuar  $R = S + N$ .
- Nga sinjali i pranuar caktoni sinjalin e pastër duke e zbritur zhurmën.

**Shembulli 6**

Pika në rrafsh është dhënë përmes numrit kompleks  $z = 3 + 2j$  (Kjo nënkupton se koordinatat e pikës së rrafshit janë  $(3,2)$ ). Në këtë pikë zbatohet transformimi  $z' = (1 + j) \cdot z$ . Caktoni vendndodhjen e re të pikës.

**Zgjidhje:**

Vendndodhja e re e pikës do të jetë

$$z' = (1 + j) \cdot z = (1 + j) \cdot (3 + 2j) = 1 + 5j.$$



## Detyra për ushtrime!

- Në rrafshin kompleks, paraqitni numrat kompleksë në vijim:  
 $z_1 = 2 + 4i$ ,  $z_2 = 1 - 5i$ ,  $z_3 = 2 - 6i$  dhe  $z_4 = -i$ .
- Caktoni numrat kompleksë që u përgjigjen dysheve përkatëse të numrave realë  $(2, 1)$ ,  $(-2, 4)$ ,  $(-3, -2)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(2, 0)$ , e më pas të njëjtit paraqiti në rrafshin koordinativ.
- Caktoni rreze-vektorët që u përgjigjen numrave kompleksë  $z_1 = 1 - 5i$ ,  $z_2 = 2 - 4i$ ,  $z_3 = 3 - 5i$  dhe  $z_4 = -2i$  dhe paraqitni në rrafshin koordinativ.
- Një lokacion është paraqitur me numrin kompleks  $z = -2 + 4i$ .
  - Shkruani lokacionin me anë të koordinatave.
  - Pika e dhënë a është në veri ose në jug të origjinës së koordinatave?
  - Pika e dhënë a është në perëndim ose lindje të origjinës së koordinatave?  
 Supozoni se në rrafshin koordinativ majtas është perëndimi, djathtas është lindja, sipër është veriu, kurse poshtë – jugu.
- Vendndodhja e një sateliti në rrafsh është dhënë me  $z = 9 - 6i$ .
  - Caktoni pjesën reale dhe imagjinare.
  - Sateliti gjendet sipër ose nën boshtin horizontal?
  - Sa njësi është larg boshtit  $y$ ?
- Lëvizja e një anijeje të vogël në rrafsh është përshkruar me anë të numrit kompleks  $z_1 = 6 + 2i$ . Për shkak të rrymës ujore, zhvendosja shtesë e saj është  $z_2 = -1 + 3i$ .
  - Caktoni zhvendosjen e përgjithshme të anijes.
  - Në cilin drejtim është më i madh ndikimi: nëpër horizontale ose nëpër vertikale?



## DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Të bëhet më e thjeshtë shprehja:

a)  $x^{-2} \cdot x^{-4} \cdot x^6$ ;      b)  $\left(\frac{3x^2}{4x^4}\right)^3$ ;      c)  $\left(\frac{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}{y^{-2}zx^{-3}}\right)^{-1}$ .

2. Cilat gjykime janë të sakta:

- a) Rrënja katrore e 0 nuk ekziston.  
b) Rrënja katrore e 0 është 0.  
c) Shprehja  $\sqrt{15}$  nuk ka kuptim.  
ç) Shprehja  $\sqrt[3]{-15}$  është e përkufizuar, ka kuptim.  
d)  $\sqrt[3]{-343} = -7$ ?

3. Për cilën vlerë të  $x$ , ka kuptim shprehja

a)  $\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{x}$ ;      b)  $\sqrt{2x-4} + \sqrt{2x^2+4}$ .

4. Llogarit vlerën e shprehjes:

a)  $\sqrt{25} - 3\sqrt[3]{64} + 4\sqrt[3]{-32}$ ;      b)  $9^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}}$ .

5. Kryeni operacionet e dhëna:

a)  $x^2 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 : x^{\frac{1}{4}} \quad x > 0$ ;      b)  $2a^2b^{\frac{1}{2}} : \left(a^{-1}b^{\frac{2}{3}}\right)^2, \quad a \neq 0, b > 0$ .

6. Në formë të rrënjës shkruani fuqitë

a)  $5^{\frac{1}{2}}$ ;      b)  $2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}, \quad x \geq 0$ ;      c)  $2x+3y^{\frac{1}{2}}, \quad y \geq 0$ .

7. Në formë të fuqisë me tregues numër racional shkruani rrënjët:

a)  $\sqrt{21}$ ;      b)  $\sqrt[3]{18}$ ;      c)  $\sqrt[4]{a^2b^4}, \quad a, b \geq 0$ .

8. Sa është diametri i një stuhie me kohëzgjatje prej 18 orësh, nëse meteorologët kanë konstatuar se stuhitë e forta mund të përshkruhen me formulën  $D = 9,4 \cdot t^{\frac{2}{3}}$ , ku  $D$  është diametri i stuhisë, kurse  $t$  është kohëzgjatja e saj?

9. Shndërroni rrënjët në rrënjë me tregues të përbashkët:

a)  $\sqrt[3]{x^2}, \sqrt[4]{xy^2}, \sqrt[5]{xy}, \quad x, y \geq 0$ ;      b)  $\sqrt{a}, \sqrt[4]{a^2b}, \sqrt[5]{a^5b^5}, \quad a, b \geq 0$ .

10. Radhitni sipas madhësisë rrënjët:

a)  $\sqrt{5}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[4]{45}$ ;      b)  $\sqrt[3]{16}, \sqrt[4]{250}, \sqrt[5]{150}$ .

11. Shkruani në formën normale rrënjën:

a)  $\sqrt{250}$ ;      b)  $\sqrt[3]{8a^6b^5}$ ;      c)  $\frac{b}{a^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{2b^4}}, \quad a \geq 0, b > 0$ .

12. Kryeni operacionet e dhëna:

a)  $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{12}) \cdot \sqrt{3}$ ;      b)  $(\sqrt[3]{x^4y^2} - 3\sqrt[3]{x^6y^7}) : \sqrt[3]{x^2y^2}, \quad x, y > 0$ ;  
c)  $(\sqrt[3]{ab^2})^2 \cdot \sqrt[3]{ab}$ ;      ç)  $\sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a^3}}$ ;      d)  $\sqrt{x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}}$ ;      dh)  $\sqrt[3]{b \cdot \sqrt{b^3} \cdot \sqrt[3]{b^2}}$ .

13. Cilat nga shprehjet e dhëna shndërrohen në shprehje racionale:

a)  $a + \sqrt{a}$ ,  $a \geq 0$ ; b)  $\frac{2}{a} + \sqrt{a^4}$ ,  $a > 0$ ; c)  $a - \sqrt[5]{64a^5}$ .

14. Racionalizoni emëruesin e thyesës:

a)  $\frac{23}{6 - \sqrt{5}}$ ; b)  $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ ; c)  $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ,  $a, b > 0$ .

15. Thjeshtoni shprehjen  $\left( \frac{16}{\sqrt{6} + 1} + \frac{3}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}} \right) (\sqrt{6} + 11)$ .

16. Vargu i Fibonaçit mund të llogaritet duke e përdorur formulën e Binetit, ashtu që anëtari i  $n$ -të i vargut

jepet me  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$ . Duke e shfrytëzuar këtë formulë, caktoni katër anëtarët e parë të këtij vargu.

17. Shkruani numrat kompleksë, nëse janë dhënë:

a)  $\operatorname{Re}(z) = 15$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -13$ ; b)  $\operatorname{Re}(z) = -99$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 1$ ; c)  $\operatorname{Re}(z) = 0$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -21$ .

18. Llogaritni shumën dhe ndryshimin e  $z_1$  dhe  $z_2$ , nëse

a)  $z_1 = 14 - 5i$ ,  $z_2 = -12 + 6i$ ; b)  $z_1 = 4 - 9i$ ,  $z_2 = -11 + 9i$ ; c)  $z_1 = 12 - 3i$ ,  $z_2 = -12 + 8i$ .

19. Llogaritni produktin dhe herësin e  $z_1$  dhe  $z_2$ , nëse

a)  $z_1 = 7 - 6i$ ,  $z_2 = -1 + 5i$ ; b)  $z_1 = -1 - 4i$ ,  $z_2 = -10 + 4i$ ; c)  $z_1 = -7 + 3i$ ,  $z_2 = 2 - 5i$ .

20. Llogaritni vlerën e shprehjes:

a)  $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{24}$ ; b)  $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \dots + \frac{1}{i^{24}}$ .

21. Kryeni fuqizimin dhe caktoni moduln e numrit të fituar kompleks:

a)  $(2 + i)^2$ ; b)  $(1 - 4i)^3$ ; c)  $(\sqrt{3} + 3i)^2$ .

22. Thjeshtoni shprehjen:

a)  $\frac{2 - 3i}{6 + 8i} + (2 + i)(4 - i) - (1 - i)^2$ ; b)  $\frac{(1 + 2i)^3 + (3 + 3i) \cdot 5i}{(3 - 4i)^2}$ .

23. Jepet numri kompleks  $z_1 = 1 - 2i$ . Caktoni numrin kompleks  $z = x + yi$ , të tillë që  $\operatorname{Re}(z \cdot z_1) = -4$ , kurse

$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{z_1}\right) = -\frac{7}{5}$ .

24. Kontrolloni saktësinë e barazimit  $(\sqrt{3} - i)^6 + (\sqrt{3} + i)^6 = -128$ .

25. Numrat kompleksë  $z_1 = 3 - 5i$ ,  $z_2 = 1 + 6i$ ,  $z_3 = 4 - 2i$ ,  $z_4 = -3$  dhe  $z_5 = -5i$  paraqitni në rrafshin kompleks me:

- a) pika të rrafshit;  
b) rreze-vektorë

26. Vektori i erës është përshkruar me numrin kompleks  $z = -4 + 5i$ .

- a) Shkruani numrin si dyshe e renditur.  
b) A thua era fryn më shumë në drejtimin e perëndimit ose drejtimin e veriut?  
c) Në cilin kuadrant gjendet pika që i përgjigjet këtij numri kompleks?

27. Gjendja e një sistemi teknik është përshkruar me numrin  $z_0 = 3 - i$ . Pas intervenimit, gjendja e tij ndryshon për  $\Delta z = -2 + 4i$ .

- a) Caktoni gjendjen e re të sistemit.  
b) Cila pjesë e ndryshimit është më e madhe: reale ose imagjinare?

## EKUACIONET KUADRATIKE DHE EKUACIONET QË SHNDËRROHEN NË EKUACIONE KUADRATIKE

Ekuacionet kuadratike (katrore, të fuqisë së dytë) paraqesin një nga llojet më të rëndësishme të ekuacioneve në algjebër dhe janë bazë për hulumtimin e shumë disiplinave matematike, për modelimin dhe zgjidhjen e varshmërive dhe problemeve jolineare. Këto ekuacione, bashkë me ekuacionet të cilët kthehen, shndërrohen, në ekuacione të tilla janë thelbësore për të kuptuarit dhe analizën e varshmërive jolineare që paraqiten në fusha të ndryshme shkencore dhe për modelimin e problemeve të ndryshme reale në shkencat e zbatuara. Hulumtimi i ekuacioneve kuadratike dhe i metodave për zgjidhjen e tyre është i rëndësishëm sepse këto shfaqen në shumë probleme reale matematike dhe mundësojnë modelimin e fenomeneve të ndryshme.

Ekuacionet kuadratike gjejnë zbatim në shumë disiplina të ndryshme shkencore. Në fizikë përdoren për llogaritjen e trajektoreve të predhave, në ekonomi për optimizimin e harxhimeve dhe fitimeve, në biologji për modelimin e shtimit të popullatave, kurse në inxhinieri për analizën e ngarkesës së konstruksioneve ku shfaqen deformimet jolineare.

### 2.1 KONCEPTI I EKUACIONIT KUADRATIK. LLOJET E EKUACIONEVE KUADRATIKE. ZGJIDHJA E EKUACIONIT KUADRATIK

#### Rikujtoni!

- Ekuacioni i trajtës  $ax + b = 0$  është ekuacion linear me një të panjohur, ndryshore. Për shembull,  $3x - 1 = 0$ ,  $5 - 2y = 0$ ,  $4x = 6$ , janë ekuacione lineare me një të panjohur.
- Shuma e dy ose më shumë monomeve quhet polinom.
- Fuqia e polinomit është fuqia maksimale e monomeve që futen në shënimin e tij me koeficient të ndryshëm nga zero.

#### Aktivitet

Cilët prej polinomeve  $7x + x^2 - 2x^3 - 1$ ,  $5x^2 - 2x - 1$ ,  $-3x + 2$ ,  $4x^4 - x^2$ ,  $-3x^2 + 2$ ,  $x^2 - x$  janë polinome të fuqisë së dytë?



**Mbani mend!**

- Ekuacioni i trajtës  $ax^2 + bx + c = 0$ , ku  $x$  është ndryshore,  $a, b, c$  janë numra realë dhe  $a \neq 0$  quhet *ekuacion kuadratik* (ose i fuqisë së dytë) *me një të panjohur*.
- Monomi  $ax^2$  është *anëtar i kuadratik*,  $bx$  *anëtar i linear*, kurse  $c$  *anëtar i lirë* i ekuacionit kuadratik.
- Numri  $a$  është koeficienti i anëtarit kuadratik,  $b$  koeficienti i anëtarit linear, kurse  $c$  është koeficienti i lirë.

Për shembull, ekuacione kuadratike janë ekuacionet  $x^2 = 5$ ,  $x^2 - 16 = 0$ ,  $x^2 - 2x + 1 = 0$ ,  $2 = x^2 + 3x$ .

Formula të caktuara në fizikë janë ekuacione kuadratike. Për shembull rruga e kaluar gjatë lëvizjes drejtvizore njëtrajtësisht të nxituar, shprehet me ekuacionin kuadratik me të panjohur kohën  $t$ :

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Ekuacioni  $5x^2 - 2x - 1 = 0$  është ekuacion kuadratik me koeficientë  $a = 5$ ,  $b = -2$  dhe  $c = -1$ .

**Shembulli 1**

Ekuacioni  $(x - 1)^2 = 3x - 2$  është ekuacion kuadratik. Për të caktuar koeficientët e tij, me operacionet në vijim e sjellim ekuacionin e dhënë në formën  $ax^2 + bx + c = 0$ .

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 &= 3x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 &= 3x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 - 3x + 2 &= 0 \\ x^2 - 5x + 3 &= 0\end{aligned}$$

Pra,  $a = 1$ ,  $b = -5$  dhe  $c = 3$ .

**Detyra 1**

Cilat ekuacione janë kuadratike? Për ekuacionet që janë kuadratike, caktoni koeficientët përkatës.

- a)  $x^2 - 1 = 0$ ;    b)  $2x + 3 = 0$ ;    c)  $5x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ ;    ç)  $(2x + 1)^2 + 1 = 0$ ;    d)  $(2x + 2)^2 = (x + 3)^2$ .

**Mbani mend!**

- Ekuacioni i formës  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  quhet *formë e përgjithshme e ekuacionit kuadratik me një të panjohur*.
- Kushti  $a \neq 0$  medoemos duhet të plotësohet sepse, nëse  $a = 0$ , atëherë ekuacioni nuk është kuadratik.

**Detyra 2**

Shndërroni në formën e përgjithshme ekuacionet:

- a)  $2x(x - 1) = x - 3$ ;    b)  $\frac{x-3}{2} + \frac{x(x-3)}{3} = 1$ ;    c)  $(3 - 2x)^2 - 5 = (2 - x)^2$ .



**Mbani mend!**

- Nëse në ekuacionin kuadratik  $a = 1$ , atëherë themi se është në formën normale dhe zakonisht e shkruajmë si  $x^2 + px + q = 0$ .
- Secilin ekuacion kuadratik mund ta shndërrojmë në formën normale, fillimisht duke e shndërruar në formën e përgjithshme, e më pas gjithë ekuacionin duke e pjesëtuar me koeficientin  $a$ .

**Shembulli 2**

Ekuacioni  $-2x^2 - 5x + 4 = 0$  shndërrohet në ekuacion kuadratik në formë normale nëse e pjesëtojmë me koeficientin  $a = -2$ :

$$-2x^2 - 5x + 4 = 0 : (-2)$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - 2 = 0 \text{ ose } x^2 + 2,5x - 2 = 0$$

Këtu,  $p = \frac{5}{2} = 2,5$ ,  $q = -2$ .

**Detyra 3**

Shkruani në formën normale ekuacionet e dhëna:

- a)  $4x^2 - 8x + 3 = 0$ ;                      b)  $(3 - 2x)^2 - 5 = x$ ;  
c)  $-2x(x + 3) + (x - 3)(x + 1) = 6$ ;                      ç)  $(3x - 2)^2 = (x + 3)^2$ .

**Mbani mend!**

- Nëse  $b \neq 0$  dhe  $c \neq 0$  (bashkë me  $a \neq 0$  si kusht i domosdoshëm), atëherë ekuacioni  $ax^2 + bx + c = 0$  quhet **ekuacion kuadratik i plotë**. Domethënë, ekuacioni është ekuacion kuadratik i plotë nëse në formën e tij të përgjithshme gjithë koeficientët janë të ndryshëm nga zero.
- Ekuacionet e formës  $ax^2 + bx = 0$ ,  $b \neq 0$ ;  $ax^2 + c = 0$ ,  $c \neq 0$  dhe  $ax^2 = 0$  quhen **ekuacione kuadratike jo të plota**.
- Nëse njëri nga koeficientët  $a$ ,  $b$  ose  $c$  të ekuacionit  $ax^2 + bx + c = 0$  varet nga ndonjë parametër, atëherë ai ekuacion quhet ekuacion kuadratik parametrik (ekuacion kuadratik me parametra ose me koeficientë të përgjithshëm). Parametri është konstanta, vlera e së cilës varet nga kushti i parashtruar i detyrës.

**Shembulli 3**

Caktoni koeficientët e ekuacionit parametrik  $(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 5 = 0$ .

**Zgjidhje:**

Ekuacioni  $(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 5 = 0$  është ekuacion kuadratik parametrik në të cilin koeficientët varen nga parametri  $m$ . Koeficientët e tij janë:  $a = m - 1$ ,  $b = -2(m + 2)$  dhe  $c = m - 5$ .

**Shembulli 4**

Për cilat vlera të parametrut  $m$  ekuacioni  $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$  është:

- ekuacion kuadratik i plotë,
- ekuacion kuadratik jo i plotë?

**Zgjidhje:**

Koeficientët e ekuacionit janë  $a = 2m - 1$ ,  $b = -3(m + 2)$  dhe  $c = 5$ .

- Që ekuacioni  $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$  të jetë ekuacion kuadratik, duhet me patjetër të vlejë  $a \neq 0$ .

Nga ky kusht fitojmë  $2m - 1 \neq 0$ , përkatësisht  $m \neq \frac{1}{2}$ .

Më tej, që të jetë ekuacion kuadratik i plotë, duhet që koeficienti linear  $b$  dhe ai i lirë  $c$ , të jenë të ndryshëm nga zero. Koeficienti i lirë është  $c = 5 \neq 0$ .

Nga kushti  $b \neq 0$  kemi:

$$-3(m + 2) \neq 0$$

$$m + 2 \neq 0$$

$$m \neq -2$$

Pra, ekuacioni  $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$  do të jetë ekuacion kuadratik i plotë për gjitha vlerat e  $m$  të ndryshme nga  $\frac{1}{2}$  dhe të ndryshme nga  $-2$ .

- Meqenëse në këtë ekuacion koeficienti i lirë është i ndryshëm nga zero, ekuacioni do të jetë ekuacion kuadratik jo i plotë vetëm nëse koeficienti linear  $b$  është zero, d.m.th.

$$-3(m + 2) = 0,$$

$$m + 2 = 0$$

$$m = -2$$

Pra, ekuacioni  $(2m - 1)x^2 - 3(m + 2)x + 5 = 0$  do të jetë ekuacion kuadratik jo i plotë për  $m = -2$ .

**Detyra 4**

Për cilat vlera të parametrut  $k$  ekuacioni  $(k + 2)x^2 - 3x - k + 1 = 0$  do të jetë:

- ekuacion kuadratik i plotë,
- ekuacion kuadratik jo i plotë?

## Zgjidhja e ekuacionit kuadratik

### Rikujtoni!

- Për  $x = 2$ , ekuacioni  $3x - 6 = 0$  kalon në barazim numerik të vërtetë.
- $\sqrt{x^2} = |x|$ .
- Zbërthimi i polinomeve në shumëzues (faktorizimi i polinomeve):  

$$4x^2 + 2x = 2x(2x + 1)$$

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$
- Rrënja me tregues numër çift e një numri negativ është numër kompleks. Për shembull,  
 $\sqrt{-9} = 3i$ ;  $\sqrt[4]{-16} = 2i$

### Aktivitet

Për cilat vlera të  $x \in \{-2, -1, 0, 1, 3\}$  ekuacioni  $x^2 - x - 6 = 0$  do të kalojë në barazim numerik të vërtetë?

### Mbani mend!

Vlera e ndryshores, të panjohurës, për të cilën ekuacioni kuadratik kalon në barazim numerik të vërtetë quhet **zgjidhje** ose **rrënjë** e ekuacionit.

### Shembulli 5

Kontrolloni nëse  $x = 4$  është zgjidhje e ekuacionit  $2x^2 - 6x - 8 = 0$ .

**Zgjidhje:**

Që të tregojmë nëse  $x = 4$  është zgjidhje e ekuacionit  $2x^2 - 6x - 8 = 0$  do ta zëvendësojmë këtë vlerë në ekuacionin e dhënë. Kemi,

$$2 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 8 = 0$$

$$2 \cdot 16 - 24 - 8 = 0$$

$$32 - 32 = 0$$

$$0 = 0$$

Vërejmë se me zëvendësimin  $x = 4$ , ekuacioni bëhet barazim numerik i vërtetë. Prandaj,  $x = 4$  është një zgjidhje e ekuacionit  $2x^2 - 6x - 8 = 0$ .

### Shembulli 6

Për cilën vlerë të parametrin  $k$  numri 2 do të jetë zgjidhje e ekuacionit  $(k + 2)x^2 - 3x - k + 1 = 0$ ?



### Zgjidhje:

Nëse në ekuacionin e dhënë në vend të  $x$  marrim 2, fitojmë

$$2^2 \cdot (k+2) - 3 \cdot 2 - k + 1 = 0$$

$$4(k+2) - 6 - k + 1 = 0$$

$$3k + 3 = 0$$

$$k = -1$$

Pra, për  $k = -1$  fitojmë ekuacionin  $x^2 - 3x + 2 = 0$  dhe  $x = 2$  është një zgjidhje e këtij ekuacioni.

### Detyra 5

Jepet ekuacioni  $(2m-1)y^2 - 3(m+2)y + 5 = 0$ ,  $m \neq \frac{1}{2}$ . Caktoni vlerën e parametrin  $m$ , ashtu që  $y = 1$  të jetë zgjidhje e këtij ekuacioni.

### Detyra për ushtrime!

1. Cilat nga ekuacionet e dhëna janë kuadratike?

a)  $7x^2 - 3 = 3x$ ;      b)  $0 \cdot x^2 + 2x - 3 = 0$ ;      c)  $(x^2 + 5)^2 - 1 = 0$ ;      ç)  $\frac{1}{2}x^2 = 0$ .

2. Caktoni koeficientët  $a$ ,  $b$  dhe  $c$  të ekuacioneve në vijim:

a)  $8x^2 - 3x + 9 = 0$ ;      b)  $-9x = 8x^2$ ;      c)  $\sqrt{3}x^2 - 5 = 8x$ .

3. Shndërroni në formën e përgjithshme ekuacionet në vijim:

a)  $2(x+5)(x-2) = 3$ ;      b)  $(4x+3)(2x-1) = (x+1)(x+3)$ ;

c)  $\frac{3x-4}{2} + \frac{(x-1)(x+2)}{3} = 1$ ;      ç)  $(2x-1)(x+3) = \frac{x-2}{4}$ .

4. Shkruani në formën normale ekuacionet:

a)  $-2x^2 - 4x + 16 = 0$ ;      b)  $3x^2 = 9x$ ;  
c)  $3(x+2)^2 - 24 = 0$ ;      ç)  $\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3 = 0$ .

5. Cilat nga ekuacionet e mëposhtme kuadratike janë të plota, e cilat janë jo të plota?

a)  $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$ ;      b)  $(x+5)(x+2) = 10$ ;      c)  $\sqrt{2}x^2 = 8x$ .

6. Për cilat vlera të parametrin  $m$  ekuacioni i dhënë do të jetë kuadratik?

a)  $(3m-1)x + (2m+1)x^2 = 5m$ ;      b)  $(m+1)x^2 + (2m+3) = 0$   
c)  $(m-3)x^2 + (m-3)x + (m-3) = 0$ .

7. Për cilat vlera të parametrin  $k$  ekuacioni  $(k-3)t^2 - (2k+1)t = 2k-1$  do të jetë:

- a) ekuacion kuadratik;  
b) ekuacion kuadratik i plotë;  
c) ekuacion kuadratik jo i plotë i formës  $at^2 + c = 0$ ;  
ç) ekuacion kuadratik jo i plotë i formës  $at^2 + bt = 0$ .

8. Jepet ekuacioni  $2x^2 - 4x + 1 = 0$ . Kontrolloni nëse ndonjëri nga numrat  $0$ ,  $1$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  është zgjidhje e ekuacionit.

9. Për cilën vlerë të parametrin  $k$  ekuacioni  $(k+2)y^2 + (2k-3)y - 5 = 0$  ka zgjidhje:

a)  $y = -1$       b)  $y = \frac{1}{2}$ ?



## 2.2 ZGJIDHJA E EKUACIONEVE KUADRATIKE JO TË PLOTA

### Mbani mend!

- Të zgjidhet një ekuacion nënkupton të gjenden gjitha zgjidhjet (rrënjët) e tij.
- Prodhimi i dy ose më shumë numrave është zero nëse dhe vetëm nëse të paktën njëri prej shumëzuesve është i barabartë me zero.

### Aktivitet

Të zgjidhet ekuacioni  $(3x + 6)(x - 1) = 0$ .

Ekuacioni i dhënë është prodhim i  $3x + 6$  dhe  $x - 1$ . Prandaj, për gjetjen e zgjidhjeve të këtij ekuacioni do të shfrytëzojmë faktin se prodhimi i dy ose më shumë shumëzuesve është i barabartë me zero nëse të paktën njëri prej shumëzuesve është i barabartë me zero. Sipas kësaj, ky ekuacion do të shndërrohet në barazim numerik të vërtetë nëse  $3x + 6 = 0$  ose  $x - 1 = 0$ , përkatësisht nëse  $x = -2$  ose  $x = 1$ . Pra, zgjidhjet (rrënjët) e ekuacionit janë  $x_1 = -2$  dhe  $x_2 = 1$ .

### Detyra 1

Caktoni zgjidhjet e ekuacioneve në vijim:

- a)  $(x + 2)(3x - 5) = 0$ ;                      b)  $2(6x - 3)(2x - 5) = 0$ ;  
c)  $(x + 3)(2x - 1)(5x - 8) = 0$ ;            ç)  $(x + 3)(x - 3)(2x - 5)(4x - 10) = 0$ .

### Shembulli 1

Zgjidhni ekuacionin kuadratik jo të plotë:

- a)  $ax^2 + bx = 0$ ;                      b)  $ax^2 = 0$ .

**Zgjidhje:**

- a) Ekuacionin  $ax^2 + bx = 0$  mund ta shkruajmë si  $x(ax + b) = 0$  dhe, qartazi, zgjidhjet e këtij ekuacioni janë  $x_1 = 0$  dhe  $x_2 = -\frac{b}{a}$ .
- b) Ekuacionin  $ax^2 = 0$  do të kalojë në barazim numerik të vërtetë nëse  $x^2 = 0$ , d.m.th. për këtë ekuacion zgjidhjet janë  $x_1 = x_2 = 0$ .

### Mbani mend!

Nëse ekuacioni kuadratik bëhet barazim numerik i vërtetë vetëm për një vlerë të ndryshores  $x$ , për shembull  $x = d$ , d.m.th.  $x_1 = x_2 = d$ , atëherë themi se  $x_1 = x_2 = d$  është **rrënjë e dyfishtë** e ekuacionit kuadratik.

**Shembulli 2**

Zgjidhni ekuacionet:

a)  $3x^2 + 8x = 0$ ;

b)  $(2x - 1)^2 = 1$ ;

c)  $(x - 2)(2x - 3) = 6$ .

Zgjidhje:

a)  $3x^2 + 8x = 0$

$x(3x + 8) = 0$

$x = 0$  ose  $3x + 8 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = -\frac{8}{3}$

b)  $4x^2 - 4x + 1 = 1$

$x(4x - 4) = 0$

$x = 0$  ose  $4x - 4 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 1$

c)  $2x^2 - 3x - 4x + 6 = 6$

$x(2x - 7) = 0$

$x = 0$  ose  $2x - 7 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{2}$

**Mbani mend!**

- Zgjidhje të ekuacionit  $ax^2 + bx = 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  janë  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{b}{a}$ .
- Zgjidhje të ekuacionit  $ax^2 = 0$ ,  $a \neq 0$  janë  $x_1 = x_2 = 0$ .

**Detyra 2**

Të zgjidhen ekuacionet në vijim:

a)  $(x + 3)(x - 5) = -15$ ;

b)  $(x - 1)(3x + 2) = x - 2$ ;

c)  $\frac{x(x-2)}{2} - \frac{1-4x}{3} = \frac{x-1}{3}$ .

**Shembulli 3**Zgjidhni ekuacionin kuadratik jo të plotë  $ax^2 + c = 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $c \neq 0$ .

Zgjidhje:

Ekuacionin  $ax^2 + c = 0$  mund ta shkruajmë si  $ax^2 = -c$ , përkatësisht si  $x^2 = -\frac{c}{a}$ ,  $\left(|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)$ . Tani për rrënjët e ekuacionit kemi dy raste:

1. Nëse  $-\frac{c}{a} > 0$  ( $a$  dhe  $c$  janë me shenja të ndryshme), atëherë ekuacioni ka dy rrënjë të ndryshme

që janë dy numra realë të kundërt:  $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ ,  $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ , d.m.th.  $x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ .

2. Nëse  $-\frac{c}{a} < 0$  ( $a$  dhe  $c$  janë me shenja të njëjta), atëherë zgjidhjet e ekuacionit nuk janë numra

realë, d.m.th. zgjidhjet e ekuacionit janë numrat kompleksë  $x_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}}$ .

**Mbani mend!**

Zgjidhjet, rrënjët, e ekuacionit kuadratik jo të plotë  $ax^2 + c = 0$ ,  $a \neq 0$  janë:

1. Nëse  $-\frac{c}{a} > 0$  ( $a$  dhe  $c$  janë me shenja të ndryshme), atëherë

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad \text{d.m.th.} \quad x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

2. Nëse  $-\frac{c}{a} < 0$  ( $a$  dhe  $c$  janë me shenja të njëjta), atëherë

$$x_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

**Shembulli 4**

Zgjidhni ekuacionet:

a)  $6x^2 - 30 = 0;$

b)  $3x^2 + 12 = 0;$

c)  $(x+3)^2 - 3 - 5x = x.$

**Zgjidhje:**

a)  $6x^2 - 30 = 0$

$$6x^2 = 30$$

$$x^2 = 5$$

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_2 = -\sqrt{5}$$

b)  $3x^2 + 12 = 0$

$$3x^2 = -12$$

$$x^2 = -4$$

$$x_1 = 2i, \quad x_2 = -2i$$

c)  $(x+3)^2 - 3 - 5x = x$

$$x^2 + 6x + 9 - 3 - 5x = x$$

$$x^2 = -6$$

$$x_1 = \sqrt{6}i, \quad x_2 = -\sqrt{6}i.$$

**Detyra 3**

Caktoni zgjidhjet e ekuacioneve:

a)  $2x^2 - 18 = 0;$

b)  $(x+2)(x-1) = x;$

c)  $(2x-1)^2 = 2 - 4x.$

**Shembulli 5**

Për cilat vlera të parametrin  $m$  ekuacioni  $(3m-6)x^2 + m + 4 = 0$  do të ketë rrënjë reale?

**Zgjidhje:**

$$(3m-6)x^2 + m + 4 = 0$$

$$(3m-6)x^2 = -m-4$$

$$x^2 = \frac{-m-4}{3m-6}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{-m-4}{3m-6}}$$

Që të ketë rrënjë reale, duhet të vlejë  $\frac{-m-4}{3m-6} \geq 0$ , përkatësisht  $3m-6$  dhe  $-m-4$  duhet të jenë me shenja të njëjta. Nga këtu fitojmë sistemet në vijim të inekuacioneve lineare për caktimin e vlerave të  $m$ :

$$\begin{cases} -m-4 \geq 0 \\ 3m-6 > 0 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} -m-4 \leq 0 \\ 3m-6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m > 2 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} m \geq -4 \\ m < 2 \end{cases}.$$

Sistemi i parë nuk ka zgjidhje, kurse nga sistemi i dytë fitojmë intervalin  $[-4, 2)$ . Pra, ekuacioni i dhënë do të ketë rrënjë reale nëse  $m \in [-4, 2)$ .

#### Detyra 4

Për cilat vlera të parametrut  $k$  ekuacioni  $(2k-4)x^2 - k + 6 = 0$  do të ketë rrënjë komplekse?

#### Detyra për ushtrime!

Caktoni rrënjët (zgjidhjet) e ekuacioneve (1-7):

1. a)  $(2x+5)(4-3x)=0$ ;                      b)  $\left(2-\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{5}{4}x-1\right)=0$ .
2. a)  $x(x+4)=x(2x-5)$ ;                      b)  $(x-2)^2-4=0$ .
3. a)  $8x^2+3x=0$ ;                                b)  $9x^2-\frac{5}{2}x=0$ .
4. a)  $(3-\sqrt{3})x^2=0$ ;                            b)  $-\frac{5\sqrt{5}}{2}x^2=0$ .
5. a)  $3x^2-27=0$ ;                                b)  $\frac{1}{3}x^2=\frac{3}{4}$ .
6. a)  $36+x^2=0$ ;                                b)  $-\frac{5}{2}x^2-4=0$ .
7. a)  $x(x-3)-x+16=-2x(2-x)$ ;            b)  $\frac{3x^2-5x}{2}-\frac{2(x^2-3)}{3}=\frac{5x^2+8}{4}$ .
8. Për cilat vlera të parametrut  $k$  ekuacioni  $(k+1)x^2+k-3=0$  do të ketë rrënjë reale?



## 2.3 ZGJIDHJA E EKUACIONEVE KUADRATIKE TË PLOTË

### Aktivitet

Zbërtheni në shumëzues polinomet:

a)  $x^2 + x - 12$ ;                      b)  $x^2 - 6x + 8$ .

**Zgjidhje:**

a)  $x^2 + x - 12 = x^2 + 4x - 3x - 12 = x(x + 4) - 3(x + 4) = (x + 4)(x - 3)$ .

b) Ekuacionin fillimisht e plotësojmë me katror të plotë me shtimin dhe zbritjen e 9, me çka fitojmë  
 $x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1 = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x - 4)(x - 2)$ .

### Shembulli 1

Zgjidhni ekuacionin  $x^2 + 5x + 6 = 0$  në dy mënyra:

- a) duke e zbërthyer në shumëzues;                      b) duke e plotësuar me katror të plotë.

**Zgjidhje:**

a)  $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) + 2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$ .

Prodhiimi  $(x + 3)(x + 2)$  do të jetë i barabartë me zero nëse  $x + 3 = 0$  ose  $x + 2 = 0$ . Pra, rrënjët e ekuacionit janë  $x_1 = -3$  dhe  $x_2 = -2$ .

- b) Anëtarin (termin) linear  $5x$  mund ta shkruajmë si  $2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x$  dhe mund ta plotësojmë me katror të

plotë me shtimin dhe zbritjen e  $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ .

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0.$$

Ngjashëm si në detyrën a) përfundojmë se rrënjët janë  $x_1 = -3$  dhe  $x_2 = -2$ .

### Detyra 1

Zgjidhni ekuacionet:

- 1) duke e zbërthyer në shumëzues;

- 2) duke e plotësuar me katror të plotë

a)  $x^2 - 8x = 0$ ;

b)  $x^2 + 7x = 0$ ;

c)  $x^2 - ax = 0$ ;

ç)  $x^2 + \frac{b}{a}x = 0, a \neq 0$ .

Që të caktojmë rrënjët e ekuacionit kuadratik të plotë  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , në fillim ekuacionin e pjesëtojmë me  $a$  çka na jep  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ , përkatësisht  $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ . Tani, që shprehjen në anën e majtë të ekuacionit ta plotësojmë me katror të plotë, në dy anët e ekuacionit shtojmë  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ . Kështu fitojmë ekuacionin  $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ , d.m.th.  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ . Duke marrë rrënjën në dy anët e ekuacionit fitojmë  $\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ , përkatësisht  $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ . Pra, rrënjët e ekuacionit  $ax^2 + bx + c = 0$  janë  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , që bashkërisht mund t'i shkruajmë me formulën  $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

### Mbani mend!

Rrënjët e ekuacionit  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  i gjejmë me formulën  $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

### Shembulli 2

Zgjidhni ekuacionet kuadratike:

a)  $x^2 - 2x - 8 = 0$ ;      b)  $2x^2 = 4x + 1$ .

**Zgjidhje:**

a) Vlerat e koeficientëve  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = -8$  i zëvendësojmë në formulën

$$x_{1/2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2},$$

d.m.th.  $x_1 = 4$  dhe  $x_2 = -2$ .

b) Fillimisht ekuacionin e shkruajmë në formën e përgjithshme,  $2x^2 - 4x - 1 = 0$ , e më pas vlerat e koeficientëve  $a = 2$ ,  $b = -4$ ,  $c = -1$  i zëvendësojmë në formulën për rrënjët e ekuacionit kuadratik me çka fitojmë

$$x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 6}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

Rrënjët e ekuacionit janë  $x_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$  dhe  $x_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$ .

**Mbani mend!**

Formula për zgjidhjen e ekuacioneve kuadratike të plota mund të përdoret edhe për zgjidhjen e ekuacioneve kuadratike jo të plota.

**Shembulli 3**

Duke përdorur formulën për zgjidhjen e ekuacionit kuadratik, zgjidhni ekuacionet:

a)  $9x^2 = 0$ ;      b)  $3x^2 - 12x = 0$ ;      c)  $5x^2 - 10 = 0$ .

**Zgjidhje:**

a)  $a = 9, b = 0$ , prandaj  $x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0+0}}{2 \cdot 9} = 0$ , d.m.th.  $x_1 = x_2 = 0$ .

b)  $a = 3, b = -12, c = 0$ ,  $x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-0}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm 12}{6}$ ,  $x_1 = \frac{12+12}{6} = 4$ ,  $x_2 = \frac{12-12}{6} = 0$ .

c)  $a = 5, b = 0, c = -10$ ,  $x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0+200}}{2 \cdot 5} = \frac{\pm \sqrt{2 \cdot 100}}{10} = \frac{\pm 10\sqrt{2}}{10} = \pm \sqrt{2}$ ,  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_2 = -\sqrt{2}$ .

Vëreni se me zbatimin e formulës kemi:

- Nëse  $b = c = 0$ , atëherë rrënjët e ekuacionit kuadratik jo të plotë  $ax^2 = 0$  janë  $x_1 = x_2 = 0$ .
- Nëse  $b = 0$ , atëherë rrënjët e ekuacionit kuadratik jo të plotë  $ax^2 + c = 0$  janë  $x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ .
- Nëse  $c = 0$ , atëherë rrënjët e ekuacionit kuadratik jo të plotë  $ax^2 + bx = 0$  janë  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{b}{a}$ .

**Detyra 2**

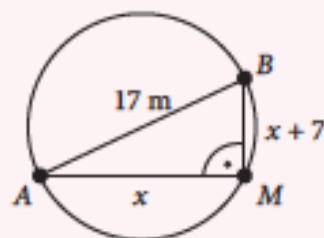
Caktoni rrënjët e ekuacionit:

a)  $4x^2 - 4x - 24 = 0$ ;      b)  $5x^2 + 2x - 1 = 0$ .

**Shembulli 4**

Në një park rrethor me diametër 17 metra ka dy porta A dhe B që gjenden përballë njëra – tjetrës (në skajet e kundërta të diametrit). Në teshun e parkut duhet të vendoset një shtyllë ashtu që ndryshimi i largësive të portës nga dy shtyllat A dhe B, përkatësisht, të jetë 7 metra.

- A mund të vendoset një shtyllë e tillë?
- Nëse mundet, atëherë në cilën largësi nga porta A dhe në cilën largësi nga porta B do të vendoset shtylla?





**Zgjidhje:**

Që ta lehtësojmë zgjidhjen e detyrës do të bëjmë një skicë. Le të jetë  $AB$  diametri i parkut rrethor në skajet e kundërta të të cilit janë dy portat. Me  $M$  le ta shënojmë pozicionin e shtyllës. Largësinë  $AM$  le ta shënojmë me  $x$ .

Ndryshimi i largësive të shtyllës nga portat përkatëse  $A$  dhe  $B$  është 7 metra, prandaj kemi:  $\overline{AM} - \overline{BM} = 7$  m prej ku fitojmë se  $\overline{BM} = x + 7$ .

Trekëndëshi  $AMB$  është trekëndësh i vendosur në gjysmë vijën rrethore (njëra brinjë e tij është diametri i vijës rrethore, kurse kulmi përballë shtrihet në vijën rrethore). Sipas teoremës së Talesit, ky trekëndësh është kënddrejtë. Duke e përdorur tani teoremën e Pitagorës, fitojmë

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 17^2$$

$$x^2 + (x+7)^2 = 289$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 - 289 = 0$$

$$2x^2 + 14x - 240 = 0 : 2$$

$$x^2 + 7x - 120 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-120)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-7 \pm 23}{2}$$

$$x_1 = \frac{-7+23}{2} = 8, x_2 = \frac{-7-23}{2} = -15$$

Fitojmë zgjidhjet 8 dhe -15.

Meqenëse zgjidhja e ekuacionit duhet të jep largësinë mes dy pikave, ajo nuk mund të jetë numër negativ, prandaj numri -15 nuk mund të jetë zgjidhje.

Zgjidhja e kërkuar është 8.

Prandaj, shtylla do të vendoset në largësi 8 metra nga porta  $A$  dhe  $8 + 7 = 15$  metra nga porta  $B$ .



## Diskriminanta e ekuacionit kuadratik

### Aktivitet

Caktoni vlerën e shprehjes  $b^2 - 4ac$ , nëse  $a$ ,  $b$  dhe  $c$  janë koeficientët të ekuacionit  $x^2 - 4x + 3 = 0$ .

Më sipër pamë se rrënjët e ekuacionit kuadratik  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$ ) i caktuam me formulën

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

### Mbani mend!

Shprehjen nën rrënjë  $b^2 - 4ac$  e shënojmë me  $D$ , d.m.th.  $D = b^2 - 4ac$  dhe e quajmë **diskriminantë** (dallor) të ekuacionit kuadratik.

Duke përdorur shenjë për diskriminantën, formula për caktimin e rrënjëve mund të shkruhet edhe si

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

1. Nëse koeficientët  $a$ ,  $b$ ,  $c$  të ekuacionit kuadratik janë numra realë, atëherë për caktimin e rrënjëve

përdoret formula  $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

2. Nëse ndonjëri nga koeficientët  $a$ ,  $b$  ose  $c$  është parametër ose shprehje, atëherë është më e thjeshtë që

fillimisht të caktohet diskriminanta  $D = b^2 - 4ac$ , e më pas të përdoret formula  $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ .

### Shembulli 7

Ekuacionin  $x^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{3})x + \sqrt{21} = 0$  do ta zgjidhim ashtu që fillimisht do ta caktojmë diskriminantën

$$D = (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{21} = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7 \cdot 3} + (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{21} = (\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{21} + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2.$$

Pastaj, diskriminantën e fituar e zëvendësojmë në formulën  $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$  dhe për rrënjët e ekuacionit

$$\text{fitojmë } x_{1/2} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} \pm (\sqrt{7} - \sqrt{3})}{2}, \text{ përkatësisht } x_1 = \sqrt{7}, x_2 = \sqrt{3}.$$

**Detyra 3**

Zgjidhni ekuacionet:

a)  $x^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{5})x + \sqrt{35} = 0;$

b)  $x^2 + 2x - 7 = 2x - 1.$

**Detyra për ushtrime!**

1. Në ekuacionin  $3x^2 + 5x + m - 4 = 0$  caktoni parametrin  $m$  nëse  $x = 0$  është një rrënjë e tij. Për vlerën e fituar të parametrin  $m$  caktoni edhe rrënjën tjetër të ekuacionit.

Gjeni rrënjët e ekuacioneve (2 - 7):

2. a)  $4x^2 - 4x - 24 = 0;$

b)  $5x^2 + 2x - 1 = 0.$

3. a)  $3(2 - y) + y(y + 3) = 5y;$

b)  $6t^2 - 7t + 2 = 0.$

4. a)  $5x^2 + 2x = 0;$

b)  $6x^2 - 25 = 0;$

c)  $16x^2 + 1 = 0.$

5. a)  $1 + \frac{x-3}{2} = \frac{x(x-2)}{4};$

b)  $\frac{x(x+4)}{2} - \frac{7x}{4} = 3 - \frac{5x-4}{6}.$

6. a)  $x^2 - (\sqrt{6} + \sqrt{3})x + \sqrt{18} = 0;$

b)  $x^2 - 4\sqrt{3}x - 1 = 0.$

7. a)  $x^2 - 5kx + 6k^2 = 0;$

b)  $mx^2 - (m+1)x = 1.$

8. Për cilat vlera të  $x$  trinomi  $2x^2 + x - 8$  është i barabartë me binomin  $7x + 1$ ?

9. Produkti i dy numrave të njëpasnjëshëm, çift, natyrorë është 224. Cilët janë ata numra?

10. Gjatësia e një drejtkëndëshi është për 6 cm më e madhe se gjerësia e tij. Caktoni brinjët e këtij drejtkëndëshi nëse syprina e tij është  $112 \text{ cm}^2$ .

## 2.4 DISKUTIMI I RRËNJËVE TË EKUACIONIT KUADRATIK

### Diskriminanta e ekuacionit kuadratik

#### Rikujtoni!

Shprehja nën rrënjë  $b^2 - 4ac$  në formulën  $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  shënohet me  $D$ , d.m.th.  $D = b^2 - 4ac$  dhe e quajmë **diskriminantë** e ekuacionit kuadratik.

#### Shembulli 1

Caktoni diskriminantën, e më pas edhe rrënjët, për ekuacionet e mëposhtme:

- a)  $x^2 + 2x - 15 = 0$ ;
- b)  $x^2 + 2x + 1 = 0$ ;
- c)  $x^2 + 2x + 5 = 0$ .

**Zgjidhje:**

$$\text{a) } D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0, \quad x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}, \quad x_1 = 3, x_2 = -5.$$

Domethënë,  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  dhe  $x_1 \neq x_2$ .

$$\text{b) } D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0, \quad x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}, \quad x_1 = -1, x_2 = -1.$$

Domethënë,  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  dhe  $x_1 = x_2$ .

$$\text{c) } D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0. \text{ Ekuacioni nuk ka rrënjë reale.}$$

#### Mbani mend!

- Nëse  $D > 0$ , atëherë rrënjët e ekuacionit kuadratik janë reale dhe të ndryshme.
- Nëse  $D = 0$ , atëherë rrënjët e ekuacionit kuadratik janë reale të barabarta, d.m.th. ekuacioni ka rrënjë të dyfishtë.  
Dy rastet e mësipërme nënkuptojnë se nëse  $D \geq 0$ , atëherë rrënjët e ekuacionit kuadratik janë numra realë.
- Nëse  $D < 0$ , atëherë ekuacioni kuadratik nuk ka rrënjë reale.

**Shembulli 2**

Pa i zgjidhur, caktoni natyrën e rrënjëve të ekuacioneve:

a)  $-2x^2 + x + 10 = 0$ ;      b)  $-x^2 + 3x - 10 = 0$ ;      c)  $4x^2 + 12x + 9 = 0$ .

**Zgjidhje:**

- a)  $D = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 10 = 81 > 0$ . Domethënë, ekuacioni ka dy rrënjë reale të ndryshme.  
 b)  $D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10) = -31 < 0$ . Domethënë, ekuacioni nuk ka rrënjë reale.  
 c)  $D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$ . Domethënë, ekuacioni ka dy rrënjë reale të barabarta.

**Detyra 1**

Pa i zgjidhur, caktoni natyrën e rrënjëve të ekuacioneve të mëposhtme:

a)  $x^2 - 5x + 7 = 0$ ;      b)  $-x^2 + x + 4 = 0$ .

Nëse kemi një ekuacion kuadratik parametrik, atëherë përmes diskriminantës mund të përcaktojmë se për cilat vlera të parametrin ekuacioni do të ketë rrënjë reale të barabarta, rrënjë reale të ndryshme ose nuk do të ketë rrënjë reale.

**Shembulli 3**

Në varësi të vlerave të parametrin  $m$ , caktoni natyrën e rrënjëve të ekuacioneve të mëposhtme:

a)  $4x^2 - 2x + m = 0$ ;      b)  $(m - 1)x^2 + 2x + 4 = 0$ .

**Zgjidhje:**

a)  $D = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot m = 4 - 16m$ .

- Ekuacioni do të ketë dy rrënjë reale të ndryshme nëse  $D = 4 - 16m > 0$ , përkatësisht për gjitha vlerat e  $m$  që plotësojnë inekuacionin  $m < \frac{1}{4}$ , d.m.th.  $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ .
- Ekuacioni do të ketë rrënjë reale të barabarta nëse  $D = 4 - 16m = 0$ , përkatësisht nëse  $m = \frac{1}{4}$ .
- Ekuacioni nuk do të ketë rrënjë reale nëse  $D = 4 - 16m < 0$ , përkatësisht për gjitha vlerat e  $m$  që plotësojnë inekuacionin  $m > \frac{1}{4}$ , d.m.th.  $m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ .

b)  $D = 2^2 - 4 \cdot (m - 1) \cdot 4 = 20 - 16m$ .

- Ekuacioni do të ketë dy rrënjë reale të ndryshme nëse  $D = 20 - 16m > 0 \Rightarrow m < \frac{5}{4}$ , d.m.th. për gjitha vlerat e  $m \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$ .
- Ekuacioni do të ketë rrënjë reale të barabarta nëse  $D = 20 - 16m = 0$ , përkatësisht nëse  $m = \frac{5}{4}$ .
- Ekuacioni nuk do të ketë rrënjë reale nëse  $D = 20 - 16m < 0 \Rightarrow m > \frac{5}{4}$ , d.m.th. për gjitha vlerat e  $m \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$ .



## Zbatimi i ekuacioneve kuadratike

Zgjidhjet e një numri të madh detyrash, në sfera të ndryshme të shkencës dhe teknikës, kthehen në zgjidhje të ekuacioneve kuadratike. Në shembujt e mëposhtëm do të tregojmë se si zgjidhen disa probleme me anë të zbatimit të ekuacioneve kuadratike.

### Shembulli 4

Në cilin shumëkëndësh numri i gjitha diagonaleve është shtatë herë më i madh se numri i brinjëve të tij?

**Zgjidhje:**

Numri i gjitha diagonaleve në shumëkëndëshin e çfarëdoshëm është  $\frac{n(n-3)}{2}$ . Duhet të caktojmë  $n$ , ashtu që numri i diagonaleve do të jetë i barabartë me  $7n$ , d.m.th.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 7n \Leftrightarrow n^2 - 17n = 0 \Leftrightarrow n(n-17) = 0.$$

Zgjidhjet e këtij ekuacioni janë  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 17$ . Pasi  $n$  është numri i brinjëve të shumëkëndëshit,  $n$  duhet të jetë më i madh se zero. Kështu, shumëkëndëshi i kërkuar ka 17 brinjë.

### Shembulli 5

Numri 74 të shkruhet si shumë e dy numrave, prodhimi i të cilëve është 1173.

**Zgjidhje:**

E shënojmë me  $x$  njërin mbledhës. Atëherë mbledhësi tjetër do të jetë  $74 - x$ . Produkti i dy mbledhëseve duhet të jetë 1173, prandaj vlerën e  $x$  e gjejmë duke zgjidhur ekuacionin

$$x(74 - x) = 1173,$$

d.m.th.  $x^2 - 74x + 1173 = 0$ . Rrënjët e ekuacionit kuadratik janë 23 dhe 51, që do të thotë se mbledhësit e kërkuar janë 23 dhe 51.

### Shembulli 6

Sa vjeç është Jovani, nëse pas 3 vitesh ai do të ketë aq vite sa është katrori i numrit të viteve që kishte para 3 vitesh?

**Zgjidhje:**

Le të jetë  $x$  numri i viteve të Jovanit (mosha aktuale). Atëherë, para tri vitesh ai ishte  $x - 3$  vjeç, kurse pas 3 vitesh do të jetë  $x + 3$  vjeç. Sipas kushteve të detyrës fitojmë ekuacionin kuadratik

$$x + 3 = (x - 3)^2,$$

d.m.th.  $x^2 - 7x + 6 = 0$ . Rrënjët e këtij ekuacioni janë 1 dhe 6. Mirëpo, nëse ai tani është 1 vjeç, atëherë para 3 vitesh do të kishte qenë  $-2$  vjeç, çka është e pamundur. Pra, ai është 6 vjeç.

### Shembulli 7

A mund të ndërtohet një pallat me bazë drejtkëndore ashtu që parametri i bazës të jetë 60 m, kurse syprina e bazës të jetë  $150 \text{ m}^2$ ?

**Zgjidhje:**

Brinjët e bazës le të jenë  $a$  dhe  $b$  (në metra). Atëherë, perimetri do të jetë  $2(a + b)$ , kurse syprina do të jetë  $ab$ . Perimetri i bazës së pallatit duhet të jetë  $2(a + b) = 60$ , prej ku fitojmë se  $b = 30 - a$ , kurse nga kushti i detyrës për syprinën e bazës e fitojmë ekuacionin

$$a(30 - a) = 150,$$

d.m.th.  $a^2 - 30a + 150 = 0$ . Që të mund të ndërtohet pallati, ky ekuacion duhet të ketë rrënjë reale. Diskriminanta e ekuacionit është  $D = 30^2 - 4 \cdot 1 \cdot 150 = 300 > 0$ , që nënkupton se ka rrënjë reale, përkatësisht se pallati me bazë të tillë mund të ndërtohet. Me zgjidhjen e ekuacionit mund t'i caktojmë edhe gjatësitë e brinjëve të bazës. Me zbatimin e formulës për caktimin e rrënjëve të ekuacionit kuadratik fitohet që brinjët e bazës duhet të jenë  $a = 5(3 - \sqrt{3}) \approx 6,34 \text{ m}$ ,  $b = 5(3 + \sqrt{3}) \approx 23,66 \text{ m}$ .

### Detyra për ushtrime!

- Pa i zgjidhur ekuacionet, caktoni natyrën e rrënjëve:
  - $x^2 + x - 12 = 0$ ;
  - $4x^2 - 12x + 9 = 0$ ;
  - $x^2 - 6x + 25 = 0$ .
- Caktoni parametrin  $m$ , ashtu që ekuacioni të ketë rrënjë të dyfishtë:
  - $x^2 + 3x + m = 0$ ;
  - $3x^2 - 2mx + 3 = 0$ ;
  - $x^2 + 2(3 - m)x + 2k - 3 = 0$ .
- Për cilat vlera të parametrin  $m$  ekuacioni do të ketë rrënjë reale të ndryshme?
  - $x^2 - 2x + 3m = 0$ ;
  - $2x^2 - 8x + m + 6 = 0$ ;
  - $mx^2 - (2m + 3)x + m - 2 = 0$ .
- Për cilat vlera të parametrin  $k$  ekuacioni nuk ka rrënjë reale?
  - $x^2 + 2x + k = 0$ ;
  - $kx^2 + (2k - 3)x + k - 1 = 0$ ;
  - $(k - 2)x^2 - 4x - 1 = 0$ .
- Për cilat vlera të parametrin  $m$  ekuacioni  $x^2 - 2ax + m^2 - m + 3 = 0$  do të ketë rrënjë reale?
- Për cilat vlera të parametrin  $a$  trinomi do të jetë kuadratik i plotë?
  - $ax^2 + 6x + 1$ ;
  - $ax^2 - 8x + 9a$ .
- Caktoni natyrën e rrënjëve të ekuacioneve kuadratike të mëposhtme, në varësi të parametrin  $m$ :
  - $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ ;
  - $3mx^2 + 8x - 5 = 0$ ;
  - $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 3 = 0$ .
- Shkruani numrin 123 si shumë të dy numrave prodhimi i të cilëve është 3710.
- Në cilin shumëkëndësh mund të tërhiqen gjithsej 170 diagonale?
- Gjatësitë e brinjëve të një trekëndëshi janë 5 cm, 9 cm dhe 13 cm. Secila nga tri brinjët zgjatet për gjatësi të njëjtë. Sa duhet të jetë kjo gjatësi ashtu që trekëndëshi i ri i fituar të jetë kënddrejtë?

## 2.5 FORMULAT E VIETIT

### Rikujtoni!

- Për ekuacionin kuadratik  $ax^2 + bx + c = 0$  në të cilin  $a = 1$  themi se është në formën normale dhe zakonisht e shkruajmë si  $x^2 + px + q = 0$ .
- Caktoni  $p$  dhe  $q$  në ekuacionin  $x^2 + 7x - 9 = 0$ .

### Shembulli 1

Caktoni shumën dhe prodhimin e rrënjëve të ekuacionit  $x^2 - 4x - 21 = 0$ .

**Zgjidhje:**

Ekuacioni është dhënë në formën normale, kurse koeficientet  $p = -4$ ,  $q = -21$ . Për rrënjët e ekuacionit kemi:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = 2 \pm 5, \text{ d.m.th. } x_1 = 7, \quad x_2 = -3.$$

Shuma e rrënjëve është  $x_1 + x_2 = 7 - 3 = 4$ , kurse prodhimi është  $x_1 \cdot x_2 = 7 \cdot (-3) = -21$ .

Vërejmë se shuma e rrënjëve  $x_1 + x_2 = 4$  është e barabartë me  $-p$ , kurse prodhimi  $x_1 \cdot x_2 = -21$  është i barabartë me  $q$ .

### Detyra 1

Shndërroni ekuacionin kuadratik  $3x^2 - 7x + 2 = 0$  në formën normale, e më pas caktoni koeficientet  $p$  dhe  $q$ , shumën dhe prodhimin e rrënjëve të tij.

Do të tregojmë se lidhja mes rrënjëve të ekuacionit kuadratik dhe koeficienteve të formës normale të ekuacionit që sapo e gjetëm në shembujt e mësipërm vlen për çdo ekuacion kuadratik. Dimë se rrënjët e

ekuacionit kuadratik  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  janë  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  dhe  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . Për shumën

dhe prodhimin e tyre vlen:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{(2a)^2} = \frac{c}{a}.$$



Nëse ekuacionin  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  e shkruajmë në formën normale, atëherë  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ . Pra, shuma e rrënjëve është e barabartë me  $-p$ , kurse prodhimi i rrënjëve është sa koeficienti  $q$  i formës normale të ekuacionit.

### Mbani mend!

- Nëse  $x_1$  dhe  $x_2$  janë zgjidhje të ekuacionit kuadratik  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , atëherë vlejnë formulat

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

- Këto formula quhen **formula të Vietit**.
- Formulat e Vietit për ekuacionin në formën normale  $x^2 + px + q = 0$  janë:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{dhe} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

### Shembulli 2

Pa zgjidhur ekuacionin, caktoni shumën dhe prodhimin e rrënjëve të tij.

a)  $4x^2 - 3x + 9 = 0$ ;      b)  $x^2 - (m-1)x + 2m + 5 = 0$ .

**Zgjidhje:**

- a) Ekuacioni është dhënë në formën e përgjithshme me koeficientë  $a = 4$ ,  $b = -3$  dhe  $c = 9$ . Sipas formulave të Vietit, nëse  $x_1$  dhe  $x_2$  janë zgjidhje të ekuacionit, atëherë

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad \text{dhe} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{9}{4}.$$

- b) Ekuacioni kuadratik është në formën normale me koeficientë  $p = -(m-1)$ ,  $q = 2m + 5$ . Sipas formulave të Vietit del se

$$x_1 + x_2 = -p = m - 1 \quad \text{dhe} \quad x_1 \cdot x_2 = q = 2m + 5.$$

Tani do të tregojmë se, nëse për numrat  $x_1$  dhe  $x_2$  vlen  $x_1 + x_2 = -p$  dhe  $x_1 \cdot x_2 = q$ , atëherë  $x_1$  dhe  $x_2$  janë rrënjët, zgjidhjet, e ekuacionit  $x^2 + px + q = 0$ .

Nga  $x_1 + x_2 = -p$  del se  $p = -(x_1 + x_2)$ , prandaj ekuacioni është  $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ . Nëse në këtë ekuacion marrim  $x = x_1$ , fitojmë  $x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_1^2 - x_1x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0$ , d.m.th.  $0 = 0$ . Pra, për  $x = x_1$  ekuacioni bëhet barazim numerik i vërtetë, d.m.th  $x = x_1$  është rrënjë e ekuacionit. Ngjashëm, për  $x = x_2$ , fitojmë  $x_2^2 - (x_1 + x_2)x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 - x_2^2 - x_1x_2 + x_1 \cdot x_2 = 0$ , d.m.th.  $0 = 0$ , që do të thotë se edhe  $x = x_2$  është rrënjë e ekuacionit.

Bashkë me këtë dhe fitimin e mëparshëm të formulave të Vietit, e kemi vërtetuar pohimin (teoremën) në vijim.

### Mbani mend!

Numrat  $x_1$  dhe  $x_2$  janë zgjidhje të ekuacionit kuadratik  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$  nëse dhe vetëm nëse

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{dhe} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Nëse ekuacioni është në formën normale  $x^2 + px + q = 0$ , atëherë  $x_1 + x_2 = -p$  dhe  $x_1 \cdot x_2 = q$ .



**Shembulli 3**

Duke përdorur formulat e Vietit kontrolloni nëse

- a) 2 dhe -3 janë rrënjë, zgjidhje, të ekuacionit  $x^2 + 7x - 12 = 0$ ;  
 b)  $1 + \sqrt{2}$  dhe  $1 - \sqrt{2}$  janë rrënjë të ekuacionit  $x^2 - 2x - 1 = 0$ .

**Zgjidhje:**

Që çifti i numrave të dhënë të jenë zgjidhje të ekuacionit, numrat duhet të kënaqin formulat e Vietit.

- a) Për ekuacionin  $x^2 + 7x - 12 = 0$  duhet të vlejë  $x_1 + x_2 = -p = -7$  dhe  $x_1 \cdot x_2 = q = -12$ .  
 Pasi  $2 + (-3) = -1 \neq -7$ , përfundojmë se 2 dhe -3 nuk janë rrënjë të ekuacionit  $x^2 + 7x - 12 = 0$ .  
 b) Për këtë ekuacion duhet të vlejë  $x_1 + x_2 = -p = 2$  dhe  $x_1 \cdot x_2 = q = -1$ . Pasi  $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 = -p$   
 dhe  $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1 = q$ ,  $1 + \sqrt{2}$  dhe  $1 - \sqrt{2}$  janë rrënjë të ekuacionit  $x^2 - 2x - 1 = 0$ .

**Shembulli 4**

Le të jenë  $x_1$  dhe  $x_2$  zgjidhje të ekuacionit kuadratik  $x^2 + px + q = 0$ . Vërtetoni se vlen  $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ .

**Zgjidhje:**

Shprehjen  $x_1^2 + x_2^2$  e plotësojmë me kuadratik të plotë me shtimin dhe zbritjen e  $2x_1x_2$  dhe fitojmë  
 $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ . Sipas formulave të Vietit kemi se  $x_1 + x_2 = -p$  dhe  
 $x_1 \cdot x_2 = q$ , prandaj nga ekuacioni paraparak kemi  $x_1^2 + x_2^2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$ .

Mbani mend formulën  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ , d.m.th.  $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ .

**Detyra 2**

Le të jenë  $x_1$  dhe  $x_2$  zgjidhje të ekuacionit kuadratik  $3x^2 - 2x + 6 = 0$ . Pa zgjidhur detyrën, caktoni vlerën e shprehjeve:

- a)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ;      b)  $3x_1 - 5x_1^2 + 3x_2 - 5x_2^2$ .

## Detyra për ushtrime!

- Ekuacionet e mëposhtme shkruani në formën normale dhe caktoni koeficientët  $p$  dhe  $q$ :
  - $2x^2 + 3x - 5 = 0$ ;
  - $mx^2 - (m+3)x + 2m = 0$ .
- Shkruani formulat e Vietit për ekuacionet e mëposhtme:
  - $3x^2 - 8x + 6 = 0$ ;
  - $2x^2 - 7x = 0$
  - $x^2 + 6 = 0$ ;
  - $(m-3)x^2 - (3m+1)x + 2 = 0$ ;
  - $4mx^2 - x + 2m - 3 = 0$ .
- Duke shfrytëzuar formulat e Vietit, zgjidhni ekuacionet:
  - $x^2 - 8x + 15 = 0$ ;
  - $x^2 + 7x + 12 = 0$ ;
  - $x^2 + 8x + 15 = 0$ ;
  - $2x^2 - 7x + 5 = 0$ .
- Duke shfrytëzuar formulat e Vietit kontrolloni nëse çifti i dhënë i numrave është zgjidhje e ekuacionit përkatës:
  - 2 dhe 6,  $x^2 - 8x + 12 = 0$ ;
  - 3 dhe 5,  $x^2 - 2x - 15 = 0$ ;
  - $3 + \sqrt{2}$  dhe  $3 - \sqrt{2}$ ,  $x^2 + 6x + 7 = 0$ ;
  - 3 dhe 7,  $x^2 - 9x + 12 = 0$ .
- Caktoni vlerën e parametrin  $k$ , ashtu që shumën e rrënjëve të ekuacionit  $x^2 + (2k+1)x - 5 = 0$  të jetë e barabartë me 4. Për vlerën e fituar të parametrin  $k$  gjeni rrënjët e ekuacionit.
- Duke shfrytëzuar formulat e Vietit caktoni vlerën e parametrin  $k$  dhe rrënjën tjetër të ekuacionit:
  - $2kx^2 + kx - 1 = 0$ , nëse  $x_1 = \frac{3}{2}$ ;
  - $x^2 - 5x + k = 0$ , nëse  $x_1 = -2$ ;
  - $x^2 - 2bx + k = 0$ , nëse  $x_1 = b - a$ .
- Për cilën vlerë të parametrin  $m$  rrënjët e ekuacionit  $x^2 + 6x - m + 3 = 0$  e plotësojnë kushtin  $x_1 - x_2 = 0$ ?
- Pa zgjidhur ekuacionin  $4x^2 - 3x + 2 = 0$ , caktoni vlerën e shprehjes:
  - $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$ ;
  - $x_1^2 + x_2^2$ ;
  - $\frac{5}{x_1} + \frac{5}{x_2}$ ;
  - $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ .

## 2.6 FORMIMI I EKUACIONIT KUADRATIK PËRMES RRËNJËVE TË DHËNA. ZBËRTHIMI NË TRINOM KATROR

### Formimi i ekuacionit kuadratik përmes rrënjëve të dhëna

#### Rikujtoni!

- $x_1 = 3$  dhe  $x_2 = 4$  janë zerot e trinomit  $x^2 - 7x + 12$ , prandaj ai mund të shkruhet si  $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$ .
- $x_1 = -3$  dhe  $x_2 = 4$  janë rrënjë të ekuacionit  $x^2 - x - 12 = 0$ . Kontrolloni nëse është i vërtetë barazimi.

$$x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4).$$

Duke shfrytëzuar formulat e Vietit mund të formojmë ekuacionin rrënjët e të cilit do të jenë  $x_1$  dhe  $x_2$ . Në fakt, sipas formulave të Vietit,  $x_1$  dhe  $x_2$  janë zgjidhje të ekuacionit

$$x^2 + px + q = 0, p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2.$$

#### Shembulli 1

Formoni ekuacionin kuadratik, rrënjët e të cilit janë  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 5$ .

**Zgjidhje:**

Me anë të formulave të Vietit i caktojmë koeficientët  $p$  dhe  $q$ :

$$p = -(x_1 + x_2) = -((-3) + 5) = -2,$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot 5 = -15.$$

Ekuacioni i kërkuar është  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .

#### Shembulli 2

Formoni ekuacionin kuadratik, zgjidhjet e të cilit janë:

$$\text{a) } x_1 = 3 - 4i, x_2 = 3 + 4i; \quad \text{b) } x_1 = 2 - \sqrt{3}, x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

**Zgjidhje:**

Me anë të formulave të Vietit i caktojmë koeficientët  $p$  dhe  $q$ .

$$\text{a) } p = -(x_1 + x_2) = -((3 - 4i) + (3 + 4i)) = -6, q = x_1 \cdot x_2 = (3 - 4i) \cdot (3 + 4i) = 25.$$

Ekuacioni i kërkuar është  $x^2 - 6x + 25 = 0$ .

$$\text{b) } p = -((2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})) = -4, q = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1,$$

Ekuacioni i kërkuar është  $x^2 - 4x + 1 = 0$ .



**Detyra 1**

Formoni ekuacionin kuadrik, rrënjët e të cilit janë:

$$\text{a) } x_1 = 0,75, x_2 = -\frac{1}{3}; \quad \text{b) } x_1 = a - b, x_2 = a + b.$$

**Mbani mend!**

Nëse numrat  $x_1$  dhe  $x_2$  janë rrënjë të ekuacionit kuadrik, atëherë ekuacioni ka formën  $x^2 + px + q = 0$ , ku  $p = -(x_1 + x_2)$ ,  $q = x_1 \cdot x_2$ .

Nëse  $p = -(x_1 + x_2)$  dhe  $q = x_1 \cdot x_2$  i zëvendësojmë në ekuacionin  $x^2 + px + q = 0$ , rrënjët e të cilit janë  $x_1$  dhe  $x_2$ , atëherë fitojmë ekuacionin  $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ , d.m.th. ekuacionin

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Pra, nëse numrat  $x_1$  dhe  $x_2$  janë rrënjë të ekuacionit kuadrik, atëherë ekuacionin mund ta ndërtojmë edhe me përdorimin e barazimit  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ .

Për shembull, nëse  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 5$  janë rrënjë të një ekuacioni kuadrik, atëherë ai ekuacion është  $(x + 3)(x - 5) = 0$ , d.m.th.  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .

**Shembulli 3**

Formoni ekuacionin kuadrik ashtu që shuma e rrënjëve të tij është -5, kurse prodhimi i rrënjëve është 6.

**Zgjidhje:**

Nëse shuma e rrënjëve është -5, prodhimi i tyre 6, atëherë për koeficientët e formës normale të ekuacionit fitojmë  $p = -(x_1 + x_2) = 5$  dhe  $q = x_1 \cdot x_2 = 6$ . Ekuacioni i kërkuar është  $x^2 + 5x + 6 = 0$ .

**Shembulli 4**

Për cilën vlerë të parametrin  $m$ , njëra rrënjë e ekuacionit  $x^2 - 9x + m = 0$  është dy herë më e madhe se tjetra?

**Zgjidhje:**

Sipas formulave të Vietit,  $x_1 + x_2 = 9$ . Nëse zëvendësojmë  $x_1 = 2 \cdot x_2$  fitojmë  $2 \cdot x_2 + x_2 = 9$ , d.m.th.  $x_2 = 3$ , dhe  $x_1 = 2 \cdot 3 = 6$ . Tani  $q = m$ , kurse sipas formulave të Vietit  $q = x_1 \cdot x_2 = 18$ . Nga këtu, del që vlera e  $m$  është 18.

**Shembulli 5**

Caktoni vlerën e parametrin  $m$ , ashtu që rrënjët e ekuacionit kuadrik  $mx^2 - (2m + 2)x + 1 = 0$  do të kënaqin barazimin  $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4$ .

**Zgjidhje:**

Nga formulat e Vietit fitojmë  $x_1 + x_2 = -\frac{-(2m+2)}{m}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m}$ ,  $m \neq 0$ . Vërejmë se nga barazimi  $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 4$



del që  $x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = 4$ , prandaj me zëvendësim fitojmë  $\frac{1}{m} \cdot \frac{2m+2}{m} = 4$  ose  $4m^2 - 2m - 2 = 0$ , d.m.th.  
 $2m^2 - m - 1 = 0$ , zgjidhje të të cilit janë  $m = 1$  dhe  $m = -\frac{1}{2}$ .

## Zbërthimi i trinomit katror në shumëzues linear

### Rikujtoni!

- Çka pohojnë formulat e Vietit për ekuacionin kuadratik?
- Për ekuacionin  $2x^2 - 4x + 3 = 0$  kemi:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}.$$

### Aktivitet

Zbërtheni trinomin katror  $x^2 - 7x + 12$  në shumëzues linear.

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = x(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 4).$$

Vëreni që  $x_1 = 3$  dhe  $x_2 = 4$  janë zerot e trinomit katror të dhënë, d.m.th. janë rrënjë, zgjidhje, të ekuacionit  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .

Nëse  $x_1$  dhe  $x_2$  janë zero të trinomit katror  $ax^2 + bx + c$ , d.m.th. rrënjë të ekuacionit kuadratik  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , atëherë sipas formulave të Vietit  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ , prandaj

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 \right) = \\ &= a \left( x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 \right) = a \left( x(x - x_1) - x_2(x - x_1) \right) = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

### Mbani mend!

Nëse  $x_1$  dhe  $x_2$  janë zero të trinomit katror  $ax^2 + bx + c$ , atëherë zbërthimi i trinomit në shumëzues linear është  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

**Shembulli 6**

Zbërtheni trinomin në shumëzues:

a)  $2x^2 + 6x - 8$ ;      b)  $2x^2 - 3x - 5$ .

**Zgjidhje:**

a) I caktojmë zerot e trinomit  $x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm 10}{4}$ ,  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 1$ . Pra,

$$2x^2 + 6x - 8 = 2(x + 4)(x - 1).$$

b)  $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 7}{4}$ ,  $x_1 = \frac{5}{2}$ ,  $x_2 = -1$ , rrjedh

$$2x^2 - 3x - 5 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1) = (2x - 5)(x + 1).$$

**Detyra 2**

Zbërtheni në shumëzues linear trinomet:

a)  $2x^2 + 7x - 15$ ;      b)  $x^2 - 2x - 2$ .

Barazimin për zbërthimin e trinomit katror në shumëzues linear mund ta përdorim edhe për shtrimin, ndërtimin, e ekuacionit kuadratik me rrënjë të dhëna. Në fakt nga  $ax^2 + bx + c = 0$ , pasi  $a \neq 0$  rrjedh që  $a(x - x_1)(x - x_2)$ . Për shembull, ekuacionin kuadratik, rrënjë të të cilit janë  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = -3$  mund ta ndërtojmë duke marrë  $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 0$ , përkatësisht  $x^2 + 3x - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$ , prandaj ekuacioni i kërkuar është  $2x^2 + 5x - 3 = 0$ .

**Rikujtoni!**

Që të bëhet më e thjeshtë thyesa algebrike e dhënë, duhet që numëruesin dhe emëruesin e saj t'i zbërthejmë në shumëzues.

**Shembulli 7**

Bëjeni më të thjeshtë thyesën  $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 12}$

**Zgjidhje:**

Për numëruesin kemi  $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ , kurse që ta zbërthejmë emëruesin në shumëzues, do t'i caktojmë rrënjët e ekuacionit  $x^2 - x - 12 = 0$ . Fitojmë:

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

prandaj  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 4$ , dhe përfundimisht  $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$ . Nga këtu del

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 12} = \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 4)} = \frac{x + 3}{x - 4}.$$

Vërejmë se thyesa mund të thjeshtohet, reduktohet, vetëm nëse  $x + 3$  është e ndryshme nga 0.

**Detyra 3**

Thjeshtoni thyesën:

a)  $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$ ;

b)  $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 8x + 15}$ .

**Detyra për ushtrime!**

Në detyrat (1 – 5) formoni ekuacionin kuadratik, rrënjët e të cilit janë:

1. a)  $-2$  dhe  $3$ ;

b)  $7$  dhe  $-1$ ;

c)  $-5$  dhe  $-1$ .

2. a)  $-\frac{1}{3}$  dhe  $\frac{1}{2}$ ;

b)  $\frac{1}{3}$  dhe  $-\frac{3}{4}$ ;

c)  $-\frac{3}{4}$  dhe  $-\frac{1}{3}$ .

3. a)  $-\sqrt{2}$  dhe  $\sqrt{5}$ ;

b)  $-4\sqrt{3}$  dhe  $-\sqrt{3}$ ;

c)  $6 - \sqrt{2}$  dhe  $6 + \sqrt{2}$ .

4. a)  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  dhe  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ;

b)  $3 - 2i$  dhe  $3 + 2i$ ;

c)  $\frac{1 - 2i}{3}$  dhe  $\frac{1 + 2i}{3}$ .

5. a)  $\frac{a}{b}$  dhe  $\frac{b}{a}$ ;

b)  $\frac{a}{a+b}$  dhe  $\frac{b}{a-b}$ .

6. Formoni ekuacionin kuadratik, ashtu që shuma e rrënjëve të tij të jetë  $-1$ , kurse prodhimi i tyre të jetë  $-2\frac{1}{2}$ .7. Për cilën vlerë të parametrin  $m$  njëra rrënjë e ekuacionit  $2x^2 - 3x + m - 2 = 0$  është dy herë më e madhe se tjetra?8. Caktoni vlerën e parametrin  $k$ , ashtu që rrënjët e ekuacionit  $2x^2 - 4x + k = 0$  do të plotësojnë barazimin  $x_1^2 + x_2^2 = 12$ .

9. Formoni ekuacionin kuadratik me koeficientë realë, nëse njëra nga rrënjët e tij është:

a)  $2 - 3\sqrt{2}$ ;

b)  $2 - 3i$ .

10. Zbërtheni në shumëzues linear trinomin katror:

a)  $x^2 - 4x - 21$ ;

b)  $3x^2 + 5x - 2$ ;

c)  $x^2 - 4x + 1$ .

11. Thjeshtoni thyesat:

a)  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4}$ ;

b)  $\frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 + 7x + 12}$ ;

c)  $\frac{3x^2 + 21x}{x^2 + 3x - 28}$ .

## 2.7 EKUACIONET RACIONALE THYESORE

### Rikujtoni!

- Si përcaktohet shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave dhe polinomeve.
- SHVP( $x - 2, x^2 - 4$ ) =  $(x - 2)(x + 2)$ .
- SHVP( $x + 3, x - 1, x^2 - 9$ ) =  $(x + 3)(x - 3)(x - 1)$ .
- Thyesa racionale ka formën  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , ku  $P(x)$  dhe  $Q(x)$  janë dy polinome dhe  $Q(x) \neq 0$ .

### Aktivitet

Caktoni SHVP-në e  $x^2 + 2x - 1$  dhe  $x^2 - 1$ .

Zgjidhja e ekuacioneve kuadratike mundëson zgjidhjen e ekuacioneve që me transformime të caktuara shndërrohen në ekuacione kuadratike.

### Mbani mend!

Ekuacioni në të cilin ndryshorja, d.m.th. madhësia e panjohur përmbahet edhe në emëruesin e ndonjë thyese racionale quhet **ekuacion racional thyesor**. Këto ekuacione janë të përkufizuara, d.m.th. kanë kuptim, për vlerat e ndryshores për të cilat emëruesit e thyesës racionale të ekuacionit janë të ndryshme nga zeroja.

### Shembulli 1

$\frac{3(x-5)}{x-1} = 3x+8$  është ekuacion racional thyesor, i cili është i përkufizuar për gjithë vlerat e  $x$ , për të cilat  $x - 1 \neq 0$ , d.m.th.  $x \neq 1$ . Pra, bashkësia e përkufizimit (bashkësia e vlerave të lejueshme) e ekuacionit është  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Procedura më e shpeshtë e zgjidhjes së ekuacioneve racionale thyesore është me sa vijon:

- emëruesit e thyesave zbërthehen në shumëzues;
- caktohet bashkësia e përkufizimit të ekuacionit;
- ekuacioni shumëzohet me SHVP-në e emëruesve të thyesave;
- caktohen zgjidhjet e ekuacionit të fituar;
- kontrollohet cilat nga zgjidhjet e fituara janë zgjidhje të ekuacionit (racional thyesor) fillestar, d.m.th. cilat nga zgjidhjet e fituara i takojnë bashkësisë së përkufizimit të ekuacionit.



**Shembulli 2**

Zgjidhni ekuacionet:

$$\text{a) } \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x} = 3; \quad \text{b) } \frac{-2x+7}{x-2} = x-2; \quad \text{c) } \frac{3x}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = \frac{2x^2-6x}{x^2-1}.$$

**Zgjidhje:**

- a) Ekuacioni është i përkufizuar për  $x-1 \neq 0$  dhe  $x \neq 0$ , d.m.th.  $x \neq 1$  dhe  $x \neq 0$ . Pra, bashkësia e përkufizimit të ekuacionit është  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Emëruesit në këtë ekuacion janë  $x-1$  dhe  $x$  kurse SHVP i tyre është  $x(x-1)$ . Ekuacionin e shumëzojmë me SHVP-në e emëruesve dhe fitojmë:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} + \frac{5}{x} &= 3 / \cdot x(x-1) \\ 3x + 5(x-1) &= 3x(x-1) \\ 3x^2 - 11x + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Zgjidhje të ekuacionit të fituar janë  $x_1 = \frac{11-\sqrt{61}}{6}$ ,  $x_2 = \frac{11+\sqrt{61}}{6}$  dhe meqë të dy zgjidhjet i takojnë bashkësisë  $D$ , del që të dyja janë zgjidhje të ekuacionit racional thyesor të dhënë.

- b) Ekuacioni është i përkufizuar për  $x-2 \neq 0$ , d.m.th.  $x \neq 2$ , prandaj bashkësia e përkufizimit të ekuacionit është  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Në ekuacionin e dhënë ka vetëm një emërues, prandaj ekuacionin e shumëzojmë me  $x-2$ .

$$\begin{aligned} \frac{-2x+7}{x-2} &= x-2 / \cdot (x-2) \\ -2x+7 &= (x-2)^2 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Zgjidhje të ekuacionit të mësipërm kuadratik janë  $-1$  dhe  $3$ . Pasi të dy zgjidhjet i takojnë bashkësisë së përkufizimit të ekuacionit racional thyesor, që të dyja janë zgjidhje të tij.

- c) Ekuacioni është i përkufizuar për  $x-1 \neq 0$  dhe  $x+1 \neq 0$  d.m.th.  $x \neq 1$  dhe  $x \neq -1$ . Pra, bashkësia e përkufizimit të ekuacionit është  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . Ekuacionin e shumëzojmë me SHVP  $(x-1, x+1, x^2-1) = x^2-1$  dhe kemi:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-1} + \frac{4x}{x+1} &= \frac{2x^2-6x}{x^2-1} / \cdot (x^2-1) \\ 3x(x+1) + 4x(x-1) &= 2x^2-6x \\ 5x^2 + 5x &= 0 \end{aligned}$$

Zgjidhjet e ekuacionit të fituar kuadratik janë  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ . Pasi  $x_2 = -1$  nuk i takon bashkësisë së përkufizimit të ekuacionit racional thyesor, zgjidhje e këtij ekuacioni është vetëm  $x = 0$ .

**Detyra 1**

Zgjidhni ekuacionet:

$$\text{a) } \frac{6}{x^2-1} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{2}{x-1}; \quad \text{b) } \frac{3x-5}{2x-1} = \frac{2x-3}{x+1}.$$

### Shembulli 3

Zgjidhni ekuacionin  $\frac{2x+1}{x^2+x-6} - \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{6}{x^2-9}$ .

**Zgjidhje:**

Fillimisht i zbërthejmë emëruesit në shumëzues:

Zgjidhje të ekuacionit  $x^2 + x - 6 = 0$  janë  $-3$  dhe  $2$ , kurse të  $x^2 - 5x + 6 = 0$  janë  $2$  dhe  $3$ . Nga këtu, zbërthimi në shumëzues i emëruesve është me sa vijon:

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3), \quad x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3), \quad x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Ekuacioni është i përkufizuar për  $x \neq 2$ , dhe  $x \neq -3$ , dhe  $x \neq 3$ . Pra, bashkësia e përkufizimit e ekuacionit të dhënë është  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2, 3\}$ . Ekuacionin e shumëzojmë me  $SHVP((x-2)(x+3), (x-2)(x-3), (x-3)(x+3)) = (x-2)(x-3)(x+3)$  dhe fitojmë:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^2+x-6} - \frac{x-1}{x^2-5x+6} &= \frac{6}{x^2-9} \\ \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} - \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} &= \frac{6}{(x-3)(x+3)} \quad / \cdot (x-2)(x-3)(x+3) \\ (2x+1)(x-3) - (x-1)(x+3) &= 6(x-2) \\ x^2 - 13x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

Rrënjë të ekuacionit kuadratik të fituar janë  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 12$ . Të dyja rrënjët janë në bashkësinë e përkufizimit të ekuacionit racional thyesor, prandaj  $1$  dhe  $12$  janë zgjidhje të ekuacionit të dhënë.

### Detyra 2

Zgjidhni ekuacionin  $\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} - \frac{x-4}{2x-4} = 0$ .

### Shembulli 4

Shpejtësia e një varke motorike në ujë të qetë është  $15$  km/h. Nëse varka lëviz me rrjedhën e lumit, atëherë ajo largësinë prej  $72$  km e kalon për  $2$  orë më pak se në rast se do të lëvizte kundër rrjedhës së lumit. Caktoni shpejtësinë e lumit.

**Zgjidhje:**

Nëse shpejtësia e lumit është  $x$  km/h, atëherë shpejtësia e varkës në drejtimin e rrjedhës së lumit është  $15 + x$ , kurse në drejtimin kundër rrjedhës së lumit është  $15 - x$ . Nga formula për rrugën,  $s = v \cdot t$  del se

$$72 = (15 + x) \cdot t_1 \text{ dhe } 72 = (15 - x) \cdot t_2. \text{ Nga këtu fitojmë } t_1 = \frac{72}{15+x} \text{ dhe } t_2 = \frac{72}{15-x}. \text{ Pasi } t_2 - t_1 = 2, \text{ fitojmë}$$

$$\frac{72}{15-x} - \frac{72}{15+x} = 2. \text{ Pas shumëzimit të ekuacionit me SHVP-në e emëruesve fitohet}$$

$$72(15+x) - 72(15-x) = 2(15+x)(15-x),$$

d.m.th.

$$x^2 + 72x - 225 = 0.$$

Zgjidhje të këtij ekuacioni janë  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -75$ , por  $x_2 = -75$  nuk mund të jetë zgjidhje e detyrës sepse  $x$  tregon shpejtësinë dhe si e tillë nuk mund të merr vlera negative. Pra, shpejtësia e lumit është  $3$  km/h.

