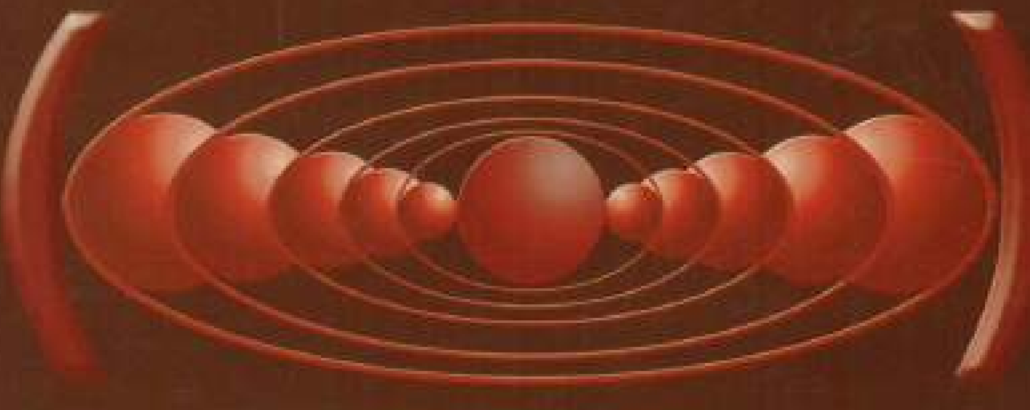
Verica Bakeva
Borivoje Miladinoviq

MATEMATIKA

VITI IV



arsimi i gjimnazit

Verica Bakeva
Borivoje Miladinoviq

MATEMATIKA

VITI IV

arsimi i
gjimnazit

2018

PARATHËNËJA

Ky libër do të ndihmon gjatë të mësuarit e matematikës në vitin e katërtë. Bëju aktiv dhe i rregullt në punë, kurse ajo do të ndihmon në mënyrë të pavarur të përvetësosh njohuri që do të sjellin kënaqësi dhe sukses në mësime.

Libri është ndarë në pesë tërësi tematike. Ato fillojnë me përmbajtjen e tyre, kurse njësitë mësimore janë të numëruara.

Vëreji shenjat te njësitë mësimore dhe shihe porosinë e tyre.

Kujtohu!

Njësitë mësimore fillojnë me diçka që e ke të njohur.

Duhet të kujtohesh dhe t'i zgjidhish kërkesat e dhëna.

Ajo do ta lehtëson të mësuarit e përmbajtjeve të tyre.

A, B, ...

Me këto shenja njësia mësimore është ndarë në pjesë për sa i përket koncepteve të reja.

1, 2, 3, ...

Me shenjat e këtilla janë shënuar aktivitetet, pyetjet dhe detyrat që do t'i zgjidhish në orë të mësimit në mënyrë të pavarur ose me ndihmën e arsimtarit tënd, kurse ato janë te mësimi.

- Me shenjën rreth të është drejtuar pyetja në të cilën duhet të japish përgjigje.

- Me këtë shenjë është dhënë informata për sqarimin e konceptit të ri.

Mbaj mend!

Kjo të udhëzon në atë që është e rëndësishme për konceptin e ri.

Vëre!

Kjo porosi të udhëzon çka duhet t'i kushtosh kujdes më të madh.

①, ②, ③, ...

Pas çdo njësie mësimore janë dhënë detyra. Duke i zgjidhur këto detyra rregullisht dhe në mënyrë të pavarur më mirë do ta kuptosh atë që e ke mësuar. Përgjigjet tua krahasoji me përgjigjen dhe zgjidhjet që janë dhënë në fund të librit.

Kur do të hasësh në vështirësi gjatë të mësuarit e përmbajtjeve të caktuara, mos u dorëzo, përpiqu përsëri, bëju i durueshëm.

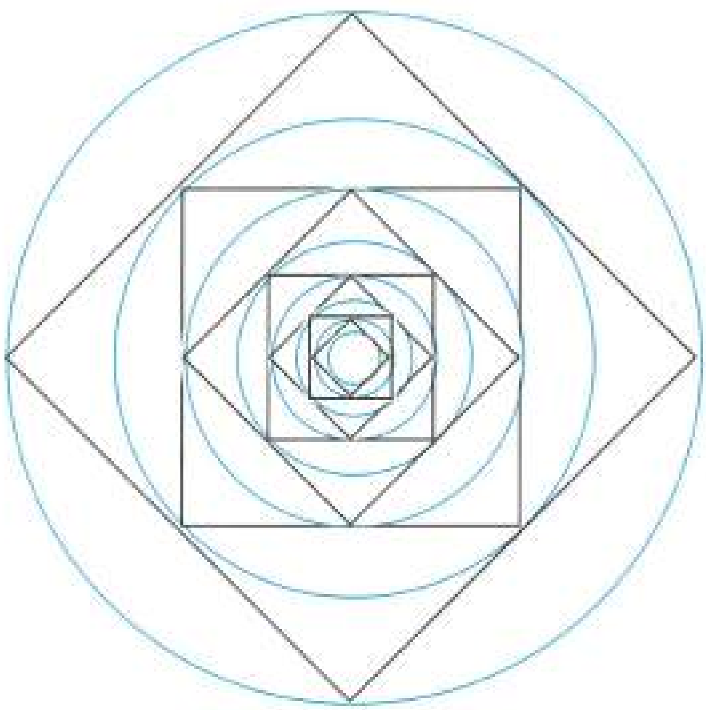
Do të na gëzon nëse ky libër të mundëson të arrish sukses solid.

Nga autorët

TEMA 1

VARGJE DHE PROGRESIONE

Në këtë temë do të mësosh për



1 VARGJE PREJ NUMRAVE REALË

Kujtohu!

- Bashkësia $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,...,n-1,n,n+1,...\}$ quhet bashkësia e numrave natyrorë.
- Bashkësia e cila i përmban të gjitha thyesat quhet bashkësia e numrave racionalë, përkatësisht

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}\wedge b\neq 0\right\}.$$

Çdo numër dhjetor joperiodik i pafundshëm quhet numër iracional.

- Bashkësia $\mathbb{J}$ prej numrave iracionalë së bashku me bashkësinë $\mathbb{Q}$ prej numrave racionalë e formojnë bashkësinë e numrave realë, përkatësisht $\mathbb{R}=\mathbb{J}\cup\mathbb{Q}$.
- Bashkësia e numrave natyrorë është e radhitur, d.m.th. $1<2<3<4<...<n<n+1<n+2<...$

A Në jetën e përditshme shpeshherë imponohet nevoja disa sende ose objekte të radhiten, me të cilën dotë dihet cili prej tyre është i pari, i dyti, i treti etj. Në këtë rast thuhet se ato objekte janë radhitur në varg. Për shembull:

- shkronjat e alfabetit tonë janë radhitur në varg, pasi në vendin e parë gjendet shkronja A, në vendin e dytë shkronja B, në vendin e tretë shkronja C etj., pra në këtë mënyrë disa numrave natyrorë u shoqërohen shkronja prej alfabetit. Kështu për shembull, numrit 1 i është shoqëruar shkronja A, dhe shkruajmë $1\to$A, numrit 2 – shkronja B, d.m.th. $2\to$B, etj., numrit 36 – shkronja ZH, d.m.th. $36\to$ZH
- Elementet kimike H, He, Li,... janë radhitur sipas numrit të protoneve, ku $1\to$H, $2\to$He, $3\to$Li,...$88\to$Ra, $92\to$U etj., prandaj ato formojnë varg prej elementeve kimike.
- Nëse çdo numri natyror i është shoqëruar katrori i tij, d.m.th.

$$1\to 1^2, 2\to 2^2, 3\to 3^2, ..., n\to n^2, (n+1)\to(n+1)^2, ...,$$

atëherë numrat $1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2, (n+1)^2, ...$ e formojnë vargun prej katrorëve të numrave natyrorë.

Në përgjithësi nëse çdo numri natyrorë $n=1,2,3,...$ sipas ndonjë rregulle ose ligji i përgjigjet nga një numër realë i caktuar a_n, atëherë për numrat

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n, ...$$

themi se përcaktojnë varg prej numrave realë.

Numrat $a_1,\ a_2,\ a_3, ...$ quhen anëtarë të vargut; a_1 anëtari i parë, a_2 është anëtari i dytë, a_n është anëtari n ose ***anëtari i përgjithshëm*** i vargut.

Në këtë mënyrë është përkufizuar pasqyrim (funksion) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, ku $n\to a_n$, d.m.th. $f(n)=a_n$.

Vargun $a_1,\ a_2,\ a_3, ..., a_n, ...$ shkurtimisht e shënojmë me simbolin (a_n).

Çdo anëtarë i vargut varet prej vendit të tij në varg, i cili është shënuar me indeksin e tij përkatës, që do të thotë se çdo anëtarë prej vargut është funksion prej indeksit n. Vargu plotësisht është përcaktuar nëse dihet rregulla me të cilën është përcaktuar anëtari n prej vargut për çfarëdo $n\in\mathbb{N}$.

1 Shkruaje vargun për të cilin rregulla për fitimin e a_n është:

a) anëtari a_n është vlera reciproke e numrit natyror n ;

b) anëtari a_n është fuqia n e numrit 2.

Përgjigje:

a) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

- Sa është a_{100}?
- Sa është a_{1001}?

b) $a_1 = 2^1,\ a_2 = 2^2 = 4,\ a_3 = 2^3 = 8, \ldots, a_n = 2^n$, pra vargu është: $2,\ 4,\ 8, \ldots, 2^n$.

- Sa është a_6?

Ekzistojnë edhe vargje të atilla për anëtarin e përgjithshëm të të cilit nuk dihet shprehja analitike, por dihet rregulla sipas të cilës mund të njehsohet cilido anëtar prej vargut. Kështu për shembull, me mënyrën për njehsimin e $\sqrt{2}$ fitohet vargu

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

Anëtarët e këtij vargu janë vlerat dhjetore më të vogla të përafërta të numrit $\sqrt{2}$ me saktësi deri më 1; 0,1; 0,01; 0,001; ..., përkatësisht.

2 Shkruaje vargun anëtarët e të cilit fitohen gjatë shndërrimit të $\frac{1}{3}$ në numër dhjetor.

3 Shkruaje vargun të dhënë me anëtarin e përgjithshëm: a) $a_n = 2n-1,\quad n \in \{1,2,3,4,\ldots,10\}$;

b) $b_n = 2n-1,\quad n \in \mathbb{N}$. Sa anëtarë ka çdonjëri prej këtyre vargjeve?

Shihe përgjigjen:

a) $1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots, 19$;

b) $1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots, 19, \ldots$

- Vargu (a_n) ka 10 anëtarë, d.m.th. numër të fundshëm të anëtarëve.
- Vargu (b_n) ka pafund shumë anëtarë.

Përkufizimi. Çdo pasqyrim f prej $\mathbb{N}$ në $\mathbb{R}$ quhet ***varg i pafundshëm*** prej numrave realë.
Çdo pasqyrim f prej bashkësisë $\{1,2,3,\ldots,k\} \subset \mathbb{N}$ në bashkësinë $\mathbb{R}$ quhet ***varg i fundshëm*** prej numrave realë ose k anëtarë të vargut.

Në matematikë me interes të veçant janë vargjet e pafundshme. Më tutje, na do ta përdorim termin „varg" në vend të „varg i pafundshëm" prej numrave realë.

B Janë dhënë vargjet: $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14, \ldots$; $\quad 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots$ dhe $\quad 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots$

- Një varg a është njëvlerësisht i përcaktuar nëse i dijmë disa anëtarë të parë të tij?
Shihe se përgjigjeja e kësaj pyetje është negative.

4 Duke supozuar se rregulla të cilën e vërejmë ndërmjet anëtarëve të vargut vlen edhe për këto, shkruaj njërin prej shprehjeve të mundshme për anëtarin e përgjithshëm të vargut:

a) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots$; b) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \ldots$ c) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots$; ç) $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$

Përgjigje:

a) $a_n = 2n-1$; b) $a_n = n^2$; c) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; ç) $a_n = (-1)^n$.

Shpeshherë anëtarët e një vargu mund të jenë të dhënë edhe me formulën rekurente të llojit

$$a_{n+1}=f\left(a_n\right),\quad n=1,2,3,...$$

ku a_1 është drejtpërdrejt i dhënë, kurse të gjithë anëtarët tjerë i caktojmë sipas formulës së dhënë. Për shembull, nëse $a_{n+1}=a_n+3$ dhe $a_1=1$, atëherë fitohet vargu 1, 4, 7, 10, 13, . . .

5 Shkruaji dhjetë anëtarët e parë të vargut të dhënë me:

a) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n;$

b) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n^2;$

c) $a_1=1,\ a_{n+1}=n\cdot a_n;$

ç) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3.$

C **6** Është dhënë vargu: a) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},...,\frac{n}{n+1},...;$ b) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},...,\frac{1}{n},...$ c) 3, 3, 3,...

Cakto shenjën e ndryshimeve: $a_1-a_2, a_2-a_3, a_3-a_4,...,a_n-a_{n+1}$ për $n\in\mathbb{N}$.

Zgjidhje:

a) $a_1-a_2=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3-4}{6}=-\frac{1}{6}<0$. Domethënë, $a_1-a_2<0$, d.m.th. $a_1<a_2$.

$a_2-a_3=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{8-9}{12}=-\frac{1}{12}<0$. Domethënë $a_2-a_3<0$, d.m.th. $a_2<a_3$.

$a_n-a_{n+1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)}=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}<0$, prej ku përfundojmë se $a_n<a_{n+1}$ për $n\in\mathbb{N}$.

Prej $a_1<a_2,\ a_2<a_3,...,\ a_n<a_{n+1}$ vijon $a_1<a_2<a_3<...<a_n<a_{n+1}<...$

Për këtë varg themi se është rritës.

b) $a_1-a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$, d.m.th. $a_1>a_2$; $a_2-a_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}>0$, d.m.th. $a_2>a_3$;

$a_n-a_{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}>0$ për çdo $n\in\mathbb{N}$, d.m.th. $a_n>a_{n+1}$ për çdo $n\in\mathbb{N}$.

Prej $a_1>a_2,\ a_2>a_3,...,\ a_n>a_{n+1}$ për çdo $n\in\mathbb{N}$ vijon $a_1>a_2>a_3>...>a_n>a_{n+1}>...$

Për këtë varg themi se është zvogëlues.

c) Për këtë varg themi se është konstantë.

Përkufizimi. Për vargun (a_n) themi se është ***rritës*** nëse $a_n<a_{n+1}$ për çdo $n\in\mathbb{N}$.
Për vargun (a_n) themi se është ***zvogëlues*** nëse $a_n>a_{n+1}$ për çdo $n\in\mathbb{N}$.
Për vargun (a_n) themi se është ***jozvogëlues*** nëse $a_n\le a_{n+1}$ për çdo $n\in\mathbb{N}$.
Për vargun (a_n) themi se është ***jorritës*** nëse $a_n\ge a_{n+1}$ për çdo $n\in\mathbb{N}$.

Vargjet rritëse dhe zvogëluese quhen edhe vargje monotone në kuptimin rigoroz të fjalës, kurse vargjet jozvogëluese-dhe jorritëset – monotone në kuptimin e gjerë të fjalës.

Që të konstatohet se vargu i dhënë (a_n) a është rritës ose zvogëlues, në vend të shenjës së ndryshimit $a_n - a_{n+1}$ mund të shqyrtohet vlera e herësit $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ ku:

nëse $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \quad (a_{n+1} > 0)$, atëherë vargu (a_n) rritet;

nëse $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \quad (a_{n+1} > 0)$, atëherë vargu (a_n) zvogëlohet.

7 Vërteto se vargu me anëtarin e përgjithshëm:

a) $a_n = \frac{3n}{3n+1}$ monotonisht rritet; b) $a_n = \frac{1}{2n-1}$ monotonisht zvogëlohet.

Shihe vërtetimin:

a) Duhet të vërtetojmë se për çdo $n \in \mathbb{N}$ është e saktë jobarasia $a_n < a_{n+1}$ d.m.th. $a_n - a_{n+1} < 0$ ose $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \quad (a_{n+1} > 0)$. Në këtë rast kemi:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n}{3n+1} - \frac{3(n+1)}{3(n+1)+1} = \frac{-3}{(3n+1)(3n+4)} < 0 \quad \text{ose}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{3n}{3n+1}}{\frac{3(n+1)}{3(n+1)+1}} = \frac{3n(3n+4)}{(3n+1)(3n+3)} = \frac{9n^2+12n+3-3}{9n^2+12n+3} = 1 - \frac{3}{9n^2+12n+3} < 1.$$

b) Duhet të vërtetojmë se për çdo $n \in \mathbb{N}$ vlen: $a_n - a_{n+1} > 0$ ose $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \quad (a_{n+1} > 0)$.

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{4n^2-1} > 0 \quad \text{ose}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}} = \frac{2n+1-1+1}{2n-1} = 1 + \frac{2}{2n-1} > 1.$$

8 Shqyrto monotoninë e vargut anëtari i përgjithshëm i të cilit është: a) $a_n = \frac{2n-1}{3n}$; b) $a_n = \frac{5}{n+1}$.

Ekzistojnë vargje të cilat nuk janë monotone, d.m.th. as rriten, as zvogëlohen. I atillë për shembull është vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, anëtarët e të cilit $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ janë në mënyrë alternative të radhitur nga ana e majtë dhe ana e djathtë e numrit 1.

Themi se anëtarët e vargut oscilojnë rreth numrit 1(fig. 1).

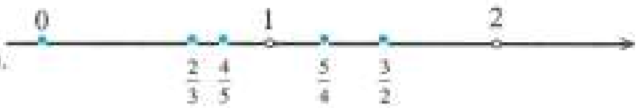


fig. 1

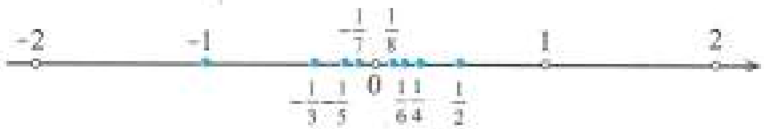
Ç **9** Anëtari i përgjithshëm i vargut është $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

a) Shkruaji 8 anëtarët e parë të vargut dhe paraqiti në boshtin numerik.

b) Të gjithë anëtarët e vargut a i takojnë intervalit $(-2,2)$?

Shihe zgjidhjen:

a) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}$ dhe $\frac{1}{8}$.



b) Po, të gjithë anëtarët e vargut gjenden në intervalin $(-2,2)$. Atë e shkruajmë në këtë mënyrë:

$$a_n \in (-2, 2) \text{ për çdo } n \in \mathbb{N}, \text{ d.m.th. } |a_n| < 2 \text{ për çdo } n \in \mathbb{N}.$$

Domethënë, çdo anëtar i këtij vargu sipas vlerës absolute është më i vogël se numri 2, pra për vargun themi se është i kufizuar.

Përkufizimi. Vargu (a_n) është ***i kufizuar***, nëse çdo anëtar i tij sipas vlerës absolute është më i vogël se ndonjë numër pozitiv k, d.m.th. nëse ekziston ndonjë numër pozitiv k, ashtu që për çdo $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq k$.

Vargu i cili nuk është i kufizuar quhet ***varg i pakufizuar***. Për shembull, vargu për të gjithë numrat është i pakufizuar.

Vëre!

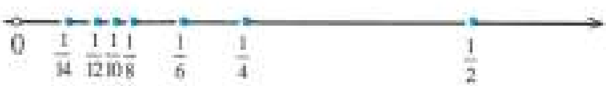
Kuptimi „varg i pakufizuar" ndryshon prej kuptimit „varg i pafundshëm". Për shembull, vargu $\left(\frac{1}{n}\right)$ është i pafundshëm, d.m.th. ka numër të pafundshëm të anëtarëve, por është i kufizuar pasi të gjithë anëtarët e tij sipas vlerës absolute nuk janë më të mëdhenj prej 1, d.m.th. i takojnë intervalit $(0, 1]$.

10 Cili prej këtyre vargjeve është i kufizuar: a) $a_n = \dfrac{1}{2n}$; b) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; c) $a_n = (-1)^n n$.

Shihe zgjidhjen:

a) Vargu është: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}, \ldots$

Të paraqesim disa anëtarë të parë në boshtin numerik.



Çshtë e qartë se të gjithë anëtarët e vargut gjenden në intervalin $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, d.m.th. $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ për çdo $n \in \mathbb{N}$, që do të thotë se vargu është i kufizuar.