## Shembulli 5

Një klient i bankës fitoi 15 euro kamatë (interes) për një shumë të caktuar parash të deponuara për një vit. Më pas kësaj shume i shtoi edhe 85 euro dhe i deponoi edhe për një vit me interes të njëjtë. Pas kalimit të këtij viti klienti në llogarinë e tij kishte gjithsej 420 euro. Sa ka qenë shumta fillestare e parave dhe sa përqind është kamata vjetore?

**Zgjidhje:**

Shuma (kapitali fillestar) e parave të depozituara le të jetë  $K$ , kurse kamata vjetore le të jetë  $x\%$ .

Atëherë  $\frac{K \cdot x}{100} = 15$ , d.m.th.  $K = \frac{100 \cdot 15}{x}$ . Pra, në fillim të vitit të dytë klienti në llogarinë e tij kishte

$\frac{1500}{x} + 15 + 85 = \frac{1500}{x} + 100$  euro, kurse në fund të vitit të dytë kishte  $\left(\frac{1500}{x} + 100\right) + \left(\frac{1500}{x} + 100\right) \cdot \frac{x}{100}$ .

Dimë se në fund të vitit të dytë klienti në llogari dispononte 420 euro, prandaj fitojmë ekuacionin në vijim:

$$\left(\frac{1500}{x} + 100\right) + \left(\frac{1500}{x} + 100\right) \cdot \frac{x}{100} = 420.$$

Nga ky ekuacion racional thyesor fitohet ekuacioni kuadratik  $x^2 - 305x + 1500 = 0$ , zgjidhjet e të cilit janë

$x_1 = 5$ ,  $x_2 = 300$ , që do të thotë se kamata është 5%, kurse shumta e depozituar në fillim ka qenë  $\frac{1500}{5} = 300$ .

Zgjidhja e dytë  $x_2 = 300$ , për kamatën, nuk mund të jetë zgjidhje e detyrës sepse kamata nuk mund të merret 300%.

## Detyra për ushtrime!

1. Zgjidhni ekuacionet

a)  $8x + 11 + \frac{7}{x} = \frac{21 + 65x}{7};$

b)  $\frac{6}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} = 2 - \frac{x + 4}{x + 1};$

c)  $\frac{3x + 5}{x - 2} - \frac{x - 2}{x + 2} = -\frac{3}{2};$

ç)  $\frac{2x}{x + 1} + \frac{2x}{x - 1} = \frac{16}{3};$

d)  $\frac{2x - 3}{x + 1} = \frac{3x - 5}{2x - 1};$

f)  $\frac{5x}{2x^2 - x - 1} + \frac{5}{2x + 1} = \frac{4x - 5}{x^2 - 1};$

2. Ndryshimi i vlerave reciproke të dy numrave të plotë, të njëpasnjëshëm, është  $\frac{1}{30}$ . Cilët janë ata numra?
3. Një grup nxënësish duhet të grumbullojnë një shumë prej 6000 denarë me kusht që secili të jep vlerë të njëjtë parash. Dy nxënës të grupit hoqën dorë nga ky aksion, prandaj ata që ngelën duhet ta mbulojnë mungesën e tyre duke dhënë edhe nga 150 denarë shtesë. Sa nxënës kishte grupi?
4. Një tren largësinë prej 650 km e kalon për tre orë më pak se sa një tren i dytë shpejtësia e të cilit është për 15 km/h më e ulët se sa e trenit të parë. Caktoni shpejtësitë e të dy trenave.



## 2.8 EKUACIONET BIKUADRATIKE

### Rikujtoni!

- Sa është fuqia e ekuacionit  $x^4 - 9x^2 = 0$ ?
- Sa rrënjë ka ekuacioni i mësipërm?
- Kontrolloni se cilët nga numrat  $-3, 3, 4, -4, 0$  janë rrënjë të ekuacionit!

### Aktivitet

Caktoni gjitha rrënjët e ekuacionit  $x^4 - 9x^2 = 0$ .

### Shembulli 1

Caktoni rrënjët e ekuacioneve të mëposhtme:

- a)  $x^4 = 0$ ;      b)  $x^4 - 81 = 0$ ;      c)  $x^4 - 16x^2 = 0$ .

**Zgjidhje:**

- a) Nga  $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$  del se rrënjët e këtij ekuacioni janë  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ , përkatësisht se ekuacioni ka rrënjë të katërfishtë të barabartë me 0.
- b)  $x^4 - 81 = 0$  mund të shkruhet si  $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$ , d.m.th.  $(x - 3)(x + 3)(x - 3i)(x + 3i) = 0$ . Pra, zgjidhje të ekuacionit janë  $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 3i, x_4 = -3i$ , d.m.th. ekuacioni ka katër rrënjë të ndryshme, dy reale dhe dy komplekse.
- c) Pasi  $x^4 - 16x^2 = x^2(x^2 - 16)$ , fitojmë ekuacionin  $x \cdot x(x - 4)(x + 4) = 0$ . Zgjidhje të ekuacionit janë  $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = -4$ , prandaj ekuacioni ka një rrënjë të dyfishtë dhe dy rrënjë reale të ndryshme.

### Mbani mend!

Ekuacionin e formës  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , ku  $a, b, c \in \mathbb{R}$  dhe  $a \neq 0$ , e quajmë **ekuacion bikuadratik**.

Që të gjejmë zgjidhjet e ekuacionit bikuadratik  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , ekuacionin e shkruajmë si  $a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$  dhe marrim ndryshoren e re, d.m.th. zëvendësimin  $y = x^2$ . Në këtë mënyrë fitojmë ekuacion kuadratik sipas  $y$ , e që është  $ay^2 + by + c = 0$ . Rrënjët e tij  $y_1, y_2$  mund t'i përcaktojmë me anë të formulës për zgjidhjen e ekuacionit kuadratik. Pastaj, që t'i caktojmë zgjidhjet e ekuacionit bikuadratik, e kthejmë zëvendësimin, d.m.th. i zgjidhim ekuacionet  $x^2 = y_1$  dhe  $x^2 = y_2$ , me çka fitojmë  $x_{1/2} = \pm\sqrt{y_1}$ ,  $x_{3/4} = \pm\sqrt{y_2}$ .



**Shembulli 2**

Zgjidhni ekuacionin  $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ .

**Zgjidhje:**

Ekuacionin e shkruajmë në formën  $(x^2)^2 - 7x^2 + 12 = 0$  dhe marrim zëvendësimin  $y = x^2$ . Kështu fitojmë ekuacionin kuadratik  $y^2 - 7y + 12 = 0$ . Rrënjët e këtij ekuacioni janë  $y_1 = 3$  dhe  $y_2 = 4$ . Me kthimin e zëvendësimit marrim  $x^2 = 3$  dhe  $x^2 = 4$ . Nga  $x^2 = 3$  fitojmë  $x_1 = \sqrt{3}$ ,  $x_2 = -\sqrt{3}$ , kurse nga  $x^2 = 4$  del  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = -2$ . Pra, ekuacioni ka katër rrënjë reale të ndryshme.

**Detyra 1**

Zgjidhni ekuacionin  $x^4 - 13x^2 + 12 = 0$ .

**Detyra 2**

Thjeshtoni thyesën  $\frac{x^2 - 9}{x^4 - 13x^2 + 36}$ .

**Detyra për ushtrime!**

1. Zgjidhni ekuacionet:

a)  $10x^4 = 0$ ;    b)  $4x^4 - 64 = 0$ ;    c)  $x^4 - 9x^2 = 0$ .

2. Caktoni zgjidhjet e ekuacioneve:

a)  $\frac{30 - 2x^2}{x^2 - 6} + \frac{5x^2 - 16}{10} = \frac{2x^2 + 3}{5}$ ;    b)  $(x^2 - 5)(4x^2 + 5) = 6x^2$ .

3. Syprina e një drejtkëndëshi është  $60 \text{ cm}^2$ , kurse diagonalja e tij është  $13 \text{ cm}$ . Caktoni gjatësitë e brinjëve të drejtkëndëshit.

4. Formoni ekuacionin bikuadratik rrënjët e të cilit janë  $x_1 = \sqrt{5}$ ,  $x_2 = -\sqrt{5}$ ,  $x_3 = 4$ ,  $x_4 = -4$ .

5. Thjeshtoni thyesën  $\frac{x^4 - 20x^2 + 64}{x^2 + 2x - 8}$ .

## 2.9 SISTEMI ME NJË EKUACION LINEAR ME DY NDRYSHORE DHE NJË EKUACION KUADRATIK ME DY NDRYSHORE

### Rikujtoni!

- Si zgjidhet sistemi i ekuacioneve lineare me metodën e zëvendësimit.
- Zgjidhni sistemin  $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$  me metodën e zëvendësimit.

### Aktivitet

Kontrolloni se cili nga çiftet  $(x, y) \in \left\{ (1, 1), (0, 2), (2, 0), \left( \frac{8}{5}, -\frac{6}{5} \right) \right\}$  është zgjidhje e sistemit  $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ .

### Shembulli 1

Zgjidhni sistemin  $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ .

**Zgjidhje:**

Vërejmë që sistemi  $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$  është i ndërtuar nga një ekuacion linear me dy ndryshore dhe një ekuacion kuadratik me po të njëjtat ndryshore. Ky sistem mund të zgjidhet njëloj si sistemi me dy ekuacione lineare me dy ndryshore, me metodën e zëvendësimit. Në fakt, nga ekuacioni linear e shprehim njëren ndryshore, për shembull, në sistemin e dhënë të ekuacioneve nga ekuacioni i parë mund ta shprehim ndryshoren  $y$  me  $y = 2 - 2x$ . Duke zëvendësuar në ekuacionin kuadratik, fitojmë:

$$x^2 + (2 - 2x)^2 = 4,$$

d.m.th.

$$5x^2 - 8x = 0.$$

Zgjidhjet e ekuacionit kuadratik janë  $x_1 = 0$  dhe  $x_2 = \frac{8}{5}$ . Për  $x_1 = 0$  fitojmë  $y_1 = 2 - 2 \cdot 0 = 2$ , kurse për  $x_2 = \frac{8}{5}$  fitojmë  $y_2 = 2 - 2 \cdot \frac{8}{5} = -\frac{6}{5}$ . Domethënë, zgjidhjet e sistemit të dhënë të ekuacioneve janë çiftet  $(0, 2)$  dhe  $\left( \frac{8}{5}, -\frac{6}{5} \right)$ .

**Mbani mend!**

- Sistemi  $\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \end{cases}$ , ku të paktën njëri nga koeficientet  $a$ ,  $b$ , ose  $c$  është i ndryshëm nga zero është *forma e përgjithshme e sistemit me një ekuacion linear me dy ndryshore dhe një ekuacioni kuadratik me dy ndryshore*.
- Një sistem i tillë i ekuacioneve zgjidhet me metodën e zëvendësimit dhe zgjidhjet e tij janë çifte, dyshe, të renditura.

**Shembulli 2**

Zgjidhni sistemin  $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ x^2 + xy + y^2 = 9 \end{cases}$

**Zgjidhje:**

Nga ekuacioni linear kemi  $x = 6 - 3y$  dhe duke zëvendësuar në ekuacionin kuadratik, fitojmë:

$$(6 - 3y)^2 + (6 - 3y)y + y^2 = 9,$$

d.m.th.

$$7y^2 - 30y + 27 = 0,$$

Rrënjët e ekuacionit kuadratik janë  $y_1 = 3$  dhe  $y_2 = \frac{9}{7}$ . Për  $y_1 = 3$  fitojmë  $x_1 = 6 - 3 \cdot 3 = -3$ , kurse për  $y_2 = \frac{9}{7}$

kemi  $x_2 = 6 - 3 \cdot \frac{9}{7} = \frac{15}{7}$ . Kështu, zgjidhje të sistemit të ekuacioneve janë dyshet e renditura  $(-3, 3)$  dhe  $(\frac{15}{7}, \frac{9}{7})$ .

**Detyra 1**

Zgjidhni sistemet e ekuacioneve:

a)  $\begin{cases} x \cdot y = 6 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x^2 + 4y + y^2 = 1 \end{cases}$

**Shembulli 3**

Dy shumëkëndësja kanë gjithsej 14 brinjë dhe 40 diagonale, përkatësisht. Për cilët shumëkëndësja bëhet fjalë??

**Zgjidhje:**

Le të jetë  $x$  numri i brinjëve të njërit shumëkëndësh, kurse  $y$  numri i brinjëve të shumëkëndëshit tjetër. Sipas kushteve të detyrës njëri nga ekuacionet do të jetë  $x + y = 15$ . Numri i diagonaleve të

shumëkëndëshit me  $x$  brinjë është  $\frac{x(x-3)}{2}$ , prandaj ekuacioni i dytë do të jetë  $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{y(y-3)}{2} = 40$ .



Për përcaktimin e numrit të brinjëve të shumëkëndëshave kemi sistemin në vijim të ekuacioneve:

$$\begin{cases} x+y=15 \\ x(x-3)+y(y-3)=80 \end{cases} \quad \text{ose} \quad \begin{cases} x+y=15 \\ x^2-3x+y^2-3y=80 \end{cases}$$

Nga ekuacioni linear marrim  $x = 15 - y$  dhe e zëvendësojmë në ekuacionin kuadratik. Kemi:

$$(15-y)^2 - 3(15-y) + y^2 - 3y = 80,$$

d.m.th.

$$y^2 - 15y + 50 = 0.$$

Rrënjë të këtij ekuacioni kuadratik janë  $y_1 = 5$  dhe  $y_2 = 10$ . Për  $y_1 = 5$  fitojmë  $x_1 = 10$ , kurse për  $y_2 = 10$  fitojmë  $x_2 = 5$ . Kështu, njëri shumëkëndësh ka 5, kurse tjetri shumëkëndësh ka 10 brinjë.

### Detyra për ushtrime!

1. Zgjidhni sistemet:

a)  $\begin{cases} x-3y=-3 \\ 3x^2+2x+3y^2-3=0 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} y-x=1 \\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{9}{10} \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x-y=2 \\ \frac{y+3}{x}+\frac{x-4}{y}=1 \end{cases}$

2. Zgjidhni sistemin:  $\begin{cases} x \cdot y = 3m^2 \\ x + y = 4m \end{cases}$

3. Shuma e një thyese dhe vlerës reciproke të saj është  $\frac{29}{10}$ , kurse shuma e numëruesit dhe e emëruesit të thyesës është 7. Për cilën thyesë bëhet fjalë?

4. Një fermer dëshiron të vë gardh përreth kopshtit në formë drejtkëndëshi, por në mënyrë që vetëm njëra nga anët të mos jetë me gardh. Ai ka një tel gardhi me gjatësi 40 metra. Po ashtu, dëshiron që kopshti të ketë syprinë  $150 \text{ m}^2$ . Gjeni dimensionet e kopshtit.

## DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

- Për cilën vlerë të parametrut  $m$  ekuacioni  $(2m-1)x^2 - 4mx + 3 = 0$  është ekuacion kuadratik?
- Shkruani në formë normale ekuacionet e mëposhtme:
  - $3x^2 - 9x + 36 = 0$ ;
  - $2x^2 = 8x$ ;
  - $\frac{2}{3}x^2 - 4x + 1 = 0$ .
- Për cilën vlerë të parametrut  $m$  ekuacioni  $(m+2)x^2 + m - 5 = 0$  do të ketë rrënjë reale?
- Caktoni natyrën e rrënjëve të ekuacioneve:
  - $x^2 + x - 3 = 0$ ;
  - $3x^2 + 2x + 1 = 0$ ;
  - $4x^2 - 40x + 25 = 0$ ;
  - $x^2 - 8x + 15 = 0$ .
- Zgjidhni ekuacionet:
  - $(x+1)^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-1)$ ;
  - $x^2 - 10 = 3(x^2 - 4)$ ;
  - $\frac{x^2}{4} - 6x = 0$ ;
  - $\frac{2x^2 - 9x}{2} = \frac{5x^2 + 7x}{4}$ ;
  - $4x^2 - 12x + 9 = 0$ ;
  - $x^2 - 2x - 15 = 0$ .
- Zgjidhni ekuacionin  $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ .
- Për cilat vlera të parametrut  $k$  ekuacioni  $kx^2 + 2kx + k + 1 = 0$ 
  - do të ketë rrënjë të dyfishtë;
  - do të ketë dy rrënjë reale të ndryshme;
  - nuk do të ketë rrënjë reale.
- Duke zbatuar formulat e Vietit, formoni ekuacionin kuadratik me rrënjë
  - $x_1 = -2$  dhe  $x_2 = -7$ ;
  - $x_1 = 3 + \sqrt{5}$  dhe  $x_2 = 3 - \sqrt{5}$ .
- Le të jenë  $x_1$  dhe  $x_2$  rrënjë të ekuacionit kuadratik  $3x^2 - 2x + 6 = 0$ . Pa e zgjidhur ekuacionin, caktoni vlerën e shprehjes  $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ .
- Zbërtheni trinomin në shumëzues linear:
  - $2x^2 - \frac{22}{3}x + 4 = 0$ ;
  - $2x^2 + 5x - 3 = 0$ .
- Pa zbatuar formulat e Vietit, formoni ekuacionin kuadratik rrënjë të të cilit janë  $-2$  dhe  $6$ .
- Thjeshtoni thyesat
  - $\frac{x^2 - x - 12}{(x+3)^2}$ ;
  - $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1}$ .
- Zgjidhni ekuacionet:
  - $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+2} = 1$ ;
  - $\frac{x+5}{5-x} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{100}{25-x^2}$ ;
  - $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = 2\frac{1}{6}$ .
- Zgjidhni ekuacionet:
  - $12x^4 = 0$ ;
  - $5x^4 = 125$ ;
  - $x^4 - 36x^2 = 0$ .
- Caktoni zgjidhjet e ekuacioneve:
  - $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ ;
  - $(x^2 - 4x + 3)^2 + 8x(x^2 + 3) + 12 = 0$ .

16. Thjeshtoni thyeshën  $\frac{x^4-1}{x^4-5x^2+4}$ .

17. Zgjidhni sistemet e ekuacioneve:

a)  $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2-29=0 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x-y=5 \\ 3x^2+2y^2+3x-4y=-2xy \end{cases}$

18. Drenusha thur kapela, me dorë, dhe i shet. Të ardhurat e saja ditore nga shitja e kapelave i njehson me formulën  $x(x-47)$ , ku  $x$  është çmimi, në euro, i një kapele. Drenusha dëshiron që të realizojë të ardhura ditore në vlerën 150 euro. Me çfarë çmimi duhet t'i shet ajo kapelat?

19. Një parcelë drejtkëndore e gjerë 6 m dhe e gjatë 4 m përshkohet me rrugë. Gjerësia e rrugës kudo është e njëjtë. Nëse rruga dhe parcela kanë syprina të barabarta, atëherë sa është e gjerë rruga?

20. Një prodhuesi aparatesh të vogla për amvisëri i rezulton se fitimi  $P$  (në dollarë) i realizuar me prodhimin e  $x$  furrave mikrovalë, për javë, mund të llogaritet me formulën  $P = \frac{1}{10}x(300-x)$ , me kusht që  $0 \leq x \leq 200$ . Sa furra të tilla duhet të prodhojë, në një javë të caktuar, me qëllim që të realizojë fitim prej 1250 dollarësh?

21. Një direk nga dy anë të kundërta është përforcuar me dy kablllo, secila për 2 metra më e gjatë se direku. Distanca mes pikave mbështetëse, në tokë, e kablllove është sa gjatësia e një kabllloje. Sa është i lartë direku?



22. Një numër i caktuar nxënësish, i një paraleleje, morën pjesë në një garë shahu. Numri i përgjithshëm i dueleve të luajtur ishte 253.

a) Sa nxënës kanë marrë pjesë në garë?

b) Cila nga zgjidhjet e ekuacionit kuadratik do të shpërfilllet dhe pse?

23. Një tregtar e nget makinën nga qyteti A deri te qyteti B, që janë në distancë 120 km, me shpejtësi konstante. Më pas e rrit shpejtësinë për 10 km/h dhe me këtë shpejtësi kalon 150 km nga qyteti B deri në Shkup. Nëse etapa e dytë e udhëtimit të tij zgjat 6 minuta më shumë se etapa e parë, me çfarë shpejtësie ka lëvizur nga A deri te B?

24. Caktoni dy numrat shuma e të cilëve është 20, kurse shuma e kuadratikëve të tyre është 272.

25. Prodhimi i shifrave të një numri dyshifrorë është 8, kurse gjatë pjesëtimit të atij numri me shumën e shifrave të tij fitohet 4. Gjeni këtë numër.



## FUNKSIONET KUADRATIKE, INEKUACIONI KUADRATIK DHE SISTEMI I INEKUACIONEVE ME NJË TË PANJOHUR

Funksioni kuadratik është njëri nga funksionet më të rëndësishme në algjebër dhe paraqet zgjerim të natyrshëm të studimit të ekuacioneve kuadratike. Në këtë temë do të njihemi me vetitë e këtij funksioni, formën e grafikut të tij, si dhe me inekuacionet kuadratike dhe zgjidhjen e tyre. Funksionet kuadratike dhe inekuacionet kuadratike janë elemente kyç për studimin numerik dhe grafik të modeleve parabolike, që mundësojnë të kuptuarit e thellë të fenomeneve jolineare. Studimi i funksioneve kuadratike na mundëson të kuptuarit e parabolës (lakores që është grafiku i këtij funksioni) dhe transformimeve të saj, përderisa zgjidhja e inekuacioneve kuadratike na mundëson përcaktimin e intervaleve në të cilët funksioni kuadratik është më i madh ose më i vogël nga një vlerë e caktuar.

Funksioni kuadratik dhe zgjidhja e inekuacioneve kuadratike kanë zbatim të gjerë në zgjidhjen e shumë problemeve praktike. Për shembull, në fizikë për modelimin e trajektoreve të predhave dhe lartësisë që arrin ajo si funksion i kohës, në ekonomi për analizimin e harxhimeve dhe përcaktimin e harxhimeve dhe profiteve maksimale dhe minimale, kurse në biologji për modelimin e efekteve me natyrë kuadratike të ilaçeve përkatëse.

### 3.1 FUNKSIONI KUADRATIK. GRAFIKU I FUNKSIONIT $f(x) = x^2$

#### Rikujtoni!

- Funksioni i formës  $y = ax + b$ , ku  $a$  dhe  $b$  janë numra realë, kurse  $x$  ndryshore e pavarur, quhet funksion linear.
- Fusha e përkufizimit e funksionit linear,  $D$  është bashkësia e numrave realë, d.m.th.  $D = \mathbb{R}$ .
- Bashkësia e vlerave,  $V$ , e funksionit linear, gjithashtu, është bashkësia e numrave realë, d.m.th.  $D = \mathbb{R}$ .
- Grafiku i funksionit linear është drejtëz dhe për vizatimin e grafikut të funksionit linear, mjafton të përcaktojmë dy pika të grafikut të tij.

#### Aktivitet

Me tabelë, paraqitni vlerat e funksionit  $f(x) = x^2$ , për  $x \in D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Çiftet e renditura të fituara  $(x, f(x))$  të paraqiten grafiki në sistemin koordinativ.

**Mbani mend!**

- Funksioni i formës  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ku  $x$  është ndryshore  $a, b, c$  janë numra realë dhe  $a \neq 0$ , quhet *funksion kuadratik me një të panjohur*.
- Fusha e përkufizimit e funksionit kuadratik është  $D_f = \mathbb{R}$ .
- Shpesh, në vend të  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , shkruajmë  $y = ax^2 + bx + c$ .
- Grafiku i funksionit kuadratik është bashkësia e pikave  $G_f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = ax^2 + bx + c\}$ .
- Lakoren që fitohet me paraqitjen grafike të funksionit kuadratik e quajmë *parabolë*.

**Shembulli 1**

Caktoni koeficientët  $a, b$  dhe  $c$  të funksionit kuadratik  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , nëse  $f(0) = 0, f(1) = 5, f(2) = 16$ .

**Zgjidhje:**

Zëvendësimi i vlerave përkatëse për  $x$  në formulën e funksionit kuadratik jep  $f(0) = c, f(1) = a + b + c, f(2) = 4a + 2b + c$ , d.m.th. fitojmë sistemin e ekuacioneve lineare në vijim:

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 16 \end{cases}, \text{zgjidhje e të cilit është } a = 3, b = 2 \text{ dhe } c = 0. \text{ Funksioni i kërkuar është } f(x) = 3x^2 + 2x.$$

**Detyra 1**

Caktoni funksionin kuadratik  $f(x) = x^2 + bx + c$ , grafiku i të cilit përmban pikat  $A(-1, 0)$  dhe  $B(4, 0)$ .

**Shembulli 2**

Për cilat vlera të parametrin  $m$  funksioni i dhënë do të jetë funksion kuadratik:

a)  $f(x) = 4x^2 + (m - 3)x$ ;      b)  $f(x) = (m + 5)x^2 - 2x - 7$ .

**Zgjidhje:**

Që funksioni të jetë kuadratik duhet të plotësohet kushti  $a \neq 0$ .

a) Në funksionin  $f(x) = 4x^2 + (m - 3)x$ , koeficienti  $a = 4 \neq 0$ .

Kjo do të thotë që, vlera e parametrin  $m$  nuk ndikon në natyrën e funksionit, pra ai do të jetë funksion kuadratik për çdo  $m \in \mathbb{R}$ .

b) Në  $f(x) = (m + 5)x^2 - 2x - 7$ , koeficienti  $a = (m + 5)$ .

Nga kushti i detyrës, që funksioni të jetë kuadratik patjetër  $a \neq 0$ , pra  $m + 5 \neq 0$ , respektivisht  $m \neq -5$ .

- Nëse  $b = c = 0$ , atëherë funksioni kuadratik ka formën  $f(x) = ax^2, a \neq 0$ .
- Nëse  $a = 1, b = c = 0$ , fitojmë funksionin kuadratik më të thjeshtë  $y = x^2$ .

## Shembulli 3

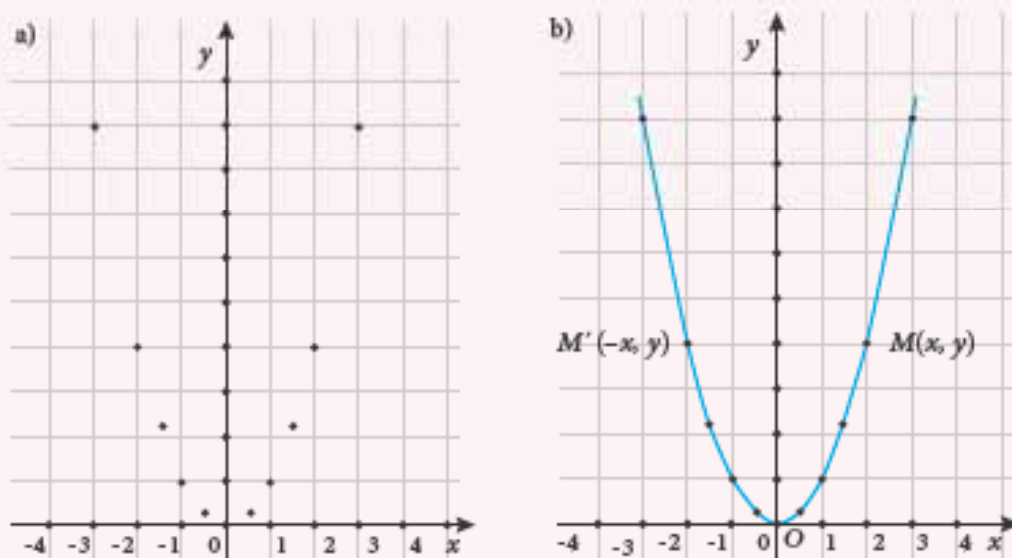
Për funksionin  $y = x^2$  në tabelë, shënoni vlerat e funksionit për  $x \in \{-3; -2; -1,5; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 3\}$ . Në sistem koordinativ paraqitni pikat përkatëse të grafikut të funksionit dhe lidhni ato mes veti që të fitoni pamjen e grafikut të tij

**Zgjidhje:**

Tabela e kërkuar është

|       |    |    |      |    |      |   |      |   |      |   |   |
|-------|----|----|------|----|------|---|------|---|------|---|---|
| $x$   | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5  | 1 | 1,5  | 2 | 3 |
| $x^2$ | 9  | 4  | 2,25 | 1  | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 9 |

Nga tabela mund të përfundojmë se  $(-3, 9)$ ,  $(-2, 4)$ ,  $(-1,5, 2,25)$ ,  $\dots$ ,  $(1,5, 2,25)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(3, 9)$  janë pika të grafikut të funksionit  $y = x^2$ . Këto pika janë paraqitur në sistemin koordinativ të dhënë në Vizatimin 1a). Sa më shumë pika të grafikut të funksionit të vendosim në sistemin koordinativ, aq më e mirë do të jetë paraqitja grafike e funksionit.



Vizatimi 1

- Nëse në sistemin koordinativ vendosen gjitha pikat  $(x, x^2)$ , për  $x \in \mathbb{R}$  të grafikut të funksionit  $y = x^2$  pikat do të formojnë parabolë (Vizatimi 1b).
- Origjina e sistemit koordinativ  $O(0, 0)$  është pika më e ulët e grafikut. Kjo pikë është **kulmi** i parabolës.
- Mund të vërejmë që për çdo pikë  $M(x, y)$  të parabolës  $\{(x, y) \mid y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$  pika  $M'(-x, y)$ , e cila është simetrike me  $M$  në raport me boshtin  $y$ , gjithashtu i takon parabolës. Kjo nënkupton se boshti  $y$  është bosht i simetrisë i kësaj parabole.



## Detyra për ushtrime!

1. Cilat nga funksionet e dhëna janë kuadratike:

a)  $f(x) = x^2 - 2x^2$ ;

b)  $f(x) = 5x^2$ ;

c)  $f(x) = x(2x - 3)$ ;

ç)  $f(x) = 2 - 3x - x^2$ ;

d)  $f(x) = -2x + 3x^2 - 5$

2. Për cilat vlera të parametrin  $m$  funksioni i dhënë është kuadratik:

a)  $f(x) = 2x^2 - (m+1)x + 7$ ;

b)  $f(x) = (m-3)x^2 + x + 1$ ;

c)  $f(x) = (m^2 - 9)x^2 - 4x - 5 + m$ .

3. Jepet  $f(x) = 2x^2$ .

a) Në fletore, rishkruani tabelën e më pas plotësoni të njëjtën:

|       |      |    |    |      |   |     |   |   |     |
|-------|------|----|----|------|---|-----|---|---|-----|
| $x$   | -2,5 | -2 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 2,5 |
| $x^2$ |      |    |    |      |   |     |   |   |     |

b) Vizatoni grafikun e këtij funksioni dhe përmes tij krahasoni vlerat e mëposhtme të funksionit

•  $f(-4)$  dhe  $f(-2)$ ;

•  $f(-4)$  dhe  $f(2)$ ;

•  $f(x_1)$  dhe  $f(x_2)$  nëse  $x_1 < x_2 < 0$ ;

•  $f(x_1)$  dhe  $f(x_2)$  nëse  $0 < x_1 < x_2$ .

4. Është dhënë funksioni  $f(x) = -x^2 + bx + c$ . Caktoni vlerat e  $b$  dhe  $c$ , nëse:

a)  $f(1) = -3, f(0) = 1$ ;

b)  $f(-2) = -10, f(2) = -6$ .

5. Caktoni funksioni  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , nëse  $f(1) = 2, f(-2) = 29, f(2) = 5$ .

6. Caktoni parametrin  $m$  ashtu që grafiku i funksionit  $f(x) = 2x^2 - (m+1)x + 1$  të kalojë nëpër pikën  $(-1, 5)$ .

7. Vërtetoni që për funksionin  $f(x) = x^2 + x + k$  vlen  $f(k-1) = k^2$ .

8. Caktoni funksionin  $f(x) = ax^2 + c$ , nëse

a)  $f(1) = 0$  dhe  $f(-2) = 3$ ;

b)  $f(0) = -1$  dhe  $f(4) = 12$ .

## 3.2 GRAFIKU I FUNKSIONEVE

$$f(x) = ax^2 \text{ DHE } f(x) = ax^2 + c$$

### Rikujtoni!

- Si e quajmë lakoren që paraqet grafikun e funksionit  $y = x^2$ ?
- Cila pikë është kulmi i parabolës  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ?
- Cila drejtëz është bosht i simetrisë së parabolës  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ?

### Shembulli 1

Vizatoni grafikët e funksioneve të dhëna në sistemin e njëjtë koordinativ:

a)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 3x^2$ ,  $h(x) = \frac{1}{3}x^2$       b)  $f(x) = 3x^2$ ,  $g(x) = -3x^2$ .

**Zgjidhje:**

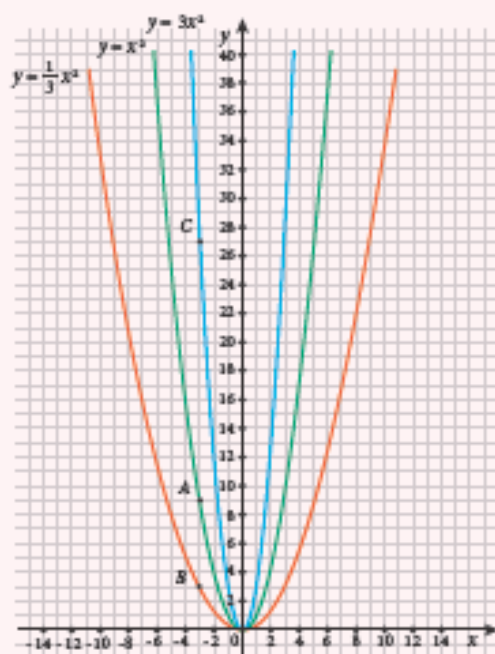
- a) Përzgjedhim disa vlera të ndryshores  $x$  dhe i llogaritim vlerat e funksioneve për të caktuar disa pika të grafikëve të tyre.

|                  |    |               |   |               |    |
|------------------|----|---------------|---|---------------|----|
| $x$              | -3 | -1            | 0 | 1             | 3  |
| $x^2$            | 9  | 1             | 0 | 1             | 9  |
| $3x^2$           | 27 | 3             | 0 | 3             | 27 |
| $\frac{1}{3}x^2$ | 3  | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 3  |

Duke shfrytëzuar të dhënat nga tabela dhe duke i lidhur pikat përkatëse fitojmë grafikët e funksioneve (shihni Vizatimin 1).

Tripikat e shënuara me  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  janë pikat e grafikëve të funksioneve përkatëse të fituara për vlerën e  $x = -3$  (të tri pikat kanë koordinatën  $x$  të barabartë me  $-3$ ).

Nga vlera e koordinatës  $y$ , e këtyre tri pikave, mund të vërejmë që për vlerat më të mëdha të koeficientit para  $x^2$  (koeficientit  $a$  të funksionit kuadratik), fitohen koordinata (ordinata) më të mëdha  $y$  për të njëjtën vlerë të  $x$  ( $x \neq 0$ ).

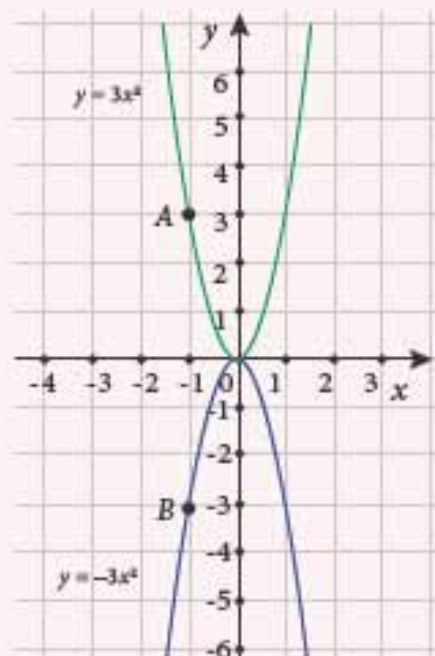


$$= \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$$

b) Tabela me vlerat e këtyre funksioneve për vlerat e njëjta të  $x$  është

|         |     |    |   |    |     |
|---------|-----|----|---|----|-----|
| $x$     | -3  | -1 | 0 | 1  | 3   |
| $3x^2$  | 27  | 3  | 0 | 3  | 27  |
| $-3x^2$ | -27 | -3 | 0 | -3 | -27 |

Në vizatimin djathtas, grafikusht, janë paraqitur funksionet e dhëna. Mund të vërejmë se ordinatat e pikave  $A$  dhe  $B$  janë numra të kundërt. Kjo vlen për gjitha pikat e grafikëve për të cilat  $x \neq 0$ . Kjo tregon se grafiku i funksionit  $y = -3x^2$  mund të fitohet nga grafiku i funksionit  $y = 3x^2$  me refleksion në raport me boshtin e abshisës  $x$ .



### Mbani mend!

- Grafiku i funksionit  $y = ax^2$ ,  $a \neq 0$  është lakorja që quhet *parabolë*.
- Pika më e ulët e grafikut (kur  $a > 0$ ), përkatësisht pika më e lartë e grafikut (kur  $a < 0$ ) quhet *kulm i parabolës*.
- Kulmi i parabolës  $y = ax^2$  që është grafiku i funksionit  $f(x) = ax^2$ , është origjina e koordinatave.
- Nëse  $a > 0$ , atëherë me rritjen e vlerave të koeficientit  $a$  rriten edhe vlerat e ordinatave të pikave të grafikut  $y = ax^2$  për vlerat e njëjta të ndryshores  $x$ , d.m.th. me rritjen vlerës së  $a$ , grafiku i funksionit  $y = ax^2$  bëhet më i pjerrët – është gjithmonë e më afër boshtit  $y$ .
- Nëse  $a > 0$ , atëherë parabola është e hapur lart, ka degët lart, kurse nëse  $a < 0$ , atëherë parabola është e hapur poshtë, ka degët poshtë.
- Për funksionin  $y = ax^2$ ,  $a \neq 0$  vlen  $f(-x) = f(x)$ , që do të thotë se funksioni është simetrik në raport me boshtin  $y$ .

### Detyra 1

Vizatoni, në sistem të njëjtë koordinativ, funksionet e dhëna.

a)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 2x^2$ ,  $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ ;

b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ,  $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ .



**Rikujtoni!**

Nëse  $A$  është pikë me koordinata  $(1,2)$ , caktoni koordinatat e pikës  $B$  e cila fitohet me translacion të pikës  $A$  për 2 njësi lart dhe të pikës  $C$  e cila fitohet me translacionin e pikës  $A$  për 5 njësi poshtë.

**Shembulli 2**

Vizatoni grafikët e funksioneve

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 4, \quad h(x) = x^2 - 2,$$

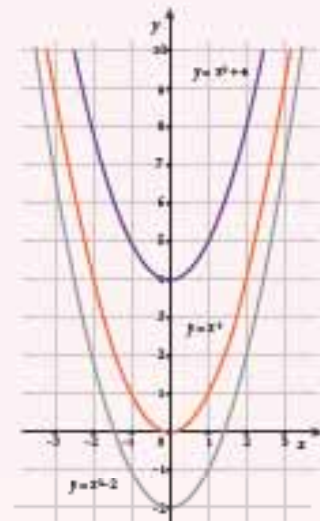
në sistemin e njëjtë koordinativ dhe vëreni lidhjen mes grafikëve të tyre.

**Zgjidhje:**

Fillimisht e ndërtojmë tabelën me disa vlera të funksioneve të dhëna.

Më pas, përmes pikave të gjetura vizatojmë parabolat që përfaqësojnë grafikët e funksioneve. (Vizatimi 2).

| $x$ | $f(x) = x^2$ | $g(x) = x^2 + 4$  | $h(x) = x^2 - 2$  |
|-----|--------------|-------------------|-------------------|
| -2  | 4            | $4 + 4 = 8$       | $4 - 2 = 2$       |
| -1  | 1            | $1 + 4 = 5$       | $1 - 2 = -1$      |
| 0   | 0            | $0 + 4 = 4$       | $0 - 2 = -2$      |
| 1   | 1            | $1 + 4 = 5$       | $1 - 2 = -1$      |
| 1,5 | 2,25         | $2,25 + 4 = 6,25$ | $2,25 - 2 = 0,25$ |
| 3   | 9            | $9 + 4 = 13$      | $9 - 2 = 7$       |



Nëse krahasojmë vlerat e funksioneve  $f(x) = x^2$  dhe  $g(x) = x^2 + 4$ , mund të vërejmë se për çdo vlerë të  $x$ -it, vlera  $g(x)$  është për 4 njësi më e madhe se vlera e  $f(x)$ . Në mënyrë analoge,  $h(x)$  është për 2 njësi më e vogël se  $f(x)$ .

Nga këtu, del se grafiku i funksionit  $g(x) = x^2 + 4$  mund të fitohet me zhvendosjen, d.m.th. translacionin e grafikut të funksionit  $f(x) = x^2$  për 4 njësi lart.

Pra, grafiku i funksionit  $g(x) = x^2 + 4$  është parabola e cila është simetrike në lidhje me boshtin e ordinatës  $y$ , kurse pika më e ulët e saj është pika  $(0,4)$  dhe është pikërisht kulmi i kësaj parabole.

Në mënyrë analoge, grafiku i funksionit  $h(x) = x^2 - 2$  është parabola, simetrike me boshtin e ordinatës  $y$ , e cila fitohet me zhvendosjen, d.m.th. translacionin e grafikut të  $f(x) = x^2$  për 2 njësi poshtë. Kulmi i kësaj parabole është pika  $(0,-2)$ .

**Detyra 2**

Vizatoni grafikët e funksioneve  $g(x) = -\frac{1}{3}x^2$ ,  $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$  dhe  $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{2}$  në sistemin e njëjtë koordinative dhe më pas shqyrtoni disa veti të tyre.

**Mbani mend!**

Grafiku i funksionit  $y = ax^2 + c$  është parabola me kulm  $K(0, c)$ , që fitohet me translacionin e parabolës  $y = ax^2$  për  $c$  njësi lart nëse  $c > 0$ , ose për  $|c|$  njësi poshtë nëse  $c < 0$ .

**Veti të funksionit  $f(x) = ax^2 + c$ ,  $a \neq 0$ :**

- Funksioni është i përkufizuar për gjithë numrat realë, d.m.th.  $D_f = \mathbb{R}$ .
- Kulmi i parabolës është pika  $K(0, c)$ .
- Nëse  $a > 0$ , atëherë kulmi  $K(0, c)$  është pika më e ulët e grafikut, d.m.th.  $f(0) = c$  është vlera më e vogël e funksionit. Nga këtu del se bashkësia e vlerave të funksionit është  $V_f = [c, +\infty)$ .
- Nëse  $a < 0$ , atëherë kulmi  $K(0, c)$  është pika më e lartë e grafikut, d.m.th.  $f(0) = c$  është vlera më e madhe e funksionit. Pra, bashkësia e vlerave të funksionit është  $V_f = (-\infty, c]$ .
- Nga se u tha më sipër del që funksioni  $f(x) = ax^2 + c$ ,  $a \neq 0$ , në kulmin e grafikut (parabolës) ka vlerën më të vogël ose më të madhe, d.m.th. vlerën ekstreme.

Me fjalë të tjera,

nëse  $a > 0$ ,  $y_{\min} = c$  për  $x = 0$ ,

nëse  $a < 0$ ,  $y_{\max} = c$  për  $x = 0$ .

- Bosht simetrie i grafikut të funksionit (parabolës) është boshti i ordinatës  $y$ .

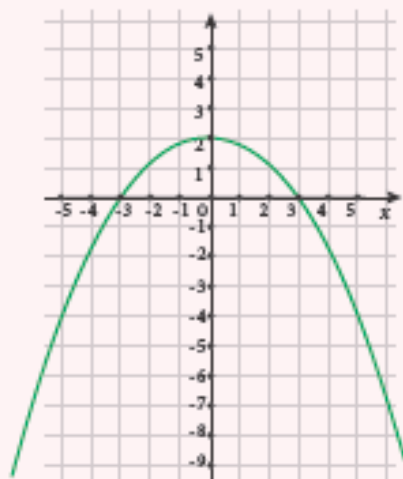
**Shembulli 3**

Përshkruani vetitë e  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$ .

**Zgjidhje:**

- Fusha e përkufizimit e funksionit është  $D_f = \mathbb{R}$ .
- Bashkësia e vlerave të funksionit është  $V_f = (-\infty, 2]$ .
- Kulmi i parabolës është pika  $K(0, 2)$ .
- Nga fakti që  $a = -\frac{1}{4} < 0$  del se funksioni ka maksimum  $y_{\max} = 2$  për  $x = 0$ .
- Grafiku i funksionit është simetrik me boshtin e ordinatës  $y$ .

Grafiku i funksionit është dhënë në vizatimin djathtas, nga ku mund të vërehet se ky grafik fitohet me refleksionin e  $y = \frac{1}{4}x^2$  në lidhje me boshtin e abshisës  $x$  dhe translacionin e parabolës së fituar për 2 njësi lart.

**Detyra 3**

Shkruani vetitë e funksionit  $y = -x^2 - 2$ . Me refleksion dhe translacion të grafikut të cilit funksion mund të fitoni grafikun e funksionit  $y = -x^2 - 2$ .

**Detyra 4**

- a) Ndërtoni një tabelë me vlera të funksionit  $y = \frac{1}{2}x^2$  për pesë vlera të ndryshores së pavarur  $x$ .
- b) Përmes tabelës skiconi grafikun e  $y = \frac{1}{2}x^2$ .
- c) Duke shfrytëzuar grafikun e  $y = \frac{1}{2}x^2$ , skiconi grafikun e funksionit  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$  dhe shkruani vetitë e funksionit  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ .

**Detyra për ushtrime!**

Vizatoni grafikët e funksioneve të dhëna, ashtu që fillimisht do ta skiconi grafikun e funksionit të parë, kurse grafikët e dy funksioneve të tjera do t'i fitoni përmes grafikut të funksionit të parë. (1-3).

1.  $y = x^2$ ,  $y = x^2 - 2$ ,  $y = x^2 + 2$ ;
2.  $y = 2x^2$ ,  $y = -2x^2$ ,  $y = -2x^2 + 1$ ;
3.  $y = -x^2$ ,  $y = 3 - x^2$ ,  $y = -4 - x^2$ .

Për funksionin e dhënë caktoni bashkësinë e vlerave, kulmin e grafikut dhe vlerën ekstreme (4-6).

4. a)  $y = x^2 + 5$ ; b)  $y = -x^2 + 1$ .
5. a)  $y = 3x^2 - 1$ ; b)  $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ .
6. a)  $y = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}$ ; b)  $y = \frac{4}{3}x^2 - 2$ .
7. Cili funksion do të fitohet nëse ordinatën e secilës pikë nga grafiku i funksionit  $y = -\frac{2}{3}x^2$ 
  - a) e zvogëlojmë për 3; b) e zmadhojmë për 4?
8. Për sa njësi dhe në cilin drejtim duhet të zhvendoset parabola  $y = ax^2 + 2$  ashtu që të fitohet parabola
  - a)  $y = ax^2$ ; b)  $y = ax^2 + 7$ ; c)  $y = ax^2 - 4$ ?



### 3.3 FORMA KANONIKE E FUNKSIONIT KUADRATIK DHE GRAFIKU I $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

#### Rikujtoni!

- Le të jetë  $A$  pikë me koordinatat  $(1,4)$ . Cilat janë koordinatat e pikave  $A_1$  dhe  $A_2$ , nëse  $A_1$  është fituar me translacionin e pikës  $A$  për 4 njësi majtas, kurse  $A_2$  është fituar me translacionin për 2 njësi djathtas të pikës  $A$ ?
- Funksioni  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ku  $a$ ,  $b$  dhe  $c$  janë numra realë dhe  $a \neq 0$ , quhet funksion kuadratik.
- Cilat nga funksionet e mëposhtme janë funksione kuadratike?
  - a)  $y = -(x - 3)^2$ ;      b)  $y = 4(x - 1)^2 + 3$ ;      c)  $y = 2(x - 1)^2 - x^2 + 1$ .

#### Shembulli 1

Vizatoni, në sistemin e njëjtë koordinativ, grafikët e funksioneve

$f(x) = x^2$ ,  $g(x) = (x + 3)^2$ ,  $h(x) = (x - 2)^2$ .  
dhe vëreni lidhjen mes grafikëve të fituar.

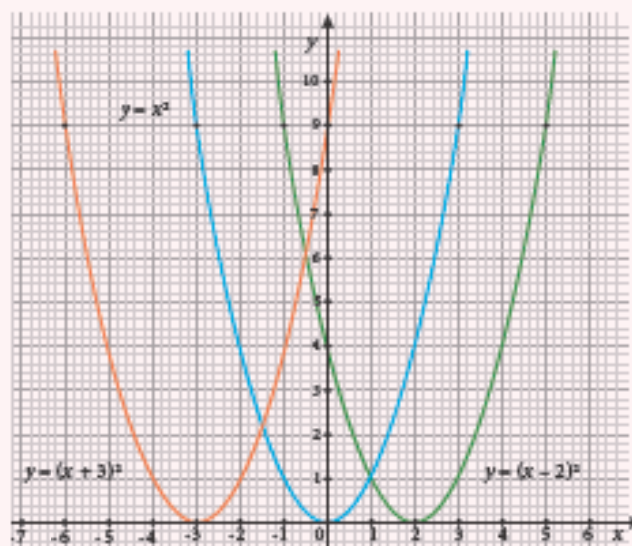
**Zgjidhje:**

Që të fitojmë parabolat që janë grafikë të tri funksioneve të dhëna, përpilojmë tabelën me vlera të funksioneve për disa vlera të ndryshores  $x$ .

| $x$ | $f(x) = x^2$ | $g(x) = (x + 3)^2$ | $h(x) = (x - 2)^2$ |
|-----|--------------|--------------------|--------------------|
| -2  | 4            | 1                  | 16                 |
| -1  | 1            | 4                  | 9                  |
| 0   | 0            | 9                  | 4                  |
| 1   | 1            | 16                 | 1                  |
| 2   | 4            | 25                 | 0                  |

Nga grafikët e funksioneve mund të vërejmë me sa vijon:

- grafiku i funksionit  $y = (x + 3)^2$  fitohet me translacion të grafikut të funksionit  $y = x^2$  përgjatë boshtit  $x$  për 3 njësi në të majtë;
- grafiku i funksionit  $y = (x - 2)^2$  fitohet me translacion të grafikut të funksionit  $y = x^2$  përgjatë boshtit  $x$  për 2 njësi në të djathtë;
- bosht simetrie për secilën parabolë të fituar është drejtëza e cila kalon nëpër kulmin e parabolës përkatëse dhe që është paralele me boshtin  $y$ .



**Mbani mend!**

- Grafiku i funksionit  $f(x) = a(x - \alpha)^2$  është parabola me kulm  $K(\alpha, 0)$  e cila fitohet me translacion të parabolës  $f(x) = ax^2$  përgjatë boshtit  $x$  për  $\alpha$  njësi djathtas nëse  $\alpha > 0$ , ose për  $|\alpha|$  majtas nëse  $\alpha < 0$ .
- Bosht simetrie i parabolës  $f(x) = a(x - \alpha)^2$  është drejtëza  $x = \alpha$ , e cila kalon nëpër kulmin e parabolës dhe është paralele me boshtin e ordnatës  $y$ .

**Detyra 1**

Vizatoni grafikët e funksionit  $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2$  dhe  $g(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^2$ .

**Shembulli 2**

Vizatoni grafikun e funksionit

$f(x) = -3x^2 + 12x - 12$  dhe analizoni vetitë e tij.

**Zgjidhje:**

Funksionin mund ta shkruajmë si

$$y = -3(x^2 - 4x + 4), \text{ d.m.th. } y = -3(x - 2)^2.$$

Fillimisht përpilojmë një tabelë me disa vlera të

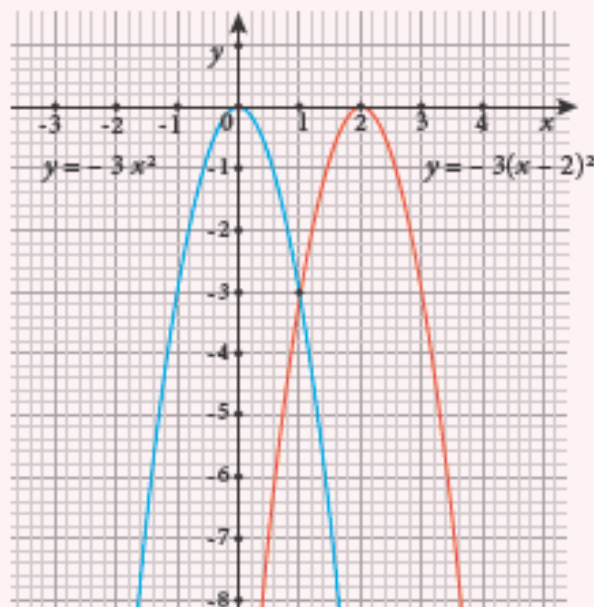
$f(x) = -3x^2$  dhe vizatojmë grafikun, parabolën, e këtij funksioni.

Grafikun e  $f(x) = 3(x - 2)^2$  e fitojmë me translacion të grafikut të  $f(x) = -3x^2$  nëpër boshtin  $x$  për 2 njësi djathtas.

Nga grafiku i  $f(x) = 3(x - 2)^2$ , mund të vërejmë vetitë në vijim të funksionit:

- Fusha e përkufizimit është  $D_f = \mathbb{R}$ . Bashkësia e vlerave të funksionit është  $V_f = (-\infty, 0]$ .
- Kulmi i parabolës është pika  $K(2, 0)$ .
- Parabola është e hapur poshtë (degët e parabolës janë poshtë) sepse  $(a = -3 < 0)$ , prandaj funksioni ka maksimum  $y_{\max} = 0$  për  $x = 2$ .
- Bosht i simetrisë së grafikut është drejtëza  $x = 2$ .

| $x$     | -2  | -1 | 0 | 1  | 2   |
|---------|-----|----|---|----|-----|
| $-3x^2$ | -12 | -3 | 0 | -3 | -12 |



**Detyra 2**

Vizatoni grafikun e funksionit  $y = 2(x - 1)^2$  dhe përshkruani vetitë e tij.

**Rikujtoni!**

Si do të ndryshojnë koordinatat e pikës e cila fitohet me translacion të pikës  $A(x, y)$  djathtas për 3 njësi dhe poshtë për 2 njësi.

**Shembulli 3**

Vizatoni grafikun e funksionit  $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3$ .

**Zgjidhje:**

Me anë të tabelës së disa vlerave të funksionit e skicojmë parabolën  $y = \frac{1}{3}x^2$  (parabola e kaltër në vizatim). Më pas e vizatojmë grafikun e funksionit  $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2$  me translacion të grafikut të  $y = \frac{1}{3}x^2$  për 4 njësi djathtas përgjatë boshtit  $x$  (parabola me vijë të ndërprerë të kuqe në vizatim).

Në fund, me translacion të grafikut

të  $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2$  për 3 njësi lart do ta fitojmë grafikun e funksionit

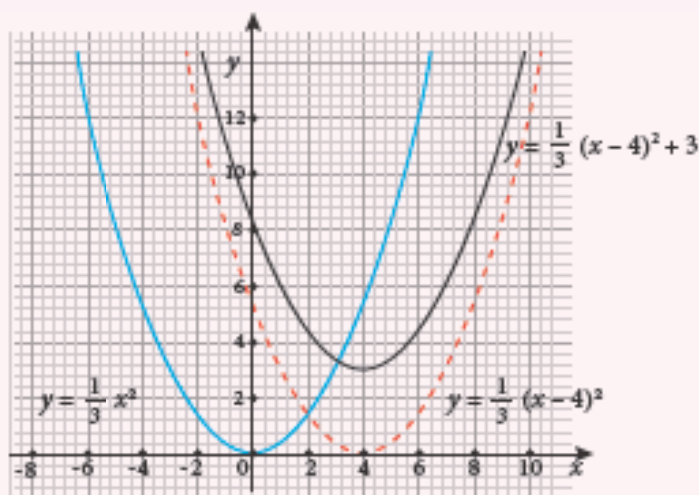
$$y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3.$$

Mund të vërejmë se grafiku i

funksionit  $y = \frac{1}{3}(x - 4)^2 + 3$  është parabola e hapur sipër, me degë lart,

sepse  $a = \frac{1}{3} > 0$ , me kulm në pikën

$K(4, 3)$  dhe bosht të simetrisë drejtëzën  $x = 4$ .

**Mbani mend!**

- Forma  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  quhet formë kanonike e funksionit kuadratik.
- Grafiku i funksionit është parabola me kulm në pikën  $T(\alpha, \beta)$  dhe bosht të simetrisë drejtëzën  $x = \alpha$ .



## Shembulli 4

Vizatoni grafikun e  $y = (x + 2)^2 - 3$ .

**Zgjidhje:**

Funksioni është dhënë në formën kanonike

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

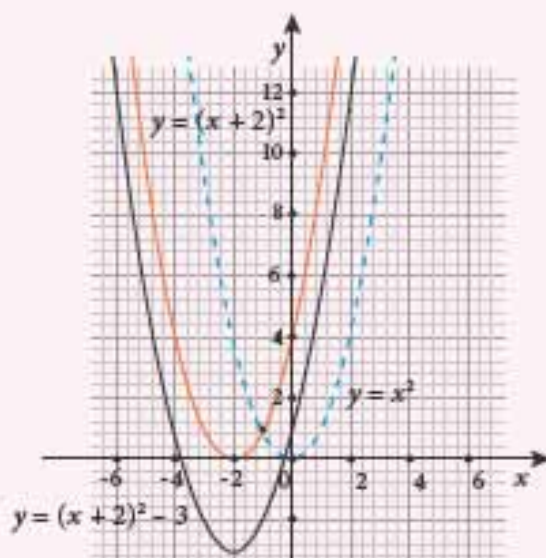
ku

$$a = 1, \alpha = -2, \text{ kurse } \beta = -3.$$

Pra, kulmi i parabolës është në pikën  $K(-2, -3)$ .

Fillimisht e vizatojmë parabolën  $y = x^2$  (vija e ndërprerë e kaltër). Më pas, me translacion për 2 njësi majtas ( $\alpha = -2$ ) e fitojmë grafikun

$y = (x + 2)^2$  (vija e verdhë), dhe në fund fare me translacion të grafikut të sapo fituar për 3 njësi poshtë ( $\beta = -3$ ) e fitojmë grafikun e funksionit të dhënë (vija e zezë).



## Detyra për ushtrime!

1. Caktoni kulmin e parabolës:

a)  $y = 4(x + 1)^2$ ;

b)  $y = 4(x + 2)^2 - 3$ ;

c)  $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$ .

2. Vizatoni grafikët e funksioneve:

a)  $f(x) = 3(x + 2)^2$ ;

b)  $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$ ;

c)  $f(x) = -5(x - 3)^2$ .

ç)  $f(x) = x^2 + 6x + 9$ ;

d)  $f(x) = -4x^2 + 24x - 36$ ;

f)  $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$ .

3. Në sistemin e njëjtë koordinativ vizatoni grafikët e funksioneve:

a)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = (x - 4)^2$ ,  $h(x) = (x + 2)^2$ ;

b)  $f(x) = -x^2$ ,  $g(x) = -(x - 4)^2$ ,  $h(x) = -(x + 2)^2$ .

4. Caktoni kulmin, boshtin e simetrisë dhe vlerën ekstreme të parabolës së përcaktuar me funksionin:

a)  $f(x) = -4(x + 2)^2$ ;

b)  $y = \frac{1}{5}(x + 1)^2 - 3$ ;

c)  $y = \frac{2}{3}(x - 6)^2 + \frac{1}{2}$ .

5. Si duhet të lëviz, për sa njësi dhe në cilin drejtim, parabola  $y = 3(x - 2)^2$  që të fitohet parabola:

a)  $y = 3(x + 2)^2$ ;

b)  $y = 3(x - 5)^2 - 2$ ;

c)  $y = 3(x + 1)^2 + 4$ ?

6. Caktoni vlerat për  $a$  dhe  $\alpha$  ashtu që parabola  $y = a(x - \alpha)^2$  të kalojë nëpër pikën  $A(-3, 2)$  dhe kulmi i parabolës të jetë pika  $K(4, 0)$ .

7. Caktoni funksionin grafikun i së cilit është simetrik, në raport me boshtin e abshisës  $x$ , me grafikun e funksionit:

a)  $f(x) = (x - 5)^2$ ;

b)  $f(x) = -(x + 1)^2$ ;

c)  $f(x) = 3x^2 - 4$ .

### 3.4 GRAFIKU I FUNKSIONIT $f(x) = ax^2 + bx + c$

#### Rikujtoni!

- Grafiku i funksionit  $f(x) = a(x - \alpha)^2$  është parabolë me kulm  $K(\alpha, 0)$ .
- Forma  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  quhet forma kanonike e funksionit kuadratik. Grafiku i funksionit është parabolë me kulm në pikën  $K(\alpha, \beta)$  dhe bosht simetrie drejtëzën  $x = \alpha$ .

#### Aktivitet

Transformoni funksionin  $f(x) = x^2 - 6x$  në trajtën kanonike  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ .

#### Shembulli 1

Transformoni në formën kanonike funksionin  $f(x) = 3x^2 - 24x + 12$  dhe në grafikun e tij caktoni kulmin.

**Zgjidhje:**

Koeficientin para anëtarit, termit, kuadratik e nxjerrim para kllape dhe fitojmë  $f(x) = 3(x^2 - 8x + 4)$ .

Në kllapa bëjmë plotësimin me katror të plotë:

$$y = 3(x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 + 4)$$

$$y = 3((x - 4)^2 - 12)$$

$$y = 3(x - 4)^2 - 36$$

Me këtë veprim e kemi shndërruar funksionin në trajtën, formën, kanonike. Nga kjo formë vërejmë se kulmi në grafikun e funksionit do të jetë pika  $K(4, -36)$ .

Në rastin e përgjithshëm, funksionin kuadratik  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e shndërrojmë në formën kanonike në mënyrën e vijim:

- Nxjerrim koeficientin  $a$ , para kllape, nga dy anëtarët e parë, ai kuadratik dhe linear, dhe fitojmë

$$y = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c.$$

- Anëtarin linear  $\frac{b}{a}x$  brenda kllapave, e shkruajmë si  $\frac{b}{a}x = 2 \cdot \frac{b}{2a}x$  dhe fitojmë

$$y = a \left( x^2 + 2 \frac{b}{2a}x \right) + c.$$

- Shprehjen në kllapa e plotësojmë me katror të plotë duke shtuar dhe zbritur  $\left( \frac{b}{2a} \right)^2$  dhe fitojmë

$$y = a \left( x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c, \text{ d.m.th.}$$

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Kështu, funksionin kuadratik e kemi shndërruar në trajtën kanonike  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  kurse për parametrat  $\alpha$  dhe  $\beta$  fitojmë  $\alpha = -\frac{b}{2a}$ ,  $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$ . Nga trajta kanonike e funksionit kuadratik, qartazi, del se kulmi në grafikun e funksionit do të jetë pika  $K\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ .

### Mbani mend!

- Grafiku i funksionit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  është parabolë me kulm  $K\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ .
- Çdo funksion kuadratik mund të shkruhet në formën kanonike  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ .
- Me anë të procedurës së sipër përshkruar funksioni kuadratik  $f(x) = ax^2 + bx + c$  sillet në formën kanonike

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Që ta vizatojmë më saktësisht parabolën  $y = ax^2 + bx + c$ , duhet të përcaktohen pikat karakteristike të saj – kulmin dhe pikat prerëse të parabolës me boshtet koordinative.

### Shembulli 2

Shndërroni në formën kanonike funksionin  $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$ , e më pas vizatoni grafikun e tij.

#### Zgjidhje:

Formën kanonike të funksionit mund ta gjejmë me zëvendësimin e drejtpërdrejtë të vlerave të koeficientëve  $a$ ,  $b$  dhe  $c$  në formulën e fituar më sipër të formës kanonike ose duke ndjekur procedurën e plotësimit me katror të plotë për ta fituar formën kanonike.

#### Mënyra 1 (me anë të procedurës për shndërrim)

$$\begin{aligned} y &= 3(x^2 - 4x) + 7 \\ y &= 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 7 \\ y &= 3((x - 2)^2 - 4) + 7 \\ y &= 3(x - 2)^2 - 12 + 7 \\ y &= 3(x - 2)^2 - 5 \end{aligned}$$

#### Mënyra 2 (me përdorimin e formulave të fituara për $\alpha$ dhe $\beta$ )

Koeficientët e funksionit të dhënë janë  $a = 3$ ,  $b = -12$  dhe  $c = 7$ .

$$\text{Marrim, } \alpha = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = 2, \quad \beta = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7 - (-12)^2}{4 \cdot 3} = -5, \text{ d.m.th. } y = 3(x - 2)^2 - 5.$$

Nga forma e fituar kanonike e funksionit gjejmë se grafiku i tij ka kulm në pikën  $K(2, -5)$  dhe është simetrik në raport me drejtëzën  $x = 2$ .

Në mënyrë që të fitojmë grafik më të saktë të funksionit, i përcaktojmë pikat prerëse me boshtet koordinative. Që të caktojmë pikën prerëse me boshtin e ordinatës  $y$ , e gjejmë vlerën e funksionit për  $x = 0$ . Për  $x = 0$ ,  $y = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 7 = 7$ , prandaj pika prerëse është pika  $A(0, 7)$ .



Pika  $A_1(4, 7)$  është simetrike me pikën  $A(0, 7)$  në raport me boshtin e simetrisë  $x = 2$ . Për të përcaktuar pikëprerjet me boshtin  $x$ , i përcaktojmë vlerat e  $x$  për të cilat  $y = 0$ . Fitojmë

$$3x^2 - 12x + 7 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{6}$$

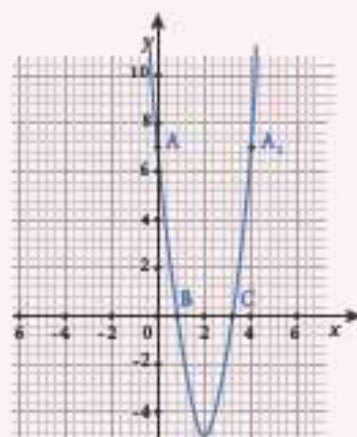
$$x_1 \approx 0,71, x_2 \approx 3,29$$

Pikëprerjet janë  $B(0,71;0)$  dhe  $C(3,29;0)$ .

Grafiku është paraqitur në vizatimin djathtas.

Mund të vërejmë se për vizatimin e parabolës duhet të përcaktojmë, të paktën, 5 pika të saj. Nëse ekuacioni  $ax^2 + bx + c = 0$  nuk ka rrënjë, zgjidhje, reale, kjo do të thotë se parabola nuk e pret boshtin e abshisës  $x$ . Në këtë rast përcaktojmë të paktën edhe dy pika të tjera për vlera të çfarëdoshme të  $x$ .

Grafikun e funksionit  $y = 3x^2 - 12x + 7$ , d.m.th. parabolën  $y = 3(x - 2)^2 - 5$  mund ta fitojmë edhe me translacionin e parabolës  $y = 3x^2$ . Në këtë rast, për ta skicuar parabolën  $y = 3x^2$ , fillimisht duhet të gjejmë disa pika të saj. Më pas, parabolën e fituar duhet ta zhvendosim për 2 njësi djathtas ( $\alpha = 2$ ) me çka fitojmë parabolën  $y = 3(x - 2)^2$ . Në fund, parabolën  $y = 3(x - 2)^2$  e zhvendosim për 5 njësi poshtë ( $\beta = -5$ ) dhe fitojmë përfundimisht grafikun e  $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$ .



### Shembulli 3

Vizatoni grafikun e funksionit duke përcaktuar pikat karakteristike të parabolës:

a)  $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$ ;      b)  $y = 2x^2 + 3x + 5$ .

**Zgjidhje:**

a) Koeficientët janë  $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 4$ .

• Kulmi:  $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{3}}{2(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot 4 - (\frac{1}{3})^2}{4 \cdot (-\frac{1}{3})} = \frac{49}{12}$ , prandaj kulmi është  $K(\frac{1}{2}, \frac{49}{12})$ .

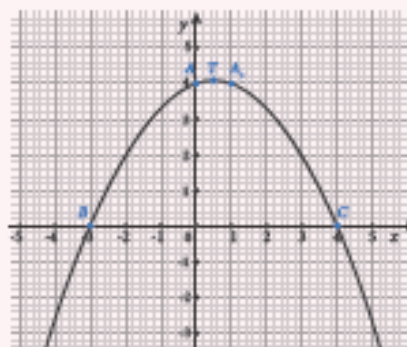
• Pikëprerja me boshtin  $y$ :  $f(0) = 4$ , pika ndërprerëse është  $A(0, 4)$ .

• Pikëprerjet me boshtin e abshisës  $x$  për  $f(x) = 0$  kemi  $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4 = 0$  rrënjët e të cilit janë  $x_1 = -3$  dhe  $x_2 = 4$ . Parabola e pret boshtin  $x$  në pikat  $B(-3, 0)$  dhe  $C(4, 0)$ .

• Boshti i simetrisë është drejtëza  $x = \frac{1}{2}$ , prandaj pika  $A_1(1, 4)$  është simetrike me pikën  $A(0, 4)$  në raport me këtë bosht.

•  $a = -\frac{1}{3} < 0$ , prandaj degët e parabolës janë poshtë

Grafiku është paraqitur në vizatim.



b) Koeficientët janë  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ .

- Kulmi:  $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4}$ ,  $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5 - 3^2}{4 \cdot 2} = \frac{31}{8} = 3,875$ , prandaj kulmi  $K$   $\left(-\frac{3}{4}, \frac{31}{8}\right)$ .

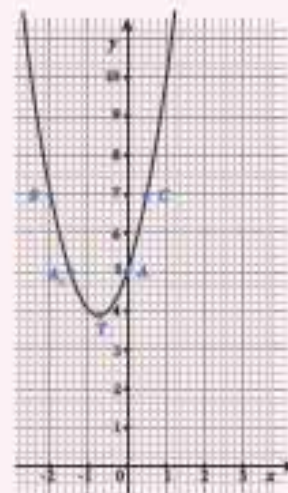
- Boshti i simetrisë është drejtëza  $x = -\frac{3}{4}$ .
- Pikëprerjen me boshtin  $y$ : gjejmë  $f(0) = 5$ , prandaj pikëprerja është

$A(0, 5)$ , kurse  $A_1\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$  është simetrike me pikën  $A(0, 5)$  në raport me drejtëzën  $x = -\frac{3}{4}$ .

- Pikëprerjet me boshtin  $x$ : ekuacioni kuadrtik  $2x^2 + 3x + 5 = 0$  nuk ka rrënjë reale, sepse diskriminanta  $D = -31 < 0$ . Pra, parabola nuk e pret boshtin  $x$ .
- Për vizatim më të saktë të parabolës, do të caktojmë edhe dy pika të grafikut.

Për  $x = -2$ ,  $f(-2) = 7$ , prandaj një pikë e grafikut do të jetë pika  $B(-2, 7)$ . Për  $x = \frac{1}{2}$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 7$ , prandaj një pikë tjetër do të jetë pika  $C\left(\frac{1}{2}, 7\right)$ .

- Pasi  $a = 2 > 0$ , parabola ka degët lart, pra është e hapur sipër. Grafiku është paraqitur në vizatim.



### Detyra për ushtrime!

1. Shkruani në trajtën kanonike funksionet:

a)  $f(x) = x^2 + 4x$ ;      b)  $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$ ;      c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ .

2. Caktoni kulmin e grafikut të funksionit:

a)  $f(x) = 4x^2 + 5x - 3$ ;      b)  $f(x) = -5x^2 + 6x$ ;      c)  $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 2x - 1$ .

3. Vizatoni grafikun e funksionit:

a)  $y = -(x + 1)^2 + 2$ ;      b)  $y = 2(x - 2)^2 + 1$ ;      c)  $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + \frac{3}{2}$ .

4. Me anë të pikave karakteristike, vizatoni grafikun e funksionit:

a)  $f(x) = x^2 + x - 2$ ;      b)  $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ ;      c)  $f(x) = x^2 - 4x$ .

5. Vizatoni grafikun e funksionit:

a)  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ;      b)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ ;      c)  $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$ .

6. Për cilat vlera të  $p$  dhe  $q$ , pika  $K(-3, 2)$  do të jetë kulm i parabolës  $y = x^2 + px + q$ ?

7. Parabola  $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$  kalon nëpër pikën  $A(8, 5)$  dhe ka kulm në  $K(6, 3)$ . Caktoni koeficientët  $a$ ,  $\alpha$  dhe  $\beta$ .

8. Caktoni koeficientët  $a$ ,  $b$  dhe  $c$  të funksionit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ashtu që grafiku i funksionit ta pret boshtin  $x$  në pikën  $A(3, 0)$ , kurse vlerën ekstreme  $f(1) = -4$  ta arrij për  $x = 1$ .

## 3.5 VETI TË FUNKSIONIT KUADRATIK

### Rikujtoni!

Caktoni vlerën më të madhe të funksionit  $f(x) = -3x^2 + 2x$ .

Rikujtoni vetitë e funksionit kuadratik  $f(x) = ax^2 + c$ .

Le t'i hulumtojmë vetitë e funksionit kuadratik  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

#### 1) Fusha e përkufizimit

Funksioni kuadratik është i përkufizuar për gjithë numrat realë, d.m.th.  $D_f = \mathbb{R}$ .

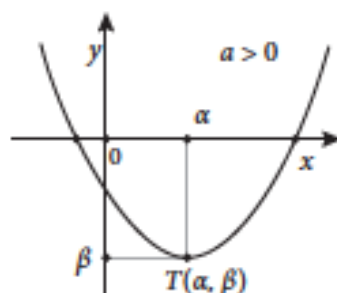
#### 2) Kulmi i parabolës

Që të caktojmë kulmin e parabolës, që është grafiku i funksionit kuadratik, funksionin e shkruajmë në trajtën kanonike  $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ , ku  $\alpha = -\frac{b}{2a}$ ,  $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$ , prandaj kulmi  $K(\alpha, \beta)$ .

#### 3) Vlera ekstreme

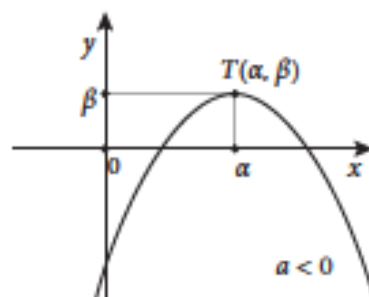
Në kulmin e parabolës funksioni ka vlerë ekstreme e cila, në varësi të shenjës së koeficientit  $a$ , do të jetë maksimum ose minimum.

- Nëse  $a > 0$ , parabola ka degët lart, dhe në kulm ka minimum.



$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ për } x = -\frac{b}{2a}$$

- Nëse  $a < 0$ , parabola ka degët poshtë, dhe në kulm ka maksimum.



$$y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ për } x = -\frac{b}{2a}$$



**Shembulli 1**

Për funksionin  $y = 3x^2 - 5x - 4$  caktoni:

- a) fushën e përkufizimit;      b) koordinatat e kulmit të parabolës;      c) vlerën ekstreme

**Zgjidhje:**

a)  $D_f = \mathbb{R}$

b) Koordinatat e kulmit të parabolës do t'i caktojmë sipas formulave  $\alpha = -\frac{b}{2a}$ ,  $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ,

Koeficientët e funksionit kuadrik janë  $a = 3$ ,  $b = -5$ ,  $c = -4$ .

$$\alpha = \frac{-5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6} \quad \beta = \frac{4 \cdot 3 \cdot (-4) - (-5)^2}{4 \cdot 3} = \frac{-48 - 25}{12} = -\frac{73}{12}$$

Kulmi i parabolës është  $K\left(\frac{5}{6}, -\frac{73}{12}\right)$ .

- c) Pasi  $a > 0$ , parabola do të ketë degët lart, pra e hapur sipër, dhe në kulm do të ketë vlerë ekstreme minimale të barabartë me

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 3 \cdot (-4) - (-5)^2}{4 \cdot 3} = -\frac{73}{12}, \text{ për } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}.$$

**Shembulli 2**

Për cilën vlerë të parametrin  $m$  funksioni  $y = mx^2 - 3x + 2$  ka maksimum të barabartë me 4?

**Zgjidhje:**

Funksioni kuadrik do të ketë maksimum nëse  $m < 0$  dhe në këtë rast  $y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot m \cdot 2 - (-3)^2}{4 \cdot m}$ .

Maksimumi duhet të jetë i barabartë me 4, prandaj fitojmë ekuacionin në vijim  $\frac{4 \cdot m \cdot 2 - (-3)^2}{4 \cdot m} = 4$ .

Zgjidhja e ekuacionit jep vlerën e kërkuar  $m = -\frac{9}{8}$ .

**Shembulli 3**

Gjeni prodhimin më të vogël të mundshëm të dy numrave realë, nëse dimë se ndryshimi i tyre është 12.

**Zgjidhje:**

Njërën nga numrat le ta shënojmë me  $x$ .

Pasi ndryshimi i tyre është 12, numri i dytë mund të jetë  $x - 12$  ose  $x + 12$ .

Le të marrim se numri i dytë është  $x + 12$ .

Prodhimin e këtyre dy numrave e shkruajmë si funksioni

$$y = x \cdot (x + 12)$$

$$y = x^2 + 12x, \text{ ku } a = 1, b = 12 \text{ dhe } c = 0.$$

Duhet të gjejmë vlerën minimale  $y_{\min}$ .

Nga formulat për koordinatat e kulmit të parabolës së funksionit kemi

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad x_{\min} = -\frac{b}{2a}$$

$$y_{\min} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 0 - 12^2}{4 \cdot 1} = \frac{-144}{4} \quad x_{\min} = -\frac{12}{2 \cdot 1}$$

$$y_{\min} = -36 \quad x_{\min} = -6$$

Nga këtu përfundojmë se njëri nga numrat e kërkuar është  $-6$ .

Numri i dytë i kërkuar do të jetë  $-6 + 12 = 6$ .

Prodhihi më i vogël i dy numrave, ndryshimi i të cilëve është  $12$ , do të jetë  $-6 \cdot 6 = -36$ .

#### Detyra 1

Caktoni syprinën më të madhe të mundshme të trekëndëshit në të cilin shuma e bazës dhe lartësisë përkatëse, të lëshuar mbi atë bazë, është  $8 \text{ cm}$ .

#### 4) Bashkësia e vlerave të funksionit

Vlera ekstreme e përcakton bashkësinë e vlerave të funksionit që e shënojmë me  $V_f$ .

- Nëse  $a > 0$ , atëherë  $V_f = [\beta, +\infty)$ .
- Nëse  $a < 0$ , atëherë  $V_f = (-\infty, \beta]$ .

#### Shembulli 4

Caktoni bashkësinë e vlerave të funksionit  $y = -2x^2 - 4x - 5$ .

**Zgjidhje:**

Koeficienti  $a < 0$ , çka nënkupton se parabola përfaqësuese e funksionit është me degë poshtë dhe ka

maksimum  $y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -3$ . Domethënë, bashkësia e vlerave është  $V_f = (-\infty, -3]$ .

#### 5) Zerot e funksionit

Zero të funksionit  $y = ax^2 + bx + c$  janë ato vlera të  $x$  për të cilat  $f(x) = 0$ . Pra, zero të funksionit janë rrënjët (zgjidhjet) e ekuacionit kuadratik  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Përmes zerove të funksionit përcaktojmë koordinatat  $x$  të pikave në të cilat grafiku, parabola, e ndërpret boshtin e abshisës  $x$ . Nëse ekuacioni  $ax^2 + bx + c = 0$  nuk ka rrënjë reale, atëherë grafiku i funksionit kuadratik nuk e pret boshtin  $x$ .

#### Detyra 2

Gjeni zerot e funksioneve:

- a)  $y = 2x^2 - 2x + 5$ ;      b)  $y = 2x^2 + 3x - 2$ ;      c)  $y = x^2 - 4x + 4$ .

Çka vëreni?

**Mbani mend!**

Le të jetë  $D = b^2 - 4ac$  diskriminanta (dallori) e ekuacionit kuadrtatik  $ax^2 + bx + c = 0$ .

- Nëse  $D > 0$ , atëherë funksioni kuadrtatik  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ka dy zero reale, d.m.th. parabola  $y = ax^2 + bx + c$  e ndërpret boshtin  $x$  në dy pika.
- Nëse  $D = 0$ , atëherë zero e funksionit kuadrtatik  $f(x) = ax^2 + bx + c$  është  $x = -\frac{b}{2a}$ , d.m.th.

parabola  $y = ax^2 + bx + c$  e takon, e prek, boshtin  $x$  në pikën  $K\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ .

- Nëse  $D < 0$ , atëherë funksioni  $f(x) = ax^2 + bx + c$  nuk ka zero reale, d.m.th. parabola  $y = ax^2 + bx + c$  nuk ka pika të përbashkëta me boshtin e abshisë  $x$ .

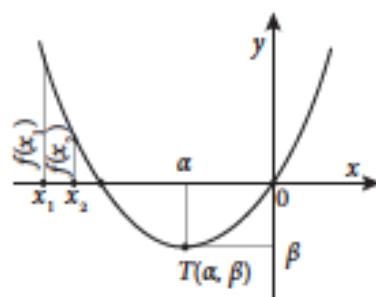
**Detyra 3**

Për cilat vlera të  $b$  dhe  $c$  grafiku i funksionit kuadrtatik  $f(x) = x^2 + bx + c$  e pret boshtin e abshisë  $x$  në pikat  $A(3, 0)$  dhe  $B(1, 0)$ ?

**6) Monotonia e funksionit**

Shqyrtimi i monotonisë (funksioni është rritës, zvogëlues) së një funksioni, nënkupton studimin se çka ndodh me vlerat e funksionit kur vlera e  $x$  rritet.

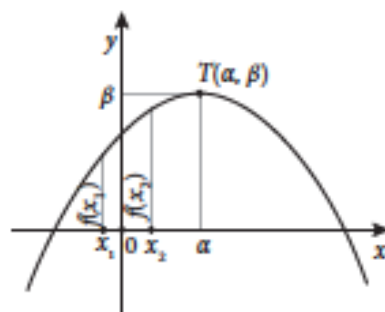
- Nëse  $a > 0$ , funksioni ka minimum. Boshti i simetrisë së parabolës,  $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$ , e ndan fushën e përkufizimit të funksionit kuadrtatik  $y = ax^2 + bx + c$  në dy intervale  $(-\infty, \alpha)$  dhe  $(\alpha, +\infty)$ . Meqenëse funksioni ka minimum për  $x = \alpha$ , në intervalin e parë (majtas minimumit) funksioni zvogëlohet (vlerat e funksionit zvogëlohen me rritjen e vlerës së  $x$ ), kurse në intervalin e dytë (djathtas minimumit) funksioni rritet (vlerat e funksionit rriten me rritjen e  $x$ ).



Në vizatim mund të vërejmë se për  $x_1 < x_2 < \alpha$ ,  $f(x_1) > f(x_2)$ , d.m.th. funksioni monotonisht zvogëlohet për  $x \in (-\infty, \alpha)$ , kurse monotonisht rritet për  $x \in (\alpha, +\infty)$ .

- Nëse  $a < 0$ , funksioni kuadrtatik arrin maksimumin për  $x = \alpha$ , prandaj në intervalin e parë (majtas nga maksimumi) funksioni rritet, kurse në intervalin e dytë (djathtas maksimumit) funksioni zvogëlohet.

Në vizatim mund të vërejmë se për  $x_1 < x_2 < \alpha$ ,  $f(x_1) < f(x_2)$ , d.m.th. funksioni monotonisht rritet për  $x \in (-\infty, \alpha)$ , kurse monotonisht zvogëlohet për  $x \in (\alpha, +\infty)$ .





### Shembulli 4

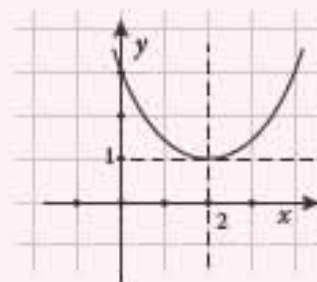
Shqyrtoni monotoninë e funksionit  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ .

**Zgjidhje:**

Shqyrtimi i monotonisë së funksionit nënkupton përcaktimin e intervaleve të rritjes dhe zvogëlimit të funksionit.

Pasi  $a = \frac{1}{2} > 0$ , funksioni ka minimum dhe ai është i barabartë me  $y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = 1$ , që arrihet për  $x = -\frac{b}{2a} = 2$ .

Pra, intervalet në të cilët e shqyrtojmë monotoninë e funksionit janë  $(-\infty, 2)$  dhe  $(2, +\infty)$  (shihni figurën). Pasi për  $x = 2$  funksioni ka vlerë më të vogël, ai është monoton zvogëlues në intervalin  $(-\infty, 2)$ , kurse monoton rritës në intervalin  $(2, +\infty)$ .



### Detyra 3

Caktoni intervalet e rritjes dhe zvogëlimit të funksioneve:

- a)  $y = -x^2 + x$ ;      b)  $y = x^2 + 4$ ;      c)  $y = 3x^2 - 2x + 7$

### 7) Shenja e funksionit

Përcaktimi i shenjës së funksionit nënkupton gjetjen e intervaleve të vlerave të  $x$  për të cilat funksioni është pozitiv dhe intervaleve për të cilat funksioni është negativ.

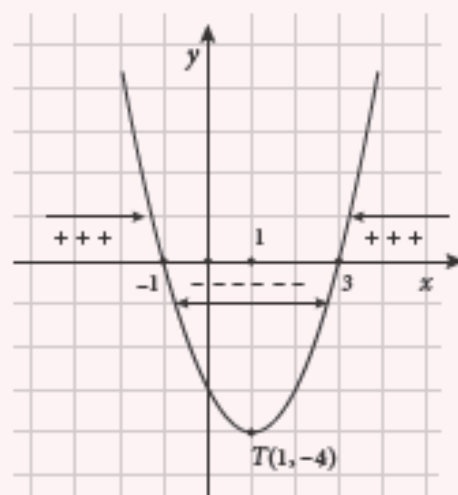
### Shembulli 5

Caktoni shenjën e funksionit kuadratik  $y = x^2 - 2x - 3$ .

**Zgjidhje:**

Fillimisht, përcaktojmë kulmin e grafikut të funksionit dhe pikëprerjet me boshtin e abshisës  $x$  që të mund ta skicojmë parabolën. Kulmi i parabolës  $y = x^2 - 2x - 3$  është pika  $K(1, -4)$ . Rrënjët e ekuacionit  $x^2 - 2x - 3 = 0$  janë  $x_1 = -1$  dhe  $x_2 = 3$ , prandaj degët e parabolës e ndërpresin boshtin  $x$  në pikat  $(-1, 0)$  dhe  $(3, 0)$ . Me këto tri pika e skicojmë grafikun e funksionit sikurse është paraqitur në vizatim.

Nga grafiku i funksionit vërejmë se funksioni merr vlera pozitive, d.m.th.  $f(x) > 0$  për  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ , kurse merr vlera negative, d.m.th.  $f(x) < 0$  për  $x \in (-1, 3)$ .



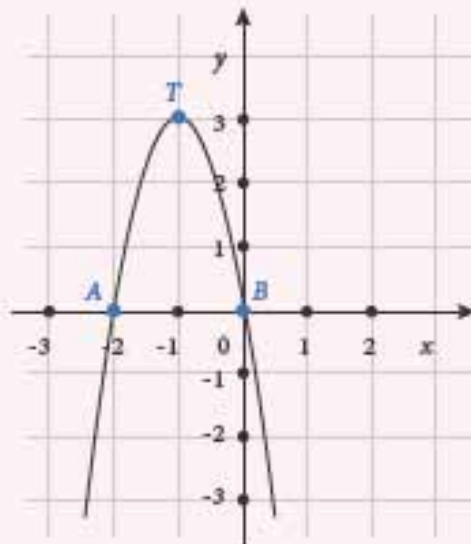
## Shembulli 6

Caktoni shenjën e funksionit:

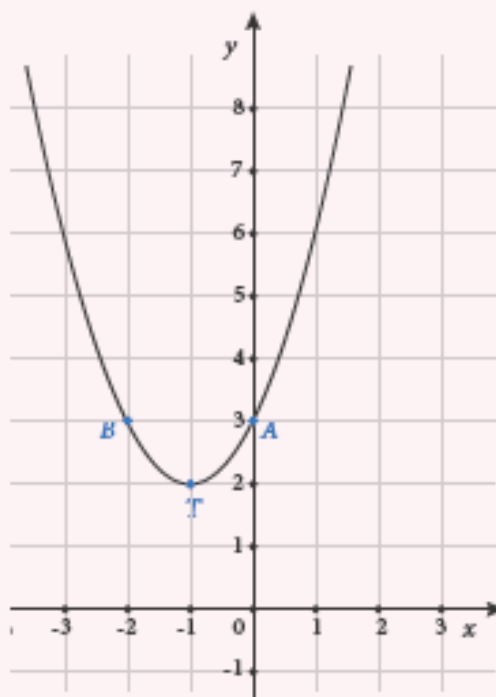
a)  $y = -3x^2 - 6x$ ;      b)  $y = x^2 + 2x + 3$

**Zgjidhje:**

- a) Kulmi i parabolës është  $K(-1, 3)$ . Për  $f(x) = 0$  fitojmë ekuacionin  $-3x^2 - 6x = 0$ , rrënjët e të cilit janë  $x_1 = -2$  dhe  $x_2 = 0$ , prandaj parabola e ndërpret boshtin  $x$  në pikat  $(-2, 0)$  dhe  $(0, 0)$ . Me këto tri pika e skicojmë grafikun e funksionit, parabolën, e cila i ka degët poshtë sepse koeficienti  $a = -3 < 0$ . Grafiku i funksionit është paraqitur në vizatimin djathtas. Nga grafiku i funksionit vërejmë se ai është pozitiv për  $x \in (-2, 0)$ , kurse negativ për  $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ .



- b) Kulmi i parabolës  $y = x^2 + 2x + 3$  është  $T(-1, 2)$ . Për  $f(x) = 0$ , fitojmë ekuacionin  $x^2 + 2x + 3 = 0$ , i cili nuk ka rrënjë, zgjidhje, reale, d.m.th. parabola, degët e saj, nuk e ndërpresin boshtin e abshisës  $x$ . Për  $x = 0$ , fitojmë  $y = 3$ , prandaj parabola e pret boshtin  $y$  në pikën  $A(0, 3)$ . Pikë simetrike me pikën  $A$  është pika  $B(-2, 3)$ . Këto tri pika na mundësojnë të skicojmë grafikun e funksionit që është parabola e hapur sipër sepse  $a = 1 > 0$ . Meqë parabola nuk ka pika ndërprerëse me boshtin  $x$  dhe degët i ka lart, e gjithë parabola është mbi boshtin e abshisës  $x$ , përkatësisht funksioni merr vlera pozitive për çdo numër real, d.m.th.  $f(x) > 0$  për çdo  $x \in (-\infty, +\infty)$ .



## Shembulli 7

Një ekip basketbolli luan në një arenë me 15000 spektatorë. Çmimi i një bilete është 14 dollarë dhe ndeshjet paraprake mesatarisht janë ndjekur prej 9500 spektatorësh. Anketa e realizuar në teren tregon se çdo ulje e çmimit të biletës për 1 dollar, do të rit shikueshmërinë e ndeshjes për 1000 spektatorë.

- Caktoni funksionin me të cilin llogariten të ardhurat nga shitja e biletave, në varshmëri nga çmimi i biletës.
- Caktoni çmimin e biletës për të cilin të ardhurat nga shitja e biletave do të jenë maksimale.
- Caktoni çmimin e biletës, i cili do të ishte aq i lartë sa asnjë spektator të mos e ndjek ndeshjen dhe të ardhurat të ishin zero.

## Zgjidhje:

- Le të jetë  $x$  çmimi i biletës. Duhet të shtrojmë, ndërtojmë, funksionin  $f(x)$  me anë të të cilit për vlerën e dhënë të çmimit të biletës, do ta llogaritim fitimin e realizuar nga biletat e shitura. Nëse  $n$  është numri i spektatorëve (biletat e shitura), është e qartë se  $f(x) = n \cdot x$ .

Dimë se nëse çmimi i një bilete është 14 dollarë, atëherë (mesatarisht) do të ketë 9500 bileta të shitura, dhe se për çdo ulje të çmimit për 1 dollar, numri i biletave të shitura rritet për 1000 (nëse çmimi ulet për 3 dollarë, numri i spektatorëve do të jetë  $9500 + 3000 = 12500$ ).

Nëse çmimi i biletës është  $x$ , atëherë me  $14 - x$  do të llogaritim se për sa dollarë ajo është më e ulët se 14 dollarë. Pra, nëse çmimi i biletës është  $x$  dollarë, numri i biletave të shitura do të rritet për 1000  $(14 - x)$ , d.m.th. numri i përgjithshëm i biletave të shitura do të jetë  $n = 9500 + 1000(14 - x)$ .

Tani për funksionin  $f(x)$  kemi

$$f(x) = x \cdot (9500 + 1000(14 - x))$$

$$f(x) = x \cdot (23500 - 1000x)$$

$$f(x) = -1000x^2 + 23500x$$

- Duhet të përcaktohet maksimumi i funksionit  $f(x)$ . Funksioni i fituar është kuadratik me koeficientin  $a = -1000 < 0$ , që nënkupton se grafiku i tij është parabolë me degë poshtë dhe në kulm arrin maksimumin. Ky maksimum fitohet për  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23500}{2(-1000)} = 11,75$ . Kjo tregon se, nëse çmimi i biletës do të jetë 11,75 dollarë, fitimi do të jetë maksimal.

- Duhet të caktohet çmimi  $x$  i biletës ashtu që fitimi të  $f(x) = 0$ .

$$-1000x^2 + 23500x = 0$$

$$x(23500 - 1000x) = 0$$

Zgjidhje të ekuacionit kuadratik janë  $x = 0$  dhe  $x = 23,5$ . Kjo do të thotë se 23,5 dollarë do të ishte një vlerë shumë e lartë për një biletë dhe askush nuk do ta blinte. Është e qartë se edhe për vlerën 0 dollarë të biletës fitimi do të ishte zero, por detyra kërkon të gjendet vlera më e lartë e çmimit të biletës ashtu që askush mos e ndjek atë, prandaj përgjigja është 23,5 dollarë.



**Detyra për ushtrime!**

Shqyrtoni vetitë e funksioneve (kulmin, vlerën ekstreme, bashkësinë e vlerave, zerot, intervalet e rritjes dhe zvogëlimit) (1 - 6)

1.  $y = x^2 - 4x + 1$

2.  $y = -x^2 + x + 6$

3.  $y = 2x^2 - 7x + 3$

4.  $y = 5x^2 + 7x + 3$

5.  $y = -2x^2 + 4x$

6.  $y + 16 = -x^2 + 8x$

7. Caktoni shenjën e funksionit:

a)  $y = x^2 - 5x + 6$ ;

b)  $y = x^2 + 2$ ;

c)  $y = -2x^2 - 6x$ .

8. Caktoni koeficientët  $a$  dhe  $c$  të funksionit  $f(x) = ax^2 + 3x + c$ , nëse  $x_1 = -1$  dhe  $x_2 = 2$  janë zero të funksionit.9. Për cilën vlerë të  $x$  thyesa  $\frac{4}{6x^2 - 5x - 3}$  do të ketë vlerë më të madhe?10. Shitësi i pijeve joalkoolike në një plazh të njohur analizon evidencat e tij të shitjes dhe vëren se nëse në një ditë shet  $x$  kanaçe lëngu të gazuar, fitimi i tij (në dollarë) është dhënë me  $P(x) = -0,001x^2 + 3x - 1800$ . Sa është fitimi i tij ditor maksimal dhe sa kanaçe duhet të shet që të arrij këtë fitim?11. Efikasiteti i reklamës televizive varet nga ajo se sa herë një shikues e sheh atë. Pas disa eksperimentesh, një kompani reklamash zbuloi se efikasiteti  $E$  mund të përcaktohet me formulën vijuese

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2,$$

ku  $n$  është numri i herëve që shikuesi e ka parë reklamën. Sa herë shikuesi duhet ta sheh reklamën në mënyrë që ajo të arrij efikasitet maksimal?

## 3.6 ECURIA DHE GRAFIKU I FUNKSIONIT KUADRTIK

### Rikujtoni!

- $x_1 = 2$  dhe  $x_2 = -2$  janë zero të funksionit  $f(x) = x^2 - 4$ , kurse në kulmin  $K(0, -4)$  funksioni arrin vlerën minimale. Në intervalin  $(0, +\infty)$  funksioni është rritës, kurse në intervalin  $(-\infty, 0)$  funksioni është zvogëlues.
- Caktoni edhe vetitë e tjera të funksionit  $f(x) = x^2 - 4$ .

Shpesh parashtrohet pyetja: "Vizatoni grafikun dhe studioni ecurinë e funksionit kuadratik...". Që t'i përgjigjeni kësaj kërkesë, duhet të caktoni

- 1) fushën e përkufizimit të funksionit;
- 2) kulmin e parabolës që paraqet grafikun e funksionit kuadratik;
- 3) pikëprerjet e parabolës me boshtet koordinative;
- 4) boshtin e simetrisë së parabolës.

Me këto të dhëna mund ta vizatojmë grafikun e funksionit kuadratik, e më pas të përcaktojmë edhe:

- 5) vlerën ekstreme të funksionit;
- 6) bashkësinë e vlerave të funksionit;
- 7) monotoninë e funksionit;
- 8) shenjën e funksionit.

Se cila do të jetë renditja e shënimit të përgjigjeve (për vetitë e funksionit), nuk ka rëndësi.

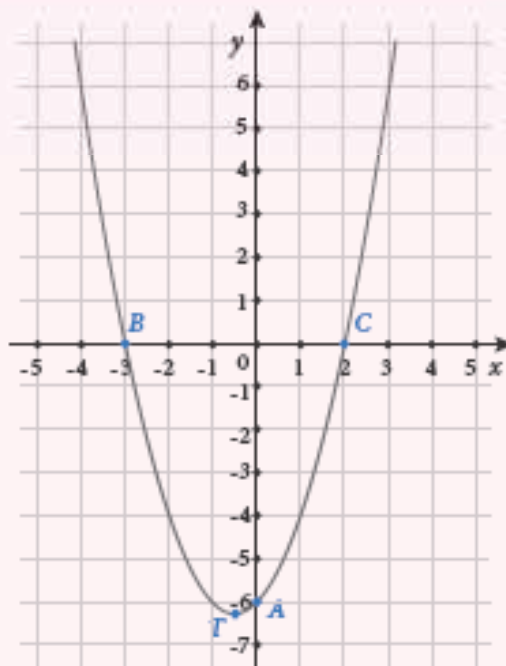
### Shembulli 1

Vizatoni grafikun dhe studioni ecurinë (sjelljen) e funksionit

$$f(x) = x^2 + x - 6.$$

**Zgjidhje:**

- Fusha e përkufizimit e funksioni është  $D_f = \mathbb{R}$ .
- Nga forma kanonike e funksionit marrim  $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{25}{4} = -6,25$ , prandaj kulmi i parabolës është  $K(-0,5; -6,25)$ .
- Pikëprerjet e parabolës me boshtet koordinative janë:
  - pikëprerja me boshtin y:  $f(0) = -6$ ,  $A(0, -6)$
  - pikëprerjet me boshtin x (zerot e funksionit): zgjidhje të ekuacionit  $x^2 + x - 6 = 0$  janë  $x_1 = -3$  dhe  $x_2 = 2$ ,  $B(-3, 0)$ ,  $C(2, 0)$ .
- Boshti i simetrisë është drejtëza  $x = -\frac{1}{2}$ .



Me të dhënat e mësipërme mund ta vizatojmë grafikun e funksionit sikurse është dhënë në vizatim.

- Vlera ekstreme e funksionit:  $a = 1 > 0$ , prandaj funksioni ka minimum  $y_{\min} = -6,25$  për  $x = -0,5$ .
- Bashkësia e vlerave të funksionit është  $V_f = [-6,25; +\infty)$ .
- Monotonia e funksionit: funksioni është monoton zvogëluar për  $x \in (-\infty; -0,5)$ , kurse është monoton rritës për  $x \in (-0,5; +\infty)$ .
- Shenja e funksionit: funksioni është pozitiv për  $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ , kurse negativ për  $x \in (-3, 2)$ .

## Shembulli 2

Vizatoni grafikun e funksionit  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$ .

**Zgjidhje:**

Fillimisht e skicojmë grafikun e funksionit:

- Fusha e përkufizimit është  $D_f = \mathbb{R}$ .
- Nga forma kanonike kemi  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 4$ , prandaj kulmi i parabolës është pika  $K(-1, 4)$ .
- Pikëprerjet me boshtet koordinative janë:

– pikëprerja me boshtin  $y$ :

$$f(0) = \frac{15}{4} = 3,75, A(0, 3,75)$$

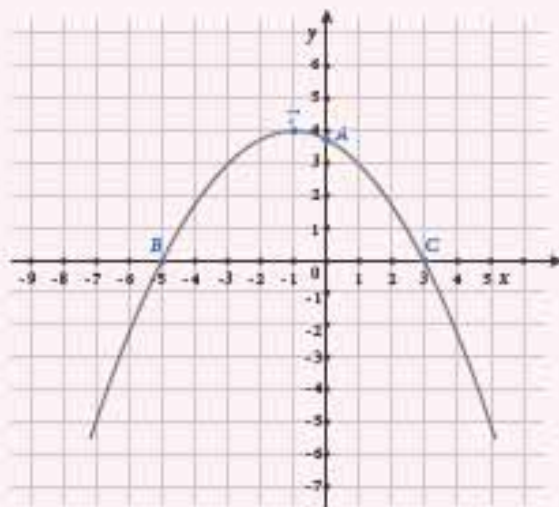
– pikëprerjet me boshtin  $x$  (zerot e funksionit):

$$\text{zgjidhje të ekuacionit } -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4} = 0$$

$$\text{janë } x_1 = -5 \text{ dhe } x_2 = 3, B(-5, 0), C(3, 0).$$

- Bosht simetrie është drejtëza  $x = -1$ .

Grafiku i funksioni është dhënë në vizatim.



Nga grafiku e shqyrtojmë sjelljen e funksionit:

- Vlera ekstreme:  $a = -1/4 < 0$ , prandaj funksioni ka maksimum  $y_{\max} = 4$  për  $x = -1$ .
- Bashkësia e vlerave të funksionit është  $V_f = (-\infty, 4)$ .
- Monotonia e funksionit: funksioni është monoton rritës për  $x \in (-\infty, -1)$ , kurse monoton zvogëlues për  $x \in (-1, +\infty)$ .
- Shenja e funksionit:  $f(x) < 0$  për  $x \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$ , kurse  $f(x) > 0$  për  $x \in (-5, 3)$ .

## Detyra 1

Vizatoni grafikun, e funksionit dhe shqyrtoni ecurinë e tij

a)  $f(x) = x^2 + 2x$ ;      b)  $f(x) = -x^2 + 2x$ ;      c)  $f(x) = -x^2 - 2x$

## Detyra për ushtrime!

Vizatoni grafikun dhe shqyrtoni ecurinë e funksionit (1 – 6)

1.  $f(x) = x^2 - 3$

2.  $f(x) = -2(x - 1)^2$

3.  $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$

4.  $f(x) = (x + 2)^2$

5.  $f(x) = \frac{1}{4}(x + 4)^2 - \frac{1}{4}$

6.  $f(x) = -4x^2 + 25$



## 3.7 INEKUACIONET KUADRATIKE

### Rikujtoni!

- Për cilat vlera të  $x \in \{-3, -2, 0, 1\}$ , inekuacioni  $x - 3 > 0$  kalon në shprehje numerike të saktë?
- Nëse  $x_1$  dhe  $x_2$  janë zero të trinomit katror  $ax^2 + bx + c$ , atëherë zbërthimi i trinomit në shumëzues, faktorë, linear është  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .
- Prodhimi  $a \cdot b$  është pozitiv nëse që të dy shumëzuesit janë pozitivë ose të dy shumëzuesit janë negativë.
- Prodhimi  $a \cdot b$  është negativ nëse njëri nga shumëzuesit është pozitiv, kurse tjetri negativ.
- Cila është bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit  $x + 3 > 0$ ?

### Aktivitet

Caktoni vlerat e ndryshores  $x$ , ashtu që prodhimi  $(x - 2)$  të jetë pozitiv.

### Mbani mend!

- Inekuacionet e formës  
 $ax^2 + bx + c > 0$ ,  $ax^2 + bx + c < 0$   
 $ax^2 + bx + c \geq 0$ ,  $ax^2 + bx + c \leq 0$   
 ku  $a, b, c \in \mathbb{R}$  dhe  $a \neq 0$  quhen *inekuacione kuadratike*.
- Kjo formë e inekuacionit kuadratik është *forma e përgjithshme e inekuacionit kuadratik*.

### Shembulli 1

Zgjidhni inekuacionin kuadratik  $x^2 + 2x - 8 < 0$ .

**Zgjidhje:**

Duhet të caktojmë bashkësinë e vlerave të  $x$  për të cilat inekuacioni do të kalojë në shprehje numerike të saktë. Mund t'i qasemi zgjidhjes në dy mënyra.

**Mënyra e parë**

Trinomën katror në anën e majtë të inekuacionit e zbërthejmë në shumëzues linearë. I përcaktojmë

zerot e trinomit  $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-8)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$ , d.m.th.  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 2$ .

Nga këtu,  $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$ , prandaj inekuacionin mund ta shkruajmë si  $(x + 4)(x - 2) < 0$ .

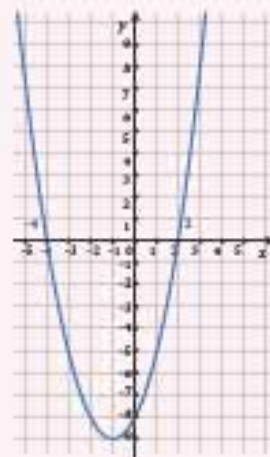
Që prodhimi  $(x + 4)(x - 2)$  të jetë negativ, shumëzuesit duhet të merren me shenja të kundërta, prandaj fitojmë dy sistemet e mëposhtme të inekuacioneve lineare:

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \quad \text{ose} \quad \begin{cases} x+4 < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}, \quad \text{d.m.th.} \quad \begin{cases} x > -4 \\ x < 2 \end{cases} \quad \text{ose} \quad \begin{cases} x < -4 \\ x > 2 \end{cases}$$

Zgjidhja e sistemit të parë të inekuacioneve është bashkësia  $M_1 = (-4, 2)$ , kurse e sistemit të dytë është  $M_2 = \emptyset$ . Zgjidhja e inekuacionit të dhënë fillestar është unioni i dy bashkësive të zgjidhjeve të dy sistemeve, përkatësisht bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit kuadratik është  $M = M_1 \cup M_2 = (-4, 2) \cup \emptyset = (-4, 2)$ .

### Mënyra e dytë

Që të caktojmë bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit kuadratik, mund të përdorim grafikun e funksionit përkatës kuadratik. Në këtë rast zgjidhja e inekuacionit kuadratik shndërrohet në përcaktimin e vlerave të  $x$  për të cilat funksioni kuadratik  $y = x^2 + 2x - 8$  merr vlera negative. Për këtë funksion, zerot e funksionit janë  $x_1 = -4$  dhe  $x_2 = 2$ , kurse koeficienti  $a$  para anëtarit, termit, kuadratik është pozitiv, çka nënkupton se degët e parabolës do të jenë lart. Nga grafiku i parabolës (e dhënë në vizatim) i lexojmë vlerat e  $x$  për të cilat funksioni është negativ, d.m.th. vlerat për të cilat grafiku i tij është nën boshtin e abshisës  $x$ . Në këtë mënyrë vërejmë se  $x^2 + 2x - 8 < 0$  për  $x \in (-4, 2)$ .



## Shembulli 2

Zgjidhni inekuacionin  $\frac{x^2 - 5}{4} - \frac{3x^2 + 1}{2} \geq -2$ . Më pas caktoni gjitha zgjidhjet numra të plotë të inekuacionit.

### Zgjidhje:

Fillimisht, inekuacionin e dhënë e shndërrojmë në formën e përgjithshme. Pasi e shumëzojmë me SHVP e emëruesve, d.m.th. me 4, fitojmë

$$x^2 - 5 - 2(3x^2 + 1) \geq -8.$$

Duke e rregulluar fitojmë inekuacionin  $5x^2 - 1 \leq 0$ . Zerot e funksionit përkatës kuadratik i gjejmë duke e zgjidhur ekuacionin  $5x^2 - 1 = 0$ , prej ku

marrim  $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $x_2 = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ . Pasi  $a = 5$  është numër pozitiv, parabola  $y = 5x^2 - 1$  është e hapur lart dhe  $f(x) \leq 0$  për  $x \in \left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$ .

Zgjidhjet numra të plotë të këtij inekuacioni do të jenë ata numra të plotë që i takojnë bashkësisë  $\left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$ . Nga këtu, për inekuacionin e dhënë zgjidhjet numra të plotë japin bashkësinë  $M = \{0\}$ .



**Detyra 1**

Zgjidhni inekuacionet:

a)  $2x^2 + 6x - 8 > 0$ ;      b)  $2x^2 - 3x \leq 5$ ;      c)  $(2x - 1)^2 > 2 - 4x$ ;      ç)  $2x^2 - 18 \leq 0$ .

**Shembulli 3**

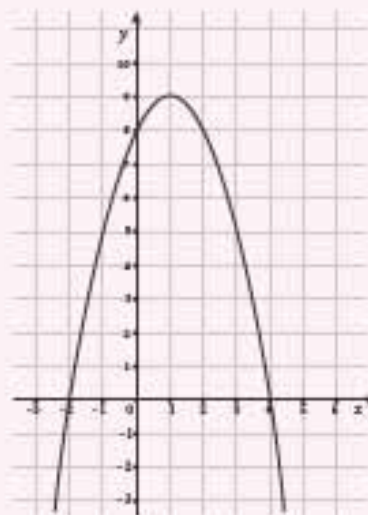
Caktoni fushën e përkufizimit të funksionit  $f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}$ .

**Zgjidhje:**

Rrënja katrore që të jetë numër real duhet që shprehja nën rrënjë të jetë numër jonegativ. Prandaj, fusha e përkufizimit e funksionit do të jetë bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit

$$-x^2 + 2x + 8 \geq 0.$$

Zgjidhjet e ekuacionit  $-x^2 + 2x + 8 = 0$  janë  $x_1 = -2$  dhe  $x_2 = 4$ , kurse  $a = -1 < 0$ , prandaj parabola është me degë poshtë. Pra,  $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$  për  $x \in [-2, 4]$ , d.m.th.  $D_f = [-2, 4]$ .

**Detyra 2**

Caktoni fushën e përkufizimit të funksioneve:

a)  $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 6}$ ;      b)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ .

**Shembulli 4**

Për cilat vlera të parametrin  $m$ , ekuacioni  $x^2 + (2 - m)x - 2 + m = 0$  do të ketë zgjidhje reale?

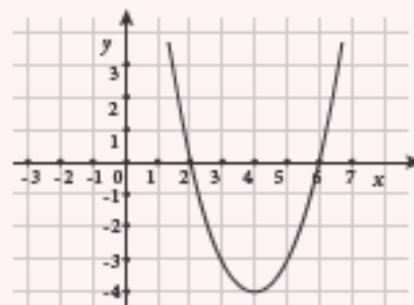
**Zgjidhje:**

Diskriminanta e ekuacionit kuadratik të dhënë është

$$D = (2 - m)^2 - 4(-2 + m) = m^2 - 8m + 12.$$

Që ekuacioni të ketë zgjidhje reale, duhet të vlejë  $D \geq 0$ , d.m.th.  $m^2 - 8m + 12 \geq 0$ .

Zgjidhje të  $m^2 - 8m + 12 = 0$  janë  $m_1 = 2$  dhe  $m_2 = 6$  dhe parabola e cila paraqet grafikun për funksionin përkatës është me degë lart. Prej këtu del se  $m^2 - 8m + 12 \geq 0$  për  $m \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$ .

**Detyra 3**

Për cilat vlera të parametrin  $m$ , ekuacioni  $mx^2 + 2(m + 2)x + 2m + 4 = 0$  nuk do të ketë zgjidhje reale, nëse  $m < 0$ ?



### Shembulli 5

Një grup nxënësish dëshirojnë të ndjekin një koncert. Harxhimet për huazimin e autobusit, që do ti shpinte në koncert, kapin shifrën 450 dollarë, shumë kjo që do të ndahej në pjesë të barabarta mes nxënësve. Organizatorët e koncertit ofrojnë ulje për çmimin e biletës për koncert për grupet që vijnë me autobus. Çmimi i zakonshëm i një bilete është 50 dollarë, mirëpo për personat që do të vijnë me autobus, çmimi i biletës ulet për 10 cent për person (d.m.th. nëse grupi ka 10 persona, atëherë secili prej tyre do të fitonte një ulje prej 100 centësh). Sa nxënës duhet të mbledhen ashtu që harxhimi i përgjithshëm për nxënës të jetë më i vogël se 54 dollarë?

**Zgjidhje:**

Le të jetë  $x$  numri i nxënësve në grup. Atëherë secili nxënës duhet të paguajë vlerën  $\frac{450}{x}$  dollarë për autobusin dhe  $50 - 0,1x$  dollarë për biletën. Harxhimi i përgjithshëm për çdo nxënës duhet të jetë më i vogël se 54 dollarë, prandaj fitojmë inekuacionin në vijim:

$$\begin{aligned} \frac{450}{x} + (50 - 0,1x) &< 54 \quad (\text{e shumëzojmë me } x, x > 0, \text{ dhe shenja e inekuacionit nuk ndryshon}) \\ 450 + 50x - 0,1x^2 &< 54x \\ -0,1x^2 - 4x + 450 &< 0 \end{aligned}$$

Zgjidhje të ekuacionit  $-0,1x^2 - 4x + 450 = 0$  (d.m.th. zero të funksionit  $f(x) = -0,1x^2 - 4x + 450$ ) janë  $x_1 = -90$  dhe  $x_2 = 50$ . Këtu, koeficienti para anëtarit kuadratik është  $a = -0,1 < 0$ , prandaj parabola që përfaqëson funksionin kuadratik ka degët poshtë, prej ku del se bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit  $-0,1x^2 - 4x + 450 < 0$  është  $(-\infty, -90) \cup (50, +\infty)$ . Mirëpo,  $x$  përfaqëson numrin e nxënësve të grupit dhe ai nuk mund të jetë numër negativ, prandaj zgjidhja do të jetë  $x \in (50, +\infty)$ , respektivisht duhet të mbledhen më shumë se 50 nxënës ashtu që secili prej tyre të ketë harxhim më të vogël se 54 dollarë.

### Detyra për ushtrime!

Zgjidhni inekuacionet kuadratike (1 - 4):

- $x^2 - 9 < 0$ ;
  - $16 - x^2 \geq 0$ ;
  - $x^2 - 2x > 0$ .
- $(3x + 1)(x - 1) \geq 0$ ;
  - $x^2 - 3x - 18 \leq 0$ ;
  - $x^2 + 2x > 3$ .
- $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$ ;
  - $x^2 < x + 2$ ;
  - $(x + 2)(x - 3) \geq 0$ .
- $(x + 4)^2 \geq 0$ ;
  - $(x + 4)^2 > 0$ ;
  - $(x + 4)^2 < 0$ ;
  - $(x + 4)^2 \leq 0$ .

5. Zgjidhni inekuacionin  $\frac{(x-1)^2}{4} \leq 1 - \frac{3-x}{2}$ , duke e kthyer në inekuacion kuadratik.

6. Gjeni fushën e përkufizimit të funksionit  $f(x) = \sqrt{24 - x - 3x^2}$ .

7. Për cilat vlera të parametrit  $m$ , ekuacioni kuadratik  $(m + 1)x^2 + 2(1 - m)x + 2m - 5 = 0$  do të ketë zgjidhje reale?

8. Nëse një prodhues shet  $x$  njësi të një produkti specifik, të ardhurat  $R$  dhe kostoja  $C$  e prodhimit (në dollarë) janë dhënë me

$$R = 20x$$

$$C = 2000 + 8x + 0,0025x^2$$

Këtu, fitimi i realizuar është i barabartë me të ardhurat nga shitja të zvogëluara për koston e prodhimit të atij produkti. Përcaktoni sa njësi të këtij produkti duhet të shet prodhuesi me qëllim që të realizojë fitim prej të paktën 2400 dollarë.

## 3.8 SISTEMI I INEKUACIONEVE KUADRATIKE ME NJË TË PANJOHUR

### Rikujtoni!

Paraqitni grafikisht bashkësinë e zgjidhjeve të sistemit  $\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 3 \end{cases}$ .

Përcaktoni prerjen e bashkësive  $M_1 = (-3, 10]$  dhe  $M_2 = (-\infty, -1] \cup (5, +\infty)$ .

Për cilat vlera të  $a$  dhe  $b$  shprehja  $\frac{a}{b}$  është negative?

### Aktivitet

Zgjidhni sistemin e inekuacioneve lineare  $\begin{cases} x - 5 \geq -1 \\ 5 - 2x < 3 \end{cases}$ .

### Shembulli 1

Përcaktoni zgjidhjen e sistemit të mëposhtëm me një inekuacion linear dhe një inekuacion kuadratik me një të panjohur

$$\begin{cases} 3x + 5 \leq 10 \\ x^2 + 3x - 10 < 0 \end{cases}$$

**Zgjidhje:**

E zgjidhim inekuacionin linear  $3x + 5 \leq 10$ .

Fitojmë  $x \leq \frac{5}{3}$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit linear është  $M_1 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ .

E përcaktojmë bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit kuadratik  $x^2 + 3x - 10 < 0$ .

Zgjidhje të ekuacionit përkatës kuadratik  $x^2 + 3x - 10 = 0$  janë  $x_1 = -5$  dhe  $x_2 = 2$ , kurse  $a = 1 > 0$ , na tregon se parabola përfaqësuese e funksionit përkatës kuadratik është me degë lart. Kjo do të thotë se  $x^2 + 3x - 10 < 0$  për  $x \in (-5, 2)$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $M_2 = (-5, 2)$ .

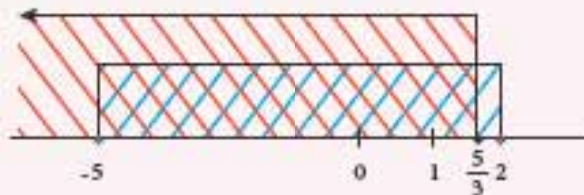
Bashkësia e zgjidhjeve e sistemit të dhënë është prerja e bashkësive të zgjidhjeve të inekuacioneve të sistemit.

Nga këtu, për zgjidhjen e sistemit të inekuacioneve fitojmë  $M = M_1 \cap M_2 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \cap (-5, 2) = \left(-5, \frac{5}{3}\right]$ .

Prerjen e bashkësive të zgjidhjeve të dy inekuacioneve mund ta përcaktojmë edhe grafikisht me anë të paraqitjes së dy bashkësive në drejtëzën reale (shihni vizatimin). Prerja është në atë pjesë që ka vija të pjerrëta të dy ngjyrave. Bashkësia  $M_1$  është përfaqësuar me vija të kuqe, kurse bashkësia  $M_2$  me vija të kaltra, prandaj aty ku kemi mbimbullim të ndërsjellë të vijave të dy ngjyrave është bashkësia e zgjidhjeve e sistemit. Po ashtu, nëse ndonjë interval është i mbyllur në ndonjërin prej pikave të skajshme, atëherë atë pikë të drejtëzës reale e shënojmë me rreth të plotë.



Bashkësia  $M_1 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$  është interval i mbyllur djathtas, që do të thotë se  $\frac{5}{3}$  i takon bashkësisë së zgjidhjeve dhe prandaj në vizatimin e mëposhtëm në këtë pikë kemi rreth të plotë. Nëse ndonjë interval është i hapur në ndonjë pikë të skajshme (ose të dy pikat e skajshme), atëherë në drejtëzën reale shënojmë rreth të zbrazët në pikën ku intervali është i hapur. Në këtë shembull, pikat  $-5$  dhe  $2$  nuk i takojnë  $M_2 = (-5, 2)$  dhe, prandaj, në vizatim në këto pika kemi rrathë të zbrazët.



#### Detyra 1

Zgjidhni sistemin e inekuacioneve 
$$\begin{cases} 2x+5 \leq 0 \\ x^2+2x-3 < 0 \end{cases}$$

#### Shembulli 2

Zgjidhni sistemin e inekuacioneve kuadratike me një të panjohur 
$$\begin{cases} x^2-7x+10 \leq 0 \\ x^2-8x+7 > 0 \end{cases}$$

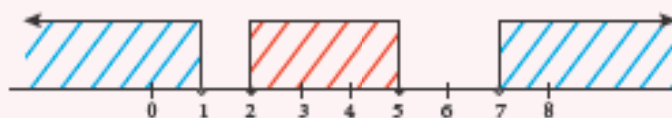
##### Zgjidhje:

Kemi sistem me dy inekuacione kuadratike me një të panjohur. Fillimisht, e përcaktojmë bashkësinë e zgjidhjeve të secilit inekuacion veçmas, e më pas për gjetjen e bashkësisë së zgjidhjeve të sistemit të dhënë e kërkojmë prerjen e dy bashkësive të fituara të zgjidhjeve të veçanta.

Zgjidhje të ekuacionit përkatës kuadratik  $x^2 - 7x + 10 = 0$  janë  $x_1 = 2$  dhe  $x_2 = 5$ , kurse  $a = 1 > 0$ , çka tregon se parabola e funksionit përkatës kuadratik është me degë lart. Pra,  $x^2 - 3x + 10 \leq 0$  për  $x \in [2, 5]$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $M_1 = [2, 5]$ .

Zgjidhje të ekuacionit përkatës kuadratik, lidhur me inekuacionin e dytë,  $x^2 - 8x + 7 = 0$  janë  $x_1 = 1$  dhe  $x_2 = 7$ , kurse  $a = 1 > 0$ , çka tregon se parabola e funksionit përkatës kuadratik është me degë lart. Pra,  $x^2 - 8x + 7 > 0$  za  $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve e këtij inekuacioni është  $M_2 = (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ .

Bashkësitë e fituara të zgjidhjeve të dy inekuacioneve janë paraqitur grafikisht në vizatim.



Vërejmë se prerja e dy bashkësive të fituara të zgjidhjeve është bashkësia boshe, prandaj sistemi i dhënë i inekuacioneve nuk ka zgjidhje.



### Shembulli 3

Zgjidhni sistemin e inekuacioneve kuadratike me një të panjohur

$$\begin{cases} (x-1)^2 - 2x > -3 \\ x(x-3) \leq x+5 \end{cases}$$

**Zgjidhje:**

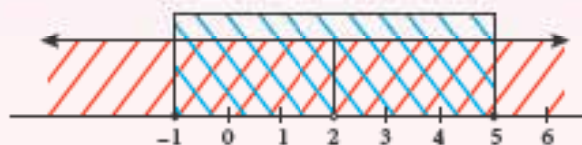
Fillimisht të dy inekuacionet i shndërrojmë në formën e përgjithshme. Fitojmë

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - 2x + 3 > 0 \\ x^2 - 3x - x - 5 \leq 0 \end{cases}, \quad \text{d.m.th.} \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x^2 - 4x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

Ekuacioni  $x^2 - 4x + 4 = 0$  ka një zgjidhje  $x = 2$  dhe pasi parabola është me degë lart, i gjithë grafiku i funksionit  $f(x) = x^2 - 4x + 4$  është mbi boshtin  $x$  me kulm në pikën  $(2, 0)$  (shihni vizatimin). Pra,  $x^2 - 4x + 4 > 0$  për  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $M_1 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ .

Zgjidhjet e  $x^2 - 4x - 5 = 0$  janë  $x_1 = -1$  dhe  $x_2 = 5$ , prandaj  $x^2 - 4x - 5 \leq 0$  për  $x \in [-1, 5]$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $M_2 = [-1, 5]$ .

Bashkësitë e fituara të zgjidhjeve të dy inekuacioneve janë paraqitur grafikisht në vizatim.



Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është  $M = M_1 \cap M_2 = ((-\infty, 2) \cup (2, +\infty)) \cap [-1, 5] = [-1, 2) \cup (2, 5]$ .

### Detyra 2

Të zgjidhet sistemi i inekuacioneve kuadratike me një të panjohur  $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0 \end{cases}$

### Shembulli 4

Të zgjidhet inekuacioni  $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} < 0$ .

**Zgjidhje:**

E dimë se herësi është negativ nëse numëruesi dhe emëruesi kanë shenja të ndryshme. Nga këtu, bashkësia e zgjidhjeve e këtij inekuacioni do të jetë unioni i bashkësive të zgjidhjeve të dy sistemeve me nga dy inekuacione kuadratike në vijim:

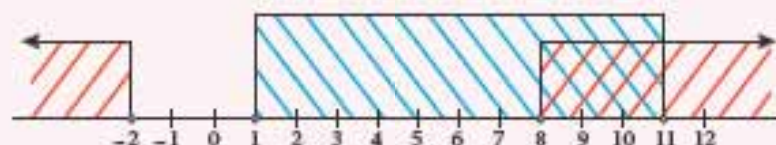
$$\begin{cases} x^2 - 6x - 16 > 0 \\ x^2 - 12x + 11 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0 \\ x^2 - 12x + 11 > 0 \end{cases}$$

Zgjidhje të ekuacionit  $x^2 - 6x - 16 = 0$  janë  $x_1 = -2$  dhe  $x_2 = 8$ , kurse të ekuacionit  $x^2 - 12x + 11 = 0$  janë  $x_1 = 1$  dhe  $x_2 = 11$ .

**Zgjidhja e sistemit të parë**

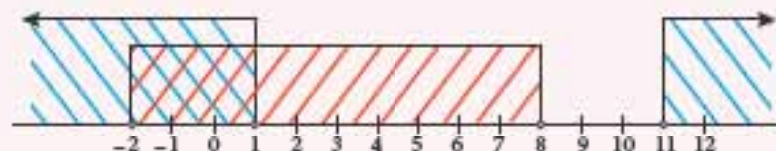
- $x^2 - 6x - 16 > 0$  për  $x \in (-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $(-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$
- $x^2 - 12x + 11 < 0$  për  $x \in (1, 11)$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $(1, 11)$ .

Bashkësia e zgjidhjeve e sistemit të parë të inekuacioneve është prerja e këtyre dy bashkësive, d.m.th.  $M_1 = (8, 11)$  (shihni vizatimin).

**Zgjidhja e sistemit të dytë**

- $x^2 - 6x - 16 < 0$  për  $x \in (-2, 8)$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $(-2, 8)$ .
- $x^2 - 12x + 11 > 0$  për  $x \in (-\infty, 1) \cup (11, +\infty)$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $(-\infty, 1) \cup (11, +\infty)$ .

Bashkësia e zgjidhjeve e sistemit të dytë të inekuacioneve është prerja e këtyre dy bashkësive, d.m.th.  $M_2 = (-2, 1)$  (shihni vizatimin).



Zgjidhja e  $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11} < 0$  është  $M = M_1 \cup M_2 = (-2, 1) \cup (8, 11)$ .

**Shembulli 5**

Zgjidhni inekuacionin  $\frac{x^2 + 2x + 1}{-x^2 - 2x + 3} \geq 0$ .

**Zgjidhje:**

Herësi do të jetë jonegativ nëse emëruesi dhe numëruesi kanë shenja të njëjta dhe, në këtë rast, numëruesi edhe mund të jetë i barabartë me zero. Nga këtu, bashkësia e zgjidhjeve e këtij inekuacioni do të jetë unioni i bashkësive të zgjidhjeve të dy sistemeve në vijim të inekuacioneve:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x + 1 \leq 0 \\ -x^2 - 2x + 3 < 0 \end{cases}$$

Zgjidhjet e  $x^2 + 2x + 1 = 0$  janë  $x_1 = x_2 = -1$  (dhe parabola  $y = x^2 + 2x + 1$  është me degë lart), kurse zgjidhjet e  $-x^2 - 2x + 3 = 0$  janë  $x_1 = -3$  dhe  $x_2 = 1$  (dhe parabola  $y = -x^2 - 2x + 3$  është me degë poshtë).

**Zgjidhja e sistemit të parë**

- $x^2 + 2x + 1 \geq 0$  për  $x \in \mathbb{R}$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $(-\infty, +\infty)$
- $-x^2 - 2x + 3 > 0$  për  $x \in (-3, 1)$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $(-3, 1)$ .

Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të parë të inekuacioneve është prerja e dy bashkësive të mësipërme, d.m.th.  $M_1 = (-3, 1)$ .

**Zgjidhja e sistemit të dytë**

- $x^2 + 2x + 1 \leq 0$  për  $x = -1$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $\{-1\}$ .
- $-x^2 - 2x + 3 < 0$  për  $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ , d.m.th. bashkësia e zgjidhjeve është  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ .

Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të dytë të inekuacioneve është prerja e dy bashkësive të mësipërme, d.m.th.  $M_2 = \emptyset$ .

Zgjidhja e inekuacionit të dhënë është  $M = M_1 \cup M_2 = (-3, 1)$ .

**Detyra 3**

Zgjidhni inekuacionin  $(x^2 - 3x - 10)(x^2 + 3x - 4) \leq 0$ .

**Detyra 4**

Caktoni fushën e përkufizimit të funksionit  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 12}}$ .

**Shembulli 6**

Zgjidhni inekuacionin  $\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} < 3$ .

**Zgjidhje:**

$$\frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} - 3 < 0$$

Numrin 3 e nxjerrim në anën e majtë të inekuacionit.

$$\frac{-x^2 + 2x - 3 - 3(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 4x + 3} < 0 \quad \text{E rregullojmë shprehjen në anën e majtë.}$$

$$\frac{-4x^2 + 14x - 12}{x^2 - 4x + 3} < 0$$

Bashkësia e zgjidhjeve e inekuacionit të fituar do të jetë unioni i zgjidhjeve të dy sistemeve të vijim të inekuacioneve kuadratike:

$$\begin{cases} -4x^2 + 14x - 12 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x^2 + 14x - 12 < 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases}$$

Zgjidhje të  $-4x^2 + 14x - 12 = 0$  janë  $x_1 = \frac{3}{2}$  dhe  $x_2 = 2$  (dhe parabola  $y = -4x^2 + 14x - 12$ ) është me degë poshtë), kurse zgjidhje të  $x^2 - 4x + 3 = 0$  janë  $x_1 = 1$  dhe  $x_2 = 3$  (dhe parabola  $y = x^2 - 4x + 3$  është me degë lart).



**Zgjidhje e sistemit të parë**

$$-4x^2 + 14x - 12 > 0 \text{ } \text{za } x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right),$$

$$-x^2 - 4x + 3 < 0 \text{ } \text{za } x \in (1, 3).$$

Bashkësia e zgjidhjeve e sistemit të parë të inekuacioneve është prerja e këtyre dy bashkësive, d.m.th.

$$M_1 = \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

**Zgjidhja e sistemit të dytë**

$$-4x^2 + 14x - 12 < 0 \text{ për } x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

$$-x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ për } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

Bashkësia e zgjidhjeve e sistemit të dytë të inekuacioneve është prerja e këtyre dy bashkësive, d.m.th.

$$M_2 = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

Zgjidhja e inekuacionit kuadrtik të dhënë është  $M = M_1 \cup M_2 = (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (3, +\infty).$

**Detyra 5**

Zgjidhni inekuacionin  $\frac{2x^2 + x - 13}{x^2 - 2x - 3} > 1.$

**Shembulli 7**

Një shtypës 3D për  $t$  orë prodhon  $P(t) = -t^2 + 16$  objekte. Nëse shtypësi punon  $t$  orë, atëherë numri i objekteve me defekt jepet me funksionin  $D(t) = t^2 - 9t + 23$ . Sa kohë duhet të punojë ky shtypës ashtu që të prodhojë të paktën 48 objekte dhe jo më shumë se 5 objekte me defekt?

**Zgjidhje:**

Duhet të caktojmë intervalin kohor për kohën  $t$  të punës së shtypësit ashtu që  $P(t) \geq 48$  dhe  $D(t) \leq 5$ , d.m.th. ta përcaktojmë bashkësinë e zgjidhjeve të sistemit të inekuacioneve kuadrtike:

$$\begin{cases} -t^2 + 16t \geq 48 \\ t^2 - 9t + 23 \leq 5 \end{cases}$$

Zgjidhja e inekuacionit të parë  $-t^2 + 16t - 48 \geq 0$  është bashkësia  $M_1 = [4, 12]$ , kurse e inekuacionit të dytë  $t^2 - 9t + 18 \leq 0$  është  $M_2 = [3, 6]$ .

Zgjidhja e sistemit të inekuacioneve është prerja e dy bashkësive të mësipërme,  $M = [4, 6]$ .

Pra, shtypësi duhet të punojë nga 4 deri 6 orë që të prodhojë të paktën 48 objekte dhe jo më shumë se 5 objekte me defekt.

**Detyra 6**

Gjeni dy numra të njëpasnjëshëm natyrorë prodhimi i të cilëve është më i vogël se 90, kurse shuma e katrorëve të tyre më e madhe se 113.

## Detyra për ushtrime!

1. Zgjidhni sistemin e inekuacioneve:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - x - 30 \leq 0 \\ x^2 - 4x - 32 > 0 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} -2x^2 + 3x + 5 > 0 \\ 2x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} 4x^2 > 4x - 1 \\ (3x - 2)^2 + (x - 2)^2 < 2 \end{cases}$$

2. Zgjidhni inekuacionin

$$\text{a) } \frac{x^2 - 3x + 4}{1 - x^2} > 0; \quad \text{b) } \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x - 8} \leq 0.$$

$$\text{c) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > -3; \quad \text{ç) } \frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} < -1.$$

3. Zgjidhni inekuacionin  $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x - 3) < 0$ .4. Gjeni fushën e përkufizimit të funksionit  $f(x) = \sqrt{\frac{4x - x^2}{x^2 - x + 1}}$ .5. Efikasiteti i lëndës djegëse të automobilat (në km për litër) gjatë lëvizjes me shpejtësi  $v$  km/h caktohet me formulën

$$E(v) = -0,01v^2 + 1,2v - 10.$$

Për çështje të ruajtjes së mjedisit jetësor, efikasiteti duhet të jetë të paktën 20 km/l, kurse për çështje të sigurisë së motorit, efikasiteti duhet të jetë të shumtën 30 km/l. Gjeni intervalin e shpejtësive të lejuara, ashtu që efikasiteti të jetë ekologjik dhe i sigurt për motorin.

## DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Cili nga funksionet e dhëna është kuadratik?

a)  $f(x) = x - x^3$ ;      b)  $f(x) = x^2$ ;      c)  $f(x) = (x+3)(3x-1)$ ;      ç)  $f(x) = 1 + x - x^2$ .

2. Jepet  $f(x) = -3x^2$ .

- a) Plotësoni tabelën

|         |    |      |    |      |   |     |   |     |   |
|---------|----|------|----|------|---|-----|---|-----|---|
| $x$     | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| $-3x^2$ |    |      |    |      |   |     |   |     |   |

- b) Vizatoni grafikun e funksionit.

3. Caktoni parametrin  $m$  ashtu që grafiku i funksionit  $f(x) = 2mx^2 - (m+3)x + 2$  të kalojë nëpër pikën  $(-2, 3)$ .

4. a) Përpiloni tabelën e vlerave të funksionit  $y = \frac{1}{4}x^2$  për 5 vlera të ndryshme të ndryshores së pavarur  $x$ .

- b) Duke shfrytëzuar tabelën, skiconi grafikun e funksionit  $y = \frac{1}{4}x^2$ .

- c) Duke shfrytëzuar grafikun e funksionit  $y = \frac{1}{4}x^2$  skiconi grafikun e funksionit  $y = -\frac{1}{4}x^2 - 3$ .

5. Gjeni bashkësinë e vlerave, kulmin e grafikut dhe vlerën ekstreme të funksionit:

a)  $y = x^2 - 3$ ;      b)  $y = -x^2 + 5$ ;      c)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ ;      ç)  $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}$ .

6. Për sa njësi dhe në cilin drejtim duhet të zhvendoset parabola  $y = 3x^2 - 2$  që të fitohet  $y = 3x^2 + 5$ ?

7. Gjeni kulmin, boshtin e simetrisë, vlerën ekstreme dhe vizatoni grafikun e funksionit:

a)  $f(x) = -2(x+1)^2$ ;      b)  $f(x) = 4(x-2)^2 + 1$ ;      c)  $f(x) = 2x^2 + 12x + 9$ .

ç)  $f(x) = -x^2 + 10x - 25$ ;      d)  $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 1$ ;      dh)  $y = \frac{1}{5}(x-3)^2 + \frac{1}{2}$ .

8. Për sa njësi dhe në cilin drejtim duhet të zhvendoset parabola  $y = 2(x+1)^2$  që të fitohet  $y = 2(x-5)^2 + 2$ ?

9. Gjeni funksionin, grafiku i të cilit është simetrik në lidhje me boshtin  $x$  me parabolën  $y = -2(x+1)^2$ .

10. Shkruani në formën kanonike funksionet e mëposhtme:

a)  $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ ;      b)  $f(x) = x^2 - 2x$ ;      c)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ .

11. Vizatoni grafikun e funksionit  $y = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{2}{3}$ .

12. Me ndihmën e pikave karakteristike, vizatoni grafikun e funksionit:

a)  $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ ;      b)  $f(x) = x^2 - 2x - 8$ .

13. Për cilat vlera të  $p$  dhe  $q$ , pika  $T(2, -5)$  do të jetë kulm i parabolës  $y = x^2 + px + q$ ?

14. Për cilat vlera të  $a$ ,  $\alpha$  dhe  $\beta$ , parabola  $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$  do të kalojë nëpër pikën  $(2, 3)$  dhe do të ketë kulm në pikën  $(3, 4)$ ?

15. Shqyrtoni vetitë e funksionit (kulmin, vlerën ekstreme, bashkësinë e vlerave, zerot, intervalet e rritjes dhe zvogëlimit)

a)  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ ;      b)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$ ;      c)  $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ .

16. Përcaktoni shenjën e funksionit:

a)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ ;      b)  $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$ .



17. Numri i mollëve të prodhuara nga secila pemë në kopshtin e frutave varet nga shpeshtësia e mbjelljes së tyre. Nëse  $n$  pemë molle janë mbjellë në një hektar tokë, atëherë secila pemë molle prodhon  $(900 - 9n)$  mollë. Sa pemë molle duhet të mbillen në një hektar kopsht frutash që të fitohet prodhimi maksimal i mollëve?
18. Vizatoni dhe shqyrtoni ecurinë, sjelljen, e funksionit:
- a)  $f(x) = -x^2 + x + 6$ ;      b)  $f(x) = x^2 - 9$ .
- c)  $f(x) = (x + 2)^2$ ;      ç)  $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$ .
19. Zgjidhni inekuacionet kuadratike:
- a)  $x^2 + 3x - 4 < 0$ ;      b)  $x^2 + x - 6 > 0$ ;
- c)  $6x^2 + x - 1 \geq 0$ ;      ç)  $x^2 - 25 \leq 0$ .
20. Zgjidhni inekuacionin duke e shndërruar në inekuacion kuadratik
- a)  $\frac{(x+2)^2}{3} - 3 \geq \frac{1-x}{4}$ ;      b)  $\frac{(x+2)^2}{3} + 2 \leq \frac{1-x}{4}$ .
21. Gjeni fushën e përkufizimit të funksionit  $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x + 6}$ .
22. Për një makinë, distanca  $d$  (në centimetra) e duhur për frenimin e plotë të saj, nëse lëviz me shpejtësi  $v$  km/h, është dhënë me formulën

$$d = v + \frac{v^2}{2}.$$

Nëse dëshirojmë që distanca e nevojshme për frenimin e plotë të makinës të mos e kalojë vlerën prej 760 centimetrash, atëherë caktoni intervalin e shpejtësisë me të cilën duhet të lëvizim.

23. Një kopshtar ka gardh me gjatësi të përgjithshme prej 120 metrash. Ai dëshiron të rrethojë me gardh një kopsht perimesh në formë drejtkëndore në oborrin e tij dhe dëshiron që syprina e rrethuar me gardh të jetë të paktën  $800 \text{ m}^2$ . Në cilin interval janë vlerat e mundshme të gjatësisë së kopshtit të tij?
24. Cilat vlera të  $x \in \{-5, -1, 0, 5\}$  janë zgjidhje të sistemit  $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -x^2 + 3x + 4 \leq 0 \end{cases}$ ?
25. Zgjidhni sistemin  $\begin{cases} 4x - 1 > 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$ .
26. Zgjidhni sistemin:
- a)  $\begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 > 0 \\ 3x^2 + 2x - 1 > 0 \end{cases}$ ;      b)  $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ -x^2 - 3x + 4 \geq 0 \end{cases}$ ;      c)  $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases}$ .
27. Zgjidhni inekuacionin  $(2x^2 - 4x - 6)(-x^2 + 3x + 4) \geq 0$ .
28. Përcaktoni fushën e përkufizimit të funksionit  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}}$ .
29. Zgjidhni inekuacionin  $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$ .
30. Përcaktoni se në cilin interval duhet të jetë gjatësia e brinjës së katrorit, ashtu që shuma e syprinës dhe e perimetrit të tij të jetë më e vogël se 21, kurse më e madhe se 5.

## ELEMENTE TË PROBABILITETIT

Kombinatorika dhe probabiliteti janë dy fusha matematike që janë ngushtësisht të lidhura me njëra-tjetrën. Kombinatorika është pjesë e matematikës e cila merret me numërimin, renditjen dhe përzgjedhjen e elementeve sipas rregullave të caktuara. Ajo na ndihmon t'u japim përgjigje pyetjeve të llojit: "Në sa mënyra mund ...?", pa numëruar gjitha mënyrat e mundshme veçmas. Probabiliteti, gjasa, nga ana tjetër, mundëson përshkrimin matematik të fenomeneve të natyrës dhe shoqërisë të cilat nuk janë deterministike, por që në vete ngërthejnë elementin e rastësisë. Fillimet e teorisë së probabilitetit janë të lidhura ngushtë me lojërat e fatit. Mirëpo, sot, teoria e probabilitetit gjen përdorim si në shkencat natyrore, ato teknike, ekonomi dhe në gjitha sferat e jetës.

### 4.1 VARIACIONET ME PËRSËRITJE

#### Rikujtoni!

Prodhiimi kartezian (i drejtpërdrejtë) i bashkësive  $A$  dhe  $B$  është bashkësia  $A \times B$ , e cila përbëhet nga dyshet e renditura  $(a, b)$ , ku  $a \in A$  dhe  $b \in B$ , përkatësisht

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

#### Aktivitet

Caktoni bashkësinë  $A \times B$ , nëse:

a)  $A = \{1, 2, 3\}$  dhe  $B = \{3, 4\}$ ;

b)  $A = \{0, 1, 2\}$  dhe  $B = \{1, 2, 3, 4\}$

#### Shembulli 1

Nëse  $A = \{1, 2, 3\}$ , përkufizoni prodhimin kartezian. Sa elemente ka ky prodhim kartezian?

**Zgjidhje:**

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ . Numri i elementeve të  $A \times A$  është 9 ( $= 3 \cdot 3 = 3^2$ ).

**Mbani mend!**

Le të jetë  $A$  bashkësi me  $n$  elemente. Çdo element i prodhimit kartezian  $A \times A$  quhet *variacion me përsëritje i klasës 2 prej  $n$  elementeve*.

- Nëse  $A$  është bashkësi me  $n$  elemente, sa elemente ka në prodhimin kartezian  $A \times A$ , përkatësisht sa dyshe të renditura  $(a, b)$  ekzistojnë, nëse  $a$  dhe  $b$  janë elemente të  $A$ ?

Vëreni me sa vijon:

- Elementi  $a$  mund të jetë cilido element nga bashkësia  $A$ . Në bashkësinë  $A$  ka gjithsej  $n$  elemente, prandaj elementin  $a$  mund ta përzgjedhim në  $n$  mënyra.
- Nëse e fiksojmë elementin  $a$ , atëherë elementi  $b$  përsëri është një element çfarëdo i bashkësisë  $A$ , përkatësisht edhe vetë elementi  $b$  mund të përzgjidhet në  $n$  mënyra.
- Nga se u tha më sipër, numri i elementeve, dysheve të renditura, në prodhimin direkt  $A \times A$  është  $n \cdot n = n^2$ .

**Mbani mend!**

Numrin e variacioneve me përsëritje të klasës 2 prej  $n$  elementeve e shënojmë me  $\bar{V}_n^2$  dhe është i barabartë me  $\bar{V}_n^2 = n^2$ .

Viza në shënimin  $\bar{V}_n^2$  do të na shërbejë për të shënuar përsëritjen, d.m.th. se bëhet fjalë për variacione me përsëritje.

Le të jetë  $A$  bashkësi e dhënë. Prodhimi kartezian  $A \times A \times A$  është bashkësia që përmban gjitha treshet e renditura  $(a_1, a_2, a_3)$ , ku  $a_1, a_2, a_3 \in A$ , d.m.th.

$$A \times A \times A = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in A\}.$$

**Shembulli 2**

Le të jetë  $A = \{1, 2\}$ . Gjeni prodhimin kartezian  $A \times A \times A$ . Sa elemente ka në këtë bashkësi?

**Zgjidhje:**

$$A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}.$$

Bashkësia  $A \times A \times A$  ka 8 elemente ( $= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ ).

**Detyra 1**

Gjeni prodhimin kartezian  $A \times A \times A$ , ku  $A = \{3, 5, 7\}$ . Sa elemente ka në këtë bashkësi?

**Mbani mend!**

Nëse  $A$  është bashkësi me  $n$  elemente, atëherë secili element nga prodhimi kartezian  $A \times A \times A$  quhet *variacion me përsëritje i klasës 3 prej  $n$  elementeve*.

Numri i variacioneve me përsëritje i klasës 3 prej  $n$  elementeve shënohet me  $\bar{V}_n^3$  dhe është i barabartë me  $\bar{V}_n^3 = n^3$ .



**Mbani mend!**

Prodhimë kartezian  $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ herë}}$  është bashkësi e cila përbëhet prej  $k$ -sheve të renditura  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  ku  $a_1, a_2, \dots, a_k$  janë elemente të bashkësisë  $A$ , d.m.th.

$$A \times A \times \dots \times A = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in A\}.$$
**Shembulli 3**

Le të jetë  $A = \{c, d\}$ . Përshkruani bashkësinë  $A \times A \times A \times A$ . Sa elemente ka kjo bashkësi?

**Zgjidhje:**

$A \times A \times A \times A = \{(c, c, c, c), (c, c, c, d), (c, c, d, c), (c, c, d, d), (c, d, c, c), (c, d, c, d), (c, d, d, c), (c, d, d, d), (d, c, c, c), (d, c, c, d), (d, c, d, c), (d, c, d, d), (d, d, c, c), (d, d, c, d), (d, d, d, c), (d, d, d, d)\}$

Numri i elementeve në bashkësinë  $A \times A \times A \times A$  është  $16 = 2^4$ . Vëreni se 2 është numri i elementeve të bashkësisë  $A$ , kurse 4 është numri që tregon se sa herë paraqitet bashkësia  $A$  në prodhimin kartezian.

**Mbani mend!**

- Nëse  $A$  është bashkësi me  $n$  elemente, atëherë secili element i prodhimit kartezian  $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ herë}}$ , quhet *variacion me përsëritje i klasës  $k$  prej  $n$  elementesh*.
- Numri i variacioneve me përsëritje i klasës  $k$  prej  $n$  elementeve shënohet me  $\bar{V}_n^k$  dhe është i barabartë me  $\bar{V}_n^k = n^k$ .

- Vëreni se (1,2,3) dhe (1,3,2) janë treshe të renditura të ndryshme, edhe pse janë të ndërtuara nga elementë të njëjtë. Nga këtu, mund të përfundojmë se renditja e elementeve në një  $k$ -she është e rëndësishme, përkatësisht renditjet e ndryshme të elementeve japin  $k$ -she të ndryshme.

**Mbani mend!**

Renditja (shpërndarja) e elementeve në një variacion me përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementeve është e rëndësishme, d.m.th. me ndryshimin e renditjes së elementeve në një variacion me përsëritje fitohet një variacion tjetër.

**Marrëveshje:** Në pjesën tjetër të tekstit, për të thjeshtuar shkrimin, variacionet me përsëritje do t'i shkruajmë pa kllapa dhe presje. Kështu, variacionin  $(c, d, c, d)$  do ta shkruajmë si  $cdcd$ . Këtu, nuk do të harrojmë se gjithsesi bëhet fjalë për  $k$ -she të renditur dhe se renditja e elementeve është e rëndësishme.

### Shembulli 4

Sa numra treshifrorë mund të ndërtohen me shifrat 1, 2, 3, 4?

**Zgjidhje:**

- Vërejmë se është e rëndësishme vendndodhja e një shifre në numrin me më shumë shifra. Në fakt, 321 dhe 213 janë numra të ndërtuar me shifra të njëjta, por gjithsesi janë të ndryshëm.
- Pra, vendndodhja e shifrës në një numër në sistemin numerik pozicional është e rëndësishme, dhe prandaj çdo numër  $k$ -shifrorë mund të shihet si  $k$ -she e renditur, përkatësisht si variacion me përsëritje i klasës  $k$ .
- Nga këtu, sasia e numrave treshifrorë të ndërtuar me katër shifrat 1, 2, 3, 4 në fakt është numri i variacioneve me përsëritje të klasës 3 prej 4 elementeve dhe ai është i barabartë me  $\bar{V}_4^3 = 4^3 = 64$ .

### Aktivitet

Shkruani gjithë numrat treshifrorë që mund të ndërtohen me shifrat 1, 2, 3, 4.

### Shembulli 5

- Sa numra katërshifrorë mund të formohen me shifrat 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
- Sa prej tyre fillojnë me shifrën 5?
- Sa prej tyre janë numra çift?

**Zgjidhje:**

- Numrat e kërkuar katërshifrorë janë, në fakt, variacionet me përsëritje të klasës 4 prej 9 elementesh. Të tillë gjithsej janë  $\bar{V}_9^4 = 9^4 = 6561$ .
- Nëse në pozicionin e parë (pozicioni i mijësheve) e fiksojmë shifrën 5, atëherë tre pozicionet e mbetura mund të shihen si variacione me përsëritje të klasës 3 prej 9 elementeve. Gjithsej kemi  $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$  numra katërshifrorë që fillojnë me 5.
- Dimë se numri është çift nëse përfundon me 2, 4, 6, 8, pra me numër çift. Nëse në pozicionin e fundit (pozicioni i njësheve) e fiksojmë numrin 2, tre pozicionet e para mund të konsiderohen si variacione me përsëritje të klasës 3 prej 9 elementeve. Ashtu si më parë, numri i tyre është  $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$ .  
Numër të njëjtë variacionesh do të fitojmë edhe nëse në pozicionin e fundit fiksojmë 4 ose 6 ose 8. Domethënë, shifra e njësheve mund të jetë njëra nga shifrat 2, 4, 6 ose 8. Pra, kemi gjithsej katër mënyra të përzgjedhjes së shifrës së fundit. Cilado prej tyre të përzgjidhet në pozicionin e njësheve, tri pozicionet e mbetura mund të plotësohen në  $\bar{V}_9^3 = 9^3 = 729$  mënyra. Nga se u tha më sipër, numri i përgjithshëm i numrave katërshifrorë që mund të ndërtohen me shifrat 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 është  $4 \cdot \bar{V}_9^3 = 4 \cdot 9^3 = 2916$ .

**Detyra 2**

Sa numra tek pesëshifrorë mund të formohen me shifrat 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**Shembulli 6**

Në një mur ka 3 varëse. Në sa mënyra mund të varen 4 bluza në to, nëse në një varëse mund të varen edhe më shumë se një bluzë?

**Zgjidhje:**

- Vëreni se secilës nga bluzat mund t'i shoqërohet njëra nga varëset 1, 2, 3, varësisht nga ajo se në cilën prej tyre do të varet ajo.
- Nga këtu, secila renditje e 4 bluzave në tri varëset mund të shihet si variacion me përsëritje i klasës 4 prej 3 elementeve.
- Për shembull, 1132 shënon faktin se bluza e parë dhe e dytë janë varur në varësen e parë, bluza e tretë në varësen e tretë, kurse bluza e katërt në varësen e dytë.
- Kështu, 4 bluza mund të varen në 3 varëse në  $V_3^4 = 3^4 = 81$  mënyra.

**Detyra për ushtrime!**

1. Jepen bashkësitë  $A = \{a, b, c, d\}$  dhe  $B = \{1, 2, 3\}$ . Formoni prodhimin kartezian  $A \times B$ .
2. Jepet bashkësia  $A = \{a, b\}$ . Shkruani gjitha variacionet me përsëritje të klasës 5 prej elementeve të bashkësisë  $A$ .
3. Sa është numri i gjithë numrave treshifrorë në të cilët nuk shfaqen shifrat 0 dhe 3?
4. Caktoni numrin e gjithë numrave katërshifrorë që mund të formohen me shifrat 1, 3, 4, 6 dhe 8.
5. Në sa mënyra mund të plotësohet tiketa për prognozën sportive me 10 çifte? (Për çdo çift kemi tre mundësi: 1 – fitore e ekipit nikoqir, 2 – fitore e ekipit mysafir dhe 0 – barazim).
6. Në përdhesen e një pallati katër katesh në ashensor janë ngjitur 6 persona. Në sa mënyra mund ta lëshojnë ashensorin ata? Secili prej tyre mund të del në ndonjërin prej katër kateve.
7. Në sa mënyra 6 letra mund të shpërndahen në 3 kuti të ndryshme postare? Në secilën kuti postare mund të futen më shumë se një letër.
8. a) Sa PIN-kode të ndryshme me pesë shifra mund të formohen prej shifrave 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, nëse shifrat mund të përsëriten?  
b) Sa kode mbarojnë me shifrën 0?  
c) Sa prej tyre fillojnë me numër tek?



## 4.2 VARIACIONET PA PËRSËRITJE

### Rikujtoni!

Nëse  $A$  është bashkësi me  $n$  elemente, atëherë çdo element i prodhimit kartezian  $A \times A \times \dots \times A$  (ku  $A$  paraqitet si faktor  $k$  herë) quhet variacion i klasës  $k$  prej  $n$  elementeve.

### Shembulli 1

Sa numra treshifrorë, me shifra të ndryshme, mund të formohen nga shifrat 1, 2, 3, 4?

**Zgjidhje:**

I formojmë numrat (në renditjen rritëse) si në vijim:

123, 124, 132, 134, 142, 143,  
213, 214, 231, 234, 241, 243,  
312, 314, 321, 324, 341, 342,  
412, 413, 421, 423, 431, 432.

Numri i përgjithshëm i numrave treshifrorë të formuar me shifrat 1, 2, 3 dhe 4, ku gjitha shifrat janë të ndryshme, është 24.

Në njësinë mësimore paraprake thamë që çdo numër treshifrorë i ndërtuar me shifrat 1, 2, 3, 4, në të cilin shifrat mund të përsëriten, quhet variacion me përsëritje i klasës 3 prej 4 elementeve. Mirëpo, nëse në një variacion gjitha elementet janë të ndryshme, atëherë variacionin e tillë e quajmë variacion pa përsëritje.

### Mbani mend!

- Variacionin e klasës  $k$  prej  $n$  elementeve në të cilin gjitha elementet janë të ndryshme e quajmë **variacion pa përsëritje i klasës  $k$  prej  $n$  elementeve**.
- Pra, variacioni pa përsëritje i klasës  $k$  prej  $n$  elementeve është çdo  $k$ -she e renditur me elementë të ndryshëm mes veti të bashkësisë me  $n$  elemente.

Vëreni se që të gjitha elementet të jenë të ndryshëm në një variacion pa përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementeve, patjetër të kënaqet kushti  $k \leq n$ . Po ashtu, sikurse edhe te variacionet me përsëritje, renditja e elementeve është e rëndësishme, d.m.th. renditjet e ndryshme të elementeve japin variacione të ndryshme.

**Detyra 1**

Gjeni gjitha variacionet pa përsëritje të klasës 3 prej elementeve të bashkësisë  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Le të jetë  $A$  bashkësi  $n$  elementëshe nga të cilët formojmë variacionet pa përsëritje të klasës  $k$ . Secili variacion

i tillë, si element i bashkësisë  $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ herë}}$ , është  $k$ -she e renditur  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , ku  $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ .

Numri i gjitha variacioneve të tilla, pa përsëritje, të klasës  $k$  prej  $n$  elementeve shënohet me  $V_n^k$  dhe ky numër përcaktohet në mënyrën në vijim:

- Elementi  $a_1$  në pozicionin e parë mund të jetë cilido element i bashkësisë  $A$ . Pra, elementi  $a_1$  mund të përzgjidhet në  $n$  mënyra.
- Për cilindo element të përzgjedhur  $a_1$  në pozicionin e parë, elementi  $a_2$  në pozicionin e dytë mund të përzgjidhet nga  $n - 1$  elementet e mbetur (ai duhet të jetë i ndryshëm nga  $a_1$ ).
- Pra, dy elementet e parë mund të përzgjidhen në  $n(n - 1)$  mënyra.
- Pasi përzgjidhen elementet  $a_1$  dhe  $a_2$  në dy pozicionet e para, elementi  $a_3$  në pozicionin e tretë mund të përzgjidhet nga  $n - 2$  elementet e mbetur (ai duhet të jetë i ndryshëm nga  $a_1$  dhe  $a_2$ ). Kjo do të thotë se ky element mund të përzgjidhet në  $n - 2$  mënyra.
- Nga këtu, tre elementet e parë mund të përzgjidhen në gjithsej  $n(n - 1)(n - 2)$  mënyra.
- Procedurën mund ta vazhdojmë në mënyrë të njëjtë derisa të plotësojmë gjitha  $k$  pozicionet. Në mënyrë induktive, mund të përfundojmë se numri i përgjithshëm i gjitha përzgjedhjeve të mundshme, d.m.th. numri i përgjithshëm i variacioneve pa përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementeve është

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)).$$

**Mbani mend!**

- Prodhimin e  $n$  numrave të parë natyrorë e shënojmë, shkurtimisht, me simbolin  $n!$ , kurse e lexojmë "n-faktorial".
- Pra,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Me përkufizim, marrim  $1! \stackrel{\text{def}}{=} 1$ , dhe  $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$ .

Për shembull  $2! = 2 \cdot 1$ ,  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ ,  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

Duke përdorur këtë shënim, formula për përcaktimin e numrit të variacioneve pa përsëritje mund të shkruhet edhe si

$$\begin{aligned} V_n^k &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

**Mbani mend!**

Numri i përgjithshëm i variacioneve pa përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementeve ( $k \leq n$ ) mund të llogaritet me formulën:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

**Shembulli 2**

Sa numra katërshifrorë mund të ndërtohen duke shfrytëzuar shifrat prej 1 deri 9, nëse numrat e formuar gjitha shifrat i kanë të ndryshme?

**Zgjidhje:**

Meqenëse numrat katërshifrorë duhet t'i kenë shifrat e ndryshme, numri i përgjithshëm i numrave të tillë katërshifrorë, të ndërtuar nga shifrat prej 1 deri 9, do të jetë, në fakt, numri i variacioneve pa përsëritje i klasës 4 prej 9 elementeve, pra

$$V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

**Detyra 2**

Sa numra pesëshifrorë, me shifra të ndryshme, mund të formohen me shifrat prej 1 deri 9?

**Shembulli 3**

Sa numra pesëshifrorë, me shifra të ndryshme, mund të formohen me shifrat 0, 1, 2, ..., 9?

**Zgjidhje:**

- Fillimisht, duhet të përmendim se numri nuk guxon të fillojë me shifrën 0. Për shembull, 01234 nuk është numër pesëshifror – është katërshifror. Prandaj, që të fitojmë gjithë numrat e kërkuar pesëshifror, sipas kushteve të detyrës, nga numri i përgjithshëm i variacioneve të klasës së 5 prej 10 elementeve (shifrave), duhet të largojmë ato variacione që fillojnë me shifrën 0.
- Numri i përgjithshëm i variacioneve pa përsëritje i klasës 5 prej 10 elementeve është  $V_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 30240$ .
- Numri i variacioneve pa përsëritje që fillojnë me shifrën 0 mund të përcaktohet duke e fiksuar shifrën 0 në pozicionin e parë, kurse katër pozicionet tjera do t'i plotësojmë me shifrat prej 1 deri 9. Numri i përgjithshëm i variacioneve të tilla do të jetë  $V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = 3024$ .
- Përfundimisht, numri i përgjithshëm i numrave pesëshifrorë me shifra të ndryshme do të jetë

$$V_{10}^5 - V_9^4 = 30240 - 3024 = 27216.$$



**Detyra 3**

Sa ka gjithsej numra gjashtëshifrorë, me shifra të ndryshme, që mund të formohen prej shifrave 0, 1, 2, ..., 9 e që nuk fillojnë me shifrën 1 ose 2.

**Shembulli 4**

Në 9 letra janë shënuar shifrat prej 1 deri 9, ashtu që në një letër ka të shënuar vetëm një shifër. Letrat përzihen mirë, e më pas prej tyre tërhiqen 4 sosh, njëra pas tjetrës, dhe renditen sipas radhës që janë tërhequr. Në sa mënyra mund të bëhet tërheqja e letrave ashtu që të fitohet numër çift katërshifror?

**Zgjidhje:**

- Gjatë çdo tërheqjeje të 4 letrave dhe renditjes së tyre sipas radhës së tërheqjes fitohet një variacion pa përsëritje i klasës 4 prej 9 elementeve. Mirëpo, kërkojmë vetëm ato variacione pa përsëritje që na japin numër çift, d.m.th. numrat që mbarojnë me shifrat 2, 4, 6 ose 8.
- Nëse në pozicionin e fundit fiksojmë shifrën 2, atëherë tre pozicionet paraprase mund të plotësohen me 8 shifrat e mbetura (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) në  $V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$  mënyra.
- Nëse në pozicionin e fundit fiksojmë shifrën 4, atëherë tre pozicionet paraprase mund të plotësohen me 8 shifrat e mbetura, gjithashtu, në 336 mënyra.
- I njëjti numër mënyrash fitohet edhe nëse në pozicionin e fundit fiksojmë shifrën 6 ose 8.
- Pra, kemi katër mënyra për përzgjedhjen e shifrës në pozicionin e fundit (pozicionin e njësheve) dhe për çdo përzgjedhje të kësaj shifre, tre pozicionet paraprase mund të plotësohen në 336 mënyra. Nga e gjithë kjo, del se numri i përgjithshëm i numrave katërshifrorë çift, të formuar me shifrat prej 1 deri 9, është  $4 \cdot V_8^3 = 4 \cdot 336 = 1344$ .

**Detyra 4**

Sa numra treshifrorë të ndryshëm mund të formohen nga shifrat prej 2 deri 8, nëse:

- shifrat mund të përsëriten;
- numrat janë të ndërtuar me shifra të ndryshme?

**Shembulli 5**

Në një autobus në të cilin ka 7 ulëse të lira, futen 5 persona. Në sa mënyra mund të ulen ata në këto ulëse të lira?

**Zgjidhje:**

- Secili person zgjedh njërën nga ulëset, nga gjithsej 7 prej tyre. Sigurisht, me marrëveshje, nuk është e lejueshme që më shumë persona të ulen në një ulësë.
- Prandaj kemi të bëjmë me variacione pa përsëritje të klasës 5 prej 7 elementeve dhe numri i kërkuar i mënyrave se si këta persona mund të ulen në këto ulëse është  $V_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ .

## Detyra për ushtrime!

1. Llogaritni: a)  $7!$ ; b)  $4!$ ; c)  $\frac{8!}{4!}$ .
2. Llogaritni: a)  $V_{11}^3$ ; b)  $V_{14}^4$ .
3. Zgjidhni ekuacionin me të panjohurën  $n$ :  
a)  $V_n^2 = 72$ ; b)  $9 \cdot V_n^3 = 5 \cdot \bar{V}_n^3$ ; c)  $V_n^{10} + V_n^9 = 9 \cdot V_n^8$ ; ç)  $5 \cdot V_n^2 = \bar{V}_n^2$ .
4. Në një hartë gjeografike janë paraqitur 4 shtete dhe secili prej tyre mund të ngjyrosset me njërin nga 9 ngjyrat e dhëna. Në sa mënyra të ndryshme mund të bëhet ngjyrosja e tyre, nëse shtetet ngjyrosen me ngjyra të ndryshme?
5. Sa është numri i gjithë numrave pesëshifrorë të ndërtuar me shifra të ndryshme e që përfundojnë me 67?
6. Sa delegacione me tre anëtarë mund të formohen nga 12 persona, nëse secili delegacion përbëhet nga presidenti, sekretari dhe arkëtari?
7. Caktoni numrin e gjithë numrave katërshifrorë që mund të shkruhen me shifrat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 dhe 7, nëse shifrat nuk përsëriten?
8. Në një bibliotekë ka 5 lexues dhe 8 libra të ndryshme. Secili lexues për zgjedh një libër. Me marrëveshje, një libër mund të përzgjidhet vetëm nga një lexues. Në sa mënyra mund të bëhet shpërndarja e këtyre librave?

## 4.3 PERMUTACIONET

### Rikujtoni!

Çka është variacioni me përsëritje i klasës  $k$  prej  $n$  elementeve dhe çka është variacioni pa përsëritje i klasës  $k$  prej  $n$  elementeve.

### Aktivitet

Shkruani gjithë numrat treshifrorë, me shifra të ndryshme, që mund të formohen nga shifrat 1, 2 dhe 3. Sa është numri i tyre?

Vëreni se numrat e kërkuar treshifrorë janë, në fakt, gjitha variacionet pa përsëritje të klasës 3 prej 3 elementeve. Numri i përgjithshëm i tyre është  $V_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 3! = 6$ . Numrat e kërkuar janë: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

### Mbani mend!

Variacionin pa përsëritje të klasës  $n$  prej  $n$  elementeve e quajmë **permutacion pa përsëritje prej  $n$  elementeve**.

### Shembulli 1

Le t'i formojmë gjitha permutacionet pa përsëritje prej elementeve  $a, b, c$  dhe  $d$ . Vëreni mënyrën e formimit të permutacioneve:

|        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $abcd$ | $abdc$ | $acbd$ | $acdb$ | $adbc$ | $adcb$ |
| $bacd$ | $badc$ | $bcad$ | $bcda$ | $bdac$ | $bdca$ |
| $cabd$ | $cadb$ | $cbad$ | $cbda$ | $cdab$ | $cdba$ |
| $dabc$ | $dacb$ | $dbac$ | $dbca$ | $dcab$ | $dcba$ |

Vëreni se permutacionet janë renditur sipas radhës alfabetike (leksikografike). Po ashtu, numër i njëjtë (nga 6) permutacionesh fillojnë me secilin nga elementet e dhëna.

### Mbani mend!

Permutacionet janë lloj i veçantë i variacioneve, prandaj pasi shpërndarja (renditja) e elementeve ka rëndësi te variacionet, kjo shpërndarje është e rëndësishme edhe te permutacionet, përkatësisht shpërndarjet e ndryshme të elementeve japin permutacione të ndryshme.



Numri i permutacioneve pa përsëritje prej  $n$  elementeve shënohet me  $P_n$ . Nga përkufizimi i permutacioneve pa përsëritje prej  $n$  elementeve përmes variacioneve pa përsëritje prej  $n$  elementeve, për  $P_n$  fitojmë:

$$P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

### Mbani mend!

Numri i permutacioneve pa përsëritje prej  $n$  elementeve është  $n!$ .

### Shembulli 2

Në sa mënyra, gjithsej, mund të renditen 4 libra të ndryshëm në një raft, nëse renditja e librave në raft është e rëndësishme?

**Zgjidhje:**

Secila renditje e katër librave mund të konsiderohet si një permutacion pa përsëritje prej 4 elementeve. Nga këtu, numri i kërkuar i renditjeve të librave në raft do të jetë  $P_4 = 4! = 24$ .

### Detyra 1

Në një shportë ka 7 fruta: një mollë, një dardhë, një pjeshkë, një banane, një ananas, një limon dhe një portokall. Në sa mënyra frutat mund t'u ndahen 7 fëmijëve, pa i prerë ato.

### Shembulli 3

- Sa numra katërshifrorë me shifra të ndryshme mund të formohen me shifrat 2, 3, 4 dhe 5?
- Sa prej tyre fillojnë me shifrën 4?
- Në sa numra 4 është shifra e parë, kurse 3 është shifra e dytë?

**Zgjidhje:**

- Numra katërshifrorë, me shifra të ndryshme, që mund të formohen me shifrat e dhëna, gjithsej ka sa permutacionet pa përsëritje prej 4 elementeve. Kështu, kemi gjithsej  $P_4 = 4! = 24$  numra të tillë.
- Nëse shifra 4 fiksohet në pozicionin e parë (pozicioni i mijësheve), tre pozicionet e tjera duhet të plotësohen me tri shifrat e mbetura, prandaj numri i mundësive është sa numri i permutacioneve prej 3 elementeve  $P_3 = 3! = 6$ .
- Nëse fiksojmë 4 në pozicionin e parë dhe 3 në pozicionin e dytë, atëherë dy pozicionet tjera plotësohen me dy shifrat e mbetura. Nga këtu, numri i mundësive është  $P_2 = 2! = 2$ .

### Shembulli 4

Cili është permutacioni i 243 me radhë i ndërtuar nga elementet  $a, b, c, d, e$  dhe  $f$ ?

**Zgjidhje:**

- Më lart përmendëm se permutacionet formohen sipas radhitjes leksikografike dhe numër i njëjtë permutacionesh fillojnë me secilin nga 6 elementet e dhëna.
- Numri i përgjithshëm i permutacioneve pa përsëritje prej 6 elementeve është  $P_6 = 6! = 720$ . Kjo do të thotë, me secilin element fillojnë 120 permutacione.
- Pra, me  $a$  fillojnë 120 permutacionet e para, me  $b$  fillojnë 120 permutacionet e radhës, d.m.th. permutacionet me numër rendor prej 121 deri 240.
- Permutacioni i parë që fillon me elementin  $c$  është permutacioni i 241. Ai është permutacioni  $cabedf$ . Pas tij është permutacioni  $cabdfe$  (me numër rendor 242). Prandaj, permutacioni i kërkuar i 243-të do të jetë permutacioni  $cabedf$ .

### Aktivitet

Shkruani gjitha permutacionet pa përsëritje me elementet  $a_1, a_2, a_3, b$ . Pastaj në secilin prej permutacioneve merrni zëvendësimin  $a_1 = a_2 = a_3$ . Nga sa herë do të paraqitet renditja e njëjtë e elementeve, d.m.th. permutacioni i njëjtë?

### Mbani mend!

Le të jenë  $a_1, a_2, \dots, a_k$   $k$  elemente të ndryshme. Çdo shpërndarje e ndryshme ku  $a_1$  paraqitet  $n_1$  herë,  $a_2$  paraqitet  $n_2$  herë, ...,  $a_k$  paraqitet  $n_k$  herë ( $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ) quhet **permutacion me përsëritje prej  $n$  elementeve i llojit**  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ .

Tani le ta gjejmë numrin e permutacioneve me përsëritje prej  $n$  elementeve në të cilët një element (për shembull, elementi  $a$ ) paraqitet  $m$  herë, kurse gjithë elementet e tjerë vetëm nga një herë, d.m.th. numrin e permutacioneve prej  $n$  elementeve të llojit  $(m, 1, \dots, 1)$  ku  $m + 1 + \dots + 1 = n$ .

- Fillimisht, secilën prej  $m$  paraqitjeve të elementit  $a$  le ta konsiderojmë si element të ndryshëm, përkatësisht marrim se në permutacion paraqiten elementet  $a_1, a_2, \dots, a_m$  të cilët do të jenë të ndryshëm mes veti dhe të ndryshëm nga elementet e tjerë të permutacionit. Atëherë do të kishim permutacione pa përsëritje prej  $n$  elementeve. Numri i tyre është  $n!$
- Nëse, më pas, zëvendësojmë  $a_1 = a_2 = \dots = a_m = a$ , disa nga permutacionet do të jenë të njëjta. Me të vërtetë, secili permutacion do të përsëritet  $m!$  herë (kur  $m$  elemente  $a$  permutojnë në  $m$  pozicione).
- Nga këtu, numri i përgjithshëm i permutacioneve me përsëritje, i llojit  $(m, 1, \dots, 1)$ , prej  $n$  elementeve do të fitohet me pjesëtimin e  $n!$  me  $m!$ .

**Mbani mend!**

Numri i permutacioneve me përsëritje prej  $n$  elementeve në të cilët njëri element përsëritet  $m$  herë, kurse elementet e tjerë paraqiten saktësisht vetëm nga një herë, shënohet me  $P_n(m, 1, \dots, 1)$  dhe llogaritet me formulën

$$P_n(m, 1, \dots, 1) = \frac{n!}{m!}.$$

**Detyra 2**

Sa numra pesëshifrorë mund të ndërtohen me elementet 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4.

Duke rezonuar si më sipër, formula e numrit të permutacioneve me përsëritje të llojit  $(m, 1, \dots, 1)$  prej  $n$  elementeve, mund të përgjithësohet në formulën e permutacioneve me përsëritje të llojit  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  prej  $n$  elementeve.

**Mbani mend!**

Numri i permutacioneve me përsëritje, i llojit  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ , prej  $n$  elementeve, ku  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , llogaritet me formulën:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

**Shembulli 5**

Sa permutacione të ndryshme mund të ndërtohen nga fjala BARABA?

**Zgjidhje:**

Në këtë fjalë shkronja B paraqitet 2 herë, shkronja A paraqitet 3 herë, kurse shkronja R vetëm 1 herë. Nga këtu, numri i permutacioneve të ndryshme me përsëritje, të llojit  $(2, 3, 1)$  është

$$P_6(2, 3, 1) = \frac{6!}{2!3!1!} = 60.$$

**Shembulli 6**

- Sa numra shtatëshifrorë mund të formohen me shifrat 1, 4 dhe 8, nëse shifra 1 paraqitet 4 herë, shifra 4 paraqitet 2 herë dhe shifra 8 paraqitet vetëm 1 herë?
- Sa prej permutacioneve të mësipërme fillojnë me shifrën 4?
- Sa prej permutacioneve fillojnë me 41?