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \ldots$

Të gjithë anëtarët e këtij vargu gjenden në intervalin $(0, 1)$, d.m.th. $0 < a_n < 1$ për çdo $n \in \mathbb{N}$, prej ku përfundojmë se vargu është i kufizuar.

c) $a_1=-1,\ a_2=2,\ a_3=-3,\ a_4=4,\ a_5=-5,\ a_6=6,\dots$

Për këtë varg nuk ekziston numër pozitiv k, i atillë që $|a_n|<k$ për çdo $n\in\mathbb{N}$. Domethënë, vargu është i pakufizuar.

Detyra:

1. Shrkuaji pesë anëtarët e parë të vargut me anëtarin e përgjithshëm:

   a) $a_n=\dfrac{n+1}{n^2-2}$; b) $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n-1}$; c) $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$; ç) $a_n=\dfrac{1}{n!}$.

2. Duke supozuar se rregulla të cilën e vërejtëm ndërmjet anëtarëve të përmendur vlen edhe për për vargjet që vijojnë, shkruaje njërën nga shprehjet e mundshme për anëtarin e përgjithshëm:

   a) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{2^2},\ \dfrac{3}{2^3},\ \dfrac{4}{2^4},\dots$; b) $1,\ \dfrac{2}{101},\ \dfrac{4}{201},\ \dfrac{8}{301},\dots$;

   c) $1,\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{3\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{4\sqrt{4}},\dots$; ç) $1,\ -2,\ -3,\ -4,\dots$

3. Shkruaji dhjetë anëtarët e parë të vargut të dhënë me:

   a) $a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$; b) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$.

4. Shkruaji pesë anëtarët e parë të vargut prej afrimeve dhjetore me mungesë të numrit:

   a) $\sqrt{3}$; b) π.

5. Te katrori me brinjë 4 është brendashkruar tjetër katror kulmet e të cilit janë meset e brinjëve të katrorit të parë, te katrori i dytë në të njëjtën mënyrë është brendashkruar katror i tretë etj. Shkruaje vargun anëtarët e të cilit janë:

   a) gjatësitë e brinjëve të katrorëve; b) syprinat e katrorëve.

6. Shqyrto monotoninë e vargut me anëtarin e përgjithshëm:

   a) $a_n=\dfrac{n}{3n+2}$; b) $a_n=1-n^2$.

7. Duke supozuar se rregulla me të cilën e vërejtëm se ndërmjet anëtarëve të përmendur të vargut vlen edhe për vargjet që vijojnë, shqyrto monotoninë e vargut: a) $1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{7},\dots$; b) $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{5}{7},\ \dfrac{7}{9},\dots$

8. Shqyrto monotoninë e vargut të dhënë me anëtarin e përgjithshëm:

   a) $a_n=n$; b) $a_n=\dfrac{1}{n}$; c) $a_n=(-1)^n$; ç) $a_n=\dfrac{1}{2^n}$.

9. Cili prej këtyre vargjeve është i kufizuar: a) $a_n=(-1)^n$; b) $a_n=\dfrac{2}{n!}$; c) $a_n=\dfrac{1}{2n}$;

   ç) $a_n=(-1)^n n^3$; d) 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142;...

2 PROGRESIONI ARITMETIK

Kujtohu!

- Vargu $-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots$ rritet.
- Vargu $10, 6, 2, -2, -6, \ldots$ zvogëlohet.
- Vargu $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$ as nuk rritet as nuk zvogëlohet. Ky varg nuk është monoton.

A Janë dhënë vargjet:

a) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

b) $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \ldots$

c) $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$

ç) $6, 2, -2, -6, -10, \ldots$

Shih se te çdonjëri prej vargjeve të dhëna ndryshimi ndërmjet çdo anëtari (përveç të parit) dhe paraardhësit të tij është konstant dhe është: a) 1; b) -1; c) 3; ç) -4.

Përkufizimi. Vargu i numrave, të atillë që duke filluar prej anëtarit të dytë ndryshimi ndërmjet çdo anëtari dhe paraardhësit të tij është konstant, d.m.th. $a_{n+1} - a_n = d$ për çdo $n \in \mathbb{N}$ quhet varg aritmetik ose ***progresion aritmetik***. Ai është plotësisht i përcaktuar nëse janë dhënë anëtari i parë dhe ndryshimi.

Fjala progresion rrjedh prej fjalës latine *progressio* që do të thotë përparim, kurse simboli $\boldsymbol{d}$ është, në realitet, shkronja fillestare e fjalës latine *differentia*, që do të thotë ndryshim.

Nëse $d > 0$, atëherë prej $a_{n+1} - a_n = d$ vijon $a_{n+1} > a_n$, që do të thotë se progresioni rritet.

Nëse $d < 0$, atëherë $a_{n+1} < a_n$, d.m.th. progresioni zvogëlohet.

Nëse $d = 0$, të gjithë anëtarët e progresionit janë të barabartë ndërmjet vedi, d.m.th. (a_n) është varg konstant.

1 Cakto cili prej vargjeve është progresion aritmetik:

a) $5, 7, 9, 11, \ldots$

b) $3, -1, -5, -9, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$

ç) $\frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{11}, \ldots$

d) $2a - b, 3a + 2b, 4a + 5b, 5a + 8b, \ldots$

B Le të jetë dhënë progresioni aritmetik $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ Prej përkufizimit për progresionin aritmetik vijon

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$, prej ku

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vëreve se cilido anëtar i progresionit aritmetik (përveç të parit) mund të caktohet sipas formulës

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

kjo quhet formula për anëtarin n të progresionit aritmetik.

2 Duke e zbatuar induksionin matematikor vërteto formulën për anëtarin n të progresionit aritmetik.

Shihe vërtetimin:

(i) E qartë është se formula vlen për $n=1$, d.m.th. $a_1=a_1$, por vlen edhe për $n=2$, pasi sipas përkufizimit $a_2=a_1+d$.

(ii) Të supozojmë se formula është e saktë deri te ndonjë numër natyror k, d.m.th. le të vlejë $a_k=a_1+(k-1)d$.

(iii) Do të vërtetojmë se formula është e saktë edhe për $n=k+1$. Pasi sipas përkufizimit është $a_{k+1}=a_k+d$, por duke pasur parasysh, fitojmë $a_{k+1}=a_1+(k-1)d+d=a_1+kd$, që duheshte të vërtetohet.

3 Cakto anëtarin 31 të progresionit aritmetik 1, 3, 5, 7, 9,...

Shihe zgjidhjen:

Për këtë progresion $a_1=1$ dhe $d=5-3=2$, pra $a_{31}=a_1+30d$, d.m.th. $a_{31}=1+30\cdot 2=61$.

4 Njehso n te progresioni aritmetik nëse:

a) $a_n=25,\ d=2,\ a_1=3$; b) $a_n=-11,\ d=-\frac{1}{2},\ a_1=-3\frac{1}{2}$.

Shihe zgjidhjen:

a) Vlerat e dhëna i zëvëndësojmë te formula $a_n=a_1+(n-1)d$, d.m.th. $25=3+(n-1)\cdot 2$, prej ku $n=12$.

5 Cili anëtar te progresioni aritmetik 3, 9, 15,... është i barabartë me 117?

6 Shkruaji pesë anëtarët e parë të progresionit aritmetik te i cili ndryshimi ndërmjet anëtarit të tretë dhe të parë është 16, kurse shuma ndërmjet anëtarit të pestë dhe të tretë është 144.

Shihe zgjidhjen:

Prej kushtit të detyrës vijon $\begin{cases} a_3-a_1=16 \\ a_3+a_5=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+2d-a_1=16 \\ a_1+2d+a_1+4d=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=8 \\ a_1=48. \end{cases}$

Pesë anëtarët e parë të vargut janë: 48, 56, 64, 72, 80.

7 Cakto progresionin aritmetik nëse:

a) $a_3+a_7=38$ dhe $a_2+a_{12}=50$; b) $a_3+a_5+a_8=43$ dhe $a_4+a_7=30$.

8 Te progresioni 43, 40, 37, . . . cakto anëtarin e parë me radhë vlera e të cilit është më e vogël se 1.

Shihe zgjidhjen:

Këtu $a_1=43$ dhe $d=-3$, pra indeksi i kërkuar është prej të gjithë indeksave n të cilët e kënaqin jobarazimin $43-3(n-1)<1$, prej ku $n-1>14$, d.m.th. $n>15$. Domethënë, indeksi i kërkuar i anëtarit është 16, pra duke filluar prej $a_{16}=-2$ të gjithë anëtarët e ardhshëm janë më të vegjël se 1.

- Te progresioni i njëjtë cakto anëtarët a_{15} dhe a_{17}.

9 Cakto anëtarin a_1, të progresionit aritmetik anëtari i tetë i të cilit është 8, kurse ndryshimi është -2.

10 Shuma e tre numrave të cilët formojnë progresion aritmetik është 24. Caktoji ato numra, nëse dihet se, katrori i numrit të tretë është për 96 më i madh se shuma e katrorëve të dy anëtarëve të parë.

Shihe zgjidhjen:

Sipas kushtit të detyrës kemi:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=24 \\ a_3^{\,2}=a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d=24 \\ (a_1+2d)^2=a_1^{\,2}+(a_1+d)^2+96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+d=8 \\ (a_1+d+d)^2=a_1^{\,2}+(a_1+d)^2+96 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1=8-d \\ (8+d)^2=(8-d)^2+8^2+96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=5 \\ a_1=8-5=3. \end{cases}$$ Numrat e kërkuar janë: 3, 8, 13.

C **11** Ndërmjet numrave 7 dhe 61 interpolo (vendos) 8 numra të cilët me anëtarët e dhënë formojnë progresion aritmetik.

Shihe zgjidhjen:

Pasi $a_1=7$ dhe $a_{10}=61$, prej $a_1+9d=61$ vijon $d=\dfrac{61-7}{9}=6$, pra progresioni i kërkuar është

7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61.

12 Ndërmjet numrave a_1 dhe a_n vendos numra të rrinj të cilët me numrat e dhënë formojnë progresion aritmetik me n anëtarë.

Shihe zgjidhjen:

Prej $a_n=a_1+(n-1)d$ e shprehim d dhe fitojmë $d=\dfrac{a_n-a_1}{n-1}$. Ndërmjet a_1 dhe a_n duhet të vendosim $n-2$ anëtarë (pse?), pra progresioni është

$$a_1,\ a_1+\frac{a_n-a_1}{n-1},\ a_1+2\cdot\frac{a_n-a_1}{n-1},\ a_1+3\cdot\frac{a_n-a_1}{n-1},\ldots,\ a_1+(n-2)\frac{a_n-a_1}{n-1},\ a_n.$$

13 a) Ndërmjet numrave 2 dhe 10 interpolo 20 numra të cilët me numrat e dhënë formojnë varg aritmetik.

b) Ndërmjet numrave 0 dhe 1 interpolo 99 numra të cilët me numrat e dhënë formojnë varg aritmetik.

Detyra:

1 Cili prej këtyre vargjeve është progresion aritmetik:

a) $3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots$; b) $1, 8, 27, \ldots, n^3, \ldots$; c) $1, 3, 7, \ldots, 2^n-1, \ldots$; ç) $5, 3, 1, \ldots, 7-2n, \ldots$?

2. Provo se numrat:

a) $\sin^2 30^0, \sin^2 45^0$ dhe $\sin^2 60^0$

b) $\cos^2 \frac{\pi}{3}, \cos^2 \frac{\pi}{4}$ dhe $\cos^2 \frac{\pi}{6}$

a formojnë progresion aritmetik.

3. Nëse te progresioni aritmetik $2, -1, -4, \ldots$ i lejmë anëtarët të cilët qëndrojnë në vendet çifte, atëherë edhe anëtarët tjerë formojnë progresion aritmetik. Vërteto.

4. Në vargun e numrave natyror cakto:

a) numrin njëqint çift;

b) numrin tek të 163.

5. Cakto anëtarin a_n te progresioni aritmetik nëse:

a) $a_1 = 4,\ d = 3,\ n = 8;$

b) $a_1 = -9,\ d = 5,\ n = 11;$

c) $a_1 = \frac{1}{2},\ d = -\frac{1}{4},\ n = 9;$

ç) $a_1 = a + b,\ d = a,\ n = 20.$

6. Shkruaji pesë anëtarët e parë të progresionit aritmetik nëse:

a) $a_1 = 3,\ a_7 = 9;$

b) $a_6 = 17,\ d = 2;$

c) $a_{17} = -22,\ a_9 = -6;$

ç) $a_3 + a_7 = 38$ и $a_2 + a_{12} = 50.$

7. Ndërmjet numrave 18 dhe -12 vendos 8 numra të cilët së bashku me numrat e dhënë formojnë progresion aritmetik.

8. Vargu $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ le të jetë progresion aritmetik. Vërteto se vargu është progresion aritmetik:

a) $a_1 + 2,\ a_2 + 2,\ a_3 + 2, \ldots;$ b) $a_1k,\ a_2k,\ a_3k, \ldots\ (k \in \mathbb{R});$ c) $\frac{a_1}{k}, \frac{a_2}{k}, \frac{a_3}{k}, \ldots\ (k \neq 0).$

3 SHUMA E n ANËTARËVE TË PROGRESIONIT ARITMETIK

Kujtohu!

- Mesi aritmetik i numrave realë a dhe b është numri $\frac{a+b}{2}$.
- Mesi aritmetik i numrave $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n$ është numri $\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$.
- Cakto mesin aritmetik të numrave: a) 21 dhe -3, b) $\sqrt{3}$ dhe $5\sqrt{3}$, c) 1, 3, 5, 17, -6 dhe 2.

A Nëse i shqyrtojmë vetëm n anëtarët prej progresionit të dhënë aritmetik (a_n), atëherë për $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ do të themi se është progresion aritmetik i fundshëm.

Është dhënë progresioni aritmetik me numër të fundshëm të anëtarëve.

1, 2, 3, 4, 5,..., 50, 51,..., 96, 97, 98, 99, 100.

Për anëtarët 2 dhe 99, 3 dhe 98, 4 dhe 97, . . . , 50 dhe 51 themi se janë një lloj të larguar prej anëtarëve të skajshëm 1 dhe 100 përkatësisht.

Vëre se

- $2 + 99 = 3 + 98 = 4 + 97 = \ldots = 50 + 51 = 1 + 100.$

1 $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$ le të jenë n anëtarët e parë prej një progresioni aritmetik me numër të fundshëm të anëtarëve dhe ndryshimin d.

- Cakto çiftet e anëtarëve që janë një lloj të larguara prej anëtarëve të skajshëm a_1 dhe a_n.
- Cakto shumën e indekseve te çdonjëri prej çifteve të caktuara.

Shihe përgjigjen:

- Anëtarët a_2 dhe a_{n-1}, a_3 dhe $a_{n-2},\dots, a_k$ dhe $a_{n-(k-1)}$ janë një lloj të larguara prej anëtarëve të skajshëm a_1 dhe a_n përkatësisht.
- Shuma e indeksave të tyre është $2+n-1=3+n-2=\dots=k+n-(k-1)=n+1$.

Teorema. Nëse progresioni aritmetik ka numër të fundshëm të anëtarëve, atëherë shuma e çfarëdo dy anëtarëve që janë një lloj të larguara prej anëtarëve të skajshëm është e barabartë me shumën e anëtarëve të skajshëm të progresionit, d.m.th.

$$a_k+a_{n-(k-1)}=a_1+a_n,\quad 2\le k\le n.$$

Vërtetim. Pasi $a_k=a_1+(k-1)d$ dhe $a_{n-(k-1)}=a_1+(n-k)d$, pas mbledhjes së këtyre barasive fitojmë

$$a_k+a_{n-(k-1)}=a_1+\underbrace{a_1+(n-1)d}_{a_n}=a_1+a_n.$$

Progresioni aritmetik 1, 2, 3, 4, 5,..., 50, 51, 52,..., 100, 101 përmban numër tek të anëtarëve të fundshëm, kurse sipas teoremës paraprake kemi

$$2+100=3+99=4+98=\dots=50+52=1+101.$$

Anëtari 51 është anëtari i mesëm, ai është një lloj i larguar prej anëtarëve të skajshëm dhe për atë vlen barasia

$$2\cdot 51=1+101 \text{ ose } 51=\frac{1+101}{2}.$$

Ky gjykim mund të përgjithësohet, d.m.th. anëtari i mesëm i një progresioni aritmetik me numër tek të anëtarëve është i barabartë me mesin aritmetik prej anëtarëve të skajshëm.

2 Është dhënë progresioni aritmetik:

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,...,$2n$,...   b) −5, −1, 3, 7, 11, 15,...

Shihe vetinë:

a) $4=\frac{2+6}{2},\ 6=\frac{4+8}{2},\ 8=\frac{6+10}{2},\ 10=\frac{8+12}{2}$ etj.   b) $-1=\frac{-5+3}{2},\ 3=\frac{-1+7}{2},\ 7=\frac{3+11}{2}$ etj.

Vëre se çdo anëtar i progresionit (përveç të parit) është mesi aritmetik prej anëtarëve të tij fqinjë. Kjo veti vlen edhe për çfarëdo progresion aritmetik që është shprehur me këtë teoremë:

Teorema. Çdo anëtar i progresionit aritmetik, përveç të parit, është mesi aritmetik prej paraardhësit të tij dhe pasardhësit të tij.

Vërtetim. Nëse a_{k-1}, a_k dhe a_{k+1} janë tre anëtarë të njëpasnjëshëm të progresionit aritmetik $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, atëherë për ato vlen $a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$, d.m.th. $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, prej ku

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \ k = 2,3,\ldots,n-1.$$

Prej kësaj vetie rrjedh edhe emri progresion aritmetik ose varg aritmetik.

3 Është dhënë progresioni aritmetik 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 . . .

a) Teoremën paraprake zbatoje për anëtarin 11.

b) Anëtari 11 mund të paraqitet si mes aritmetik edhe të dy anëtarëve tjerë të vargut? Cilët janë ato anëtarë?

Shihe zgjidhjen:

a) Sipas teoremës kemi $11 = \dfrac{9+13}{2}$.

b) Po, në këtë mënyrë:

$$11 = \frac{7+15}{2} = \frac{5+17}{2} = \frac{3+19}{2} = \frac{1+21}{2}.$$

4 Vërteto se çdo anëtar i progresionit aritmetik është mesi aritmetik i çdo çifti të anëtarëve prej vargut që janë një lloj të larguara prej tij, d.m.th.

$$a_k = \frac{1}{2}(a_{k-r} + a_{k+r}), \ \ 1 \le r < k.$$

Kështu për vargun 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\boxed{7,}$ 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,... kemi

$$7 = \frac{6+8}{2} \text{ ose } 7 = \frac{5+9}{2} \text{ ose } 7 = \frac{4+10}{2} \text{ etj., kurse } 9 = \frac{8+10}{2} \text{ ose } 9 = \frac{7+11}{2} \text{ ose } 9 = \frac{6+10}{2} \text{ etj.}$$

Këto progresione aritmetike kanë numër tek të anëtarëve:

a) 5, 7, $\boxed{9,}$ 11, 13; b) 3, -1, $\boxed{-5,}$ -9, -13; c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \boxed{\frac{7}{2},} \frac{9}{2}, \frac{11}{2}$.