**Zgjidhje:**

- a) Numri i përgjithshëm i numrave shtatëshifrorë të ndërtuar me nga 4 njëshe, 2 katërshe dhe 1 tetëshe është

$$P_7(4,2,1) = \frac{7!}{4!2!1!} = 105.$$

- b) Nëse në pozicionin e parë e fiksojmë shifrën 4, atëherë 6 pozicionet e tjera duhet të plotësohen me 4 njësha, 1 katërshe dhe 1 tetëshe. Numri i përgjithshëm i numrave të tillë shtatëshifrorë është

$$P_6(4,1,1) = \frac{6!}{4!1!1!} = 30.$$

- c) Ashtu si në pikën b), nëse dy pozicionet e para i plotësojmë me "41", 5 vendet tjera duhet të plotësohen me 3 njësha, 1 katërshe dhe 1 tetëshe, prandaj numri i kërkuar i numrave të tillë shtatëshifrorë do të jetë

$$P_5(3,1,1) = \frac{5!}{3!1!1!} = 20.$$

**Detyra 3**

Caktoni numrin e gjitha permutacioneve të ndryshme me përsëritje që mund të fitohen nga fjala PASARELA.

**Detyra 4**

Në një shitore për veshmbathje shiten bluza të madhësive të ndryshme: të vogla (S), të mesme (M), të mëdha (L) dhe shumë të mëdha (XL).

Në depo ka 2 bluza të madhësisë S, 3 të madhësisë M, 4 të madhësisë L dhe 1 të madhësisë XL. Në sa mënyra të ndryshme mund të realizohet radha e shitjes së gjitha bluzave, nëse bluzat e të njëjtës madhësi konsiderohen të padallueshme, të njëjta?

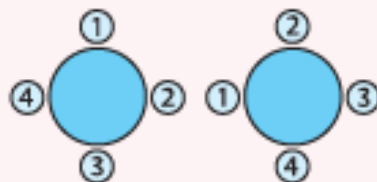
**Shembulli 7**

Në sa mënyra mund të shpërndahen në tavolinën rrethore  $k$  persona nëse nuk është e rëndësishme se kush ku është ulur, por vetëm renditja sipas së cilës janë shpërndarë?

**Zgjidhje:**

Vëreni se të dy shpërndarjet e dhëna në figurë janë të njëjta.

Që të fitohen gjitha shpërndarjet e mundshme, mjafton njëri nga personat të fiksohet në një ulëse, kurse të tjerët të shpërndahen në gjitha mënyrat e mundshme në ulëset e mbetura. Numri i permutacioneve pa përsëritje prej 3 elementeve është  $P_3 = 3! = 6$ .



Vëreni se  $k$  persona mund të shpërndahen rreth tavolinës rrethore në  $(k - 1)!$  mënyra. Me të vërtetë, një person e fiksojmë në një ulëse, kurse të tjerët i shpërndajmë në gjitha mënyrat e mundshme.

### Detyra për ushtrime!

1. Pesë mysafirë kalojnë natën në një hotel i cili ka 5 dhoma. Në sa mënyra mysafirët mund të zënë dhomat, nëse në asnjërën prej dhomave nuk lejohet më shumë se një mysafir?
2. Për ndjekjen e një manifestimi shkollor në rreshtin e parë janë rezervuar 7 ulëse për drejtorin dhe 6 mësimdhënës nga ekipi drejtues i shkollës. Në sa mënyra mund të ulen personat në fjalë, në ulëset e rezervuara, nëse drejtori ulet gjithmonë në ulësen në mes?
3. Me çdo renditje të katër qirinjve (i bardhë, i kuq, i gjelbër dhe i kaltër) në një tavolinë, nga e majta në të djathtë, jepet një sinjal. Sa sinjale të ndryshme gjithsej mund të jepen?
4. Sa fjalë të ndryshme mund të formohen me gjerat e fjalëve:  
a) LIBËR;                      b) MATEMATIKË.
5. Gjeni permutacionin e 51-të me radhë të gjeratve të fjalës LIBËR, nëse permutacioni fillestar fitohet sipas radhës alfabetike të gjeratve të kësaj fjale.
6. Sa numra tetëshifrorë mund të formohen me shifrat 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4?
7. Sa numra gjashtëshifrorë mund të formohen me shifrat 1, 1, 0, 0, 0, 2?
8. Në sa mënyra 4 balonë të kuq, 3 të kaltër dhe 3 të bardhë mund t'u ndahen 10 fëmijëve, nëse është e rëndësishme edhe ngjyra e balonës që e merr secili fëmijë?
9. Në një grup prej 6 personash vetëm dy prej tyre njihen mes veti. Në sa mënyra mund të vendoset ky grup, në tavolinë rrethore, ashtu që personat që njihen të jenë gjithmonë pranë njëri – tjetrit?
10. Në një uzinë shtypen 15 etiketa me simbolet  $a, b, c, \zeta, d$ . Duhet të shtypen: 5 etiketa me simbolin  $a$ , 3 etiketa me simbolin  $b$ , 3 me  $c$ , 2 me  $\zeta$  dhe 2 me  $d$ . Etiketat radhiten në varg. Në sa mënyra mund të radhiten këto etiketa?

## 4.4 KOMBINACIONET

### Aktivitet

Me nxënësit  $A, B, C, D$  dhe  $E$  duhet të formohet një ekip prej dy nxënësish të cilët do të marrin pjesë në një turne shahu. Në sa mënyra mund të formohet ekipi? A janë ekipet  $\{A, B\}$  dhe  $\{B, A\}$  ekiye të ndryshme?

### Shembulli 1

Është dhënë bashkësia  $A = \{a, b, c, d\}$ . Caktoni gjitha nënbashkësitë e kësaj bashkësie me nga 3 elemente. A është e rëndësishme renditja e elementeve në një nënbashkësi, d.m.th. a thua shpërndarjet e ndryshme japin nënbashkësi të ndryshme?

**Zgjidhje:**

Nënbashkësitë e bashkësisë  $A$  me nga 3 elemente janë:

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

Vëreni se shpërndarja e elementeve nuk është e rëndësishme. Për shembull,  $\{a, b, c\}$  dhe  $\{b, a, c\}$  janë e njëjta bashkësi.

### Mbani mend!

Çdo nënbashkësi prej  $k$  elementeve e bashkësisë me  $n$  elemente quhet **kombinacion pa përsëritje i klasës  $k$  prej  $n$  elementeve**.

#### E rëndësishme!

- Çdo kombinacion i klasës  $k$  prej  $n$  elementeve është një nënbashkësi me  $k$  elemente e bashkësisë së dhënë me  $n$  elemente.
- Shpërndarja (renditja) e elementeve në një kombinacion **nuk është e rëndësishme**, d.m.th. renditjet e ndryshme të elementeve të njëjta në një nënbashkësi japin kombinacionin e njëjtë.
- Pasi kombinacioni pa përsëritje është bashkësi, për shenimin e kombinacioneve do t'i përdorim kllapat e mëdha  $\{\}$ , në vend të kllapave të vogla  $(\ )$ .



### Shembulli 2

Sa buqeta të ndryshme me nga tri lule mund të aranzhohen nga lulet e trëndafilit, lales, zambakut, gerberes dhe krizantemës, nëse buqetat përmbajnë të shumtën nga një lule të secilit lloj?

**Zgjidhje:**

Shpërndarja e luleve në një buqetë nuk është e rëndësishme, kurse buqetat duhet të përmbajnë 3 lloje të ndryshme të luleve. Prandaj kemi të bëjmë me kombinacione pa përsëritje të klasës 3 prej 5 elementeve. Nëse shfrytëzojmë shkurtesat: T (trëndafili), L (lale), Z (zambaku), G (gerbera) dhe K (krizantema), fitojmë buqetat në vijim:

$\{T, L, Z\}, \{T, L, G\}, \{T, L, K\}, \{T, Z, G\}, \{T, Z, K\}, \{T, G, K\}, \{L, Z, G\}, \{L, Z, K\}, \{L, G, K\}, \{Z, G, K\}$

Numri i përgjithshëm i buqetave të ndryshme, d.m.th. numri i përgjithshëm i kombinacioneve pa përsëritje të klasës 3 prej 5 elementeve është 10.

Le të përcaktojmë numrin e kombinacioneve pa përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementeve.

- Numri i gjitha variacioneve pa përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementeve është  $V_n^k$ .
- Nga ana tjetër, nëse përzgjidhet një kombinacion pa përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementeve, atij do t'i përgjigjen, korrespondojnë,  $k!$  variacione të ndryshme pa përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementeve, që fitohen me renditjet e ndryshme të elementeve. Për shembull, kombinacionit  $\{a, b, c\}$  i përgjigjen variacionet  $(a, b, c)$ ,  $(a, c, b)$ ,  $(b, a, c)$ ,  $(b, c, a)$ ,  $(c, a, b)$ ,  $(c, b, a)$  (gjithsej  $6 = 3!$  variacione)
- Nga këtu, numri i përgjithshëm i kombinacioneve pa përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementeve fitohet kur numri i përgjithshëm i variacioneve pa përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementeve pjesëtohet me  $k!$ .

### Mbani mend!

Numri i përgjithshëm i kombinacioneve pa përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementesh shënohet me  $C_n^k$  dhe përcaktohet me formulën:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

### Shembulli 3

5 djem dhe 7 vajza duhet të formojnë një ekip me 6 anëtarë. Në sa mënyra mund të bëhet përzgjedhja nëse:

- a) nuk ka kufizime për numrin e kandidatëve të secilës gjini;
- b) në ekip duhet të ketë saktësisht 2 djem;
- c) në ekip duhet të ketë saktësisht 4 vajza.

**Zgjidhje:**

Gjithë anëtarët e ekipit janë të të njëjtit rang, prandaj renditja e tyre nuk ka rëndësi. Kjo tregon se kemi të bëjmë me kombinacione.

a) Nëse nuk ka kufizime për gjininë, atëherë kemi kombinacione të klasës 6 prej 12 elementesh, prandaj numri i tyre është  $C_{12}^6 = \frac{12!}{6!(12-6)!} = 924$  mundësi të ndryshme të formimit të ekipit.

b) Nëse numri i djemve në ekip duhet të jetë saktësisht 2, atëherë numri i vajzave do të jetë 4. Nga 5 djem, 2 prej tyre mund të përzgjidhen në  $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$  mënyra.

Për çdo përzgjedhje të 2 djemve, 4 vajza (nga 7 prej tyre) mund të përzgjidhen në  $C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$  mënyra. Nga këtu, numri i përgjithshëm i mundësive të formimit të ekipit sipas kushteve të detyrës është

$$C_5^2 \cdot C_7^4 = 10 \cdot 35 = 350.$$

c) Në ekip do të ketë të paktën 4 vajza në rastet në vijim:

- 4 vajza dhe 2 djem (numri i mundësive është  $C_7^4 \cdot C_5^2 = 35 \cdot 10 = 350$ );
- 5 vajza dhe 1 djalë (numri i mundësive është  $C_7^5 \cdot C_5^1 = 21 \cdot 5 = 105$ );
- 6 vajza dhe 0 djem (numri i mundësive është  $C_7^6 \cdot C_5^0 = 7 \cdot 1 = 7$ ).

Pra, numri i përgjithshëm i mundësive për formimin e ekipit me të paktën 4 vajza është

$$C_7^4 \cdot C_5^2 + C_7^5 \cdot C_5^1 + C_7^6 \cdot C_5^0 = 350 + 105 + 7 = 462.$$

**Detyra 1**

Ana ka 10 libra të palexuar në bibliotekën e saj. Në pushime dëshiron të merr 3 prej tyre. Në sa mënyra mund ta bëjë përzgjedhjen ajo?

**Mbani mend!**

Numri i kombinacioneve pa përsëritje  $C_n^k$  shënohet me  $\binom{n}{k}$  dhe lexohet 'n mbi k'. pra,  $C_n^k = \binom{n}{k}$ .

Për çdo numër natyror  $n$ , janë të sakta barazimet në vijim:

$$C_n^0 = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1, \quad C_n^n = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1, \quad C_n^1 = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n.$$

**Shembulli 4**

Vërtetoni se  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .

**Zgjidhje:**

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}.$$

**Shembulli 5**

Në një lulishte ka lule trëndafili dhe krizanteme. Sa buqeta të ndryshme mund të formohen me nga 3 lule, nëse në buqeta mund të ketë më shumë lule të të njëjtit lloj? Përshkruani buqetat e tilla.

**Zgjidhje:**

Çdo buqetë mund të shihet si grup me 3 lule. Grupet e mundshme janë:

TTT      TTK      TKK      KKK

Pra, numri i përgjithshëm i grupeve (buqetave) të tilla është 4.

**Mbani mend!**

Çdo grup prej  $k$  elementesh nga bashkësia me  $n$  elemente, në të cilin elementet edhe mund të përsëriten, quhet **kombinacion me përsëritje i klasës  $k$  prej  $n$  elementeve**.

Vëreni se në një grup shpërndarja, renditja, e elementeve nuk është e rëndësishme, prandaj edhe te kombinacionet me përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementesh renditja e elementeve nuk është e rëndësishme. Kjo do të thotë që shpërndarja e ndryshme e elementeve të dhëna jep kombinacionin e njëjtë me përsëritje.

**Mbani mend!**

Numri i gjitha kombinacioneve të ndryshme me përsëritje të klasës  $k$  prej  $n$  elementesh shënohet me  $\bar{C}_n^k$  dhe ky numër llogaritet me formulën

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Në detyrën paraprake numri i buqetave të ndryshme me nga 3 lule që mund të bëhen nga 2 lloje lulesh që kishte lulishtja është  $\bar{C}_2^3 = C_{2+3-1}^3 = \binom{4}{3} = 4$ .



**Shembulli 6**

Në një ëmbëltore ka akullore me shije çokollate, vaniljeje, luleshtrydheje, arre, lajthie dhe limoni. Sa porcione të ndryshme me nga tre toptha akulloreje mund të përgatiten nëse:

- të gjithë topthat në një porcion kanë shije të ndryshme;
- në porcion mund të ketë edhe toptha me të njëjtën shije.

**Zgjidhje:**

Renditja, shpërndarja, e topthave të akullores në një porcion nuk ka rëndësi, prandaj kemi të bëjmë me kombinime të klasës 3 prej 6 elementesh. Në rastin e parë bëhet fjalë për kombinime pa përsëritje, kurse në rastin e dytë bëhet fjalë për kombinime me përsëritje.

$$\text{a) } C_6^3 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20. \quad \text{b) } \bar{C}_6^3 = C_{6+3-1}^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$$

**Detyra 2**

Në sa mënyra mund të zgjidhen 4 karamele nga 5 shije të ndryshme, nëse lejohet të përzgjidhen më shumë karamele me të njëjtën shije?

**Shembulli 7**

Për një garë duhet të zgjidhet një juri me 3 anëtarë prej 6 kandidatëve të mundshëm. Nga këta duhet të zgjidhet një kryetar i jurisë dhe dy anëtarë të jurisë. Dy anëtarët e jurisë kanë të njëjtin rang.

Në sa mënyra mund të formohet kjo juri?

**Zgjidhje:**

- Së pari, numri i mënyrave për të zgjedhur kryetarin e jurisë është  $C_6^1 = 6$ .
- Për çdo zgjedhje të kryetarit, mbeten 5 kandidatë, nga të cilët duhet të zgjidhen 2 anëtarë. Meqenëse dy anëtarët kanë të njëjtin rang, renditja e tyre nuk ka rëndësi. Prandaj bëhet fjalë për kombinacione pa përsëritje prej 5 elementesh të klasës 2. Numri i përgjithshëm i përzgjedhjeve të tilla është  $C_5^2 = 10$ .
- Prandaj, numri i përgjithshëm i mënyrave për të zgjedhur një kryetar dhe dy anëtarë (me të njëjtin rang) është:

$$C_6^1 \cdot C_5^2 = 6 \cdot 10 = 60.$$

**Detyra 3**

Në mesin e shtatë kandidatëve për dy vende të lira pune në një kompani ka tre meshkuj dhe katër femra. Në sa mënyra mund të plotësohen dy vendet:

- me dy kandidatë të çfarëdoshëm?
- me dy femra?
- me një mashkull dhe një femër?

### Detyra për ushtrime!

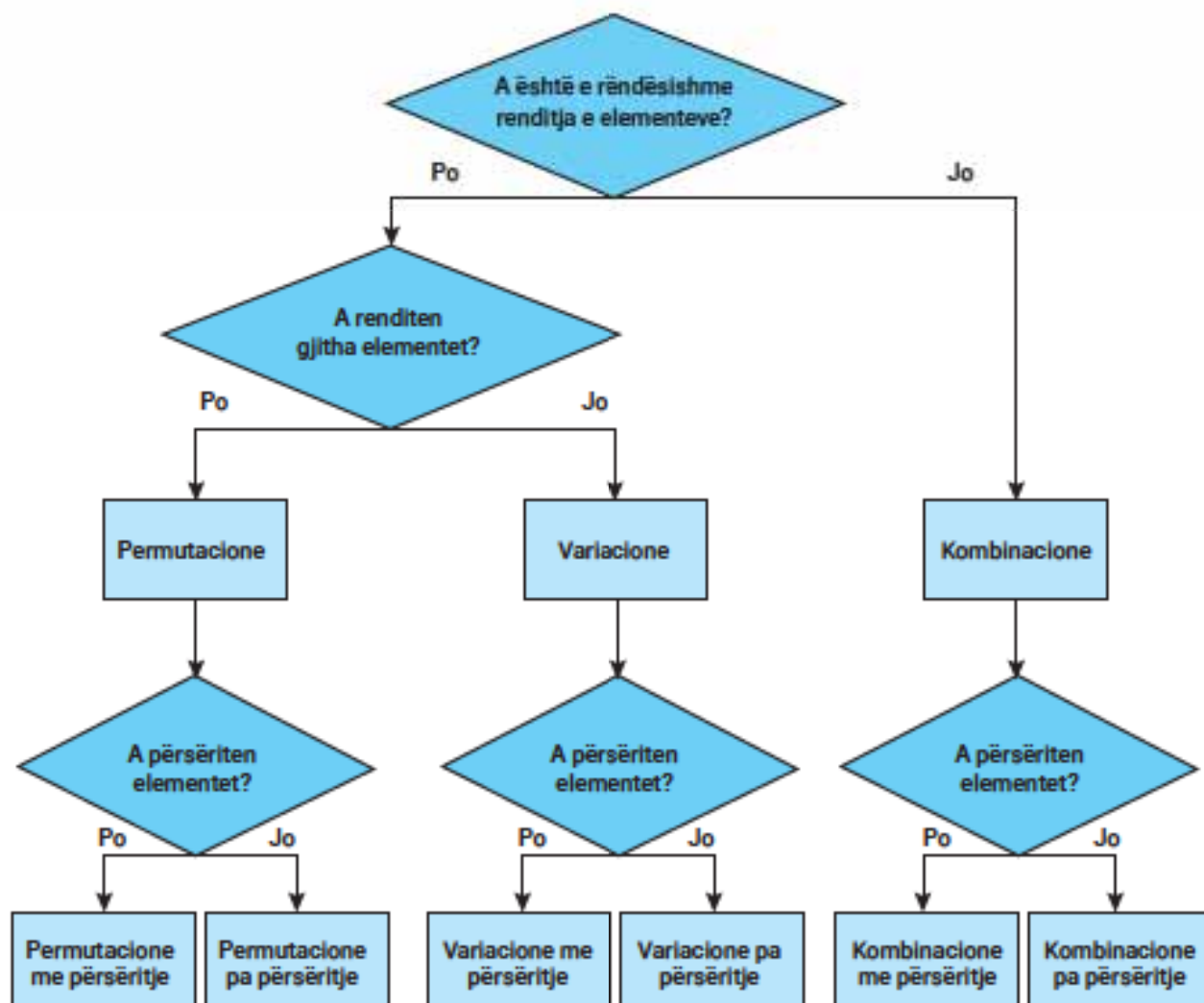
- Shkruani të gjitha kombinacionet pa përsëritje të klasës 4 nga elementet e bashkësisë  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ .
- Llogaritni: a)  $C_7^4$ ;      b)  $C_9^5$ ;      c)  $C_8^3 \cdot C_3^2$ ;      ç)  $\frac{C_{11}^8}{C_1^4}$ .
- Në sa mënyra mund të zgjidhen 5 nga 8 libra?
- Në sa mënyra mund të ndahen 24 persona në dy grupe me nga 12 persona?
- Në sa mënyra mund të ndahen 16 nxënës dhe 20 nxënëse në dy klasa, në mënyrë që secila klasë të ketë 8 nxënës dhe 10 nxënëse?
- Pesë vajza dhe gjashtë djem janë nominuar për zgjedhjen e misit dhe misterit të mbrëmjes së maturës. Në sa mënyra mund të përzgjidhet misi, misteri dhe dy shoqërues, nëse shoqëruesit mund t'i përkasin cilësdo gjinie?
- Në një depo ka shënjues në 7 ngjyra të ndryshme. Punonjësit duhet t'i paketojnë në kuti me nga 3 shënjues, në mënyrë që të tre shënjuesit të kenë ngjyra të ndryshme. Sa paketime të ndryshme mund të përgatiten?
- Një trajner ka 11 lojtarë në lojë dhe duhet të përzgjedhë 5 prej tyre për të gjuajtur penaltitë në fund të ndeshjes, e cila ka përfunduar me barazim. Në sa mënyra mund ta bëjë këtë përzgjedhje?
- Sa kombinacione të lotarisë "7 nga 37" duhet të plotësohen për të garantuar fitore të sigurt?
- Shkruani të gjitha kombinacionet me përsëritje të klasës 4 nga elementet e bashkësisë  $A = \{a, b, c\}$ .
- Në një shitore lulesh ka lule me pesë ngjyra të ndryshme: të kuqe, të bardha, blu, rozë dhe të verdha. Në sa mënyra mund të formohet një buqetë me 5 lule, nëse:
  - të gjitha lulet janë me ngjyra të ndryshme;
  - në buqetë mund të ketë edhe lule me të njëjtën ngjyrë.

$\frac{5}{2}$ 

- Çka është variacioni, permutacioni, kombinacioni?
- Shpërndarja (renditja) e elementeve të kombinacionet nuk është e rëndësishme, kurse të variacionet dhe permutacionet – shpërndarja e elementeve ka rëndësi.

- Çka është variacioni, permutacioni, kombinacioni?
- Shpërndarja (renditja) e elementeve të kombinacionet nuk është e rëndësishme, kurse të variacionet dhe permutacionet – shpërndarja e elementeve ka rëndësi.

Problemi më i madh gjatë zgjidhjes së detyrave nga kombinatorika është të konstatohet se për cilën kategori (kombinacion, variacion ose permutacion) bëhet fjalë. Përgjigjen në këtë pyetje mund ta gjejmë duke ndjekur algoritmin e dhënë në diagramin në vijim.





Nëse ndjekim algoritmin e paraqitur në mënyrë skematike, procedura për dallimin e kombinacioneve, variacioneve dhe permutacioneve rrjedh me sa vijon:

- Fillimisht, parashtrohet pyetja: A është e rëndësishme renditja e elementeve?
- Nëse përgjigja në këtë pyetje është "jo", atëherë menjëherë mund të konstatojmë se bëhet fjalë për kombinacione.
- Nëse përgjigja në këtë pyetje është "po", atëherë bëhet fjalë ose për variacione ose për permutacione, varësisht nëse renditen, shpërndahen, gjitha elementet ose jo. Prandaj parashtrohet pyetja e radhës: A renditen gjitha elementet?
- Nëse përgjigja në këtë pyetje është "po", atëherë bëhet fjalë për permutacione, në të kundërtën kemi të bëjmë me variacione.
- Pasi të kemi konstatuar se për cilën kategori (kombinacione, variacione ose permutacione) bëhet fjalë, pyetja e radhës është: A përsëriten elementet?, e prej këtu konstatojmë nëse kemi, për shembull, variacione me përsëritje ose pa përsëritje.

### Shembulli 1

Në sa mënyra nga kutia me 15 lapsa mund të përzgjidhen 9 prej tyre?

**Zgjidhje:**

A është e rëndësishme renditja, shpërndarja, e elementeve? Jo!

Pra, kemi të bëjmë me kombinacione. Elementet nuk përsëriten (asnjë laps nuk mund të përzgjidhet më shumë se një herë), prandaj kërkohet numri i kombinacioneve pa përsëritje i klasës 9 prej 15 elementesh. Ky numër është

$$C_{15}^9 = \binom{15}{9} = \frac{15!}{9!(15-9)!} = 5005.$$

### Detyra 1

Në një lotari marrin pjesë 10 bileta lotarie me fitime të ndryshme. Një pjesëmarrës tërheq tre bileta lotarie, në sa mënyra mund të fitojë tre çmime të ndryshme?

### Shembulli 2

Mësuesi i matematikës i ka pyetur katër nxënës dhe i ka notuar me notat 2, 3, 4 dhe 5. Në sa mënyra mund të renditen notat nëse:

- të gjithë janë notuar me nota të ndryshme;
- nxënësit janë notuar vetëm me 4 dhe 5.

**Zgjidhje:**

Vërejmë që në fillim se renditja e elementeve (notave) është e rëndësishme. Renditja e ndryshme e notave jep mundësi të ndryshme. Pra, bëhet fjalë për variacione ose permutacione.

- Në këtë rast renditen 4 nota të ndryshme të katër nxënësve, prandaj bëhet fjalë për permutacione pa përsëritje prej 4 elementeve. Numri i tyre është  $P_4 = 4! = 24$ .
- Nëse të gjithë nxënësit janë notuar me notën 4 ose 5, atëherë numri i mundësive të një vlerësimi të tillë është sa numri i variacioneve me përsëritje i 2 elementeve (elementet 4 ose 5) i klasës 4, dhe ky numër është i barabartë me  $V_2^4 = 2^4 = 16$ .

**Detyra 2**

Një person ka harruar PIN-in e tij gjashtëshifrorë për qasje në llogarinë e tij bankare elektronike. Ai di që PIN-i i tij në përbërje ka shifrat 1, 2, 3, 4, 5, 6 si dhe që shifrat 1 dhe 6 nuk janë as në pozicionin e parë as në pozicionin e fundit. Sa tentativa duhet të realizojë që të zbulojë PIN-in e harruar?

**Shembulli 3**

Deri në përfundimin e Ligës së parë futbolistike një ekip duhet të luajë edhe 7 ndeshje. Sipas llogarive të trajnerit, minimumi i nevojshëm i pikëve për të mbetur në ligë është 8 pikë. Në sa mënyra mund të sigurohet ky minimum pikësh nëse fitorja jep 3 pikë, barazimi – 1 pikë dhe humbja – 0 pikë? Të përmendim se kërkohet të sigurohen saktësisht 8 pikë, e jo më shumë se aq.

**Zgjidhje:**

Minimumi i duhur mund të sigurohet me sa vijon:

- 2 fitore, 2 barazime dhe 3 humbje;
- 1 fitore, 5 barazime dhe 1 humbje.

Le të nënvizojmë se shpërndarja e elementeve ka rëndësi. Shpërndarja, renditja, e ndryshme e fitoreve, barazimeve dhe humbjeve sjell mundësi të ndryshme. Këtu, shpërndajmë 7 elemente në 7 pozicione, nga të cilët disa elemente (fitore, barazim, humbje) janë të barabartë. Pra, bëhet fjalë për permutacione me përsëritje, edhe atë, në rastin e parë të llojit (2, 2, 3), kurse në rastin e dytë, të llojit (1, 5, 1). Nga këtu, numri i përgjithshëm i mundësive është:

$$P_7(2,2,3) + P_7(1,5,1) = \frac{7!}{2!2!3!} + \frac{7!}{1!5!1!} = 252.$$

**Detyra 3**

Në një shtyllë janë renditur 9 flamuj. Secila renditje, shpërndarje, e flamujve paraqet një sinjal konkret. Sa sinjale mund të jepen me flamujt nëse mes tyre ka 4 të bardhë, 3 të kuq dhe 2 të kaltër?

**Shembulli 4**

Në një turne shahu janë luajtur 36 ndeshje. Sipas rregullave të turneut, secili shahist ka luajtur me secilin nga një ndeshje shahu. Sa pjesëmarrës ka pas në turne?

**Zgjidhje:**

Le të vërejmë se numri  $n$  i shahistëve që marrin pjesë në turne është i panjohur. Çdo ndeshje shahu luhet mes dy shahistësh dhe çdo dy shahistë përballen mes veti vetëm nga një herë, prandaj renditja e shahistëve (në çdo përballje) nuk është e rëndësishme. Pra, bëhet fjalë për kombinacione pa përsëritje të klasës 2 prej  $n$  elementesh. Nga këtu, numri i përgjithshëm i përballjeve të realizuara në turne është  $C_n^2$ , kurse nga kushtet e dhëna në detyrë, ky numër është 36. Fitojmë

$$C_n^2 = 36 \quad \binom{n}{2} = 36 \quad \frac{n(n-1)}{2} = 36$$



Ekuacioni i fundit më sipër, shndërrohet në ekuacion kuadratik  $n^2 - n - 72 = 0$ . Për zgjidhjet të këtij ekuacioni, fitojmë:

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-72)}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2},$$

d.m.th.  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = -8$ . Meqenëse bëhet fjalë për numrin e pjesëmarrësve në turne, ky numër nuk mund të jetë negativ. Pra, numri i pjesëmarrësve në turneun e shahut është 9.

#### Detyra 4

Në sezonin e fundit të Ligës së parë futbollistike të Maqedonisë janë luajtur gjithsej 132 ndeshje. Sipas rregullave të ligës, çdo ekip luan me çdo ekip tjetër nga dy ndeshje (një si nikoqir dhe një si mysafir). Sa ekipe luajnë në Ligën e parë futbollistike të Maqedonisë?

#### Shembulli 5

Shqyrtojmë gjashtëshet e ndërtuara me shifrat 0, 1, 2. Të caktohet numri i atyre gjashtësheve të cilat shifra 2 gjendet në pozicionin e fundit (të gjashtë)?

##### Zgjidhje:

Meqenëse bëhet fjalë për gjashtëshe, është e qartë se renditja e elementeve në çdo gjashtëshe është e rëndësishme. Gjashtëshet janë të ndërtuara me shifrat 0, 1 dhe 2, prandaj është e qartë se kemi të bëjmë me variacione me përsëritje të klasës 6 prej 3 elementeve. Në detyrë kërkohen ato variacione që në pozicionin e fundit kanë shifrën 2. Numri i tyre mund të përcaktohet me sa vijon: nëse në pozicionin e fundit e fiksojmë shifrën 2, atëherë pesë pozicionet paraprahe mund të plotësohen në  $V_5^3 = 3^5 = 243$  mënyra. Pra, kemi gjithsej 243 gjashtëshe sipas kushteve të detyrës.

#### Detyra 5

Shqyrtojmë shtatëshet e ndërtuara me shifrat 0, 1, 2, 3, 4. Të caktohet numri i atyre shtatësheve të cilat shifrat 1 dhe 2 zënë pozicionin e parë dhe të dytë, respektivisht.

#### Shembulli 6

Sa diagonale mund të tërhiqen në një dhjetëkëndësh?

##### Zgjidhje:

Le ta shqyrtojmë bashkësinë e kulmeve të dhjetëkëndëshit. Nëse njëri nga dhjetë kulmet lidhet me të tjerët, do të fitojmë gjitha diagonale dhe gjitha brinjët e dhjetëkëndëshit. Çdonjëra nga lidhjet e dy kulmeve mund të konsiderohet si një kombinacion i klasës 2 prej 10 elementeve (renditja e kulmeve nuk është e rëndësishme, dy kulme përcaktojnë saktësisht një diagonale ose saktësisht një brinjë). Numri i përgjithshëm i diagonaleve dhe brinjëve është  $C_{10}^2 = \binom{10}{2} = 45$ . Meqenëse dhjetëkëndëshi ka 10 brinjë, numri i përgjithshëm i diagonaleve do të jetë  $C_{10}^2 - 10 = 45 - 10 = 35$ .

#### Detyra 6

Sa diagonale mund të tërhiqen në një dymbëdhjetëkëndësh?



**Shembulli 7**

Në një raft duhet të renditen 7 libra, në mesin e të cilëve edhe dy vëllime të një romani. Në sa mënyra mund të renditen librat, nëse dy vëllimet e romanit duhet të qëndrojnë njëri pranë tjetrit në cilëndo prej renditjeve?

**Zgjidhje:**

Dy vëllimet e romanit mund të trajtohen si një libër (pra, në thelb kemi radhitjen e 6 librave) dhe, kështu, kemi dy mundësi: të jenë në radhitjen 1 – 2 ose 2 – 1 (vëllimi i parë – vëllimi i dytë ose vëllimi i dytë – vëllimi i parë). Nëse vendosen në renditjen 1 – 2, atëherë numri i renditjeve të gjashtë librave në raft është  $P_6 = 720$ . Numër të njëjtë të renditjeve fitojmë edhe kur vëllimet e romanit janë në renditjen 2 – 1. Prandaj, numri i përgjithshëm i kërkuar i renditjeve të librave, sipas kushteve të detyrës, është

$$2 \cdot P_6 = 2 \cdot 720 = 1440.$$

**Detyra për ushtrime!**

- Nga pesë shifrat numra tek, formohen numra katërshifrorë.
  - Sa numra katërshifrorë mund të formohen?
  - Në sa prej tyre shifrat janë të ndryshme?
  - Sa prej tyre mbarojnë me shifër të plotpjesëtueshme me 3?
  - Sa prej tyre fillojnë dhe mbarojnë me shifër të njëjtë?
- Në kampionatin botëror në hendboll marrin pjesë 16 reprezentacione. Në sa mënyra mund të shpërndahen tri medalje (e artë, e argjente dhe e bronzë)?
- Një aparaturë ka 8 susta të ndryshme të tabelës komanduese. Shtypja (me radhë) e 5 prej këtyre sustave mundëson iniciimin e një aktiviteti të aparaturës. Sa aktivitete mund të iniciohen në këtë aparaturë?
- Sa permutacione të ndryshme mund të formohen me shifrat 0, 1, 2, ..., 9 në të cilat shifrat 2, 3 dhe 4 janë pranë njëra – tjetrës në cilëndo shpërndarje të mundshme?
- Tre djem dhe tri vajza radhiten në rresht. Në sa mënyra mund të realizohet radhitja, nëse:
  - tre djemtë duhet të jenë pranë njëri – tjetrit?
  - dy vajza përkatëse duhet të jenë bashkë.
- Nga kuverta standarde e letrave të bixhozit merren vetëm letrat me figura (fanti, mbretëresha, mbreti). Nga letrat e veçuara përzgjidhen 3. Në sa mënyra mund të përzgjidhen të paktën dy letra me ngjyrë të kuqe?
- Në një raft të bibliotekës janë 9 libra, prej të cilëve 7 janë libra matematike dhe 2 për informatikë. Në sa mënyra mund të përzgjidhen 4 nga këto 9 libra ashtu që mes librave të përzgjedhur të ketë të paktën një libër nga informatika?
- Në një shitore ka 4 lloje petullash. Në sa mënyra mund të blihen 6 petulla nëse llojet e tyre mund të përsëriten?

## 4.6 EKSPERIMENTET DHE NGJARJET

### Aktivitet

1. Realizoni eksperimentin e hedhjes së zarit për lojë dhe vrojtoni paraqitjen e numrit 2. A mund të thoni me siguri që gjatë hedhjes së zarit në sipërfaqen e sipërme do të shfaqet numri 2?
2. Përsëritni eksperimentin e hedhjes së zarit më shumë herë dhe numëroni sa herë shfaqet numri 2. Çfarë përfundimi mund të nxirrni në lidhje me shfaqjen e numrit 2?

### Mbani mend!

**Eksperimenti** është veprim ose aktivitet që realizohet për t'u vrojtuar, matur ose hulumtuar ndonjë fenomen, sjellje e ndonjë sistemi ose procesi dhe të fitohen të dhëna për analizë të mëtejme.

Disa shembuj eksperimentesh:

1. Një monedhë hidhet në ajër dhe pas rënies së saj në sipërfaqen tokësore, në faqen e sipërme mund të shfaqet "fytyrë" ose "stemë". Me hedhjen e monedhës kemi kryer një eksperiment dhe si rezultat i këtij eksperimenti mund të fitohet njëri nga rezultatet: "në faqen e sipërme të monedhës është shfaqur fytyrë" ose "në faqen e sipërme është shfaqur stemë".
2. Nëse ujin e ngrohim në  $100^{\circ}\text{C}$ , atëherë ai do të fillojë të vlijë. Këtu është kryer një eksperiment (ngrohja e ujit) dhe si rezultat të këtij eksperimenti shfaqet rezultati "uji vlon".
3. Kontrollohet funksionaliteti i produkteve të një fabrike, ashtu që merret një produkt dhe kontrollohet cilësia e tij që të përfundojmë nëse është ose jo me defekt. Pra, është kryer eksperimenti (kontrolli i cilësisë), kurse rezultatet, përfundimet, e mundshme janë "produkti është funksional" dhe "produkti është me defekt".
4. Realizohet një test për të kontrolluar dijen e një nxënësi. Vlerësimi i testit bëhet me pikë prej 0 deri 100. Atëherë eksperimenti është "vlerësimi i nxënësit", kurse rezultatet e mundshme janë "nxënësi ka akumuluar  $i$  pikë", ku  $i = 0, 1, \dots, 100$ .

Çdo rezultat (përfundim) i eksperimentit  $S$  quhet *ngjarje* lidhur me eksperimentin  $S$ . Ngjarjet do t'i shënojmë me shkronjat e mëdha të alfabetit:  $A, B, C, \dots$

Një eksperiment mund të jetë deterministik ose jodeterministik. Nëse rezultati i një eksperimenti është i njohur përpara se ai të kryhet, atëherë ky eksperiment është *deterministik*, në të kundërtën, nëse rezultati nuk mund të dihet me siguri përpara se ai të realizohet, atëherë eksperimenti është *jodeterministik*.

### Detyra 1

Për çdonjërin prej eksperimenteve në shembujt 1, 2, 3, 4 konstatooni nëse është deterministik ose jodeterministik.

Teoria e probabilitetit merret me studimin e eksperimenteve jodeterministike. Qëllimi i saj është që të gjejë ligjshmërinë në eksperimentet me rezultat jo të njëvlershëm. Le ta shqyrtojmë shembullin në vijim.



## Shembulli 1

Le ta shqyrtojmë eksperimentin e hedhjes së monedhës dhe ngjarjen  $A$ : “ka rënë fytyrë”. Nëse eksperimenti kryhet vetëm një herë, atëherë nuk mund të thuhet, me siguri, se cili do të jetë rezultati. Prandaj, le të kryhen 10 seri me nga  $n = 1000$  eksperimente nën kushte të njëjta. Me  $n_i(A)$  shënojmë numrin e eksperimenteve të serisë së  $i$ -të në të cilët shfaqet ngjarja  $A$ . Rezultatet nga këto dhjetë seri janë prezantuar në tabelën vijuese.

| $i$ | $n_i(A)$ | $\frac{n_i(A)}{n}$ |
|-----|----------|--------------------|
| 1   | 502      | 0,502              |
| 2   | 504      | 0,504              |
| 3   | 492      | 0,492              |
| 4   | 498      | 0,498              |
| 5   | 500      | 0,500              |
| 6   | 510      | 0,510              |
| 7   | 505      | 0,505              |
| 8   | 490      | 0,490              |
| 9   | 493      | 0,493              |
| 10  | 509      | 0,509              |

Në shtyllën e fundit është dhënë vlera e herësit  $\frac{n_i(A)}{n}$ , ku  $n$  është numri i eksperimenteve të kryera në një seri. Në rastin tonë  $n = 1000$ . Mund të vërejmë se vlerat në këtë shtyllë janë afër vlerës 0,5. Këtu, nëse numri i eksperimenteve rritet gjatë një serie, atëherë ky herës i afrohet akoma më shumë vlerës 0,5. Pra, edhe përkundër faktit që me realizimin e një eksperimenti të hedhjes së monedhës nuk mundemi të parashikojmë me siguri se cilin rezultat do të fitojmë, gjatë realizimit të një serie prej më shumë eksperimentesh vërehet një ligjshmëri e caktuar e paraqitjes së ngjarjes “ka rënë fytyrë”, e kjo është se në pothuajse gjysmën e eksperimenteve të realizuara do të shfaqet kjo ngjarje.

## Mbani mend!

- Numrin  $\frac{n_i(A)}{n}$  e quajmë **frekuencë relative** për ngjarjen  $A$  në serinë e  $i$ -të të eksperimenteve.
- Numrin real rreth të cilit grumbullohen këto frekuenca relative e quajmë **probabilitet statistikor** (ose **empirik**) të ngjarjes  $A$ .
- Nëse shqyrtohet një seri prej  $n$  eksperimentesh, atëherë numri  $n(A)$  i paraqitjes së ngjarjes  $A$  mund të jetë më së paku 0, kurse më së shumti  $n$ , d.m.th.  $0 \leq n(A) \leq n$ . Nga këtu, del se  $\frac{0}{n} \leq \frac{n(A)}{n} \leq \frac{n}{n}$ , prandaj  $0 \leq \frac{n(A)}{n} \leq 1$ . Mund të konstatojmë se frekuenca relative e paraqitjes së ngjarjes  $A$  është një numër mes 0 dhe 1, prandaj edhe probabiliteti statistikor i ngjarjes  $A$  është ndërmjet 0 dhe 1.
- Probabiliteti statistikor i ngjarjes  $A$  është masë objektive e paraqitjes së kësaj ngjarjeje.
- Në shembullin paraprak me hedhjen e monedhës, probabiliteti statistikor i ngjarjes  $A$ : “ka rënë fytyrë” është 0,5. Ky është numri rreth të cilit grumbullohen frekuencat e dhëna relative në shtyllën e fundit të tabelës paraprake.



**Detyra 2**

Sa është frekuenca relative e paraqitjes së ngjarjes  $B$  "ka rënë numri 2" në serinë e eksperimenteve me hedhjen e zarit kubik për lojë që i realizove në aktivitetin paraprak.

**Mbani mend!**

Për ngjarjen e dhënë  $A$  mund të zbatohet përkufizimi statistikor i probabilitetit nëse janë plotësuar dy kushtet në vijim:

1. Eksperimenti  $S$  mund të përsëritet sado qoftë herë nën kushte të njëjta;
2. Frekuencat relative të ngjarjes  $A$ , në secilën prej më shumë serive të eksperimenteve të realizuara, janë numra përafërsisht të barabartë. Kjo do të thotë që nëse kryhen seritë me nga  $n_1, n_2, \dots, n_k$  eksperimente, atëherë:

$$\frac{n_1(A)}{n_1} \approx \frac{n_2(A)}{n_2} \approx \dots \approx \frac{n_k(A)}{n_k}.$$

Kushti 2 siguron stabilitetin statistikor, kurse kushti 1 siguron kontrollimin e kushtit 2. Ngjarja  $A$ , në lidhje me eksperimentin për të cilin janë plotësuar kushtet 1 dhe 2, quhet **ngjarje e rastit**.

**Shembulli 2**

Le t'i shqyrtojmë eksperimentet në vijim dhe ngjarjet lidhur me to.

- a) Eksperimenti le të jetë *hedhja e zarit kubik për lojë*. Shqyrtojmë ngjarjet:  
 $A_1$ : "ka rënë numër prej 1 deri 6;  
 $A_2$ : "ka rënë numri 7.
- b) Eksperimenti është *nxjerrja e një topi të vogël nga kutia që përmban 5 topa të vegjël të bardhë*. Shqyrtojmë ngjarjet:  
 $B_1$ : "është nxjerrë top i bardhë"  
 $B_2$ : "është nxjerrë top i zi"
- c) Eksperimenti është *vlerësimi i një nxënësi të përzgjedhur rastësisht*. Shqyrtojmë ngjarjet:  
 $C_1$ : "nxënësi ka marrë notë prej 1 deri 5;  
 $C_2$ : "nxënësi ka marrë notën 10".

Mund të vërejmë se ngjarjet  $A_1, B_1, C_1$  shfaqen gjatë çdo realizimi të eksperimentit përkatës, kurse ngjarjet  $A_2, B_2, C_2$  nuk shfaqen asnjëherë gjatë realizimit të eksperimentit përkatës.

**Mbani mend!**

- **Ngjarje e sigurt** lidhur me një eksperiment të dhënë është ngjarja e cila paraqitet gjatë çdo realizimi të atij eksperimenti.
- **Ngjarje e pamundshme** lidhur me një eksperiment të dhënë është ngjarja e cila nuk paraqitet asnjëherë gjatë realizimit të atij eksperimenti.

Pra, në shembullin 2, ngjarjet  $A_1, B_1, C_1$  janë ngjarje të sigurta, kurse ngjarjet  $A_2, B_2, C_2$  janë ngjarje të pamundshme.

- Le të vërejmë se nëse realizohet një seri prej  $n$  eksperimentesh, ngjarja e sigurt paraqitet  $n$  herë, kurse ngjarja e pamundshme paraqitet 0 herë. Nga këtu del se frekuenca relative e ngjarjes së sigurt është  $\frac{n}{n} = 1$ , kurse frekuenca relative e ngjarjes së pamundshme është  $\frac{0}{n} = 0$ . Pra, ngjarja e sigurt dhe ajo e pamundshme i plotësojnë kushtet 1 dhe 2, prandaj edhe ato janë ngjarje të rastit.

### Detyra për ushtrime!

1. Eksperimenti le të jetë hedhja e zarit kubik për lojë. Kryeni 4 seri me nga 50 eksperimente dhe caktoni probabilitetin statistikor të paraqitjes së ngjarjeve:  
A: "në faqen e sipërme të zarit është shfaqur numër çift";  
B: "në faqen e sipërme të zarit është shfaqur numër më i madh se 4".
2. Eksperimenti le të jetë nxjerrja e një karte nga kuverta e letrave të bixhozit që ka 52 letra. Kryeni 5 seri me nga 100 eksperimente. Pas çdo nxjerrjeje regjistroni numrin dhe shenjën e kartës dhe të njëjtën, pastaj, kthejeni në kuvertë. Caktoni sa është frekuenca statistikore e ngjarjeve:  
A: "është nxjerrë letra me numër 5";  
B: "është nxjerrë letra maç";  
C: "është nxjerrë letra me dhjetëshen spathi".
3. Matet temperatura në klasë me termometër digjital. Senzori mund të tregojë temperaturën në intervalin prej  $-10^\circ \text{C}$  deri  $50^\circ \text{C}$ . Për secilën nga ngjarjet në vijim konstatoni nëse është ngjarje e sigurt, e pamundshme ose as njëra e as tjetra.  
A: "Është regjistruar temperatura ndërmjet  $-10^\circ \text{C}$  dhe  $50^\circ \text{C}$ ";  
B: "Është regjistruar temperatura  $100^\circ \text{C}$ ";  
C: "Është regjistruar temperaturë negative".
4. Në një laborator testohet tretja me letër lakmus. Tretja është ose acidike ose neutrale ose bazike. Për secilën nga ngjarjet e mëposhtme konstatoni nëse është ngjarje e sigurt, e pamundshme ose asnjëra prej tyre.  
A: "Tretja të jetë neutrale";  
B: "Tretja të jetë njëkohësisht edhe acidike edhe bazike";  
C: "Tretja të ketë njërën nga tri gjendjet e sipërpërmendura".



## 4.7 BASHKËSIA E NGJARJEVE ELEMENTARE. NGJARJET E RASTIT

### Shembulli 1

Le ta shqyrtojmë eksperimentin e hedhjes së zarit kubik për lojë. Disa nga ngjarjet e mundshme në lidhje me këtë eksperiment janë me sa vijon:

|                                          |                          |
|------------------------------------------|--------------------------|
| $A$ : ka rënë numër çift;                | $E_3$ : ka rënë numri 3; |
| $B$ : ka rënë numër i pjesëtueshëm me 3; | $E_4$ : ka rënë numri 4; |
| $E_1$ : ka rënë numri 1;                 | $E_5$ : ka rënë numri 5; |
| $E_2$ : ka rënë numri 2;                 | $E_6$ : ka rënë numri 6. |

Le t'i shqyrtojmë ngjarjet  $A$  dhe  $B$ , nga njëra anë, dhe ngjarjet  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$  dhe  $E_6$  nga ana tjetër. Mund të vërejmë se ngjarja  $A$  paraqitet nëse paraqitet njëra nga ngjarjet  $E_2, E_4$  ose  $E_6$ , kurse ngjarja  $B$  paraqitet nëse paraqitet ngjarja  $E_3$  ose  $E_6$ . Pra, ngjarja  $A$  mund të zbërthehet në ngjarjet  $E_2, E_4$  dhe  $E_6$ , kurse ngjarja  $B$  mund të zbërthehet në ngjarjet  $E_3$  dhe  $E_6$ .

Nga ana tjetër ngjarjet  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$  dhe  $E_6$  nuk mund të zbërthehen në ngjarje të tjera. Prandaj, këto ngjarje i quajmë ngjarje elementare. Ngjarjet elementare do t'i shënojmë me simbolin  $E$  dhe indekset 1, 2, ...

### Mbani mend!

- **Ngjarje elementare** lidhur me një eksperiment është çdo rezultat logjik i eksperimentit, e cila nuk mund të zbërthehet në ngjarje të tjera. Këtu, gjatë çdo realizimi të eksperimentit paraqitet një dhe vetëm një ngjarje elementare.
- Bashkësinë e gjitha ngjarjeve të tilla lidhur me një eksperiment e quajmë **bashkësi të ngjarjeve elementare** dhe e shënojmë me  $\Omega$ .

### Shembulli 2

Le ta përcaktojmë bashkësinë e ngjarjeve elementare nëse eksperimenti është hedhja e zarit kubik. Le të vërejmë se gjatë çdo realizimi të eksperimentit paraqitet njëra dhe vetëm njëra nga ngjarjet  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$  dhe  $E_6$  që janë përkufizuar në shembullin 1, prandaj bashkësia e ngjarjeve elementare në lidhje me këtë eksperiment është  $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ .

### Detyra 1

Caktoni bashkësinë e ngjarjeve elementare për eksperimentin e hedhjes së monedhës.



### Shembulli 3

Le të shqyrtojmë eksperimentin e hedhjes së dy monedhave. Gjatë hedhjes së një monedhe, rezultati i mundshëm është "ka rënë fytyrë" ose "ka rënë stemë" (shkurt do të shkruajmë "fytyrë" ose "stemë"). Mirëpo, eksperimenti i hedhjes së dy monedhave përnjëherësh, do të ketë rezultate të mundshme çiftë të renditura, ku elementi i parë i çiftit do ta shënojë rezultatin e fituar nga monedha e parë, kurse elementi i dytë i çiftit – rezultatin e fituar nga monedha e dytë. Bashkësia e ngjarjeve elementare është bashkësia në vijim:

$$\Omega = \{(stemë, stemë), (stemë, fytyrë), (fytyrë, stemë), (fytyrë, fytyrë)\}.$$

Në shembullin e 1 përfunduam se ngjarja  $A$  do të paraqitet nëse paraqitet njëra nga ngjarjet  $E_2, E_4$  ose  $E_6$ , kurse ngjarja  $B$  nëse paraqitet ngjarja  $E_3$  ose ngjarja  $E_6$ . Nga këtu, ngjarjet  $A$  dhe  $B$  mund të shkruhen në mënyrën në vijim  $A = \{E_2, E_4, E_6\}$ ,  $B = \{E_3, E_6\}$ . Le të vërejmë se ngjarjet  $A$  dhe  $B$  janë paraqitur si nënbashkësi të bashkësisë së ngjarjeve elementare  $\Omega$ .

### Mbani mend!

- **Ngjarja e rastit** është nënbashkësi e çfarëdoshme e bashkësisë së ngjarjeve elementare  $\Omega$ .
- Do të themi se është paraqitur ngjarja  $A$  nëse është paraqitur ndonjëra nga ngjarjet elementare që i takojnë nënbashkësisë së ngjarjeve elementare që i korrespondojnë ngjarjes  $A$ .

### Shembulli 4

Eksperimenti përbëhet nga hedhja e dy zareve për lojë. Përshkruani bashkësinë e ngjarjeve elementare dhe ngjarjet e mëposhtme:

$A$ : në të dy zaret ka rënë numër çift;

$B$ : në kubin e parë ka rënë numër çift, kurse në kubin e dytë numër tek.

**Zgjidhje:**

Bashkësia e ngjarjeve elementare për këtë eksperiment do të përbëhet prej dysheve të renditura  $(x, y)$ , ku  $x$  është rezultati i kubit të parë, kurse  $y$  – rezultati i kubit të dytë,  $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Nga këtu,

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Për ngjarjen  $A$  fitohet me sa vijon:

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \{2, 4, 6\}\},$$

ose në formë të zbërthyer:

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\},$$

kurse për ngjarjen  $B$  kemi:

$$B = \{(x, y) \mid x \in \{2, 4, 6\}, y \in \{1, 3, 5\}\},$$

ose

$$B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}.$$

- Ngjarja e sigurt shfaqet sa herë që realizohet eksperimenti, d.m.th. çdo ngjarje elementare sjell shfaqjen e saj. Prandaj edhe e shënojmë me  $\Omega$ .
- Ngjarja e pamundshme, nga ana tjetër, nuk shfaqet asnjëherë kur realizohet eksperimenti, respektivisht asnjë ngjarje elementare nuk sjell shfaqjen e saj. Prandaj, ngjarjen e pamundshme e shënojmë me  $\emptyset$ .

### Detyra për ushtrime!

1. Eksperimenti le të fillojë me hedhjen e monedhës. Pastaj, nëse ka rënë fytyrë, hidhet zari kubik dhe regjistrohet numri i pikëve në faqen e sipërme të kubit, kurse nëse shfaqet stemë në monedhë, atëherë monedha hidhet edhe një herë, përshkruani bashkësinë e ngjarjeve elementare lidhur me këtë eksperiment.
2. Në një kuti ka 5 sfera të numëruar me numrat prej 1 deri 5. Në mënyrë rastësore tërhiqen sferat njëra pas tjetrës (pa kthim), deri sa nuk tërhiqet sfera me numër tek. Nëse regjistrohen numrat e sferave të tërhequra, të përshkruhet bashkësia e ngjarjeve elementare.
3. Le të realizojmë eksperimentin e hedhjes së tri zareve kubike për lojë. Përshkruani bashkësinë e ngjarjeve elementare dhe ngjarjet e rastit në vijim:
  - A: në dy zaret kubike të para ka rënë numër çift, kurse në të tretin numër tek;
  - B: në të tri zaret kubike ka rënë numër tek;
  - C: shuma e pikave në tri zaret kubike është çift;
  - D: në dy zaret kubike të para ka rënë numër i njëjtë pikash;
  - F: në tri zaret kubike nuk është shfaqur asnjë pesëshe;
  - G: në tri zaret kubike është paraqitur të paktën një pesëshe.
4. Një gjuetar ka katër plumba dhe gjuan cakun derisa nuk arrin dy gjuajte të njëpasnjëshme në cak ose derisa ta humb shansin ta përmbush këtë kusht. Përshkruani bashkësinë e ngjarjeve elementare dhe ngjarjet e rastit në vijim:
  - A: caku është gjuajtur të paktën dy herë;
  - B: një plumb ka mbetur pa shfrytëzuar;
  - C: ka pasur më shumë gjuajtje në cak se sa dështime.
5. Në një tabelë për pikado gjenden fushat 7, 8, 9 dhe 10. Një lojtar mori shenjë tre herë me shigjetëzat për pikado. Përshkruani bashkësinë e ngjarjeve elementare dhe ngjarjet e rastit në vijim:
  - A: tre herë shigjetëza ka përfunduar në fushë me numër çift;
  - B: dy herë shigjetëza ka përfunduar në fushë me numër çift, kurse një herë në fushë me numër tek;
  - C: në dy gjuajtjet e para shigjetëza ka përfunduar në fushë me numër çift, kurse në gjuajtjen e tretë në fushë me numër tek.
  - D: shuma e numrave të fushave ku ka përfunduar shigjetëza gjatë tre gjuajtjeve është 27.



## 4.8 OPERACIONE ME NGJARJE

### Rikujtoni!

- Ngjarje elementare në lidhje me eksperimentin e dhënë është çdo rezultat logjik i eksperimentit, e cila nuk mund të zbërthehet në ngjarje të tjera. Këtu, gjatë çdo realizimi të eksperimentit paraqitet një dhe vetëm një ngjarje elementare.
- Faqet e një tetraedri të rregullt janë shënuar me numrat 1, 2, 3, 4. Tetraedri hidhet në një sipërfaqe të rrafshët dhe vrojtojmë faqen me të cilën ai shtrihet në sipërfaqe. Cila është bashkësia e ngjarjeve elementare e këtij eksperimenti?
- Për eksperimentin paraprak, përkthyeri ngjarjen  $A$ : "ka rënë numër tek", si nënbashkësi të bashkësisë së ngjarjeve elementare  $\Omega$ .

### Shembulli 1

Eksperimenti le të jetë tërheqja e një letre bixhozi nga kuverta me 52 letra të tilla. I shënojmë ngjarjet:

$A$ : "është tërhequr letra me numër 10";

$B$ : "është tërhequr letër maç";

$C$ : "është tërhequr letër maç me numër 10".

Le të vërejmë se ngjarja  $C$  do të shfaqet sa herë që njëkohësisht shfaqen ngjarjet  $A$  dhe  $B$ .

### Mbani mend!

- **Prodhi**mi i ngjarjeve  $A$  dhe  $B$  është ngjarja që paraqitet atëherë dhe vetëm atëherë kur do të paraqiten njëkohësisht ngjarjet  $A$  dhe  $B$ . Kjo ngjarje është përcaktuar me bashkësinë e ngjarjeve elementare që është prerje e bashkësive të ngjarjeve elementare të ngjarjes  $A$  dhe ngjarjes  $B$ , përkatësisht.
- Prodhi mi i dy ngjarjeve  $A$  dhe  $B$  shënohet me  $A \cap B$ .

### Shembulli 2

Marrim eksperimentin e hedhjes së zarit kubik për lojë. I shqyrtojmë ngjarjet:

$A$ : "ka rënë numër më i vogël ose i barabartë me 3";

$B$ : "ka rënë numër i plotpjesëtueshëm me 3";

$C$ : "ka rënë numër më i madh se 4".

Të përcaktohet prodhi mi i ngjarjeve  $A$  dhe  $B$ , si dhe i ngjarjeve  $A$  dhe  $C$ .

**Zgjidhje:**

Bashkësia e ngjarjeve elementare, e këtij eksperimenti, është  $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ , ku ngjarja  $E_i$  është ngjarja "ka rënë numri  $i$ ",  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Ngjarjet  $A$ ,  $B$  dhe  $C$ , si nënbashkësi të  $\Omega$  përshkruhen në mënyrën e vijimit:  $A = \{E_1, E_2, E_3\}$ ,  $B = \{E_3, E_6\}$ ,  $C = \{E_5, E_6\}$ . Ngjarja  $A \cap B$  shënon se ka rënë numër që është më i vogël ose i barabartë me 3 dhe i plotpjesëtueshëm me 3, prandaj



$A \cap B = \{E_3\}$ . Ngjarja  $A \cap C$  shënon se ka rënë numër që është më i vogël ose i barabartë me 3 dhe më i madh se 4, çka është ngjarje e pamundshme. Pra, ngjarjet  $A$  dhe  $C$  nuk mund të shfaqen përnjëherësh, d.m.th.  $A \cap C = \emptyset$ .

### Detyra 1

Përcaktoni prodhimin e ngjarjeve  $B$  dhe  $C$  në shembullin 2.

### Mbani mend!

Nëse dy ngjarje  $A$  dhe  $B$  nuk mund të shfaqen përnjëherësh, atëherë ato i quajmë **ngjarje disjunkte** (*përrjashtuese, të papajtueshme*). Prodhimi i tyre është ngjarja e pamundshme, d.m.th.  $A \cap B = \emptyset$ .

Në shembullin 2, ngjarjet  $A$  dhe  $C$  janë ngjarje disjunkte.

### Mbani mend!

- **Shuma** e ngjarjeve  $A$  dhe  $B$  është ngjarja e cila paraqitet atëherë dhe vetëm atëherë kur do të paraqitet të paktën njëra nga ngjarjet  $A$  ose  $B$ .
- Shuma e ngjarjeve  $A$  dhe  $B$  është e përcaktuar me bashkësinë e ngjarjeve elementare që është union i bashkësive të ngjarjeve elementare të ngjarjes  $A$  dhe ngjarjes  $B$ , përkatësisht.
- Shuma e dy ngjarjeve  $A$  dhe  $B$ , në rastin e përgjithshëm, shënohet me  $A \cup B$ .
- Nëse ngjarjet  $A$  dhe  $B$  janë disjunkte, atëherë shumën e tyre do ta shënojmë me  $A + B$ .

- Kur themi se është paraqitur të paktën njëra nga ngjarjet  $A$  ose  $B$ , atëherë nënkuptohet se është paraqitur ose vetëm ngjarja  $A$  ose vetëm ngjarja  $B$  ose të dy ngjarjet përnjëherësh.
- Nëse ngjarjet  $A$  dhe  $B$  janë disjunkte, atëherë paraqitja e përnjëhershme e të dy ngjarjeve është e pamundur, pra paraqitja e ngjarjes  $A \cup B$  nënkupton se është paraqitur ose vetëm ngjarja  $A$  ose vetëm ngjarja  $B$ .
- Prandaj, në këtë rast, për shumën e dy ngjarjeve përdoret shënimi  $A + B$ . Pra

$$A + B = A \cup B \text{ nëse } A \cap B = \emptyset$$

### Shembulli 3

Caktoni shumën e ngjarjeve  $A$  dhe  $B$ , si dhe të ngjarjeve  $A$  dhe  $C$ , nëse  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  janë ngjarjet nga shembulli 2.

#### Zgjidhje:

Ngjarjet  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  janë të përcaktuara me:  $A = \{E_1, E_2, E_3\}$ ,  $B = \{E_3, E_4\}$ , dhe  $C = \{E_3, E_4\}$ . Ngjarja  $A \cup B$  shënon se ka rënë numër i cili është më i vogël ose i barabartë me 3 ose numër i plot-pjesëtueshëm me 3, dhe kjo ngjarje mund të përshkruhet me  $A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ . Ngjarja  $A \cup C$  shënon se ka rënë numër që është më i vogël ose i barabartë me 3 ose numër që është më i madh se 4. Në shembullin 2 vërejtëm se ngjarjet  $A$  dhe  $C$  nuk mund të shfaqeshin njëkohësisht, d.m.th. janë ngjarje disjunkte. Nga këtu,  $A \cup C = A + C = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ .

**Detyra 2**

Caktoni shumën e ngjarjeve  $B$  dhe  $C$  nga shembulli 2.

**Mbani mend!**

- **Ngjarje e kundërt** e ngjarjes  $A$  është ngjarja e cila paraqitet atëherë dhe vetëm atëherë kur nuk paraqitet ngjarja  $A$ . Kjo ngjarje shënohet me  $\bar{A}$ . Bashkësia e ngjarjeve elementare e ngjarjes  $\bar{A}$  është komplementi i bashkësisë së ngjarjeve elementare përkatëse të ngjarjes  $A$  në lidhje me bashkësinë e gjitha ngjarjeve elementare  $\Omega$ .
- Për çdo ngjarje  $A$  vlen:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad A + \bar{A} = \Omega.$$

**Shembulli 4**

Caktoni ngjarjet e kundërta të ngjarjeve  $A$  dhe  $B$  nga shembulli 1.

**Zgjidhje:**

Ngjarja  $A$  nuk do të paraqitet nëse paraqitet numër më i madh se 3, d.m.th. nëse paraqitet njëra nga ngjarjet elementare  $E_4, E_5$  ose  $E_6$ , prandaj  $\bar{A} = \{E_1, E_2, E_3\}$ . Për ngjarjen e kundërt të ngjarjes  $B$  fitojmë  $\bar{B} = \{E_1, E_2, E_4, E_5\}$ .

**Detyra 3**

Caktoni ngjarjen e kundërt të ngjarjes  $C$  të shembullit 2.

**Mbani mend!**

Ngjarja  $A$  e tërheq ngjarjen  $B$  (shkruajmë  $A \subseteq B$ ) nëse sa herë që paraqitet ngjarja  $A$  paraqitet edhe ngjarja  $B$ .

**Shembulli 5**

Le ta shqyrtojmë përsëri eksperimentin e hedhjes së dy monedhave. Le të jenë:

$A$ : "ka rënë saktësisht një stemë";

$B$ : "ka rënë të paktën një stemë".

Mund të vërejmë se sa herë që do të shfaqet ngjarja  $A$ , shfaqet edhe ngjarja  $B$ , d.m.th.  $A \subseteq B$ .

**Mbani mend!**

Nëse  $A \subseteq B$  dhe  $B \subseteq A$ , atëherë për ngjarjet  $A$  dhe  $B$  themi se janë **të barabarta**.

Përkufizimet për prodhimin dhe shumën e dy ngjarjeve mund të përgjithësohen edhe për prodhimin dhe shumën e një numri të fundmë ngjarjesh.

### Mbani mend!

- Shuma e ngjarjeve  $A_1, A_2, \dots, A_n$  është ngjarja e cila shfaqet, realizohet, atëherë dhe vetëm atëherë kur të shfaqet të paktën njëra nga ngjarjet  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .
- Kjo ngjarje shënohet me  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ , kurse bashkësia e saj e ngjarjeve elementare është unioni i bashkësive përkatëse të ngjarjeve elementare të ngjarjeve  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

### Mbani mend!

- Prodhimi i ngjarjeve  $A_1, A_2, \dots, A_n$  është ngjarja e cila shfaqet, realizohet, atëherë dhe vetëm atëherë kur shfaqen gjitha ngjarjet  $A_1, A_2, \dots, A_n$  përnjëherësh.
- Kjo ngjarje shënohet me  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ , kurse bashkësia e saj e ngjarjeve elementare është prerja e bashkësive përkatëse të ngjarjeve elementare të ngjarjeve  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

### Shembulli 6

Caku gjuhet tre herë. Shqyrtohen ngjarjet  $A_1, A_2$  dhe  $A_3$  që shënojnë gjuajtjen në cak në gjuajtjen e parë, të dytë, të tretë, përkatësisht. Me anë të këtyre ngjarjeve të përshkruhen ngjarjet e mëposhtme:

- $B$ : "tre gjuajtjet kanë shkuar në cak";  
 $C$ : "tre gjuajtjet kanë shkuar huq";  
 $D$ : "të paktën një gjuajtje ka shkuar në cak";  
 $F$ : "të paktën një gjuajtje ka shkuar huq".

**Zgjidhje:**

- Ngjarja  $B$  do të paraqitet nëse paraqiten, realizohen, të gjitha tre ngjarjet  $A_1, A_2$  dhe  $A_3$  njëkohësisht. Prandaj,  $B = A_1 A_2 A_3$ .
- Ngjarja  $C$  do të paraqitet nëse nuk realizohet asnjëra nga ngjarjet  $A_1, A_2$  dhe  $A_3$ , d.m.th. nëse realizohen, paraqiten, ngjarjet e tyre të kundërta. Kështu që  $C = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ .
- Ngjarja  $D$  do të ndodh nëse realizohet të paktën njëra nga ngjarjet  $A_1, A_2$  ose  $A_3$ , prandaj  $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ . Përkatësisht për ngjarjen  $F$  kemi  $F = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$ .

### Shembulli 7

Një anije ka një mekanizëm drejtues, katër kaldaja me avull dhe dy turbina. I shënojmë ngjarjet në vijim:

- $A$ : "mekanizmi drejtues është funksional";  
 $B_k$ : "kaldaja e  $k$ -të me avull është funksionale",  $k = 1, 2, 3, 4$ ;  
 $C_j$ : "turbina e  $j$ -të është funksionale",  $j = 1, 2$ .



Ngjarja  $D$  shënon se anija është në gjendje për të lundruar dhe kjo ndodh nëse është funksional mekanizmi i drejtimit të saj, të paktën njëra nga kaldajat dhe të paktën njëra nga turbinat. Të shprehet ngjarja  $D$  përmes ngjarjeve  $A$ ,  $B_k$  dhe  $C_j$ .

**Zgjidhje:**

$$D = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \cap (C_1 \cup C_2).$$

### Detyra për ushtrime!

1. Kryejmë eksperimentin e hedhjes së tre monedhave. Ngjarjet  $A_1$ ,  $A_2$  dhe  $A_3$  shënojnë paraqitjen e fytyrës në monedhën e parë, të dytë dhe të tretë, përkatësisht. Duke shfrytëzuar këto ngjarje të përshkruhen ngjarjet e mëposhtme:

$B$ : "fytyra është shfaqur vetëm në monedhën e parë";

$C$ : "fytyra është paraqitur në monedhën e parë dhe të dytë";

$D$ : "fytyra është paraqitur në të tre monedhat";

$E$ : "fytyra është paraqitur në të paktën dy monedha";

$F$ : "fytyra është paraqitur vetëm në një monedhë";

$G$ : "fytyra është paraqitur në saktësisht dy monedha";

$H$ : "fytyra është paraqitur në të shumtën dy monedha".

2. Dy shahistë  $A$  dhe  $B$  përballen me njëri-tjetrin në një garë shahu. Gara përbëhet nga 4 përballje, ku përballjet që mbyllen me barazim nuk merren në konsideratë. Fitues është ai shahist që merr më shumë fitore. Në rast të rezultatit të barabartë ( $2 + 2$ ) luhet edhe përballja e pestë vendimtare. Të përshkruhen ngjarjet vijuese:

$D$ : "do të fitojë shahisti  $A$ ";

$E$ : "do të fitojë shahisti  $B$ ";

$F$ : "do të luhet edhe përballja vendimtare".

3. Në një test matematike një nxënës i jepen tre detyra. Me  $A_i$  e shënojmë ngjarjen nxënësi di të zgjidh detyrën e  $i$ -të,  $i = 1, 2, 3$ . Duke shfrytëzuar këto ngjarje, të përshkruhen ngjarjet e mëposhtme:

$B$ : "nxënësi di t'i zgjidh gjitha detyrat";

$C$ : "nxënësi di të zgjidh të paktën një detyrë";

$D$ : "nxënësi di të zgjidh të paktën dy detyra";

$E$ : "nxënësi di të zgjidh të shumtën dy detyra";

$F$ : "nxënësi nuk di t'i zgjidh të gjitha tre detyrat";

$G$ : "nxënësi nuk di të zgjidh asnjë nga detyrat".

4. Eksperimenti përbëhet nga përzgjedhja e tre produkteve të një serie prodhimi. I shënojmë ngjarjet në vijim:

$A$ : "të paktën njëri nga tre produktet është me defekt";

$B$ : "të gjitha tre produktet janë në rregull".

Përshkruani ngjarjet:

a)  $A \cup B$ ;

b)  $A \cap B$ ;

c)  $\bar{A}$ ;

ç)  $\bar{B}$ .

## 4.9 PËRKUFIZIMI KLASIK I PROBABILITETIT

### Rikujtoni!

- Çka paraqet bashkësia e ngjarjeve elementare?
- Si përkufizohet ngjarja e rastit?
- Si përkufizohet probabiliteti statistikor i ngjarjes së dhënë  $A$ ?

Sikurse kemi përmendur më sipër, në eksperimentet jodeterministike rezultati nuk është i njëvlershëm. Kështu, kur realizohen këto eksperimente, nga e para nuk mund ta dimë rezultatin që do të paraqitet. Prandaj është e nevojshme që të gjendet një masë objektive për mundësinë që të paraqitet një ngjarje e caktuar lidhur me eksperimentin që e shqyrtojmë. Për këtë arsye, do ta prezantojmë konceptin e probabilitetit, pikërisht si masë për mundësinë e paraqitjes së ngjarjes së caktuar.

Këtu do të ndalemi vetëm në eksperimentet për të cilët gjitha ngjarjet elementare kanë shanse të barabarta që të shfaqen, paraqiten, d.m.th. që janë njëlloj të mundshme. Për shembull:

- gjatë hedhjes së zarit për lojë, secila faqe e tij ka shanse të barabarta që të paraqitet;
- gjatë hedhjes së monedhës, fytyra dhe stema kanë shanse të barabarta të paraqitjes;
- gjatë nxjerrjes së sferës nga një kuti me sfera, secila prej tyre ka shanse të barabarta që të nxirret, etj.

Sikurse përkufizuam më parë, secila ngjarje e rastit  $A$  është nënbashkësi e bashkësisë së ngjarjeve elementare  $\Omega$ . Nga këtu, numri i elementeve në  $A$  është gjithmonë më i vogël se numri i elementeve në  $\Omega$ , d.m.th.  $|A| \leq |\Omega|$ . (Me  $|A|$  dhe  $|\Omega|$  kemi shënuar numrin e elementeve të  $A$ , përkatësisht të  $\Omega$ ).

### Mbani mend!

**Përkufizimi klasik i probabilitetit.** Le të jetë dhënë bashkësia e fundme e ngjarjeve elementare  $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  dhe secila prej tyre le të ketë shanse të njëjta që të ndodh. Nëse  $A$  është ngjarje rasti lidhur me eksperimentin e dhënë në të cilën përmbahen  $k$  ngjarje elementare, atëherë probabiliteti (teorik) i ngjarjes  $A$  përcaktohet me:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{numri i elementeve në } A}{\text{numri i elementeve në } \Omega}.$$

- Çdo ngjarje elementare mund ta interpretojmë si "rast të mundshëm" në lidhje me eksperimentin e dhënë.
- Nga ana tjetër,  $k$  është numri i ngjarjeve elementare që përmbahen në ngjarjen  $A$ , d.m.th.  $k = |A|$  dhe çdo ngjarje elementare e  $A$  do ta interpretojmë si "rast të favorshëm" për paraqitjen e ngjarjes  $A$ .



- Në pajtueshmëri me përkufizimin klasik, probabiliteti i ngjarjes së rastit  $A$ , të dhënë, është i barabartë me herësin e numrit të rasteve të favorshme për paraqitjen e ngjarjes  $A$  dhe numrit të të gjitha rasteve të mundshme për eksperimentin e dhënë, d.m.th.  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

### Shembulli 1

Gjeni probabilitetin që gjatë hedhjes së zarit kubik për lojë të fitohet numër çift.

#### Zgjidhje:

Nëse eksperimenti është hedhja e zarit kubik për lojë, bashkësia e ngjarjeve elementare është  $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ , ku  $E_i$  është ngjarja "në faqen e sipërme të zarit shfaqet numri  $i$ ",  $i=1,2,\dots,6$ . Le të vërejmë se gjitha ngjarjet elementare janë njëloj të mundshme, d.m.th. gjatë hedhjes së zarit secila faqe ka shanse të barabarta të paraqitet. Ngjarja  $A$ : "ka rënë numër çift", mund të përshkruhet me  $A = \{E_2, E_4, E_6\}$ . Do të thotë, numri i mundësive të favorshme për paraqitjen, realizimin, e ngjarjes  $A$  është 3, kurse numri i gjitha mundësive gjatë realizimit të eksperimentit është 6. Nga këtu, në pajtueshmëri me përkufizimin klasik të probabilitetit, për probabilitetin e ngjarjes  $A$  fitojmë  $P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$ .

### Detyra 1

Të gjendet probabiliteti që gjatë hedhjes së zarit kubik për lojë të fitohet numër i cili është më i madh se 4.

### Shembulli 2

Shqyrtojmë eksperimentin e hedhjes së tre monedhave. Përcaktoni bashkësinë e ngjarjeve elementare dhe probabilitetin e ngjarjeve të rastit në vijim:

$A$ : "janë paraqitur saktësisht dy fytyra";

$B$ : "nuk është paraqitur asnjë fytyrë".

#### Zgjidhje:

Shkurt do të shënojmë me "F" nëse në faqen e sipërme të monedhës shfaqet fytyra dhe me "S" nëse në faqen e sipërme shfaqet stema. Bashkësia e ngjarjeve elementare për këtë eksperiment përbëhet nga treshet e renditura, ku elementi i  $i$ -të në treshë është rezultati i monedhës së  $i$ -të,  $i = 1, 2, 3$ . Kështu, kemi  $\Omega = \{(F, F, F), (F, F, S), (F, S, F), (S, F, F), (F, S, S), (S, F, S), (S, S, F), (S, S, S)\}$ .

Atëherë ngjarja  $A$  është

$$A = \{(F, F, S), (F, S, F), (S, F, F)\},$$

prandaj sipas përkufizimit klasik të probabilitetit,

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

Për ngjarjen  $B$  fitojmë:

$$B = \{(S, S, S)\}.$$

Probabiliteti i kësaj ngjarjeje është  $P(B) = \frac{1}{8}$ .



### Shembulli 3

Nga kuverta standarde e 52 letrave të bixhozit rastësisht tërhiqen 5 prej tyre. Të përcaktohet probabiliteti që gjitha letrat e tërhequra të jenë maç.

**Zgjidhje:**

E shënojmë ngjarjen  $A$ : "janë tërhequr pesë letra maç". Numri i elementeve në  $\Omega$  është numri i gjitha kombinacioneve të mundshme të klasës 5 prej 52 elementesh, d.m.th.

$$|\Omega| = C_{52}^5 = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2\,598\,960.$$

Në mënyrë analoge, meqenëse kemi 13 letra maç, numri i ngjarjeve elementare në ngjarjen  $A$  është

$$|A| = C_{13}^5 = \frac{13!}{5!(13-5)!} = 1287. \text{ Tani,}$$

$$P(A) = \frac{1287}{2\,598\,960} \approx 0,0005.$$

### Detyra 2

Nga kuverta standarde me 52 letra bixhozi rastësisht tërhiqen 3 letra. Të caktohet probabiliteti që të jenë tërhequr 2 mbretëresha dhe një dhjetëshe.

### Shembulli 4

Në një kuti ka 20 topa tenisi nga të cilët me defekt janë 4. Nga kutia në mënyrë rastësore përzgjidhen dy topa. Të gjendet probabiliteti që të jetë tërhequr një top pa defekt dhe një top me defekt.

**Zgjidhje:**

E shënojmë ngjarjen  $A$ : "është tërhequr një top me defekt dhe një pa defekt".

Numri i elementeve në  $\Omega$  është

$$|\Omega| = C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = 190.$$

Ngjarja  $A$  do të ndodh nëse nxirret një top me defekt (nga gjithsej 4 të tillë) dhe një top pa defekt (nga gjithsej 16 të tillë), prandaj numri i elementeve në  $A$  është  $|A| = C_4^1 \cdot C_{16}^1 = 4 \cdot 16 = 64$ . Tani,

$$P(A) = \frac{64}{190} \approx 0,337.$$

### Detyra 3

Në një kuti ka 5 topa të vegjël të bardhë dhe 4 topa të vegjël të zinj. Njëherësh nga kutia nxirren tre topa. Të gjendet probabiliteti që tre topat e nxjerrë të jenë të bardhë.

## Shembulli 5

Shumë nga vetitë gjenetike kontrollohen nga dy gjene, një dominues dhe një recesiv. Në eksperimentet origjinale të Gregor Mendel-it me groshën, gjenet që e kontrollojnë lartësinë e bimës janë shënuar me T (e lartë) dhe t (e ulët). Gjени T është dominues, prandaj bima me gjenotip (përbërje gjenetike) TT ose Tt është e lartë, kurse bima me gjenotip tt është e ulët. Me analizë statistikore të trashëgimtarëve, në eksperimentet e tij, Mendel-i erdhi në përfundimin se trashëgimtarët trashëgojnë nga një gjen të secilit prind dhe se çdo kombinim i mundshëm i dy gjeneve ka probabilitet të njëjtë. Nëse secili prind ka gjenotipin Tt, atëherë tabela djathtas jep gjenotipet e mundshme të trashëgimtarëve:

|          |   | Prindi 1 |    |
|----------|---|----------|----|
|          |   | T        | t  |
| Prindi 2 | T | TT       | Tt |
|          | t | tT       | tt |

Sa është probabiliteti që trashëgimtari rastësisht i përzgjedhur nga prindër të tillë (me gjenotip Tt) të jetë i lartë, dhe sa që të jetë i ulët?

**Zgjidhje:**

Në kushtet e detyrës është e qartë se eksperimenti ka elementet  $\Omega = \{TT, Tt, tT, tt\}$ , d.m.th. numri i rasteve të mundshme, në lidhje me këtë eksperiment, është 4 dhe gjitha ngjarjet elementare (kombinimet e mundshme të gjeneve) kanë mundësi të barabartë të paraqitjes.

E shënojmë ngjarjen A: "trashëgimtari rastësisht i përzgjedhur nga prindër me gjenotipin Tt të jetë i lartë". Ngjarja A shfaqet nëse shfaqet njëri nga gjenotipet TT, Tt, tT, d.m.th.  $A = \{TT, Tt, tT\}$ . Pra, kemi 3 mundësi të favorshme për paraqitjen e ngjarjes A. Përfundimisht, probabiliteti i ngjarjes A është  $P(A) = \frac{3}{4}$ .

Probabiliteti që trashëgimtari, rastësisht i përzgjedhur, të jetë i ulët, në fakt, është probabiliteti i ngjarjes së kundërt të ngjarjes A, prandaj  $P(\bar{A}) = \frac{1}{4}$ .

**Me rëndësi!**

Probabiliteti i llogaritur përmes përkufizimit klasik të probabilitetit është probabilitet teorik, për dallim nga probabiliteti statistikor i cili është empirik, i llogaritur në mënyrë eksperimentale. Mirëpo, mund të tregohet se për numër të madh eksperimentesh të kryera, frekuenca relative i afrohet probabilitetit teorik.

**Detyra 4**

Një rrotë fati është ndarë në 8 pjesë, fusha, të barabarta, të numëruara me numrat prej 1 deri 8. Rrota rrotullohet një herë. Gjени probabilitetin që shigjeta e rrotës së fatit të ndalojë në:

- fushën me numër tek;
- fushën me numër të plotpjesëtueshëm me 4;
- fushën me numër më të vogël se 3.



**Detyra 5**

Në një kuti ka 12 topa me formë të njëjtë. Nga to: 3 janë të kuq, kurse të tjerët janë të gjelbër. Nga kutia nxirret një top. Gjeni probabilitetin që topi i nxjerrë të jetë:

- a) i kuq;
- b) i kuq ose i gjelbër;
- c) i gjelbër;
- ç) i bardhë.

**Detyra për ushtrime!**

1. Në një kuti ka 10 topa të vegjël nga të cilët 6 janë të bardhë, 3 janë të kuq dhe 1 është i zi. Nga kutia nxirren 3 topa përnjëherësh. Gjeni probabilitetin që:
  - a) gjithë topat e nxjerrë janë të bardhë;
  - b) janë nxjerrë 2 topa të kuq dhe 1 top i zi.
2. Në një paralele ka 40 nxënës nga të cilët 10 të shkëlqyeshëm. Paralelja ndahet në dy grupe me nga 20 nxënës. Të gjendet probabiliteti që në të dy grupet ka nga 5 nxënës të shkëlqyeshëm.
3. Në një lojë hidhen tre zare dhe fitimi realizohet nëse shuma e numrave të shfaqur në faqen e sipërme të zareve është 11 ose 12. Të gjendet probabiliteti i ngjarjeve në vijim:
  - A: shuma e numrave të rënë është 11;
  - B: shuma e numrave të rënë është 12;
  - C: është realizuar fitimi.
4. Janë dhënë pesë segmente me gjatësi 2, 3, 4, 7 dhe 9 cm. Të gjendet probabiliteti që nga tre segmentet e përzgjedhur rastësisht do të mund të konstruktohet trekëndësh.
5. Një person ka blerë 7 llamba 40 W, 5 llamba 60 W dhe 3 llamba 100 W. Rugës i dëmtoi tre prej tyre. Sa është probabiliteti që llambat e dëmtuara bashkërisht të kenë 180 W?
6. Në mënyrë rastësore 10 libra radhiten në një raft. Të gjendet probabiliteti i ngjarjeve në vijim:
  - A: një libër fiks gjithmonë do të jetë në fillim të radhës;
  - B: tre vëllime të një romani do të jenë gjithmonë pranë njëri – tjetrit në radhitje rritëse;
  - C: tre vëllime të një romani do të jenë gjithmonë pranë njëri – tjetrit në radhitje arbitrare.
7. Në një paketim ka 8 sensorë nga të cilët 5 janë funksional, kurse 3 me defekt. Nga paketimi përzgjidhen 3 sensorë që duhen për konstruktimin e një dore robotike. Të gjendet probabiliteti që do të zgjidhen 2 sensorë funksional dhe 1 me defekt.
8. Një investitor në mënyrë rastësore përzgjedh 3 letra me vlerë, nga portofoli i tij i investimeve, që ka 5 letra me vlerë të sigurta dhe 3 letra me vlerë me risk. Të gjendet probabiliteti që do të përzgjedh më shumë letra me vlerë të sigurta se sa me risk.



## 4.10 VETI TË PROBABILITETIT. NGJARJET E PAVARURA

### Rikujtoni!

Si formulohet përkufizimi klasik i probabilitetit? Kur mund të zbatohet?

Në këtë pjesë do të shqyrtojmë vetitë bazike të probabilitetit.

- Çdo ngjarje  $A$  është nënbashkësi e bashkësisë së ngjarjeve elementare  $\Omega$ , prandaj  $0 \leq |A| \leq |\Omega|$ . Nga këtu del se  $\frac{0}{|\Omega|} \leq \frac{|A|}{|\Omega|} \leq \frac{|\Omega|}{|\Omega|}$ , d.m.th.  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- Për probabilitetin e ngjarjes së sigurt fitojmë  $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$ , kurse për ngjarjen e pamundshme kemi  $P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = 0$ .
- Le të jenë  $A = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$  dhe  $B = \{E_{k+1}, E_{k+2}, \dots, E_{k+m}\}$  dy ngjarje disjunkte, d.m.th.  $A \cap B = \emptyset$ . Atëherë shuma e ngjarjeve  $A$  dhe  $B$  është  $A+B = \{E_1, E_2, \dots, E_k, E_{k+1}, E_{k+2}, \dots, E_{k+m}\}$  dhe ka  $k+m$  ngjarje elementare. Nga këtu,

$$P(A+B) = \frac{k+m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = P(A) + P(B).$$

### Mbani mend!

Për probabilitetin e ngjarjes  $A$  vlejnë vetitë në vijim:

1. Për çdo ngjarje  $A$ , vlen  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;
2.  $P(\Omega) = 1$ ;
3.  $P(\emptyset) = 0$ ;
4. Nëse  $A$  dhe  $B$  janë ngjarje disjunkte, atëherë  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ .

### Shembulli 1

Në një kuti ka 4 topa të vegjël të bardhë, 6 të tillë të kuq dhe 5 të tillë të zinj. Nga kutia rastësisht nxirret një top. Gjeni probabilitetin që topi i nxjerrë të jetë i bardhë ose i zi.

**Zgjidhje:**

Shënojmë ngjarjet

$A$ : është nxjerrë top i bardhë;

$B$ : është nxjerrë top i zi.

Le të vërejmë se ngjarjet  $A$  dhe  $B$  janë disjunkte. Në fakt, paraqitja e ngjarjes  $A$  e përjashton paraqitjen e ngjarjes  $B$ , dhe anasjelltas. E kërkojmë probabilitetin e ngjarjes  $A + B$ . Nga vetia 4 kemi;

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

#### Detyra 4

Nga kuverta me 52 letra bixhozi tërhiqet një letër. Të gjendet probabiliteti që letra e tërhequr të jetë maç ose kupë.

Vetia 4 mund të përgjithësohet me sa vijon.

#### Mbani mend!

5. Le të jenë  $A_1, A_2, \dots, A_k$  ngjarje disjunkte, d.m.th.  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , për  $i \neq j$ . Atëherë

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k).$$

- Nëse ngjarja  $A$  e tërheq ngjarjen  $B$ , d.m.th. nëse  $A \subseteq B$ , atëherë  $|A| \leq |B|$ , prandaj  $\frac{|A|}{|\Omega|} \leq \frac{|B|}{|\Omega|}$ . Nga këtu fitojmë  $P(A) \leq P(B)$ .

#### Mbani mend!

6. Nëse  $A \subseteq B$ , atëherë  $P(A) \leq P(B)$ .

- Pasi  $A + \bar{A} = \Omega$  onga vetitë 2 dhe 4 fitojmë që  $P(A + \bar{A}) = P(\Omega)$  d.m.th.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Nga këtu,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

#### Mbani mend!

7. Për probabilitetin e ngjarjes së kundërt të ngjarjes së dhënë  $A$ , vlen  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

#### Shembulli 2

Në një kuti ka 5 topa të vegjël të bardhë dhe 4 të zinj. Nga kutia nxirren 3 topa përnjëherësh. Gjeni probabilitetin që të jetë nxjerrë të paktën një top i bardhë.

**Zgjidhje:**

E shënojmë me  $A$  ngjarjen: "është nxjerrë të paktën një top i bardhë". Atëherë ngjarja e kundërt  $\bar{A}$  shënon faktin që nuk është nxjerrë asnjë top i bardhë, d.m.th. tre topat e nxjerrë janë të zinj. Prandaj,

$$P(\bar{A}) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}.$$

Tani për probabilitetin e ngjarjes  $A$  fitojmë:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}.$$

- Nëse  $A$  dhe  $B$  janë dy ngjarje lidhur me një eksperiment, atëherë numri i elementeve në  $A \cup B$  është i barabartë me  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ . Nëse kjo shprehje pjesëtohet me  $|\Omega|$ , del vërtetësia e vetisë në vijim.

**Mbani mend!**

8. Probabiliteti i shumës së dy ngjarjeve të çfarëdoshme lidhur me një eksperiment llogaritet me formulën

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

**Shembulli 3**

Në një sipërmarrje ka 100 të punësuar. 40 prej tyre dinë anglisht, 30 dinë gjermanisht, kurse 15 i dinë të dy gjuhët. Rastësisht përzgjidhet njëri prej këtyre 100 të punësuarve. Gjeni probabilitetin e ngjarjeve të rastit:

$B$ : personi i përzgjedhur din të paktën një gjuhë;

$C$ : personi i përzgjedhur nuk din asnjërën prej gjuhëve.

**Zgjidhje:**

I shënojmë ngjarjet në vijim:

$A$ : personi i përzgjedhur din anglisht;

$G$ : personi i përzgjedhur din gjermanisht.

Nga kushtet e detyrës kemi

$$P(A) = \frac{40}{100} = 0,4, \quad P(G) = \frac{30}{100} = 0,3, \quad P(A \cap G) = \frac{15}{100} = 0,15.$$

Le të vërejmë se ngjarja  $B$  mund të shkruhet si union i ngjarjeve  $A$  dhe  $G$ , d.m.th.  $B = A \cup G$ . Nga kjo del se,

$$P(B) = P(A \cup G) = P(A) + P(G) - P(A \cap G) = 0,4 + 0,3 - 0,15 = 0,55.$$

Nga ana tjetër, ngjarja  $C$  është e kundërt me ngjarjen  $B$ , d.m.th.  $C = \bar{B}$ . Prandaj,

$$P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,55 = 0,45.$$



**Detyra 5**

Një lojtar e rrotullon rrotën e fatit të dhënë në figurën djathtas. Të gjendet probabiliteti i ngjarjeve në vijim:

- A: Rrota do të ndalojë në fushë portokalli;
- B: Rrota do të ndalojë në fushë me numër çift;
- C: Rrota do të ndalojë në fushë portokalli ose në fushë me numër çift.

**Pavarësia e ngjarjeve**

Për dy ngjarje  $A$  dhe  $B$  themi se janë të pavarura nëse paraqitja e njërës nuk ndikon paraqitjen e ngjarjes tjetër, dhe anasjelltas. Për shembull, nëse hedhim dy zare kubike, atëherë rezultati i shfaqur në njërin prej tyre nuk ndikon në rezultatin që shfaqet në zarin tjetër. Prandaj, nëse marrim dhe përkufizojmë ngjarjet:

- A: në zarin e parë ka rënë pesë, dhe
- B: në zarin e dytë ka rënë tre,

atëherë ngjarjet  $A$  dhe  $B$  janë ngjarje të pavarura.

Mirëpo, jo gjithmonë nga vetë kushtet e detyrës mund të konstatohet nëse dy ngjarje janë të pavarura ose jo. Në këtë rast duhet të provohet nëse është plotësuar kushti i pavarësisë së ngjarjeve.

**Mbani mend!**

Dy ngjarje  $A$  dhe  $B$  janë të **pavarura** nëse dhe vetëm nëse  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

**Shembulli 4**

Nga kuverta me 52 letra bixhozi tërhiqet një letër. Le t'i shqyrtojmë ngjarjet në vijim:

- A: është tërhequr letra në të cilën është numri pesë;
- B: është tërhequr letra spathi.

Kontrolloni nëse ngjarjet  $A$  dhe  $B$  janë të pavarura.

**Zgjidhje:**

Mundësi të favorshme për paraqitjen e ngjarjes  $A$  ka gjithsej 4 (në kuvertë ka 4 pesëshe), prandaj

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ . Nga ana tjetër, mundësi të favorshme për paraqitjen e ngjarjes  $B$  ka gjithsej 13 (në kuvertë ka 13 letra spathi). Prandaj,  $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ . Ngjarja  $A \cap B$  do të paraqitet nëse tërhiqet letra spathi me numër 5. Që kjo të ndodh ka vetëm një mundësi të favorshme. Fitojmë:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = P(A)P(B).$$

Mund të konstatojmë se kushti për pavarësinë e ngjarjeve është plotësuar, prandaj ngjarjet  $A$  dhe  $B$  janë të pavarura, edhe pse intuitivisht nuk duket ashtu (mes letrave me shenjën spathi ka pesë dhe mes katër pesësheve të kuvertës ka edhe pesëshe spathi).

**Shembulli 5**

Në një kuti ka 6 topa të vegjël të bardhë dhe 4 të zinj. Nga kutia nxirret një top, regjistrohet ngjyra e tij dhe kthehet përsëri në kuti. Më pas tërhiqet edhe një herë një top. Përcaktoni probabilitetin që të dy topat e nxjerrë të jenë të bardhë.

**Zgjidhje:**

I shënojmë ngjarjet në vijim:

A: topi i parë i nxjerrë është i bardhë;

B: topi i dytë i nxjerrë është i bardhë.

Le të nënvizojmë se ngjarjet A dhe B janë të pavarura. Me të vërtetë, topi që nxirret herën e parë kthehet në kuti, prandaj rezultati gjatë nxjerrjes herën e parë nuk e ndikon rezultatin e nxjerrjes herën e dytë. E kërkojmë probabilitetin e ngjarjes  $A \cap B$ . Nëse e përdorim kushtin e pavarësisë së ngjarjeve, fitojmë:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{25}.$$

**Detyra 6**

Një nxënës në testin me dy pyetje duhet të përgjigjet me PO ose me JO. Nxënësi nuk është përgatitur për testim, prandaj përgjigjet i jep duke hamendësuar. Përgjigja në njërën nga pyetjet nuk ndikon në përgjigjen për pyetjen tjetër, dhe anasjelltas. Të gjendet probabiliteti i ngjarjeve në vijim:

A: nxënësi saktësisht është përgjigjur në dy pyetjet;

B: nxënësi saktë është përgjigjur vetëm në njërën prej pyetjeve;

C: nxënësi gabim është përgjigjur në të dyja pyetjet.

**A është e mundur që dy ngjarje disjunkte të jenë të pavarura, dhe anasjelltas?**

- A dhe B le të jenë dy ngjarje disjunkte. Atëherë  $A \cap B = \emptyset$ , prandaj  $P(A \cap B) = 0$ . Del se, barazimi  $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$

do të vlejë vetëm nëse  $P(A) = 0$  ose  $P(B) = 0$ . Pra, nëse A dhe B janë ngjarje disjunkte dhe  $P(A) > 0$  dhe  $P(B) > 0$ , atëherë A dhe B nuk mund të jenë të pavarura.

- Vlen edhe e anasjellta. A dhe B le të jenë ngjarje të pavarura dhe  $P(A) > 0$  dhe  $P(B) > 0$ . Atëherë  $P(A) \cdot P(B) > 0$ . Nga pavarësia e ngjarjeve del se  $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$ , prandaj A dhe B nuk janë ngjarje disjunkte.

**Mbani mend!**

- Pavarësia dhe disjunktiviteti i dy ngjarjeve janë dy koncepte të ndryshme!
- Dy ngjarje disjunkte A dhe B janë të pavarura nëse dhe vetëm nëse  $P(A) = 0$  ose  $P(B) = 0$ .

### Shembulli 6

Pjetri njëkohësisht hedh një monedhë dhe një zar kubik për lojë.

- Përcaktoni bashkësinë e ngjarjeve elementare.
- Gjeni probabilitetin e ngjarjeve në vijim:  
 $A$ : në monedhë ka rënë fytyrë dhe në zar numër çift pikash;  
 $B$ : në monedhë ka rënë stemë dhe në zar numër pikash më i madh se 4.
- $A$  janë disjunkte ngjarjet  $A$  dhe  $B$ ?
- $A$  janë të pavarura ngjarjet  $A$  dhe  $B$ ?

**Zgjidhje:**

- Nëse shënojmë "F" (fytyrë) dhe "S" (stemë), për rezultatet e mundshme të hedhjes së monedhës, kurse me 1, 2, 3, 4, 5, 6, për rezultatet e mundshme të hedhjes së zarit, bashkësia e ngjarjeve elementare do të jetë me sa vijon:

$$\Omega = \{(F, 1), (F, 2), (F, 3), (F, 4), (F, 5), (F, 6), (S, 1), (S, 2), (S, 3), (S, 4), (S, 5), (S, 6)\}.$$

Domethënë, numri i elementeve të  $\Omega$  është  $|\Omega| = 12$ .

- Ngjarja  $A$  mund të përshkruhet me  $A = \{(F, 2), (F, 4), (F, 6)\}$ , prandaj

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Nga ana tjetër,  $B = \{(S, 5), (S, 6)\}$  dhe  $P(B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ .

- Vërejmë se  $A \cap B = \emptyset$ , prandaj  $A$  dhe  $B$  janë ngjarje disjunkte.
- Më sipër, në pjesën b) të detyrës, kemi fituar  $P(A) > 0$  dhe  $P(B) > 0$  dhe  $A$  dhe  $B$  janë ngjarje disjunkte. Nga diskutimi i mëhershëm, këto ngjarje nuk mund të jenë të pavarura.

### Detyra 7

Nga kuverta me 52 letra bixhozi rastësisht tërheqim një letër. Le të jenë:

- $A$ : letra e tërhequr është kupë;  
 $B$ : letra e tërhequr është maç;  
 $C$ : letra e tërhequr është mbretëreshë.

- Të gjenden  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$ ,  $P(A \cap B)$ ,  $P(A \cap C)$ .
- $A$  janë të pavarura ngjarjet  $A$  dhe  $B$ ?  $A$  janë ngjarje disjunkte?
- $A$  janë të pavarura ngjarjet  $A$  dhe  $C$ ?  $A$  janë ngjarje disjunkte?
- Le të jetë  $D = A \cap B$ .  $A$  janë të pavarura ngjarjet  $C$  dhe  $D$ ?



## Detyra për ushtrime!

1. Le të jetë  $P(A) = 0,5$ ,  $P(B) = 0,4$ , kurse  $P(A \cap B) = 0,3$ . Të përcaktohen probabilitetet e ngjarjeve në vijim  $\bar{A}, \bar{B}, A \cup B, \bar{A} \cap \bar{B}, \bar{A} \cup \bar{B}$ .
2. Të përcaktohet probabiliteti i ngjarjes  $A \cap B$  nëse  $P(A) = 0,6$ ,  $P(B) = 0,7$ , kurse  $P(A \cup B) = 0,5$ .
3. Në një kuti ka 4 topa të vegjël të bardhë, 6 të zinj dhe 5 topa të vegjël të kaltër. Nga kutia rastësisht nxirret një top. Janë dhënë ngjarjet:  
 $A$ : topi i nxjerrë është i bardhë;  
 $B$ : topi i nxjerrë është i zi.  
 Të përcaktohet probabiliteti i shumës së ngjarjeve  $A$  dhe  $B$ .
4. Hidhen dy zare për lojë. Janë dhënë ngjarjet e rastit në vijim:  
 $A$ : shuma e pikëve në dy zaret është më e madhe se 9;  
 $B$ : në zarin e parë ka rënë numri 5.  
 Të përcaktohen probabilitetet e  
 a) ngjarjeve  $A$  dhe  $B$ ;  
 b) ngjarjeve  $\bar{A}$  dhe  $\bar{B}$   
 c)  $A \cap B$  dhe  $A \cup B$ .
5. Dy rrota  $A$  dhe  $B$  (të dhëna në figurën më poshtë) rrotullohen përnjëherësh.



A



B

- a) A janë të pavarura ngjarjet "rrota A do të ndalojë në fushë portokalli" dhe "rrota B do të ndalojë në fushë të verdhë"?
  - b) Të gjendet probabiliteti që rrota A të ndalojë në fushë të kuqe dhe rrota B të ndalojë në fushë të verdhë.
6. Zari për lojë hidhet dy herë. Të caktohet probabiliteti që në hedhjen e parë do të bjerë njëshi ose hedhjen e dytë do të bjerë numër tek.
  7. Eksperimenti është hedhja e dy figurave: tetraedrit të rregullt dhe dodekaedrit të rregullt. Tetraedri ka katër faqe (të gjitha trekëndësha barabrinjës) të numërtuara me numrat 1, 2, 3, 4, kurse dodekaedri ka 12 faqe (të gjitha pesëkëndësha të rregullt) të numërtuara me numrat 1, 2, ..., 12. Gjeni probabilitetin që në tetraedër do të bjerë numër i plotpjesëtueshëm me 3, kurse në dodekaedër do të bjerë numër i plotpjesëtueshëm me 4.

## DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Sa numra katërshifrorë mund të formohen me shifrat 1, 3, 5, 7, 9, nëse shifrat edhe mund të përsëriten?
2. Sa numra treshifrorë mund të formohen me numrat 0, 2, 4, 6, 8, nëse gjitha shifrat në numrat e formuar janë të ndryshme?
3. Në sa mënyra mund të renditen, në një vijë, 12 të punësuar të një kompanie që të bëjnë një fotografi të përbashkët?
4. Një flautist, në një koncert, duhet të performojë 7 kompozime. Në sa mënyra mund t'i shpërndajë kompozimet për t'i performuar në koncert?
5. Në sa mënyra 6 nxënës mund të ulen në 6 vende nëse Stiveni insiston të ulët në ulësen e parë?
6. Sa shpërndarje të ndryshme mund të bëhen me shkronjat e fjalës PARALELOPIPED?
7. Një nxënës ka blerë 3 akullore me shije vaniljeje, 5 me shije çokolade, 4 me shije luleshtrydheje dhe 8 me shije mjedre. Në sa mënyra mund t'ua shpërndajë akulloret 20 shokëve të tij?
8. Shtatë shokë në ekskursion duhet të vendosen në një hotel në të cilin ka 2 dhoma të lira me një krevat, 1 dhomë të lirë me dy krevate dhe 1 dhomë të lirë me tre krevate. Në sa mënyra, këta shokë, mund të vendosen në këto dhoma të lira?
9. Në sa mënyra mund të përzgjidhen 3 erëza të ndryshme për pica, nëse në dispozicion kemi 12 erëza?
10. Një nxënës duhet të përzgjedh dhe përgjigjet në 7 prej 9 detyrave të testit të historisë. Në sa mënyra mund t'i përzgjedh detyrat?
11. Një bashkësi ka 7 elemente. Sa nënbashkësi me nga 5 elemente ka kjo bashkësi?
12. Trajneri i reprezentacionit shkollor në futboll ka ftuar për ushtrime 4 nxënës nga viti i parë, 6 nga viti i dytë, 8 nga viti i tretë dhe 10 nga viti i katërt. Pas përgatitjeve ai duhet të përzgjedh 11 nxënës që do të marrin pjesë në turneun e futbollit. Në sa mënyra mund ta formojë ekipin, nëse në të duhet të ketë 2 nxënës nga viti i parë, 2 nga viti i dytë, 3 nga viti i tretë dhe 4 nga viti i katërt?
13. Le të shqyrtojmë eksperimentin e nxjerrjes së letrës nga kuverta me 52 letra bixhozi. Kryeni 10 seri me nga 50 tërheqje të letrës së bixhozit. Pas çdo tërheqjeje regjistroni numrin në letër dhe të njëjtën kthejeni përsëri në kuvertë. Përcaktoni probabilitetin statistikor për paraqitjen e ngjarjeve:  
A: letra e tërhequr është spathi me numër 10;  
B: letra e tërhequr është me numër tek (me numër tek e marrim edhe letrën e mbretëreshës).
14. Le të konsiderojmë eksperimentin e tërheqjes së një letre nga kuverta me 28 letra bixhozi në të cilën ka nga katër letra me numrat 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Bëni 4 seri me nga 100 eksperimente dhe caktoni frekuencat relative të ngjarjeve:  
A: është tërhequr letër me numër jo më të vogël se 5;  
B: është tërhequr letër me numër më të madh ose të barabartë me 3;  
C: është tërhequr letër me numër çift.
15. Njëkohësisht hidhet monedha dhe tetraedri, faqet e të cilit janë shënuar me  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dhe  $d$ . Përshkruani bashkësinë e gjitha ngjarjeve elementare për këtë eksperiment.
16. Në një kuti ka 4 topa të vegjël të numërtuar me numrat 1, 2, 3 dhe 4. Në mënyrë rastësore nxirren një nga një topat nga kutia, pa kthim. Nxjerrja e topave vazhdon deri sa të nxirret topi me numër 1. Përshkruani bashkësinë e gjitha ngjarjeve elementare për këtë eksperiment.



17. Një shigjetar gjuan me shigjetë cakun tre herë dhe merr shënim, regjistron, gjuajtjen me sukses ose dështimet në gjuajtje gjatë secilës gjuajtje. Përshkruani bashkësinë e ngjarjeve elementare dhe ngjarjet e më poshtme të rastit:
- A: gjuajtja e parë ka qenë e suksesshme;  
 B: ka dështuar në dy gjuajtje  
 C: në të tre gjuajtjet është arritur sukses, respektivisht në të tre gjuajtjet ka dështuar;  
 D: në dy gjuajtjet e para ka dështuar.
18. Në një kuti ka 10 bateri nga të cilat 3 me defekt. Nga kutia përzgjidhen përnjëherësh 5 bateri. Të gjendet probabiliteti që mes baterive të përzgjedhura të ketë 3 bateri funksionale.
19. Zari për lojë hidhet një herë. Të gjendet probabiliteti i ngjarjeve në vijim:
- A: ka rënë numër më i madh se 3;  
 B: ka rënë numër tek;  
 C: ka rënë numri 3 ose numri 4.
20. Në një garë marrin pjesë 8 kuaj, ku gjitha shpërndarjet e mundshme të kuajve në cak janë njëlojë të mundshme. Përpara fillimit të garës Mali plotëson tiketën në të cilën prognozohet shpërndarjen pas përfundimit të garës. Sa është probabiliteti që do ta qëllojë shpërndarjen fituese?
21. Në një kuti ka 8 topa të zinj dhe të bardhë. Nga kutia nxirren dy topa. Probabiliteti që nga kutia të nxirren 2 topa të bardhë është  $15/28$ . Të gjendet sa topa të bardhë ka në kuti.
22. Të gjendet probabiliteti që, në vitin e përzgjedhur rastësisht, në muajin gusht do të ketë saktësisht 4 të hëna.
23. Shqyrtohen permutacionet pa përsëritje prej  $n$  elementeve. Sa është probabiliteti që në një permutacion të përzgjedhur rastësisht dy elementë të fiksuara  $a$  dhe  $b$  do të jenë njëri pranë tjetrit?
24. Një kuvertë standarde e letrave të bixhozit ka 52 letra. Letrat shpërndahen në varg me renditje rastësore. Të gjendet probabiliteti i ngjarjeve në vijim:
- A: të katër letrat me numër 1 do të jenë njëra pranë tjetrës;  
 B: të katër letrat me numër 1 do të jenë të shpërndara në katër pozicionet e para ose në katër pozicionet e fundit.
25. Gjitha faqet e një kubi janë ngjyrosur me të kuqe. Kubi copëtohet në 100 kube të vegjël, të njëjtë, dhe ata mirë i përziejnë. Nga to në mënyrë rastësore përzgjidhet njëri. Të gjendet probabiliteti i ngjarjeve në vijim:
- A: në kubin e vogël, të përzgjedhur, do të ketë saktësisht dy faqe të ngjyrosura me të kuqe;  
 B: në kubin e vogël, të përzgjedhur, do të ketë të paktën dy faqe të ngjyrosura me të kuqe.
26. Një person paguan, për dy raunde të njëpasnjëshme, nga një kombinim të lotarisë 7/37. Të caktohet probabiliteti që:
- a) do të fitojë shtatëshen në raundin e parë;  
 b) do të fitojë të paktën një shtatëshen në dy raundet e njëpasnjëshme.
27. **Problem për të menduar.** Në fund të shekullit XVII, disa matematikanë anglez përpiluan dhe analizuan tabelat e vdekshmërisë në të cilat ishin të dhënat se sa njerëz vdesin në moshë të ndryshme. Nga këto tabela ata mundnin të vlerësojnë probabilitetin që një person do të jetë i gjallë në ndonjë datë në të ardhmen. Kjo punë shërbeu si bazë për themelimin e kompanisë së parë të sigurimit të jetës në vitin 1699. Kompanitë e sigurimit jetësor përdorin statistikën për jetëgjatësinë e pritur dhe normat e vdekshmërisë për të llogaritur premittë që duhet paguar nga njerëzit që sigurohen në këto kompani.



Tabela e jetës (life table) e mëposhtme është marrë nga një kompani australiane. Ajo tregon se sa nga 100 000 të lindur mbijetojnë deri në moshat e ndryshme, si dhe sa vite pas kësaj moshe pritet të jetojnë, për secilën moshë.

| Meshkuj |                        |                         | Femra |                        |                         |
|---------|------------------------|-------------------------|-------|------------------------|-------------------------|
| Vite    | Numri i të mbijetuarve | Jetëgjatësia e pritshme | Vite  | Numri i të mbijetuarve | Jetëgjatësia e pritshme |
| 0       | 100000                 | 73,03                   | 0     | 100000                 | 79,46                   |
| 5       | 98809                  | 68,90                   | 5     | 99307                  | 75,15                   |
| 10      | 98698                  | 63,97                   | 10    | 99125                  | 70,22                   |
| 15      | 98555                  | 59,06                   | 15    | 98965                  | 65,27                   |
| 20      | 98052                  | 54,35                   | 20    | 98758                  | 60,40                   |
| 25      | 97325                  | 49,74                   | 25    | 98516                  | 55,54                   |
| 30      | 96688                  | 45,05                   | 30    | 98278                  | 50,67                   |
| 35      | 96080                  | 40,32                   | 35    | 98002                  | 45,80                   |
| 40      | 95366                  | 35,60                   | 40    | 97615                  | 40,97                   |
| 45      | 94323                  | 30,95                   | 45    | 96997                  | 36,22                   |
| 50      | 92709                  | 26,45                   | 50    | 95945                  | 31,59                   |
| 55      | 89891                  | 22,20                   | 55    | 94285                  | 27,10                   |
| 60      | 85198                  | 18,27                   | 60    | 91774                  | 22,76                   |
| 65      | 78123                  | 14,69                   | 65    | 87923                  | 18,64                   |
| 70      | 67798                  | 11,52                   | 70    | 81924                  | 14,81                   |
| 75      | 53942                  | 8,82                    | 75    | 72656                  | 11,36                   |
| 80      | 37532                  | 6,56                    | 80    | 58966                  | 8,38                    |
| 85      | 20998                  | 4,79                    | 85    | 40842                  | 5,97                    |
| 90      | 8416                   | 3,49                    | 90    | 21404                  | 4,12                    |
| 95      | 2098                   | 2,68                    | 95    | 7004                   | 3,00                    |
| 99      | 482                    | 2,23                    | 99    | 1953                   | 2,36                    |

Për shembull, mund të shohim se nga 100 000 të lindur, 98052 parashikohet të mbijetojnë deri moshën 20-vjeçare dhe nga kjo moshë, të mbijetuarit pritet të jetojnë edhe 54,35 vite.

- Sa vite jetë mund të pret të jetojë një mashkull i porsalindur dhe një femër e porsalindur në Australi?
- Sa është probabiliteti që një i porsalindur në Australi të arrij moshën 60 vjeç? Sa është ky probabilitet për të porsalindurat?
- Sipas tabelës, cila gjini, mesatarisht, jeton më gjatë? Shpjegoni.
- Kompania e sigurimit ofron sigurim jetësor të vlefshëm për 30 vjet. Pse sigurimi i tillë është më i lirë për personin e moshës 30 vjeç se sa për personin e moshës 50 vjeç?

## GJEOMETRIA

Në këtë temë shqyrtohen funksionet trigonometrike dhe lidhjet mes tyre, pozita e ndërsjellë e drejtëzës dhe rrafshit, mes dy rrafsheve ose dy drejtëzave, si edhe prerjet e formave 3D me rrafshin. Këto përmbajtje mundësojnë përshkrim preciz dhe analizë të vendndodhjes, drejtimit dhe pjerrësisë së objekteve në hapësirë. Trigonometria paraqet një nga veglat themelore për matjen dhe llogaritjen e largësive dhe të këndeve, përderisa shqyrtimi i pozitave të ndërsjella dhe prerjet me rrafshin mundësojnë modelimin gjeometrik të situatave të ndërlikuara hapësinore. Dijet nga kjo fushë kanë zbatim të gjerë në arkitekturë, inxhinieri, ndërtimtari, vizatim teknik, fizikë dhe informatikë, ku përdoren për analizën e konstruksioneve, përcaktimin e formave prerëse të dukshme, stabilitetit dhe orientimit hapësinor.

Në temat 5 dhe 6 do të jetë e nevojshme që një pjesë e shembujve dhe detyrave të vizuelizohen dhe t'i kontrolloni me softuerin kompjuterik GeoGebra. GeoGebra është një softuer kompjuterik interaktiv për vizuelizimin dhe mësimin e gjeometrisë, algjebrës, funksioneve, statistikës dhe analizës matematike. Këtë softuer mund ta përdorni edhe online në linkun në vijim <https://www.geogebra.org/classic> ose mund ta shkarkoni dhe instaloni në kompjuterin tuaj personal përmes linkut <https://www.geogebra.org/download>.

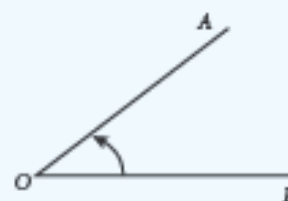
## 5.1 KËNDET DHE MATJA E KËNDEVE

## Rikujtoni!

- Çfarë lloje këndesh kemi?
- Me çfarë njësie matëse i matim këndet?
- Këndet i hasim në shumë sfera të jetës së përditshme, siç është arkitektura, fizika, hartografia, gjeodezia, navigacioni, dizajni, sporti e shumë sfera të tjera.

## Mbani mend!

- Forma 2D e ndërtuar me dy gjysmëdrejtëza, me pikë të përbashkët fillestare, dhe pjesa e rrafshit e kufizuar me to quhet *kënd*.
- Pika e përbashkët fillestare e këtyre gjysmëdrejtëzave quhet *kulm* i këndit, kurse gjysmëdrejtëzat që e formojnë këndin quhen *krahë* të këndit.
- Në vizatimin 1 është paraqitur këndi  $AOB$  me kulm  $O$  dhe krahët  $OA$  dhe  $OB$ .



Vizatimi 1

### Rikujtoni!

- Kënd i ngushtë është këndi më i madh se  $0^\circ$  dhe më i vogël se  $90^\circ$  (vizatimi 2).
- Kënd i gjerë është këndi më i madh se  $90^\circ$  dhe më i vogël se  $180^\circ$  (vizatimi 3).
- Këndi që ka saktësisht  $90^\circ$  quhet kënd i drejtë (vizatimi 4), përderisa këndi prej  $180^\circ$  është kënd i shtrirë (vizatimi 5).
- Kënd jokonveks është këndi më i madh se  $180^\circ$ , e më i vogël se  $360^\circ$  (vizatimi 6).
- Kënd i plotë është këndi prej  $360^\circ$  (vizatimi 7).



Vizatimi 2



Vizatimi 3



Vizatimi 4



Vizatimi 5



Vizatimi 6



Vizatimi 7

- Grada (shkalla) është masa e këndit që fitohet kur një rreth i plotë ndahet në 360 pjesë të barabarta. Një nga këto pjesë quhet gradë dhe shënohet me  $1^\circ$ . Njësi më të vogla matëse se grada janë minuta që shënohet me  $1'$  dhe sekonda që shënohet me  $1''$ . Lidhja mes njësive është:  $1^\circ = 60'$  dhe  $1' = 60''$ .

### Shembulli 1

Këndet e dhëna shndërroni në minuta: a)  $23^\circ$  b)  $31^\circ 15'$ .

**Zgjidhje:**

$$\text{a) } 23^\circ = (23 \cdot 60)' = 1380'; \quad \text{b) } 31^\circ 15' = (31 \cdot 60 + 15)' = 1875'.$$

### Shembulli 2

Këndet e dhëna shndërroni në gradë: a)  $493'$ ; b)  $78^\circ 15'$ .

**Zgjidhje:**

$$\text{a) } \frac{493}{60} = 8,2167^\circ; \quad \text{b) } 78^\circ 15' = 78 + \frac{15}{60} = 78 + 0,25 = 78,25^\circ.$$



**Mbani mend!**

**Radian** është masa për madhësinë e këndit që paraqet raportin mes gjatësisë së harkut që i përgjigjet atij këndi dhe rrezes së vijës rrethore.

$\varphi = \frac{l}{r}$  ( $l$  - gjatësia e harkut rrethor që i përgjigjet këndit qendror në vijën rrethore me rreze  $r$ ).

Shpesh, këndet që janë të shprehur në radianë shënohen me  $\varphi$  (lexohet "fi") ose  $\theta$  (lexohet "teta"). Në këtë libër shkollor do ta shfrytëzojmë shenjë  $\varphi$ .

Nëse gjatësia e harkut është sa rrezja e vijës rrethore, atëherë fitohet këndi prej 1 radian (1 rad)  $\varphi = \frac{l}{r} = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad}$ .

Për shndërrimin e këndit nga gradë në radianë dhe anasjelltas shfrytëzojmë faktin se një rreth i plotë ka  $360^\circ$  ose  $2\pi \text{ rad}$ . Nëse  $\alpha$  është kënd i dhënë në gradë, kurse  $\varphi$  është po i njëjti kënd i dhënë në radianë, atëherë del që raporti i këndit  $\alpha$  kundrejt  $360^\circ$  është i barabartë me raportin e këndit  $\varphi$  kundrejt  $2\pi$ , d.m.th.

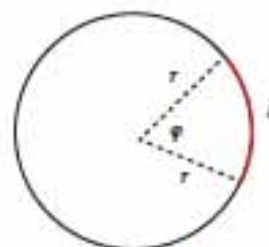
$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\varphi}{2\pi}$ . Prandaj, nga kjo që u tha më sipër, fitohen formulat në vijim:

$$\alpha = 360^\circ \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi, \quad \varphi = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha.$$

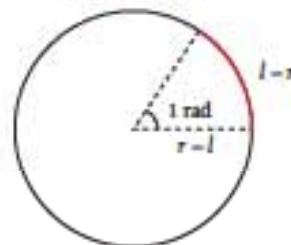
Le të theksojmë se shënimi i madhësisë së këndit në radianë në të shumtën e rasteve përfshin numrin  $\pi$ .

**Mbani mend!**

- Formula për shndërrimin e këndit nga gradë në radianë është  $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$ .
- Formula për shndërrimin e këndit nga radianë në gradë është  $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi$ .
- Shenja rad për shënimin e radianëve zakonisht nuk shkruhet, por nënkuptohet. Kështu, nëse shkruajmë  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , nënkuptohet se  $\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ .



Vizatimi 8



Vizatimi 9

**Shembulli 3**

Këndi i drejtë, i shtrirë dhe i plotë nga gradë të shndërrohen në radianë.

**Zgjidhje:**

Duke e shfrytëzuar formulën për shndërrimin e këndit nga gradë në radianë, fitojmë:

- për këndin e drejtë:  $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ;
- për këndin e shtrirë:  $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 180^\circ = \pi$ ;
- për këndin e plotë:  $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 360^\circ = 2\pi$ .

**Mbani mend!**

- Këndi i drejtë  $\alpha = 90^\circ$  i shprehur në radianë është  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  rad.
- Këndi i shtrirë  $\alpha = 180^\circ$  i shprehur në radianë është  $\varphi = \pi$  rad.
- Këndi i plotë  $\alpha = 360^\circ$  i shprehur në radianë është  $\varphi = 2\pi$  rad.

Për të pasur pasqyrë më të mirë për madhësinë e masës radian, duhet të dimë se

$$1 \text{ rad} = 57,296^\circ \text{ dhe } 1^\circ = 0,01745 \text{ rad.}$$

**Shembulli 4**

Shndërroni këndin  $135^\circ$  në radianë.

**Zgjidhje:**

Duke shfrytëzuar formulën për shndërrimin nga gradë në radianë, për  $\alpha = 135^\circ$ , fitojmë

$$\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 135^\circ = \frac{3\pi}{4} \text{ rad.}$$

**Detyra 1**

Shndërroni këndin  $150^\circ$  në radianë.

**Shembulli 5**

Shndërroni këndin  $\frac{\pi}{12}$  rad në gradë.

*Zgjidhje:*

Duke shfrytëzuar formulën për shndërrimin radian në gradë, për  $\varphi = \frac{\pi}{12}$ , fitojmë

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{\pi}{12} = 15^\circ.$$
**Detyra 2**

Shndërroni këndin  $\frac{4\pi}{3}$  rad në gradë.

**Shembulli 6**

Shndërroni këndin 3,2 rad në gradë.

*Zgjidhje:*

Duke shfrytëzuar formulën për shndërrimin e radianëve në gradë, për  $\varphi = 3,2$ , fitojmë

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi = \frac{180^\circ}{3,14} \cdot 3,2 = 183,44^\circ.$$

**Detyra 3**

Shndërroni këndin  $29^\circ$  në radianë.

**Mbani mend!**

- Këndet maten me gradë ose me radianë.
- $360^\circ$  i përgjigjet  $2\pi$  radianë.
- Njësia matëse grada është më praktike në kontekst të përditshmërisë, përderisa njësia matëse radian përdoret më shpesh në trigonometri dhe analizat matematikore.

**Detyra për ushtrime!**

1. Shndërroni në minuta këndet:

a)  $78^\circ 32' 50''$ ;      b)  $13^\circ 40'$ ;      c)  $12^\circ 13' 25''$ .

2. Shndërroni në radianë këndet:

a)  $\alpha = 225^\circ$ ;      b)  $\alpha = 315^\circ$ ;      c)  $\alpha = 210^\circ$ ;      ç)  $\alpha = 75^\circ$ .

3. Shndërroni në gradë këndet:

a)  $\varphi = \frac{5\pi}{6}$  rad;      b)  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$  rad;      c)  $\varphi = \frac{5\pi}{4}$  rad;      ç)  $\varphi = 3,5$  rad.

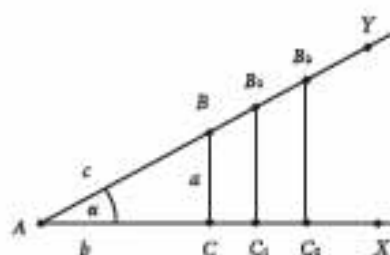


## 5.2 PËRKUFIZIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKË TË KËNDIT TË NGUSHTË

### Rikujtoni!

- Përkufizoni trekëndëshat e ngjashëm!
- Përkufizoni raportin dhe proporcionin!

Le të jetë dhënë këndi i ngushtë  $\alpha = XAY$  (vizatimi 1) dhe në krahun  $AY$  le të marrim pikat arbitrare  $B, B_1, B_2, \dots$ . Më tej, nga pikat  $B, B_1, B_2, \dots$  le të tërheqim normalet drejt krahut  $AX$ , me çka fitohen trekëndëshat kënddrejtë  $ACB, AC_1B_1, AC_2B_2, \dots$ . Për gjithë këta trekëndësha këndi i përbashkët është këndi  $\alpha$ , të gjithë kanë nga një kënd të drejtë, çka nënkupton se në të gjithë trekëndëshat këndet përkatës janë të barabartë. Kjo do të thotë se të gjithë trekëndëshat mes veti janë të ngjashëm. Nga ngjashmëria e trekëndëshave del se brinjët përkatëse të tyre janë proporcionale, përkatësisht vlen



Vizatimi 1

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \dots \quad \text{dhe} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \dots$$

Nga këtu del se në të gjithë trekëndëshat kënddrejtë me këndin e ngushtë  $\alpha$ , raporti i katetes përballë këtij këndi dhe hipotenuzës së trekëndëshit ka vlerën e njëjtë  $a : c$ , ku  $a = \overline{BC}$ ,  $c = \overline{AB}$ . Në mënyrë identike arrijmë në përfundimin se në të gjithë trekëndëshat kënddrejtë me kënd të ngushtë  $\alpha$  raporti i katetes së anëshkruar (katetes fqinje, katetes mbi të cilën shtrihet këndi) të atij këndi dhe hipotenuzës ka vlerën e njëjtë  $b : c$ , ku  $b = \overline{AC}$ ,  $c = \overline{AB}$ .

### Mbani mend!

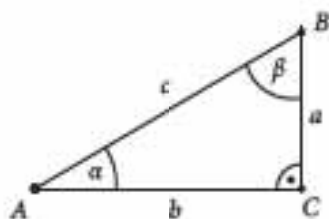
- **Sinusi** i një këndi të ngushtë të trekëndëshit kënddrejtë paraqet raportin e katetes përballë atij këndi dhe hipotenuzës.
- **Kosinusi** i një këndi të ngushtë të trekëndëshit kënddrejtë paraqet raportin e katetes së anëshkruar atij këndi dhe hipotenuzës.

$$\sin \alpha = \frac{\text{kateta përballë këndit}}{\text{hipotenuza}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{kateta e anëshkruar këndit}}{\text{hipotenuza}}$$

Nëse është dhënë trekëndëshi, të cilin zakonisht e shënojmë si në vizatimin 2, sipas përkufizimit të mësipërm kemi:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c}.$$



Vizatimi 2

Në mënyrë të ngjashme sikurse përkufizuan sinusin dhe kosinusin e një këndi të ngushtë, përkufizojmë edhe funksionet tangjent dhe kotangjent të një këndi. Këtu përdorim faktin se në gjithë trekëndëshat kënddrejtë me kënd të ngushtë  $\alpha$ , raporti i katetes përballë dhe katetes së anëshkruar këndit ka vlerë të njëjtë. Në mënyrë analoge, edhe raporti i katetes së anëshkruar këndit dhe katetes përballë këndit  $\alpha$ , në një trekëndësh kënddrejtë të çfarëdoshëm, ka vlerë të njëjtë.

### Mbani mend!

- **Tangjenti** i një këndi të ngushtë  $\alpha$ , në trekëndëshin kënddrejtë, paraqet raportin e katetes përballë dhe katetes së anëshkruar këndit; shënohet me  $\operatorname{tg} \alpha$ .
- **Kotangjenti** i një këndi të ngushtë  $\alpha$ , në trekëndëshin kënddrejtë, paraqet raportin e katetes së anëshkruar këndit dhe katetes përballë tij; shënohet me  $\operatorname{ctg} \alpha$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{kateta përballë këndit}}{\text{kateta e anëshkruar këndit}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{kateta e anëshkruar këndit}}{\text{kateta përballë këndit}}.$$

### Mbani mend!

- **Funksionet themelore trigonometrike** janë  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  dhe  $\operatorname{ctg} \alpha$ .
- Për cilindo kënd të ngushtë  $\alpha$ , vlerat e funksioneve trigonometrike themelore fitohen si herës i gjatësive të brinjëve përkatëse të trekëndëshit kënddrejtë. Pasi gjatësitë e brinjëve janë numra pozitivë, vlerat e tyre janë pozitive.
- Dega e matematikës e cila i hulumton funksionet trigonometrike quhet **trigonometri**.
- Emri i trigonometrisë ka origjinë nga fjalët greke trigonum, që do të thotë trekëndësh, dhe metria, që do të thotë masë.

### Shembulli 1

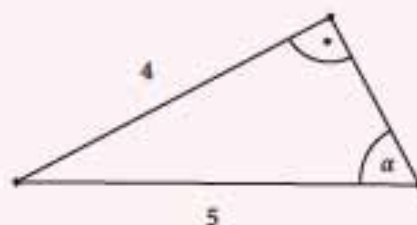
Sipas përkufizimit, përcaktoni vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit  $\alpha$  për trekëndëshin e dhënë në vizatimin 3.

**Zgjidhje:**

Nga vizatimi fitojmë se gjatësia e njërës katete të trekëndëshit kënddrejtë është  $a = 4$ , kurse gjatësia e hipotenuzës është  $c = 5$ . Me  $b$  le ta shënojmë gjatësinë e katetes së panjohur të trekëndëshit të dhënë. Duke përdorur teoremën e Pitagorës kemi  $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$  dhe nga këtu  $b = \sqrt{9} = 3$ .

Duke përdorur përkufizimet e funksioneve trigonometrike, fitojmë

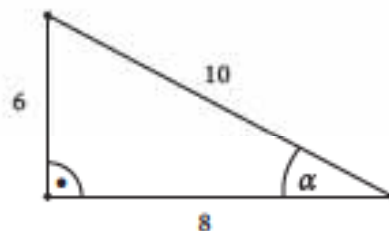
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}.$$



Vizatimi 3

### Detyra 1

Caktoni vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit  $\alpha$  për trekëndëshin e dhënë në vizatimin 4.



Vizatimi 4

### Shembulli 2

Caktoni vlerat e funksioneve trigonometrike të dy këndeve të ngushta të trekëndëshit kënddrejtë të dhënë në vizatimin 5, nëse raporti i gjatësive të kateteve të tij është 8:15.

**Zgjidhje:**

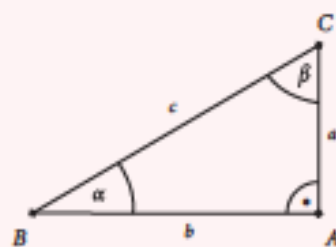
Nga kushti i detyrës për raportin mes gjatësive të kateteve të trekëndëshit kemi  $a : b = 8 : 15$ . Nga këtu fitojmë se  $a = 8k$ ,  $b = 15k$ . Më tej, duke i zëvendësuar vlerat e  $a$  dhe  $b$  në barazimin  $c^2 = a^2 + b^2$ , fitojmë:

$$c^2 = a^2 + b^2 = (8k)^2 + (15k)^2 = 64k^2 + 225k^2 = 289k^2, \text{ d.m.th. } c = \sqrt{289k^2} = 17k.$$

Nga përkufizimet përkatëse të funksioneve trigonometrike kemi

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{8k}{15k} = \frac{8}{15}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{15k}{8k} = \frac{15}{8}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \frac{15k}{8k} = \frac{15}{8}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} = \frac{8k}{15k} = \frac{8}{15}.$$

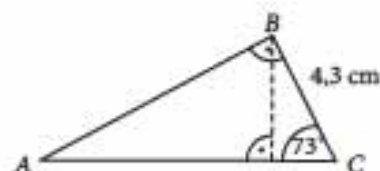


Vizatimi 5



**Detyra 2**

Të gjendet syprina dhe perimetri i trekëndëshit të dhënë.

**Puna me kënde në kalkulator**

Kalkulatorët punojnë në regjime të ndryshme të këndeve:

- DEG – gradë
- RAD – radianë

Në varësi të regjimit të punës që përzgjedhim, vlera e njëjtë për këndin do të interpretohet ndryshe.

1. Puna në regjimin DEG (gradë)

- 1) Në kalkulator përzgjidhni regjimin DEG.
- 2) Çdo kënd që futim merret se është në gradë.
- 3) Rezultatet llogariten si kënde në gradë.

Regjimi: DEG

Hyrja: 60

$\sin(60) = 0.866$

(këndi është në gradë)

2. Puna në regjimin RAD (radianë)

- 1) Në kalkulator përzgjidhni regjimin RAD.
- 2) Çdo kënd që futim merret se është në radianë.
- 3) Rezultatet llogariten si kënde në radianë.

Regjimi: RAD

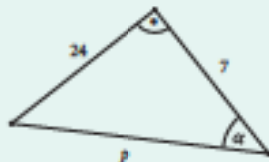
Hyrja:  $\pi/3$

$\sin(\pi/3) = 0.866$

(këndi është në radianë)

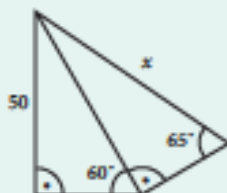
**Detyra për ushtrime!**

1. Caktoni vlerat e funksioneve trigonometrike për këndet  $\alpha$  dhe  $\beta$ , të trekëndëshit kënddrejtë, nëse  $a$  dhe  $b$  janë katete, kurse  $c$  është hipotenuza e tij:
  - a)  $a = 3, b = 4$ ;
  - b)  $b = 6, c = 10$ ;
  - c)  $a = 12, c = 37$ ;
  - ç)  $b = 15, c = 17$ .
2. Caktoni vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit të ngushtë të trekëndëshit kënddrejtë, nëse dihet se
  - a)  $a : c = 5 : 13$ ;
  - b)  $b : c = 8 : 17$ ;
  - c)  $a : c = 7 : 25$ ;
  - ç)  $a : b = 7 : 24$ .
3. Caktoni vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit  $\alpha$  të trekëndëshit kënddrejtë të dhënë në vizatim.

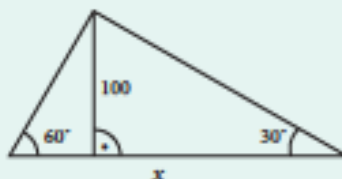


4. Të caktohet vlera e  $x$ :

a)



b)

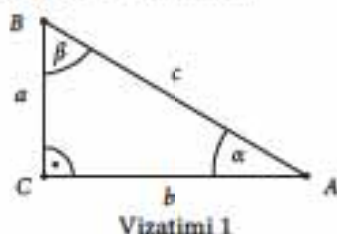


## 5.3 FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE TË KËNDEVE KOMPLEMENTARE

### Rikujtoni!

- Çka janë këndet komplementare?
- Jepni një shembull të çiftit të këndeve komplementare të shprehur në gradë dhe në radianë.
- Sa është shuma e këndeve të brendshme të trekëndëshit?

Le ta shqyrtojmë trekëndëshin  $ABC$  të dhënë në vizatimin 1



Nga trekëndëshi i dhënë mund të vërejmë se:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} = \cos \beta, & \cos \alpha &= \frac{b}{c} = \sin \beta, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta, & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta.\end{aligned}$$

Nëse në këto barazime zëvendësojmë  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , atëherë barazimet marrin formën në vijim:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha, & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

Nëse këndi  $\alpha$  është dhënë në radianë, atëherë  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , prandaj barazimet e mësipërme për lidhjen mes këndeve komplementare mund të shkruhen si

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \operatorname{tg} \alpha,\end{aligned}$$

### Mbani mend!

Çdo funksion trigonometrik i këndit të ngushtë është i barabartë me kofunksionin përkatës të këndit të tij komplementar.

Kofunksionet janë çifte të funksioneve trigonometrike vlerat e të cilëve për një kënd të ngushtë janë të barabarta me vlerat e funksionit tjetër për këndin e tij komplementar. Kështu, sinusi dhe kosinusi, si dhe tangjenti dhe kotangjenti, paraqesin çifte kofunksionesh.

**Shembulli 1**

Caktoni këndin e ngushtë  $\alpha$ , nëse

a)  $\sin(\alpha - 12^\circ) = \sin 28^\circ$ ;      b)  $\sin \alpha = \cos 38^\circ$ ;      c)  $\operatorname{ctg}(\alpha + 28^\circ) = \operatorname{tg} 21^\circ 40'$ .

**Zgjidhje:**

- a) Nga  $\sin(\alpha - 12^\circ) = \sin 28^\circ$  rrjedh  $\alpha - 12^\circ = 28^\circ$  dhe përfundimisht fitojmë  $\alpha = 40^\circ$ .  
 b) Nisur nga  $\sin \alpha = \cos 38^\circ$ , me zbatimin e  $\cos 38^\circ = \sin(90^\circ - 38^\circ) = \sin 52^\circ$ , fitojmë  $\sin \alpha = \sin 52^\circ$ . Nga këtu,  $\alpha = 52^\circ$ .  
 c) Nëse zëvendësojmë  $\operatorname{tg} 21^\circ 40' = \operatorname{ctg}(90^\circ - 21^\circ 40') = \operatorname{ctg} 68^\circ 20'$ , fitojmë  $\alpha + 28^\circ = 68^\circ 20'$ , d.m.th.  $\alpha = 40^\circ 20'$ .

**Detyra 1**

Caktoni këndin e ngushtë  $\alpha$ , nëse

a)  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 49^\circ$ ;      b)  $\cos(\alpha - 25^\circ) = \sin 64^\circ 10'$ ;      c)  $\operatorname{tg}(\alpha + 15^\circ) = \operatorname{ctg}(2\alpha - 8^\circ)$ .

**Shembulli 2**

Caktoni këndin e ngushtë  $\alpha$ , në radianë, nëse

a)  $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{4})$ ;      b)  $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4})$ .

**Zgjidhje:**

- a) Fillimisht,  $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$ . Me zëvendësimin  $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{4})$ , fitojmë  $\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{4})$ , d.m.th  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

- b) Ngjashëm si në detyrën më parë,  $\operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - (2\alpha - \frac{\pi}{4})) = \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$ .

Me zëvendësimin e rezultatit të fundit në  $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{tg}(2\alpha - \frac{\pi}{4})$ , fitojmë

$\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$ . Nga këtu,  $\alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} - 2\alpha$ , d.m.th.  $3\alpha = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ . Fitojmë,  $\alpha = \frac{11\pi}{36}$ .

**Detyra 2**

Caktoni këndin e ngushtë  $\alpha$ , të shprehur në radianë, nëse

a)  $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{6})$ ;      b)  $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{8}) = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{6})$ .

**Shembulli 3**

Thjeshtoni shprehjen:

a)  $2 \sin 42^\circ - 3 \cos 48^\circ$ ;      b)  $\frac{4 \operatorname{tg} 58^\circ + 6 \operatorname{ctg} 32^\circ}{-2 \operatorname{ctg} 32^\circ + 3 \operatorname{tg} 58^\circ}$ .

**Zgjidhje:**

- a)  $2 \sin 42^\circ - 3 \cos 48^\circ = 2 \sin 42^\circ - 3 \sin(90^\circ - 48^\circ) = 2 \sin 42^\circ - 3 \sin 42^\circ = -\sin 42^\circ$ .



$$b) \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{ctg} 32^{\circ}}{-2 \operatorname{ctg} 32^{\circ} + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{tg}(90^{\circ} - 32^{\circ})}{-2 \operatorname{tg}(90^{\circ} - 32^{\circ}) + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{4 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 6 \operatorname{tg} 58^{\circ}}{-2 \operatorname{tg} 58^{\circ} + 3 \operatorname{tg} 58^{\circ}} = \frac{10 \operatorname{tg} 58^{\circ}}{\operatorname{tg} 58^{\circ}} = 10.$$

#### Shembulli 4

Thjeshtoni shprehjen 
$$\frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \cos(\frac{\pi}{6})}{2 \cos(\frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})}$$

**Zgjidhje:**

Vëreni se këndet janë dhënë në radianë, prandaj do t'i shfrytëzojmë lidhjet përkatëse mes  $\sin \alpha$  dhe  $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ . Fitojmë:

$$\frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \cos(\frac{\pi}{6})}{2 \cos(\frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})}{2 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{3 \sin(\frac{\pi}{3}) - 5 \sin(\frac{\pi}{3})}{2 \sin(\frac{\pi}{3}) + 7 \sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{-2 \sin(\frac{\pi}{3})}{9 \sin(\frac{\pi}{3})} = -\frac{2}{9}.$$

#### Detyra 3

Thjeshtoni shprehjet:

$$a) 2 \operatorname{ctg} 59^{\circ} - 6 \operatorname{ctg} 31^{\circ}; \quad b) \frac{7 \sin 18^{\circ} - 3 \cos 72^{\circ}}{-\cos 72^{\circ} + 5 \sin 18^{\circ}}; \quad c) \frac{2 \operatorname{tg} 65^{\circ} - 7 \operatorname{ctg} 25^{\circ}}{2 \operatorname{tg} 65^{\circ} + 3 \operatorname{ctg} 25^{\circ}}; \quad d) \frac{-5 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{12}) + 9 \operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{12})}{2 \operatorname{ctg}(\frac{5\pi}{12}) - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{12})}$$

#### Detyra për ushtrime!

1. Caktoni këndin e ngushtë  $\alpha$ , nëse:

$$a) \sin(\alpha - 14^{\circ}) = \cos 29^{\circ} 20'; \quad b) \cos(27^{\circ} - \alpha) = \sin 61^{\circ} 50';$$

$$c) \operatorname{tg}(\alpha + 30^{\circ}) = \operatorname{ctg} 65^{\circ} 40'; \quad d) \operatorname{ctg}(\alpha - 18^{\circ}) = \operatorname{tg} 52^{\circ} 38'.$$

2. Caktoni këndin e ngushtë  $\alpha$ , në radianë, nëse

$$a) \sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{5}); \quad b) \operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{10}) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - 3\alpha); \quad c) \sin(2\alpha + \frac{\pi}{6}) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{3}).$$

3. Thjeshtoni shprehjen:

$$a) 5 \cos 41^{\circ} - 2 \sin 49^{\circ} - \sin 49^{\circ} + 3 \cos 41^{\circ}; \quad b) 4 \sin 32^{\circ} - 3 \cos 58^{\circ} + 2 \sin 32^{\circ}.$$

$$c) \frac{4 \operatorname{tg} 35^{\circ} + 6 \operatorname{ctg} 55^{\circ}}{-3 \operatorname{ctg} 55^{\circ} + 2 \operatorname{tg} 35^{\circ}}; \quad d) 3 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}) - 4 \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{8}) + 5 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}) + \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{8}).$$

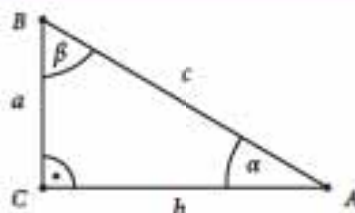
4. Thjeshtoni shprehjet, nëse dihet se  $\alpha + \beta = 90^{\circ}$ .

$$a) \cos \beta + \sin \alpha; \quad b) \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta \quad c) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta \quad d) \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta$$

## 5.4 LIDHJA MES FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE TË KËNDIT TË NJËJTË

### Rikujtoni!

- Si thotë përkufizimi për funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë në trekëndëshin kënddrejtë përmes raporteve të brinjëve të trekëndëshit?
- Si formulohet teorema e Pitagorës?



Nëse barazimin  $a^2 + b^2 = c^2$ , që është rezultati i teoremës së Pitagorës, e pjesëtojmë me  $c^2$ , fitojmë:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \quad \text{d.m.th.} \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Në këtë barazim zëvendësojmë  $\frac{a}{c} = \sin \alpha$  dhe  $\frac{b}{c} = \cos \alpha$  dhe fitojmë  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

Më tej,  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$ , d.m.th. fitojmë se  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

Në mënyrë analoge,  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$ , d.m.th. fitojmë se  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

Nga dy barazimet e fundit fitojmë se  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ .

### Mbani mend!

**Barazimet themelore trigonometrike ose identitetet trigonometrike** për këndin e çfarëdoshëm të ngushtë  $\alpha$  janë:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Një nga zbatimet e këtyre identiteteve trigonometrike është përcaktimi i vlerave të funksioneve të tjera trigonometrike nëse është dhëna vlera e njërit prej funksioneve trigonometrike.

### Shembulli 1

Caktoni vlerat e funksioneve tjera trigonometrike, nëse këndi  $\alpha$  është i ngushtë dhe  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ .

**Zgjidhje:**

Në rastet kur jepet vlera e  $\sin \alpha$  ose  $\cos \alpha$ , fillojmë nga identiteti  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , ashtu që në këtë identitet e zëvendësojmë vlerën e kofunksionit përkatës. Në rastin tonë

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1, \text{ prandaj } \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}. \text{ Nga këtu, } \sin \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Vëreni se barazimi  $\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$  është plotësuar edhe për  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ , mirëpo vlera e  $\sin \alpha$  është numër pozitiv për çdo kënd të ngushtë  $\alpha$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

**Detyra 1**

Nëse është dhënë këndi i ngushtë  $\alpha$  dhe  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ , caktoni vlerat e funksione tjera trigonometrike të këtij këndi.

**Shembulli 2**

Caktoni vlerat e funksioneve të tjera trigonometrike, nëse është dhënë  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ , ku  $\alpha$  është kënd iu ngushtë.

**Zgjidhje:**

Këtë lloj detyrash mund ta zgjidhim në dy mënyra, edhe atë:

**Mënyra e parë**

Nisur nga barazimi  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{12}$ , fitohet  $\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \cos \alpha$ . Nëse barazimin e fundit e

zëvendësojmë në barazimin  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , fitojmë  $\left(\frac{5}{12} \cdot \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$ . Nga këtu,

$$\frac{25}{144} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ prandaj } \left(\frac{25}{144} + 1\right) \cos^2 \alpha = 1 \text{ dhe } \frac{169}{144} \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\text{Tani, } \cos^2 \alpha = \frac{1}{\frac{169}{144}} = \frac{144}{169}, \text{ kurse } \cos \alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

Duke zëvendësuar vlerën për  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$  në barazimin  $\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \cos \alpha$ , fitojmë se

$$\sin \alpha = \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13} = \frac{5}{13}.$$

Tani, duke marrë në konsideratë që  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ , vlera e  $\operatorname{ctg} \alpha$  mund të fitohet si vlera reciproke

$$\text{e } \operatorname{tg} \alpha, \text{ d.m.th. } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}.$$



**Mënyra e dytë**

Nëse e pjesëtojmë barazimin  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  nga të dy anët me  $\cos^2 \alpha$ , fitojmë  $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ , d.m.th.  $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ . Nga këtu,  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$ , d.m.th.

$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$ , sepse cosa është numër pozitiv për çdo kënd të ngushtë  $\alpha$ . Duke zëvendësuar vlerën për  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$  fitojmë  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{144} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25+144}{144}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{169}{144}}} = \frac{12}{13}$ .

Vlerën e fituar për  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ , e zëvendësojmë në  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  dhe marrim  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ .

Nëse jepet vlera e  $\operatorname{ctg} \alpha$ , atëherë barazimin  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  e pjesëtojmë me  $\sin^2 \alpha$  me çka fitojmë  $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ , d.m.th.  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ . Ngakëtu,  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ , d.m.th.  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$ , sepse sina është numër pozitiv për çdo kënd të ngushtë  $\alpha$ .

**Mbani mend!**

Për çdo kënd të ngushtë  $\alpha$ , janë të vërteta barazimet  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$  dhe  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$ .

**Detyra 2**

Caktoni vlerat e funksioneve të tjera nëse është dhënë që këndi  $\alpha$  është i ngushtë dhe  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$ .

**Detyra për ushtrime!**

- Caktoni vlerat e funksioneve të tjera trigonometrike, nëse  $\alpha$  është kënd i ngushtë dhe nëse është dhënë:
  - $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ ;
  - $\cos \alpha = \frac{20}{29}$ .
- Caktoni vlerat e funksioneve të tjera trigonometrike, nëse  $\alpha$  është kënd i ngushtë dhe nëse është dhënë:
  - $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{40}$ ;
  - $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$ .
- Caktoni vlerat e funksioneve të tjera trigonometrike, nëse  $\alpha$  është kënd i ngushtë dhe nëse është dhënë:
  - $\sin \alpha = \frac{2a}{a^2 + 1}$ ;
  - $\cos \alpha = \frac{10a}{a^2 + 25}$ .
- Të llogaritet vlera e shprehjes  $4\operatorname{tg} \alpha + 5\cos \alpha$ , nëse  $\alpha$  është kënd i ngushtë dhe  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

## 5.5 THJESHTIMI I SHPREHJEVE TRIGONOMETRIKE

### Rikujtoni!

- Përkufizimin e funksioneve trigonometrike të këndeve komplementare.
- Shkruani identitetet themelore trigonometrike.

### Mbani mend!

Njëri nga zbatimet më të rëndësishme të identiteteve themelore trigonometrike është *thjeshtimi i shprehjeve trigonometrike*.

Për thjeshtimin (reduktimin) e shprehjes së dhënë trigonometrike, ndiqni hapat:

1. **Thyesat dhe SHVP** Nëse shprehja përmban më shumë thyesa, emëruesit faktorizohen dhe gjejmë shumëfishin më të vogël të përbashkët (SHVP). Shprehja shkruhet si një thyesë.
2. **Shumëzuesi i përbashkët.** Në shprehjet me më shumë anëtarë, provohet mundësia e nxjerrjes para kllape e shumëzuesit (faktorit) të përbashkët dhe grupimi përkatës.
3. **Identitetet themelore trigonometrike.** Shfrytëzohen identitetet:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

4. **Zëvendësimi i tg dhe ctg.** Shprehjet  $\operatorname{tg} \alpha$  dhe  $\operatorname{ctg} \alpha$  zëvendësohen me  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  dhe  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .
  - Nëse në shprehjen e dhënë ka dy ose më shumë anëtarë, provoni të nxirrni shumëzuesin e përbashkët përpara kllape.
  - Përdorni identitetet  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$  dhe  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ .
  - Nëse në shprehjen e dhënë ka  $\operatorname{tg} \alpha$  dhe/ose  $\operatorname{ctg} \alpha$ , bëni zëvendësim sipas identiteteve  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  dhe  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

### Shembulli 1

Thjeshtoni shprehjen:

$$\text{a) } 4 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha; \quad \text{b) } (1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha); \quad \text{c) } \frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha}.$$

**Zgjidhje:**

- a)  $4 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 4 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4 - 1 = 3;$
- b)  $(1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha;$
- c) Pasi  $1 - \sin \alpha$  dhe  $1 + \sin \alpha$  nuk kanë pjesëtues të përbashkët, del që  
SHVP =  $(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$ , prandaj, fitojmë

$$\frac{1}{1 - \sin \alpha} + \frac{1}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha + 1 - \sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} = \frac{2}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha}.$$

**Detyra 1**

Të thjeshtohen shprehjet:

$$\text{a) } 7 - 7 \cos^2 \alpha \quad \text{b) } (1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha); \quad \text{c) } \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 - \cos \alpha}.$$

**Shembulli 2**

Thjeshtoni shprehjen:

$$\text{a) } \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \text{b) } \sqrt{1 - \sin \alpha} \cdot \sqrt{1 + \sin \alpha}; \quad \text{c) } \frac{(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha}.$$

**Zgjidhje:**

a) Nëse gjitha thyesat i kthejmë në thyesa me emërues të njëjtë, fitojmë:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha - (1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sqrt{1 - \sin \alpha} \cdot \sqrt{1 + \sin \alpha} = \sqrt{(1 - \sin \alpha) \cdot (1 + \sin \alpha)} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos^2 \alpha} = \cos \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2 - \cos^2 \alpha} &= \frac{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha + 1}{1 + 2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{2 + 2 \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{2(1 + \sin \alpha)}{2 \sin \alpha(1 + \sin \alpha)} \\ &= \frac{1}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

**Mbani mend!**

- Ka dy mënyra për të vërtetuar se një barazim është i saktë:
- Mënyra e parë është kur dy anët e barazimit i transformojmë derisa të kthehen në një shprehje të njëjtë.
- Mënyra e dytë është kur fillojmë nga njëra anë dhe me transformimet përkatëse fitohet ana tjetër e barazimit (zakonisht fillojmë nga ajo anë e cila është më e ndërlikuar).



## Shembulli 3

Vërtetoni saktësinë e barazimit:

$$a) \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha; \quad b) \frac{\sin \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}; \quad c) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

**Zgjidhje:**

a) **Mënyra e parë:**

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha. \quad (\text{kërkohet SHVP i thyesave nga ana e majtë e barazimit})$$

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha \quad (\text{nxirret shumëzuesi i përbashkët përpara kllape})$$

$$\frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad (\text{zbatohet } 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha)$$

$$\frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

Fituam se ana e majtë është e barabartë me anën e djathtë  $\frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ . Kështu kemi vërtetuar saktësinë e barazimit.

**Mënyra e dytë:**

Me  $D = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  le të shënojmë anën e djathtë të barazimit, kurse me  $L = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  e shënojmë anën e majtë. Do të fillojmë me transformime nga ana e majtë dhe do të provojmë ta sjellim në formën e anës së djathtë.

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = D \end{aligned}$$

Pra, arritëm që anën e majtë, me zbatimin e identiteteve trigonometrike, ta sjellim në formën e anës së djathtë dhe me këtë është vërtetuar saktësia e barazimit.

b) Fillojmë nga ana e majtë, fillimisht duke përdorur identitetet  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  dhe  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ . Kështu ana e majtë bëhet:

$$L = \frac{\sin \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}.$$

Më tej, duke i kthyer thyesat e dyfishta në të rëndonat dhe duke zbatuar identitetin  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , fitojmë

$$L = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = D.$$

Kështu është vërtetuar saktësia e barazimit të dhënë.

- c) Në këtë detyrë të dy anët janë njëloj të ndërlikuara, prandaj është e parëndësishme se nga cila anë do të fillojmë transformimet. Në këtë rast, nga cilado anë të fillojmë, në anën tjetër më lehtë arrijmë duke përdorur identitetin  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ . Kështu, nëse fillojmë nga ana e majtë dhe nga identiteti i mësipërm trigonometrik, e shprehim  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$ , fitojmë:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{1 + \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}{\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

**Detyra 2**

Vërtetoni saktësinë e barazimit:

a)  $(1 - \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (1 + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha};$       b)  $\frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$

**Detyra 3**

Vërtetoni identitetin  $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = 2 \operatorname{ctg} \alpha.$

**Detyra për ushtrime!**

1. Thjeshtoni shprehjen:

a)  $\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha;$       b)  $(1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha;$       c)  $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha.$

2. Thjeshtoni shprehjen:

a)  $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\sin^2 \alpha};$       b)  $\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cos \alpha};$       c)  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{3 \sin \alpha - 1}{1 - \sin \alpha} - \frac{2}{1 + \sin \alpha}.$

3. Vërtetoni saktësinë e barazimit:

a)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0;$

b)  $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha, \quad \sin \alpha \neq 0.$

## 5.6 ZBATIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE

### Rikujtoni!

- Skiconi një drejtkëndësh, trapez, trekëndësh dhe në mënyrë korrekte shënoni elementet e tyre.
- Përkufizimin e funksioneve trigonometrike të këndit të ngushtë.

### Mbani mend!

- **Këndi i elevacionit** është këndi ndërmjet vijës horizontale dhe vijës së shikimit kur vëzhguesi shikon në objekt që gjendet mbi nivelin e syrit.
- **Këndi i depresionit** është këndi ndërmjet vijës horizontale dhe vijës së shikimit kur vëzhguesi shikon në objekt që gjendet nën nivelin e syrit.



### Shembulli 1

Llogaritni perimetrin e drejtkëndëshit me brinjë  $a = 14$  cm, nëse këndi mes kësaj brinje dhe diagonales është  $\alpha = 28^\circ 40'$ .

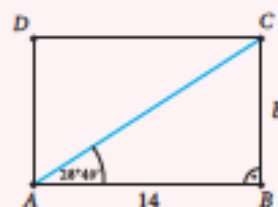
**Zgjidhje:**

Nga kushtet e detyrës dimë gjatësinë e njëres brinjë të drejtkëndëshit, kurse për të caktuar perimetrin e tij, duhet të gjejmë gjatësinë  $b$  të brinjës tjetër.

Nga vizatimi 1 është e qartë se duhet të përzgjedhim funksionin trigonometrik në të cilin përdoret herësi ndërmjet katetes përballë dhe asaj anëshkruar këndit në mënyrë që të shfrytëzojmë këndin e dhënë dhe brinjën  $a = 14$  për llogaritjen e gjatësisë së panjohur  $b$ . Është e qartë se funksion i duhur është funksioni tangjent, d.m.th.  $\operatorname{tg} 28^\circ 40' = \frac{b}{14}$ . Nga këtu,  $b = 14 \cdot \operatorname{tg} 28,67^\circ = 14 \cdot 0,547 = 7,7$  cm. (Vlera e  $\operatorname{tg} 28^\circ 40'$  llogaritet me kalkulator).

Për perimetrin e drejtkëndëshit kemi

$$P = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 7,7 = 43,4 \text{ cm.}$$



Vizatimi 1



**Detyra 1**

Llogaritni perimetrin dhe lartësinë e trekëndëshit barakrahës, me krah 40 cm dhe kënd ndërmjet krahëve prej  $44^\circ$ .

**Shembulli 2**

Trapezi barakrahës ka bazat 18 cm dhe 13,4 cm, përkatësisht. Këndi ndërmjet bazës së poshtme dhe krahut është  $\frac{\pi}{3}$ .

Caktoni gjatësinë e krahut dhe të lartësisë së trapezit.

**Zgjidhje:**

Në vizatimin 2 është dhënë trapezi barakrahës.

Fillimisht do ta llogaritim pjesën  $x$  që është karakteristike për

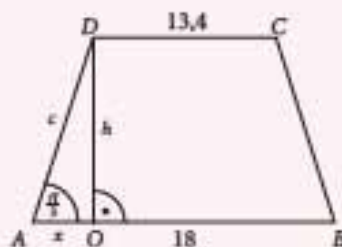
trapezin barakrahës,  $x = \frac{18 - 13,4}{2} = \frac{4,6}{2} = 2,3$  cm. Për gjetjen

e gjatësisë së panjohur  $c$  të krahut dhe lartësisë së panjohur  $h$  të

trapezit, e shqyrtojmë trekëndëshin  $\triangle AOD$ . Nga ky trekëndësh gjejmë:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{x}{c} = \frac{2,3}{c}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{x} = \frac{h}{2,3}.$$

Nga këtu,  $c = \frac{2,3}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{2,3}{0,5} = 4,6$  cm, kurse  $h = 2,3 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,3 \cdot \sqrt{3} \approx 2,3 \cdot 1,73 = 3,979$ .



Vizatimi 2

**Shembulli 3**

Bazat e trapezit barakrahës janë 18 cm dhe 13,4 cm, kurse krahu 5 cm. Caktoni këndet e trapezit

**Zgjidhje:**

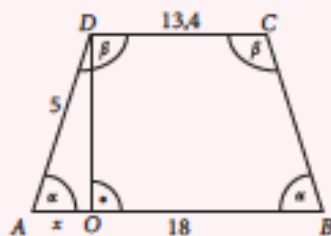
Ngjashëm si në shembullin paraprak, fillimisht do ta njehsojmë

pjesën  $x$  sipas vizatimit 3. Fitojmë:  $x = \frac{18 - 13,4}{2} = \frac{4,6}{2} = 2,3$  cm.

Nga trekëndëshi  $\triangle AOD$ , me ndihmën e funksionit trigonometrik

kosinus e llogaritim këndin  $\alpha$ . Me të vërtetë

$\cos \alpha = \frac{2,3}{5} = 0,46$ , prej nga del se  $\alpha = \cos^{-1} 0,46 = 62,61^\circ$  (vlera e funksionit invers të funksionit kosinus llogaritet me kalkulator). Duke shfrytëzuar faktin se këndet mbi bazën e trapezit barakrahës janë të barabartë dhe që shuma e këndeve të katërkëndëshit të çfarëdoshëm është e barabartë me  $360^\circ$ , kemi  $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$ , prandaj me zëvendësimin e vlerës së këndit  $\alpha$ , fitojmë  $2 \cdot 62,61^\circ + 2\beta = 360^\circ$ . Prej këtu del  $2\beta = 360^\circ - 125,22^\circ$ , d.m.th.  $\beta = 234,78^\circ : 2 = 117,39^\circ$ .



Vizatimi 3

**Detyra 2**

Llogaritni perimetrin e drejtkëndëshit, diagonalja e të cilit është 15 cm dhe e cila me brinjën më të madhe formon kënd prej  $36^\circ$ .

**Shembulli 4**

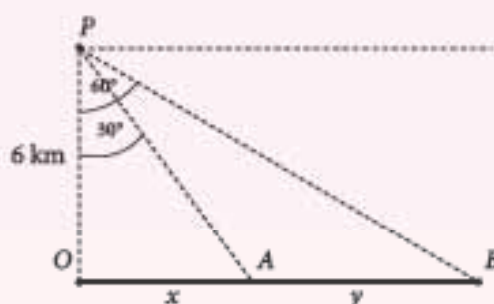
Një aeroplan fluturon në lartësi 6 km mbi nivelin e detit dhe dallon dy anije. Këndet e depresionit që vija horizontale me avionin formon me anijet A dhe B janë  $60^\circ$  dhe  $30^\circ$ , përkatësisht. Llogaritni largësinë ndërmjet anijeve.

**Zgjidhje:**

Aeroplani le të jetë në pikën P dhe e shënojmë me O pikën vertikalisht nën këtë pikë. Anijet janë në pikat A dhe B në sipërfaqen e detit. (Vizatimi 6)



Vizatimi 6



Vizatimi 7

Lartësinë në të cilën gjendet aeroplani e shënojmë me PO, kurse nga këndet e depresionit mes aeroplanit dhe anijeve përkatëse fitojmë  $\angle OPA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$  dhe  $\angle OPB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

Le të shënojmë me x largësinë prej pikës O deri te pika A, d.m.th.  $x = \overline{OA}$  dhe me y shënojmë largësinë prej pikës A deri te pika B, d.m.th.  $y = \overline{AB}$  (Vizatimi 7).

Duke shqyrtuar trekëndëshin  $\triangle POA$  dhe këndin  $\angle OPA = 30^\circ$ , fitojmë  $\tan 30^\circ = \frac{x}{6}$ . Nga këtu del se  $x = 6 \cdot \tan 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6 \cdot 0,577 = 3,46 \text{ km}$ .

Ngjashëm, nga trekëndëshi  $\triangle POB$ , këndi  $\angle OPB = 60^\circ$  dhe brinja  $\overline{OB} = x + y$ , fitojmë  $\tan 60^\circ = \frac{x+y}{6}$ . Nga këtu del se  $x + y = 6 \cdot \tan 60^\circ = 6 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 1,732 = 10,39 \text{ km}$ .

Nga të dhënat më sipër fitojmë se largësia ndërmjet anijes A dhe B është  $y = 10,39 - 3,46 = 6,93 \text{ km}$ .

**Detyra 3**

Një person shikon në një pemë, që gjendet në anën e kundërt të lumit, nën kënd  $48$  gradë. Më pas personi lëviz përgjatë bregut 10 metra dhe ndalon. E shikon edhe një herë pemën, por tani e sheh nën këndin  $36$  gradë. Të caktohet gjerësia e lumit.

## Shembulli 5

Një njeri i lartë 1,8 m qëndron në largësi 4,5 m nga llamba e ndriçimit rrugor. Hija e tij është 2,8 m e gjatë. Të përcaktohet lartësia e llambës së ndriçimit rrugor.

## Zgjidhje:

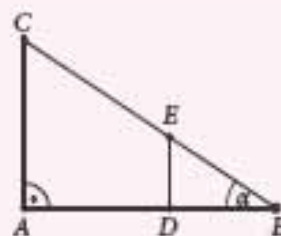
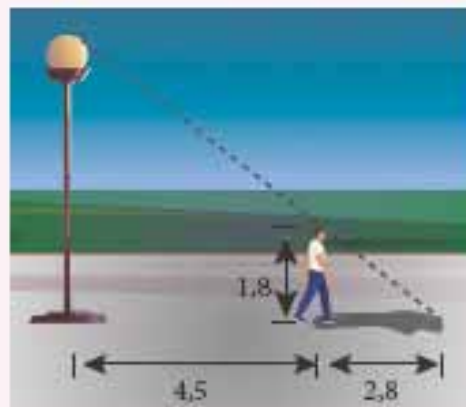
Nga figura fitojmë vizatimin 8. Le ta shënojmë me

$x = \overline{DB} = 2,8$  m hijen, kurse me  $y = \overline{DE} = 1,8$  m le të shënojmë gjatësinë e njeriut. Atëherë këndin  $\alpha$  e fitojmë nga trekëndëshi kënddrejtë  $DBE$ , nga  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,8}{2,8} = 0,643$ , prej ku gjejmë  $\alpha = \operatorname{tg}^{-1} 0,643 = 32,74^\circ$ .

Nga trekëndëshi kënddrejtë  $ABC$  me katetet  $\overline{AC}$  dhe  $\overline{AB} = 4,5 + 2,8 = 7,3$  m, fitojmë

$\operatorname{tg} 32,74^\circ = \frac{\overline{AC}}{7,3}$ , përkatësisht  $\overline{AC} = 7,3 \cdot \operatorname{tg} 32,74^\circ \approx 4,7$  m.

Pra, lartësia e llambës rrugore është 4,7 m.



Vizatimi 8

## Detyra 4

Një alpinist ngjitet nëpër një shteg të gjatë 2 km, i cili me bazën horizontale formon kënd  $12^\circ$ . Në cilën lartësi do të jetë alpinisti kur të arrijë në fund të shtegut? Bëni skicën.

## Detyra për ushtrime!

1. Në cilën lartësi do të prekin murin shkallët e zjarrfikësit të gjata 25 m, nëse këndi që formojnë me murin është  $70^\circ$ .
2. Është dhënë trapezi barakrahës (dybrinjënjëshëm) me bazën më të madhe 42 cm, kurse këndi mbi bazë është  $47^\circ 20'$  dhe krah  $c = 25$  cm. Llogaritni bazën tjetër dhe lartësinë e trapezit.
3. Në cilën lartësi do të ngjitet udhëtari i cili ec në rrugë të drejtë 2 km nën kënd  $4^\circ 10'$ ?
4. Nga maja e një fanari, i cili është 150 m i lartë, shihet një anije nën kënd prej  $9^\circ$ . Sa është largësia prej fanarit deri te anija?
5. Një kamerë është montuar ashtu që "sheh" një objekt nën kënd të depresionit prej  $35^\circ$ . Objekti drejt të cilit është drejtuar kamera gjendet në 20 m largësi horizontale. Të llogaritet ndryshimi i lartësive të kamerës dhe objektit.
6. Këndi i depresionit nga maja e një ndërtese me lartësi 56 metra, në drejtim të automobilin të parkuar në tokë është  $30^\circ$ . Për sa metra duhet të largohet automobili nga ndërtesa që këndi i ri i depresionit të jetë  $15^\circ$ ?



## 5.7 AKSIOMAT E GJEOMETRISË HAPËSINORE

Në gjeometrinë hapësinore studiohen pozitat e ndërsjella mes objekteve themelore gjeometrike: pikës, drejtëzës dhe rrafshit. Vetitë e tyre dhe pozitat e ndërsjella vërtetohen në bazë të aksiomave të gjeometrisë hapësinore, të cilat paraqesin pohimet fillestare që nuk vërtetohen, por merren si të vërteta. Mbi këtë bazë aksiomatike shqyrtohen pozitat e mundshme të pikës dhe drejtëzës, dy drejtëzave, drejtëzës dhe rrafshit, si dhe ndërmjet dy rrafsheve, që mundëson studim logjik të besueshëm dhe sistematik të gjeometrisë në hapësirë. Aksiomat e gjeometrisë hapësinore dhe pozitat e ndërsjella mes pikës, drejtëzës dhe rrafshit kanë zbatime të gjera praktike. Ato përbëjnë bazën për zgjidhjen e detyrave gjeometrike, për vërtetimin e teoremave dhe për interpretime korrekte të konstruksioneve hapësinore. Këto koncepte zbatohen në arkitekturë, ndërtimtari, vizatim teknik, inxhinieri dhe fizikë, ku është i domosdoshëm përcaktimi preciz i pozicionit dhe orientimit të objekteve të hapësirës.

Gjeometria është degë e matematikës e cila studion formën, madhësinë dhe pozicionin e objekteve në rrafsh dhe në hapësirë. Origjina e gjeometrisë lidhet me nevojat praktike të veprimtarisë njerëzore, sikurse janë matjet, ndërtimet, orientimi në hapësirë e të tjera.

Në arsimimin e deritanishëm janë mësuar shumë koncepte nga gjeometria siç janë: pika, drejtëza, trekëndëshi, kubi, format 3D dhe koncepte të tjera. Disa prej tyre përkufizohen përmes koncepteve të tjera të njohura, kurse disa nuk përkufizohen. Konceptet që nuk përkufizohen, por që shpjegohen përmes shembujve quhen **koncepte themelore** dhe me ndihmën e tyre përkufizohen konceptet e tjera.

### Mbani mend!

- Konceptet që nuk përkufizohen quhen **koncepte themelore**.
- Konceptet që përkufizohen me anë të koncepteve themelore quhen koncepte të **nxjerra** ose **koncepte të përkufizuara**.
- Në gjeometri koncepte themelore janë **pika, drejtëza dhe rrafshi**.

### Shembulli 1

Këndi është formë 2D e përbërë prej dy gjysmëdrejtëzave me një pikë të përbashkët. Pra koncepti i këndit plotësisht është i sqaruar me fjali në të cilën në mënyrë logjike janë lidhur konceptet e pikës, gjysmëdrejtëzës dhe formës 2D.

**Mbani mend!**

- **Përkufizimi** është shpjegim i qartë dhe preciz i një koncepti, nëpërmjet të cilit kuptohet përmbajtja e tij, mbështetur në koncepte tjera të njohura.
- **Forma 2D** është bashkësia e pikave të rrafshit e cila ka pozicion, formë dhe madhësi saktësisht të përcaktuar.
- **Pohimet themelore** ose **aksiomat** janë pohime që i marrim të sakta pa vërtetim.
- **Pohimet e nxjerra** ose **teoremat** janë të gjitha pohimet e tjera, saktësia e të cilave vërtetohet.

Teorema mund të formulohet në formën e **implikacionit** (*forma me kusht*) ose në formën **kategorike**. Për shembull: Nëse katërkëndëshi është kuadratik, atëherë brinjët e tij kanë gjatësi të njëjtë. Kjo teoremë është formuluar në formë të implikacionit. Po kjo teoremë në formën kategorike thotë: Gjitha brinjët e kuadratikit kanë gjatësi të njëjtë.

Në çdo teoremë duhet të ketë:

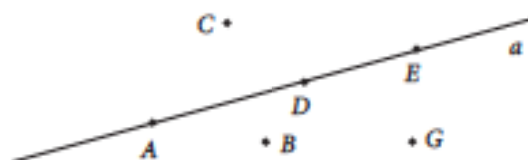
- kushte nën të cilat shqyrtohet objekti (kushtet e tilla i quajmë **supozime**);
- pohim për këto objekte (ky pohim quhet **përfundim** i teoremës).

Në vijim pasojnë disa nga aksiomat dhe teoremat më të rëndësishme. Aksiomat do t'i shënojmë me  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , kurse teoremat me  $T_1, T_2, T_3, \dots$

$A_1$ : Në çdo drejtëz shtrihen pafund shumë pika, por ka edhe pafund shumë pika që nuk shtrihen në atë drejtëz.

$A_2$ : Nëpër çdo dy pika të ndryshme kalon një dhe vetëm një drejtëz.

Pika  $A$  themi se i takon ose se shtrihet në drejtëzën  $a$ , ose se drejtëza  $a$  kalon nëpër pikën  $A$ , dhe shkruajmë  $A \in a$ . Po ashtu, për pikën  $B$  themi se nuk i takon ose nuk shtrihet në drejtëzën  $a$ , ose se drejtëza  $a$  nuk kalon nëpër pikën  $B$ , dhe shkruajmë  $B \notin a$  (Vizatimi 1).



Vizatimi 1

**Mbani mend!**

Pikat që shtrihen në të njëjtën drejtëz i quajmë **pika kolineare**.

Tani do të paraqesim disa teorema që rrjedhin nga aksiomat e dhëna.

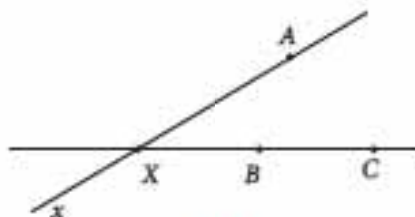


$T_1$ : Në rrafsh ekzistojnë të paktën tri pika jokolineare.

**Vërtetimi:** Le të jetë dhënë drejtëza  $a$ , e cila kalon nëpër dy pika të ndryshme  $A$  dhe  $B$ . Sipas aksiomës  $A_1$ , ekziston pika  $C$ , e cila nuk shtrihet në drejtëzën  $a$ . Pra, pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  nuk janë kolineare.

$T_2$ : Nëpër secilën pikë kalojnë pafund shumë drejtëza.

**Vërtetimi:** Le të jetë  $A$  pikë e çfarëdoshme, kurse  $B$  dhe  $C$  janë pika të tilla që  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  nuk janë kolineare. Ekzistenca e tri pikave të tilla sigurohet nga teorema paraprake. Sipas aksiomës  $A_2$ , nëpër pikat  $B$  dhe  $C$  kalon drejtëza e vetme, në të cilën sipas aksiomës  $A_1$  shtrihen pafund shumë pika. Nëpër çdo pikë  $X$  të drejtëzës  $BC$  dhe nëpër pikën  $A$  (vizatimi 2) kalon një drejtëz e vetme. Meqenëse në drejtëzën  $BC$  shtrihen pafund shumë pika, kjo do të thotë se nëpër pikën  $A$  do të kalojnë pafund shumë drejtëza.



Vizatimi 2

## Shembulli 2

Sa drejtëza kalojnë nëpër katër pika  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dhe  $D$ ?