Vëre se:

$$\boxed{9} = \frac{5+7+11+13}{4}; \qquad \boxed{-5} = \frac{3+(-1)+(-9)+(-13)}{4}; \qquad \boxed{\frac{5}{2}} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}+\frac{9}{2}+\frac{11}{2}\right).$$

Teorema. Anëtari i mesëm i progresionit aritmetik i fundshëm me numër tek të anëtarëve

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots, \ a_n, \ \boxed{a_{n+1},} \ a_{n+2}, \ldots, \ a_{2n+1}$$

është i barabartë me mesin aritmetik të anëtarëve tjerë të vargut, d.m.th.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+2} + \ldots + a_{2n+1}).$$

5 Cakto shumën e 100 anëtarëve të parë të progresionit aritmetik nëse $a_1 = 1$, $d = 1$.

Shihe zgjidhjen:

Progresioni i dhënë është 1, 2, 3, 4,..., 100, 101,... Shumën e dhënë do ta shënojmë me S_{100} dhe kemi:

$$S_{100}=1+2+3+...+98+99+100, \text{ d.m.th. } S_{100}=100+99+98+...+3+2+1.$$

Duke i mbledhur barasitë fitojmë

$$2S_{100}=(1+100)+(2+99)+(3+98)+...+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$

Pasi $1+100=2+99=3+98=...=98+3=99+2=100+1=101$

$$2S_{100}=100\cdot 101, \text{ d.m.th. } S_{100}=5050.$$

6 Cakto shumën e n anëtarëve të parë të progresionit aritmetik $a_1, a_2, a_3,...,a_n,...$

Shihe zgjidhjen:

I marrim n anëtarët e parë të progresionit $a_1, a_2, a_3,...,a_n$ dhe e formojmë shumën $S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$, d.m.th. $S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_3+a_2+a_1$. Nëse këto dy barasi i mbledhim, fitojmë:

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+...+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)}_{n}.$$

Për shkak të $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3=a_{n-2}=...=a_{n-2}+a_3=a_{n-1}+a_2=a_n+a_1$ vijon se

$$S_n=\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_n).$$

Nëse në këtë formulë e zëvendësojmë vlerën për $a_n=a_1+(n-1)d$, e fitojmë formulën

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right].$$

7 Cakto shumën e 10 anëtarëve të parë të progresionit aritmetik 4, 6, 8, 10,...

Shihe zgjidhjen:

Vëre, $a_1=4$, $d=2$ dhe $n=10$, pra $S_n=\frac{10}{2}\left[2\cdot 4+(10-1)\cdot 2\right]=130.$

8 Cakto zhumën e 30 anëtarëve të parë të progresionit aritmetik 3, 5, 7, 9,...

9 Te një progresion aritmetik me numër tek të anëtarëve ku anëtari i mesëm është 11, kurse shuma e të gjithë anëtarëve është 77. Cakto numrin e anëtarëve.

Shihe zgjidhjen:

$$\begin{cases} a_m=11 \\ S_n=77 \end{cases} \text{ ku } \begin{cases} a_m=\dfrac{a_1+a_n}{2} \\ S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)=n\cdot a_m. \end{cases}$$

Duke i zëvendësuar vlerat për S_n dhe a_n fitojmë $77=n\cdot 11$ prej ku $n=7$.

Domethënë, te progresioni ka 7 anëtarë.

10 Shuma e 20 anëtarëve të parë të një progresioni aritmetik është 150, kurse anëtari i shtatë është 3. Caktoje atë progresion.

Shihe zgjidhjen:

$$\begin{cases} S_{20}=10(2a_1+19d) \\ a_7=a_1+6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 150=20a_1+190d \\ 3=a_1+6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20(3-6d)+190d=150 \\ a_1=3-6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=\frac{9}{7} \\ a_1=-\frac{33}{7}. \end{cases}$$

Progresioni është: $-\frac{33}{7}, -\frac{24}{7}, -\frac{15}{7}, \ldots$

11 Shuma e dhjetë anëtarëve të parë të një progresioni aritmetik është 0, kurse shuma e tetë anëtarëve pasardhës është -32. Cakto progresionin.

Shihe zhjidhjen:

$$\begin{cases} S_{10}=0 \\ S_{18}-S_{10}=-32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{10}=0 \\ S_{18}=-32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(2a_1+9d)=0 \\ 9(2a_1+17d)=-32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1+9d=0 \\ 2a_1+17d=-\frac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=2 \\ d=-\frac{4}{9}. \end{cases}$$

Progresioni i kërkuar është $2, \frac{14}{9}, \frac{10}{9}, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$

12 Shuma e shtatë anëtarëve të parë të një progresioni aritmetik është 77, kurse shuma e dhjetë anëtarëve është 65. Cakto progresionin.

13 Te progresioni aritmetik me $a_1=30$ dhe $d=-3$ njehso anëtarin që është i barabartë me $\frac{1}{8}$ e shumës të gjithë anëtarëve paraprak.

Shihe zgjidhjen:

Sipas kushtit të detyrës kemi: $a_1=30, \quad d=-3, \quad a_n=\frac{1}{8}S_{n-1}$. Vleratr a_1 dhe d i zëvëndësojmë te formulat $a_n=a_1+(n-1)d$ dhe $S_{n-1}=\frac{n-1}{2}(2a_1+(n-2)d)$ dhe fitojmë

$a_n=30+(n-1)\cdot(-3)=33-3n=3(11-n)$, përkatësisht

$S_{n-1}=\frac{n-1}{2}(2\cdot 30+(n-2)(-3))=\frac{3(n-1)}{2}(22-n)$.

Prej kushtit $3(11-n)=\frac{1}{8}\cdot\frac{3(n-1)}{2}\cdot(22-n)$ vijon barazimi $n^2-39n+198=0$, prej ku

$n=33$ ose $n=6$. Vijimisht, $a_{33}=-66, \quad a_6=15$.

Detyra:

1. Njehso n dhe S_n te progresioni aritmetik, nëse:

   a) $a_1=4, \quad d=5, \quad a_n=49$; b) $a_1=3, \quad d=-5, \quad a_n=-72$.

2. Njehso a_n dhe d te progresioni aritmetik, nëse:

   a) $a_1=8, \quad S_8=148$; b) $a_1=-35, \quad S_{36}=0$.

3) Njehso a_1 dhe S_n te progresioni aritmetik, nëse:

a) $a_{13}=9,\quad d=\frac{1}{3}$; b) $a_8=10a+8b,\quad d=a+b$.

4) Cakto progresionin aritmetik për të cilin vlen:

a) $a_2+a_5=-4,\ S_7=-21$; b) $a_2+a_4+a_6=24,\ S_5=30$; c) $a_1+a_5=6,\ S_{14}-S_5=135$.

5) Te një progresion aritmetik me numër tek të anëtarëve anëtari i parë është 3, anëtari i mesëm është 13, kurse shuma e të gjithë anëtarëve është 143. Cakto n dhe d.

6) Te progresioni aritmetik 18, 15, 12,... cakto anëtarin që është i barabartë me të pestën e shumës të të gjithë anëtarëve paraprak.

7) Te një progresion aritmetik shuma e tre anëtarëve të parë është -3, kurse shuma e pesë anëtarëve të parë me indeksa çift është 15. Cakto anëtarin e parë dhe ndryshimin e progresionit.

8) Shuma e tre anëtarëve të parë të një progresioni aritmetik rritës është 27, kurse shuma e katrorëve të tyre është 275. Cili është progresioni?

9) Shuma e tre anëtarëve të njëpasnjëshëm të progresionit aritmetik është 150, kurse më i madhi prej tyre është katër herë më i madh prej më të voglit. Caktoji ato anëtarë.

10) Zgjidhe barazimin: a) $\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+...+x=200$; b) $3^{1+3+5+...+2x-1}=81$.

4 PROGRESIONI GJEOMETRIK

A 1) Janë dhënë vargjet: a) $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,...$; b) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{18},\ \frac{1}{54},\ \frac{1}{162},...$;

c) $3,\ -6,\ 12,\ -24,\ 48,\ -96,...$; ç) $1024,\ 512,\ 256,\ 128,\ 64,\ 32,...$

Për çdonjërin prej tyre njehso herësin prej çdo anëtari të tij (duke filluar prej të dytit) dhe paraardhësit të tij.

Shihe zgjidhjen:

a) $4:2=8:4=...=2$; b) $\frac{1}{6}:\frac{1}{2}=\frac{1}{18}:\frac{1}{6}=...=\frac{1}{3}$; c) $-6:3=12:(-6)=...=-2$; ç) $512:1024=...=\frac{1}{2}$.

Vëre se për çdo varg ai herës është konstant. Përkatësisht, për vargun e parë është 2, për të dytin $\frac{1}{3}$, për tretin është -2, për të katërtin është $\frac{1}{2}$. Vargjet për të cilët vlen kjo veti i quajmë vargje gjeometrike ose progresion gjeometrik.

Përkufizimi. Për vargun (a_n) themi se është ***varg gjeometrik*** ose ***progresion gjeometrik*** nëse herësi prej çdo anëtari të tij dhe paraardhësit të tij, duke filluar prej të dytit është konstant, d.m.th.

$$a_{n+1}:a_n=q,\ \text{ për çdo } n\in\mathbb{N},\ \text{ ku } a_1\neq 0,\ q\neq 0.$$

Simboli q është, në realitet, shkronja e parë e fjalës latine *quotiens*, që do të thotë herës.

B Nëse për një progresion gjeometrik dihet anëtari i parë dhe herësi, atëherë anëtari i dytë është i barabartë me prodhimin e anëtarit të parë dhe herësit, anëtari i tretë është i barabartë me prodhimin e e anëtarit të dytë dhe herësit etj. Në përgjithësi, çdo anëtar i ardhshëm është i barabartë me prodhimin e paraardhësit dhe herësit.

2 Shkruaje progresionin gjeometrik nëse dihet anëtari i parë a_1 dhe herësi q:

a) $a_1 = 3,\quad q = 3;$ b) $a_1 = 5,\quad q = -\frac{1}{2};$ c) $a_1 = 192,\quad q = \frac{1}{3}.$

Shihe zgjidhjen:

a) $a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot 3 = 3^2;\quad a_3 = a_2 \cdot q = 3^2 \cdot 3 = 3^3;\quad a_4 = 3^4;\quad a_5 = 3^5$ etj. Progresioni i kërkuar është

$$3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5, \ldots,\ 3^n, \ldots \quad n \in \mathbb{N}.$$

C Nëse $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ janë anëtarët e progresionit gjeometrik, atëherë prej përkufizimit të progresionit gjeometrik vijon

$a_2 = a_1 \cdot q;\qquad a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q^2;\qquad a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^3;\ \ldots\ldots\ldots;\qquad a_n = a_{n-1} \cdot q,$ d.m.th.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Me këtë formulë njehsohet anëtari n i progresionit gjeometrik. Saktësinë e saj do ta vërtetojmë me metodën e induksionit matematikor.

Shihe zgjidhjen:

1) Për $n = 1$ dhe $n = 2$ formula është e saktë, d.m.th. $a_1 = a_1 q^0$ dhe $a_2 = a_1 q^1$.

2) Të supozojmë se ajo është e saktë për $n = k$, d.m.th. $a_k = a_1 q^{k-1}$.

3) Për $n = k + 1$ kemi:

$$a_{k+1} = a_k q = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1+1} = a_1 q^k,$$

kurse kjo do të thotë se formula e dhënë vlen për çdo numër natyror n.

Ç Progresioni gjeometrik $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$ monotonnisht rritet, d.m.th. $a_n < a_{n+1}$ për çdo $n \in \mathbb{N}$ nëse:

$$1)\ a_1 > 0 \text{ dhe } q > 1 \quad \text{ose} \quad 2)\ a_1 < 0 \text{ dhe } 0 < q < 1.$$

Për shembull, $1,\ 3,\ 9,\ 27, \ldots\ (a_1 = 1,\ q = 3)$ ose $-2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}, \ldots\ \left(a_1 = -2,\ q = \frac{1}{2}\right)$.

Progresioni gjeometrik $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$ monotonisht zvogëlohet, d.m.th.. $a_n > a_{n+1}$ për çdo $n \in \mathbb{N}$ nëse:

$$1)\ a_1 > 0 \text{ dhe } 0 < q < 1 \quad \text{ose} \quad 2)\ a_1 < 0 \text{ dhe } q > 1.$$

Për shembull, $1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{25}, \ldots\ \left(a_1 = 1, q = \frac{1}{5}\right)$ ose $-1,\ -2,\ -4,\ -8, \ldots\ (a_1 = -1,\ q = 2)$.

Vëreve se te çdonjëri prej këtyre vargjeve herësi q është numër pozitiv dhe çdonjëri varg është monotono (rritës ose zvogëlues).

3 Janë dhënë progresionet gjeometrike (i) $1, -5, 25, -125, \ldots$ dhe (ii) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

Për çdonjërin prej tyre cakto: a) herësin q; b) vargu a është monoton;

c) se si monotonia e vargut varet prej shenjës të herësit q ?

Shihe zgjidhjen:

a) (i) $q=-5<0$, (ii) $q=-\frac{1}{2}<0$; b) Asnjëri prej vargjeve nuk është monoton;

c) vargu gjeometrik është monoton për $q>0$, kurse nuk është monoton për $q<0$.

4 Cakto anëtarin a_n te progresioni gjeometrik nëse:

a) $a_1=2$, $q=-\frac{1}{2}$, $n=7$; b) $a_1=1$, $q=-\frac{2}{3}$, $n=5$; c) $a=-\frac{2}{3}$, $q=\frac{3}{2}$, $n=6$.

Shihe zgjidhjen:

a) $a_7=a_1\cdot q^6=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^6=2\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{32}$; b) $a_5=a_1\cdot q^4=1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$.

5 Njehsoji a_1 dhe q te progresioni gjeometrik nëse:

a) $a_7=384$, $a_5=48$; b) $a_4=\frac{27}{4}$, $a_7=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Shihe zgjidhjen:

a) Prej $a_7=a_1\cdot q^6$ dhe $a_7=384$ vijon $a_1\cdot q^6=384$. Prej $a_5=a_1\cdot q^4$ dhe $a_5=48$ vijon $a_1\cdot q^4=48$. Nëse këta dy barasi i pjesëtojmë, fitojmë:

$$\frac{a_1 q^6}{a_1 q^4}=\frac{384}{48},\ \text{d.m.th. } q^2=8,\ \text{prej ku } q=\pm 2\sqrt{2}.$$

Prej barazimit të dytë fitojmë $a_1=\frac{48}{q^4}=\frac{48}{\left(2\sqrt{2}\right)^4}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}$.

Pasi $q=\pm 2\sqrt{2}$, detyra ka dy zgjidhje, d.m.th. ekzistojnë dy vargje tilla, dhe atë:

$$(i)\ a_1=\frac{3}{4},\ q=2\sqrt{2} \quad \text{dhe} \quad (ii)\ a_1=\frac{3}{4},\ q=-2\sqrt{2}.$$

6 Shkruaj disa anëtarë të progresionit gjeometrik nëse:

a) $a_7+a_5=160$, $a_6+a_4=-80$; b) $a_4-a_2=18$, $a_5-a_3=36$; c) $a_2+a_5=78$, $a_3-a_2=13$.

Shihe zgjidhjen:

a) Prej kushtit të detyrës vijon sistemi i barazimeve $\begin{cases} a_1 q^6 + a_1 q^4 = 160 \\ a_1 q^5 + a_1 q^3 = -80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^4\left(q^2+1\right)=160 \\ a_1 q^3\left(q^2+1\right)=-80. \end{cases}$

Duke i pjesëtuar barazimet nga sistemi i fundit fitojmë $q=-2$. Vlera përkatëse e anëtarit të parë është

$a_1=\frac{160}{2^4\left(2^2+1\right)}=2$, pra progresioni i kërkuar është $2, -4, 8, -16, 32, -64, \ldots$

7 Le të jetë $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_{15}$ çfarëdo progresion gjeometrik. Vërteto se numrat

$A_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, $A_2 = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ dhe $A_3 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}$ formojnë progresion të ri.

Shihe vërtetimin:

Sipas përkufizimit për progresionin gjeometrik duhet të vërtetojmë se $\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2}$. Për këtë qëllim kemi

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5} = \frac{a_1 q^5 + a_1 q^6 + a_1 q^7 + a_1 q^8 + a_1 q^9}{a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4} = \frac{a_1 q^5 \left(1 + q + q^2 + q^3 + q^4\right)}{a_1\left(1 + q + q^2 + q^3 + q^4\right)} = q^5 \quad \text{dhe}$$

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{a_1 q^{10}\left(1 + q + q^2 + q^3 + q^4\right)}{a_1 q^5\left(1 + q + q^2 + q^3 + q^4\right)} = q^5.$$ Prej këtu vijon se është i saktë gjykimi $\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2}$.

8 Nëse numrat a, b dhe c formojnë progresion gjeometrik, atëherë vlen identiteti $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$. Vërteto.

9 Ndërmjet numrave 5 dhe 160 vendos (interpolo) katër numra të cilët së bashku me numrat e dhënë formojnë progresion gjeometrik.

Shihe zgjidhjen:

Dihen $a_1 = 5$ dhe $a_6 = 160$, pra sipas formulës $a_n = a_1 q^{n-1}$ kemi $a_6 = a_1 q^5$ ose $160 = 5 \cdot q^5$, prej ku $q = 2$. Progresioni i kërkuar është $5,\ 10,\ 20,\ 40,\ 80,\ 160$.

10 Ndërmjet numrave 3 dhe 192 vendos pesë numra të cilët së bashku me numrat e dhënë formojnë progresion gjeometrik.

11 Cakto katër numra prej të cilëve tre numrat e parë formojnë progresion gjeometrik, kurse tre të fundit formojnë progresion aritmetik, nëse shuma e anëtarëve të skajshëm është 80,kurse shuma e anëtarëve të mesëm është 60.

Shihe zgjidhjen:

Numrat e kërkuar i shënojmë me: $a,\ aq,\ aq^2,\ a_4$, ku $a_4 = aq^2 + \underbrace{aq^2 - aq}_{d}$.

Prej kushtit të detyrës kemi:

$$\begin{aligned} a + 2aq^2 - aq &= 80 \\ aq + aq^2 &= 60 \end{aligned} \quad \text{ose} \quad \begin{aligned} a\left(2q^2 - q + 1\right) &= 80 \\ a\left(q^2 + q - 1\right) &= 60. \end{aligned}$$ Me pjesëtimin e barazimeve kemi

$\frac{2q^2 - q + 1}{q^2 + q} = \frac{80}{60}$, prej ku fitohet barazimi $2q^2 - 7q + 3 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $q = 3$ ose $q' = \frac{1}{2}$.

Vlerat përkatëse për anëtarin e parë janë $a_1 = 5$ ose $a_1' = 80$. Domethënë, detyra ka dy zgjidhje,

(i) 5, 15, 45, 75 ose (ii) 80, 40, 20, 0.

12 Progresioni gjeometrik është dhënë me katër anëtarë. Nëse anëtarët e atij progresioni përkatësisht zmadhohen për 2, 4, 5, 4 fitohet progresioni aritmetik. Cakto progresioni gjeometrik.

Detyra:

1. Provo cili prej këtyre vargjeve është progresion gjeometrik:

a) $2,\ -4,\ 8,\ -16,\ 32,...$ b) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,...$ c) $8,\ 4,\ 1,...$

ç) $-1,\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{9},...$ d) $\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},...$ e) $-7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,...$

Shkruaj disa anëtarë të progresionit gjeometrik nëse $(2-4)$:

2. a) $a_1=3,\ q=-2$; b) $a_1=-2,\ q=3$; c) $a_1=8,\ q=-\frac{1}{2}$. ç) $a_1=18,\ q=\frac{1}{3}$.

3. a) $a_1=3,\ a_2=9$; b) $a_1=5,\ a_2=\frac{10}{3}$.

4. a) $a_2=8,\ q=-4$; b) $a_2=1,\ q=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Tre anëtarët e parë të një progresioni gjeometrik janë 16, 8 dhe 4. Cakto anëtarin e pestë.

6. Cakto herësin, anëtarin e dhjetë dhe anëtarin n të progresionit gjeometrik:

a) $2,\ 6,\ 18,...$; b) $192,\ 96,\ 48,...$; c) $3,\ -6,\ 12,...$;

ç) $3,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},...$; d) $-2,\ -6,\ -18,...$; e) $-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},...$

7. Cakto progresionin gjeometrik te i cili anëtari i tretë është 4, kurse anëtari i dhjetë është 512.

8. Numri i bakterjeve te qumështi dyfishohet çdo tre orë. Sa herë do të zmadhohet numri i bakterjeve pas 24 orë?

5 SHUMA E n ANËTARËVE TË PARË TË PROGRESIONIT GJEOMETRIK

Kujtohu!

- Le të jenë a_1 dhe a_2 numra realë pozitiv. Atëherë numri $\sqrt{a_1 \cdot a_2}$ quhet mesi gjeometrik i numrave a_1 dhe a_2.

- Cakto mesin gjeometrik të numrave: a) 3 dhe 27; b) $1+\sqrt{2}$ dhe $\sqrt{2}-1$.

- Për numrat realë pozitiv $a_1,\ a_2,\ a_3,...,a_n$ mesi gjeometrik është numri $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n}$.

- Anëtari n i progresionit gjeometrik njehsohet me formulën $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

- $1+q^2+q^4=(1+q^2)^2-q^2=(1+q^2+q)(1+q^2-q)$.