**Zgjidhje:**

Nga aksioma  $A_2$  del se nëpër dy pika të ndryshme kalon saktësisht një drejtëz. Numri i drejtëzave nëpër pikat  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dhe  $D$  varet nga pozicioni i ndërsjellë i tyre, prandaj do të shqyrtojmë disa raste.

Të katër pikat janë kolineare:

Atëherë ekziston saktësisht një drejtëz e cila kalon nëpër to.

Tri pika janë kolineare, kurse e katërta nuk shtrihet në atë drejtëz:

Tri pikat kolineare përcaktojnë një drejtëz. Pika e katërt me secilën prej tri pikave përcakton nga një drejtëz të re. Numri i përgjithshëm i drejtëzave është  $1 + 3 = 4$ .

Cilat do tri pika nuk janë kolineare:

Çdo dy pika përcaktojnë një drejtëz të re. Numri i përgjithshëm i drejtëzave është  $\binom{4}{2} = 6$  drejtëza. Ky numër drejtëzash fitohet me sa vijon: nga bashkësia me 4 pika përzgjedhim nënbashkësinë arbitrare me 2 pika dhe nëpër to tërheqim një drejtëz. Numri i përzgjedhjeve të tilla të nënbashkësive me nga dy elemente prej bashkësisë me 4 elemente është  $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$ , sa është edhe numri i drejtëzave të ndryshme.

Mund të përfundojmë se, nëpër katër pika të ndryshme mund të kalojnë një, katër ose gjashtë drejtëza të ndryshme, në varësi të pozicionit të tyre të ndërsjellë.



## Shembulli 3

Le të jetë  $A$  pikë e dhënë e çfarëdoshme. Tregoni se ekzistojnë pikat  $B$  dhe  $C$ , të tilla që pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  nuk janë kolineare.

**Zgjidhje:**

Pika  $B$  le të jetë e ndryshme nga  $A$ . Atëherë, sipas aksiomës  $A_2$ , nëpër pikat  $A$  dhe  $B$  kalon një dhe vetëm një drejtëz, të cilën e shënojmë me  $a$ . Sipas aksiomës  $A_1$ , ekzistojnë pika që nuk shtrihen në drejtëzën  $a$ , dhe le të jetë pika  $C$  një pikë e tillë (vizatimi 3). Pra, pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  nuk janë kolineare.



Vizatimi 3

## Detyra 1

Sa drejtëza përcaktojnë pikat  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  dhe  $E$ , nëse tre prej tyre janë kolineare?

## Detyra 2

Vërtetoni se, nëse në rrafsh janë dhënë  $n$  pika, atëherë numri i drejtëzave që përcaktojnë këto pika është, me së shumti,  $\binom{n}{2}$ . Si fitohet kjo vlerë?

Aksiomat e mëposhtme përcaktojnë pozitën e ndërsjellë të pikës dhe rrafshit.

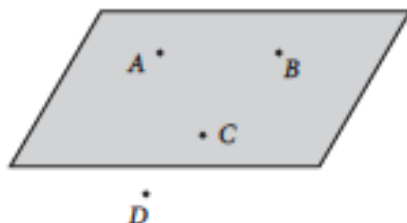
$A_3$ : Në çdo rrafsh shtrihen pafund shumë pika, ndërsa ekzistojnë pika që nuk i përkasin atij rrafshi.

$A_4$ : Nëpër tri pika jokolineare kalon një dhe vetëm një rrafsh.

Në vijim, do ta vërtetojmë saktësinë e teoremës pasuese.

$T_3$ : Ekzistojnë të paktën katër pika në hapësirë që nuk shtrihen në rrafshin e njëjtë.

**Vërtetimi:** Sipas teoremës  $T_1$ , në hapësirë ekzistojnë të paktën tri pika jokolineare. Le të jenë këto pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $C$ . Sipas aksiomës  $A_4$ , ato përcaktojnë një rrafsh të vetëm. Sipas aksiomës  $A_3$ , ekzistojnë pika që nuk shtrihen në këtë rrafsh. Le të jetë  $D$  një pikë e tillë. Atëherë pikat  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dhe  $D$  nuk shtrihen në rrafshin e njëjtë.



Vizatimi 4

**Mbani mend!**

*Pika komplanare* janë pikat që shtrihen në rrafshin e njëjtë.

**Shembulli 4**

Vërtetoni se nëpër drejtëzën  $a$  dhënë  $a$  dhe pikën  $A \notin a$  kalon saktësisht një rrafsh.

**Vërtetimi:** Në drejtëzën  $a$  ekzistojnë të paktën dy pika të ndryshme  $B$  dhe  $C$ . Pika  $A$  nuk shtrihet në drejtëzën  $a$ , prandaj pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  nuk janë kolineare. Sipas aksiomës  $A_4$  nëpër këto tri pika kalon një rrafsh i vetëm.

**Shembulli 5**

Sa rrafsh të ndryshme kalojnë nëpër katër pikat  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dhe  $D$ ?

**Zgjidhje:**

Përgjigja në këtë pyetje varet nga pozicioni i ndërsjellë mes pikave. Nga aksioma  $A_4$  del se nëpër tri pika jokolineare kalon një rrafsh. Do t'i shqyrtojmë gjitha rastet e mundshme të pozicionit të katër pikave. Të gjitha katër pikat nuk shtrihen në rrafshin e njëjtë (të paktën njëra pikë është "jashtë" rrafshit që përcaktojnë tri pikat tjera):

Atëherë nga katër pika mund të përzgjedhim 4 treshe të ndryshme. Secila treshe jep një rrafsh. Kështu, nëpër 4 pika mund të kalojnë 4 rrafsh.

Katër pikat shtrihen në rrafshin e njëjtë, por jo të gjitha janë kolineare:

Atëherë cilat do tri pika shtrihen në rrafsh të njëjtë, prandaj gjitha rrafshet e mundshme përputhen, d.m.th. nëpër këto katër pika kalon saktësisht një rrafsh.

Katër pikat janë kolineare (të gjitha shtrihen në një drejtëz):

Në këtë rast, nëpër një drejtëz mund të tërhiqen pafund shumë rrafsh. Pra, nëpër 4 pika kolineare kalojnë pafund shumë rrafsh.

Përfundimisht mund të themi se nëpër 4 pika mund të kalojë një, katër ose pafund shumë rrafsh, varësisht pozicionit të pikave.

**Detyra 3**

Sa rrafsh të ndryshme kalojnë nëpër pesë pika  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  dhe  $E$ ?

**Detyra për ushtrime!**

1. Sa drejtëza kalojnë nëpër një pikë të dhënë?
2. Sa drejtëza përcaktojnë tri pika të dhëna jokolineare?
3. Sa segmente përcaktojnë tri pika të ndryshme?
4. Vërtetoni se me pesë pika të ndryshme përcaktohen një, pesë, gjashtë, tetë ose dhjetë drejtëza?
5. Le të jetë  $A$  pikë e çfarëdoshme. Vërtetoni se ekzistojnë pikat  $B$ ,  $C$  dhe  $D$ , ashtu që pikat  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dhe  $D$  nuk janë komplanare.

## 5.8 POZITA E NDËRSJELLË E DREJTËZËS DHE RRAFSHIT, DY RRAFSHEVE DHE DY DREJTËZAVE

### Rikujtoni!

- Si mund të jetë pozicioni i ndërsjellë i pikës dhe drejtëzës?
- Çka paraqesin shënimet  $A \in a$  dhe  $A \in \Sigma$ , nëse  $A$  është pikë e dhënë,  $a$  drejtëz e dhënë, kurse  $\Sigma$  rrafsh i dhënë?
- Me pozitë, marrëdhënie, të ndërsjellë të dy formave nënkuptojmë numrin e pikave të përbashkëta të cilat i kanë këto dy forma.

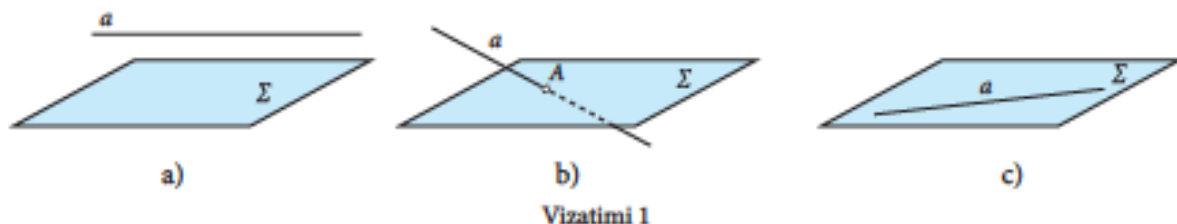
### Pozita e ndërsjellë e drejtëzës dhe rrafshit

Nëse çdo pikë e drejtëzës  $a$  shtrihet në rrafshin  $\Sigma$ , atëherë themi se drejtëza  $a$  shtrihet në rrafshin  $\Sigma$ , d.m.th. rrafshi  $\Sigma$  kalon nëpër drejtëzën  $a$ .

$A_3$ : Nëse dy pika të drejtëzës  $a$  shtrihen në rrafshin  $\Sigma$ , atëherë edhe drejtëza  $a$  shtrihet në këtë rrafsh.

Drejtëza dhe rrafshi mund të kenë një dhe vetëm një nga pozitat e ndërsjella në vijim:

- të mos kenë pika të përbashkëta, d.m.th.  $a \cap \Sigma = \emptyset$  (vizatimi 1, a));
- të kenë vetëm një pikë të përbashkët, d.m.th.  $a \cap \Sigma = \{A\}$  (vizatimi 1, b);
- secila pikë e drejtëzës  $a$  të shtrihet në rrafshin  $\Sigma$ , d.m.th.  $a \cap \Sigma = a$  (vizatimi 1, c).



### Mbani mend!

- Nëse drejtëza  $a$  dhe rrafshi  $\Sigma$  nuk kanë pika të përbashkëta, atëherë themi se ato janë paralele dhe shënojmë  $a \parallel \Sigma$ . Po ashtu, themi se drejtëza  $a$  dhe rrafshi  $\Sigma$  janë paralele edhe kur drejtëza  $a$  shtrihet në rrafshin  $\Sigma$ .
- Nëse drejtëza  $a$  dhe rrafshi  $\Sigma$  kanë një pikë të përbashkët  $A$ , atëherë themi se ato priten në pikën  $A$ , d.m.th. drejtëza  $a$  e depërton rrafshin  $\Sigma$  në pikën  $A$ .
- Nëse drejtëza  $a$  dhe rrafshi  $\Sigma$  kanë dy pika të përbashkëta, atëherë drejtëza shtrihet në këtë rrafsh.

Në vijim do të vërtetojmë disa teorema në lidhje me pozitën e ndërsjellë, reciproke, të drejtëzës dhe rrafshit.



$T_4$ : Në çdo rrafsh  $\Sigma$  shtrihet të paktën një drejtëz.

**Vërtetimi:** Sipas aksiomës  $A_1$ , rrjedh se në rrafshin  $\Sigma$  shtrihen të paktën dy pika. I shënojmë pikat me  $A$  dhe  $B$ , kurse sipas aksiomës  $A_2$ , nëpër pikat  $A$  dhe  $B$  kalon një drejtëz e vetme  $a$ . Pasi pikat  $A$  dhe  $B$  shtrihen në drejtëzën  $a$  dhe në rrafshin  $\Sigma$ , sipas aksiomës  $A_3$ , del se drejtëza  $a$  shtrihet në rrafshin  $\Sigma$ .

$T_5$ : Për çdo pikë  $A$  që nuk shtrihet në drejtëzën  $a$ , ekziston një dhe vetëm një rrafsh  $\Sigma$  që kalon nëpër pikën  $A$  dhe drejtëzën  $a$ .

**Vërtetimi:** Sipas aksiomës  $A_1$ , del se në drejtëzën  $a$  shtrihen të paktën dy pika, për shembull  $B$  dhe  $C$ . Nga fakti që  $A \notin a$ , del se pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  nuk janë kolineare, prandaj sipas aksiomës  $A_4$ , ato përcaktojnë një rrafsh të vetëm  $\Sigma$ . Pra, nëpër pikën  $A$  dhe drejtëzën  $a$  kalon saktësisht vetëm një rrafsh.

### Shembulli 1

Tregoni se në çdo rrafsh  $\Sigma$  shtrihen të paktën tre drejtëza të ndryshme.

**Zgjidhje:**

Sipas aksiomës  $A_1$ , çdo rrafsh  $\Sigma$  përmban pafund shumë pika. Nga këtu, mund të përzgjedhim tri pika të ndryshme jokolineare  $A$ ,  $B$ ,  $C \in \Sigma$ . Pasi janë jokolineare, ato nuk shtrihen në drejtëz të njëjtë. Pra, nëpër cilat do dy prej tyre kalon saktësisht një drejtëz (aksioma  $A_2$ ). Në këtë mënyrë fitojmë drejtëzat  $d_1 = AB$ ,  $d_2 = AC$  dhe  $d_3 = BC$ . Sipas aksiomës  $A_3$ , pasi secila nga këto drejtëza me rrafshin ka dy pika të përbashkëta, del se drejtëzat  $d_1$ ,  $d_2$  dhe  $d_3$  shtrihen në rrafshin  $\Sigma$ .

## Pozita e ndërsjellë e dy rrafsheve

Pozitën e ndërsjellë të dy rrafsheve do ta shqyrtojmë përmes teoremës vijuese:

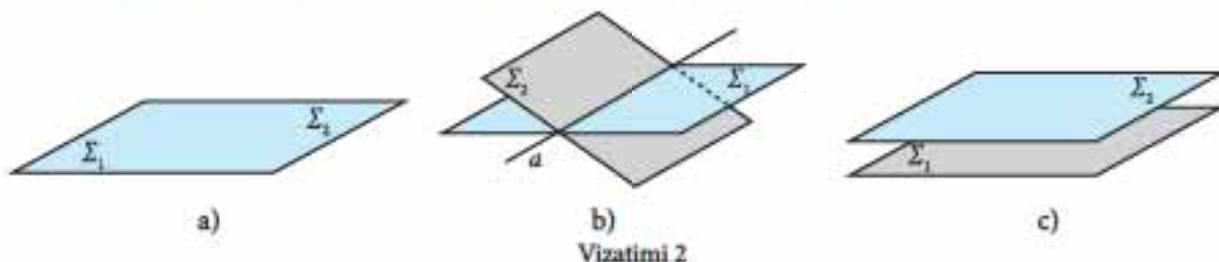
$T_6$ : Ekzistojnë të paktën dy rrafshe që kanë drejtëz të përbashkët.

**Vërtetimi:** Sipas teoremës  $T_3$ , në hapësirë ekzistojnë katër pika që nuk shtrihen në të njëjtin rrafsh, për shembull pikat  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dhe  $D$ . Sipas aksiomës  $A_4$ , me pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  është përcaktuar rrafshi  $\Sigma_1$ , kurse me pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $D$  rrafshi tjetër  $\Sigma_2$ . Pasi pikat  $A$  dhe  $B$  shtrihen në rrafshin  $\Sigma_1$ , del se drejtëza  $a = AB$  ka dy pika të përbashkëta me rrafshin  $\Sigma_1$ , kurse pasi pikat  $A$  dhe  $B$  shtrihen edhe në rrafshin  $\Sigma_2$ , del që kjo drejtëz ka dy pika të përbashkëta edhe me rrafshin  $\Sigma_2$ . Sipas aksiomës  $A_3$ , del që drejtëza  $a$  shtrihet në të dy rrafshet. Meqenëse  $\Sigma_1$  dhe  $\Sigma_2$  janë rrafshe të ndryshme, sipas aksiomës  $A_4$ , del se ata nuk mund të kenë pika tjera të përbashkëta përveç pikave që shtrihen në drejtëzën  $a$ . Në të kundërtën, rrafshet  $\Sigma_1$  dhe  $\Sigma_2$  do të ishin një rrafsh i vetëm. Prandaj, rrafshet  $\Sigma_1$  dhe  $\Sigma_2$  kanë drejtëz të përbashkët  $a$ , d.m.th.  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$ .

$A_6$ : Nëse dy rrafshet kanë një pikë të përbashkët, atëherë ato kanë të paktën edhe një pikë tjetër të përbashkët.

Nga këtu, dy rrafshet  $\Sigma_1$  dhe  $\Sigma_2$  mund:

- të përputhen, d.m.th.  $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$  (vizatimi 2, a))
- të kenë drejtëz të përbashkët, d.m.th.  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$  (vizatimi 2, b))
- të mos kenë pika të përbashkëta, d.m.th.  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$  (vizatimi 2, c))



### Mbani mend!

- Rrafshet  $\Sigma_1$  dhe  $\Sigma_2$  janë paralele nëse nuk kanë pikë të përbashkët. Shkruajmë  $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ .
- Rrafshet që priten kanë vetëm një drejtëz të përbashkët.
- Rrafshet  $\Sigma_1$  dhe  $\Sigma_2$  përputhen nëse kanë tri pika jokolineare të përbashkëta. Shkruajmë  $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ .

### Detyra 1

Dy rrafshet, a mund të kenë vetëm një pikë të përbashkët? Argumentoni përgjigjen!

### Shembulli 2

Nëse pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  shtrihen edhe në rrafshin  $\Sigma_1$  edhe në rrafshin  $\Sigma_2$ , atëherë nga kjo a rrjedh se këto dy rrafshet përputhen? Argumentoni përgjigjen!

**Zgjidhje:**

Nuk është e thënë që rrafshet të përputhen sepse në rast se pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  janë kolineare, rrafshet do të priten.

### Detyra 2

Çfarë pozite të ndërsjellë mund të kenë rrafshet e përcaktuara me pikat  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , përkatësisht  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ?

### Pozita e ndërsjellë e dy drejtëzave

Dy drejtëza  $a$  dhe  $b$  mund:

- të mos kenë asnjë pikë të përbashkët, d.m.th.  $a \cap b = \emptyset$ ;
- të kenë vetëm një pikë të përbashkët, d.m.th.  $a \cap b = \{A\}$ ;
- të kenë pafund shumë pika të përbashkëta, d.m.th.  $a \cap b = \{A, B, C, \dots\}$ .



Teoremat në vijim e përcaktojnë pozitën e ndërsjellë të dy drejtëzave:

**$T_1$ :** Nëse dy drejtëza kanë të paktën dy pika të përbashkëta, atëherë ato janë të barabarta si bashkësi pikash.

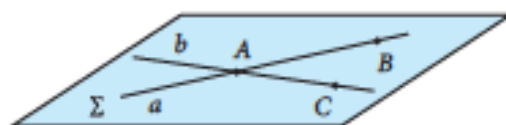
**Vërtetimi:** Nëse  $A$  dhe  $B$  janë dy pika të ndryshme që u takojnë drejtëzave  $a$  dhe  $b$ , përkatësisht, atëherë sipas aksiomës  $A_2$  ekziston një dhe vetëm një drejtëz e cila kalon nëpër to. Kjo drejtëz nuk mund të jetë e ndryshme as nga drejtëza  $a$  e as nga drejtëza  $b$ . Pra, drejtëzat  $a$  dhe  $b$  paraqesin bashkësinë e njëjtë të pikave.

**$T_2$ :** Dy drejtëza të ndryshme nuk mund të kenë më shumë se një pikë të përbashkët.

**Vërtetimi:** Nëse drejtëzat  $a$  dhe  $b$  do të kishin më shumë se një pikë të përbashkët, atëherë sipas  $T_1$  ato do të përputheshin. Pra, prerja e dy drejtëzave të ndryshme  $a$  dhe  $b$  mund të jetë bashkësi e zbrazët, ose të përmbajë vetëm një pikë. Në rastin e dytë, themi se drejtëzat  $a$  dhe  $b$  priten dhe shkruajmë  $a \cap b = \{A\}$ .

**$T_3$ :** Dy drejtëza që priten përcaktojnë një dhe vetëm një rrafsh.

**Vërtetimi:** Drejtëzat  $a$  dhe  $b$  le të priten në pikën  $A$ . Sipas aksiomës  $A_1$ , në drejtëzën  $a$  përveç pikës  $A$ , ekziston edhe pika  $B$ , kurse në drejtëzën  $b$ , përveç pikës  $A$  ekziston edhe pika  $C$ . Pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  nuk janë kolineare, prandaj sipas aksiomës  $A_4$ , ato përcaktojnë rrafshin e vetëm  $\Sigma$  (vizatimi 3). Nëse do të ekzistonte një rrafsh tjetër  $\Sigma_1$  që kalon nëpër pikat  $A$ ,  $B$  dhe  $C$ , atëherë sipas aksiomës  $A_4$ , rrafshet  $\Sigma_1$  dhe  $\Sigma$  janë po e njëjta bashkësi pikash dhe përputhen.



Vizatimi 3

### Mbani mend!

Dy drejtëza që priten gjithmonë shtrihen në të njëjtin rrafsh.

### Shembulli 3

Tregoni se me një drejtëz dhe dy pika, që nuk shtrihen në këtë drejtëz, janë përcaktuar një ose dy rrafsh.

**Zgjidhje:**

Nëse drejtëza e përcaktuar me dy pikat e dhëna e pret drejtëzën e dhënë, atëherë sipas teoremës  $T_2$ , ato dy drejtëza përcaktojnë një rrafsh. Në rastin e kundërt, sipas teoremës  $T_3$ , drejtëza e dhënë dhe çdo pikë përcaktojnë nga një rrafsh, përkatësisht, ose gjithsej dy rrafsh.

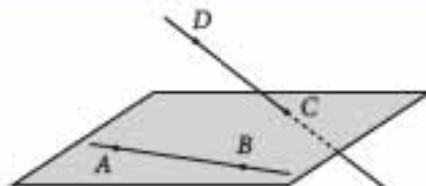
### Detyra 3

Dy drejtëza  $a$  dhe  $b$  priten në pikën  $A$ . Drejtëza  $a$  shtrihet në rrafshin  $\Sigma_1$ , kurse drejtëza  $b$  në rrafshin  $\Sigma_2$ . A thua rrafshet  $\Sigma_1$  dhe  $\Sigma_2$  përputhen?



$T_{10}$ : Ekzistojnë drejtëza që nuk shtrihen në të njëjtin rrafsh.

**Vërtetimi:** Sipas teoremës  $T_3$ , ekzistojnë të paktën katër pika  $A, B, C$  dhe  $D$  që nuk shtrihen në rrafsh të njëjtë. Drejtëzat  $AB$  dhe  $CD$  me siguri nuk shtrihen në rrafshin e njëjtë, sepse, nëse, do të ekzistonte rrafshi që kalon nëpër to, atëherë të katër pikat  $A, B, C$  dhe  $D$  do të shtriheshin në atë rrafsh (vizatimi 4).



Vizatimi 4

### Mbani mend!

- Dy drejtëza që nuk priten ose janë paralele ose nuk shtrihen në të njëjtin rrafsh.
- Dy drejtëza që nuk shtrihen në rrafshin e njëjtë quhen **drejtëza të këthëta**.
- Dy drejtëza  $a$  dhe  $b$  që shtrihen në të njëjtin rrafsh dhe nuk priten ose nuk përputhen quhen **drejtëza paralele** dhe shkruajmë  $a \parallel b$ .

#### Detyra 4

Janë dhënë rrafshi  $\Sigma$  dhe drejtëzat  $a$  dhe  $b$ . Nëse drejtëzat  $a$  dhe  $b$  priten në pikën  $A$  dhe nëse drejtëza  $a$  shtrihet në rrafshin  $\Sigma$ , atëherë a thua drejtëza  $b$  mund të shtrihet në rrafshin  $\Sigma$ ?

#### Detyra 5

Le të jenë  $A$  dhe  $B$  dy pika të ndryshme të rrafshit  $\Sigma$ . Vërtetoni se ekzistojnë pafund shumë drejtëza që kalojnë nëpër pikën  $A$ , shtrihen në rrafshin  $\Sigma$  dhe janë të ndryshme nga drejtëza  $AB$ .

#### Detyra 6

Drejtëza  $a$  le të mos shtrihet në rrafshin  $\Sigma$  dhe  $a \cap \Sigma = \emptyset$ . Vërtetoni se drejtëza  $a$  është paralele me rrafshin  $\Sigma$ , dhe tregoni se ekziston rrafshi  $\Pi$  i cili e përmban drejtëzën  $a$  dhe  $\Pi \parallel \Sigma$ .

### Detyra për ushtrime!

1. Vërtetoni se në çdo rrafsh  $\Sigma$  shtrihet të paktën një drejtëz  $a$  dhe të paktën një pikë  $A$ , ashtu që  $A \notin a$ .
2. Tregoni se për çdo rrafsh  $\Sigma$  ekziston të paktën një drejtëz e cila e depërton rrafshin  $\Sigma$ .
3. Vërtetoni se nëpër pikën  $A$  që shtrihet në rrafshin  $\Sigma$  kalojnë pafund shumë drejtëza që shtrihen në rrafshin  $\Sigma$ .
4. Le të jenë  $\Sigma_1$  dhe  $\Sigma_2$  dy rrafsh të ndryshme dhe le të jetë  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ . Vërtetoni se ekziston të paktën një drejtëz e cila i depërton të dy rrafshet.
5. Jepen drejtëza  $a$  dhe rrafshi  $\Sigma$ . Caktoni nëse është e mundur që  $a \cap \Sigma = \Sigma$ .
6. Drejtëza  $a$  e depërton rrafshin  $\Sigma$ . Në rrafshin  $\Sigma$  a shtrihet drejtëza që është paralele me drejtëzën  $a$ ?
7. Tregoni se dy drejtëza të ndryshme paralele përcaktojnë një rrafsh të vetëm.
8. Çfarë pozite të ndërsjellë mund të kenë rrafshet e përcaktuar me pikat  $ABM$  dhe  $ADN$ ?
9. Vërtetoni se nëpër drejtëzën e dhënë  $a$  kalojnë pafund shumë rrafshet.

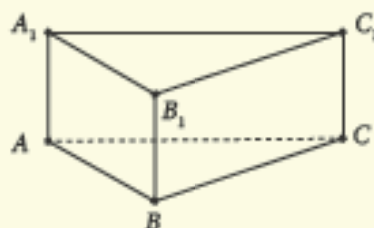
## 5.9 PRIZMI. PRERJET E PRIZMIT ME RRAFSHIN

Studimi i formave gjeometrike tredimensionale dhe prerjeve të tyre me rrafshin ka rëndësi të veçantë dhe zbatim praktik. Prerja e një trupi hapësinor (si prizmi, piramida, cilindri, koni e të ngjashëm) me rrafshin paraqet figurë rrafshore, plane, që fitohet si pjesë e përbashkët e trupit dhe rrafshit. Analiza e këtyre prerjeve na mundëson për të kuptuar më mirë strukturën e brendshme, formën dhe vetitë e trupit hapësinor.

Njohja e prerjeve me rrafshin ka zbatim të rëndësishëm praktik në arkitekturë, ndërtimtari, makineri dhe vizatim teknik, ku përmes prerjeve tregohen pjesë të fshehura të objekteve, analizohen konstruksionet dhe përpilohen paraqitje të sakta teknike.

### Rikujtoni!

- Në vizatimin 1 është paraqitur prizmi i drejtë trekëndor.
- Si është pozicioni i ndërsjellë i rrafsheve në të cilët shtrihen bazat e prizmit?
- Cilët janë tehet e bazës, e cilët janë tehet anësorë të prizmit?
- Çka paraqesin faqet (muret) anësore të prizmit?



Vizatimi 1

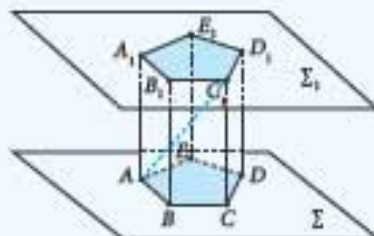
### Mbani mend!

- Format 3D të kufizuara me sipërfaqet që janë të ndërtuara vetëm me shumëkëndësja quhen *forma 3D tehere ose poliedra*.
- Shumëkëndëshat që e ndërtjnë sipërfaqen e poliedrit quhen *faqe*, brinjët e tyre quhen *tehe (brinjë)*, kurse kulmet e tyre quhen *kulme* të poliedrit.

Në çdo kulm të poliedrit takohen të paktën tre tehe të tij, kurse çdo teh është brinjë e dy dhe vetëm dy faqeve të tij.

## Mbani mend!

- **Prizmi** është poliedri i kufizuar me dy shumëkëndësja kongruent që shtrihen në dy rrafshet paralele, kurse faqet e tjera janë paralelograme që kanë nga një brinjë të përbashkët me secilin prej dy shumëkëndësive (vizatimi 2).
- Dy faqet që shtrihen në rrafshet paralele quhen **baza**, kurse faqet e tjera janë **faqe anësore**. Gjitha faqet anësore e përbëjnë **sipërfaqen e anshme** (sipërfaqen anësore, mbështjellësin) të prizmit. Brinjët e bazave quhen **tehet të bazave**, kurse të gjitha tehet e tjera janë **tehet anësore** të prizmit.
- Distanca ndërmjet bazave quhet **lartësi** e prizmit.
- Segmenti pikat e skajshme të të cilit janë dy kulme të prizmit që nuk shtrihen në faqen e njëjtë quhet **diagonale hapësinore** ose vetëm **diagonale** e prizmit.
- Varësisht nga numri i brinjëve (këndëve) të bazës së prizmit, kemi prizëm trekëndor, katërkëndor, pesëkëndor, e me radhë.



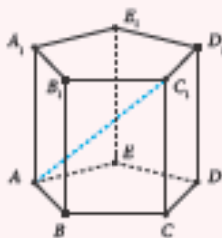
Vizatimi 2

## Shembulli 1

Për prizmin pesëkëndor në vizatimin 3 shkruani: bazat, faqet anësore, tehet bazike, tehet anësore, diagonalet hapësinore.

**Zgjidhje:**

- Baza të prizmit janë pesëkëndëshat  $ABCDE$  dhe  $A_1B_1C_1D_1E_1$  që shtrihen në dy rrafshet paralele  $\Sigma$  dhe  $\Sigma_1$ .
- Faqet e tjera të prizmit janë faqet anësore:  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_1$ ,  $CDD_1C_1$ ,  $DEE_1D_1$ ,  $EAA_1E_1$ .
- Tehet e bazave janë:  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$ ,  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1D_1$ ,  $D_1E_1$ ,  $E_1A_1$ .
- Tehet anësore janë:  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$ ,  $EE_1$ .
- Diagonalet hapësinore të prizmit janë:  $AC_1$ ,  $AD_1$ ,  $BD_1$ ,  $BE_1$ ,  $CE_1$ ,  $CA_1$ ,  $DA_1$ ,  $DB_1$ ,  $EB_1$ ,  $EC_1$ .



Vizatimi 3



**Mbani mend!**

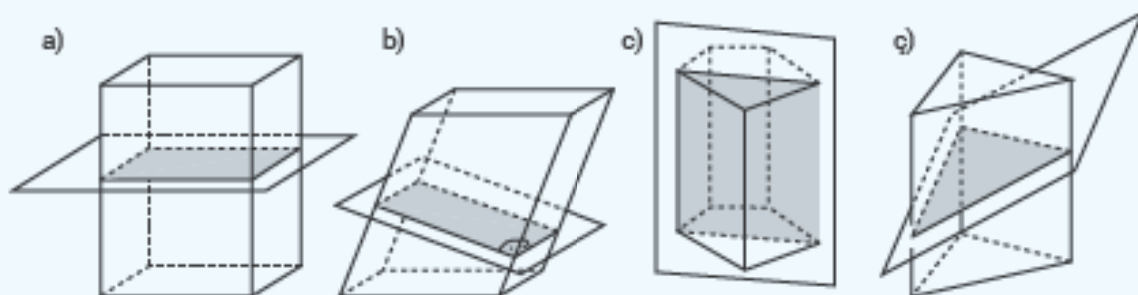
- Nëse tehet anësore të një prizmi janë pingul, normal, në bazat e tij, atëherë ky *prizëm quhet prizëm i drejtë*, kurse në rastin e kundërt quhet *prizëm i pjerrët*.
- Prizmi i drejtë bazat e të cilit janë shumëkëndështa të rregullt quhet *prizëm i rregullt*.

**Detyra 1**

- Çfarë lloj katërkëndëshash janë faqet anësore të prizmit të drejtë?
- Si janë mes veti faqet anësore të prizmit të rregullt?
- Nëse një nga faqet anësore (të mbështjellësit) të prizmit është drejtkëndësh, a janë edhe faqet e tjera anësore të tij po ashtu drejtkëndështa?

**Mbani mend!**

- Nëse pjesa e përbashkët e një forme 3D dhe e një rrafshi përmban edhe pika të brendshme të trupit, atëherë ajo pjesë quhet *prerje e formës 3D me rrafshin*.
- Në varësi të pozicionit të rrafshit  $\Sigma$  në lidhje me prizmin, dallojmë llojet e prerjeve në vijim:
  - prerje paralele*, nëse  $\Sigma$  është paralel me bazat e prizmit (vizatimi 4, a));
  - prerje pingule*, nëse  $\Sigma$  është pingule, normale, me tehet anësore të prizmit (vizatimi 4, b));
  - prerje diagonale*, nëse  $\Sigma$  kalon nëpër dy tehet anësore jofqinje të prizmit (vizatimi 4, c));
  - prerje e pjerrët*, nëse  $\Sigma$  i pret gjitha tehet anësore të prizmit dhe nuk është paralel me bazat (vizatimi 4, d)).



Vizatimi 4

**Detyra 2**

- Çfarë shumëkëndëshi është prerja paralele e një prizmi gjashtëkëndor? Çka mund të thuhet për pozitën e ndërsjellë të kësaj prerjeje me bazat?
- Çfarë shumëkëndëshi është prerja diagonale e një prizmi gjashtëkëndor të drejtë? Çfarë shumëkëndëshi është kjo prerje me prizmin  $n$ -këndor të drejtë?
- Çfarë shumëkëndëshi është prerja diagonale e prizmit të çfarëdoshëm të pjerrët?
- Çfarë shumëkëndëshi është prerja pingule, normale, e prizmit gjashtëkëndor të drejtë?

## Shembulli 2

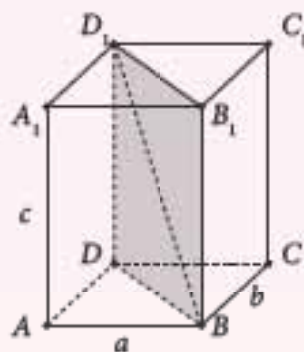
Gjeni gjatësinë e diagonales së kuadrit me dimensione  $a = 2$  cm,  $b = 3$  cm,  $c = 6$  cm. Zgjidhja të provohet me softuerin kompjuterik GeoGebra.

### Zgjidhje:

Të gjitha katër diagonalet e kuadrit janë të barabarta mes veti, priten në një pikë dhe ajo pikë i përgjysmon ato.

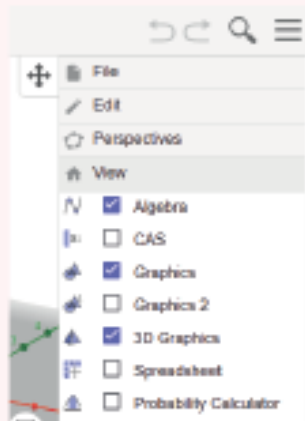
Në vizatimin 5 është paraqitur diagonalja  $BD_1$ . Ajo është diagonalja e prerjes diagonale  $BB_1D_1D$ , prandaj sipas teoremës së Pitagorës nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle BDD_1$ , kemi  $\overline{BD_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DD_1}^2$ . Më tej, nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle ABD$  kemi  $\overline{BD}^2 = a^2 + b^2$  dhe nga fakti se  $\overline{DD_1}^2 = c^2$  duke zëvendësuar  $\overline{BD_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DD_1}^2$ , fitojmë  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .

Pra,  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$  cm.

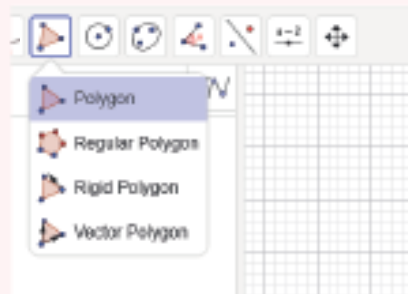


Vizatimi 5

Në fillim, nga menyja kryesore (tre vizat djathtas, lart) përzgjedhim "View", e më pas e aktivizojmë "3D Graphics" (Figura 1, a)). Më tej, përzgjedhim fushën 2D, që të bëhen aktive funksionet për 2D dhe përzgjedhim "Polygon" (Figura 1, b)).



a)



b)

Figura 1

Përzgjedhim katër pika që të fitohet katërkëndëshi me brinjë 3 cm dhe 2 cm (Figura 2).

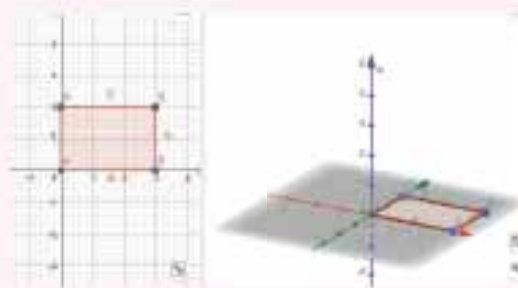


Figura 2

Më pas, e përzgjedhim dritaren 3D që të bëhen aktive funksionet 3D dhe përzgjedhim "Extrude to Prism" (Figura 3, a). Në dritaren 3D shtypim në drejtkëndëshin (bazën), që mundëson hapjen e dritares për të futur lartësinë e prizmit (Figura 3, b).



Figura 3

Në fund, që të matim gjatësinë e diagonales, përzgjedhim "Distance or Length" (Figura 4, a)), dhe fillimisht e shënojmë kulmin  $A$  e më pas kulmin  $K$ , kështu fitojmë se gjatësia e diagonales së prizmit është  $AK = 7$  cm. (Figura 4, b)).



Figura 4

### Mbani mend!

Gjatësia e diagonales së kuadrit me brinjë  $a$ ,  $b$  dhe  $c$  llogaritet me formulën  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

### Detyra 3

Caktoni gjatësinë e diagonales së kubit me teh (brinjë) të bazës 7 cm. Rezultati të kontrollohet me GeoGebra.



### Shembulli 3

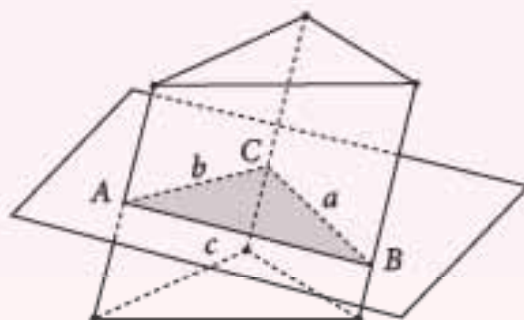
Llogaritni syprinën e një prerjeje pingule, normale, të piramidës trekëndore të pjerrtë, nëse largësitë mes teheve anësore të prizmit janë 13 cm, 14 cm dhe 15 cm.

**Zgjidhje:**

Të prizmi trekëndor i pjerrtë, prerja normale është trekëndëshi  $\triangle ABC$  brinjët e të cilit janë të barabarta me largësitë mes teheve anësore (vizatimi 6). Pasi trekëndëshi është brinjëndryshëm, syprinën e tij do ta llogaritim me ndihmën e formulës së Heronit.

Fillimisht e llogaritim  $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$ , që më pas e zëvendësojmë në formulën për syprinën dhe fitojmë

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2.$$



Vizatimi 6

### Detyra 4

Diagonalja e prizmit të rregullt katërkëndor është 25 cm, kurse diagonalja e faqes anësore është 20 cm. Gjeni lartësinë e prizmit.

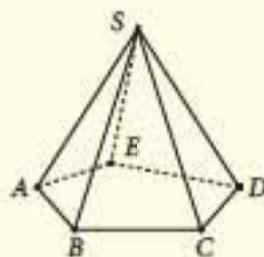
### Detyra për ushtrime!

1. Sa kulme, faqe, tehe të bazës dhe tehe anësore ka:  
a) Prizmi trekëndor;    b) prizmi katërkëndor;    c) prizmi  $n$ -këndor.
2. Të caktohet gjatësia e diagonales së paralelepipedit kënddrejtë me dimensione 4 cm, 6 cm, dhe 12 cm. Rezultati të provohet me GeoGebra.
3. Prizmi i rregullt katërkëndor ka lartësi 12 cm, kurse diagonalja e faqes anësore është 20 cm. Të përcaktohet gjatësia e tehut të bazës.
4. Diagonalja e prizmit të rregullt katërkëndor është  $\sqrt{194}$  cm, kurse diagonalja e faqes anësore është 13 cm. Të përcaktohet lartësia e prizmit.
5. Baza e prizmit të pjerrët është romb me diagonale 24 cm dhe 10 cm, përkatësisht. Të përcaktohen perimetri dhe syprina e prerjes paralele të prizmit.

## 5.10 PIRAMIDA. PRERJET E PIRAMIDËS ME RRAFSHIN

### Rikujtoni!

Çfarë forme 2D është baza, e çfarë formash 2D janë faqet anësore të piramidës pesëkëndore të paraqitur në vizatimin 1?

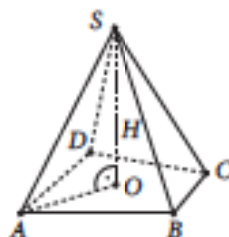


Vizatimi 1

### Mbani mend!

- Piramida është poliedër, i kufizuar me një shumëkëndësh konveks, kurse faqet e tjera janë trekëndësha që kanë një kulm të përbashkët.
- Shumëkëndëshi konveks quhet **bazë**, trekëndëshat quhen **faqe anësore**, kurse kulmi i përbashkët i tyre quhet **kulm** i piramidës.
- Nëse nga kulmi i piramidës tërhiqet normalja në rrafshin e bazës së saj, atëherë gjatësia e segmentit që lidh kulmin e piramidës dhe pikën mbështetëse të normales quhet lartësi e piramidës dhe e shënojmë me  $H$ .

Në vizatimin 2 është dhënë piramida  $SABCD$  me bazë  $ABCD$  dhe kulmin  $S$ . Lartësia e piramidës është  $H = \overline{SO}$ .



Vizatimi 2

### Mbani mend!

- Sipas llojit të bazës, piramida mund të jetë: trekëndore, katërkëndore, pesëkëndore,....
- Piramida trekëndore quhet edhe **tetraedër** dhe, në të, për bazë mund të marrim cilëndo faqe të saj. Tetraedrin faqet e të cilit janë trekëndësha barabrinjës e quajmë **tetraedër të rregullt**.

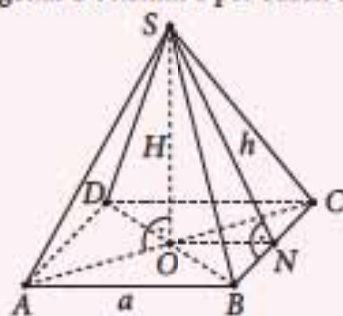
**Mbani mend!**

Piramidën, baza e së cilës është shumëkëndësh i rregullt, kurse tehet anësorë janë të barabartë mes veti, e quajmë *piramidë të rregullt*.

**Shembulli 1**

Në vizatimin 3 është paraqitur piramida e rregullt katërkëndore  $SABCD$ .

- Çfarë trekëndëshash janë faqet anësore dhe si janë mes veti ato?
- Çka paraqet projeksioni ortogonal  $O$  i kulmit  $S$  për bazën e piramidës së rregullt?



Vizatimi 3

**Zgjidhje:**

- Faqet anësore janë trekëndësha barakrahës (dybrinjnjëshëm) të cilët janë kongruent mes veti.
- Projeksioni ortogonal i kulmit gjendet në prerjen e diagonaleve të bazës, përkatësisht paraqet qendrën e vijës rrethore të brenda dhe të jashtëshkruar kuadratikit  $ABCD$ .

**Mbani mend!**

Lartësia e faqes anësore të piramidës së rregullt e lëshuar nga kulmi i saj quhet *apotemë* e piramidës.

Nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle SON$ , i dhënë në vizatimin 3, mund të gjendet lidhja mes lartësisë  $H$  dhe apotemës  $h$  si dhe tehut të bazës  $a$ . Me të vërtetë, katetet e trekëndëshit  $\triangle SON$  kanë gjatësitë  $\overline{ON} = \frac{a}{2}$  dhe  $\overline{SO} = H$ , kurse hipotenuza është  $\overline{SN} = h$ . Duke shfrytëzuar teoremën e Pitagorës gjejmë se  $h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$ .

**Mbani mend!**

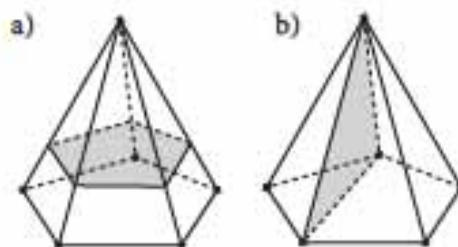
Lidhja mes lartësisë  $H$ , apotemës  $h$  dhe tehut  $a$  të bazës, në piramidën e rregullt katërkëndore, është

$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2.$$



Në varësi të pozicionit të rrafshit  $\Sigma$  në raport me piramidën, i dallojmë këto lloje të prerjeve:

- **prerjet paralele**, nëse rrafshi  $\Sigma$  është paralel me bazën e piramidës (vizatimi 4, a)).
- **prerjet diagonale**, nëse rrafshi  $\Sigma$  kalon nëpër dy tehe anësore jofqinje të piramidës (vizatimi 4, b))



Vizatimi 4

Për prerjet paralele të piramidës vlen teorema në vijim.

- 1) Çdo prerje paralele i ndan tehet anësore dhe lartësinë e piramidës në segmente proporcionale.
- 2) Çdo prerje paralele dhe baza e piramidës janë shumëkëndësja të ngjashëm.
- 3) Syprina e prerjes së dhënë paralele dhe syprina e bazës sillen si kuadratikët e largësive përkatëse të tyre nga kulmi i piramidës.

## Shembulli 2

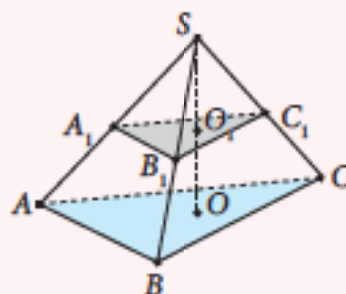
Lartësia e një piramide trekëndore është 20 cm, kurse syprina e bazës së saj është  $600 \text{ cm}^2$ . Sa është syprina e prerjes paralele që gjendet në largësi 4 cm nga baza.

**Zgjidhje:**

Le ta shënojmë me  $H = \overline{SO}$  lartësinë e piramidës, me  $H_1 = \overline{SO_1}$  le ta shënojmë largësinë e prerjes paralele deri te kulmi i piramidës, syprinën e bazës me  $Q$ , kurse syprinën e prerjes paralele me  $Q_1$  (shihni vizatimin 5). Sipas kushteve të detyrës,  $H = 20 \text{ cm}$ ,  $Q = 600 \text{ cm}^2$ , kurse largësia mes bazës dhe prerjes paralele të piramidës është  $H - H_1 = 4 \text{ cm}$ . Nga këtu, për  $H_1$  fitojmë  $H_1 = H - 4 = 20 - 4 = 16 \text{ cm}$ . Nga pohimi 3) i teoremës së sipërpërmendur, kemi

$$Q_1 : Q = H_1^2 : H^2.$$

Duke zëvendësuar vlerat për  $Q$ ,  $H$  dhe  $H_1$  në ekuacionin e fundit, fitojmë  $Q_1 : 600 = 16^2 : 20^2$  prej ku rrjedh se  $400 \cdot Q_1 = 256 \cdot 600$ , d.m.th.  $Q_1 = \frac{256 \cdot 600}{400} = 384 \text{ cm}^2$ .



Vizatimi 5

## Shembulli 3

Llogaritni syprinën e prerjes diagonale si dhe apotemën e piramidës së rregullt katërkëndore me teh të bazës me gjatësi 18 cm dhe teh anësor me gjatësi 15 cm.

**Zgjidhje:**

Le të shënojmë me:  $Q$  – syprinën e prerjes diagonale,  $a$  – gjatësinë e tehut të bazës, kurse me  $s$  – gjatësinë e tehut anësor. Nga kushtet e detyrës,  $a = 18$  cm,  $s = 15$  cm.

Nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle SNC$ , sipas teoremës së Pitagorës, për apotemën fitojmë:

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

Në mënyrë të ngjashme, nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle SON$ , kemi:

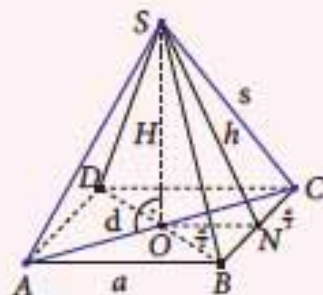
$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{144 - 81} = \sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = 3\sqrt{7} \text{ cm.}$$

Prerja diagonale është trekëndëshi  $\triangle SAC$  syprinën e të cilit e llogaritim me formulën  $Q = \frac{d \cdot H}{2}$ , ku  $d$  është gjatësia e diagonales së bazës. Gjatësinë  $d$  do ta përcaktojmë nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle ABC$ . Kemi,

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2 \cdot a^2} = \sqrt{2 \cdot 18^2} = \sqrt{2 \cdot 324} = 18\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Duke zëvendësuar vlerën e fundit në formulën për syprinën e prerjes diagonale, fitojmë

$$Q = \frac{18\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{7}}{2} = \frac{54\sqrt{14}}{2} = 27\sqrt{14} \text{ cm}^2.$$



## Detyra 1

Lartësia e një piramide trekëndore është 15 cm, kurse syprina e bazës së saj është  $450 \text{ cm}^2$ . Sa është syprina e prerjes paralele që gjendet në largësi 5 cm nga baza.

## Detyra për ushtrime!

1. Jepet piramida e rregullt katërkëndore me teh të bazës 20 cm dhe syprinë të prerjes diagonale  $200 \text{ cm}^2$ . Të caktohet lartësia e piramidës.
2. Syprina e bazës së një piramide me lartësi 24 cm është  $800 \text{ cm}^2$ . Në cilën largësi nga baza gjendet prerja paralele që ka syprinë  $200 \text{ cm}^2$ .
3. Të llogaritet apotema e piramidës së rregullt katërkëndore me lartësi 12 cm dhe teh të bazës me gjatësi 10 cm.
4. Të llogaritet tehu i bazës i piramidës së rregullt katërkëndore me lartësi 15 cm dhe apotemë 17 cm.

## 5.11 CILINDRI. PRERJET E CILINDRIT ME RRAFSHIN

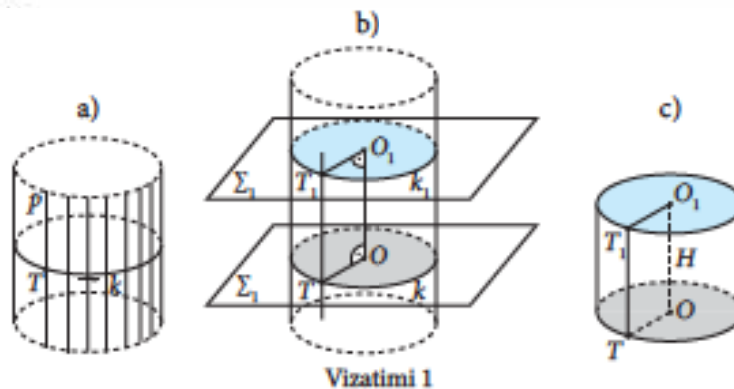
### Rikujtoni!

- Numëroni disa objekte që kanë formë cilindri.
- Çfarë forme 2D mund të fitohet gjatë prerjes së cilindrit me rrafshin?

Le të jenë dhënë vija rrethore  $k$  dhe pika e çfarëdoshme  $P$  e vijës rrethore. Nëpër pikën  $P$  le të jetë tërhequr drejtëza  $d$  normale në rrafshin në të cilin shtrihet vija rrethore dhe le të imagjinojmë se kjo drejtëz lëviz përgjatë vijës rrethore duke qëndruar pingul, normal, me rrafshin në të cilin shtrihet ajo sikurse shihet në vizatimin 1, a).

Në këtë mënyrë drejtëza lëvizëse  $d$  përshkruan një sipërfaqe të lakuar që e quajmë **sipërfaqe cilindrike**. Drejtëza lëvizëse  $d$  quhet **gjeneratrisë** (përfutuese), kurse vija rrethore nëpër të cilën lëviz drejtëza quhet **direktrisë** (drejtuese) e sipërfaqes cilindrike.

Nëse e presim sipërfaqen cilindrike me dy rrafsh  $\Sigma$  dhe  $\Sigma_1$  të cilët janë paralel me rrafshin e vijës rrethore (vizatimi 1, b) fitohen rrathë me qendër në  $O$  dhe  $O_1$ . Këto rrathë bashkë me pjesën e hapësirës së sipërfaqes cilindrike ndërmjet dy rrafshve formojnë një formë 3D që e quajmë **cilindër rrethor të drejtë** ose vetëm **cilindër** (vizatimi 1, c)).



Elemente të cilindrit janë:

**Bazat** – dy rrathët.

**Sipërfaqja anësore** ose **e anshme** – pjesa e sipërfaqes cilindrike e cila gjendet mes bazave.

**Boshti** – drejtëza që kalon nëpër qendrat e dy bazave  $O$  dhe  $O_1$ .

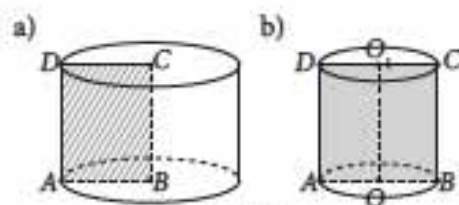
**Lartësia** – largësia mes bazave, e shënojmë me  $H$ .

**Rrezet e bazave** – segmentet  $OT$  dhe  $O_1T_1$ , të cilat kanë gjatësi të barabarta.

**Gjeneratrisa** ose **përfutuesja** – segmenti  $TT_1$  që e përfiton sipërfaqen anësore (mbështjellësin) të cilindrit.

Cilindri mund të fitohet me rrotullimin e drejtkëndëshit rreth njëres prej brinjëve të tij ose rreth njërit prej boshteve të simetrisë dhe, prandaj, cilindri është **formë 3D rrotulluese**. Në vizatimin 2, a), cilindri është fituar me rrotullimin e drejtkëndëshit  $ABCD$  rreth brinjës  $BC$ , kurse cilindri në vizatimin 2, b) është fituar me rrotullimin e drejtkëndëshit  $ABCD$  rreth boshtit të tij  $OO_1$ .





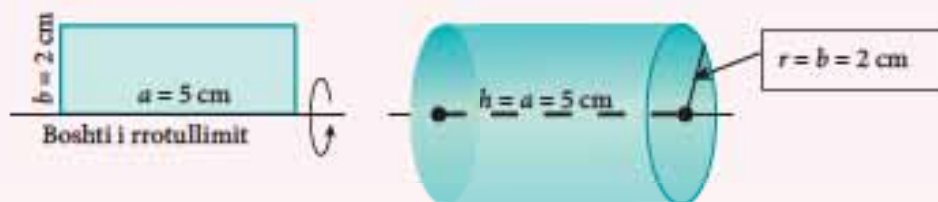
Vizatimi 2

### Shembulli 1

Drejtëndëshi me brinjët  $a = 5$  cm dhe  $b = 2$  cm rrotullohet rreth brinjës  $a$ . Cila formë 3D fitohet me këtë rrotullim?

**Zgjidhje:**

Me rrotullimin e drejtëndëshit rreth njëres brinjë, fitohet cilindër (vizatimi 3). Drejtëndëshi rrotullohet rreth brinjës  $a$ , prandaj nga vizatimi 3 mund të vërehet se bazat e cilindrit kanë rreze  $r = b = 2$  cm, kurse lartësia e cilindrit është  $h = a = 5$  cm.



Vizatimi 3

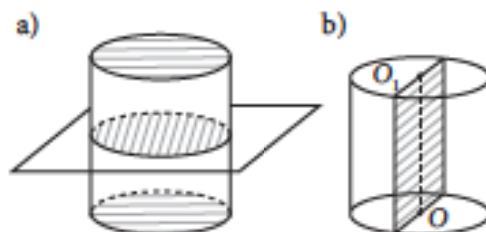
### Detyra 1

Sa është rrezja e bazës, e sa lartësia e cilindrit që fitohet, nëse drejtëndëshi me brinjë  $a = 3$  dhe  $b = 5$  rrotullohet rreth:

- brinjës  $a$ ;
- brinjës  $b$ ;
- boshtit që është normal në brinjën dhe është simetrale e saj.

Prerja e cilindrit me rrafshin mund të jetë:

- prerje paralele** – nëse rrafshi është paralel me bazat (vizatimi 4, a)),
- prerje boshtore** – nëse rrafshi kalon nëpër boshtin e cilindrit (vizatimi 4, b)).



Vizatimi 4

**Mbani mend!**

- Çdo prerje paralele e cilindrit me rrafshin paraqet rreth me rreze të barabartë me rrezen e bazës së cilindrit.
- Çdo prerje boshtore e cilindrit me rrafshin paraqet drejtkëndësh brinjët e të cilit janë të barabarta me diametrin e bazës dhe lartësinë e cilindrit, përkatësisht.

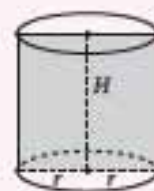
**Shembulli 2**

Jepet cilindri me lartësi 6 cm dhe rreze të bazës 5 cm. Caktoni syprinën e prerjes boshtore të cilindrit.

**Zgjidhje:**

Prerja boshtore e cilindrit është drejtkëndësh brinjët e të cilit janë diametri  $d = 2 \cdot r = 2 \cdot 5 = 10$  cm dhe lartësia  $H = 6$  cm. Nga këtu për syprinën  $Q$  të prerjes boshtore kemi:

$$Q = d \cdot H = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}^2.$$



Vizatimi 5

**Detyra 2**

Caktoni rrezen dhe lartësinë e cilindrit, nëse prerja e tij boshtore është kuadratik me syprinë  $64 \text{ cm}^2$ .

**Mbani mend!**

Cilindri barabrinjës është cilindri, prerja boshtore e të cilit është katror, përkatësisht cilindri, diametri i bazës së të cilit është i barabartë me lartësinë e tij.

**Shembulli 3**

Syprina e prerjes boshtore e një cilindri barabrinjës është  $16 \text{ cm}^2$ . Caktoni lartësinë dhe rrezen e cilindrit.

**Zgjidhje:**

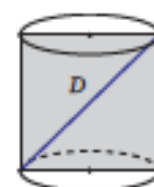
Nga kushti që cilindri është barabrinjës rrjedh se prerja boshtore e tij është kuadratik, d.m.th.  $2r = H$ . Më tej, syprina e prerjes boshtore mund të shprehet si  $S = H^2$ . Nëse zëvendësojmë  $S = 16 \text{ cm}^2$ , fitojmë

$H^2 = 16$ . Pra,  $H = 4$  cm. Nga ana tjetër, nga barazimi  $2r = H$  mund të shprehet rrezja si  $r = \frac{H}{2}$ , prej ku

kemi se  $r = \frac{H}{2} = \frac{4}{2} = 2$  cm.

**Detyra 3**

Të përcaktohet gjatësia  $D$  e diagonales së prerjes boshtore të cilindrit me rreze 9 cm dhe lartësi 24 cm (vizatimi 6).



Vizatimi 6

## Shembulli 4

Lartësia e një cilindri është 7 cm, kurse rrezja e bazës është 13 cm. Cilindri është prerë me rrafsh paralel me boshtin e cilindrit, i cili ndodhet në largësi 5 cm nga boshti. Gjeni syprinën e prerjes së fituar.

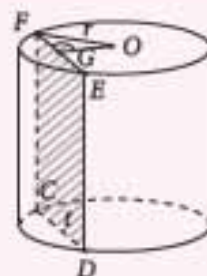
**Zgjidhje:**

Në vizatimin 7 është paraqitur prerja e cilindrit me rrafshin. Prerja është drejtkëndëshi CDEF me brinjë  $DE = H = 7$  cm dhe  $t = \overline{CD}$ .

Nga trekëndëshi kënddrejtë FOG, duke zbatuar teoremën e Pitagorës fitojmë  $\overline{FO}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{GO}^2$ . Marrim zëvendësimet  $\overline{FO} = r = 13$  cm,  $\overline{FG} = \frac{t}{2}$  dhe  $\overline{GO} = 5$  cm, kemi:

$$13^2 = \left(\frac{t}{2}\right)^2 + 5^2.$$

Nga këtu,  $\frac{t}{2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$  cm, d.m.th.  $t = 2 \cdot 12 = 24$  cm. Nga formula për syprinën e drejtkëndëshit, për syprinën e prerjes fitojmë  $Q = t \cdot H = 24 \cdot 7 = 168$  cm<sup>2</sup>.



Vizatimi 7

## Detyra 4

Llogaritni syprinën e bazës së cilindrit me lartësi 12 cm i cili pritet me rrafshin paralel me boshtin e cilindrit, në largësi prej 6 cm nga boshti. Syprina e kësaj prerje është 192 cm<sup>2</sup>.

## Detyra 5

Llogaritni syprinën e bazës së cilindrit me lartësi 8 cm i cili pritet me rrafsh paralel me boshtin e cilindrit, në largësi prej 4 cm nga boshti. Syprina e kësaj prerjeje është 48 cm<sup>2</sup>.

## Detyra për ushtrime!

1. Caktoni rrezën e cilindrit me lartësi 12 cm, nëse syprina e prerjes së tij boshtore është 96 cm<sup>2</sup>.
2. Syprina e prerjes boshtore të cilindrit është 196 cm<sup>2</sup>. Caktoni lartësinë e cilindrit, nëse rrezja e bazës së tij është 7 cm.
3. Të caktohet gjatësia e diagonales së prerjes boshtore të cilindrit me rreze 8 cm dhe lartësi 15 cm.
4. Llogaritni syprinën e bazës së cilindrit me lartësi 6 cm i cili është prerë me rrafsh paralel me boshtin në largësi 6 cm nga ai. Syprina e prerjes së tillë është 96 cm<sup>2</sup>.
5. Raporti mes syprinës së bazës së një cilindri dhe syprinës së prerjes së tij boshtore është  $\pi : 4$ . Gjeni këndin që formojnë diagonalet e prerjes boshtore.

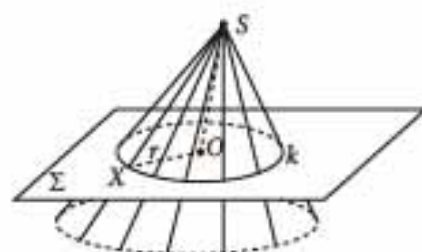


## 5.12 KONI. PRERJET E KONIT ME RRAFSHIN

### Rikujtoni!

Çfarë forme 2D mund të fitohet gjatë prerjes së konit me një rrafsh?

Në mënyrë të ngjashme sikurse fitohet cilindri mund të fitohet edhe forma 3D e njohur si kon.



Vizatimi 1

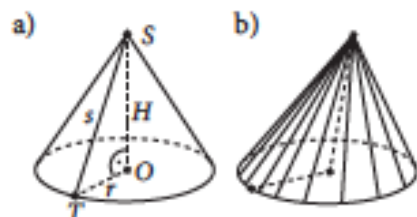
Le të jetë dhënë vija rrethore  $k$  me rreze  $r$  në rrafshin  $\Sigma$  dhe pika  $S$  e cila nuk shtrihet në rrafshin  $\Sigma$ . Në vijën rrethore përzgjedhim pikën  $X$  dhe tërheqim gjysmëdrejtëzën  $SX$ . Le të imagjinojmë se pika  $X$  lëviz përgjatë vijës rrethore dhe e kalon gjithë vijën rrethore si në vizatimin 1.

Në këtë mënyrë përshkruhet një sipërfaqe e lakuar që e quajmë **sipërfaqe konike**, gjysmëdrejtëzën lëvizëse e quajmë **gjeneratrisë (përfutuese)**, vijën rrethore e quajmë **direktrisë (drejtuese)**, pikën  $S$  – **kulm**, kurse drejtëzën  $SO$  e quajmë **bosht** të sipërfaqes konike.

**Koni** paraqet pjesën e hapësirës të kufizuar me rrethin që fitohet nga prerja e sipërfaqes konike dhe rrafshit, si dhe pjesën e sipërfaqes konike nga kulmi deri te rrethi.

Rrethin e quajmë **bazë**, kurse pjesën e sipërfaqes konike e quajmë **sipërfaqe anësore** të konit.

Koni te i cili boshti  $SO$  është pingul, normal, në bazën e tij, quhet **koni i drejtë** (vizatimi 2, a)), kurse në rastin kur ky bosht nuk është pingul, normal, me bazën e tij, e quajmë **koni i pjerrët** (vizatimi 2, b)).



Vizatimi 2

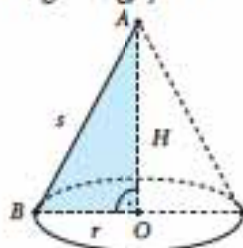
Në praktikë, nëse themi vetëm kon, atëherë nënkuptohet se bëhet fjalë për konin e drejtë. Nëse kemi rast në të cilin është dhënë kon i pjerrët, atëherë duhet të theksohet.

**Lartësia** e konit është distanca më e vogël (pingule) nga kulmi i tij deri te baza.

**Gjeneratrisë (përfutuese)** quhet secili segment pikat e skajshme të të cilit janë kulmi  $S$  dhe çilado pikë  $P$  e vijës rrethore të bazës. Në konin e drejtë gjitha gjeneratrisat janë të njëjta mes veti. Nëse kemi kon të pjerrët, atëherë gjeneratrisat nuk janë të barabarta mes veti.

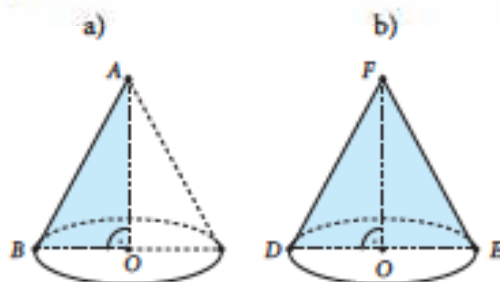
Nëse është dhënë kon i drejtë me rreze  $r$ , lartësi  $H$  dhe përfutuese  $s$ , atëherë formohet një trekëndësh karakteristik kënddrejtë si në vizatimin 3.

Nga trekëndëshi  $\triangle BOA$ , sipas teoremës së Pitagorës, gjejmë se vlen barazimi  $s^2 = r^2 + H^2$ .



Vizatimi 3

Po ashtu, koni mund të fitohet me rrotullimin e trekëndëshit kënddrejtë rreth njëres nga katetet e tij ose me rrotullimin e trekëndëshit barakrahës rreth boshtit të tij të simetrisë. Prandaj edhe koni, ashtu si cilindri, është trup rrotullues. Kështu, koni në vizatimin 4, a) është fituar me rrotullimin e trekëndëshit  $\triangle BOA$  rreth katetes  $OA$ , kurse koni në vizatimin 4, b) është fituar me rrotullimin e trekëndëshit barakrahës  $\triangle DEF$  rreth segmentit  $OF$ , që është boshti i tij i simetrisë.



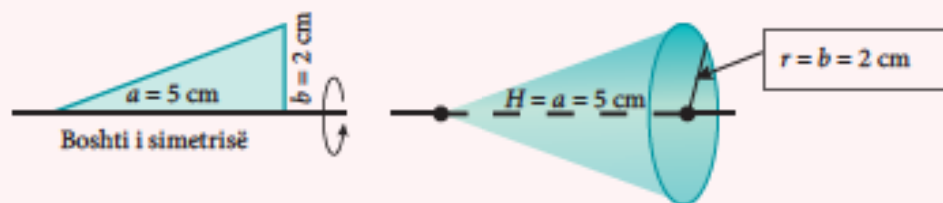
Vizatimi 4

### Shembulli 1

Trekëndëshi kënddrejtë me katete  $a = 5$  cm dhe  $b = 2$  cm rrotullohet rreth brinjës  $a$ . Cila formë 3D fitohet gjatë këtij rrotullimi?

**Zgjidhje:**

Me rrotullimin e trekëndëshit kënddrejtë rreth njëres prej kateteve të tij fitohet kon (vizatimi 5). Trekëndëshi kënddrejtë rrotullohet rreth brinjës  $a$ , prandaj nga vizatimi 5 mund të vërehet se baza e konit ka rreze  $r = b = 2$  cm, kurse lartësia e konit është  $H = a = 5$  cm.



Vizatimi 5

**Detyra 1**

Sa është rrezja e bazës, e sa është lartësia e konit që fitohet me rrotullimin e trekëndëshit kënddrejtë me katete  $a = 3$  dhe  $b = 4$  rreth

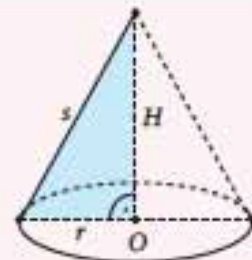
- brinjës  $a$ ;
- brinjës  $b$ .

**Shembulli 2**

Të përcaktohet lartësia e konit me rreze të bazës 16 cm dhe me përfutuese 34 cm.

**Zgjidhje:**

Nga kushti i detyrës është dhënë  $r = 16$  cm dhe  $s = 34$  cm. Nga barazimi  $s^2 = r^2 + H^2$  fitojmë se  $H^2 = s^2 - r^2 = 34^2 - 16^2 = 1156 - 256 = 900$ . Nga këtu, për lartësinë  $H$  fitojmë se  $H = \sqrt{900} = 30$  cm.



Vizatimi 6

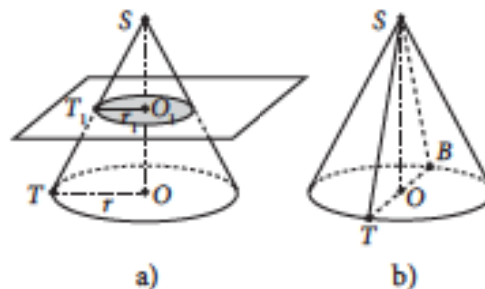
**Detyra 2**

Të gjendet gjatësia e përfutueses së konit me lartësi 6 cm dhe rreze të bazës 8 cm.

Llojet e prerjeve të konit me rrafshin janë:

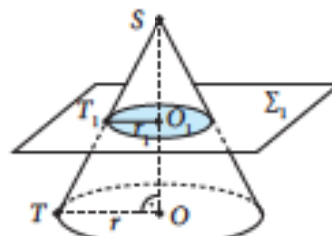
- prerja paralele** – nëse rrafshi është paralel me bazën e konit (vizatimi 7, a));
- prerja boshtore** – nëse rrafshi kalon nëpër boshtin e konit (vizatimi 7, b)).

Sic mund të shihet në vizatimin 7, prerjet paralele të konit me rrafshin janë rrathë, kurse prerjet boshtore janë trekëndësha.



Vizatimi 7

Në vizatimin 8 është paraqitur një kon i drejtë i cili është prerë me një rrafsh paralel me bazën e konit.



Vizatimi 8



Nga ngjashmëria e trekëndëshave  $\triangle TOS$  dhe  $\triangle T_1O_1S$  fitohet raporti  $\overline{TO} : \overline{T_1O_1} = \overline{SO} : \overline{SO_1}$ . Me ngritjen në katror, të të dyja anëve, fitojmë  $\overline{TO}^2 : \overline{T_1O_1}^2 = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$ . Nëse në barazimin e fundit zëvendësojmë  $\overline{TO}^2 = r^2$  dhe  $\overline{T_1O_1}^2 = r_1^2$  dhe nëse e shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin e anës së majtë me  $\pi$ , fitojmë  $r^2\pi : r_1^2\pi = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$ .

Nëse me  $B$  e shënojmë syprinën e bazës, kurse me  $B_1$  syprinën e prerjes paralele, atëherë  $B = r^2\pi$ , kurse  $B_1 = r_1^2\pi$ . Duke marrë zëvendësimet në barazimin e mësipërm, fitojmë  $B : B_1 = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$ .

Për prerjet paralele të konit me rrafshin vlen teorema në vijim.

Syprina e bazës  $B$  dhe syprina e prerjes paralele  $B_1$  sillen si kuadratikët e largësive përkatëse të tyre nga kulmi i konit.

Lartësia dhe gjeneratrisa e një koni me prerjen paralele ndahen në raport të njëjtë. Nëse prerja boshtore e konit është trekëndësh barabrinjës, përkatësisht nëse  $s = 2r$ , atëherë ky kon njihet si **kon barabrinjës** (vizatimi 9).

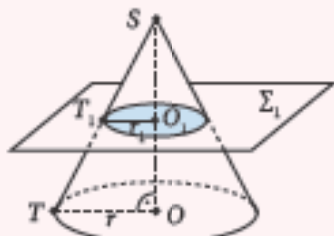


Vizatimi 9

### Shembulli 3

Syprina e bazës së një koni, me lartësi 16 cm, është  $64 \text{ cm}^2$ . Të caktohet syprina e prerjes paralele, nëse ajo gjendet në largësi 6 cm nga kulmi i konit.

**Zgjidhje:**



Vizatimi 10

Nga vizatimi 10, nëse marrim shënimet  $H = \overline{SO}$  dhe  $H_1 = \overline{SO_1}$ , nga kushti i detyrës kemi se  $B = 64 \text{ cm}$ ,  $H = 16 \text{ cm}$  dhe  $H_1 = 6 \text{ cm}$ . Duke shfrytëzuar relacionin  $B : B_1 = H^2 : H_1^2$ , fitojmë  $64 : B_1 = 16^2 : 6^2$ . Nga këtu, gjejmë se  $B_1 = \frac{64 \cdot 36}{256} = 9 \text{ cm}^2$ .

### Detyra 3

Koni ka lartësi 10 cm dhe rreze të bazës  $r = 8 \text{ cm}$ . Prerja paralele e konit me rrafshin është rreth me rreze 2. Të caktohet sa është largësia nga kjo prerje deri te kulmi i konit.

### Shembulli 4

Jepet koni me lartësi 24 cm dhe gjeneratrisë 26 cm. Njehso syprinën e prerjes boshtore.

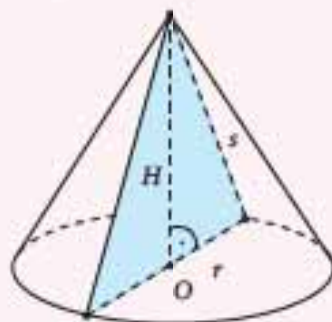
**Zgjidhje:**

Nga kushtet e detyrës, është dhënë  $s = 26$  cm dhe  $H = 24$  cm. Sipas teoremës së Pitagorës (vizatimi 11), kemi

$$r^2 = s^2 - H^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100,$$

prandaj fitojmë  $r = \sqrt{100} = 10$  cm. Syprina  $Q$  e prerjes boshtore do të jetë e barabartë me

$$Q = \frac{2r \cdot H}{2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 24}{2} = 240 \text{ cm}^2.$$



Vizatimi 11

### Detyra 4

Një kon i drejtë me rreze të bazës 5 cm ka prerje boshtore trekëndësh kënddrejtë, në të cilin këndi i drejtë gjendet pranë kulmit të konit. Njehsoni syprinën e prerjes boshtore.

### Detyra për ushtrime!

1. Perimetri i prerjes boshtore të konit barabrinjës është 30 cm. Llogaritni syprinën e kësaj prerjeje boshtore.
2. Syprina e bazës së një koni është  $50 \text{ cm}^2$ , kurse prerja paralele, e cila është në largësi 10 cm nga kulmi, ka syprinë  $18 \text{ cm}^2$ . Caktoni lartësinë e tij.
3. Gjeni rrezën e konit me lartësi 15 cm, nëse prerja boshtore e tij ka syprinë  $60 \text{ cm}^2$ .
4. Jepet koni me lartësi 18 cm dhe rreze të bazës 6 cm. Syprina e një prerjeje paralele të tij është  $16\pi \text{ cm}^2$ . Caktoni largësinë e prerjes paralele nga baza e konit.
5. Llogaritni syprinën e prerjes paralele të konit me rreze të bazës 9 cm, nëse kjo prerje e ndan lartësinë nga kulmi deri te baza e konit në raportin 3:2.

## DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

- Këndet e dhëna në gradë shndërroni në radianë:
  - $300^\circ$ ;
  - $150^\circ$ .
- Këndet e dhëna në radianë shndërroni në gradë:
  - $\frac{7\pi}{6}$  rad;
  - $1,7$  rad.
- Caktoni vlerat e funksioneve tjera trigonometrike, nëse është dhënë:
  - $\cos \alpha = \frac{24}{25}$ ;
  - $\sin \alpha = \frac{7}{24}$ ;
  - $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$ .
- Gjeni vlerën e shprehjes  $\frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha}{\sin^3 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha}$  nëse është dhënë  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$ .
- Caktoni vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit të ngushtë të trekëndëshit kënddrejtë, nëse është e njohur se  $a : c = 9 : 41$ .
- Caktoni masën e këndit  $\alpha$ , nëse është dhënë
  - $\sin(\alpha + 50^\circ) = \cos(\alpha + 10^\circ)$ ;
  - $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \operatorname{ctg}(3\alpha - \frac{\pi}{3})$ .
- Thjeshtoni shprehjen:  $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{4 - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2 \cos \alpha - \sin \alpha - 1}{1 - \cos \alpha} + \frac{3 \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ .
- Në një teren sportiv mbahet një festival për fëmijë. Mbi teren ngrihet një balonë e madhe për të fotografuar. Nga vendi ku qëndron një person balona shihet nën kënd prej  $47^\circ 15'$ , kurse largësia e personit deri te pika në tokë, që është saktësisht nën balonën, është 3 km. Llogaritni në çfarë lartësie mbi tokë është balona.
- Një aeroplan fillon uljen drejt aeroportit nën kënd prej  $6^\circ$  në raport me vijën horizontale të shikimit të pilotit. Në cilën lartësi gjendet aeroplani, nëse largësia horizontale e tij nga pista është 950 m.
- Për t'ju qasur rampës lejohet këndi maksimal prej  $6^\circ$  në raport me vijën horizontale. Sa duhet të jetë gjatësia e rampës me qëllim që të përballohet ndryshimi në lartësi prej 0,6 m?
- Një kablo është përforcuar ndërmjet tokës dhe një shtylle vertikale të lartë 12 m. Nëse kabloja me sipërfaqen horizontale (tokën) formon kënd prej  $30^\circ$ , atëherë sa është gjatësia e saj?
- Janë dhënë pesë pika të ndryshme, nga të cilat saktësisht tri janë kolineare, kurse dy pikat e tjera nuk shtrihen në drejtëzën ku shtrihen tre të parat. Sa drejtëza të ndryshme përcaktojnë këto pesë pika?
- Vërtetoni se me pesë pika në hapësirë, numri i rrafshëve të përcaktuara me to mund të jetë 1, 5, 7 ose 10.
- Në çfarë largësie nga kulmi i piramidës së dhënë është formuar prerja paralele, nëse lartësia e piramidës është 20 dm, syprina e bazës është  $32 \text{ dm}^2$ , kurse syprina e prerjes është  $8 \text{ dm}^2$ ?
- Diagonalja e bazës së prizmit të rregullt katërkëndor ka gjatësinë  $4\sqrt{2}$ , kurse diagonalja e faqes anësore ka gjatësinë 5 cm. Llogaritni gjatësinë e diagonales së prizmit.
- Llogaritni syprinën e prerjes diagonale dhe apotemën e piramidës së rregullt katërkëndore me brinjë, të bazës 16 cm dhe brinjë, të mbështjellësit 10 cm.



17. Të caktohet lartësia e prizmit të rregullt katërkëndor me diagonale 15 cm dhe diagonale të faqes anësore 12 cm.
18. Një piramidë katërkëndore ka brinjë (teh) të bazës  $10\sqrt{2}$  cm dhe brinjë (teh) anësore 13 cm. Të gjendet apotema dhe syprina e prerjes diagonale të piramidës.
19. Piramida me lartësi 15 cm ka syprinë të bazës  $450 \text{ cm}^2$ . Të llogaritet syprina e prerjes paralele që gjendet në largësi 5 cm nga baza.
20. Cilindri me lartësi 15 cm dhe rreze të bazës 10 cm, është prerë me një rrafsh paralel me boshtin e tij. Largësia e rrafshit prerës deri te boshti është 6 cm. Caktoni syprinën e kësaj prerjeje.
21. Të caktohet syprina e prerjes paralele të konit, nëse prerja ndodhet në largësi 3 cm nga baza e konit. Syprina e bazës së konit është  $144 \text{ cm}^2$ , ndërsa lartësia e tij është 12 cm.
22. Koni ka lartësi 15 cm dhe rreze të bazës 12 cm. Nëse një prerje paralele e konit ka rreze 4 cm, atëherë të caktohet sa është largësia e prerjes nga baza e konit.
23. Të llogaritet lartësia e konit me syprinë të bazës prej  $75 \text{ cm}^2$ , nëse prerja e tij paralele, e cila gjendet në largësi 8 cm nga kulmi, ka syprinë  $48 \text{ cm}^2$ .
24. Gjeni syprinën e prerjes boshtore dhe rrezen e konit me lartësi 12 cm, nëse prerja boshtore e tij ka perimetër 36 cm.
25. Të llogaritet syprina e prerjes boshtore të konit të rregullt rrethor me rreze 8 cm, nëse prerja boshtore paraqet trekëndësh kënddrejtë, këndi i drejtë i të cilit gjendet në kulmin e konit.
26. Një prerje paralele e konit me rreze 12 cm, e ndan lartësinë nga kulmi kah baza e konit në raportin 1:3. Të gjendet syprina e kësaj prerjeje paralele.

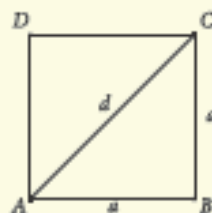
## MATJET

Në këtë temë hulumtohen perimetri dhe syprina e formave (2D) të rrafshit, si edhe syprina dhe vëllimi i formave (3D) hapësinore. Këto koncepte, nocione, paraqesin masat themelore me të cilat përshkruhet madhësia e objekteve – sa hapësirë zënë, sa material duhet për ndërtimin e tyre ose sa sipërfaqe nevojitet që të mbulohet. Zbatimi i këtyre dijeve është i përditshëm: gjatë llogaritjeve për sasinë e nevojshme për ngjyrosje të mureve, për rrethimin e oborreve, për llogaritjen e syprinave të parcelave, kapacitetet e enëve ose rezervuarëve. Përmes zgjidhjes së detyrave praktike dhe detyrave STEM, nxënësit do të zhvillojnë shkathhtësi për modelimin e situatave reale me anë të formulave matematike, të menduarit logjik dhe do të bëjnë lidhjen mes matematikës me inxhinierinë, arkitekturën, teknologjinë dhe shkencat.

## 6.1 PERIMETRI DHE SYPRINA E KATRORIT DHE DREJTKËNDËSHIT

### Rikujtoni!

Perimetri i katrorit me brinjë  $a$  llogaritet me formulën  $P = 4a$ , kurse syprina e tij me formulën  $S = a^2$ .



Vizatimi 1

### Shembulli 1

Llogaritni gjatësinë e diagonales së katrorit nëse syprina e tij është  $25 \text{ cm}^2$ . Zgjidhja të kontrollohet me GeoGebra.

#### Zgjidhje:

Nga formula për syprinën e katrorit  $S = a^2$ , fitojmë  $a^2 = 25$ , , prandaj brinja e katrorit ka gjatësinë  $a = 5 \text{ cm}$ . Nga teorema e Pitagorës, duke marrë trekëndëshin kënddrejtë  $\triangle ABC$  (Vizatimi 1) për gjatësinë e diagonales fitojmë  $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ , d.m.th.  $d = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$ .

Procedura e kontrollimit të zgjidhjes përmes GeoGebra është dhënë në vijim. Fillimisht për të vizatuar katrorin me brinjë 5 cm, nga veglat (Toolbar) do ta përzgjedhim mundësinë për shumëkëndëshin e rregullt (Regular polygon) (Figura 1, a)) dhe do ta vizatojmë segmentin me gjatësi 5 cm. Në këtë rast hapet dritarja për të futur numrin e kulmeve të shumëkëndëshit të kërkuar. Këtu futim vlerën 4 (Figura 1, b)).



Figura 1

Më tej, për të llogaritur diagonalen e katrorit, nga shiriti i veglave (Toolbar), do ta përzgjedhim mundësinë për largësinë (Distance or Length) (Figura 2, a)) dhe do t'i shënojmë kulmet e diagonales AC, nga ku fitojmë se gjatësia e diagonale është  $\overline{AC} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$  cm. (Figura 2 b)).

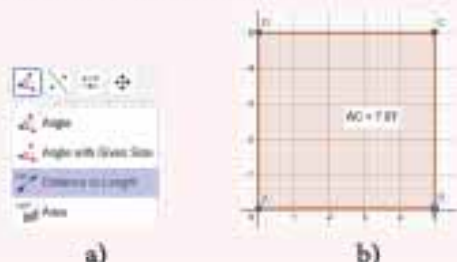


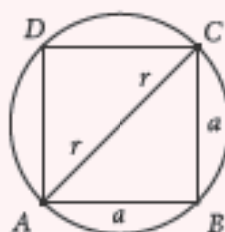
Figura 2

## Shembulli 2

Një liqen i vogël ka formën e rrethit me rreze 6 m. Në këtë liqen duhet vendosur një platformë, në formën e katrorit, të brendashkruar rrethit (Vizatimi 2). Llogaritni sa  $\text{m}^2$  material do të nevojiten që të vendoset kjo platformë?

**Zgjidhje:**

Sipas vizatimit 2, gjatësia e diagonales së katrorit është  $d = 2r = 2 \cdot 6 = 12$  m. Nga barazimi  $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ , fitojmë se gjatësia e brinjës së katrorit është  $a = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{12^2}{2}} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$  m. Nga këtu, syprina e katrorit është  $S = a^2 = 72 \text{ m}^2$ . Pra, për vendosjen, instalimin, e platformës kuadratike nevojiten  $72 \text{ m}^2$  material.



Vizatimi 2



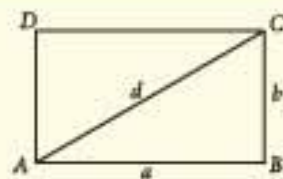
**Detyra 1**

Komuna planifikon të rrethojë një sipërfaqen e gjelbëruar kuadratike të dedikuar për parkun ekologjik shkollor. Për rrethojën janë paraparë 400 m tel metalik, me të cilin duhet dy herë të rrethohet sipërfaqja, pa palosje dhe mbetje. Caktoni:

- gjatësinë e brinjës së sipërfaqes kuadratike;
- syprinën e sipërfaqes së rrethuar.

**Rikujtoni!**

Perimetri i drejtkëndëshit me brinjë  $a$  dhe  $b$  llogaritet me formulën  $P = 2a + 2b$ , kurse syprina me formulën  $S = ab$ .



Vizatimi 3

**Shembulli 3**

Llogaritni syprinën e drejtkëndëshit me brinjë 12 cm dhe diagonale 20 cm.

**Zgjidhje:**

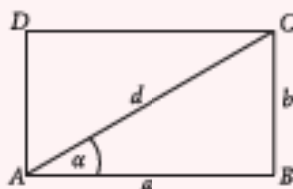
Nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle ABC$  (Vizatimi 3), sipas teoremës së Pitagorës kemi  $d^2 = a^2 + b^2$ , nga ku për gjatësinë e brinjës  $b$  fitojmë  $b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$  cm. Duke zëvendësuar në formulën për syprinën e drejtkëndëshit fitojmë  $S = 12 \cdot 16 = 192$  cm<sup>2</sup>.

**Shembulli 4**

Një inxhinier projekton një pllakë metalike drejtkëndore për një pajisje elektronike. Njëra anë, brinjë, e pllakës ka gjatësinë 20 cm. Gjatë kontrollimit të dimensioneve me matës laserik është konstatuar se këndi ndërmjet kësaj brinje dhe diagonales së pllakës është 30°. Llogaritni syprinën e pllakës metalike.

**Zgjidhje:**

Pllaka metalike ka formën e drejtkëndëshit. Sipas vizatimit 4,  $\triangle ABC$  është kënddrejtë, prandaj kemi  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{b}{a}$ , përkatësisht  $b = a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 11,55$  cm. Syprina e drejtkëndëshit është  $S = 20 \cdot 11,55 \approx 231$  cm<sup>2</sup>.



Vizatimi 4

**Detyra 2**

Gjatë projektimit të panelit drejtkëndor të sensorëve, inxhinierët e modelojnë panelin përmes diagonaleve të tij sepse të njëjtat përdoren gjatë kalibrimit automatik. Është matur se gjatësitë e diagonaleve janë 12 cm, kurse këndi mes tyre është  $60^\circ$ . Sa është syprina e panelit të sensorëve?

**Shembulli 5**

Gjatë konstruktimit të pllakës, drejtkëndore, prej alumini për shtëpizën mbrojtëse të një pajisjeje elektronike, inxhinieri patjetër të respektojë proporcionet e konstruksionit si për çështje të fortësisë ashtu edhe për çështje estetike. Dimensionet e pllakës janë projektuar asisoj që raporti mes gjatësive të brinjëve është 3 : 5, kurse syprina e përgjithshme e pllakës është  $135 \text{ cm}^2$ . Sa janë të gjata brinjët e pllakës?

**Zgjidhje:**

Le të jenë  $a$  dhe  $b$  gjatësitë e brinjëve të pllakës. Nga kushtet e detyrës kemi se  $a : b = 3 : 5$ , prej ku kemi  $a = 3k$ ,  $b = 5k$ .

Duke marrë zëvendësimet për  $a$  dhe  $b$  në formulën për syprinën, kemi

$$3k \cdot 5k = 135$$

$$15k^2 = 135$$

$$k^2 = 9$$

$$k = \sqrt{9} = 3 \text{ cm.}$$

Duke zëvendësuar vlerën e fituar për  $k$  në  $a$  dhe  $b$  fitojmë  $a = 3k = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}$  dhe  $b = 5k = 5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}$ .

**Detyra 3**

Caktoni brinjët e kornizës drejtkëndore, nëse njëra brinjë është katër herë më e madhe se tjetra, kurse syprina e kornizës është  $64 \text{ cm}^2$ .

**Shembulli 6**

Në vizatimin 5 është paraqitur një panel diellor.

- Llogaritni syprinën aktive të panelit.
- Llogaritni syprinën e kornizës mbrojtëse të panelit.

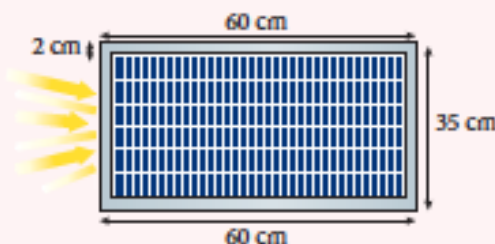
**Zgjidhje:**

- Syprina aktive e panelit paraqet drejtkëndësh me brinjë  $a_1 = 60 - 2 \cdot 2 = 56 \text{ cm}$  dhe  $b_1 = 35 - 2 \cdot 2 = 31 \text{ cm}$ , prandaj syprina e tij është  $S = a_1 \cdot b_1 = 56 \cdot 31 = 1736 \text{ cm}^2$ .

- Syprina  $S_M$  e kornizës mbrojtëse të panelit, llogaritet si ndryshimi i syprinës së përgjithshme të panelit të tërë  $S_p$  dhe syprinës së sipërfaqes aktive  $S$ .

Syprina e përgjithshme do të llogaritet me formulën për syprinën e drejtkëndëshit me brinjë  $a = 60 \text{ cm}$  dhe  $b = 35 \text{ cm}$ ,  $S_p = a \cdot b = 60 \cdot 35 = 2100 \text{ cm}^2$ .

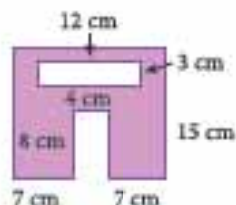
Për syprinën e kornizës mbrojtëse fitojmë  $S_M = S_p - S = 2100 - 1736 = 364 \text{ cm}^2$ .



Vizatimi 5

**Detyra 4**

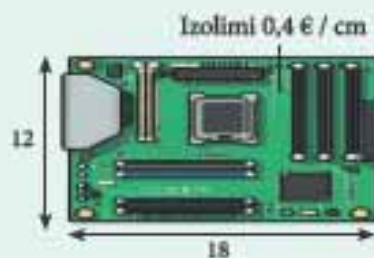
Të caktohet syprina e zonës së ngjyrosur, të dhënë në vizatimin 6.



Vizatimi 6

**Detyra për ushtrime!**

1. Llogaritni syprinën e katrorit me diagonale  $7\sqrt{2}$  cm.
2. Llogaritni syprinën e drejtkëndëshit me njërin brinjë 7 cm dhe diagonale 25 cm.
3. Llogaritni syprinën e drejtkëndëshit me diagonale 10 cm dhe kënd prej  $45^\circ$  ndërmjet diagonales dhe njëres brinjë.
4. Llogaritni syprinën e drejtkëndëshit diagonalet e të cilit zënë kënd prej  $106^\circ$ , kurse gjatësia e diagonaleve është 10 cm.
5. Një pllakë elektronike ka formë drejtkëndore me dimensione 18 cm dhe 12 cm (Vizatimi 7).
  - a) Caktoni syprinën e pllakës.
  - b) Rreth pllakës instalohet një shtresë izoluese. Sa do të kushtojë izolimi, nëse 1 cm shtresë izoluese kushton 0,4 euro?



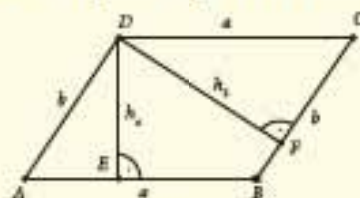
Vizatimi 7



## 6.2 PERIMETRI DHE SYPRINA E PARALELOGRAMIT

### Rikujtoni!

- Si emërtohen segmentet  $\overline{DE}$  dhe  $\overline{DF}$  të paralelogramit  $ABCD$  në vizatimin 1?



Vizatimi 1

- Syprina e paralelogramit është e barabartë me prodhimin e gjatësisë së njërës prej brinjëve dhe lartësisë përkatëse të lëshuar mbi atë brinjë. Nëse paralelogrami ka brinjët me gjatësi  $a$  dhe  $b$ , kurse lartësitë përkatëse kanë gjatësitë  $h_a$  dhe  $h_b$ , atëherë syprina e tij llogaritet me formulën:

$$P = a \cdot h_a \text{ ose } P = b \cdot h_b$$

### Shembulli 1

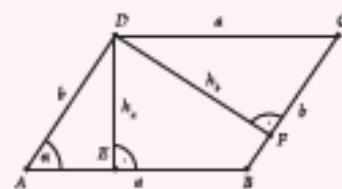
Njehsoni syprinën e paralelogramit me brinjë 12 cm dhe 5 cm, nëse këndi mes tyre është  $40^\circ$ .

**Zgjidhje:**

Nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle AED$  (Vizatimi 2) del se  $\sin \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{h_a}{b}$  dhe  $h_a = b \cdot \sin \alpha$ . Me zëvendësimin e  $h_a$  në formulën për syprinën e paralelogramit fitojmë

$$P = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin \alpha.$$

Nga këtu, syprina e kërkuar është  $P = a \cdot b \cdot \sin \alpha = 12 \cdot 5 \cdot \sin 40^\circ \approx 38,57 \text{ cm}^2$ .



Vizatimi 2

### Detyra 1

Llogaritni lartësinë  $h_a$  të paralelogramit me brinjë 6 cm dhe 12 cm, nëse lartësia tjetër është 5 cm.

### Shembulli 2

Gjatë projektimit të një çatie të pjerrët të një objekti industrial, njëra nga sipërfaqet mbuluese ka formën e paralelogramit për shkak të këndit të pjerrësisë dhe zhvendosjes së trarëve bartës. Gjatësia e traut të poshtëm bartës është 6 m, kurse distanca mes traut të poshtëm dhe të sipërm, të cilët janë paralelë mes veti, është 2,4 m. Për stabilitet të strukturës, përgjatë sipërfaqes së çatisë vendosen panele mbrojtëse, ashtu që në çdo metër katror shtohet material me masë  $12 \text{ kg/m}^2$ . Gjeni:

- syprinën e sipërfaqes së çatisë;
- masën e përgjithshme të materialit të vendosur.

**Zgjidhje:**

- Sipërfaqja e çatisë është paralelogram me brinjë  $a = 6$  m dhe  $h_a = 2,4$  m. Me zëvendësimin e këtyre vlerave në formulën për syprinën e paralelogramit, fitojmë:

$$S = a \cdot h_a = 6 \cdot 2,4 = 14,4 \text{ m}^2.$$

Sipërfaqja e çatisë ka syprinë prej  $14,4 \text{ m}^2$ .

- Për çdo metër katror vendoset material me masë  $12 \text{ kg/m}^2$ , prandaj masa e përgjithshme e materialit është:

$$m = S \cdot 12 = 14,4 \cdot 12 = 172,8 \text{ kg}.$$

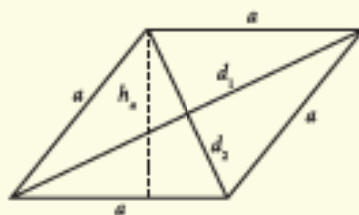
**Detyra 2**

Gjatë matjes gjeodezike të një pjese të pjerrët të parcelës bujqësore është konstatuar se sipërfaqja ka formën e paralelogramit. Gjatësitë e dy brinjëve fqinje të parcelës janë 120 m dhe 200 m, përkatësisht, kurse këndi që ato formojnë është  $30^\circ$ . Për ujitjen e parcelës, për çdo hektar ( $1 \text{ ha} = 10000 \text{ m}^2$ ) nevojiten 2,5 ton ujë. Gjeneroni:

- syprinën e parcelës;
- sasinë e përgjithshme të ujit që duhet për ta ujitur gjithë parcelën.

**Rikujtoni!**

- Si është këndi nën të cilin priten diagonalet e rombit?
- Rombi, në fakt, është paralelogram në të cilin gjitha brinjët kanë gjatësi të njëjtë, prandaj syprina e rombit është e barabartë me prodhimin e gjatësisë së njërës prej brinjëve të tij dhe lartësisë përkatëse, d.m.th  $S = a \cdot h_a$  (Vizatimi 3).
- Syprina e rombit mund të llogaritet edhe me formulat në vijim:  $S = a^2 \cdot \sin \alpha$  ose  $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ , ku  $\alpha$  është cilido kënd i brendshëm i rombit, kurse  $d_1$  dhe  $d_2$  janë gjatësitë e diagonaleve të rombit (Vizatimi 3).



Vizatimi 3

**Shembulli 3**

Roboti – kontrollor duhet ta mbulojë dyshemenë e një paneli formë rombi me sensorë. Rombi ka brinjë me gjatësi 12 cm, kurse rrezja e vijës rrethore të brendashkruar tij është e barabartë me 3 cm.

- Njihsoni syprinën e rombit.
- Nëse çdo centimetër katror i panelit duhet të jetë i mbuluar me sensor elektronik që konsumon  $0,05 \text{ W}$ , sa është konsumi i përgjithshëm i energjisë elektrike për gjithë rombin?

**Zgjidhje:**

- $$S_{\Delta BOC} = \frac{a \cdot r}{2} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$
- Për syprinën e rombit fitojmë  $S = 4 \cdot S_{\Delta BOC} = 4 \cdot 18 = 72 \text{ cm}^2$ .
- b) Nëse për çdo  $\text{cm}^2$  konsumohet 0,05 W, konsumi i përgjithshëm për gjithë syprinën e rombit kap vlerën

Për syprinën e rombit fitojmë  $S = 4 \cdot S_{\triangle ABC} = 4 \cdot 18 = 72 \text{ cm}^2$ .

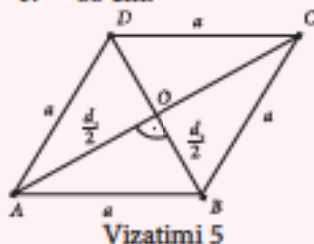
Vizitimi 4

#### Vizatimi 4

Llogaritni lartësinë e rombit, nëse brinja e tij është 12 cm, kurse syprina e tij është  $102 \text{ cm}^2$ .

Syprina e rombit, njëra nga diagonalet e të cilit ka gjatësi 16 cm, është  $240 \text{ cm}^2$ . Llogaritni gjatësinë e diagonales tjetër të rombit dhe perimetrin e tij.

Nga kushtet e detyrës është dhënë  $d_1 = 16$  cm dhe  $S = 240$  cm<sup>2</sup>. Nga formula për syprinën e rombit  $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ , fitojmë  $\frac{16 \cdot d_2}{2} = 240$ , prandaj  $d_2 = \frac{240}{8} = 30$  cm. Nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle AOB$  (Vizatimi 5), sipas teoremës së Pitagorës kemi  $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$ , prandaj duke zëvendësuar  $d_1$  dhe  $d_2$  fitojmë  $a^2 = \left(\frac{16}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 289$ , d.m.th. gjatësia e brinjës së rombit është  $a = \sqrt{289} = 17$  cm. Nga këtu, për perimetrin e rombit kemi  $P = 4 \cdot a = 4 \cdot 17 = 68$  cm.



### Vizatimi 5

Llogaritni syprinën e rombit me brinjë 12 cm dhe me njërën prej diagonaleve 10 cm.



## Shembulli 5

Jona përgatit një vitrazh me dizajn të përbërë nga 13 rombe identikë si në vizatimin e dhënë. Gjerësia e përgjithshme e vitrazhit është 40 cm, kurse syprina e përgjithshme e tij është  $260 \text{ cm}^2$ . Të caktohen gjatësitë e diagonaleve dhe syprina e secilit romb.

**Zgjidhje:**

Syprina e një rombi është  $S = \frac{260}{13} = 20 \text{ cm}^2$ . Gjerësia e përgjithshme e dizajnit është e përbërë nga 5 diagonalet më të vogla të pesë rombeve,

prandaj kemi  $5 \cdot d_1 = 40$ , përkatësisht gjatësia e diagonales më të vogël

të secilit romb është  $d_1 = 8 \text{ cm}$ . Diagonalja tjetër e rombit mund të llogaritet nga formula për syprinën

$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ . Duke marrë zëvendësimet për syprinën dhe diagonalen më të vogël fitojmë  $20 = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ , respektivisht  $d_2 = \frac{20}{4} = 5 \text{ cm}$ .



Vizatimi 6

## Detyra 5

Syprina e një rombi është  $24 \text{ dm}^2$ , kurse njëra prej diagonaleve është 8 dm. Caktoni lartësinë dhe perimetrin e rombit.

## Detyra për ushtrime!

1. Llogaritni gjatësinë e brinjës më të madhe të paralelogramit me lartësi 3 cm dhe 5 cm, nëse brinja më e vogël është 6 cm.
2. Llogaritni syprinën e paralelogramit me lartësitë 3 cm dhe 4 cm, përkatësisht, dhe kënd mes tyre prej  $30^\circ$ .
3. Llogaritni syprinën e rombit me brinjë 10 dm dhe rreze të vijës rrethore të brendashkruar 4 dm.
4. Syprina e një paralelogrami është  $300 \text{ cm}^2$ , perimetri i tij është 70 cm, kurse largësia ndërmjet brinjëve më të mëdha është 10 cm. Caktoni largësinë ndërmjet brinjëve më të vogla.
5. Ketrin dizajnon kopsht dekorativ të përbërë prej 8 rombeve të njëjtë, të shpërndarë si në vizatimin 7. Syprina e një rombi është 120 metër kuadratik, kurse diagonalja më e vogël ka gjatësi 10 metra (Vizatimi 7). Ajo dëshiron që nëpër gjatësinë e diagonales të bëjë shtigje këmbësorësh prej guri. Sa është gjatësia e përgjithshme e shtigjeve për këmbësorë në këtë kopsht?

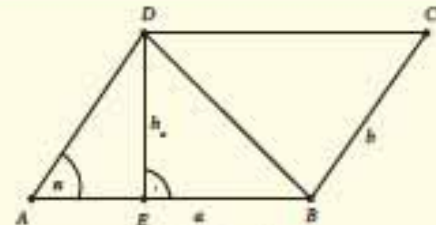


Vizatimi 7

## 6.3 PERIMETRI DHE SYPRINA E TREKËNDËSHIT

### Rikujtoni!

- Si ndahen trekëndëshat sipas brinjëve, e si ndahen sipas këndeve?
- Sa është syprina e trekëndëshit kundrejt syprinës së paralelogramit i cili ka bazë të njëjtë dhe lartësi të njëjtë si trekëndëshi (Vizatimi 1).



Vizatimi 1

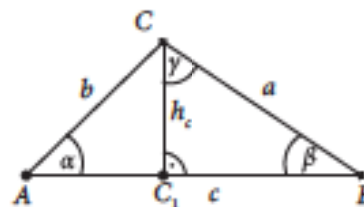
Syprina e trekëndëshit llogaritet si gjysma e syprinës së paralelogramit për shkak se  $\triangle ABD$  dhe  $\triangle CBD$  janë trekëndësha kongruent.

Syprina e trekëndëshit me brinjë  $a, b, c$  dhe lartësitë përkatëse  $h_a, h_b$  dhe  $h_c$  llogaritet duke përdorur cilëndo prej formulave në vijim:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a, S = \frac{1}{2} b \cdot h_b \text{ ose } S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

Syprina e trekëndëshit mund të llogaritet edhe duke shfrytëzuar funksionet trigonometrike, kur trekëndëshi është dhënë me dy brinjë dhe këndin mes tyre. Në vazhdim do ta nxjerrim këtë formulë.

Për trekëndëshin  $\triangle ABC$  në vizatimin 2 kemi  $S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ . Nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle AC_1C$  kemi se  $\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$ , d.m.th.  $h_c = b \cdot \sin \alpha$ , kurse nga trekëndëshi  $\triangle CC_1B$  fitojmë se  $\sin \beta = \frac{h_c}{a}$ , respektivisht  $h_c = a \cdot \sin \beta$ . Duke zëvendësuar në formulën  $S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$  fitojmë  $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$  ose  $S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta$ . Në mënyrë të ngjashme fitohet  $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$ .



Vizatimi 2

### Mbani mend!

Syprina e trekëndëshit mund të llogaritet me përdorimin e cilësdo prej formulave në vijim:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma \text{ ose } S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta \text{ ose } S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha,$$

d.m.th. syprina e trekëndëshit është e barabartë sa gjysma e prodhimit të dy brinjëve të tij dhe sinusit të këndit mes tyre.

**Shembulli 1**

Llogaritni syprinën e  $\triangle ABC$ , nëse dy brinjë të tij kanë gjatësitë 5 cm dhe 14 cm, kurse këndi mes tyre është  $36^\circ$ .

**Zgjidhje:**

Brinjët e dhëna le të jenë  $b = 5$  cm,  $c = 14$  cm dhe këndi mes tyre  $\alpha = 36^\circ$ . Sipas formulës për syprinën e trekëndëshit, kemi  $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 14 \cdot \sin 36^\circ \approx 35 \cdot 0,588 \approx 20,58 \text{ cm}^2$ .

Për trekëndëshin barabrinjës dhe trekëndëshin kënddrejtë, formulat për llogaritjen e syprinës përmbledhen në sa vijon:

- Në trekëndëshin barabrinjës çdo kënd i brendshëm ka masën  $60^\circ$  dhe nëse brinjën e shënojmë me  $a$ , atëherë syprina e tij është  $S = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ .
- Në trekëndëshin kënddrejtë katetet janë ndërmjet veti pingule, prandaj lartësia  $h_a = b$ ,  $h_b = a$  dhe me zëvendësimin në formulën për syprinën e trekëndëshit fitojmë  $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$ .

**Mbani mend!**

Syprina e trekëndëshit barabrinjës me brinjë  $a$  llogariten me formulën  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ .

Syprina e trekëndëshit kënddrejtë me katete  $a$  dhe  $b$  llogaritet me formulën  $S = \frac{a \cdot b}{2}$ .

**Detyra 1**

Caktoni syprinën e trekëndëshit kënddrejtë katetet e të cilit kanë gjatësitë 12 cm dhe 9 cm.

**Shembulli 2**

Një inxhinier projektin një kornizë trekëndore për një instalim sportiv. Korniza trekëndore ka formën e trekëndëshit kënddrejtë, në të cilin raporti i gjatësive të kateteve është 5:12. Syprina e kornizës është  $480 \text{ cm}^2$ . Llogaritni perimetrin e kornizës.

**Zgjidhje:**

Nga raporti i gjatësive të kateteve kemi  $a : b = 5 : 12$  dhe, nga këtu,  $a = 5k$  dhe  $b = 12k$ .

Duke zëvendësuar në formulën për syprinën e trekëndëshit kënddrejtë  $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{5k \cdot 12k}{2} = 480$ , fitojmë  $k^2 = \frac{960}{60} = 16$ , d.m.th.  $k = 4$ .

Nga këtu, duke zëvendësuar vlerën për  $k$  fitojmë  $a = 5 \cdot 4 = 20$  cm, kurse  $b = 12 \cdot 4 = 48$  cm.

Duke përdorur teoremën e Pitagorës fitojmë  $c = \sqrt{20^2 + 48^2} = \sqrt{2704} = 52$  cm.

Perimetri i kornizës është

$$P = a + b + c = 20 + 48 + 52 = 120 \text{ cm.}$$



**Detyra 2**

Një ndërtimtar planifikon të ndërtojë një shatërvan në formë të trekëndëshit barabrinjës. Nëse lartësia e shatërvanit (nga kulmi deri te brinja përballë) është 10 cm, llogaritni:

- gjatësinë e brinjës së trekëndëshit;
- syprinën e trekëndëshit;
- perimetrin e trekëndëshit.

**Mbani mend!**

Për llogaritjen e syprinës së trekëndëshit të çfarëdoshëm, nëse dimë gjatësitë e të tri brinjëve të tij  $a$ ,  $b$  dhe  $c$ , përdoret e ashtuquajtura formulë e Heronit  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , ku madhësia  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .

**Shembulli 3**

Llogaritni syprinën e trekëndëshit brinjët e të cilit kanë gjatësitë 15 cm, 13 cm dhe 14 cm. Rezultati të kontrollohet me softuerin kompjuterik GeoGebra.

**Zgjidhje:**

Duke zëvendësuar  $a = 15$  cm,  $b = 13$  cm dhe  $c = 14$  cm, fitojmë  $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+13+14}{2} = 21$  cm. Për syprinën e trekëndëshit fitohet:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-15)(21-13)(21-14)} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2.$$

Procedura për kontrollimin e zgjidhjes në GeoGebra është me sa vijon. Në fillim vizatojmë segmentin me gjatësinë e dhënë: ("Segment with Given Length") dhe për gjatësinë marrim 15 (Figura 1). Kjo është brinja  $AB$  e trekëndëshit.

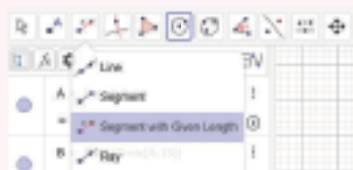


Figura 1

Që të fitohet kulmi  $C$ , procedura është me sa vijon: fillimisht, do të vizatojmë vijë rrethore me qendër në pikën  $A$  dhe rreze 14 cm dhe vijë rrethore me qendër  $B$  dhe rreze 13 cm. Prerja e të dyja vijave rrethore jep pikën  $C$ . Vizatimi i vijave rrethore në GeoGebra bëhet me përzgjedhjen e mundësisë "Circle: Center&Radius" nga menyuja (Figura 2).

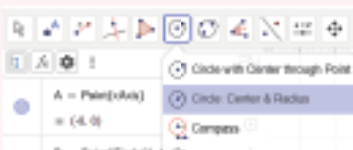


Figura 2

Që të fitohet pika prerëse  $C$ , përzgjedhim "Intersect" dhe e shënojmë pikën prerëse në vijën rrethore (Figura 3).

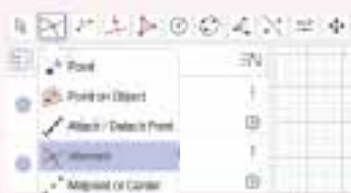


Figura 3

Që të konstruktohet trekëndëshi, përzgjedhim mundësinë për shumëkëndëshin ("Polygon") dhe formojmë trekëndëshin nëpër kulmet  $A$ ,  $B$  dhe  $C$  (Figura 4)

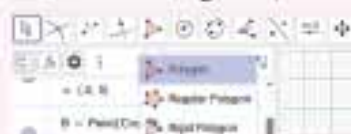


Figura 4

Në fund, që të llogaritim syprinën, përzgjedhim mundësinë "Area" (Figura 5) dhe me treguesin shtypim mbi trekëndësh.



Figura 5

Do të fitojmë rezultatin 84, çka do të thotë se syprina e trekëndëshit është  $S = 84 \text{ cm}^2$ , po aq sa edhe fituam më parë.

### Detyra 3

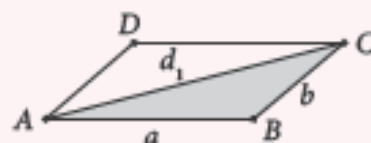
Sa është syprina e parcelës trekëndore me gjatësi të brinjëve 8 m, 15 m dhe 17 m? Rezultati të kontrollohet me GeoGebra.

### Shembulli 4

Llogaritni syprinën e paralelogramit me brinjë 10 cm, 17 cm dhe njëren diagonale 21 cm.

#### Zgjidhje:

Në vizatimin 3 diagonalja  $AC$  e ndan paralelogramin  $ABCD$  në dy trekëndësha kongruent (të puthitshëm), prandaj syprinën e paralelogramit do ta llogaritim si shumë të këtyre trekëndësive. Pasi për  $\triangle ABC$  janë dhënë të tre brinjët  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 17 \text{ cm}$  dhe  $d_1 = 21 \text{ cm}$ , syprinën e tij e llogaritim me formulën e Heronit. Në fillim gjejmë se  $s = \frac{10+17+21}{2} = 24$ , prandaj për syprinën e trekëndëshit fitojmë:



Vizatimi 3

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{24 \cdot (24-10) \cdot (24-17) \cdot (24-21)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = \sqrt{7056} = 84 \text{ cm}^2.$$

Për syprinën e paralelogramit fitojmë  $S = 2P_{\triangle ABC} = 2 \cdot 84 = 168 \text{ cm}^2$ .

#### Detyra 4

Një ekip inxhinierësh analizon një konstruksion bartës trekëndor të ndërtuar prej tri shufrash metalike me gjatësitë përkatëse 18 cm, 20 cm dhe 34 cm. Për stabilitetin e konstruksionit bartës, e rëndësishme është që të dihet lartësia më e madhe e mundshme e trekëndëshit, përkatësisht largësia më e madhe nga një kulm deri te brinja përballë. Caktoni lartësinë më të madhe të trekëndëshit të formuar me tre brinjët e dhëna.

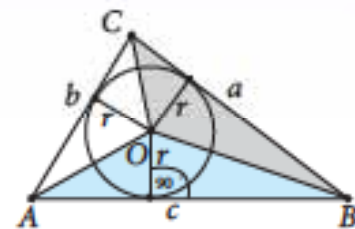
#### Rikujtoni!

- Ku gjendet qendra e vijës rrethore të brendashkruar, e ku e asaj të jashtëshkruar trekëndëshit?
- Çfarë këndi formojnë brinja e trekëndëshit dhe rrezja e vijës rrethore të brendashkruar e tërhequr nga pika e takimit me brinjën?
- Ku shtrihet qendra e vijës të jashtëshkruar trekëndëshit kënddrejtë?

Le të jetë  $r$  rrezja e vijës rrethore të brendashkruar trekëndëshit  $\triangle ABC$  me tre brinjët e dhëna  $a$ ,  $b$  dhe  $c$ . Do ta shprehim syprinën e trekëndëshit përmes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dhe  $r$ . Rrezja  $r$  është lartësia e secilit prej trekëndëshave  $\triangle AOB$ ,  $\triangle BOC$  dhe  $\triangle AOC$ . Syprina e trekëndëshit  $\triangle ABC$  mund të llogaritet si shumë e syprinave të trekëndëshave  $\triangle AOB$ ,  $\triangle BOC$  dhe  $\triangle AOC$ , d.m.th.  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC}$ , prej nga kemi

$$S = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s,$$

ku 
$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$



Vizatimi 4

#### Mbani mend!

- Nëse  $r$  është rrezja e vijës rrethore të brendashkruar trekëndëshit, atëherë syprina e atij trekëndëshi llogaritet me formulën  $S = r \cdot s$ , ku  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .
- Nëse  $R$  është rrezja e vijës rrethore të jashtëshkruar trekëndëshi, atëherë syprina e atij trekëndëshi llogaritet me formulën  $S = \frac{abc}{4R}$ .

#### Shembulli 5

Në analizën mikroskopike të indit, tre kufij membranorë të ndryshëm formojnë trekëndësh kënddrejtë. Gjatësitë e kateteve të këtij modeli janë 9  $\mu\text{m}$  dhe 12  $\mu\text{m}$ . Në brendinë e kësaj zone trekëndore gjendet një zonë rrethore e reaksionit e cila i prek, i takon, të tre kufijtë membranorë. Llogaritni rrezen e zonës rrethore ku zhvillohet reaksioni, respektivisht rrezen e vijës rrethore të brendashkruar këtij trekëndëshi kënddrejtë.



**Zgjidhje:**

Janë dhënë gjatësitë e kateteve të trekëndëshit kënddrejtë  $a = 9 \mu\text{m}$  dhe  $b = 12 \mu\text{m}$ , prandaj syprina e trekëndëshit është  $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54 \mu\text{m}^2$ .

Sipas teoremës së Pitagorës për hipotenuzën fitojmë  $c = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \mu\text{m}$ , prandaj

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = 18 \mu\text{m}.$$

Rrezen e vijës rrethore të brendashkruar trekëndëshit do ta llogaritim me formulën  $S = r \cdot s$ . Nga këtua,  $r = \frac{P}{s}$ , prandaj me zëvendësimin e vlerave për  $S$  dhe  $s$ , fitojmë se rrezja e vijës rrethore të brendashkruar trekëndëshit është

$$r = \frac{54}{18} = 3 \mu\text{m}.$$

**Shembulli 6**

Llogaritni rrezen e vijës rrethore të jashtëshkruar trekëndëshit me brinjë 26 cm, 28 cm dhe 30 cm.

**Zgjidhje:**

Sipas formulës së Heronit,  $s = \frac{26+28+30}{2} = 42$ , kurse syprina e trekëndëshit është

$$S = \sqrt{42 \cdot (42-26) \cdot (42-28) \cdot (42-30)} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 336 \text{ cm}^2.$$

Rrezja e vijës rrethore të jashtëshkruar trekëndëshit llogaritet me anë të formulës  $S = \frac{abc}{4R}$ . Nga këtua gjendet rrezja e kërkuar:

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{26 \cdot 28 \cdot 30}{4 \cdot 336} = 16,25 \text{ cm}.$$

**Detyra 5**

Në një liqen të vogël i cili ka formë rrethi me rreze  $R$  ka një ishull të vogël në formë të trekëndëshit të brendashkruar rrethit. Brinjët e trekëndëshit janë 15 m, 16 m dhe 17 m. Gjatë dimrit pjesa me ujë e liqenit duhet të mbulohet në mënyrë që mos të ngrijë. Sa metra katrorë material për mbulim do të nevojiten?

**Shembulli 6**

Një inxhinier duhet të projektojë një pjesë trekëndore të urës (Vizatimi 5) e që paraqet trekëndësh barakrahës me bazë 12 m dhe lartësi 9 m.

- Sa metra kuadratikë për reklama mund të vendoset në atë pjesë të urës?
- Sa metra konstrukcion metalik nevojiten për ndërtimin e pjesës trekëndore të urës?

**Zgjidhje:**

- a) Për të caktuar sa metra katrorë reklama mund të vendosen, nevojitet të llogaritim syprinën e trekëndëshit. Fitojmë se  $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54 \text{ m}^2$ .

Pra, në pjesën trekëndore të urës mund të vendoset sipërfaqja reklamuese me syprinë  $54 \text{ m}^2$ .

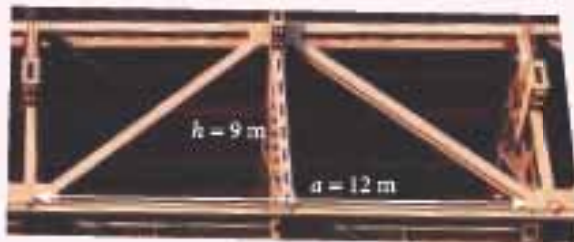
- b) Nga trekëndëshi kënddrejtë  $ADC$  në vizatimin 6, duke përdorur teoremën e Pitagorës, kemi

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} \approx 10,82 \text{ m}.$$

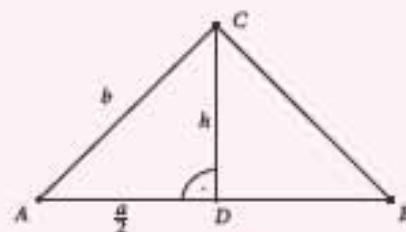
Duhet të llogaritim perimetrin e trekëndëshit,

$$L = a + 2b = 12 + 2 \cdot 10,82 = 33,64 \text{ m}.$$

Pra, që të ndërtohet pjesa trekëndore e urës nevojiten  $33,64 \text{ m}$  konstruksion metalik.



Vizatimi 5



Vizatimi 6

**Detyra për ushtrime!**

1. Caktoni lartësinë më të madhe të trekëndëshit brinjët e të cilit janë  $9 \text{ cm}$ ,  $10 \text{ cm}$  dhe  $17 \text{ cm}$ .
2. Llogaritni syprinën e paralelogramit me brinjë  $13 \text{ cm}$ ,  $20 \text{ cm}$  dhe njëren diagonale  $21 \text{ cm}$ .
3. Llogaritni syprinën e trekëndëshit nëse janë dhënë brinjët  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$  dhe këndi  $\gamma = 36^\circ$ .
4. Llogaritni syprinën e trekëndëshit barakrahës (dybrinjënjëshëm) me bazë me gjatësi  $12 \text{ cm}$  dhe njërin prej këndeve me masë  $48^\circ$ .
5. Baza e një trekëndëshi barakrahës ka gjatësi  $40 \text{ cm}$ , kurse krahu gjatësi  $25 \text{ cm}$ . Gjeni rrezet e vijës rrethore brenda dhe jashtëshkruar trekëndëshit, përkatësisht.
6. Një kompani për prodhimin e paneleve diellore duhet të prodhojë panelin si në vizatimin 7.
  - a) Çmimi i  $1 \text{ m}^2$  qelq është  $50 \text{ euro}$ . Sa kushton qelqi për prodhimin e një paneli diellor?
  - b) Për veshjen e brinjëve të panelit përdoret një shirit metalik që kushton  $8 \text{ euro}$  për metër gjatësi. Sa do të kushtojë veshja e gjitha tre brinjëve të panelit.



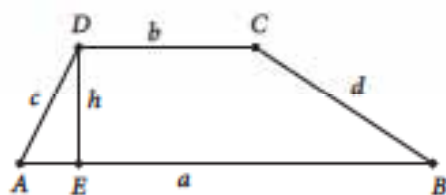
Vizatimi 7

## 6.4 PERIMETRI DHE SYPRINA E TRAPEZIT DHE DELTOIDIT

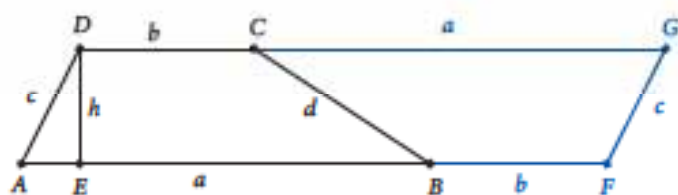
### Rikujtoni!

- Çka është trapezi?
- Sa brinjë paralele ka trapezi dhe si i quajmë ato?
- Çfarë lloje trapezash kemi?

Në vizatimin 1 është paraqitur trapezi  $ABCD$  me bazat  $a$  dhe  $b$ , krahët  $c$  dhe  $d$  dhe lartësi  $h$ . Nëse brinjën  $a = \overline{AB}$  e vazhdojmë për gjatësinë  $b = \overline{BF}$  dhe brinjën  $b = \overline{DC}$  e vazhdojmë për gjatësinë  $a = \overline{CG}$ , fitohet paralelogrami  $AFGD$  me bazë  $(a + b)$  dhe lartësi  $h$  (Vizatimi 2). Ky paralelogram është i përbërë nga dy trapezë të njëjtë, kongruent,  $ABCD$  dhe  $GCBF$ . Syprina e këtij paralelogrami njehsohet me formulën  $S = (a + b) \cdot h$ . Trapezi  $ABCD$  paraqet gjysmën e gjithë paralelogramit  $AFGD$  dhe prandaj për syprinën e trapezit e fitojmë formulën  $S = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h = \frac{a + b}{2} \cdot h$ .



Vizatimi 1



Vizatimi 2

### Mbani mend!

Syprina e trapezit me bazat  $a$  dhe  $b$  dhe lartësi  $h$  llogaritet me formulën  $S = \frac{a + b}{2} \cdot h$ .

### Shembulli 1

Bazat e një trapezi janë 18 dm dhe 12 dm, përkatësisht, kurse syprina e tij është  $45 \text{ dm}^2$ . Gjeni lartësinë e tij.

**Zgjidhje:**

Duke zëvendësuar  $a = 18 \text{ dm}$ ,  $b = 12 \text{ dm}$  dhe  $S = 45 \text{ dm}^2$  në formulën për syprinën e trapezit, fitojmë

$$45 = \frac{18 + 12}{2} \cdot h \text{ përkatësisht } h = \frac{45}{15} = 3 \text{ dm.}$$



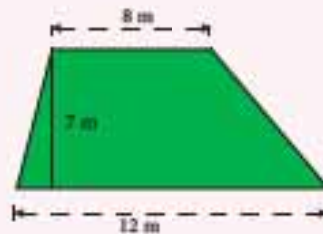
**Detyra 1**

Një trapez ka syprinë  $80 \text{ cm}^2$  dhe lartësi  $4 \text{ cm}$ . Gjatësia e njërës prej bazave është  $25 \text{ cm}$ . Caktoni gjatësinë e bazës tjetër të trapezit.

**Shembulli 2**

Në një park ekologjik planifikohet të rregullohet një sipërfaqe e re e gjelbër në formë të trapezit, si në vizatimin 3, në të cilën do të mbillet kullosë.

- Sa është syprina e sipërfaqes së gjelbër?
- Nëse për  $1 \text{ m}^2$  duhen  $250 \text{ g}$  farë, sa sasi farë nevojitet që të mbillet e gjithë sipërfaqja?
- Nëse  $1 \text{ kg}$  farë thith, absorbon,  $1,5 \text{ kg CO}_2$  në vit, sa  $\text{CO}_2$  për një vit, do të absorbojë sipërfaqja e re e gjelbëruar?



Vizatimi 3

**Zgjidhje:**

- Nga vizatimi 3 mund të shihet se bazat e trapezit janë  $a = 12 \text{ m}$  dhe  $b = 8 \text{ m}$ , kurse lartësia e trapezit është  $h = 7 \text{ m}$ . Nëse këto vlera i zëvendësojmë në formulën për syprinën e trapezit, fitojmë:

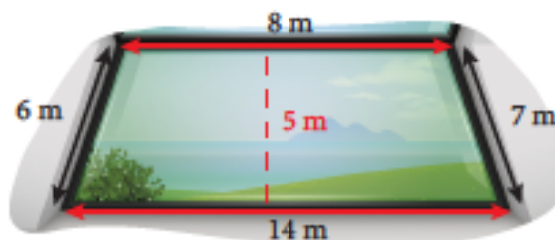
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{12+8}{2} \cdot 7 = 70 \text{ m}^2.$$

- Është dhënë se për mbjelljen e sipërfaqes prej  $1 \text{ m}^2$  nevojiten  $250 \text{ g}$  farë, prandaj që të mbillet e gjithë sipërfaqja, do të nevojiten  $70 \cdot 250 = 17500 \text{ g} = 17,5 \text{ kg}$  farë.
- Pasi  $1 \text{ kg}$  farë absorbon përafërsisht  $1,5 \text{ kg CO}_2$  në vit, sipërfaqja e re e gjelbëruar do të absorbojë përafërsisht  $17,5 \cdot 1,5 = 26,25 \text{ kg CO}_2$ .

**Detyra 2**

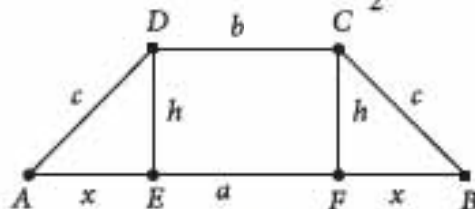
Fasada e qelqtë e një objekti modern (Vizatimi 4) ka formën e trapezit.

- Sa duhet paguar për fasadën e tillë nëse  $1 \text{ m}^2$  qelq kushton  $120 \text{ euro}$ ?
- Nëse për kornizën e fasadës përdoret alumini me çmim  $35 \text{ euro}$  për metër, atëherë sa do të kushtojë e gjithë korniza?



Vizatimi 4

Trapezin e quajmë **barakrahës** nëse të dy krahët e trapezit kanë gjatësi të njëjtë. Në vizatimin 5 është paraqitur trapezi barakrahës me bazat  $a$  dhe  $b$ , krahun  $c$  dhe lartësinë  $h$ . Nga trekëndëshi kënddrejtë  $AED$ , duke shfrytëzuar teoremën e Pitagorës fitojmë  $c^2 = x^2 + h^2$ , ku  $x = \frac{a-b}{2}$ .



Vizatimi 5

### Shembulli 3

Llogaritni syprinën e trapezit barakrahës me bazat 14 cm dhe 6 cm dhe krah me gjatësi 5 cm.

**Zgjidhje:**

Nga kushtet e detyrës kemi se  $a = 14$  cm,  $b = 6$  cm dhe  $c = 5$  cm.

Për pjesën  $x$  (Vizatimi 5) kemi  $x = \frac{a-b}{2} = \frac{14-6}{2} = 4$  cm. Lartësinë  $h$  e gjejmë nga ekuacioni

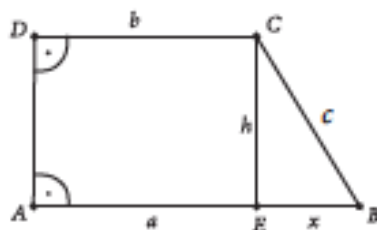
$h^2 = c^2 - x^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ . Nga këtu del se  $h = \sqrt{9} = 3$  cm. Në fund, për syprinën kemi

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{14+6}{2} \cdot 3 = 30 \text{ cm}^2.$$

### Detyra 3

Trapezi me syprinë  $90 \text{ cm}^2$ , ka lartësinë 10 cm. Gjeni gjatësitë e bazave të trapezit, nëse ato dallojnë nga njëra-tjetra për 4 cm.

Trapezin e quajmë **drejtkëndor** nëse njëri kënd pranë bazës është i drejtë. Në vizatimin 6 është paraqitur trapezi drejtkëndor me bazat  $a$  dhe  $b$ , krahun  $c$  dhe lartësinë  $h$ . Në këtë rast  $x = a - b$ .



Vizatimi 6

### Shembulli 4

Në laboratorin e ekologjisë projektohet një akvarium, për studimin e bimëve ujore, bazamenti i të cilit ka formën e një trapezi drejtkëndor. Që të ketë rrjedhë më të rregullt të ujit, dimensionet e bazamentit të akvariumit, trapezit, janë përzgjedhur që baza më e gjatë të jetë 20 cm, baza më e shkurtër 15 cm, kurse lartësia 12 cm.

- Llogaritni syprinën e bazamentit të akvariumit.
- Korniza e bazamentit do të vishet me gomë mbrojtëse. Llogaritni sa metër gomë nevojitet.

**Zgjidhje:**

Nga kushtet e detyrës kemi  $a = 20$  cm,  $b = 15$  cm, kurse  $h = 12$  cm.

- a) Për syprinën e bazamentit të akuariumit (që ka formën e trapezit) fitojmë

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{20+15}{2} \cdot 12 = 210 \text{ cm}^2.$$

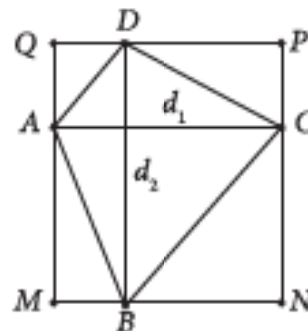
- b) Për të llogaritur sa gomë nevojitet që të vishet korniza e bazamentit, gjejmë perimetrin e trapezit të dhënë. Siç mund të vërejmë në vizatimin 6, na nevojitet të përcaktojmë gjatësinë e krahut  $c$ . Nga teorema e Pitagorës kemi  $c^2 = h^2 + x^2 = h^2 + (a-b)^2 = 12^2 + (20-15)^2 = 169$ , prandaj  $c = 13$  cm. Krahut tjetër i trapezit drejtkëndor është sa vetë lartësia e trapezit, e cila është e dhënë. Përfundimisht, perimetri i trapezit është  $P = 20 + 15 + 13 + 12 = 60$  cm.

**Detyra 4**

Gjatë studimit të shtratit të një lumi, prerja tërthore e lumit është modeluar si trapez drejtkëndor. Baza më e gjatë e trapezit (gjerësia e sipërfaqes së ujit) është 24 m, baza më e shkurtër (gjerësia e fundit të shtratit) është 16 m, kurse krahut i pjerrët formon kënd  $30^\circ$  me bazën më të madhe të trapezit.

- Gjeni lartësinë e trapezit (thellësinë e lumit).
- Gjeni syprinën e prerjes tërthore të lumit.
- Gjeni perimetrin e prerjes tërthore.

Jepet katërkëndëshi  $ABCD$  diagonalet e të cilit,  $d_1$  dhe  $d_2$ , janë normale në njëra-tjetrën. Do ta gjejmë syprinën e këtij katërkëndëshi. Nëse nëpër kulmet e këtij katërkëndëshi tërhiqen drejtëza paralele me diagonalet, fitohet drejtkëndëshi  $MNPQ$  me brinjë  $\overline{MN} = d_1$  dhe  $\overline{MQ} = d_2$ , që është i përbërë nga katër çifte trekëndëshash kënddrejtë, ku trekëndëshat e secilit çift kanë syprina të barabarta (Vizatimi 7). Prandaj, syprina e katërkëndëshit fillestar është dyfish më e vogël se syprina e drejtkëndëshit  $MNPQ$ . Pra, syprina e katërkëndëshit është  $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ .



Vizatimi 7

**Mbani mend!**

Syprina e katërkëndëshit diagonalet e të cilit mes veti janë normale dhe kanë gjatësi  $d_1$  dhe  $d_2$  është sa gjysma e prodhimit të këtyre gjatësive dhe llogaritet me formulën  $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ .



Katërkëndëshin që ka dy çifte brinjësh fqinje të barabarta e quajmë **deltoid**. Shpesh formën e deltoidit e hasim në ornamente zbukuruese, dizajnë të objekteve të ndryshëm dhe të tjera. Diagonalet e deltoidit janë normale në njëra-tjetrën, prandaj syprina e deltoidit mund të llogaritet me formulën  $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ , ku  $d_1$  dhe  $d_2$  janë gjatësitë e diagonaleve të tij.

### Shembulli 5

Një kompani projekton një panel dekorues prej druri, në formë të deltoidit, për muret e brendshme të një restoranti. Brinjët e panelit duhet të jenë 10 cm dhe 17 cm, kurse diagonalja e cila nuk është bosht simetrie është 16 cm (Vizatimi 8).

- Sa metër kuadratikë drurë duhet për të ndërtuar panelin?
- Nëse çmimi i pllakës prej druri është 2 euro për  $\text{cm}^2$ , sa do të kushtojë i gjithë paneli?

**Zgjidhje:**

- Në vizatimin 9 është dhënë forma 2D e panelit. Nga vizatimi

kemi se  $\overline{AD} = a = 10 \text{ cm}$  dhe  $\overline{AB} = b = 17 \text{ cm}$ , kurse  $\overline{AC} = d_1 = 16 \text{ cm}$ .

Nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle DOC$  kemi  $\overline{DO}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{OC}^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 10^2 - 8^2 = 36$ ,

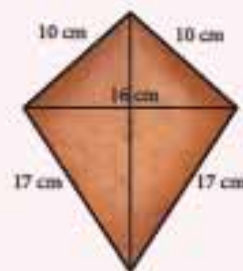
përkatësisht  $\overline{DO} = 6 \text{ cm}$ . Nga ana tjetër, nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle BOC$  kemi

$\overline{OB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 17^2 - 8^2 = 225$ , d.m.th.  $\overline{OB} = 15 \text{ cm}$ . Më tej, për gjatësinë e

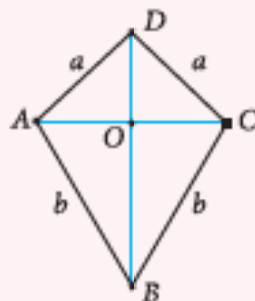
diagonales më të madhe fitojmë  $d_2 = \overline{DB} = \overline{DO} + \overline{OB} = 6 + 15 = 21 \text{ cm}$ , kurse syprina do të jetë  $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{16 \cdot 21}{2} = 168 \text{ cm}^2$ . Pra, për përpunimin e panelit dekorues prej druri nevojiten

168  $\text{cm}^2$  masë druri.

- Çmimi i pllakës së drurit është 2 euro për  $\text{cm}^2$ , prandaj çmimi i një paneli të tillë prej druri do të jetë  $168 \cdot 2 = 336 \text{ euro}$ .



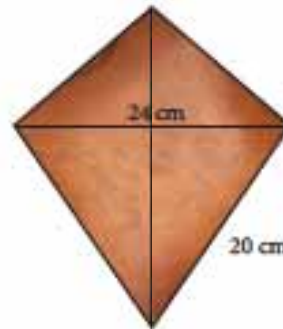
Vizatimi 8



Vizatimi 9

**Detyra 5**

Një firmë duhet të përpunojë panel reklamues PVC në formë deltoidi që do të vendoset në kornizën prej alumini. Paneli duhet të ketë syprinën  $216 \text{ cm}^2$ , brinjët më të gjata të jenë me gjatësi 20 cm secila, kurse diagonalja e cila nuk është bosht simetrie duhet të ketë gjatësinë 24 cm (Vizatimi 10). Sa do të kushtojë përpunimi i kornizës prej alumini nëse 1 cm e aluminit ka çmimin 0,50 euro?



Vizatimi 10

**Detyra për ushtrime!**

1. Syprina e një trapezi është  $420 \text{ cm}^2$ , kurse gjatësitë e bazave të tij janë 28 cm dhe 14 cm. Njihsoni lartësinë e trapezit!
2. Një arkitekt dizajnon platformën për pishinë në formë të trapezit kënddrejtë me bazat 28 m dhe 16 m dhe krahun, që nuk është normal në bazën, me gjatësi 18 m. Të llogaritet syprina e platformës dhe gjatësia e rrethojës që duhet të vendoset rreth platformës.
3. Llogaritni bazat e trapezit nëse ndryshimi i gjatësive të tyre është 5 cm, lartësia e trapezit është 8 cm, kurse syprina e tij është  $96 \text{ cm}^2$ .
4. Një aktivist ekologjie dëshiron të bëjë një kopsht të gjelbër në formë deltoidi në kulmin e një ndërtese shkollore. Brinjët e kopshtit duhet të jenë 13 m dhe 20 m, kurse në mes duhet të ketë shtigje diagonale për shkarkimin e ujërave të shirave. Gjatësia e shtegut që do të ishte bosht simetrie i formës deltoide duhet të jetë 21 m.
  - a) Llogaritni gjatësinë e shtegut tjetër shkarkues.
  - b) Nëse në  $1 \text{ m}^2$  sipërfaqe mund të mbillen 4 pemë, atëherë sa pemë gjithsej mund të mbillen në gjithë sipërfaqen e kopshtit?
5. Një tablo elektrike ka formë deltoidi. Diagonalja e cila është bosht simetrie është e gjatë 17 cm, njëra nga brinjët e deltoidit është e gjatë 10 cm, kurse syprina e tablosë është  $136 \text{ cm}^2$ .
  - a) Llogaritni sa shirit duhet që të mbështjellën skajet e tablosë elektrike.
  - b) Nëse secila komponentë elektrike zë syprinë prej  $2 \text{ cm}^2$ , atëherë në tablonë elektrike sa komponenta mund të vendosen?

## 6.5 PERIMETRI DHE SYPRINA E RRETHIT DHE PJESËVE TË RRETHIT

### Rikujtoni!

- Çka është vija rrethore?
- Çka është rrethi?
- Sa gradë është këndi i plotë?

Perimetri i vijës rrethore me rreze  $r$  llogaritet me formulën  $P = 2r\pi$ , kurse syprina e rrethit me rrezen e njëjtë llogaritet me formulën  $S = r^2\pi$ . Këto formula janë të njohura nga vitet e më hershme të arsimimit dhe prandaj do t'i trajtojmë si të njohura.

### Shembulli 1

Platforma rrethore diellore (Vizatimi 1) ka perimetër 62,8 m.

- Caktoni rrezen dhe syprinën e platformës.
- Sa është fuqia e përgjithshme e platformës diellore nëse  $1 \text{ m}^2$  prodhon 240 W energji elektrike?
- Sa platforma të tilla nevojiten që të sigurojnë të paktën 226 kW energji elektrike?



Vizatimi 1

### Zgjidhje:

- Nga formula për perimetrin e vijës rrethore fitojmë  $62,8 = 2r\pi$ , përkatësisht  $r = \frac{62,8}{2 \cdot 3,14} = 10 \text{ m}$ .  
Duke zëvendësuar vlerën e fituar për rrezen në formulën për syprinën e rrethit, fitojmë  $S = r^2\pi = 10^2\pi = 314 \text{ m}^2$ .
- Fuqia e përgjithshme e platformës diellore do të jetë  $314 \cdot 240 = 75360 \text{ W} = 75,36 \text{ kW}$ .
- Për të siguruar të paktën 226 kW energji elektrike, nevojiten përafërsisht  $226 : 75,36 \approx 3$  platforma të tilla diellore.

### Detyra 1

Në një sistem bujqësor për vaditje përdoren dy gypa rrethorë të cilët bartin ujin deri në një arë. Diametrat e gypave janë 10 cm dhe 24 cm. Planifikohet që ata të zëvendësohen me një gyp më të madh, i cili do të ketë rrjedhë të barabartë uji sa dy gypat e dhënë. Caktoni diametrin e gypit të ri.



### Shembulli 2

Një operator telekomunikacioni instalon bazament kuadratik me syprinë  $196 \text{ cm}^2$ . Në këtë bazament është instaluar një modul mbrojtës rrethor i brendashkruar bazamentit kuadratik.

- Sa është syprina e modulit mbrojtës rrethor?
- Sa është sipërfaqja e pambuluar e bazamentit kuadratik?

**Zgjidhje:**

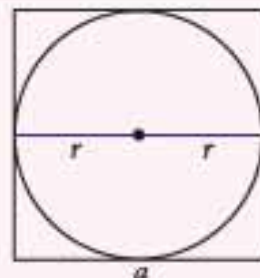
- Nga formula për syprinën e katrorit fitojmë  $a^2 = 196$  dhe, prandaj  $a = 14 \text{ cm}$ . Më pas, për shkak se diametri i rrethit është sa brinja e katrorit (Vizatimi 2), d.m.th.  $d = a$ , për rrezen e rrethit fitojmë

$$r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}.$$

Syprina e modulit mbrojtës rrethor është  $S = r^2 \pi = 7^2 \pi = 49\pi \text{ cm}^2$ .

- Sipërfaqja e bazamentit e cila mbetet e pambuluar llogaritet si ndryshimi i syprinës së gjithë bazamentit kuadratik dhe syprinës së modulit rrethor,

$$S = 196 - 49\pi = 42,14 \text{ cm}^2.$$



Vizatimi 2

### Detyra 2

Një fabrikë për prodhimin e ëmbëlsirave bën kuti katrore prej kartoni. Syprina e bazës së kutisë është  $225 \text{ cm}^2$ . Në kuti vendoset një ëmbëlsirë rrethore e cila është e brendashkruar bazës katrore (ëmbëlsira prek të katër faqet e kutisë).

- Sa është diametri i ëmbëlsirës?
- Sa është perimetri i ëmbëlsirës?
- Sa përqindje e bazës së kutisë nuk është e mbuluar nga ëmbëlsira?

### Shembulli 3

Rrota e një biçiklete elektrike ka rrezen  $r = 35 \text{ cm}$ . Për 2 minuta rrota bën 180 rrotullime të plota.

- Sa është distanca që ka kaluar biçikleta për këto 2 minuta?
- Sa është shpejtësia mesatare e biçikletës në m/s?

**Zgjidhje:**

- Një rrotullim i plotë i rrotës i përgjigjet perimetrit të vijës rrethore, i cili është:

$$P = 2r\pi = 2 \cdot 35 \cdot \pi = 70\pi \text{ cm} = 0,7\pi \text{ m}.$$

Rrota ka realizuar 180 rrotullime të plota, prandaj distanca që biçikleta ka kaluar është:

$$s = 180 \cdot P = 180 \cdot 0,7\pi = 126\pi \text{ m}.$$

$$s \approx 126 \cdot 3,14 = 395,6 \text{ m}.$$

- Shpejtësia mesatare me të cilën ka lëvizur biçikleta gjatë kësaj periudhe kohore prej  $2 \text{ min} = 120 \text{ s}$  llogaritet me formulën

$$v = \frac{s}{t} = \frac{126\pi}{120} = 1,05\pi \text{ m/s},$$

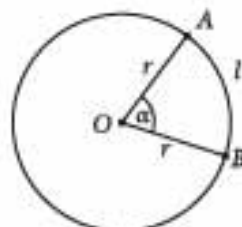
$$\text{ose } v = 1,05\pi = 1,05 \cdot 3,14 \approx 3,3 \text{ m/s}.$$

**Detyra 3**

Rrota e një skuteri elektrik ka diametër 80 cm. Çfarë distance ka kaluar skuteri nëse rrotat e tij kanë realizuar 150 rrotullime të plota?

Pjesa e vijës rrethore e cila i përgjigjet këndit përkatës qendror quhet **hark rrethor** dhe atë e matim me njësinë e njëjtë të masës me të cilën e matim perimetrin e vijës rrethore. Në vizatimin 3 është paraqitur gjatësia e harkut rrethor  $AB = l$  që i përgjigjet këndit qendror  $\alpha$ . Perimetri i gjithë vijës rrethore është  $L = 2\pi r$  dhe i përgjigjet këndit qendror prej  $360^\circ$ . Nga këtu fitojmë proporcionin  $l : \alpha = 2\pi r : 360^\circ$ , prej ku fitojmë se

$$l = \frac{2\pi r \alpha}{360^\circ} = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}.$$



Vizatimi 3

**Mbani mend!**

Gjatësia e harkut rrethor që i përgjigjet këndit qendror  $\alpha$ , në vijën rrethore me rreze  $r$ , llogaritet me formulën  $l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ .

**Shembulli 4**

Në një tabelë rrethore për reklamë (Vizatimi 4) me rreze 15 cm, duhet të vendoset një lentë LED, e cila do të mbulojë harkun rrethor, të tabelës reklamuese, që i përgjigjet këndit qendror prej  $30^\circ$ . Sa është gjatësia e kësaj lente LED?



Vizatimi 4

**Zgjidhje:**

Në detyrë janë dhënë  $r = 15$  cm dhe  $\alpha = 30^\circ$ . Që të përcaktohet gjatësia e lentës LED, duhet të llogaritet gjatësia e harkut rrethor që i përgjigjet vijës rrethore me rreze 15 cm dhe kënd qendror  $30^\circ$ . Duke zëvendësuar në formulën përkatëse të mësipërme, fitojmë:

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ} = \frac{15 \cdot \pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} = 2,5\pi \approx 2,5 \cdot 3,14 = 7,85 \text{ cm}.$$

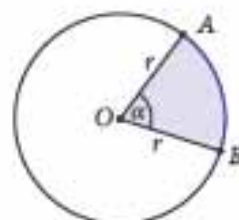
**Detyra 4**

Një shteg për biçikleta, në park, ka lacesë rrethore me rreze 600 m. Sa është këndi qendror i pjesës së lakuar të shtegut, nëse gjatësia e shtegut që i përgjigjet këtij këndi është 150 m?

**Sektor rrethor** e quajmë pjesën e rrethit që është e kufizuar me dy rreze dhe këndin qendror që formohet me këto rreze (pjesa e ngjyrosur në vizatimin 5). Raporti i syprinës  $S$ , pjesës së rrethit që i përgjigjet këndit qendror  $\alpha$ , dhe këndit  $\alpha$ , është i barabartë me raportin e syprinës  $r^2\pi$  të rrethit të tërë dhe këndit të plotë  $360^\circ$ , përkatësisht vlen  $S: \alpha = r^2\pi : 360^\circ$ .

Nga këtu fitojmë se syprina e sektorit rrethor është e barabartë me

$$S = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ}.$$



Vizatimi 5

### Shembulli 5

Një sensor i vendosur në shtyllë (Vizatimi 6) ka mundësi detektimi që shtrihet në një zonë rrethore me rreze 12 m. Por, sensori është instaluar që të mbulojë saktë hapësirën që i përgjigjet këndit qendror prej  $60^\circ$ . Sa është syprina e hapësirës që mbulon ky sensor?

**Zgjidhje:**

Duke marrë zëvendësimet  $r = 12$  m dhe  $\alpha = 60^\circ$  në formulën për syprinën e sektorit rrethor, fitojmë

$$S' = \frac{12^2 \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} \approx 75,36 \text{ m}^2.$$

Syprina e hapësirës që e mbulon sensori përafërsisht është  $75,36 \text{ m}^2$ .



Vizatimi 6

### Detyra 5

Në një shesh rrethor me rreze 12 m është ndriçuar vetëm një pjesë e sipërfaqes së tij në formë të sektorit rrethor, i cili ka syprinë  $36\pi \text{ m}^2$ .

- Sa është këndi qendror i pjesës së ndriçuar?
- Sa është gjatësia e harkut rrethor që e kufizon pjesën e ndriçuar?

Pjesa e rrethit e zënë me një hark të tij dhe kordën përkatëse quhet segment rrethor. Në rrethin në vizatimin 7 segmenti rrethor është përcaktuar me kordën AB dhe me këndin qendror  $\alpha$ . Syprina e segmentit rrethor ACB llogaritet si ndryshim i syprinës  $S_1$  të sektorit rrethor AOB dhe syprinës  $S_2$  të trekëndëshit barakrahës  $\triangle OAB$ , d.m.th.

$$S = S_1 - S_2.$$



Vizatimi 7

### Shembulli 6

Në vijën rrethore me rreze  $r = 10$  cm, korda AB ndërton segmentin rrethor. Këndi qendror që mbështet kordën është  $\alpha = 72^\circ$ .

- Llogaritni syprinën e segmentit rrethor.
- Llogaritni gjatësinë e kordës AB.
- Llogaritni gjatësinë e harkut  $\widehat{AB}$  që e kufizon segmentin rrethor.



**Zgjidhje:**

- a) Syprina e segmentit rrethor, që i përgjigjet këndit qendror prej  $\alpha = 72^\circ$ , llogaritet me formulën  $S = S_1 - S_2$ , ku  $S_1$  është syprina e sektorit rrethor  $AOB$ , kurse  $S_2$  është syprina e trekëndëshit barakrahës  $\triangle OAB$ . Gjejmë:

$$S_1 = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{10^2 \pi \cdot 72^\circ}{360^\circ} = 20\pi = 20 \cdot 3,14 = 62,8 \text{ cm}^2;$$

$$S_2 = \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{10^2 \cdot \sin 72^\circ}{2} = 50 \cdot \sin 72^\circ \approx 50 \cdot 0,95 = 47,5 \text{ cm}^2.$$

Nga këtu, për syprinën e segmentit rrethor kemi  $S = S_1 - S_2 = 62,8 - 47,5 = 15,3 \text{ cm}^2$ .

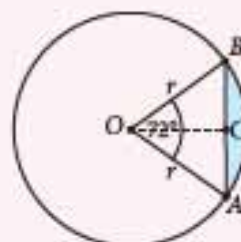
- b) Për gjetjen e gjatësisë së kordës, fillojmë nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle ACO$ . Kemi:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AC}}{r}, \text{ d.m.th. } \overline{AC} = r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 10 \cdot \sin 36^\circ = 10 \cdot 0,59 = 5,9 \text{ cm.}$$

Prandaj  $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AC} = 2 \cdot 5,9 = 11,8 \text{ cm.}$

- c) Për gjatësinë e harkut  $\widehat{AB}$ , kemi:

$$l = \frac{r \pi \alpha}{180^\circ} = \frac{10 \cdot \pi \cdot 72^\circ}{180^\circ} = 4\pi \approx 4 \cdot 3,14 = 12,56 \text{ cm.}$$



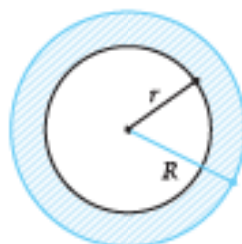
Vizatimi 8

**Detyra 6**

Dritarja prej qelqi e nëndetëses ka formë të një pjese të rrethit (segmentit rrethor). Dritarja është bërë prej qelqit rrethor me rreze  $r = 40 \text{ cm}$ . Korniza e metalte që e mban dritaren, e kufizon futjen e dritës asisoj që korda e qelqit i përgjigjet këndit qendror prej  $60^\circ$ .

- Llogaritni syprinën e qelqit që lëshon dritën (syprinën e segmentit rrethor).
- Llogaritni gjatësinë e kornizës së metalte që përshkon tehun e dritares (shumën e gjatësive të harkut dhe të kordës).
- Nëse dritarja ka dendësi sipërfaqësore  $8 \text{ kg për m}^2$ , sa është masa e dritares? (Jepni rezultatin në kg.)

**Unazë rrethore** është ajo pjesë e rrafshit e kufizuar me dy vija rrethore koncentrike me rreze të ndryshme. Syprina e unazës rrethore (Vizatimi 9) është e barabartë me ndryshimin e syprinave të rrathëve me rreze përkatëse  $R$  dhe  $r$ , d.m.th.  $S = R^2 \pi - r^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi$ .



Vizatimi 9

### Shembulli 7

Në stadiumin e atletikës planifikohet të bëhet një shteg rrethor me shtresë tartani (Vizatimi 10). Rrezja e vijës së jashtme rrethore duhet të jetë 12 m, kurse gjerësia e shtresës prej tartani 3 m. Sa është syprina e sipërfaqes që duhet shtruar me tartan?

**Zgjidhje:**

Shtegu rrethor prej tartani paraqet unazë rrethore me rrezet përkatëse  $R = 12$  m dhe  $r = 12 - 3 = 9$  m, prandaj sipas formulës për syprinën e unazës rrethore, fitojmë:

$$S = (R^2 - r^2)\pi = (12^2 - 9^2)\pi = 63\pi \approx 198 \text{ m}^2.$$



Vizatimi 10

### Detyra 7

Në sistemin e ujësjellësit përdoret një unazë mbrojtëse prej gome, e cila ka formën e unazës rrethore. Rrezja e jashtme e unazës është  $R = 12$  cm, kurse rrezja e brendshme është  $r = 8$  cm.

- Llogaritni syprinën e unazës mbrojtëse.
- Sa është e gjithë gjatësia e tehut të unazës (shuma e perimetrit të vijës së brendshme dhe perimetrit të vijës së jashtme rrethore)?
- Nëse për përpunimin e unazës duhen 0,09 kg gomë për  $100 \text{ cm}^2$ , sa është masa e një unaze të tillë mbrojtëse?
- Nëse në një pako vendosen 25 unaza të tilla, sa është masa e përgjithshme e pakos?

### Detyra për ushtrime!

- Një rrotë e traktorit është rrotulluar 12 herë. Rruga që ka bërë rrota është 37,68 m.
  - Gjeni rrezen e rrotës.
  - Sa metra do të kalojë traktori, nëse rrota do të bëjë edhe 15 rrotullime?
- Në një projekt inxhinierik përdoren dy kablllo elektrike rrethore me rreze 2 mm dhe 3 mm. Inxhinieri planifikon që t'i zëvendësojë me një kablllo më të madhe që do të ketë perimetrin sa shuma e perimetrave të dy kablllove të vjetra, që mos të ndryshojë rezistenca. Sa është syprina e prerjes tërthore të kablllos së re?
- Dy ventilatorë kanë formë të vijave rrethore, ku raporti mes perimetrave të dy vijave është si 3:5, kurse rrezja e ventilatorit më të vogël është 18 cm. Gjeni rrezen dhe syprinën e ventilatorit më të madh.
- Një pjesë e parcelës bujqësore ka rrethojë që i përgjigjet harkut rrethor të vijës rrethore me rreze 25 m dhe kënd qendror prej  $144^\circ$ . Sa do të kushtonte e gjithë rrethoja, nëse për 1 metër gjatësi të saj duhen 12 euro?
  - Një arë formë rrethi me rreze 50 m në mes ka një rezervuar rrethor uji me rreze 10 m.
    - Sa është syprina e sipërfaqes së punueshme të arës?
    - Nëse përfitimi nga përpunimi i  $1 \text{ m}^2$  të arës është 0,8 euro, atëherë sa është përfitimi i përgjithshëm nga përpunimi i arës?

## 6.6 SYPRINA DHE VËLLIMI I PIRAMIDËS

### Rikujtoni!

- Cilat janë elementet themelore të një piramide?
- Numëroni prerjet e piramidës me rrafshin.

### Mbani mend!

Syprina  $S$  e një piramide llogaritet si shuma e syprinës së bazës ( $B$ ) dhe syprinës së sipërfaqes së anshme, mbështjellësit, ( $M$ ), d.m.th.

$$S = B + M$$

Në çdo piramidë faqet anësore janë trekëndësha.

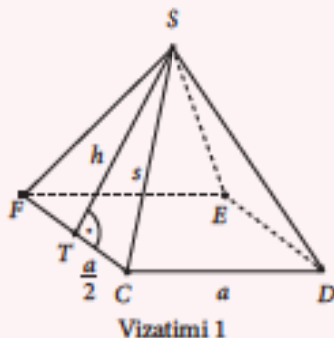
### Shembulli 1

Caktoni syprinën e piramidës katërkëndore (katërfaqëshe) të rregullt me brinjë të bazës 10 cm dhe brinjë anësore 13 cm.

**Zgjidhje:**

Baza e piramidës katërkëndore të rregullt është katror me brinjë  $a = 10$  cm, kurse gjatësia e brinjës anësore të saj është  $s = 13$  cm. Nga këtu, syprina e bazës është  $B = a^2 = 10^2 = 100$  cm<sup>2</sup>. Nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle CTS$  (Vizatimi 1), sipas teoremës së Pitagorës kemi  $s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ,  $h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 169 - 25 = 144$ .

Pra, gjatësia e apotemës së piramidës është  $h = 12$  cm. Tani, syprina e njërës faqe të sipërfaqes anësore (mbështjellësit) është  $\frac{a \cdot h}{2}$ , prandaj syprina e sipërfaqes anësore është  $M = 4 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 2 \cdot a \cdot h$ . Duke zëvendësuar vlerat për  $a$  dhe  $h$  fitojmë:  $M = 2 \cdot a \cdot h = 2 \cdot 10 \cdot 12 = 240$  cm<sup>2</sup>. Syprina e piramidës është  $S = B + M = 100 + 240 = 340$  cm<sup>2</sup>.





### Aktivitet

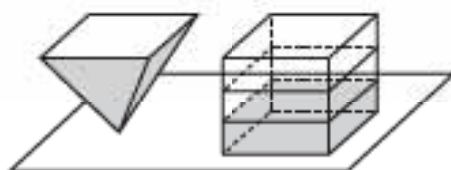
Çatia i një ndërtese është piramidë e rregullt katërkëndore me brinjë të bazës 8 m, kurse lartësitë e faqeve anësore, të mbështjellësit, janë 5 m. Nëse ndërtesa duhet të mbulohet me llamarinë e cila kushton 1800 denarë për  $1 \text{ m}^2$ , sa do të kushtojë vënia e çatisë?

### Rikujtoni!

- Renditni elementet themelore të prizmit.
- Vëllimi i prizmit llogaritet me formulën  $V = B \cdot H$ , ku  $B$  është syprina e bazës së prizmit, kurse  $H$  është lartësia e prizmit.

Jepen dy enë, njëra në formë të prizmit, kurse tjetra në formë të piramidës. Prizmi dhe piramida le të kenë baza dhe lartësi të njëjta, si në vizatimin 2.

Nëse enën me formë prizmi e mbushim me rërë të imtë dhe më pas të njëjtën rërë e derdhim në enën me formë piramide, do të vërejmë se rëra e prizmit tre herë do të mbush enën në formë të piramidës.



Vizatimi 2

Përmes këtij eksperimenti përfundojmë se vëllimi i piramidës është tre herë më i vogël se vëllimi i prizmit, kur bazat dhe lartësitë e tyre janë përkatësisht të njëjta. Meqenëse vëllimi i prizmit llogaritet me formulën

$V = B \cdot H$ , fitojmë se vëllimi i piramidës është  $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$ .

### Mbani mend!

Vëllimi  $V$  i piramidës është sa një e treta e prodhimit të lartësisë  $H$  dhe syprinës së bazës  $B$ , d.m.th.

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H \text{ ose } V = \frac{B \cdot H}{3}.$$

### Shembulli 2

Përcaktoni vëllimin e piramidës trekëndore (trefaqëshe) brinjët e bazës së të cilës janë 13 cm, 14 cm dhe 15 cm, kurse lartësia e piramidës është 24 cm.

**Zgjidhje:**

Fillimisht e llogaritim syprinën e bazës, e cila është trekëndësh brinjëndryshëm, me anë të formulës së Heronit.

Llogaritim  $s = \frac{13+14+15}{2} = 21$  cm, prandaj vlerën e fituar e zëvendësojmë në formulën për syprinën e trekëndëshit, por e shënojmë me  $B$ ,

$$B = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} \\ = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \text{ cm}^2.$$

Bëjmë zëvendësimin në formulën për vëllimin dhe fitojmë  $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{84 \cdot 24}{3} = \frac{2016}{3} = 672 \text{ cm}^3$ .

### Detyra 1

Llogaritni vëllimin e piramidës të rregullt katërkëndore me diagonale të bazës 24 cm dhe brinjë të faqes anësore prej 20 cm.

### Shembulli 3

Jepet piramida me bazë romb me diagonalet 18 cm dhe 10 cm, prerja e saj nëpër diagonalen më të vogël ka syprinë  $15 \text{ dm}^2$ , kurse rrëza e lartësisë gjendet në pikëprerjen e diagonaleve të bazës. Gjeni vëllimin e piramidës.

**Zgjidhje:**

I shënojmë të dhënat me  $d_1 = 18$  cm,  $d_2 = 10$  cm,  $Q = 15 \text{ dm}^2 = 1500 \text{ cm}^2$ .

Prerja më e vogël diagonale është trekëndësh me bazë  $d_2 = 10$  cm dhe lartësi  $H$ . Syprina e kësaj prerje është  $Q = \frac{d_2 \cdot H}{2}$ . Duke marrë zëvendësimet fitojmë  $1500 = \frac{10 \cdot H}{2}$ , d.m.th.  $H = \frac{1500 \cdot 2}{10} = 300$  cm.

Nga formula për syprinën e rombit, e llogaritim syprinën e bazës së piramidës

$$B = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{18 \cdot 10}{2} = 90 \text{ cm}^2.$$

Për vëllimin e piramidës kemi  $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{90 \cdot 300}{3} = 9000 \text{ cm}^3$ .

### Detyra 2

Le të jetë dhënë piramida me vëllim  $720 \text{ cm}^3$ , baza e së cilës është drejtkëndësh me brinjë 18 cm dhe 10 cm, dhe rrëza e lartësisë së saj le të jetë në pikëprerjen e diagonaleve të bazës. Të llogaritet syprina e sipërfaqes së anshme (mbështjellësit) të piramidës.

### Shembulli 4

Çatia e qelqtë ka formën e piramidës të rregullt katërkëndore me brinjët e bazës 6 cm dhe lartësi 4 cm. Vëllimi i konstruksionit të çatisë (hapësirës që gjendet ndërmjet çatisë dhe tavanit të objektit) a është më i madh se  $40 \text{ cm}^3$ ? Zgjidhja të kontrollohet me GeoGebra.

**Zgjidhje:**

Nga të dhënat e detyrës, piramida është e rregullt, që nënkupton se baza e saj është katror me syprinë  $B = 6^2 \text{ cm}$ . Më pas, nga formula për vëllimin e piramidës del se  $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{36 \cdot 4}{3} = 48 \text{ cm}^3$ . Domethënë vëllimi i hapësirës nën çatinë është më i madh se  $40 \text{ cm}^3$ .

Zgjidhjen do ta kontrollojmë me softuerin GeoGebra. Fillimisht, përzgjedhim shumëkëndëshin e rregullt (Regular Polygon) (Figura 1 a)), futim segmentin me gjatësi 6 cm dhe në meny e futim numrin e kulmeve të shumëkëndëshit të rregullt (Figura 1 b)),



Figura 1

Që të hapim dritaren për 3D në GeoGebra, nga tri vijat horizontale në këndin e sipërm të djathtë përzgjedhim "View" (Figura 2 a)) dhe e përzgjedhim fushën "3D Graphics" (Figura 2 b)).



Figura 2

Nga pjesa 3D përzgjedhim "Extrude to Pyramid" (Figura 3 a)), e përzgjedhim katrorin dhe japim vlerën për lartësinë e piramidës (Figura 3 b)).



Figura 3

Në fund, për llogaritjen e vëllimit të piramidës, e përzgjedhim veglën për llogaritjen e vëllimit (Figura 4 a)) dhe do të fitojmë rezultatin (Figura 4 b)).



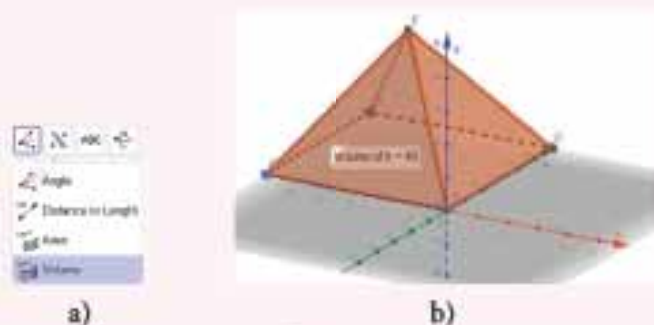


Figura 4

Fitohet se vlera për vëllimin është 48, çka edhe vërteton rezultatin e fituar më parë.

### Shembulli 5

Një sallë për ekspozitë ka formë të prizmit të drejtë me bazë drejtkëndore me gjatësi  $a = 8$  m, gjerësi  $b = 6$  m dhe lartësi  $H_1 = 4$  m. Çatia e sallës është piramidë me të njëjtën bazë drejtkëndore dhe lartësi  $H_2 = 3$  m.

- Parashihet që për qëndrim komod të secilit vizitor nevojiten të paktën  $4 \text{ m}^3$  të vëllimit të brendshëm të sallës. Gjeni numrin maksimal të vizitorëve që mund të qëndrojnë, njëkohësisht, në sallë.
- Sa metër katrorë material janë harxhuar për çatinë, nëse dyshemeja (baza e piramidës) është e ndërtuar me material tjetër?

#### Zgjidhje:

- Salla e ekspozitës me çati është dhënë në vizatimin 3. Salla ka formën e prizmit me bazë drejtkëndore me gjatësi  $a = 8$  m, gjerësi  $b = 6$  m dhe lartësi  $H_1 = 4$  m. Vëllimi i prizmit do të jetë

$$V_1 = B \cdot H_1 = a \cdot b \cdot H_1 = 8 \cdot 6 \cdot 4 = 192 \text{ m}^3.$$

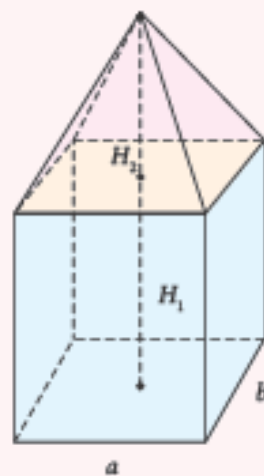
Çatia e sallës është piramidë me bazë të njëjtë drejtkëndore dhe me lartësi  $H_2 = 3$  m. Vëllimi i çatisë është

$$V_2 = \frac{B \cdot H_2}{3} = \frac{a \cdot b \cdot H_2}{3} = \frac{8 \cdot 6 \cdot 3}{3} = 48 \text{ m}^3.$$

Vëllimi i përgjithshëm i objektit është

$$V = V_1 + V_2 = 192 + 48 = 240 \text{ m}^3. \text{ Pasi për çdo vizitor duhen } 4 \text{ m}^3, \text{ numri maksimal i vizitorëve në sallë mund të jetë } N = \frac{240}{4} = 60.$$

- Në këtë rast kërkohet syprina e sipërfaqes së anshme, mbështjellësit, të piramidës. Baza është me material tjetër dhe ajo nuk hyn në llogaritje. Për të caktuar syprinën e kërkuar në detyrë, duhet të gjejmë lartësitë e trekëndësive që përbëjnë faqet anësore. Baza është drejtkëndësh, prandaj do të kemi dy faqe që janë trekëndësja me bazë  $a = 8$  m dhe dy faqe që po ashtu janë trekëndësja por me bazë  $b = 6$  m. Nga vizatimi 4, për lartësitë e trekëndësive me bazat përkatëse  $a$  dhe  $b$ , kemi:



Vizatimi 3

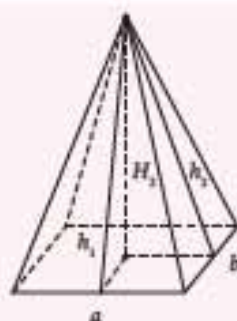
$$\text{Për faqet me bazë } a: h_1 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + H_2^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2};$$

$$\text{Për faqet me bazë } b: h_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H_2^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 3^2} = 5.$$

Syprina e sipërfaqes së anshme, mbështjellësit, të piramidës do të jetë

$$M = 2 \cdot \frac{a \cdot h_1}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_2}{2} = a \cdot h_1 + b \cdot h_2 = 8 \cdot 3\sqrt{2} + 6 \cdot 5 = 24\sqrt{2} + 30 \approx 63,9 \text{ m}^2.$$

Pra, për çatinë janë harxhuar përafërsisht  $64 \text{ m}^2$  material.



Vizatimi 4

### Detyra 3

Një rezervuar uji ka formën e prizmit të drejtë me bazë katrore, mbi të cilin është vendosur, si çati, piramida me bazë katrore. Brinja e bazës katrore është  $a = 4 \text{ m}$ , lartësia e prizmit është  $H_1 = 5 \text{ m}$ , kurse lartësia e piramidës është  $H_2 = 3 \text{ m}$ .

- Llogaritni vëllimin e përgjithshëm të rezervuarit.
- Sa  $\text{m}^2$  llamarinë nevojiten për mbështjelljen e rezervuarit, nëse shtrati i tij nuk mbështillet?
- Nëse  $1 \text{ m}^3$  ujë peshon  $1000 \text{ kg}$ , sa është masa e ujit kur rezervuari të jetë plotësisht i mbushur (bashkë me çatinë)?

### Detyra për ushtrime!

- Llogaritni syprinën e piramidës së rregull katërkëndore me lartësi  $8 \text{ dm}$  dhe syprinë të bazës  $144 \text{ dm}^2$ .
- Llogaritni syprinën e piramidës së rregullt katërkëndore me brinjë anësore  $25 \text{ cm}$  dhe apotemë  $24 \text{ cm}$ .
- Llogaritni syprinën e sipërfaqes së anshme (sipërfaqes anësore, mbështjellësit) të piramidës së rregullt trekëndore me lartësi  $6 \text{ cm}$  dhe apotemë  $10 \text{ cm}$ .
- Një objekt për deponimin e grurit ka formë të piramidës së rregullt katërkëndore me brinjë të bazës  $6 \text{ m}$  dhe lartësi  $4 \text{ m}$ .
  - Sa grurë mund të nxë ky objekt.
  - Sa janë harxhimet për veshjen e faqeve të objektit, nëse për veshjen e  $1 \text{ m}^2$  syprinë duhen  $2500$  denarë?
- Skulptura në park ka formë piramide me bazë katrore. Brinja e bazës është e gjatë  $a = 6 \text{ m}$ , kurse lartësia e piramidës është  $H = 4 \text{ m}$ .
  - Llogaritni vëllimin e skulpturës. Rezultati të kontrollohet me GeoGebra.
  - Sa është syprina e përgjithshme e piramidës (përfshij edhe syprinën e bazës)?
  - Sa metër katrorë material nevojiten për mbështjellje vetëm të faqeve anësore të piramidës?
- Çatia e qelqit e atriumit ka formën e piramidës me bazë drejtkëndore me dimensione  $a = 10 \text{ m}$  dhe  $b = 6 \text{ m}$ . Lartësia vertikale e piramidës është  $H = 3 \text{ m}$ .
  - Llogaritni vëllimin e ajrit nën çati. Rezultati të kontrollohet me GeoGebra.
  - Llogaritni syprinën e qelqit që nevojitet për çatinë (pa bazën).
  - Nëse  $1 \text{ m}^2$  ka masë  $25 \text{ kg}$ , atëherë sa është masa e përgjithshme e çatisë?

## 6.7 SYPRINA DHE VËLLIMI I TRUNGUT TË PIRAMIDËS

### Rikujtoni!

- Çka paraqet prerja paralele e piramidës?
- Si qëndrojnë shumëkëndëshat e prerjes paralele dhe bazës së piramidës?
- Syprina e trapezit barakrahës me baza  $a$  dhe  $b$  dhe lartësi  $h$  llogaritet me formulën

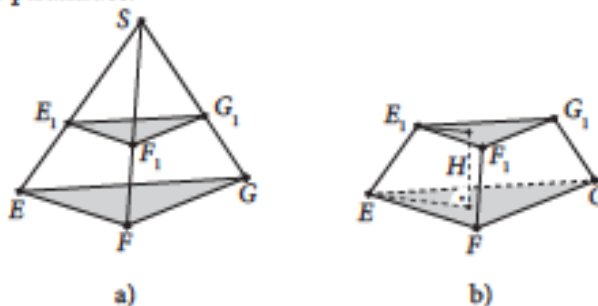
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

### Mbani mend!

**Trung i piramidës (piramidë e cunguar)** quhet pjesa e piramidës që gjendet ndërmjet një prerjeje paralele të saj dhe bazës.