A Nëse i shqyrtojmë vetëm n anëtarët e parë të progresionit gjeometrik të dhënë (a_n), atëherë për $a_1,\ a_2,...,\ a_n$ do të themi se është progresion gjeometrik me numër të anëtarëve të fundshëm.

Le të jetë $a_1,\ a_2,\ a_3,...;\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$ progresion gjeometrik me numër të fundshëm të anëtarëve: a_2 dhe a_{n-1}, a_3 dhe a_{n-2}, ..., a_k dhe a_{n-k+1} shuma e indeksave të të cilëve është $n+1$ themi se janë një lloj të larguar, përkatësisht, prej anëtarëve të skajshëm a_1 dhe a_n

Për shembull,te progresioni gjeometrik $\frac{1}{4}, \ \frac{1}{2}, \ 1, \ 2, \ 4, \ 8, \ 16, \ 32$ anëtarët $\frac{1}{2}$ dhe 16,

1 dhe 8, 2 dhe 4 janë një lloj të larguara prej anëtarëve të skajshëm $\frac{1}{4}$ dhe 32.

Vëre se $\frac{1}{2}\cdot 16 = 1\cdot 8 = 2\cdot 4 = \frac{1}{4}\cdot 32$.

Kjo veti vlen për çfarëdo progresion gjeometrik e cila është shprehur me këtë teoremë

Teorema. Te progresioni gjeometrik me numër të fundshëm të anëtarëve prodhimi i çfarëdo dy anëtarëve një lloj të larguar prej anëtarëve të skajshëm është i barabartë me prodhimin e anëtarëve të skajshëm, d.m.th.

$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot a_n, \quad 2 \le k \le n.$$

Vërtetim. Pasi $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ dhe $a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot q^{n-k}$, duke i shumëzuar anët e përkatëse të këtyre barasive fitojmë

$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q^{n-k} = a_1 \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_n} = a_1 \cdot a_n.$$

Është dhënë progresioni gjeometrik 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.

Vëren se: $4^2 = 2\cdot 8$, $8^2 = 4\cdot 16$, $16^2 = 8\cdot 32$, $32^2 = 16\cdot 64$ etj. Këtë veti të progresionit gjeometrik do ta shprehim me këtë teoremë

Teorema. Çdo anëtar i progresionit gjeometrik $a_1, \ a_2, \ a_3, ..., \ a_n$, përveç të skajshmëve është mesi gjeometrik prej paraardhësit dhe pasardhësit të tij.

Vërtetim. Le të jenë a_{k-1}, a_k dhe a_{k+1} tre anëtar të njëpasnjëshëm të progresionit gjeometrik $a_1, \ a_2, \ a_3, ..., \ a_n$. Atëherë, sipas përkufizimit për progresionin gjeometrik kemi:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k}, \text{ prejku } a_k^{\ 2} = a_{k-1} \cdot a_{k+1}, \quad k = 2,3,...,n-1,$$

që duheshte të vërtetohet. Emri progresion gjeometrik rrjedh veçanërisht prej kësaj vetie.

Sipas teoremës paraprake, te progresioni gjeometrik 64, 32, 16, 8, 4, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ numri 4 është mesi gjeometrik prej anëtarëve të tij fqinj 8 dhe 2, d.m.th. $4^2 = 8\cdot 2$.

Shkruaje numrin 4 si mes aritmetik prej dy anëtarëve të tij të vargut të dhënë.

Vëre, $4^2 = 16\cdot 1$, $4^2 = 32\cdot \frac{1}{2}$, $4^2 = 64\cdot \frac{1}{4}$, ku: 16 dhe 1, 32 dhe $\frac{1}{2}$, 64 dhe $\frac{1}{4}$ janë anëtar të progresionit që janë një lloj të larguara prej anëtarit 4. Kjo veti vlen për çfarëdo progresion gjeometrik dhe do ta shprehim me këtë teoremë

Teorema. Çdo anëtar i brendshëm i progresionit gjeometrik $a_1, \ a_2, \ a_3, ..., \ a_n$ është mesi gjeometrik i dy anëtarëve të vargut që janë njëlloj të larguar prej tij.

Vërtetim. Anëtarët a_{k-r} dhe a_{k+r} $(1 \le r < k,\ k < n)$ janë njëlloj të larguar prej anëtarit a_k. Prej përkufizimit të progresionit gjeometrik vijon $a_{k+r} = a_k \cdot q^r$, d.m.th. $a_k = \frac{a_{k+r}}{q^r}$. Nga ana tjetër $a_k = a_{k-r} \cdot q^r$, pra duke i shumëzuar anët e barazimit fitojmë $a_k^{\ 2} = a_{k-r} \cdot a_{k+r}$, që duheshte të vërtetohet.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet edhe kjo teoremë.

Teorema. Te progresioni gjeometrik $a_1,\ a_2, \ldots, a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2}, \ldots, a_{2k+1}$ me numër tek të anëtarëve, anëtari i mesëm a_{k+1} është i barabartë me mesin gjeometrik të përgjithësuar prej anëtarëve tjerë, d.m.th.

$$a_{k+1}^{2k} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2k+1}.$$

Përpiqu këtë teoremë ta vërtetosh vet.

Nëse teoremën e zbatojmë te progresioni gjeometrik $\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \boxed{2,}\ 4,\ 8,\ 16$

do të kemi:

$$2^6 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \quad \text{ose} \quad \sqrt[6]{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16} = 2.$$

B **1** Cakto shumën S_n të n anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Shihe zgjidhjen:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, d.m.th. $S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}$. Nëse të dy anët e barazimit i shumëzojmë me herësin q, kemi $q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$, nëse prej kësaj barasie e zbresim barasinë paraprake fitojmë $q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$, d.m.th.

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},\ q \ne 1.$$

Me formulën e fituar shuma e n anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik, kurse me metodën e induksionit matematik vërtetohet se formula vlen për çdo $n \in \mathbb{N}$.

2 Cakto shumën e dhjetë anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik 1, 2, 4, 8,...

Shihe zgjidhjen:

Këtu $a_1=1$, $q=2$ dhe $n=10$, pra $S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023$.

3 Cakto shumën e nëntë anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik 3, 6, 12,...

4 Cakto anëtarin e parë dhe të shtatë të progresionit gjeometrik herësi i të cilit është 2,kurse shuma e shtatë anëtarëve të parë është 635.

Zgjidhje:

Dihen q=2, n=7 dhe S_7=635. Prej formulës për S_7 kemi $S_7 = a_1 \cdot \dfrac{q^7-1}{q-1}$, d.m.th.. $635 = a_1 \cdot \dfrac{2^7-1}{2-1}$, prej ku $a_1 = 5$.

Prej $a_7 = a_1 \cdot q^6$ fitojmë $a_7 = 5 \cdot 2^6$, d.m.th. $a_7 = 320$.

5 Te një progresion gjeometrik $q = 3$ dhe $S_{10} = 59048$. Cakto a_{10}.

6 Cakto n dhe S_n te progresioni gjeometrik nëse:

a) $a_1 = 3,\ q = -2,\ a_n = -1536$; b) $a_1 = \dfrac{1}{64},\ q = -\dfrac{4}{3},\ a_n = -\dfrac{16}{243}$.

Shihe zgjidhjen:

a) Prej $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ kemi $-1536 = 3 \cdot (-2)^{n-1}$, d.m.th. $(-2)^{n-1} = (-2)^9$, prej ku $n = 10$, pra $S_{10} = -1023$.

7 Shuma e katër anëtarëve të parë të një progresioni është 15, kurse shuma e katër anëtarëve pasardhës është 240. Cili është ai progresion?

Shihe zgjidhjen:

Prej kushtit të detyrës kemi

$$\begin{cases} S_4 = 15 \\ S_8 - S_4 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 15 \\ a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6 + a_1q^7 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 15 \\ q^4\underbrace{\left(a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3\right)}_{15} = 240, \text{ ose } q^4 \cdot 15 = 240, \end{cases}$$

ose $q^4 = 16$, d.m.th. $q = \pm 2$. Vijimisht, për $q = 2$, prej $S_4 = a_1 \dfrac{q^4-1}{q-1}$ kemi $15 = a_1 \dfrac{2^4-1}{2-1}$, d.m.th. $a_1 = 1$, pra progresioni i dhënë është 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.

Nëse $q = -2$, $a_1 = -3$, pra progresioni është $-3,\ 6,\ -12,\ 24, ..., 384$.

8 Te progresioni gjeometrik me numër tek të anëtarëve anëtari i parë është 7, anëtari i mesëm është 56, kurse shuma e të gjithë anëtarëve është 889. Cakto herësin.

Shihe zgjidhjen:

Prej $a_m^2 = a_1 \cdot a_n$ vijon $a_n = \dfrac{a_m^2}{a_1} = \dfrac{56^2}{7}$ d.m.th. $a_n = 448$. Nëse të dy anët e barazimit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ i shumëzojmë

me q $(q \neq 0)$, fitojmë $a_nq = a_1q^n$. Këtë rezultat do ta shfrytëzojmë te formula për S_n,

d.m.th $S_n = a_1 \dfrac{q^n-1}{q-1} = \dfrac{a_1q^n - a_1}{q-1} = \dfrac{a_nq - a_1}{q-1}$. Nëse te barasia $S_n = \dfrac{a_nq - a_1}{q-1}$ i zëvendësojmë vlerat për S_n, a_n dhe a_1 fitojmë

$$889 = \frac{448q - 7}{q-1}, \text{ prej ku } q = 2.$$

9 Shuma e tre anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik është 21, kurse shuma e katrorëve të tyre është 189. Cakto anëtarin e parë dhe herësin e progresionit.

Shihe zgjidhjen:

Sipas kushtit të detyrës e formojmë sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 21 \\ a_1^2 + a_1^2q^2 + a_1^2q^4 = 189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\left(1+q+q^2\right) = 21 \\ a_1^2\left(1+q^2+q^4\right) = 189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{21}{1+q+q^2} \\ a_1^2\left(1+q^2+q^4\right) = 189. \end{cases}$$

Me zëvendësimin përkatës te barazimi i dytë fitojmë

$$\frac{21^2}{\left(1+q+q^2\right)^2}\left(1+q^2+q\right)\left(1+q^2-q\right) = 189, \text{ d.m.th. } \frac{1+q^2-q}{1+q+q^2} = \frac{3}{7}, \text{ prej ku e fitojmë barazimin}$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0 \text{ zgjidhjet e të cilëve janë } q = \frac{1}{2} \text{ ose } q' = 2. \text{ Vijimisht, } a_1 = 12,\ a_1' = 3.$$

10 Shuma e tre anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik është 91. Nëse ndaj atyre anëtarëve shtojmë përkatësisht 25, 27 dhe 1, do të fitojmë tre numra të cilët formojnë progresion aritmetik. Cakto anëtarin e shtatë të progresionit gjeometrik.

Shihe zgjidhjen:

Le të jenë a_1, a_1q dhe a_1q^2 tre anëtarët e parë të progresionit gjeometrik. Atëherë $a_1 + 25$, $a_1q + 27$ dhe $a_1q^2 + 1$ janë anëtarë të progresionit aritmetik. Sipas kushtit të detyrës kemi:

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 91 \\ a_1q + 27 = \dfrac{a_1 + 25 + a_1q^2 + 1}{2} \end{cases}$$

(Anëtari i dytë i progresionit gjeometrik është mesi aritmetik prej paraardhësit dhe pasardhësit)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1\left(1+q+q^2\right) = 91 \\ a_1\left(1-2q+q^2\right) = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{91}{1+q+q^2} \\ \dfrac{91}{1+q+q^2}\left(1-2q+q^2\right) = 28. \end{cases}$$

Pas rregullimit të barazimit të dytë në këtë sistem e fitojmë barazimin $3q^2 - 10q + 3 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë

$q_1 = 3$ ose $q_2 = \frac{1}{3}$. Domethënë, ekzistojnë dy progresione të atilla, dhe atë:

$$a_1 = \frac{91}{1+3+9} = \frac{91}{13} = 7 \quad \text{ose} \quad a_1' = \frac{91}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = \frac{91}{\frac{13}{9}} = \frac{9\cdot 91}{13} = 63.$$

Prandaj, $a_7 = a_1 \cdot q_1^6 = 7\cdot 3^6 = 5103$ ose $a_7' = a_1' \cdot q_2^6 = 63\cdot\frac{1}{3^6} = \frac{7}{3^4} = \frac{7}{81}$.

11 Prej një bakterje duke u ndarë fitohen dy. Ndarja bëhet çdo orë. Sa bakterje do të fitohen për 10 orë, kurse sa për 24 orë, me kusht ndarja të mos ç'rregullohet?

Shihe zgjidhjen:

Zhvillimi i bakterjeve kryhet sipas ligjit për progresionin gjeometrik te i cili anëtari i parë është $a_1 = 1$ (në fillim është vetëm një bakterje), kurse herësi është $q = 2$ (çdo anëtar i ri është dy herë më i madh se paraardhësi). Pas 10 orë numri i përgjithshëm i bakterjeve do të jetë

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1024.$$

Në mënyrë të ngjashme fitojmë $S_{24} = 2^{24} - 1$.

12 Zgjidhe barazimin: a) $3 + 6 + 12 + \ldots + x = 189$; b) $1 - 3 + 9 - 27 + \ldots + x = 4921$.

Shihe zgjidhjen:

a) Vëre se mbledhësat në anën e majtë te barazimi janë, në realitet, anëtar të progresionit gjeometrik te i cili $a_1 = 3$, $q = 2$, $a_n = x$ dhe $S_n = 189$.

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$189 = 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$63 = 2^n - 1$$

$$2^n = 64$$

$$n = 6.$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$189 = \frac{x \cdot 2 - 3}{2 - 1},\ x = 96$$

ose $x = a_6 = a_1 q^5 = 3 \cdot 2^5 = 96.$

Vëre!

Prej $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ vijon $a_1\left(q^n - 1\right) = (q - 1)S_n$, d.m.th. $q^n - 1 = (q - 1)\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right)$.

Nëse shënojmë $q = \dfrac{a}{b}$, $(b \neq 0)$ fitojmë

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Detyra:

1) Cakto shumën e shtatë anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik $2,\ -4,\ 8,\ -16, \ldots$

2) Njehso q dhe S_n te progresioni gjeometrik nëse:

a) $a_1 = 7$, $a_6 = \dfrac{1701}{32}$; b) $a_1 = -16$, $a_{11} = -\dfrac{1}{64}$.

3 Njehso n dhe a_n te progresioni gjeometrik nëse:

a) $a_1 = 7,\ \ q = 2,\ \ S_n = 1785$; b) $a_1 = 2,\ \ q = -3,\ \ S_n = -364$.

4 Njehso q dhe n te progresioni gjeometrik nëse:

a) $a_1 = 2,\ \ a_n = 2048,\ \ S_n = 2730$; b) $a_1 = -9,\ \ a_n = -1125,\ \ S_n = -1404$.

5 Shuma e pesë anëtarëve të parë të një progresioni gjeometrik është 93, kurse shuma e pesë anëtarëve pasardhësa është 2976. Cakto progresionin.

6 Te një progresion gjeometrik me numër tek të anëtarëve, anëtari i mesëm është 48, kurse shuma e të gjithëve është 1533. Sa anëtar ka vargu?

7 Shuma e tre numrave të cilët formojnë progresion gjeometrik është 26,kurse shuma e katrorëve të tyre është 364. Cilët janë ato numra?

8 Një njeri e ka shitur kalin në këtë mënyrë: për thumbin e parë ka kërkuar një denar, për të dytin dy denarë, për të tretin 4 denarë etj. Gjithsej ka pasur 32 thumba. Sa ka qenë çmimi i kalit?

9 Anëtari i parë i një progresioni gjeometrik është rrënja e barazimit $\sqrt[3]{a^{2x+3}} : \sqrt[4]{a^{x+1}} = a^{\frac{x-3}{2}}$.
Si është progresioni, nëse shuma e anëtarit të parë dhe të katërtë është shtatë herë më i madh se shuma e anëtarit të tretë dhe të katërtë?

10 Njehso shumën $1+11+111+1111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}$.

6 VLERA KUFITARE E VARGUT

Kujtohu!

- Nëse $a,b \in \mathbb{R}$ dhe $a < b$, atëherë bashkësia e të gjithë numrave realë ndërmjet a dhe b quhet ***interval***, kurse numrat a dhe b – ***skaje*** të atij intervali.
- Ekzistojnë intervale të hapura, të mbyllura dhe gjysmë të hapura: (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$.
- Në boshtin numerik paraqiti intervalet:

a) $(-2,1)$; b) $[-2,1)$; c) $(-2,1]$; ç) $[-2,1]$; d) $(-\infty,1)$; e) $(-\infty,1]$; f) $(1,+\infty)$; g) $[1,+\infty)$.

- Shkruaje shkurtimisht intervalin:

a) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ 1 \le x < 3\}$; b) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < x \le 10\}$; c) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge -1\}$; ç) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < 5\}$.

- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$; $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$.

A ***Intervali i hapur*** (a,b) është bashkësi prej të gjithë numrave realë x për të cilët vlen $a < x < b$, d.m.th.

$$(a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}.$$

- Numri real $\dfrac{a+b}{2}$ quhet ***mesi*** i intervalit (a,b), fig. 1.

fig.1

1 Intervalin e dhënë paraqite në boshtin numerik dhe caktoje mesin e tij:

a) $(0,1)$; b) $(-4,0)$; c) $(-2,2)$; ç) $\left(-\frac{1}{2},4\right)$; d) $(-5,-3)$.

Nëse c është numër real i dhënë dhe ε është numër pozitiv real i dhënë, atëherë intervali $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ quhet ***rrethina*** ε e numrit c, kurse ε quhet rreze e asaj rrethine, fig. 2.

- Cilët numra realë x i takojnë rrethinës ε të numrit c ?

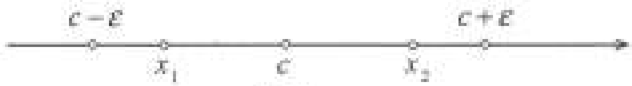


fig. 2

- Është e qartë se ato janë numrat për të cilët vlen $c-\varepsilon < x < c+\varepsilon$, ose nëse zbritet c, d.m.th. $-\varepsilon < x-c < \varepsilon$, që mund të shkruhet edhe në këtë mënyrë $|x-c| < \varepsilon$.

B **4** Është dhënë vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, d.m.th. vargu: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ (fig. 3).

fig. 3

Anëtarët e këtij vargu duke dhënë vlera për n prej $\mathbb{N}$ janë në mënyrë alternative ndonjë herë më të vogla,ndonjë herë më të mëdhaja se zero. Vërejmë se ato janë grupuar (grumbulluar) rreth zeros,dhe atë: anëtarët janë me indeksa tek afrohen prej nga e majta, kurse ato me indeksa çift nga e djathta.

- Për pikën 0 themi se është *pika e grumbullimit* të vargut të dhënë. Ajo nuk është anëtar i vargut.

- Vëreve se ky varg është i kufizuar, d.m.th. $|a_n| \leq 1$ për çdo $n \in \mathbb{N}$.

Përkufizimi. Pika a quhet ***pika e grumbullimit*** të vargut (a_n), nëse në çdo rrethinë të saj ε – ka pakufi shumë anëtar të vargut, d.m.th. nëse vlen

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

për vlera të panumërta të n.

Jashta intervalit $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ mund të ketë pafund shumë ose shumë anëtar të fundshëm të vargut.

Pika 0 është pikë e grumbullimit të vargut $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, pasi në çfarëdo rrethinë të saj ε – ka anëtar të panumërta të vargut. Kështu për shembull, nëse $\varepsilon = 10^{-2}$, atëherë në intervalin $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon) = \left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ i takojnë anëtarët $a_{101} = -\frac{1}{101}$, $a_{102} = \frac{1}{102}$, $a_{103}, \ldots$ etj. të cilët janë pafund shumë.

Jashta këtij intervali ka numër të anëtarëve të fundshëm të vargut, kurse ato janë $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_{100}$ (fig. 4).