Në vizatimin 1 a) është paraqitur piramida trekëndore  $SEFG$  dhe një prerje paralele e saj  $E_1F_1G_1$ , kurse në vizatimin 1 b) është paraqitur trangu i piramidës trekëndore,  $EFGG_1F_1E_1$ , që është fituar nga piramida  $SEFG$ . Baza dhe prerja paralele e piramidës quhen **baza** të trungut të piramidës.

Distanca mes rrafshëve në të cilët shtrihen bazat quhet **lartësi** e trungut të piramidës dhe shënohet me  $H$ . Faqet që nuk janë baza quhen **faqe anësore** dhe ato e përbëjnë **sipërfaqen e anshme** (sipërfaqen anësore ose mbështjellësin) e trungut të piramidës.



Vizatimi 1

Të cilit lloj janë katërkëndëshat që ndërtojnë faqet anësore të trungut të piramidës?

### Mbani mend!

Syprina  $S$  e trungut të piramidës llogaritet me formulën

$$S = B + B_1 + M,$$

ku  $B$  dhe  $B_1$  janë syprinat e bazave, kurse  $M$  syprina e sipërfaqes së anshme.



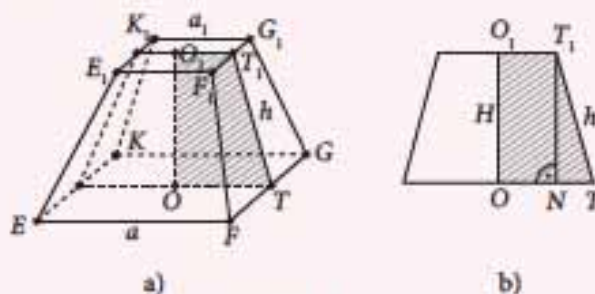
## Shembulli 1

Llogaritni syprinën e trungut të piramidës së rregullt katërkëndore me brinjë të bazave 18 cm dhe 8 cm, përkatësisht, dhe lartësi 12 cm.

**Zgjidhje:**

Nga detyra gjejmë se janë dhënë gjatësitë e brinjëve të bazave të trungut të piramidës  $a = 18$  cm dhe  $a_1 = 8$  cm si dhe lartësia e tij  $H = 12$  cm (Vizatimi 2). Meqenëse bazat e trungut të piramidës janë kuadratikë, për syprinat e tyre fitojmë:

$$B = a^2 = 18^2 = 324 \text{ cm}^2, \quad B_1 = a_1^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2.$$



Vizatimi 2

Në vizatimin 2 b) është paraqitur prerja e trungut të piramidës që kalon nëpër prerjen e diagonaleve të bazave dhe nëpër meset e brinjëve të bazave. Nga trekëndëshi  $\triangle TNT_1$ , kemi:

$$h^2 = \overline{TT_1}^2 = \overline{TN}^2 + \overline{NT_1}^2 = \left(\frac{a-a_1}{2}\right)^2 + H^2 = \left(\frac{18-8}{2}\right)^2 + 12^2 = 169,$$

nga ku gjejmë se  $h = \sqrt{169} = 13$  cm.

Të gjitha katër faqet anësore janë trapezë barakrahës me lartësi  $h$ , prandaj për syprinën e sipërfaqes së anshme, kemi

$$M = 4 \cdot \frac{a+a_1}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{18+8}{2} \cdot 13 = 676 \text{ cm}^2.$$

Në fund, duke marrë zëvendësimet përkatëse në formulën për syprinën e trungut të piramidës kemi:

$$S = B + B_1 + M = 324 + 64 + 676 = 1064 \text{ cm}^2.$$

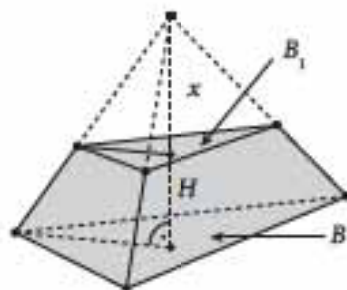
## Detyra 1

Brinjët e bazave të trungut të piramidës së rregullt katërkëndore përkatësisht janë 26 m dhe 8 m, kurse brinja anësore është 15 m. Llogaritni syprinën e kësaj piramide.

## Rikujtoni!

- Si llogaritet vëllimi i piramidës?
- Si sillen prerjet paralele të piramidës?
- Si është lidhja mes bazave të trungut të piramidës?

Që të gjejmë formulën për llogaritjen e vëllimit të trungut të piramidës, do të veprojmë me sa vijon. Le të jetë dhënë trugu i piramidës si në vizatimin 3, që është plotësuar deri në piramidën e "plotë". Lartësinë e pjesës plotësuese e shënojmë me  $x$ .



Vizatimi 3

Duke shfrytëzuar raportin e syprinave të prerjeve paralele dhe lartësive të piramidave, fitojmë  $B : B_1 = (H + x)^2 : x^2$ .

Duke marrë rrënjën e dy anëve të barazimit fitojmë

$$\sqrt{B} : \sqrt{B_1} = (H + x) : x.$$

d.m.th.

$$x = \frac{H\sqrt{B_1}}{\sqrt{B} - \sqrt{B_1}} = \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1}.$$

Vëllimi i trungut të piramidës fitohet si ndryshim i vëllimit të piramidës së plotë dhe vëllimit të pjesës shtesë, plotësuese,

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot (H + x) - \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot H + B \cdot x - B_1 \cdot x] = \frac{1}{3} \cdot [B \cdot H + (B - B_1) \cdot x].$$

Përfundimisht, nëse në formulën e fundit e zëvendësojmë shprehjen e fituar për  $x$ , kemi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left[ B \cdot H + (B - B_1) \cdot \frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1} \right] = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}].$$

### Mbani mend!

Vëllimi i trungut të piramidës llogaritet me formulën:  $V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}]$

### Shembulli 2

Llogaritni vëllimin e trungut të piramidës së rregullt katërkëndore me brinjë të bazave 30 cm dhe 15 cm, përkatësisht, dhe lartësi  $H = 18$  cm.

**Zgjidhje:**

Bazat e trungut të piramidës janë katrorë me brinjët përkatëse  $a = 30$  cm dhe  $a_1 = 15$  cm, prandaj syprinat e bazave janë  $B = 30^2 = 900$  cm<sup>2</sup> dhe  $B_1 = 15^2 = 225$  cm<sup>2</sup>.

Me zëvendësimin në formulën për vëllimin e trungut të piramidës fitohet:

$$V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}] = \frac{18}{3} [900 + 225 + \sqrt{900 \cdot 225}] = 9450 \text{ cm}^3.$$

### Detyra 2

Llogaritni vëllimin e trungut të piramidës së rregullt trekëndore me brinjë të bazave 10 cm dhe 5 cm, përkatësisht, dhe lartësi  $H = 12$  cm.

### Shembulli 3

Syprinat e bazave të një trungu të piramidës janë  $36 \text{ cm}^2$  dhe  $16 \text{ cm}^2$ , kurse lartësia e tij është 5 cm. Llogaritni vëllimin e piramidës së plotë dhe vëllimin e pjesës plotësuese.

**Zgjidhje:**

Nga kushtet e detyrës është dhënë se  $B = 36 \text{ cm}^2$ ,  $B_1 = 16 \text{ cm}^2$  dhe  $H = 5$  cm. Duke shfrytëzuar raportin mes bazave dhe lartësive të piramidës së plotë dhe trungut të piramidës, kemi:

$$B : B_1 = (H + x)^2 : x^2,$$

d.m.th.

$$36 : 16 = (5 + x)^2 : x^2.$$

Duke marrë rrënjën e të dy anëve të barazimit, fitojmë

$$6 : 4 = (5 + x) : x,$$

$$6x = 20 + 4x,$$

d.m.th.  $x = 10$  cm. Vëllimi i piramidës së plotë është

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 15 = 180 \text{ cm}^3,$$

kurse vëllimi i pjesë plotësuese është  $V_1 = \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 10 = \frac{160}{3} \text{ cm}^3$ .

### Detyra 2

Syprinat e bazave të një trungu të piramidës janë  $200 \text{ dm}^2$  dhe  $50 \text{ dm}^2$ , kurse lartësia e piramidës së plotë është 24 dm. Llogaritni vëllimin e trungut të piramidës.

### Shembulli 4

Një enë llamarine me formë të trungut të piramidës së rregullt katërkëndore, me brinjë të bazave 20 dm dhe 10 dm (baza më e madhe është sipër) është e mbushur me sheqer. E gjithë sasia e sheqerit është shitur për 56000 denarë.

- Sa është vëllimi i enës, nëse dimë se çdo kilogram sheqer është shitur për 20 denarë dhe se  $1 \text{ dm}^3$  përmban përafërsisht 1 kg sheqer?
- Sa është e thellë ena?
- Sa llamarinë është përdorur që të bëhet ena pa kapak (kapak e konsiderojmë bazën më të madhe)?



**Zgjidhje:**

- a) Meqenëse sasia e përgjithshme e sheqerit është shitur për 56000 denarë, kurse 1 kg është shitur për 20 denarë, vëllimin e enës do ta llogaritim si  $V = 56000 : 20 = 2800$  kg, përkatësisht  $V = 2800 \text{ dm}^3$ .
- b) Në kushtin e detyrës është dhënë se  $a = 20 \text{ dm}$ ,  $a_1 = 10 \text{ dm}$ , prandaj duke e shfrytëzuar formulën për vëllimin e trungut të piramidës  $V = \frac{H}{3} \cdot [B + B_1 + \sqrt{BB_1}]$  kemi:

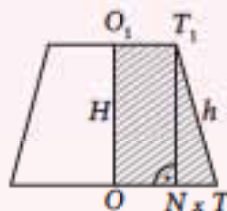
$$2800 = \frac{H}{3} \cdot [20^2 + 10^2 + \sqrt{20^2 \cdot 10^2}],$$

$$\text{prej ku del se thellësia e enës është } H = \frac{3 \cdot 2800}{700} = 12 \text{ dm.}$$

- c) Nga fakti se faqja e trungut të piramidës është trapez barakrahës (Vizatimi 4), fillimisht e llogaritim  $x$ ,  $x = \frac{a - a_1}{2} = \frac{20 - 10}{2} = 5 \text{ dm}$ , e më pas për lartësinë e faqes anësore fitojmë

$$h^2 = H^2 + x^2 = 12^2 + 5^2 = 169,$$

prej ku fitojmë  $h = 13 \text{ dm}$ .



Vizatimi 4

Secila faqe anësore është trapez barakrahës, prandaj syprina e gjithë sipërfaqes së anshme është:

$$M = 4 \cdot \frac{a + a_1}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{20 + 10}{2} \cdot 13 = 780 \text{ dm}^2.$$

Syprina e bazës së poshtme është  $B_1 = 10^2 = 100 \text{ dm}^2$ , prandaj syprina e përgjithshme e trungut të piramidës (pa kapakun) është shuma e syprinave të bazës dhe syprinës së mbështjellësit, d.m.th.

$$S = B + M = 780 + 100 = 880 \text{ dm}^2.$$

Pra, janë përdorur gjithsej  $880 \text{ dm}^2$  llamarinë për të bërë enën.

**Detyra 3**

Në një muze vendoset një postament dekorativ në formë të trungut të piramidës së rregullt katërkëndore. Baza më e madhe është sipër, kurse më e vogla poshtë. Brinja e bazës së sipërme është  $a = 18 \text{ dm}$ , kurse brinja e bazës së poshtme është  $a_1 = 6 \text{ dm}$ . Brendia e postamentit plotësisht mbushet me beton. Dihet se për  $1 \text{ dm}^3$  beton duhet masë prej 2,4 kg, kurse masa e përgjithshme e betonit është 3600 kg.

- Llogaritni vëllimin e postamentit.
- Caktoni lartësinë e postamentit.
- Sa është syprina e sipërfaqes së materialit për veshje të postament, nëse baza e poshtme nuk vishet?

**Detyra për ushtrime!**

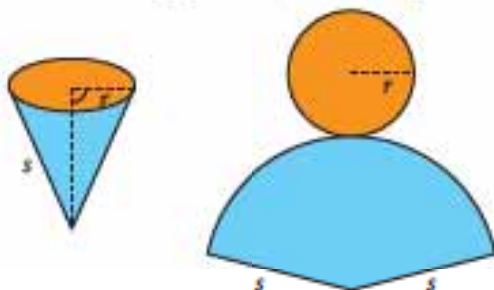
1. Llogaritni syprinën e trungut të piramidës së rregullt katërkëndore me brinjë të bazave 30 cm dhe 20 cm, përkatësisht, si dhe lartësi 12 cm.
2. Gjeni syprinën e trungut të piramidës së rregullt katërkëndore me brinjët e bazave 18 cm dhe 10 cm dhe faqe anësore që anon kah baza më e madhe nën këndin  $45^\circ$ .
3. Caktoni syprinën e sipërfaqes të anshme të trungut të piramidës së rregullt gjashtëkëndore me brinjë të bazave 12 cm dhe 6 cm, përkatësisht, dhe lartësi 2 cm.
4. Llogaritni vëllimin e trungut të piramidës, nëse syprinat e bazave janë  $162 \text{ cm}^2$  dhe  $72 \text{ cm}^2$ , përkatësisht, kurse lartësia e piramidës përkatëse të plotësuar është 18 cm.
5. Lartësia e trungut të piramidës trekëndore është 6 cm. Brinjët e njërës bazë janë 5 cm, 12 cm dhe 13 cm, përkatësisht, kurse perimetri i bazës tjetër është 15 cm. Llogaritni vëllimin e trungut të piramidës.
6. Për ndërtimin e themelit për shtyllën prej betoni, përdoret themeli në formë të trungut të piramidës së rregullt katërkëndore me brinjë të bazave 6 m dhe 2 m, përkatësisht, dhe lartësi 3 m. Çmimi për  $1 \text{ m}^3$  beton është 100 euro dhe planifikohet edhe rezervë betoni prej 10%.
  - a) Sa do të jetë sasia e betonit që do të përdoret për ndërtimin e themelit?
  - b) Sa është sasia e përgjithshme e betonit që duhet të sigurohet?
  - c) Sa do të kushtojë gjithsej themeli prej betoni?

## 6.8 SYPRINA DHE VËLLIMI I KONIT

### Rikujtoni!

- Çka është sektori rrethor që i përgjigjet këndit qendror  $\alpha$  të vijës rrethore me rreze  $s$ ?
- Gjatësia e harkut të sektorit rrethor të përcaktuar me këndin qendror  $\alpha$  në vijën rrethore me rreze  $s$  llogaritet me formulën  $l = \frac{s\pi\alpha}{180^\circ}$ .
- Syprina e sektorit rrethor të përcaktuar me këndin qendror  $\alpha$  në vijën rrethore me rreze  $s$  llogaritet me formulën  $S = \frac{s^2\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{s\pi\alpha}{180^\circ} \cdot \frac{s}{2} = \frac{l \cdot s}{2}$ , ku  $l$  është gjatësia e harkut që i përgjigjet sektorit rrethor.

Për të caktuar syprinën e konit me rreze  $r$  dhe përfutuese  $s$ , e zbërthejmë konin si në vizatimin 1.



Vizatimi 1

Baza e konit është rreth me rreze  $r$ , prandaj për syprinën e saj kemi  $B = r^2\pi$ .

Mbështjellësi anësor i konit është sektor rrethor i rrethit me rreze  $s$ , për të cilin dimë se harku përkatës ka gjatësinë e njëjtë me gjatësinë e bazës së konit, d.m.th.  $l = 2\pi r$ . Nga këtu, syprina e mbështjellësit të konit është

$$M = \frac{l \cdot s}{2} = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \pi rs.$$

### Mbani mend!

Syprina  $S$  e konit është shuma e syprinës së bazës  $B$  dhe syprinës së sipërfaqes anësore  $M$

$$S = \pi r^2 + \pi rs, \text{ d.m.th. } S = \pi r(r + s).$$

### Shembulli 1

Llogaritni syprinën e konit me lartësi  $H = 24$  cm dhe përfutuese  $s = 26$  cm.

**Zgjidhje:**

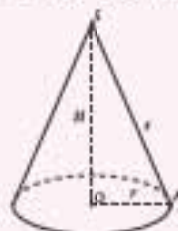
Duke e zbatuar teoremën e Pitagorës, nga trekëndëshi kënddrejtë AOS, kemi:

$$r^2 = s^2 - H^2 = 26^2 - 24^2 = 676 - 576 = 100,$$



prandaj fitojmë rrezen  $r = 10$  cm. Tani me zëvendësimin e vlerave për  $s$  dhe  $r$  në formulën për syprinën e konit, fitojmë:

$$S = \pi r(r + s) = \pi \cdot 10 \cdot (10 + 26) = 360\pi \text{ cm}^2.$$



Vizatimi 2

### Detyra 1

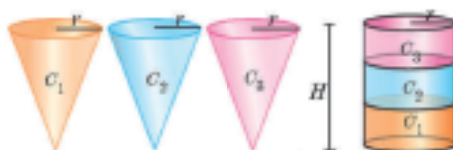
Llogaritni syprinën e konit me lartësi 21 cm dhe perimetër të bazës  $56\pi$  cm.

### Rikujtoni!

- Cila është formula për llogaritjen e vëllimit të cilindrit?
- E sata pjesë e vëllimit të prizmit mbushet me vëllimin e piramidës, nëse prizmi dhe piramida kanë bazë të njëjtë dhe lartësi të barabarta?

Që të gjejmë formulën për vëllimin e konit, le të shqyrtojmë tre kone të barabarta me rreze  $r$  të bazës dhe lartësi  $H$ . Supozojmë se i kemi mbushur me rërë. Nëse rëra nga tre konet, njëra pas tjetrës, bartet në cilindrin me rreze të njëjtë  $r$  të bazës dhe me lartësi të njëjtë  $H$ , do të vërejmë se cilindri mbushet saktësisht përplot, deri në majë, pa mbetje (Vizatimi 3). Nga këtu përfundojmë se vëllimi i një koni është i barabartë me një të tretën e vëllimit të cilindrit me rreze të njëjtë të bazës dhe lartësi të njëjtë, d.m.th.

$$V_{\text{koni}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{cilindri}} = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$



Vizatimi 3

### Mbani mend!

Vëllimi i konit me rreze të bazës  $r$  dhe lartësi  $H$  llogaritet me formulën:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$

### Shembulli 2

Njehsoni vëllimin e konit me rreze 8 cm dhe syprinë të mbështjellësit anësor  $136\pi \text{ cm}^2$ . Kontrolloni zgjidhjen me GeoGebra.

**Zgjidhje:**

Nga formula për syprinën e sipërfaqes së anshme të konit  $M = \pi rs$ , fitojmë barazimin  $136\pi = \pi \cdot 8 \cdot s$ , dhe, nga këtu fitojmë  $s = \frac{136}{8} = 17 \text{ cm}$ . Nga teorema e Pitagorës, lartësia  $H$  mund të shprehet si  $H^2 = s^2 - r^2$

(Vizatimi 2). Duke zëvendësuar vlerat për  $r$  dhe  $s$ , fitojmë  $H^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$ , d.m.th.

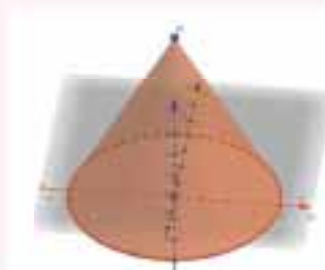
$H = 15 \text{ cm}$ . Përfundimisht, duke e shfrytëzuar formulën për vëllimin e konit, fitojmë:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 320\pi \text{ cm}^3.$$

Zgjidhjen do ta verifikojmë duke e përdorur softuerin GeoGebra. Në fushën për futjen e madhësive ("Input Bar") futim pikën  $A(0,0,0)$  që përfaqëson qendrën e bazës së konit dhe pikën  $B(0,0,15)$  që përfaqëson kulmin e konit i cili gjendet në lartësinë 15 njësi mbi bazën. Në fund fusim  $(A,B,8)$  (Figura 1 a)). Më pas, me shtypjen e butonit "Enter" do të vizatohet një kon rrethor i drejtë me rreze 8 cm dhe lartësi 15 cm (Figura 1 b)) dhe në fushën për futjen e të dhënave në mënyrë automatike do të shfaqet vlera e vëllimit të konit (Figura 1 a)).



a)



b)

Figura 1

### Detyra 2

Llogaritni vëllimin e konit barabrinjës me syprinë  $108\pi \text{ cm}^2$ .

### Shembulli 3

Llogaritni syprinën dhe vëllimin e konit, përfutjesja e të cilit është për 2 cm më e madhe se lartësia, kurse diametri i bazës është 12 cm.

**Zgjidhje:**

Nga kushti i detyrës është dhënë se  $s = H + 2$  dhe  $d = 12 \text{ cm}$ , prandaj për rrezen e bazës kemi

$$r = 12 : 2 = 6 \text{ cm}.$$

Tani, bëjmë zëvendësimet në formulën  $s^2 = H^2 + r^2$  dhe fitojmë  $(H + 2)^2 = H^2 + 6^2$ , d.m.th.

$$H^2 + 4H + 4 = H^2 + 36,$$

$$4H = 32,$$

prandaj lartësia  $H = 8$  cm.

Për përfutuesen fitojmë  $s = 8 + 2 = 10$  cm.

Duke marrë zëvendësimet në formulën për syprinën dhe vëllimin e konit, fitojmë:

$$S = \pi(r + s) = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 10) = 96\pi \text{ cm}^2 \text{ dhe } V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \text{ cm}^3.$$

### Shembulli 4

Sa metër kub ka një mullar me sanë në formë koni, nëse perimetri i bazës është 37,68 m, kurse përfutuesja është 10 m?

**Zgjidhje:**

Është dhënë se perimetri i bazës është  $l = 37,68$  m dhe përfutuesja  $s = 10$  m, prandaj nga formula për perimetrin e rrethit kemi  $2r\pi = 37,68$ . Nga këtu, për rrezen e bazës fitojmë:

$$r = \frac{37,68}{2\pi} = \frac{37,68}{6,28} = 6 \text{ m}.$$

Më tej, nga formula  $s^2 = H^2 + r^2$  kemi  $H^2 = 10^2 - 6^2 = 64$ , prandaj  $H = 8$  m.

Për vëllimin e konit fitojmë  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \approx 301 \text{ m}^3$ , që do të thotë se mullari me sanë ka përafërsisht  $301 \text{ m}^3$  sanë.

### Detyra 3

Në një kopsht formohet një grumbull, kupë, me rërë të thatë (për një teren loje) në formë koni. Perimetri i bazës rrethore është  $l = 31,4$  m, përfutuesja e konit është  $s = 8$  m, kurse dendësia e rërës është  $\rho = 1,6 \text{ t/m}^3$ .

- Sa metër kub rërë ka në këtë grumbull?
- Sa është masa e përgjithshme e rërës e matur me tonelata?

### Detyra për ushtrime!

- Në çfarë raporti me njëri-tjetrin janë vëllimet e dy koneve me lartësi të njëjtë, nëse diametrat e bazave të tyre janë 40 cm dhe 1 m, përkatësisht? Rezultati të verifikohet me GeoGebra, nëse lartësia e koneve është  $H = 20$  cm.
- Trekëndëshi kënddrejtë me katete 30 cm dhe 40 cm rrotullohet rreth hipotenuzës. Gjeni syprinën dhe vëllimin e trupit të fituar në këtë mënyrë.
- Raporti i rrezes dhe lartësisë së konit të drejtë është si 2:3, kurse syprina e mbështjellësit është  $8\pi\sqrt{13} \text{ cm}^2$ . Llogaritni vëllimin e këtij koni.
- Na ena që përmban 5 litra ujë mbushen disa gota në formë koni me rreze 4 cm të bazës dhe përfutuese 4 cm. Sa gota mund të mbushen me këtë sasi uji?
- Llogaritni sa kushton pëlhura me të cilën është mbuluar një shator në formë koni, me lartësi 4 m dhe perimetër të bazës prej 18,84 m, nëse  $1 \text{ m}^2$  pëlhurë kushton 150 denarë?
- Sa kamionë pesëtonësh duhen për transportin e 15 grumbujve me rërë në formë koni me perimetër të bazës 12 m dhe lartësi 9m secili? Masa e  $1 \text{ m}^3$  rërë është 1,5 tonelata.

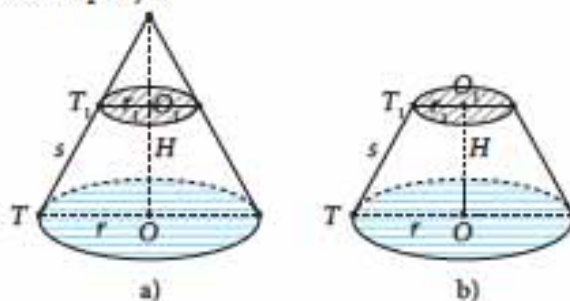


## 6.9 SYPRINA DHE VËLLIMI I TRUNGUT TË KONIT

### Rikujtoni!

- Çka është prerja paralele, e çka prerja boshtore e konit?
- Çka është koni brinjënjëshëm?
- Çka është çdo prerje boshtore e trungut të konit?

Në vizatimin 1 a) është paraqitur koni dhe një prerje e tij paralele, përderisa në vizatimin 1 b) në veçanti është paraqitur pjesa ndërmjet bazës dhe prerjes.

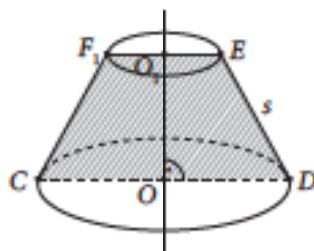


Vizatimi 1

### Mbani mend!

- Pjesa e konit që gjendet ndërmjet bazës dhe një prerjeje paralele të konit quhet **trung i konit**.
- Baza dhe prerja paralele e konit quhen **baza** të trungut të konit, kurse segmenti pikat e skajshme të të cilit janë qendrat e bazave quhet **bosht** i trungut të konit.
- Distanca ndërmjet bazave quhet lartësi, kurse pjesa e përfutueses së konit e zënë ndërmjet bazave quhet **gjeneratrisë** ose **përfutuese** e trungut të konit.

Po ashtu, trungu i konit mund të fitohet me rrotullimin e trapezit kënddrejtë rreth krahut më të shkurtë (trapezi ODEO, në vizatimin 2) ose me rrotullimin e trapezit barakrahës rreth boshtit të tij të simetrisë (trapezi CDEF në vizatimin 2).



Vizatimi 2

### Shembulli 1

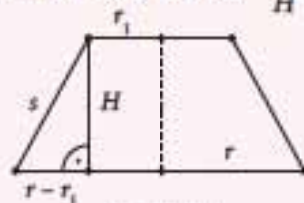
Llogaritni rrezën e bazës më të vogël të trungut të konit, nëse lartësia e tij është 10 cm, rrezja e bazës më të madhe është 8 cm, kurse syprina e prerjes së tij boshtore është  $130 \text{ cm}^2$ .

**Zgjidhje:**

Është dhënë se  $H = 10 \text{ cm}$ ,  $r = 8 \text{ cm}$  dhe  $Q = 130 \text{ cm}^2$ . Prerja boshtore është trapez barakrahës (Vizatimi 3),

me baza  $2r$  dhe  $2r_1$ . Nga formula për syprinën e trapezit barakrahës  $Q = \frac{2r + 2r_1}{2} \cdot H = (r + r_1) \cdot H$ , fitojmë

se  $r + r_1 = \frac{Q}{H}$ . Nga këtu, rrezja e bazës më të vogël është  $r_1 = \frac{Q}{H} - r = \frac{130}{10} - 8 = 5 \text{ cm}$ .



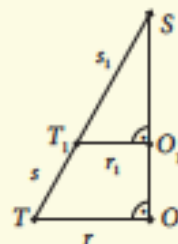
Vizatimi 3

### Detyra 1

Rrezet e bazave të një trungu të konit janë 13 cm dhe 8 cm, kurse përfutjesja e tij është 13 cm. Llogaritni syprinën e prerjes boshtore të trungut të konit.

### Rikujtoni!

- Cilët trekëndësja në vizatimin 4 janë të ngjashëm?
- Si janë mes veti brinjët përkatëse të trekëndësive të ngjashëm?



Vizatimi 4

### Mbani mend!

Syprina e trungut të konit është e barabartë me shumën e syprinës së bazave dhe syprinës së sipërfaqes së anshme (mbështjellësit):  $S = B + B_1 + M$ , ku  $B = \pi r^2$ ,  $B_1 = \pi r_1^2$  janë syprinat e bazave, kurse  $M$  është syprina e sipërfaqes së anshme.

Syprina e sipërfaqes së anshme të trungut të konit llogaritet si ndryshimi i syprinës së sipërfaqes së anshme të konit të plotë dhe syprinës së sipërfaqes së anshme të pjesës plotësuese (deri në konin e plotë). Sipas vizatimit 4, fitojmë:

$$M = \pi \cdot r \cdot \overline{ST} - \pi \cdot r_1 \cdot \overline{ST_1} = \pi \cdot r \cdot (s + s_1) - \pi \cdot r_1 \cdot s_1 = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r \cdot s_1 - \pi \cdot r_1 \cdot s_1,$$

d.m.th.

$$M = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot (r - r_1) \cdot s_1$$

Në këto formula s është gjeneratrissa, përfutjesja, e trungut të konit, kurse  $s + s_1$  është gjeneratrissa e konit të plotë.

Meqenëse trekëndëshat  $SOT$  dhe  $SO_1T_1$  janë të ngjashëm, rrjedh se brinjët përkatëse të tyre janë proporcionale,

prandaj  $\frac{r}{r_1} = \frac{s_1 + s}{s_1}$ . Nga këtu fitojmë  $s_1 = \frac{s \cdot r_1}{r - r_1}$ . Duke zëvendësuar  $s_1$  në barazimin e fundit për  $M$  fitojmë:

$$M = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot (r - r_1) \cdot \frac{s \cdot r_1}{r - r_1} = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r_1 \cdot s = \pi \cdot s \cdot (r + r_1).$$

### Mbani mend!

Syprina e trungut të konit me reze të bazave  $r$  dhe  $r_1$  dhe gjeneratrisë  $s$  llogaritet me formulën:

$$S = \pi r^2 + \pi r_1^2 + \pi \cdot s \cdot (r + r_1),$$

d.m.th.

$$S = \pi(r^2 + r_1^2 + s \cdot (r + r_1)).$$

### Shembulli 2

Trungu i konit që fitohet me rrotullimin e trapezit barakrahës rreth boshtit të tij të simetrisë ka diametra të bazave 18 cm dhe 8 cm, përkatësisht, dhe lartësi 12 cm. Llogaritni syprinën e trungut të konit.

**Zgjidhje:**

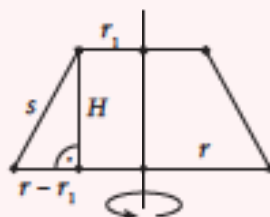
Është dhënë se bazat kanë diametra 18 cm dhe 8 cm, prandaj rrezet e bazave të këtij trungu të konit janë

$r = \frac{18}{2} = 9$  cm dhe  $r_1 = \frac{8}{2} = 4$  cm. Nga trekëndëshi kënddrejtë në vizatimin 5 gjejmë

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ cm}.$$

Duke zëvendësuar në formulën për syprinën, fitojmë:

$$S = \pi(9^2 + 4^2 + 13 \cdot (9 + 4)) = 266\pi \text{ cm}^2.$$



Vizatimi 5

### Detyra 2

Llogaritni syprinën e sipërfaqes së anshme dhe syprinën e trungut të konit rrezet e bazave të të cilit janë 12 cm dhe 6 cm, kurse përfutjesja është 8 cm.



### Shembulli 3

Llogaritni syprinën e trungut të konit me lartësi 15 cm dhe rreze të bazave 28 cm dhe 8 cm, përkatësisht.

**Zgjidhje:**

Në kushtin e detyrës është dhënë:  $H = 15$  cm,  $r = 28$  cm dhe  $r_1 = 8$  cm.

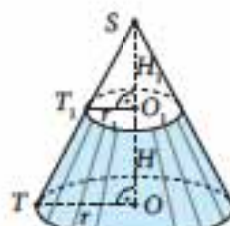
Nga trekëndëshi kënddrejtë në vizatimin 5, fitojmë:

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{(28 - 8)^2 + 15^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ cm.}$$

Me zëvendësim në formulën për syprinën fitojmë:

$$S = \pi(r^2 + r_1^2 + s \cdot (r + r_1)) = \pi(28^2 + 8^2 + 25 \cdot (28 + 8)) = 1748\pi \text{ cm}^2.$$

Vëllimin e trungut të konit e gjejmë si ndryshim i vëllimit të konit të plotë dhe vëllimit të pjesës plotësuese (deri në kon të plotë) (Vizatimi 6).



Vizatimi 6

Sipas formulave për vëllimin e konit, kemi:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \overline{SO} - \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot \overline{SO_1} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot (H + H_1) - \frac{1}{3} \pi r_1^2 \cdot H_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi (r^2 - r_1^2) H_1.$$

Në formulën e fundit  $H$  është lartësia e trungut të konit, kurse  $H + H_1$  është lartësia e konit të plotë (bashkë me pjesën plotësuese).

Në vazhdim do ta shprehim lartësinë  $H_1$  të pjesës plotësuese të konit përmes  $r$ ,  $r_1$  dhe  $H$ . Nga ngjashmëria

e trekëndëshave  $SOT$  dhe  $SO_1T_1$ , kemi:  $\frac{r}{r_1} = \frac{H + H_1}{H_1}$ , prej ku kemi se  $H_1 = \frac{r_1 H}{r - r_1}$ . Me zëvendësimin e  $H_1$  në

formulën për vëllimin, formula merr trajtën në vijim:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi (r - r_1)(r + r_1) \frac{r_1 H}{r - r_1} = \frac{H \pi}{3} (r^2 + r_1^2 + r r_1).$$

### Mbani mend!

Vëllimi i trungut të konit me rreze të bazave përkatëse  $r$  dhe  $r_1$  dhe lartësi  $H$  llogaritet me formulën:

$$V = \frac{H \pi}{3} (r^2 + r_1^2 + r r_1).$$

**Shembulli 4**

Saksia me lule ka formën e trungut të konit me lartësi 12 cm dhe rreze të bazave 15 cm dhe 10 cm.

- Sa truall nxë saksia?
- Llogaritni syprinën e sipërfaqes së anshme të saksisë.

**Zgjidhje:**

Në kushtet e detyrës janë dhënë vlerat:  $H = 12$  cm,  $r = 15$  cm dhe  $r_1 = 10$  cm.

- Duke zëvendësuar vlerat e mësipërme në formulën për vëllimin fitojmë

$$V = \frac{12\pi}{3}(15^2 + 10^2 + 15 \cdot 10) = 1900\pi \text{ cm}^3.$$

Pra, në saksi mund të futim  $1900\pi \text{ cm}^3 \approx 6000 \text{ cm}^3$  ose  $6 \text{ dm}^3$  truall.

- Nga vizatimi 5, për gjeneratrisën kemi  $s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$  cm, prandaj për syprinën e sipërfaqes së anshme të trungut të konit fitojmë:

$$M = \pi \cdot s \cdot (r + r_1) = \pi \cdot 13 \cdot (15 + 10) = 325\pi \text{ cm}^2.$$

**Shembulli 5**

Një kovë, e bërë prej llamarine, ka formë të trungut të konit me diametra të bazave 20 cm dhe 36 cm, përkatësisht, dhe lartësi 28 cm.

- Sa litra ujë nxë kova?
- Sa metra katrorë llamarinë duhet siguruar për prodhimin e 40 kovave të tilla nëse dihet se 10% e llamarinës që do të përdoret, do të shkojë dëm?

**Zgjidhje:**

- Nga kushtet e detyrës kemi:  $d = 20$  cm,  $d_1 = 36$  cm, dhe  $H = 28$  cm. Për rrezet e bazave fitojmë  $r = 10$  cm dhe  $r_1 = 18$  cm. Që të llogaritet sa litra ujë nxë kova, nevojitet të llogaritet vëllimi i trungut të konit, prandaj me zëvendësimin në formulën për vëllimin, fitojmë:

$$V = \frac{28\pi}{3}(10^2 + 18^2 + 10 \cdot 18) = 5637,33\pi \text{ cm}^3 \approx 17701,23 \text{ cm}^3 = 17,7 \text{ dm}^3 = 17,7 \text{ l}.$$

Pra, kova nxë përafërsisht 17,7 litra ujë.

- Që të llogaritim syprinën e kovës, fillimisht na duhet të gjejmë gjatësinë e gjeneratrisës  $s$ :

$$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + H^2} = \sqrt{8^2 + 28^2} = 29,1 \text{ cm}.$$

Më pas, duhet ta gjejmë syprinën e kovës pa bazën e sipërme. Le të nënvizojmë se në rastin e kovës, baza më e madhe është nga ana e sipërme, prandaj syprina e kërkuar do të jetë:

$$\begin{aligned} S &= B + M = \pi r^2 + \pi \cdot s \cdot (r + r_1) = \pi \cdot (10^2 + 29,1 \cdot (10 + 18)) = \\ &= 914,8\pi \text{ cm}^2 = 2872,5 \text{ cm}^2 \approx 0,287 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Për 40 kova duhen  $40 \cdot 0,287 \text{ m}^2 = 11,5 \text{ m}^2$  llamarinë. Sasia e përgjithshme e llamarinës së siguruar (bashkë me pjesën që do të shkonte dëm) është  $11,5 / 0,9 \approx 12,8 \text{ m}^2$ .

**Detyra 3**

Në një fabrikë për produkte kimike përdoret një rezervuar metalik me formë të trungut të konit, i cili është i hapur nga sipër. Diametri i bazës së sipërme është 2,4 m, diametri i bazës së poshtme është 3,6 m, kurse lartësia e rezervuarit është 2 m.

- Llogaritni vëllimin e lëngut që mund të depozitohet në këtë rezervuar.
- Sa është syprina e sipërfaqes së anshme të brendshme që duhet të vishet me shtresë mbrojtëse?
- Nëse 1 m<sup>2</sup> shtresë mbrojtëse kushton 18 euro, atëherë sa kushton veshja e sipërfaqes së brendshme?

**Detyra për ushtrime!**

- Llogaritni syprinën e trungut të konit me rreze të bazave 10 cm dhe 6 cm, përkatësisht, nëse lartësia e pjesës plotësuese deri në kon të plotë është 12 cm.
- Trapezi barakrahës me baza 50 cm dhe 30 cm, përkatësisht, dhe syprinë 960 cm<sup>2</sup> rrotullohet rreth boshtit të tij të simetrisë. Llogaritni syprinën dhe vëllimin e trupit të fituar.
- Llogaritni syprinën e trungut të konit që fitohet si rezultat i rrotullimit rreth krahut më të vogël të trapezit kënddrejtë me baza 22 cm, 14 cm dhe krahun më të shkurtë 15 cm.
- Rrezet e bazave të trungut të një koni sillen si 5:3. Llogaritni syprinën dhe vëllimin e tij, nëse është dhënë se lartësia e trungut të konit është 12 cm, kurse syprina e bazës më të madhe është 100π cm<sup>2</sup>.
- Caktoni rrezet e cilindrit që ka lartësi të njëjtë dhe syprinë të njëjtë të sipërfaqes së anshme si trugu i konit me rrezet e bazave 10 dm dhe 4 dm, përkatësisht, dhe përfutuese 10 dm.
- Në një kopsht planifikohet të bëhet një vazo dekorative për lule në formë të trungut të konit, e cila do të nxë 4961,2 cm<sup>3</sup> truall. Sa është lartësia e vazos, nëse rrezet e bazave të saj janë 14 cm dhe 6 cm, përkatësisht.



## 6.10 SYPRINA E SIPËRFAQES SFERIKE DHE PJESËVE TË SAJ

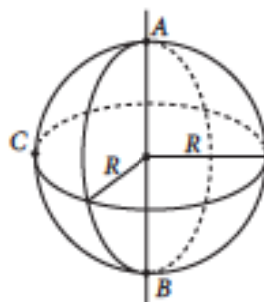
### Rikujtoni!

Si quhet bashkësia e gjitha pikave të rrafshit që gjenden në largësi të njëjtë nga një pikë e dhënë?

### Mbani mend!

- Bashkësia e gjitha pikave të hapësirës që janë në largësi të njëjtë të dhënë  $R$ , nga një pikë e dhënë  $O$ , quhet **sipërfaqe sferike** dhe shënohet me  $S(O, R)$ . Pika  $O$  quhet **qendër** e sipërfaqes sferike ose qendër e sferës.
- Segmenti që bashkon qendrën e sipërfaqes sferike me cilëndo pikë të saj quhet **rreze** e sipërfaqes sferike, ose qendër e sferës, dhe shënohet me  $R$ .
- Segmenti që bashkën dy pika të çfarëdoshme të sipërfaqes sferike quhet **kordë**.
- Korda e cila kalon nëpër qendrën e sferës quhet **diametër** i sipërfaqes sferike.

Vëreni se sipërfaqja sferike është sipërfaqe rrotulluese, e cila fitohet me rrotullimin e gjysmë vijës rrethore rreth një diametri të saj (Vizatimi 1)

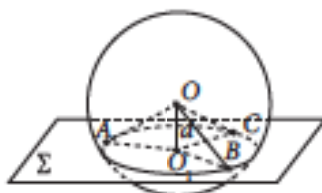


Vizatimi 1

Largësia pingule  $d$  nga qendra  $O$  e sferës deri te rrafshi i dhënë  $\Sigma$  quhet **largësi qendrore** e sferës dhe rrafshit. Nëse  $d > R$ , atëherë sipërfaqja sferike dhe rrafshi nuk kanë pika të përbashkëta.

Nëse  $d = R$ , atëherë sipërfaqja sferike dhe rrafshi kanë një pikë të përbashkët, prandaj në këtë rast rrafshi e prek, e takon, sipërfaqen sferike dhe quhet **rrafsh tangjent**.

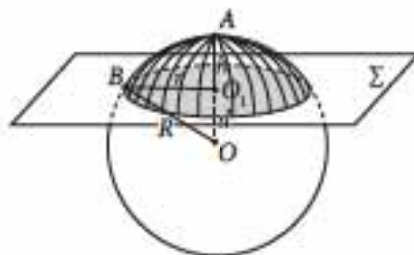
Nëse  $d < R$ , atëherë rrafshi e pret sipërfaqen sferike dhe prerja, në këtë rast, është vijë rrethore (Vizatimi 2).



Vizatimi 2

Nëse rrafshi kalon nëpër qendrën e sipërfaqes sferike, atëherë prerja e rrafshit dhe sipërfaqes sferike është vija rrethore me rreze të barabartë sa rrezja e sferës. Kjo vijë rrethore është vija rrethore më e madhe që mund të fitohet si prerje e sipërfaqes sferike me rrafshin dhe e ndan sipërfaqen sferike në dy gjysmësfera. Vijat e tilla rrethore i quajmë **vija rrethore prerëse kryesore**.

Nëse rrafshi  $\Sigma$  e pret sipërfaqen sferike dhe nuk kalon nëpër qendër, atëherë sipërfaqja sferike ndahet në dy pjesë jo të barabarta dhe secilën prej tyre e quajmë **kësulë sferike** (ose **kalotë**). Me marrëveshje, për kësulë e marrim pjesën më të vogël të sferës. Kësula sferike ka lartësinë e vet  $h$  (Vizatimi 3).



Vizatimi 3

### Shembulli 1

Caktoni lartësinë e kësulës sferike që fitohet kur sipërfaqja sferike pritet me rrafsh në largësi 12 cm nga qendra, kurse perimetri i vijës rrethore që fitohet me këtë prerje është  $10\pi$  cm.

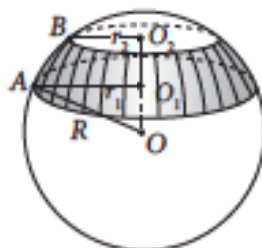
**Zgjidhje:**

Nga formula për perimetrin e vijës rrethore kemi  $P = 2\pi r$ , prej nga me zëvendësim fitojmë  $2\pi r = 10\pi$  dhe  $r = 5$  cm. Nga vizatimi 3, largësia është  $d = \overline{OO_1}$ , kurse rrezja  $r = \overline{O_1B}$ , prandaj nga trekëndëshi kënddrejtë  $\triangle OO_1B$  fitojmë  $R^2 = 12^2 + 5^2$ . Nga këtu gjejmë se  $R = 13$  cm. Lartësia e kësulës sferike është  $h = \overline{OA} - d = R - d = 13 - 12 = 1$  cm.

Pjesa e sipërfaqes sferike që gjendet ndërmjet dy rrafsheve prerëse, që janë paralele mes veti, quhet **zonë sferike** ose **shtresë sferike** (shkurt vetëm **zonë** ose **shtresë**) (Vizatimi 4).

Distanca ndërmjet dy rrafsheve paralele quhet **lartësi** e zonës sferike. Në vizatimin 4, lartësia e zonës është gjatësia e segmentit  $\overline{O_1O_2}$  d.m.th.  $h = \overline{O_1O_2}$ .

Nëse  $d_1 = \overline{OO_1}$  dhe  $d_2 = \overline{OO_2}$  janë distancat, largësitë, qendrore të prerjeve, rrafsheve paralele, atëherë  $h = d_2 - d_1$  nëse prerjet janë në anë të njëjtë në lidhje me qendrën, kurse  $h = d_1 + d_2$  nëse prerjet janë në anë të ndryshme të qendrës.



Vizatimi 4

**Detyra 1**

Sipërfaqja sferike është prerë me rrafsh, i cili është në distancë 15 cm nga qendra e sferës. Lartësia e kësulës sferike që fitohet është 10 cm. Caktoni perimetrin e vijës rrethore prerëse.

**Aktivitet 1**

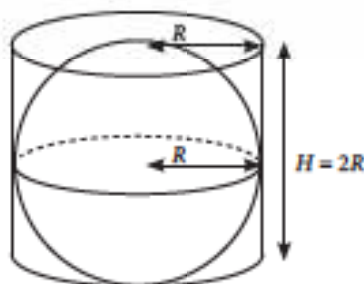
Nevojitet një top i vogël (për shembull top ping-pongu) dhe lentë prej letre ose letër e hollë. Me lentën e letrës mbështillni topin përgjatë rrethit më të madh (ekuatorit).

- Matni gjatësinë e lentës – është përafërsisht vlera e perimetrit  $2\pi R$ .
- Përgatitni një drejtkëndësh prej letre me:
  - gjerësi sa perimetri i matur
  - lartësi përafërsisht sa diametri  $2R$  i topit.
- Drejtkëndëshi, i palosur për topin, paraqet sipërfaqen anësore të cilindrit rreth sferës.

Caktoni lidhjen mes syprinës së sipërfaqes sferike dhe syprinës së sipërfaqes anësore të cilindrit.

**Syprina e sipërfaqes sferike**

Le të jetë dhënë sipërfaqja sferike me rreze  $R$ . Rreth saj përshkojmë një cilindër me rreze  $R$  të bazës dhe lartësi  $H = 2R$ . Sipërfaqja sferike e takon cilindrin në bazën e sipërme dhe të poshtme dhe përgjatë një vije rrethore kryesore prerëse (Vizatimi 5).



Vizatimi 5

Për nxjerrjen e formulës për syprinën e sipërfaqes sferike do ta përdorim rezultatin e Arkimedit, i cili ka vërtetuar se:

**Syprina e sipërfaqes sferike është sa syprina anësore e cilindrit të jashtëshkruar sferës.**

Pra, përcaktimi i syprinës së sferës shndërrohet në përcaktimin e syprinës së mbështjellësit anësor të cilindrit të jashtëshkruar saj (Vizatimi 5), dhe kjo syprinë është

$$M = 2\pi R \cdot H = 2\pi R \cdot 2 \cdot R = 4\pi R^2.$$

**Mbani mend!**

Syprina e sipërfaqes sferike me rreze  $r$  është  $S_{\text{sferike}} = 4\pi R^2$ .

Syprina e sferike me rreze  $R$  është sa katërfishi i syprinës së rrethit me rreze  $R$ .



**Shembulli 2**

Rrezja e një sipërfaqe sferike është  $R = 7$  cm. Njehsoni syprinën e saj.

**Zgjidhje:**

Nga formula për gjetjen e syprinës së sipërfaqes sferike, duke marrë zëvendësimin për rrezën e dhënë, kemi

$$S_{\text{sferika}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 7^2 = 196\pi \text{ cm}^2.$$

**Detyra 2**

Sfera metalike ka syprinë  $324\pi \text{ cm}^2$ . Gjeni rrezën e sferës.

**Syprina e kësulës sferike**

Le të jetë  $R$  rrezja e sipërfaqes sferike, kurse  $h$  lartësia e kësulës sferike. Për përcaktimin e syprinës së kësaj kësule sferike, përsëri do të shërbehemi me rezultatin e Arkimedit, i cili ka vërtetuar se:

Syprina e kësulës sferike me rreze  $R$  dhe lartësi  $h$  është e barabartë me syprinën e mbështjellësit anësor të cilindrit me rreze  $R$  dhe lartësi  $h$ .

Kjo, në fakt, është ideja e njëjtë që e përdorim gjatë përcaktimit të syprinës së gjithë sipërfaqes sferike, përveçse tani kërkohet syprina e vetëm "një pjese" të saj. Syprina e mbështjellësit anësor të cilindrit me rreze  $R$  dhe lartësi  $h$  është

$$M = 2\pi R \cdot h.$$

Sipas rezultatit të Arkimedit, me po këtë formulë llogaritet edhe syprina e kësulës sferike.

**Mbani mend!**

Syprina e kësulës sferike me lartësi  $h$ , e sipërfaqes sferike me rreze  $R$ , gjendet me formulën:

$$S_{\text{kësula}} = 2\pi R \cdot h.$$

Formula nuk varet nga rrezja e prerjes rrethore të sipërfaqes sferike dhe rrafshit me të cilin është fituar kësula.

**Shembulli 3**

Kësula sferike ka syprinë  $40\pi \text{ dm}^2$ . Rrezja e sipërfaqes sferës është  $R = 5$  dm. Caktoni lartësinë e kësulës sferike.

**Zgjidhje:**

Nga formula për syprinën e kësulës sferike  $S_{\text{kësula}} = 2\pi R \cdot h$  fitojmë  $h = \frac{S_{\text{kësula}}}{2\pi R} = \frac{40\pi}{2\pi \cdot 5} = 4 \text{ dm}$ .

**Detyra 3**

Sipërfaqja sferike ka rreze  $R = 10$  cm. Me një rrafsh është prerë kësula sferike me lartësi  $h = 3$  cm. Llogaritni syprinën e kësulës sferike.

**Syprina e zonës sferike**

Rrezja e sipërfaqes sferike le të jetë  $R$ , kurse lartësia e zonës le të jetë  $h$  si dhe zona le të jetë  $e$  formuar me dy rrafsh paralele që gjenden në anën e njëjtë të qendrës. Secila zonë kështu e formuar mund të shihet si ndryshim i dy kësulave sferike. Kësulat sferike le të kenë lartësitë  $h_1$  dhe  $h_2$  ( $h_1 < h_2$ ), ku  $h = h_2 - h_1$ .

Syprinat e dy kësulave, përkatësisht, janë

$$S_1 = 2\pi R \cdot h_1 \text{ dhe } P_2 = 2\pi R \cdot h_2.$$

Syprina e zonës sferike përcaktohet si ndryshim i këtyre dy syprinave:

$$S_{\text{zona}} = P_2 - P_1 = 2\pi R \cdot h_2 - 2\pi R \cdot h_1 = 2\pi R (h_2 - h_1) = 2\pi R h.$$

Formula e njëjtë për llogaritjen e syprinës së zonës fitohet edhe nëse zona sferike është formuar me dy rrafsh paralele që gjenden në anë të ndryshme të qendrës.

**Mbani mend!**

Syprina e zonës sferike me lartësi  $h$ , në sipërfaqen sferike me rreze  $R$ , përcaktohet me formulën:

$$S_{\text{zona}} = 2\pi R \cdot h.$$

Duke i krahasuar dy formulat paraprake për syprinën e kësulës sferike dhe të zonës sferike mund të përfundojmë se nëse kësula dhe zona e një sipërfaqe sferike kanë lartësi të njëjta, atëherë ato kanë syprina të njëjta. Kjo syprinë varet vetëm nga  $R$  dhe  $h$ , por jo edhe nga vendndodhja e tyre në vetë sipërfaqen sferike.

**Shembulli 4**

Syprina e një zone sferike është  $36\pi \text{ dm}^2$ . Rrezja e sipërfaqes sferike është  $R = 6$  dm.

- Caktoni lartësinë e zonës.
- Krahasoni syprinën e zonës me syprinën e gjithë sipërfaqes sferike.

**Zgjidhje:**

- Nga formula për syprinën e zonës sferike  $S_{\text{zona}} = 2\pi R h$ , mund të shprehim lartësinë e brezit:

$$h = \frac{S_{\text{zona}}}{2\pi R} = \frac{36\pi}{2\pi \cdot 6} = 3 \text{ dm}.$$

- Syprina e sferës është:

$$S_{\text{sferike}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi \text{ dm}^2.$$

Nëse i krahasojmë këto dy syprina, fitojmë:

$$\frac{S_{\text{zona}}}{S_{\text{sferike}}} = \frac{36\pi}{144\pi} = \frac{1}{4}.$$

d.m.th.

$$S_{\text{sferike}} = 4 \cdot S_{\text{zona}}$$

### Shembulli 5

Njihsoni syprinën e zonës sferike që fitohet kur nga dy anë të ndryshme të qendrës së një sfere konstruktohen dy prerje paralele me rreze 12 cm dhe 16 cm. Distanca mes prerjeve është 28 cm.

**Zgjidhje:**

Nga kushtet e detyrës, lartësia e zonës është  $h = 28$ , kurse rrezet e bazave janë  $r = 16$  cm dhe  $r_1 = 12$  cm. Duhet të përcaktojmë rrezen  $R$  të sipërfaqes sferike, në mënyrë që të gjejmë syprinën e zonës sipas formulës  $S = 2R\pi h$ .

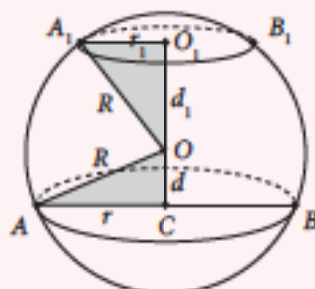
Distanca nga qendra  $O$ , e sipërfaqes sferike, deri të njëra prerje le të jetë  $d$ , kurse distanca nga qendra  $O$  deri te prerja tjetër le të jetë  $d_1$ . Atëherë lartësia e zonës është  $h = d + d_1$ , d.m.th.  $d + d_1 = 28$  dhe  $d_1 = 28 - d$ . I shqyrtojmë trekëndëshat kënddrejtë  $\triangle OO_1A_1$  dhe  $\triangle OCA$  në vizatimin 6. Prej tyre fitojmë barazimet  $R^2 = d_1^2 + r_1^2$  dhe  $R^2 = d^2 + r^2$ . Duke i barazuar marrim  $d^2 + r^2 = d_1^2 + r_1^2$ . Nëse marrim zëvendësimet  $r = 16$  cm,  $r_1 = 12$  cm dhe  $d_1 = 28 - d$  në formulën e fundit, fitojmë ekuacionin sipas  $d$  në formën në vijim:

$$d^2 + 16^2 = (28 - d)^2 + 12^2.$$

Me zgjidhjen e tij, fitojmë:

$$\begin{aligned} d^2 + 256 &= 784 - 56d + d^2 + 144, \\ 56d &= 672, \end{aligned}$$

d.m.th.  $d = 12$  cm. Sipas kësaj, për rrezen e sipërfaqes sferike kemi  $R = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$  cm, përdorësa për syprinën e zonës sferike kemi  $S = 2R\pi h = 2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot 28 = 1120\pi$  cm<sup>2</sup>.



Vizatimi 6

### Detyra 4

Syprina e zonës sferike, e cila është kufizuar me dy prerje paralele nga anë të ndryshme të qendrës së sferës, është  $1750\pi$  cm<sup>2</sup>. Caktoni lartësinë e zonës, nëse rrezet e prerjeve janë 15 cm dhe 20 cm, përkatësisht.

### Detyra 5

Hulumtoni sa është përafërsisht gjerësia e zonës së ozonit rreth Tokës dhe llogaritni përafërsisht syprinën e përgjithshme të sipërfaqes së kësaj zone të ozonit. Pse kjo zonë është e rëndësishme për jetën në Tokë?



**Detyra për ushtrime!**

1. Llogaritni syprinën e sipërfaqes sferike me rreze 7 cm.
2. Sipërfaqja sferike me rreze 5 cm është prerë me një rrafsh dhe, kështu, është fituar një kësulë sferike me lartësi 4 cm. Llogaritni syprinën e kësulës sferike.
3. Një arenë sportesh ka formën e një kupole e fituar nga sfera me rreze 12 m. Caktoni lartësinë e arenës së sportive, nëse dihet që ajo ka syprinën  $100\pi \text{ m}^2$ .
4. Njehsoni syprinën e zonës sferike që është fituar kur në anë të ndryshme në lidhje me qendrën e sipërfaqes sferike janë konstruktuar dy prerje me rrezet përkatëse 7 cm dhe 15 cm. Distanca mes prerjeve është 44 cm.
5. Lartësia e një kësule sferike është 5 cm, kurse rrezja e bazës së tij është 15 cm. Caktoni distancën e prerjes nga qendra e sferës.

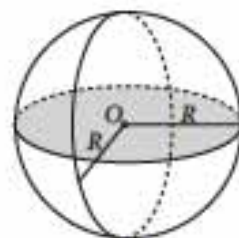
## 6.11 VËLLIMI I SFERËS DHE PJESËVE TË SAJ

### Rikujtoni!

Cila formë 3D fitohet me rrotullimin e vijës rrethore rreth diametrit të saj?

Pjesa e hapësirës që është e kufizuar me sipërfaqen sferike quhet **sferë**. Qendra dhe rrezja e sipërfaqes sferike janë qendra dhe rrezja e sferës, përkatësisht. Nëse rrafshi kalon nëpër qendrën e sferës, atëherë sfera ndahet në dy pjesë kongruente që i quajmë **gjysmësfera**, kurse prerjen e quajmë **rrethi i madh** i sferës.

Në vizatimin 1 është paraqitur skica e sferës me tre rrathët e saj kryesorë, që janë pjesë e tre rrafsheve ndërmjet veti pingul.



Vizatimi 1

### Mbani mend!

- Prerja e sferës me rrafshin është rreth.
- Sfera është formë 3D, e cila fitohet me rrotullimin e gjysmërrethit rreth diametrit të tij.

### Shembulli 1

Një sferë është prerë me dy rrafshet paralele që shtrihen në anë të ndryshme të qendrës. Diametrat e prerjeve janë 30 cm dhe 18 cm, kurse distanca mes tyre është 24 cm. Caktoni syprinën e rrethit kryesor.

**Zgjidhje:**

Sipas të dhënave të detyrës dhe vizatimit 2, kemi:

$$\overline{O_1B} = r_1 = 30 : 2 = 15 \text{ cm}, \quad \overline{O_2A} = r_2 = 18 : 2 = 9 \text{ cm}, \quad \overline{OO_1} = d_1,$$

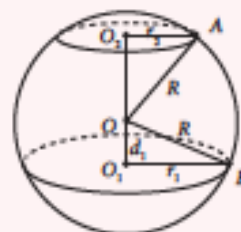
$\overline{OO_2} = 24 - d_1$ . Nga trekëndëshi  $\triangle OO_1B$  del se  $R^2 = d_1^2 + 15^2$ , kurse nga trekëndëshi  $\triangle OO_2A$  kemi  $R^2 = (24 - d_1)^2 + 9^2$ . Duke i barazuar dy ekuacionet e fundit, fitojmë:

$$d_1^2 + 15^2 = (24 - d_1)^2 + 9^2,$$

$$d_1^2 + 225 = 576 - 48d_1 + d_1^2 + 81,$$

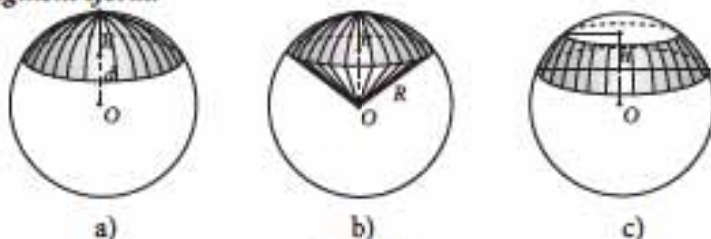
$$48d_1 = 432,$$

prej ku marrim  $d_1 = 9$  cm. Për rrezen e rrethit kryesor fitojmë  $R = \sqrt{9^2 + 15^2} = \sqrt{306}$  cm, kurse për syprinën e rrethit kryesor kemi  $S = R^2\pi = 306\pi$  cm<sup>2</sup>.



Vizatimi 2

Çdo rrafsh që nuk kalon nëpër qendrën e sferës e ndan atë në dy pjesë jo të barabarta dhe secilën prej tyre e quajmë *segment* ose *segment sferik*.



Vizatimi 3

- Segmenti sferik është i kufizuar me kësulën dhe rrethin. Lartësia e kësulës sferike është lartësia e segmentit sferik (Vizatimi 3 a).
- Pjesa e sferës që është e përbërë nga segmenti sferik dhe koni baza e të cilit është baza e segmentit sferik, kurse kulmi i tij është qendra e sferës, quhet *sektor sferik* ose *sektor* (Vizatimi 3 b).
- Pjesa e sferës e zënë mes dy prerjeve paralele quhet *shtresë sferike*. Kufijtë e shtresës sferike janë dy rrrathë dhe zona sferike (Vizatimi 3 c).

## Shembulli 2

Syprina e bazës së segmentit sferik është  $49\pi \text{ cm}^2$ , kurse harku i prerjes boshtore të segmentit ka kënd qendror prej  $60^\circ$ . Gjeni rrezën e sferës dhe lartësinë e segmentit.

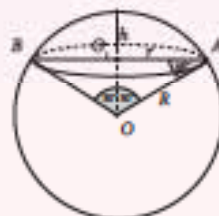
**Zgjidhje:**

Nga formula për syprinën e rrethit kemi  $r^2\pi = 49\pi$ , prej ku për rrezën e bazës së segmentit sferik fitojmë  $r = 7 \text{ cm}$ . Nga kushtet e detyrës,  $\angle AOB = 60^\circ$ , prandaj

$\angle AOO_1 = 30^\circ$  dhe  $\angle OAO_1 = 60^\circ$ . Më tej, nga trekëndëshi kënddrejtë  $OO_1A$  kemi

$$\cos 60^\circ = \frac{r}{R}, \text{ d.m.th. rrezja e sferës është } R = \frac{r}{\cos 60^\circ} = \frac{7}{0,5} = 14 \text{ cm. Ngjashëm, } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{OO_1}, \text{ d.m.th.}$$

$$OO_1 = \frac{r}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{21}{\sqrt{3}} = 7\sqrt{3} \text{ cm. Për lartësinë e segmentit fitojmë } h = R - OO_1 = (14 - 7\sqrt{3}) \text{ cm.}$$



Vizatimi 4

Në vazhdim do të gjejmë formulën për llogaritjen e vëllimit të sferës me rreze  $R$ . Këtu përsëri përdoret përfundimi i Arkimedit, i cili vërtetoi se:

Vëllimi i sferës me rreze  $R$  është sa  $\frac{2}{3}$  e vëllimit të cilindrit me rreze të njëjtë të bazës sa rrezja e sferës dhe me lartësi  $2R$ .

Vëllimi i cilindrit me rreze  $R$  dhe lartësi  $H = 2R$  është

$$V_{cl} = \pi R^2 \cdot H = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Nëse e përdorim përfundimin e Arkimedit, atëherë për vëllimin e sferës kemi

$$V_{sfera} = \frac{2}{3} \cdot V_{cl} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3.$$



**Mbani mend!**

Vëllimi i sferës me rreze  $R$  llogaritet me formulën:

$$V_{\text{sferë}} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3.$$

**Shembulli 3**

Caktoni vëllimin e sferës me rreze  $R = 6$  cm. Rezultatën verifikoni me GeoGebra.

**Zgjidhje:**

Duke zëvendësuar rrezen në formulën që sapo fituam për vëllimin, kemi  $V_{\text{sferë}} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$ .

Për të kontrolluar rezultatën duke përdorur GeoGebra, procedura është me sa vijon. Fillimisht, duke shtypur përzgjedhim pjesën 3D, e më pas përzgjedhim "Sphere: Center & Radius" (Figura 1a)), pastaj shtypim pikën (0,0,0). Do të hapet dritarja në të cilën futim rrezen e sferës (Figura 1 b)).



Figura 1

Më pas, përzgjedhim veglën për llogaritjen e vëllimit (Figura 2 a)) dhe në sferë do të fitojmë rezultatën (Figura 2 b)). Fitohet se vëllimi është  $904,78 \text{ cm}^3$ , me çka është vërtetuar rezultat i fituar më herë ( $288\pi \approx 904,78$ ).

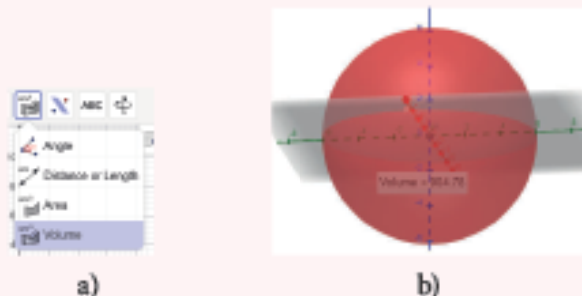


Figura 2

**Detyra 1**

Gjeni vëllimin e sferës me rreze 4 dm.

## Shembulli 4

Tre topa tenisi janë paketuar në një kuti cilindrike me lartësi 18 cm.

- Caktoni vëllimin e një topi tenisi.
- Caktoni vëllimin e hapësirës së cilindrit, e cila nuk është zënë nga topat e tenisit.

**Zgjidhje:**

- Nëse  $R$  është rrezja e një topi tenisi, atëherë lartësia e cilindrit është sa shuma e diametrave të tre topave, d.m.th.  $H = 3d = 3 \cdot 2R = 6R$ . Nga këtu kemi  $6R = 18$  cm, përkatësisht  $R = 3$  cm. Pasi topat e tenisit janë paketuar në kuti, del se edhe rrezja e cilindrit është, gjithashtu,  $R_{\text{cil}} = R = 3$  cm.

Për vëllimin e një topi tenisi, sipas formulës, kemi

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}3^3\pi = 36\pi \text{ cm}^3, \text{ përkatësisht vëllimi i përgjithshëm i tre topave të tenisit është } V_{\text{3T}} = 3 \cdot 36\pi = 108\pi \text{ cm}^3.$$

- Vëllimi i cilindrit është  $V_{\text{cil}} = R^2\pi H = 3^2 \cdot \pi \cdot 18 = 162\pi \text{ cm}^3$ . Vëllimi i hapësirës së pa zënë nga topat e tenisit është sa ndryshimi i vëllimit të cilindrit dhe vëllimit të tre topave të tenisit, d.m.th.

$$V = V_{\text{cil}} - V_{\text{3T}} = 162\pi - 108\pi = 54\pi \text{ cm}^3.$$



## Mbani mend!

- Vëllimi i segmentit sferik me lartësi  $h$  të sferës me rreze  $R$  llogaritet me formulën

$$V_{\text{seg. sf.}} = \frac{\pi h}{3}(3R - h).$$

- Vëllimi i sektorit sferik me lartësi  $h$ , të sferës me rreze  $R$ , llogaritet me formulën

$$V_{\text{sek. sf.}} = \frac{2}{3}R^2\pi h.$$

- Vëllimi i shtresës sferike me rrezet  $r_1$  dhe  $r_2$ , lartësi  $h$ , të sferës me rreze  $R$ , llogaritet me formulën

$$V_{\text{sh. sf.}} = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

### Shembulli 5

Caktoni vëllimin e sektorit sferik, nëse rrezja e bazës së tij është 45 cm, kurse rrezja e sferës është 75 cm.

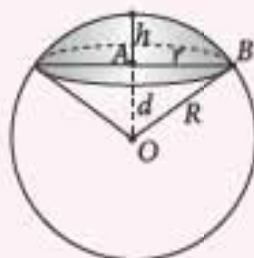
**Zgjidhje:**

Është dhënë se  $R = 75$  cm dhe  $r = 45$  cm. Nga trekëndëshi  $\triangle OAB$  (Vizatimi 5) kemi

$$d^2 = R^2 - r^2 = 75^2 - 45^2 = 3600,$$

d.m.th.  $d = 60$  cm. Për lartësinë e sektorit sferik fitojmë  $h = R - d = 75 - 60 = 15$  cm. ). Me zëvendësimin

në formulën për vëllimin e sektorit sferik kemi  $V_{\text{sek. sf.}} = \frac{2}{3} R^2 \pi h = \frac{2}{3} \cdot 75^2 \cdot \pi \cdot 15 = 56250\pi \text{ cm}^3$ .



Vizatimi 5

### Detyra 2

Një rrafsh është pingul në diametrin e sferës dhe e ndan diametrin në pjesë me gjatësi 9 cm dhe 15 cm. Llogaritni vëllimin e pjesëve të fituara të sferës.

### Detyra 3

Në procesin e përpunimit industrial, sfera e plotë metalike me rreze 20 cm ndahet me dy rrafsh paralele, të cilët janë në anë të njëjtë të qendrës së sferës, në distancat 5 cm dhe 3 cm, përkatësisht, nga qendra. Caktoni vëllimin e pjesës së fituar të sferës.

### Shembulli 6

Topi i basketbollit ka përafërsisht formën e përkryer të sferës me rreze 12 cm.

- Llogaritni vëllimin e topit të basketbollit.
- Llogaritni sa material është përdorur për ta bërë topin e basketbollit.
- Topit e fryjmë edhe më shumë, me çka vëllimi i tij rritet për 10% nga vëllimi paraprak fillestar. Sa është rrezja e re e topit?



**Zgjidhje:**

- Me zëvendësimin  $R = 12$  cm në formulën për vëllimin, fitojmë

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{4}{3} 12^3 \pi = 7234,56 \pi \text{ cm}^3.$$

- Që të llogaritim sasinë e nevojshme të materialit, duhet të llogaritim syprinën e sferës korresponedente me topin e dhënë

$$S = 4R^2 \pi = 4 \cdot 12^2 \cdot \pi \approx 1809 \text{ cm}^2.$$



- c) Vëllimi topit pas fryrjes shtesë është  $V = 7234,56 + \frac{7234,56 \cdot 10}{100} = 7958,02 \text{ cm}^3$ . Nëse e zëvendësojmë këtë vlerë në formulën për vëllimin e topit dhe nëse rrezja e re e topit është  $R_1$ , fitojmë  $\frac{4}{3}R_1^3 \pi = 7958,02$ , prej ku kemi  $R_1^3 = \frac{3 \cdot 7958,02}{4\pi} \approx 1900,8$ . Nga këtu, rrezja e re e topit do të jetë  $R_1 \approx 12,39 \text{ cm}$ .

### Detyra për ushtrime!

1. Sfera me rreze 12 cm është prerë me rrafsh në distancë 8 cm nga qendra. Caktoni vëllimin e sektorit sferik që fitohet.
2. Rrezja e sferës është 15 cm, kurse rrezja e bazës rrethore të sektorit është 9 cm. Llogaritni vëllimin e sektorit sferik.
3. Sfera me rreze 21 cm është prerë me rrafsh në distancë 6 cm nga qendra. Llogaritni vëllimin e segmentit sferik që fitohet.
4. Sfera me rreze 15 cm është prerë me dy rrafshe paralele në distanca 5 cm dhe 7 cm nga qendra, por në anë të ndryshme të saj. Caktoni vëllimin e shtresës së fituar sferike.
5. Sfera me rreze 18 cm është prerë me dy rrafshe paralele në distanca 6 cm dhe 12 cm në anën e njëjtë të qendrës. Caktoni vëllimin e shtresës sferike.
6. Syprina e një kësule sferike është sa  $\frac{2}{5}$  e syprinës së sferës. Caktoni syprinën e kësulës sferike dhe vëllimin e segmentit sferik, nëse rrezja e bazës së tyre të përbashkët është  $2\sqrt{6} \text{ cm}$ .

## DETYRA PËR PËRSËRITJE DHE PËRFORCIM

1. Llogaritni syprinën e drejtkëndëshit me një brinjë dhe diagonalen e dhënë me gjatësi 9 cm dhe 15 cm, përkatësisht. Rezultatit verifikoni me GeoGebra.
2. Diagonalet e drejtkëndëshit zënë kënd prej 120 gradë, kurse secila diagonale është 16 cm. Llogaritni syprinën e tij.
3. Llogaritni syprinën e drejtkëndëshit me diagonale 13 cm, nëse gjatësitë e brinjëve të tij sillen si 5:12.
4. Pllaka diellore është drejtkëndësh me një brinjë 24 cm dhe diagonale 30 cm.
  - a) Llogaritni syprinën e pllakës.
  - b) Nëse nga 1 cm<sup>2</sup> fitohen 0,18 W energji, nën ndriçim përkatës, atëherë sa është fuqia e përafërt?
5. Syprina e paralelogramit është 240 cm<sup>2</sup>, perimetri është 64 cm, kurse distanca mes brinjëve më të mëdha është 12 cm. Caktoni distancën mes brinjëve më të vogla.
6. Llogaritni syprinën e rombit me brinjë 13 cm, nëse rrezja e vijës rrethore të brendashkruar është 5 cm.
7. Pllaka metalike në formë paralelogrami instalohet në një shtëpizë. Distanca mes brinjëve përkatëse paralele është 7 cm dhe 14 cm. Brinja e shkurtër është 10 cm. Sa është gjatësia e brinjës më të gjatë të pllakës?
8. Një njësi mbajtëse ka sipërfaqen punuese në formë paralelogrami. Lartësitë janë 8 cm dhe 15 cm, kurse këndi mes tyre . Njehsoni syprinën e kësaj sipërfaqeje.
9. Njehsoni syprinën e trekëndëshit kënddrejtë me një katete 6 cm dhe hipotenuzë 10 cm. Rezultati të provohet me GeoGebra.
10. Njehsoni syprinën e trekëndëshit kënddrejtë me një katete 6 cm dhe njërin kënd të brendshëm .
11. Perimetri i trekëndëshit barakrahës është 64 cm, kurse ndryshimi i gjatësisë së krahut dhe bazës së trekëndëshit është 11 cm. Llogaritni syprinën e trekëndëshit.
12. Një kablo çeliku prej 18 m është tërhequr asisoj që me tokën formon kënd prej dhe është lidhur për majën e një shtylle.
  - a) Sa është lartësia e shtyllës?
  - b) Sa është distanca horizontale nga baza e shtyllës deri në vendin ku është kapur kablloja e çelikut?
13. Një shenjë ka formën e trekëndëshit brinjënjëshëm me brinjë 90 cm.
  - a) Llogaritni syprinën e shenjës. Rezultati të provohet me GeoGebra.
  - b) Caktoni rrezën e vijës rrethore të brendashkruar shenjës (vendit për logon rrethore).
  - c) Nga njëra anë shenja duhet të vishet me foli. Sa kushton veshja nëse folia kushton 2 denarë për cm<sup>2</sup>?
14. Syprina e një trapezi është 360 cm<sup>2</sup>, kurse gjatësitë e bazave janë 30 cm dhe 15 cm, përkatësisht. Llogaritni lartësinë e trapezit.
15. Trapezi kënddrejtë ka syprinë 200 cm<sup>2</sup>, lartësi 10 cm dhe një bazë me gjatësi 30 cm. Llogaritni gjatësinë e bazës tjetër.
16. Platforma ka formën e trapezit barakrahës me bazat 12 m dhe 20 m si dhe lartësi 8 m.
  - a) Llogaritni syprinën e platformës.
  - b) Sa gjatësi të rrethojës mbrojtëse është e nevojshme për ta rrethuar platformën?
17. Sipërfaqja dekorative në park ka formën e deltoidit. Diagonalja e cila është bosht simetrie ka gjatësi 18 m, kurse diagonalja tjetër ka gjatësi 10 m.
  - a) Llogaritni syprinën e kësaj sipërfaqeje.



- b) Nëse për mbulimin me pllaka të kësaj sipërfaqeje duhen 3 pllaka për  $m^2$ , sa pllaka janë të nevojshme gjithsej?
18. Pllaka rrethore përpunohet prej metali. Nëse  $1 \text{ cm}^2$  metal ka masën  $0,015 \text{ kg}$ , sa është masa e pllakës me rreze  $14 \text{ cm}$ ?
19. Lenta LED vendoset përgjatë harkut rrethor me rreze  $1,2 \text{ m}$  dhe kënd qendror  $45$  gradë. Sa gjatësi të lentës na duhet?
20. Rrezja e vijës rrethore është  $15 \text{ cm}$ , kurse distanca e kordës nga qendra është  $9 \text{ cm}$ . Llogaritni syprinën e segmentit rrethor.
21. Syprina e unazës rrethore është  $64\pi \text{ cm}^2$ , kurse rrezja e brendshme është  $4 \text{ cm}$ . Caktoni rrezën e jashtme të unazës.
22. Piramida e rregullt trekëndore ka brinjë të bazës  $12 \text{ cm}$  dhe apotemë  $10 \text{ cm}$ .
- Llogaritni syprinën e sipërfaqes anësore (mbështjellësit).
  - Krahasoni syprinën e sipërfaqes së anshme me syprinën e bazës.
23. Një monument guri ka formën e piramidës me bazë kuadratike me brinjë  $5 \text{ m}$ , kurse lartësia e piramidës është  $9 \text{ m}$ .
- Llogaritni vëllimin.
  - Nëse dendësia e gurit është  $2600 \text{ kg/m}^3$ , sa është masa e monumentit?
24. Çatia prej qelqi ka formën e piramidës së drejtë me bazë drejtkëndore me dimensione  $12 \text{ m}$  dhe  $8 \text{ m}$ . Apotema e faqeve anësore me bazë  $12 \text{ m}$  është  $5 \text{ m}$ .
- Llogaritni syprinën e sipërfaqes së qelqtë (pa bazën).
  - Nëse masa maksimale e lejuar e çatisë është  $2000 \text{ kg}$ , a mund të realizohet nëse  $1 \text{ m}^2$  qelq ka masë prej  $30 \text{ kg}$ ?
25. Baza e poshtme e trungut të piramidës së rregullt katërkëndore ka brinjë  $14 \text{ cm}$ , baza e sipërme brinjë  $8 \text{ cm}$ , kurse apotema e trungut të piramidës është  $9 \text{ cm}$ . Llogaritni syprinën e mbështjellësit të trungut të piramidës.
26. Vëllimi i trungut të piramidës së rregullt katërkëndore është  $1248 \text{ cm}^3$ . Brinjët e bazave janë  $10 \text{ cm}$  dhe  $4 \text{ cm}$ . Caktoni lartësinë e trungut të piramidës.
27. Ena për depozitim ka formën e trungut të piramidës së rregullt katërkëndore me brinjë të bazave përkatëse  $3 \text{ m}$  dhe  $1,5 \text{ m}$ , kurse lartësi  $2,4 \text{ m}$ .
- Sa është vëllimi i enës?
  - Sa litra material mund të nxë ena?
28. Në një kon rrezja dhe lartësia e konit sillen si  $3 : 4$ , kurse vëllimi i tij është  $V = 96\pi \text{ cm}^3$ . Njehsoni syprinën e mbështjellësit të konit.
29. Ena përmban  $8$  litra lëng. Lëngu i enës derdhet në gota me formë të konit me rreze  $3 \text{ cm}$  dhe lartësi  $12 \text{ cm}$ .
- Sa gota mund të mbushen?
  - Sa lëng mbetet i papërdorur?
30. Rezervuari për ruajtjen e lëngjeve ka fund në formë koni me rreze  $1,2 \text{ m}$  dhe lartësi me gjatësi  $0,8 \text{ m}$ .
- Sa është vëllimi i pjesës konike?
  - Nëse rezervuari zbrazet me shpejtësi prej  $0,02 \text{ m}^3/\text{min}$ , për sa minuta do të zbrazet pjesa konike?
31. Trungu i konit ka rrezet e bazave  $R = 9 \text{ cm}$  dhe  $r = 3 \text{ cm}$ , kurse lartësia e tij është  $h = 10 \text{ cm}$ .



- a) Llogaritni vëllimin.  
 b) Sa është vëllimi i konit fillestar nga i cili është fituar trungu i konit?
32. Dy trungje të koneve të drejta kanë lartësi të barabarta dhe rreze të barabarta, kurse rrezet e tyre më të vogla sillen si 1:2. Në çfarë raporti janë vëllimet e tyre?
33. Dritarja në çati ka formë të tringut të konit me rrezet 2,2 m dhe 1,2 m. Apotema e tringut të konit është 1,5 m.  
 a) Llogaritni syprinën e sipërfaqes anësore të qelqit.  
 b) Nëse 1 m<sup>2</sup> qelq ka masë 28 kg, atëherë sa është masa e përgjithshme?
34. Syprina e një sipërfaqe sferike është  $324\pi$  cm<sup>2</sup>  
 a) Caktoni rrezën e sipërfaqes sferike.  
 b) Llogaritni vëllimin e sferës së kufizuar me sipërfaqen e dhënë sferike.
35. Modeli i një planeti është sipërfaqja sferike me rreze  $R = 20$  cm. 'Kësula e akullit' është kësula sferike me lartësi  $h = 4$  cm.  
 a) Llogaritni syprinën e 'kësulës së akullit'.  
 b) Sa përqindje të sipërfaqes së përgjithshme të planetit zë 'kësula e akullit'?
36. Sfera ka rreze  $R = 10$  cm. Pas prerjes me rrafsh fitohet segmenti sferik me vëllim  $V = \frac{625\pi}{3}$  cm<sup>3</sup>. Caktoni distancën  $d$  të rrafshit nga qendra e sferës.
37. Çatia formë kupole e një rezervuari nëntokësor ka formën e kësulës sferike. Çatia i takon sipërfaqes sferike me rreze  $R = 4$  m, kurse lartësia e kësulës është  $h = 1,5$  m. Hapësira e brendshme që mbulon kupola është segment sferik i sferës së njëjtë.  
 a) Llogaritni vëllimin e segmentit sferik (në m<sup>3</sup>).  
 b) Njehsoni syprinën e kësulës sferike.  
 c) Kupola duhet të mbështillet me material mbrojtës. Nëse mbështjellja kushton 2000 denarë për m<sup>2</sup>, sa do të jenë harxhimet e përgjithshme për mbështjelljen e kupolës?  
 d) Nëse në rezervuar për një ditë mbledhen ujërat e shirave me vëllim 12 m<sup>3</sup>, për sa ditë do të mbushet rezervuari, nëse ai, fillimisht, është i zbrazët.

## PREZULTATET NGA PËRVETËSIMI I MATERIALIT

### Tema 1:

#### RRËNJËT DHE NUMRAT KOMPLEKSË

Me përvetësimin e kësaj teme do të aftësoheni:

1. të zgjidhni probleme që lidhen me situata reale e që shndërrohen në fuqi dhe operacione me fuqi;
2. të përdorni rrënjëzimin për zgjidhjen e problemeve nga përditshmëria;
3. të dalloni dhe zbatoni operacionet fuqizim dhe rrënjëzim në problemet reale;
4. të përdorni racionalizimin e emëruesit të thyesës për thjeshtimin e shprehjeve irracionale;
5. të përdorni operacionet me numra kompleksë në zgjidhjen e detyrave;
6. të përdorni numrat kompleksë për zgjidhje të problemeve STEM.

### Tema 2:

#### EKUACIONET KUADRATIKE DHE EKUACIONET QË SILLEN NË KUADRATIKE

Me përvetësimin e kësaj teme do të aftësoheni:

1. të dalloni llojet e ndryshme të ekuacioneve kuadratike dhe ekuacioneve që shndërrohen në kuadratike;
2. të zgjidhni probleme nga situata reale që modelohen me ekuacione kuadratike;
3. të përdorni ekuacione që shndërrohen në ekuacione kuadratike gjatë zgjidhjes së problemeve STEM;
4. të përdorësh sisteme me një ekuacion kuadratik dhe një linear me dy ndryshore për zgjidhje të problemeve reale.

### Tema 3:

#### FUNKSIONI KUADRATIK, INEKUACIONI KUADRATIK DHE SISTEMI I INEKUACIONEVE KUADRATIKE ME NJË TË PANJOHUR

Me përvetësimin e kësaj teme do të aftësoheni:

1. të përdorni funksionin kuadratik për zgjidhje të problemeve STEM;
2. të interpretoni zgjidhjet e inekuacionit kuadratik me një të panjohur;
3. të përdorni sistemin me dy inekuacione kuadratike me një të panjohur për zgjidhje të problemeve nga përditshmëria.

#### **Tema 4:** **ELEMENTE TË PROBABILITETIT**

Me përvetësimin e kësaj teme do të aftësoheni:

1. të përdorni permutacionet, variacionet dhe kombinacionet për zgjidhje të problemeve që kanë të bëjnë me situata reale;
2. të gjeni probabilitetin e ngjarjeve në problemet e ndryshme reale.

#### **Tema 5:** **GJEOMETRIA**

Me përvetësimin e kësaj teme do të aftësoheni:

1. të përdorni sinusin, kosinusin, tangjentin dhe kotangjentin për zgjidhje të problemeve STEM;
2. të hulumtoni raportin e ndërsjellë të dy rrafsheve, drejtëzës dhe rrafshit ose dy drejtëzave në hapësirë;
3. të identifikoni prerjet e ndryshme të formave 3D me rrafshin.

#### **Tema 6:** **MATJET**

Me përvetësimin e kësaj teme do të aftësoheni:

1. të zgjidhni probleme që lidhen me situata reale duke zbatuar perimetrin dhe syprinën e formave 2D;
2. të zgjidhni probleme STEM me syprinën dhe vëllimin e formave 3D



## BIBLIOGRAFIA

1. James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson: *Algebra and Trigonometry*, Brooks/Cole, USA
2. Cindy J. Boyd, Jerry Cummins, Carol Malloy, John Carter, Alfino Flores, *Geometry*, Mc Graw Hill, USA
3. Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis: *Calculus*, John Wiley & Sons, Inc., 2012
4. H. Africk: *Elementary College Geometry*, CUNY Academic Works, 2021
5. В.Бакева: *Веројатности*, УКИМ, Скопје, 2015, <https://ukim.edu.mk/e-book/00009/>
6. В.В. Казаков, О.О.Казакова: *Геометрия, учебное пособие для 9 класса*, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2025
7. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, И. В. Горбунова: *Геометрия, учебное пособие для 10 класса*, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2020
8. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, И. В. Горбунова, О. Е. Цыбулько: *Геометрия, учебное пособие для 11 класса*, Минск «Адукацыя і выхаванне», 2020