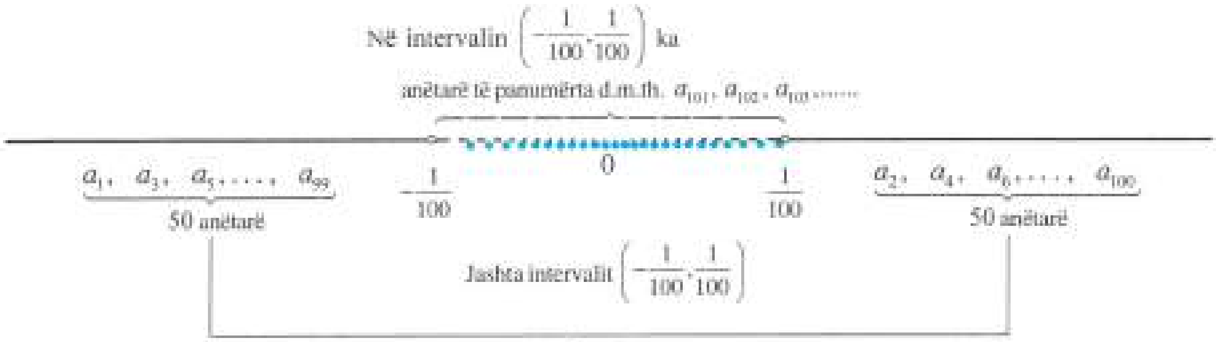


fig. 4

Një varg mund të ketë më shumë pika të grumbullimit. Kështu për shembull, vargu me anëtarin e përgjithshëm:

a) $a_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n}$, d.m.th. $0,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ -\dfrac{4}{5},\ \dfrac{5}{6},\ -\dfrac{6}{7},\ \dfrac{7}{8}, \dots$ ka dy pika të grumbullimit: -1 dhe 1 (fig. 5).

fig.5

Për çfarëdo $\varepsilon > 0$ në intervalin $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$ gjenden pakufi shumë anëtar të vargut me indeksa çift n, kurse në intervalin $(-1-\varepsilon,\ -1+\varepsilon)$ pakufi shumë anëtar me indeksa tek n. Për këtë shkak +1 dhe -1 janë pika të grumbullimit të vargut. Ato nuk janë anëtar të tij. Ky varg është, gjithashtu i kufizuar, d.m.th. $|a_n| < 1$ për çdo $n \in \mathbb{N}$.

b) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$, d.m.th. $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0, \dots$, ka tre pika të grumbullimit: $1, 0$ dhe -1. Edhe ky varg është i kufizuar, d.m.th. $|a_n| \le 1$ për çdo $n \in \mathbb{N}$.

Në pyetjen një varg a ka ose nuk ka pikë të grumbullimit përgjigjen e jep teorema e Bolcano - Vajershtras:

Teorema. **Çdo varg i kufizuar ka të paktën një pikë të grumbullimit.**

Këtë teoremë nuk do ta vërtetojmë.

Vargjet anëtarët e të cilëve janë: a) $a_n = n,\ n \in \mathbb{N}$; b) $a_n = -n,\ n \in \mathbb{N}$; c) $a_n = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}$;

ç) $a_n = n^2,\ n \in \mathbb{N}$ nuk kanë pika të grumbullimit. Vëreve se çdonjëri prej këtyre vargjeve është i pakufizuar.

Në matematikë, me rëndësi të veçant janë vargjet (a_n) prej numrave realë me këtë veti: Ekziston numër real a i atillë që në çdo rrethinë të a ka shumë anëtar të panumërta prej vargut (a_n), kurse jashta asaj rrethine ka vetëm shumë anëtar të fundshëm. Në këtë rast për a themi se është vlera kufitare e vargut (a_n).

C

Përkufizimi. Numri a quhet ***vlera kufitare*** ose ***kufiri*** i vargut (a_n), nëse për çdo numër të zgjedhur $\varepsilon > 0$ mund të caktohet numër $n_0(\varepsilon)$, i atillë që anëtarët e vargut (a_n) me indeks $n > n_0(\varepsilon)$ të vlen

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Atë e shkruajmë $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ose $a_n \to a,\ n \to \infty$.

kurse lexojmë: „limes prej a_n kur n tenton në pakufi është i barabartë me a" ose „ a_n tenton nga a kur n tenton në pakufi.

Prej përkufizimit del se nëse vargu ka vlerë kufitare, gati të gjithë anëtarët e tij, d.m.th. të gjithë ato anëtar duke filluar prej $a_{n_0+1},\ a_{n_0+2},\ a_{n_0+3},\dots,a_\infty$ gjenden në brendinë e intervalit $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, por vetëm numër i fundshëm i anëtarëve (të parët n_0 në numër) $a_1,\ a_2,\dots,\ a_{n_0}$ janë jashta këtij intervali. Numri a është njëkohësisht edhe pikë e grumbullimit të vargut.

5 Duke e shfrytëzuar përkufizimin për kufi të vargut vërteto se vargu $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ka kufi të barabartë me zero.

Shihe zgjidhjen:

Vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n=\frac{1}{n^2}$ është: $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{36},\ \frac{1}{49},\dots$ Le të jetë ε është çfarëdo numër i plotë pozitiv. E shqyrtojmë jobarasinë

$|a_n-a|=|\frac{1}{n^2}-0|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$ që kënaq për $n^2>\frac{1}{\varepsilon}$,

d.m.th. $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Domethënë, për çfarëdo $\varepsilon>0$ ekziston numër natyror $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, ashtu që të vlej jobarasia $|\frac{1}{n^2}-0|<\varepsilon$, d.m.th. vargu i dhënë ka kufi të barabartë me zero.

(i) Nëse $\varepsilon=0,1$ atëherë kemi $n>\sqrt{10}$, pra numri më i vogël natyror i cili e kënaq jobarasinë e fundit është 4. Kjo do të thotë se duke filluar prej anëtarit të katërtë, të gjithë anëtarët tjerë të vargut gjenden në rrethinën ε – të pikës $a=0$, përkatësisht në intervalin $\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$.

Në këtë rast $n_0(\varepsilon)=3$, d.m.th. vetëm tre anëtarët e parë gjenden jashta atij intervali (fig. 6).

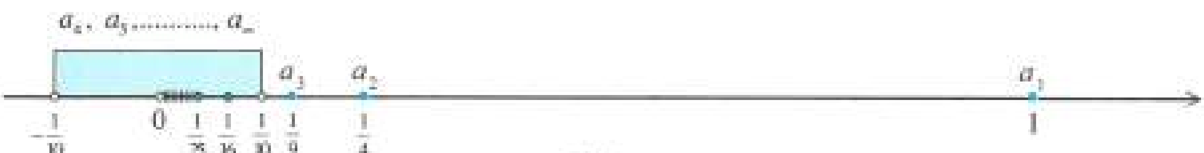


fig. 6

(ii) Nëse zgjedhim $\varepsilon=\frac{1}{40}$, atëherë të gjithë anëtarët e vargut, duke filluar prej të shtatit e kënaqin jobarasinë

$|a_n-0|=|a_n|=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{40}$. Në këtë rast $n_0(\varepsilon)=6$.

(iii) Nëse $\varepsilon=0,01$, atëherë $n_0(\varepsilon)=10$.

(iv) Nëse $\varepsilon=0,001$, atëherë $n_0(\varepsilon)=31$ etj.

6 Duke e shfrytëzuar përkufizimin për kufirin e vargut, vërteto se vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n=\frac{2n-1}{n+1}$ e ka kufirin të barabartë me 2.

7 Vërteto se vargu $0,3;\ 0,33;\ 0,333;\dots\dots;\ 0,33\dots\dots3$ e ka kufirin $a=\frac{1}{3}$.

Shihe zgjidhjen:

Ndryshimi $|a_n - a|$ në këtë rast është $\left|0,33......3-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{33.......3}{10^n}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{99.......9-10^n}{3\cdot10^n}\right| = \left|\frac{-1}{3\cdot10^n}\right| = \frac{1}{3\cdot10^n}$,

pra për çdo $\varepsilon>0$ prej $\frac{1}{3\cdot10^n}<\varepsilon$ vijon $n>-\log 3\varepsilon$.

(i) Nëse është $-\log 3\varepsilon>0$ për $n_0(\varepsilon)$ meret numri më i madh natyror që nuk është më i madh se $-\log 3\varepsilon$.

(ii) Nëse është $-\log 3\varepsilon<0$, atëherë $n_0=1$.

Domethënë, për çdo $\varepsilon>0$ ekziston numër natyror $n_0(\varepsilon)$, i atillë që

$$n>n_0(\varepsilon)\Rightarrow\left|0,33.........3-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$

që duheshte të vërtetohet.

Nëse $\varepsilon=0,0001$, atëherë $n_0(\varepsilon)=3$, d.m.th. vetëm tre anëtarët e parë të vargut janë jashta intervalit $\left(\frac{1}{3}-\varepsilon,\frac{1}{3}+\varepsilon\right)$, kurse të gjithë anëtarët tjerë janë në atë interval.

Detyra:

1. Duke e shfrytëzuar përkufizimin për kufirin e vargut vërteto se: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$.

2. Vërteto se $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-2}=\frac{2}{3}$, kurse pastaj cakto për cilat vlera të n kënaqet jobarasia $\left|a_n-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$, nëse: a) $\varepsilon=0,01$; b) $\varepsilon=10^{-4}$.

3. Duke e shfrytëzuar përkufizimin për kufirin e vargut vërteto se është e saktë jobarasia:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2-1}=\frac{1}{2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2}{n^2+2}=3$.

   Pastaj për çdo varg cakto sa anëtar të vargut gjenden jashta rrethinës ε – të pikës a, ku a është kufiri i vargut përkatës nëse $\varepsilon=0,01$.

4. Është dhënë vargu: a) $0,1$; $0,11$; $0,111$;........ b) $0,24$; $0,2424$; $0,242424$;........

   Cakto $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ dhe vlerën e n për të cilën kënaqet jobarasia $\left|a_n-\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right|\le 0,01$.

5. Është dhënë vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$.

   a) Shkruaji gjashtë anëtarët e parë të vargut; b) Paraqiti anëtarët në boshtin numerik.

   c) Provo vargu a është monoton. ç) Provo vargu a është i kufizuar.

   d) Për cilën vlerë të n do të jetë e saktë jobarasia $|a_n-a|<0,001$?

   e) Me çka është i barabartë kufiri $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$?

7 VARGJET KONVERGJENTE DHE DIVERGJENTE

Kujtohu!

Për bashkësitë A dhe B themi se janë bashkësi disjunkte, nëse $A \cap B = \emptyset$.

A

Përkufizimi. Vargu i cili ka vlerë kufitare quhet ***varg konvergjent***.

Nëse a është vlera kufitare e vargut (a_n), atëherë themi se vargu konvergjon nga a ose tenton nga a.

Përkufizimi. Vargu i cili nuk ka vlerë kufitare quhet ***varg divergjent***.

Të shqyrtohet natyra e një vargu, domethënë të konstatohet se a është ai konvergjent ose nuk është, dhe nëse është, të caktohet vlera kufitare e tij.

B

Do të shqyrtojmë disa veti më të rëndësishme të vargjeve konvergjente.

Teorema 1. Nëse (a_n) është varg konvergjent, atëherë kufiri i tij është njëvlerësisht i përcaktuar.

Përcille vërtetimin:

Të supozojmë se vargu konvergjent (a_n) ka dy vlera kufitare dhe le të jenë numrat

a dhe b, $a \neq b$. Të zgjedhim rrethina disjunkte $\varepsilon -$ të numrave a dhe b. Për shembull,nëse $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{4}$, atëherë $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \emptyset$. Pasi a është kufiri, ekziston numër natyror n_0, i atillë që të gjithë anëtarët a_n, $n > n_0$ janë në rrethinën e zgjedhur $\varepsilon -$ të a, pra në rrethinën e zgjedhur $\varepsilon -$ të b ka vetëm shumë anëtarë të fundshëm prej vargut. Prandaj, b nuk është kufi. Domethënë, nëse vargu ka kufi, atëherë ai kufi është i vetmi.

Teorema 2. Çdo varg konvergjent është i kufizuar.

Shihe vërtetimin:

Le të jetë $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ dhe $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, një rrethinë $\varepsilon -$ e pikës a. Nëse të gjithë anëtarët e vargut gjenden në intervalin $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, atëherë vargu është i kufizuar.

Nëse, tani, ka anëtar të vargut jashta atij intervali, atëherë numri i tyre është i fundshëm. Njëri prej atyre anëtarëve është pika më e larguar prej pikës a. Nëse largësin e tyre prej pikës a e shënojmë me d dhe $\alpha = d+1$, atëherë intervali $(a-\alpha, a+\alpha)$ do t'i përmban të gjithë anëtarët e vargut, kurse kjo do të thotë se vargu është i kufizuar.

Për shembull,vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ka vlerë kufitare 1, që do të thotë se është konvergjent.

Të gjithë anëtarët e këtij vargu i takojnë intervalit $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, prandaj është i kufizuar (fig. 1).

fig. 1

Gjykimi i anasjelltë nuk vlen, d.m.th. ka vargje të kufizuara që nuk janë konvergjente. Kështu, për shembull

$$-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ldots\ldots,(-1)^n\frac{n}{n+1},\ldots\ldots$$

është i kufizuar pasi të gjithë anëtarët e tij i takojnë intervalit $(-1, 1)$. Ky varg ka dy pika të grumbullimit, pra nuk është konvergjent (fig. 2).

fig.2

Teorema 3. Çdo varg monoton dhe i kufizuar është konvergjent.

Këtë veti nuk do ta vërtetojmë, por do ta ilustrojmë në shembull konkret.

Për shembull, anëtarët e vargut 1; 1,4; 1,41; 1,414;.......... fitohen duke vazhduar mënyrën e njehsimit të rrënjës katrore të numrit 2 dhe ato gradualisht zmadhohen, por ngelin më të vegjël prej një numri, për shembull, për shembull 1,5. Ky varg ka vlerë kufitare. Ai është numri $\sqrt{2}$.

1 Shqyrto vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{n-1}{n}$ a është konvergjent.

Shihe zgjidhjen:

$a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Pasi $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ për çdo $n \in \mathbb{N}$, përfundojmë se vargu monotonisht rritet. Prej $0 \le 1 - \frac{1}{n} < 1$ për çdo $n \in \mathbb{N}$ vijon se vargu është i kufizuar, prandaj sipas teoremës paraprake ky varg është konvergjent.

2 Vërteto se vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ është konvergjent.

3 Vërteto se vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{1}{n}$ është konvergjent dhe vlera kufitare e tij është zero.

Shihe vërtetimin:

Duhet të vërtetojmë se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Nëse e formojmë ndryshimin $|a_n - a|$, fitojmë $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$.

Ky ndryshim do të jetë i vogël prej çfarëdo numri të vogël pozitiv ε, nëse është

$$\frac{1}{n}<\varepsilon, \text{ d.m.th. } n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Prandaj, për çdo $n>n_0$, ku n_0 është numër natyror më i madh ose i barabartë me $\frac{1}{\varepsilon}$, vlen

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon, \text{ d.m.th. } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Kështu për shembull, nëse $\varepsilon=10^{-2}$, atëherë për çdo $n>n_0=\frac{1}{\varepsilon}=100$, $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<10^{-2}=\varepsilon$,

Që do të thotë se anëtarët a_{101}, a_{102}, a_{103},....... prej vargut gjenden në intervalin $\left(-\frac{1}{100},\frac{1}{100}\right)$, por numër i fundshëm, d.m.th. 100 anëtarët e parët gjenden jashta atij intervali.

Nëse, tani, $\varepsilon=10^{-7}$, atëherë për çdo n, $n>n_0=\frac{1}{\varepsilon}=10^{-7}$, $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<10^{-7}=\varepsilon$.

Kjo do të thotë se vetëm numër i fundshëm i anëtarëve (10 000 000 të parët) janë jashta intervalit $(-10^{-7},10^{-7})$, kurse pafund shumë, d.m.th. të gjithë anëtarët tjerë janë në atë interval.

4 Vërteto se vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$ është konvergjent dhe vlera kufitare e tij është e barabartë me zero.

5 Vërteto se vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n=\frac{n}{n+1}$ është konvergjent dhe e ka vlerën kufitare 1.

Shihe vërtetimin:

Pasi $|a_n-a|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$, ky ndryshim është më i vogël se numri i dhënë pozitiv ε kur

$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, d.m.th. $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$. Prandaj, për çdo $n>n_0$ kënaqet

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon, \quad \text{d.m.th.} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Vëre: nëse a është vlera kufitare e vargut (a_n), atëherë jashta intervalit $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ mund të ketë vetëm shumë anëtar të vargut, dhe atë më së shumti $n_0(\varepsilon)$, d.m.th. vetëm anëtarët a_1, a_2,.......,$a_{n_0(\varepsilon)}$, kurse kjo qartazi do të thotë se vargu (a_n) patjetër duhet të jetë i kufizuar dhe të ketë vetëm një pikë të grumbullimit. Edhe anasjelltas: nëse vargu (a_n) është i kufizuar dhe nëse a është pikë e vetme e grumbullimit, atëherë a është vlera kufitare e tij.

Vëre se:

- nëse vargu (a_n) është i kufizuar dhe ka vetëm një pikë të grumbullimit, atëherë ai është konvergjent;
- nëse vargu (a_n) është i kufizuar dhe ka të paktën dy pika të grumbullimit, atëherë ai është divergjent;
- nëse vargu (a_n) është jo i kufizuar, atëherë ai është divergjent.

Kështu për shembull,vargu anëtari i përgjithshëm i të cilit është:

a) $a_n=(-1)^n n$, d.m.th. vargu $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ldots,(-1)^n n,\ldots$ është divergjent, pasi është i pakufizuar.

b) $a_n=\dfrac{(-1)^n(n-1)}{n}$, d.m.th.vargu $0,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ -\dfrac{4}{5},\ \dfrac{5}{6},\ldots$ është divergjent, pasi ka dy pika të grumbullimit -1 dhe 1.

Teorema 4. Nëse vargjet (a_n) dhe (b_n) janë konvergjente me vlerë kufitare të njëjtë a, atëherë edhe vargu (c_n) me vetinë $a_n\le c_n\le b_n$ për çdo $n\in\mathbb{N}$ është konvergjent dhe ka vlerë kufitare të njëjtë a, d.m.th.

$$\lim_{n\to\infty} c_n=a.$$

Shihe zgjidhjen:

Pasi vargjet (a_n) dhe (b_n) janë konvergjente, për çfarëdo numër pozitiv të zgjedhur ε ekzistojnë numra natyror $n_1(\varepsilon)$ dhe $n_2(\varepsilon)$, të atillë që

$$|a_n-a|<\varepsilon \text{ për çdo } n>n_1(\varepsilon),\ n\in\mathbb{N} \quad \text{dhe} \quad |b_n-a|<\varepsilon \text{ për çdo } n>n_2(\varepsilon),\ n\in\mathbb{N}.$$

Nëse $n_0(\varepsilon)=\max\left[n_1(\varepsilon),n_2(\varepsilon)\right]$, atëherë të gjithë anëtarët e vargut (c_n) indeksi i të cilit $n>n_0(\varepsilon)$ gjendet në intervalin $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, d.m.th. $|c_n-a|<\varepsilon$ për çdo $n>n_0(\varepsilon)$, $n\in\mathbb{N}$, kurse kjo do të thotë se

$$\lim_{n\to\infty} c_n=a.$$

Kjo teoremë quhet ***teorema*** për varg - ***sendviç***.

6 Cakto kufirin e vargut $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ duke e krahasuar me vargjet (0) dhe $\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Shihe zgjidhjen:

Nëse $(a_n)=(0)$, $(b_n)=\left(\dfrac{1}{n}\right)$ janë vargje konvergjente me vlerë kufitare të njëjtë 0, kurse $(c_n)=\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ është varg me vetinë $0\le\dfrac{1}{n^2}\le\dfrac{1}{n}$ për çdo $n\in\mathbb{N}$, atëherë sipas teoremë për varg sendviç vlen $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

Detyra:

1. Vërteto se vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n=\dfrac{n}{n-1}$, $n=2,3,\ldots$ është konvergjent.

2. Shqyrto konvergjencën e vargut me anëtarin e përgjithshëm: a) $a_n=(-1)^n\dfrac{2n+1}{n+1}$; b) $a_n=\dfrac{1-(-1)^n}{n+2}$.

3. Vërteto se vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$ është konvergjent.

4. Le të jetë $a_n=\dfrac{2n}{n+1}, b_n=\dfrac{2n+2}{n+1}$ dhe $c_n=\dfrac{2n}{n+1}$. Duke e zbatuar teoremën për varg - sendviç vërteto se $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=2$.

(5) Cakto varg: a) rritës; b) zvogëlues prej numrave racional, kufiri i të cilit është 5.

(6) Cilët prej këtyre vargjeve janë konvergjente, kurse cilët divergjente:

a) $\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)$; b) $\left(n-(-1)^n\right)$; c) (a_n), $a_n = \begin{cases} 1, \text{ për } n \text{ numër çift} \\ \frac{1}{n}, \text{ për } n \text{ numër tek} \end{cases}$;ç) $\left(5\left(-\frac{1}{n}\right)^n\right)$; d) $\left(\frac{2^n-1}{3^n-1}\right)$.

8 DISA VARGJE KARAKTERISTIKE

A Ta shqyrtojmë vargun me anëtarin e përgjithshëm: a) $a_n = 8n$; b) $a_n = 1-n^2$; c) $a_n = (-3)^n$.

Vëre se:

a) Anëtarët e vargut $8,\ 16,\ 24,\ 32,\ 40,\ldots,800,\ldots,\ 8000,\ldots$ pafundësisht rriten.

Nëse zgjedhim numër sa do i madh $M > 0$, gjithmonë mund të caktohet anëtar prej vargut që është më i madh prej tij. Kështu, për shembull $M = 4000$, atëherë për $n > n_0 = 500$ fitojmë se $a_n = 8n > 4000$.

Domethënë, duke filluar prej $a_{501} = 4008$ çdo anëtar pasardhës i vargut është më i madh se $M = 4000$. për vargun e këtillë $(a_n) \equiv (8n)$ themi se është divergjent dhe tenton nga $+\infty$ kur $n \to \infty$.

Përkufizimi. Për vargun (a_n) themi se ***tenton*** nga $+\infty$, nëse për çdo numër real $M > 0$ ekziston numër natyror n_0, i atillë që

$$n > n_0 \Rightarrow a_n > M.$$

Shkruajmë $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

b) Anëtarët e vargut $0,\ -3,\ -8,\ -15,\ -24,\ldots,-9999,\ldots,-999999,\ldots$ zvogëlohen në pakufi.

Nëse zgjedhim sa do që të jetë numër i vogël $M < 0$, gjithmonë mund të gjendet anëtari i vargut që është më i vogël se ai.Kështu për shembull, nëse $M = -10000$, atëherë për $n > n_0 = 100$ fitojmë se $a_n = 1-n^2 < -10000$.
Domethënë, duke filluar prej $a_{101} = -10200$ çdo anëtar pasardhës i vargut është më i vogël se numri i zgjedhur $M = -10000$. Ky varg është, gjithashtu, divergjent dhe tenton nga $-\infty$ kur $n \to \infty$.

Përkufizimi. Për vargun (a_n) themi se ***tenton*** nga $-\infty$, nëse për çdo numër real $M < 0$ ekziston numër real n_0, i atillë që

$$n > n_0 \Rightarrow a_n < M.$$

Shkruajmë $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

c) Anëtarët e vargut $-3,\ 9,\ -27,\ 81,\ -243,\ldots,6561,\ -19683,\ 59049,\ldots$ ose

$-3,\ (-3)^2,\ (-3)^3,\ (-3)^4,\ (-3)^5,\ldots,(-3)^8,\ (-3)^9,\ (-3)^{10},\ldots$ pakufi rriten sipas vlerë absolute.

Nëse zgjedhim sa do të jetë numër i madh $M > 0$, gjithmonë mund të gjendet anëtari i vargut që është sipas vlerës absolute më i madh se M. Për shembull, nëse $M = 6000$, atëherë për $n > n_0 = 7$ fitojmë se $|(-3)^n| > 6000$.

Prandaj, duke filluar prej $a_8 = 6561$ çdo anëtar pasardhës i vargut sipas vlerë absolute është më i madh se numri $M = 6000$.

Ky varg (sikurse dy paraprakët) është divergjent dhe sipas vlerës absolute tenton nga ∞ kur $n \to \infty$.

Përkufizimi. Për vargun (a_n) themi se ***rritet në pakufi sipas vlerës absolute***, nëse për çfarëdo numër real $M > 0$ ekziston numër real n_0 ashtu që

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n| > M.$$

Shkruajmë $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Vargjet anëtarë e të cilëve në pakufi rriten janë shembuj për të ashtuquajturit ***madhësi të mëdhaja të pakufishme***. Poashtu, ekzistojnë vargje ku vlerat kufitare janë të barabarta me 0, kurse ato i quajmë ***madhësi të vogla të pakufishme*** ose ***vargje - zero***. Të atillë janë, për shembull, vargjet:

$$\left(\frac{2}{n}\right) = 2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{6},\ldots; \qquad \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots;$$

$$\left(2^{-n}\right) \equiv \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}\ldots$$

Për ato kemi:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$, d.m.th për çdonjërin prej këtyre vargjeve është $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Përkufizimi. Vargu (a_n) është ***varg - zero*** nëse është $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, d.m.th. $|a_n| < \varepsilon$ për çdo $n > n_0(\varepsilon)$.

Në matematikë raporti ndërmjet madhësive të vogla të pakufishme dhe madhësive të mëdhaja të pakufishme janë me interes të veçant dhe është dhënë me këtë teoremë.

Teorema. Le të jetë (a_n) varg i atillë që $a_n \neq 0$ për çdo $n \in \mathbb{N}$.

1°. Nëse $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atëherë $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

2°. Nëse $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, atëherë $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Për shembull,për vargun $a_n = \frac{1}{n}$ kemi $a_n \to 0$ kur $n \to \infty$. Nëse e formojmë vargun $b_n = \frac{1}{a_n}$, fitojmë se $b_n = n \to \infty$ kur $n \to \infty$.

B 1 Shqyrto konvergjencën e vargut (q^n), $q\in\mathbb{R}$ varësisht prej numrit q.

Shihe zgjidhjen:

Të mundshme janë tre raste, dhe atë: $1^0.\ |q|>1$; $2^0.\ |q|<1$; $3^0.\ |q|=1$.

1^0.Prej $|q|>1$ vijon $q>1$ ose $q<-1$.

a) Nëse $q>1$, atëherë prej shembujve konkret mund të përfundohet se $q^n\to+\infty$ kur $n\to\infty$. Që ta vërtetojmë këtë gjykim duhet të tregojmë se për çfarëdo numër real $M>0$ ekziston numër natyror n_0, ashtu që

$$n>n_0\Rightarrow q^n>M.$$

E dijmë se $q^n-1=(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1)$. Duke zëvendësuar çdonjërin prej n mbledhësave te kllapa e dytë me numrin 1, fitojmë $q^n-1>(q-1)(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{ herë}})=(q-1)\cdot n$, prej ku $q^n>(q-1)n+1$, kurse edhe aq më tepër $q^n>(q-1)n$. Prej këtu dhe prej implikacionit $n>n_0\Rightarrow(q-1)n>(q-1)n_0$ fitojmë se $n>n_0\Rightarrow q^n>(q-1)n_0$. Mjafton të marrim $(q-1)n_0>M$, $M>0$, përkatësisht $n_0>\dfrac{M}{q-1}$, pra fitojmë se $n>n_0\Rightarrow q^n>M$, d.m.th.

$$\lim_{n\to\infty}q^n=+\infty,\ \text{për}\ q>1$$

Vargu (q^n) është divergjent për $q>1$.

b) Nëse $q<-1$, atëherë anëtarët e vargut i ndërrojnë në mënyrë alternative shenjat, kurse sipas vlerës absolute tentojnë nga $+\infty$, d.m.th.

$$\lim_{n\to\infty}q^n=+\infty,\ \text{për}\ q<-1$$

Vargu (q^n) është divergjent për $q<-1$.

$2^0.\ |q|<1$, d.m.th. $-1<q<1$.

a) Le të jetë $0<q<1$. Nëse vëndojmë $r=\dfrac{1}{q}$ fitojmë se $r>1$, pra sipas 1^0a) $r^n\to\infty$ kur $n\to\infty$, d.m.th. $q^n\to0$ kur $n\to\infty$. Domethënë,vargu (q^n) është konvergjent për $0<q<1$.

b)Nëse është $-1<q<0$, anëtarët e vargut në mënyrë alternative i ndërrojnë shenjat. Sipas 2^0 a) dhe teorema përfundojmë se

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0,$$

d.m.th. vargu (q^n) është konvergjent për $-1<q<0$. Domethënë vargu (q^n) është konvergjent për $|q|<1$.

$3^0.\ |q|=1$, d.m.th. $q=1$ ose $q=-1$.

a) Nëse $q=1$, atëherë $q^n=1$ për çdo $n\in\mathbb{N}$, domethënë vargu është konstant dhe $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=1$, d.m.th. vargu është konvergjent.

b) Nëse $q=-1$, atëherë $q^n=(-1)^n$, pra vargu ka dy pika të grumbullimit, -1 dhe 1. Domethënë, vargu është divergjent.

2 Cakto vlerën kufitare të vargut me anëtarin e përgjithshëm: a) $\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$; b) $\left(\frac{2^n+2^{-n}}{2^n-2^{-n}}\right)$.

Përcille zgjidhjen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=3\cdot 0=0;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+2^{-n}}{2^n-2^{-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+\frac{1}{2^n}}{2^n-\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{2n}+1}{2^n}}{\frac{2^{2n}-1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n+1}{4^n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n\left(1+\frac{1}{4^n}\right)}{4^n\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}=\frac{1+0}{1-0}=1.$

3 Vërteto se vargu me anëtarin e përgjithshëm $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$ është konvergjent.

Shihe zgjidhjen:

Sipas formulës së binomit kemi:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n,\ \text{d.m.th.}$$

pas thjeshtimit me n dhe pjesëtimit të shprehjeve në kllapat me n, fitojmë

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Të gjithë mbledhësat e anës së djathtë janë numra pozitiv. Duke zbatuar në barasinë e fundit prej indeksit n të indeksit $n+1$ do të vërejmë se ana e tij e djathtë zmadhohet,pasi përmban një mbledhës më shumë dhe për shkak të jobarasisë:

$1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}$, $1-\frac{2}{n}<1-\frac{2}{n+1}$, ..., $1-\frac{n-1}{n}<1-\frac{n-1}{n+1}$, prej ku vijon se

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, d.m.th. $a_n<a_{n+1}$, që do të thotë se vargu monotonisht rritet.

Të tregojmë se vargu është i kufizuar. Pasi $1-\frac{1}{n}<1$, $1-\frac{2}{n}<1$,..., $1-\frac{n-1}{n}<1$ kemi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Duke pasur parasysh se $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3},\ldots\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}}$ fitojmë

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Shumën në kllapa në anën e djathtë do ta njehsojmë si shumë të n anëtarëve të parë të prograsionit gjeometrik

$\left(a_1=1,\ q=\frac{1}{2}\right)$, pra kemi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3.$

Prej zbërthimit të binomit $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ është e qartë se $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 2$, pra përfundojmë se $2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$.

Që do të thotë se vargu është i kufizuar. Vërtetuam se vargu është monoton dhe i kufizuar, d.m.th. vargu është konvergjent. Vlera kufitare e tij gjendet ndërmjet numrave 2 dhe 3, kurse shënohet me shkronjën e, d.m.th.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Numri e nukmund të shkruhet në formën $\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}$, prandaj është numër iracional, d.m.th.. numër dhjetor joperiodik.

i pafundshëm. Vlera e tijështëndërmjet 2 dhe 3: $e=2,7182818284\ldots$ Ai ka rëndësi të veçantë në matematikë, pasi shfrytëzohet si bazë logaritmike. Logaritmet me bazë e quhen ***logaritme natyrore*** dhe shënohetme ln. Shenja ln është shkurtesa e shkronjës fillestare të fjalëve ***logaritmus naturalis***, që do të thotë logaritme natyrore.

Vijojnë disa detyra me zbatimin e vlerës kufitare $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

4 Cakto: a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$; b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$.

Shihe zgjidhjen:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=e\cdot 1=e;$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}\cdot 5}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5=e^5.$

5 Cakto: a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}$; b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

6 Cakto: a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+1}$; b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^n$.

Shihe mënyrën:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{2n+1}=$

Zëvendësojmë $2n+1=2m$, ku edhe $m\to\infty$ kur $n\to\infty$.

$=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m}=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2=e^2.$

Detyra:

1. Trego se vargu me anëtarin e përgjithshëm a) $\left(\frac{1}{n}\right)$; b) $\left(\frac{1}{n^2}\right)$; c) $\frac{n-1}{n^2+1}$; ç) $\left(2^{-n}\right)$ është varg - zero.

2. Cili prej këtyre vargjeve me anëtarin e përgjithshëm a) $a_n=n^2$; b) $a_n=(-1)^n$; c) $a_n=-n^3$; ç) $a_n=(-1)^n n$ tenton nga $+\infty$ ose nga $-\infty$, kurse cili oscilon?

3. Cakto vlerën kufitare të vargut nëse: a) $a_n=\frac{1-3^{n+1}}{2+3^n}$; b) $a_n=\frac{2^{n+1}-4}{2^{n+1}}$.

4. Cakto kufirin: a) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+7^{n+2}}{5^n+7^{n+1}}$; b) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

5. Cakto:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$; b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$; c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

6. Cakto vlerën kufitare të vargut nëse anëtari i përgjithshëm është:

a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}$; b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-3}$; c) $\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^n$.

7. a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+3}$; b) $\left(\frac{n-3}{n-1}\right)^{n+1}$; c) $\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n+1}$.

9 OPERACIONE ME VARGJE KONVERGJENTE

Kujtohu!

- $|a+b| \le |a|+|b|$.
- $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$.
- Cakto: a) $3!$; b) $5!$.
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
- $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ – shuma e n anëtarëve të parë të progresionit aritmetik.

---

1 Le të jenë dhënëvargjet $(a_n) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)$ dhe $(b_n) = \left(\frac{n-3}{n}\right)$ ku $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ dhe $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Cakto:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ dhe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ dhe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ dhe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

ç) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ dhe $\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$; $b_n \ne 0$.

Shihe zgjidhjen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1} + \frac{n-3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n-3}{n(n+1)}$

Numëruesin dhe emëruesin e pjesëtojmë me n^2, pra fitojmë $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 3$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2+1=3$. Anët e djathta të dy barazimeve të fundit janë të barabarta, prej ku vijon barazia edhe të anëve të majta të tyre, d.m.th. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{n^2+n} = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2-1=1$, domethënë: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\cdot\frac{n-3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{3}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 2$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{n} = 2\cdot 1 = 2$, pra $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

ç) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n+1}}{\frac{n-3}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-2n-3} = 2$; $\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{n}} = \frac{2}{1} = 2$, na $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Natyrisht parashtrohet pyetja: përfundimet prej a), b), c) dhe ç) a vlejnë në përgjithësi?
Përgjigjen e kësaj pyetje e jep kjo teoremë

Teorema. Nëse (a_n) dhe (b_n) janë vargje konvergjente ku $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ dhe $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, atëherë është konvergjent çdonjëri prej vargjeve $(a_n + b_n), (a_n - b_n), (a_n \cdot b_n)$ dhe $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ku $b_n \neq 0$, $b \neq 0$.

Megjithate:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n;$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n;$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n;$

ç) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}.$

Nëse $a_n = c$, c - konstante, për çdo $n \in \mathbb{N}$, atëherë $\lim\limits_{n\to+\infty} c b_n = c \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c \cdot b$.

Nëse $a_n = b_n$, për çdo $n \in \mathbb{N}$, atëherë

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(a_n^2\right) = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)^2 = a^2.$$

Nëse $a_n = c$, c - konstante, për çdo $n \in \mathbb{N}$, atëherë

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{c}{b_n} = c \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = c \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n} = \frac{c}{b}.$$

Vërtetim: Prej konvergjencës së vargjeve (a_n) dhe (b_n) vijon se për numër pozitiv ε, ekzistojnë numra natyrorë n_1 dhe n_2 të atillë që:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kur } n > n_1; \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kur } n > n_2.$$

Nëse $n_0 = \max(n_1, n_2)$ atëherë $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ dhe $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ kur $n > n_0$.

Duhet të vërtetojmë se: $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ kur $n > n_0$.

$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ kur $n > n_0$ d.m.th.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + b$, që duheshte të vërtetohet.

2 Le të jenë (a_n) dhe(b_n) vargje të fituara me „mënyra për njehsimin e rrënjës katrore" prej numrave $\sqrt{2}$ dhe $\sqrt{5}$ përkatësisht, d.m.th. vargjet:

1,4; 1,41; 1,414; . . .

2,2; 2,23; 2,236; . . .

Cakto: a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)$; c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n)$; ç) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

Shihe zgjidhjen:

a) Anëtarët e vargut (a_n+b_n) janë: 3,6; 3,64; 3,650; . . .

Sipas teoremës paraprake, vlera kufitare e këtij vargu është numri $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

c) Anëtarë te vargut $(a_n\cdot b_n)$ janë: 3,08; 3,1443; 3,161704; . . ., kurse kufuri i tij është numri $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$.

3 Njehso vlerën kufitare të vargut të dhënë me anëtarin e tij të përgjithshëm:

a) $3+\frac{2}{n}$; b) $\frac{n+3}{5-n}$; c) $\frac{3n^2-4n+1}{5n^2+6n-2}$; ç) $\frac{3n}{n+2}-\frac{n}{n-3}$.

Shihe zgjidhjen:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}3+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=3+0=3.$

b) Këtu nuk mundemi drejtpërdrejt ta zbatojmë teoremën për kufirin e herësit, pasi vargjet $(n+3)$ dhe $(5-n)$ janë divergjent. Prandaj do ta shfrytëzojmë kufirin e vargut - zero, d.m.th. edhe numëruesin edhe emëruesin do t'i pjesëtojmë me n, pra fitojmë: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{5-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{\frac{5}{n}-1}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{n}-1\right)}=-1$, pasi

$\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=3$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=3\cdot 0=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n}=5$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=5\cdot 0=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)=-1$.

c) Këtu edhe numëruesin edhe emëruesin i pjesëtojmë me n^2, për shkaqe të njëjta sikurse nën b), d.m.th.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-4n+1}{5n^2+6n-2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{6}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\frac{6}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{3}{5}.$$

ç) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{n+2}-\frac{n}{n-3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n\cdot(n+3)-n\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n-3)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+9n-n^2-2n}{n^2+2n-3n-6}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+7n}{n^2-n-6}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{7}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n}-\frac{6}{n}\right)}=\frac{2}{1}=2.$$

Njehso vlerën kufitare të vargut anëtari i përgjithshëm i të cilit është:

4 a) $a_n=\dfrac{7n-4}{3n+5}$; b) $a_n=\dfrac{3+n+n^2}{2+3n+5n^2}$; c) $a_n=\dfrac{2n}{n-1}+\dfrac{n}{n+3}$; ç) $a_n=\dfrac{(n-1)(n+2)}{n^2+5}$.

5 a) $a_n=\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$; b) $a_n=\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{n(10n+1)}$; c) $a_n=\dfrac{\sqrt{n^2-2n+5}}{3n+2}$; ç) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Shqyrto mënyrën e të zgjidhurit:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)}{(n+2)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)n!}{(n+2)(n+1)n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(n+1)}{(n+2)(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{(n+2)(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$;

b) 2, 4, 6, . . ., $2n$ janë n anëtarët e parë të progresionit aritmetik, shuma e të cilit $S_n=\dfrac{n}{2}(2+2n)=n(n+1)$, pra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n(10n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{10+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(10+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{10};$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-2n+5}}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{1}{3};$$

ç) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

Detyra:

1 Duke i shfrytëzuar teoremat për vargjet konvergjente, njehsoji këto vlera kufitare.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-5b_n)$, nëse $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(8a_n\cdot b_n)$, nëse $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{3}{2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-7}{2a_n+5}$, nëse $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$

Njehso vlerat kufitare të vargjeve të dhënë me anëtarin e përgjithshëm:

2 a) $\dfrac{an+b}{cn+d}$; b) $\dfrac{3n^2-4n+1}{5n^2+6n-2}$; c) $\dfrac{3^n}{3^n+3}$.

3 a) $\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$; b) $\dfrac{1+3+5+\ldots+2n-1}{(2n+1)(2n-1)}$.

Njehsoji këto vlera kufitare:

4 a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-\sqrt{n^2-5}}{3n-8}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n-1}+n}{\sqrt[3]{n^3+2n}}$; ç) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-6}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3}}$.

5 a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+2)^2-(n-2)^2}$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(n+1)^3-(n-1)^3}$.

6 a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{3n+1}-\dfrac{n}{6}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+3+5+\ldots+2n-1}{2n+5}-\dfrac{5n+2}{10}\right)$.

7 a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{5n^2+4n+2}-\sqrt{5n^2-2n}-1\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2}\right)$.

10 SHUMA E ANËTARËVE TË PROGRESIONIT TË PAFUNDSHËM GJEOMETRIK

Le të jetë dhënë progresioni i pafundshëm gjeometrik $a,\ aq,\ aq^2,\ldots,aq^{n-1},\ldots$

E formojmë vargun: $s_1=a,\ s_2=a+aq,\ldots,s_n=a+aq+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$

Të supozojmë se vargu (s_n) është konvergjent, d.m.th. le të jetë $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$, ku s është numër i fundshëm (i caktuar).

Përkufizimi. Vlera kufitare s e vargut (s_n) quhet shuma e progresionit të pafundshëm gjeometrik $a,\ aq,\ aq^2,\ldots$

Domethënë, nëse $\lim s_n=s$ atëherë $s=a+aq+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$

Do të shqyrtojmë disa raste varësisht prej herësit q.

1° $|q|=1$ d.m.th. $q=1$ ose $q=-1$.

a) Për $q=1$ fitojmë $s_n=a\cdot n$, pa $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\infty$;

b) Për $q=-1$ e fitojmë vargun $a, 0, a, 0, \ldots, (a\neq 0)$, i cili ka dy pika të grumbullimit a dhe 0, prandaj është divergjent.

Domethënë për $|q|=1$, shuma S e progresionit të pafundshëm gjeometrik nuk ekziston.

$2^\circ\ |q|<1.$ Pasi shuma e n anëtarëve të parë të progresionit gjeometrik është

$$S_n = a\frac{q^n-1}{q-1}, \text{ d.m.th. } S_n = a\frac{q^n}{q-1}+a\frac{1}{q-1}.$$

Vërejtëm, se kur $|q|<1$ se $q^n \to 0$, pra $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = a\frac{0}{q-1}+a\frac{1}{1-q}=\frac{a}{1-q}$, d.m.th. vargu (s_n) është konvergjent,

pra mund të shkruajmë $S = a+aq+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\frac{a}{1-q},\ |q|<1.$

1 Të caktohet shuma e progresionit $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

Shihe zgjidhjen:

Pasi $a=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}<1$, progresioni e ka shumën dhe ai është $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$ (fig. 1).

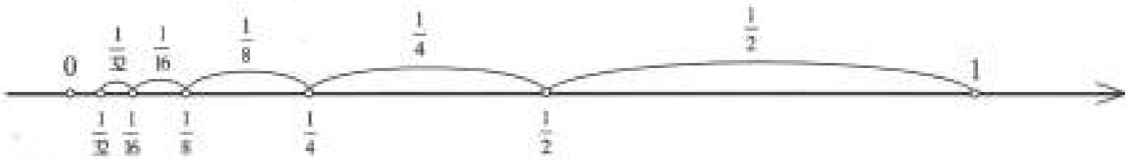


fig. 1

3° Nëse është $|q|>1$, atëherë $q^n \to \infty$ kur $n\to\infty$, pra edhe $q^n \to \infty$, d.m.th. vargu (s_n) divergjon.

Domethënë për $|q|>1$ shuma e progresionit të pafundshëm gjeometrik nuk ekziston, ai është „i pafundshëm".

2 Njehso shumën:

a) $\lg 2+\lg\sqrt{2}+\lg\sqrt[4]{2}+\ldots$

b) $\lg 3-\lg\sqrt{3}+\lg\sqrt[4]{3}-\lg\sqrt[8]{3}+\ldots$

Shihe zgjidhjen:

Këtu $a=\lg 2$, kurse herësi $q=\frac{\lg\sqrt{2}}{\lg 2}=\frac{\lg 2^{\frac{1}{2}}}{\lg 2}=\frac{\frac{1}{2}\lg 2}{\lg 2}=\frac{1}{2}$, pra

shuma S do të jetë: $s=\frac{\lg 2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\lg 2}{\frac{1}{2}}=2\lg 2=\lg 4.$

3 Cakto vlerën e shprehjes $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}}$.

Shihe zgjidhjen:

$$\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}}=\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{5}\sqrt{\sqrt{\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}}=5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{4}}\cdot5^{\frac{1}{8}}\cdot5^{\frac{1}{16}}\ldots=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots}=5^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}=5$$

4 Cakto vlerën e shprehjes: a) $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$; b) $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\ldots}}}}$.

5 Numrin $0,5555\ldots$ paraqite si shumë të anëtarëve të progresionit të pafundshëm gjeometrik, kurse pastaj njehso atë shumë.

Shihe zgjidhjen:

$$0,5555\ldots=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{200}+\frac{1}{2000}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{5}{9}.$$

6 Numrin $0,3(2)$ paraqite si thyesë të zakonshme.

Shihe zgjidhjen:

$$0,3(2)=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\ldots=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}\cdot\frac{10}{9}=\frac{29}{90}.$$

7 Te trekëndëshi barabrinjës me brinjë a është brendashkruar rreth. Në atë rreth është brendashkruar trekëndësh i ri barabrinjës, në atë trekëndësh përsëri rreth etj. Njehso shumën e syprinave të atyre rrathëve.

Shihe zgjidhjen:

Rrezja e rrethit të parë është $r_1=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Trekëndëshi i dytë është i ngjashëm me të parin (koeficienti i ngjashmërisë është $\frac{1}{2}$), pra $r_2=\frac{1}{2}r_1=\frac{a\sqrt{3}}{12}$, $r_3=\frac{1}{2}r_2=\frac{a\sqrt{3}}{24}$ etj. Shuma e syprinave të gjithë rrathëve është

$$S=S_1+S_2+S_3+\ldots \text{ ku } S_1=\pi r_1^2=\pi\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{a_2\pi}{12};S_2=\pi r_2^2=\pi\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2=\frac{a^2\pi}{48};S_3=\pi r_3^2=\pi\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}\right)^2=\frac{a^2\pi}{192};$$

$$S=\frac{a^2\pi}{12}+\frac{a^2\pi}{48}+\frac{a^2\pi}{192}+\ldots \quad \text{d.m.th. } S=\frac{\pi r_1^2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{9}a^2\pi.$$

Detyra:

1 Njehso shumën:

a) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...$

b) $7+\frac{7}{4}+\frac{7}{16}+...$

c) $1+\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}...$

ç) $4+7+\frac{8}{3}+\frac{35}{8}+\frac{16}{9}+\frac{175}{64}+...$

d) $1+\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+...$

e) $\lg 3-\lg\sqrt{3}+\lg\sqrt[4]{3}-\lg\sqrt[8]{3}+...$

2 Vërteto barasinë:

a) $3+\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+...=\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+...$

b) $2+1{,}6+1{,}28+...=15-\frac{15}{2}+\frac{15}{4}-\frac{15}{8}+...$

3 Njehso vlerën e shprehjes:

a) $\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7...}}}$;

b) $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5...}}}}$.

4 Numrin 1,535353... paraqite si shumë të anëtarëve të progresionit të pafundshëm gjeometrik, kurse pastaj njehso atë shumë.

5 Shndërroje në thyesë të zakonshme numrin: a) 3,25(4); b) 4,7(36).

6 Shuma e anëtarëve të progresionit të pafundshëm gjeometrik është $\frac{10}{3}$, kurse anëtari i dytë është $\frac{8}{15}$. Cakto anëtarin e tretë.

7 Zgjidhe barazimin:

a) $\log_9 x+\log_9^2 x+\log_9^3 x+...=1;\ (x<9)$;

b) $\sqrt[x]{2}\cdot\sqrt[2x]{2}\cdot\sqrt[4x]{2}\cdot...=4$.

8 Te vija rrethore me rreze r është brendashkruar trekëndësh barabrinjës, në trekëndësh është brendashkruar vijë rrethore, në vijën rrethore trekëndësh barabrinjës etj...

Njehso:

a) shumën e perimetrave të gjithë: *i*) vijave rrethore; *ii*) trekëndëshave;

b) shumën e syprinave të gjithë: *i*) rrathëve; *ii*) trekëndëshave.

9 Te trekëndëshi barabrinjës me brinjë a është brendashkruar trekëndësh barabrinjës kulmet e të cilit janë meset e brinjëve të trekëndëshit të parë, te i dyti në mënyrë të ngjashme është brendashkruar i treti etj.

Njehso:

a) shumën e lartësive të gjithë trekëndëshave;

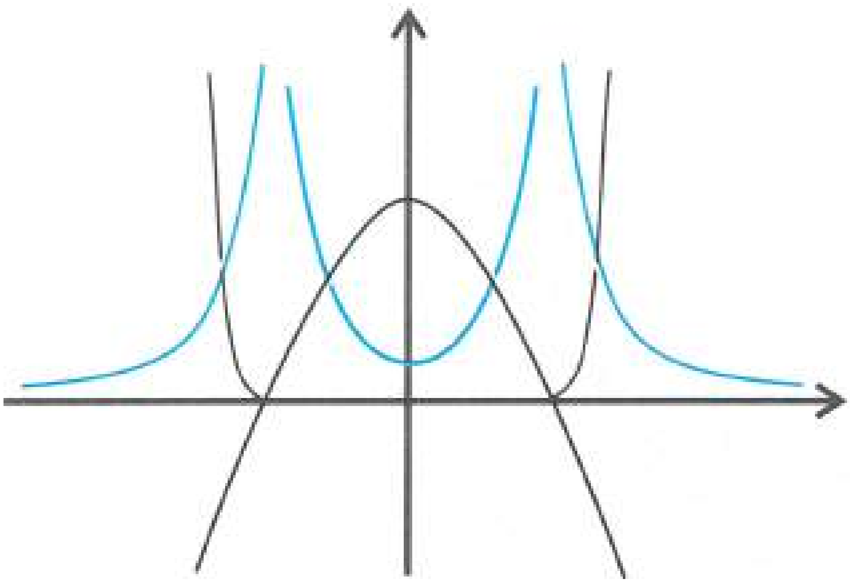
b) shumën e perimetrave të gjithë trekëndëshave;

c) shumën e syprinave të gjithë trekëndëshave.

TEMA 2

FUNKSIONET DHE VLERAT KUFITARE TË FUNKSIONEVE

Në këtë temë do të mësosh për:



1 FUNKSIONI ME ARGUMENT REAL

Kujtohu!

Në shkollimin e gjertanishëm mësove për: funksionin linear $y = kx + n$, funksionin katror $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$, funksionin eksponencial $y=a^x$ (a>0 dhe $a \neq 1$) funksioni logaritmik $y = \log_a x$ ($a>0, a \neq 1$ dhe $x>0$). I mësove funksionet trigonometrike $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Për çdo funksion i mësove vetitë dhe e vizatove grafikun e tij. Koncepti funksion është njëri prej koncepteve më të rëndësiëm në matematikë, prandaj në këtë pjesë do të flasim në përgjithësi për funksionin dhe do të mësojmë disa veti të funksioneve.

Le të jenë A dhe B dy bashkëso jo të zbrazëta dhe çdo elementi $x \in A$ i është shoqëruar, sipas ndonjë rregulle f, element i caktuar njëvlerësisht $y \in B$, atëherë themi se është përcaktuar ***pasqyrim*** f prej A në B dhe shkruajmë

$$f : A \to B.$$

Për y themi se është pasqyrë e x dhe shkruajmë

$$y = f(x) \text{ ose } f : x \mapsto y \text{ ose } x \mapsto y.$$

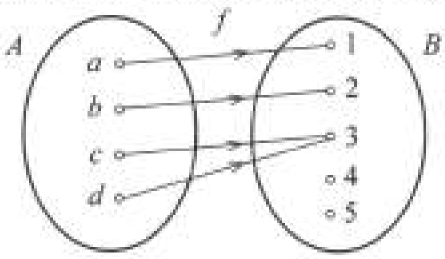
1 Le të jetë $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$ dhe f dhe g le të jenë këto rregulla të shoqërimit:

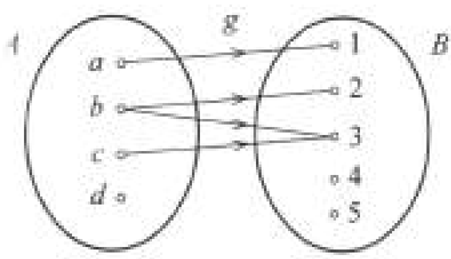
$f : a \to 1,\ b \to 2,\ c \to 3,\ d \to 3;$ $\qquad g : a \to 1,\ b \to 2,\ c \to 3,\ b \to 3.$

Me cilin shoqërim është përcaktuar pasqyrimi?

Shihe zgjidhjen:

Shoqërimin e dhënë do ta paraqesim me këto diagrame:





Me f është përcaktuar pasqyrimi prej A në B, kurse me g nuk është përcaktuar pasqyrim. Pse?

Bashkësia A quhet ***domen***, kurse bashkësia B quhet ***kodomen*** i pasqyrimit f. Bashkësia $V_f = f(A)$ e cila i përmban të gjithë elementet $y \in B$, ashtu që $y = f(x)$ për çdo $x \in D$ quhet ***fusha e vlerave*** të pasqyrimit f.

Le të jetë D bashkësi jo e zbrazët prej numrave realë, d.m.th. $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}$ dhe le të jetë f pasqyrim prej D në $\mathbb{R}$, d.m.th. për çdo $x \in D$ ekziston numër i vetëm $y \in \mathbb{R}$, ashtu që $y = f(x)$, atëherë themi se f është ***funksion real*** prej ***një ndryshore reale***.

- Bashkësia D quhet ***bashkësia e përkufizimit, domen*** ose ***fusha e përkufizimit*** të funksionit f. Në vend D, më tutje shpeshherë do të shkruajmë D_f, D_g,...
- Bashkësia e të gjitha pasqyrave $f(x)$ të elementeve $x \in D$ quhet bashkësia e vlerave të funksionit f dhe shënohet me V_f ose vetëm me V $(V_f \subseteq \mathbb{R})$.

Më tutje, *kur flitet për „funksion", nëse nuk është thënë ndryshe, do të nën kuptohet „funksion real prej një ndryshore reale".*

Për shembull, me pasqyrimin:

- $f: x \mapsto x+1,\ x \in \mathbb{R}$, është përkufizuar funksion real prej një argumenti real për të cilin shkruajmë $f(x)=x+1$ ose $y=x+1$ për atë $D_f=N$ dhe $V_f=\mathbb{R}$;
- $f: x \mapsto x^2,\ x \in \mathbb{R}$ është përkufizuar funksioni $f(x)=x^2$ për atë $D_f \in N$ dhe $V_f=\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Mbaj mend!

Funksioni f është plotësisht i përcaktuar nëse dihen: bashkësia e përkufizimit D_f dhe rregulla f sipas së cilës përcaktohen vlerat e funksionit.

Në praktik, nëse funksioni i dhënë është përcaktuar *me ndonjë* shprehje analitike *pa u theksuar domeni do të* llogarisim *se domeni* përbëhet prej gjithë numrave realë për të cilët *ajo shprehje analitike ka kuptim.*

2 Domeni i funksionit:

a) $f(x)=\sqrt{x}$ është $[0,+\infty)$;

b) $f(x)=\sqrt{1-x}$ është $(-\infty,1]$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ është $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

ç) $f(x)=2x^2+x$ është $(-\infty,+\infty)$;

d) $f(x)=\lg(x+2)$ është $(-2,+\infty)$.

3 Cakto bashkësinë e përkuifizimit të funksionit:

a) $f(x)=3x^3-4x^2+2$;

b) $f(x)=\dfrac{2+x}{x^2-9}$;

c) $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$;

ç) $f(x)=\lg(x^2-x)$.

Shqyrto zgjidhjen:

$\sqrt{A}$ ka kuptim vetëm nëse $A \geq 0$; $\dfrac{A}{B}$ – vetëm për $B \neq 0$; $\lg A$ – vetëm për $A>0$.

a) $D_f:(-\infty,+\infty)$; b) $x^2-9 \neq 0$ d.m.th. $x \neq 3, x \neq -3, D_f:(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$ ose $R\setminus\{-3,3\}$;

c) $3x-x^2 \geq 0, x(3-x)\geq 0$ d.m.th. $\begin{cases} x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$ ose $\begin{cases} x \leq 0 \\ 3-x \leq 0 \end{cases}$ pra $D_f:[0,3]$;

ç) $x^2-x>0, x(x-1)>0$ d.m.th. $\begin{cases} x>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ ose $\begin{cases} x<0 \\ x-1<0 \end{cases}$ pra $D_f:(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

Vëreve se bashkësia e përkufizimit të funksioneve të përmendura nën a) dhe ç) është bashkësi e pafundshme e cila mund të shkruhet si interval ose segment (interval i mbyllur) ose union prej intervaleve.

4 Cakto bashkësinë e përkufizimit të funksionit:

a) $f(x)=x^3-2x^4$; b) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x-4}$; c) $f(x)=\dfrac{3x-1}{\sqrt{2x-1}}$; ç) $f(x)=\lg(x-5)$.

Përcaktimi i bashkësive të vlerave të disa funksioneve nuk është gjithmonë e lehtë. Për shembull, bashkësia e vlerave të funksionit:

a) $f(x)=\sin x$ është $[-1,1]$; b) $f(x)=2x+1$ është $(-\infty,+\infty)$;

c) $f(x)=x^2-2x-3$ është $[-4,+\infty)$; ç) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{për } x>0\\ 0 & \text{për } x=0\\ -1 & \text{për } x<0\end{cases}$ është $\{-1,0,1\}$.

Te përkufizimi i konceptit funksion në të gjithë shembujt e përdorëm shkronjën x si zëvëndësim për çfarëdo numër prej domenit të funksionit përkatës. Për atë themi se është ***ndryshore e pavarur*** ose ***argument***.

Për funksionin e dhënë f shpeshherë shkruajmë $f(x)$, që është e njëjtë me $f:x\mapsto f(x)$, por e shfrytëzojmë shënimin $y=f(x)$, ku për shënimin e ***ndryshores të varur*** është përdor shkronja y.

Mëtutje,ndryshoret të pavarurat ose të varurat i shënojmë edhe meshkronja tjera: t, u, v, g, h etj.
Për shembull, me:

$f(x)=2x^2-3x+1$, $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $h(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$, janë shënuar funksione të ndryshme prej argumentit të njëjtë,ndërsa, tani, me:

$f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+1}$, $f(t)=\dfrac{t^2-2t-1}{t^2+1}$, dhe $f(u)=\dfrac{u^2-2u-1}{u^2+1}$, është shënuar funksioni i njëjtë me argument të ndryshëm.

Te tema paraprake mësove se me pasqyrimin f prej $\mathbb{N}$ në $\mathbb{R}$ është përkufizuar vargu prej numrave realë (a_n), d.m.th.

$$f:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N} \text{ ose } f:n\mapsto a_n,\ n\in\mathbb{N}$$

- Për shembull, me: $f:n\mapsto 2n$, $n\in\mathbb{N}$ është përkufizuar funksioni $f(n)=2n$, d.m.th. çdo numri natyror i është shoqëruar numër çift përkatës: $1\to 2,\ 2\to 4,\ 3\to 6,\ 4\to 8$ etj.

- Me $f:n\mapsto a_n$, $a_n=\dfrac{2n}{n+1}$ është është dhënë funksioni f prej $\mathbb{N}$ në $\mathbb{R}$ ku bashkësia e vlerave është vargu

$$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{8}{5},\ \frac{10}{6},\ \ldots$$

Nëse funksioni f është dhënë me formulë ose me fjalë (përshkruese), atëherë themi se funksioni është dhënë ***analitikisht***, ose se funksioni është dhënë në ***formë eksplicite***.

Për shembull,funksionet $f(x)=x^2+3$, $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $y=\frac{x}{x^2+1}$ dhe të gjithë funksionet tjera që i dham deri më tani janë dhënë me formula, d.m.th.janë dhënë në mënyrë eksplicite.

Në dhënëjen e një funksioni në mënyrë përshkruese ose me formulë nuk ka ndryshim të madh . Për shembull, $g(x)=\frac{1}{x}$ është e njëjtë sikurse „ $g(x)$ është vlera reciproke e numrit x".

Disa funksione mund të jepen me dy ose më shumë shprehje, për shembull:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{për } x\le 0 \\ \sqrt{x} & \text{për } x>0 \end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases} x & \text{për } x>0 \\ 0 & \text{për } x=0 \\ -x-2 & \text{për } x<0. \end{cases}$

Shpeshherë hasim edhe funksione të këtilla.

a) Funksioni $\operatorname{sgn} x$ i përkufizuarme

$$\operatorname{sig} x=\begin{cases} 1 & \text{për } x>0 \\ 0 & \text{për } x=0 \\ -1 & \text{për } x<0, \end{cases}$$

quhet ***signum prej*** x ose ***shenja prej*** x.

b) Funksioni f i përkufizuar me

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{për } x\in R \\ 0 & \text{për } x\in R\setminus N \end{cases}$$

quhet ***funksioni i Dirihleut***.

c) funksioni $[x]$ i përkufizuar me:

„ $[x]$ është numri i plotë më i madh që nuk është më i madh se x" quhet ***pjesa e plotë prej*** x.

Domethënë: $x-1<[x]\le x$. Për shembull: $\left[3\frac{1}{2}\right]=3$, $[-2{,}5]=-3$, $[0{,}75]=0$.

ç) Disa funksione të cilat janë dhënë me një shprehje analitike mund ta shkruajmë me dy ose më shumë shprehje, sikurse për shembull:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{për } x>0 \\ 0 & \text{për } x=0 \\ -x & \text{për } x<0 \end{cases}; \qquad f(x)=x^2-6|x|=\begin{cases} x^2-6x & \text{për } x\ge 0 \\ x^2+6x & \text{për } x<0. \end{cases}$$

d) Është e mundshme dhe anasjelltas, funksionet të cilët janë dhëna me më shumë shprehje të paraqiten me një shprehje analitike. Për shembull:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-x^2 & \text{për } x\in(0,2) \\ x^2-2x & \text{për } x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty) \end{cases}=\left|2x-x^2\right|; \qquad f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{për } x>0 \\ 2 & \text{për } x=0 \\ 2+x & \text{për } x<0 \end{cases}=2-|x|.$$

Nëse domeni i një funksioni është bashkësi e fundshme, atëherë funksioni mund të jepet tabelarisht. Për shembull, nëse për $f: x \to f(x)$ domeni është $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dhe

$$f(0)=1, \quad f(1)=3, \quad f(2)=2, \quad f(3)=1, \quad f(4)=3,$$

atëherë funksionin mund ta paraqesim me tabelë:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	2	1	3

Paraqitjen tabelare të funksioneve do tashfrytëzojmë shpeshherë edhe në rastet kur domeni është bashkësi e pafundshme, me atë që tabela do të përbëhet prej shumë vlerave të fundshme prej domenit që të fitohet parashiqim për vijimin e funksionit.Paraqitja tabelare e funksioneve shpeshherë shfrytëzohet edhe në shkencat eksperimentale: fizikë, kimi, shkencat teknike etj.

Te mësimi që vijon do të flasim edhe për një mënyrë të rëndësishme të paraqitjes së funksioneve:
paraqitja gjeometrike me ndihmën e grafikut të tij në rrafshin koordinativ.

Funksionet kanë zbatim edhe në shkencat tjera, por veçanërisht në shkencat natyrore. Gjatë të studiuarit e dukurive të ndryshme natyrore zakonisht arrihet deri te disa ligjshmëri që paraqesin varshmëri ndërmjet madhësive të caktuara. Për shembull:

a) Rruga s gjatë ramjes së lirë varet prej kohës t dhe shprehet me funksionin $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$,

$D=\mathbb{R}^+$, g – nxitimi i Tokës $(g=9,81)$.

b) Rruga s gjatë nxitimit të lëvizjes drejvizore shprehet me formulën $s=V_0t+\frac{1}{2}at^2$, ku

t $(t>0)$ është madhësi e ndryshueshme e pavarur, V_0 është shpejtësia fillestare, kurse a është nxitimi.

c) Syprina S e rrethit varet prej rrezes së tij $r(S(r)=r^2\pi)$.

ç) Forca J e rrymës elektrike në qarkun elektrik me tension konstant U varet prej rezistencës R $\left(J(R)=\frac{U}{R}\right)$.

Gjatë të shprehurit të varshmërisë funksionale në shembujt paraprak duhet pasur parasysh në fushën e përkufizimit të vet funksionit. Madhësitë që janë prezent në funksionet e shënuara kanë dimenzione të shprehura në njësi matëse, megjithatë në rastet e atilla do t'i marrim parasysh vetëm numrat matës të atyre dimenzioneve.

Detyra:

1. Është dhënë funksioni $f(x)=2x^2-x+3$. Caktoji vlerat: $f(2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(a)$.

2. Nëse $f(x)=\begin{cases}1+x & \text{për } x\in(-\infty,0] \\ 2x & \text{për } x\in(0,+\infty)\end{cases}$, caktoji vlerat: $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

3. Le të jetë funksioni $\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & x\in(-1,0)\\ 2, & x\in[0,1)\\ x-1, & x\in[1,3].\end{cases}$

Caktoji vlerat: $\varphi(2), \varphi(0), \varphi\left(\frac{1}{2}\right), \varphi\left(-\frac{1}{2}\right), \varphi(3).$

4. Nëse $f(x)=x^2$, cakto: a) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; b) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

5. Nëse $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, cakto shprehjen $\frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)}$.

6. Paraqite me shumë shprehje analitike funksionin:

a) $f(x)=x^2-2|x-1|$; b) $f(x)=(\operatorname{sgn} x)\cdot(x^2-1)$.

7. Cakto funksionin $f(x)$:

a) $f(x)=ax+b$, nëse $f(-1)=1,\ f(2)=-5$; b) $f(x)=ax^2+bx+3$, nëse $f(-2)=-5,\ f(1)=4$.

8. Cakto funksionin $f(x)$ nëse: a) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$; b) $f(x+1)=ax^2+bx+c$.

9. Cakto fushën e përkufizimit të funksionit:

a) $y=\frac{2x}{x^2+4}$; b) $y=\frac{x-1}{x^2-4}$; c) $y=\sqrt[3]{2-3x}$; ç) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$;

d) $y=\sqrt{1-\sin x}$; e) $y=\ln(x^2-2x)+\sqrt{5-x}$.

10. Cakto bashkësinë $f(A)$ nëse: a) $f(x)=x^2,\ A=[-2,-1]$; b) $f(x)=\frac{x}{1+x},\ A=(0,1)$.

11. Shkruaje varshmërinë funksionale të syprinës S dhe këndit pranë bazës së madhe te trapezi barakrahas me bazën $a=6$ dhe $b=4$. Cakto domenin dhe kodomenin e funksionit.

12. Shprehe syprinën S të drejtkëndëshit të brendashkruar në rreth me rreze R, si funksion prej njërës brinjë të tij e cila e ka gjatësinë x.

2 GRAFIKU I FUNKSIONIT. ZEROT E FUNKSIONIT. FUNKSIONET ÇIFT DHE TEK

A E ke të njohur se një funksion mund të jetë dhënë analitikisht, tabelarisht dhe grafikisht.

Përkufizimi. Për funksionin e dhënë f me domenin D_f bashkësia e çifteve të radhitura

$$G_f = \{(x,y) \mid x \in D_f,\ y = f(x)\ \}$$

quhet ***grafik*** i funksionit f.

Për shembull, për funksionin f të dhënë me tabelë domeni është $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$, kurse grafiku i tij është

$$G_f = \{(-2,3),(-1,2),(0,1),(1,-2),(3,-4)\}.$$

x	-2	-1	0	1	3
$f(x)$	3	2	1	-2	-4

Grafiku i funksionit $y = x^2$ është $G_f = \{(x,x^2) \mid x \in Z\}$, kurse grafiku u funksionit $y = \dfrac{1}{x}$ është

$$G_f = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x \in Z \setminus \{0\}\ \right\}$$

Grafiku G_f është bashkësi e pafundshme gjithmonë kur D_f është bashkësi e pafundshme, kurse e fundshme kur D_f është e fundshme. Mund të thuhet se „G_f ka aq elemente, sa ka D_f". Pasi çdo çift i radhitur (a,b) prej numrave real paraqet pikë në rrafshin koordinativ, domethënë grafiku i funksionit mund të paraqitet gjeometrikisht, si bashkësi pikash.

1 Vizato grafikun e funksionit linear $y = \dfrac{1}{2}x + 2$.

Shqyrto zgjidhjen:

Për të vizatuar grafikun e një funksioni shpeshherë bëjmë tabelë prej vlerave, d.m.th. përcaktojmë disa pika prej grafikut, i paraqesim në rrafshin koordinativ, pra me lidhjen e tyre fitojmë parafytyrim të përafërtë për grafikun e funksionit, fig. 1.

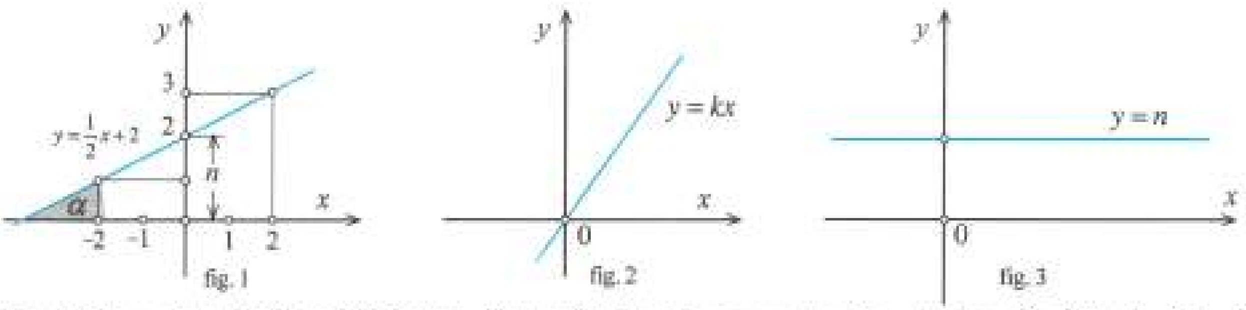


fig. 1 fig. 2 fig. 3

Në përgjithësi, grafiku i ***funksionit linear*** $y = kx + n$ është drejtëz që e pret boshtin y në pikën $(0,n)$ dhe koeficienti i drejtimit të cilit është $k = \operatorname{tg}\alpha$. Nëse $n = 0$, atëherë funksioni është $y = kx$ (funksioni i proporcionit të drejtë), fig. 2. Nëse $k = 0$, atëherë funksioni $y = n$ është konstant, fig. 3.

Grafiku i funksionit $f(x)=x^2$ me domenin $D=[-1,2)$ është paraqitur në fig. 4.

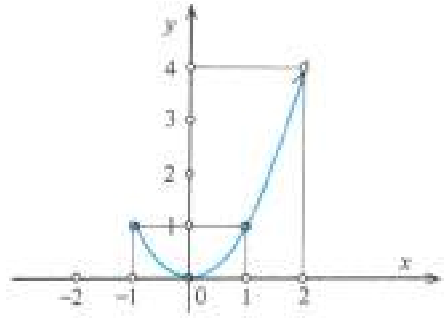


fig. 4

2 Vizato grafikun e funksionit $y=\frac{1}{x}$.

Shqyrto zgjidhjen:

Funksioni $y=\frac{1}{x}$ quhet vlera reciproke prej x ose funksioni i proporcionit të zhdrejtë (koeficienti i të cilit është 1). Domeni i tij $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, kurse $V_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
Disa pika prej grafikut të tij (fig. 5) janë dhënë në tabelë.

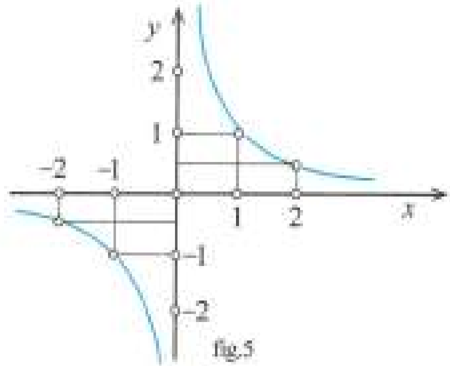


fig.5

x	-2	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-3	3	1	$\frac{1}{2}$

3 Vizato grafikun e funksionit a) $y=\operatorname{sgn} x$; b) $y=[x]-$ pjesa e plotë prej x.

Shqyrto zgjidhjen:

a) Prej përkufizimit të funksionit vijon

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 \text{ për } x>0 \\ 0 \text{ për } x=0 \\ -1 \text{ për } x<0, \end{cases}$$ fig. 6.

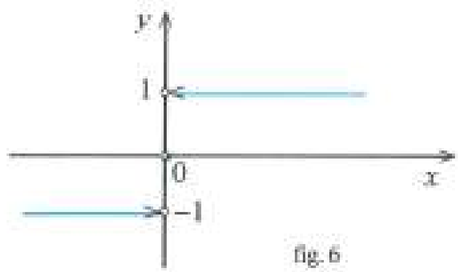


fig. 6

b) Sipas përkufizimit, pjesa e plotë prej x është numri më i madh që nuk është më i madh se x, fig. 7.

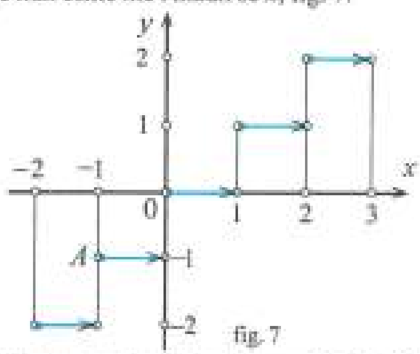


fig. 7

Shigjeta tregon se pikat e skajshme nuk i takojnë grafikut të funksionit.

Kujtohu!

- Caktoji $f(1)$ dhe $f(0)$ nëse $f(x)=x-1$.
- Në sistemin kënddrejtë koordinativ paraqiti pikat $A(-1,0)$, $B(2,0)$ dhe $C(3,0)$.
- Zgjidhe barazimin $2x^2-x-1=0$.
- Caktoji zerot e polinomit $P(x)=x^2+4x-5$.

B **4** Është dhënë funksioni $f(x)=x^2-4$. Caktoji $f(2)$ dhe $f(-2)$. Çka vëren?

Shihe zgjidhjen:

$f(2)=2^2-4=0$ dhe $f(-2)=(-2)^2-4=0$.

Vëren se $f(2)=f(-2)=0$. Domethënë, për $x=2$ dhe $x=-2$ vlerae funksionit është 0.

Zero e funksionit $y=f(x)$ quhet çdo numër real $x_0 \in D_f$ për të cilin vlen $f(x_0)=0$.

Vëre!

Zerot e funksionit $y=f(x)$ janë zgjidhje të barazimit $f(x)=0$.
Grafikisht, zerot e funksionit janë pikëprerjet e lakores me boshtin x.

Për shembull, në fig. 8 është paraqitur grafiku i disa funksioneve.

Për $x_0 \in \{-1,0,1,2,4\}$, $f(x_0)=0$, d.m.th. zero të atij funksioni janë elementet e bashkësisë $\{-1,0,1,2,4\}$.

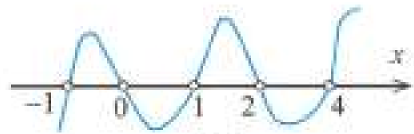


fig. 8

5 Cakto zerot e funksionit:

a) $y=\dfrac{x^2-1}{x}$; b) $y=x^3-x$; c) $y=xe^x$; ç) $y=(x^2-4)\lg(x+5)$.

Shihe zgjidhjen:

a) $x^2-1=0 \Rightarrow x_1=1$ ose $x_2=-1$;

b) $x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x_1=0 \vee x_2=-1 \vee x_3=1$;

c) $xe^x=0 \Rightarrow x=0$, pasi $e^x \neq 0$;

ç) $x^2-4=0 \vee x+5=1 \Rightarrow x_1=2 \vee x_2=-2 \vee x_3=-4$.

6 Caktoji pikat te të cilat funksioni i dhënë ka vlerë zero:

a) $y=x^2-3x+2$; b) $y=x^4-5x^2+4$; c) $y=(x^2-1)(x^2-4)e^x$; ç) $y=\lg(x-1)$.

C Në fig. 9 është paraqitur grafiku i funksionit $y=x^2$.

- Vëre se grafiku i funksionit $y=x^2$ është simetrik në lidhje me boshtin y.
- $f(1)=f(-1)=1$, $f(2)=f(-2)=4$.

Në përgjithësi, $f(-x)=f(x)$.

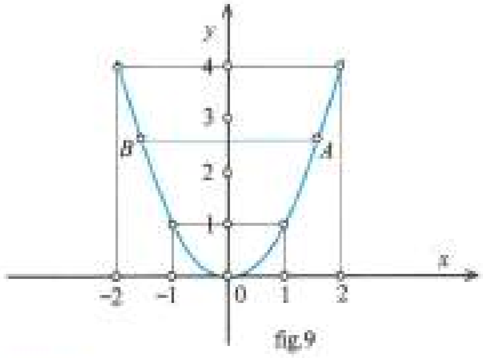


fig.9

- Funksioni f me domenin D është ***funksion çift*** nëse:

1. D është simetrike në lidhje me fillimin e koordinatave, d.m.th. $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

2. Për çdo $x \in D$, $f(-x)=f(x)$.

Funksioni $f(x)=x^4-2x^2$ është çift, pasi $D=\mathbb{R}$ është bashkësi simetrike në lidhje me fillimin e koordinatave dhe për çdo $x\in\mathbb{R}$ kemi $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$. Funksione çift janë $f(x)=-x^2$, $f(x)=|x|$.
Funksioni $f(x)=x^2$ me $D=[-1,2)$ nuk është çift, pasi dhe bashkësia e përkufizimit nuk është simetrike në lidhje me fillimin e koordinatave.

- Nëse pika $A(x,f(x))$ shtrihet në grafikun e funksionit $f(x)=x^2$, atëherë edhe pika $B(-x,f(-x))$, gjithashtu, shtrihet në grafikun e funksionit, d.m.th. pikat A dhe B janë simetrike në lidhje me boshtin y.

7 Shqyrto cilët funksione janë çift:

a) $f(x)=3x^2-5$; b) $f(x)=2x^2-4,\ D_f=[0,\infty)$; c) $f(x)=\dfrac{x^2+x\sin x+1}{e^x+e^{-x}}$.

Shqyrtoje zgjidhjen:

a) $D=\mathbb{R}$ është bashkësi simetrike dhe $f(-x)=3(-x)^2-5=3x^2-5=f(x)$, pra funksioni është çift.

b) Funksioni nuk është çift, pasi $D=[0,\infty)$ nuk është bashkësi simetrike.

c) $D=\mathbb{R}$ është bashkësi simetrike.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+(-x)\sin(-x)+1}{e^{-x}+e^{-(-x)}}=\frac{x^2-x(-\sin x)+1}{e^{-x}+e^x}=\frac{x^2+x\sin x+1}{e^x+e^{-x}}=f(x),$$ funksioni është çift.

8 Vërteto se funksioni është çift

a) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{|x|}$; b) $f(x)=\dfrac{3x^2\cos x}{4-x^2}$; c) $f(x)=2^x+\dfrac{1}{2^x}$.

Në fig. 10 është paraqitur grafiku i funksionit $y=\sin x$.

- Vëre se grafiku i funksionit $y=\sin x$ është simstrik në lidhje me fillimin e koordinatave.

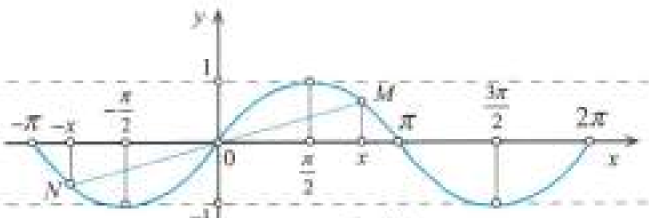


fig. 10

- $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$, a $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, pra $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

- Funksioni f me domenin D është ***funksion tek*** nëse:
  1. D është bashkësi simetrike në lidhje me fillimin e koordinatave.
  2. Për çdo $x\in D$, $f(-x)=-f(x)$.

- Pikat $M(x,f(x))$ dhe $N(-x,f(-x))$ shtrihen në grafikun e funksionit $y=\sin x$ dhe janë simetrike në lidhje me fillimin e koordinatave, pasi $M(x,\sin x)$ dhe $N(-x,-\sin x)$ shtrihen në drejtëzën MN që kalon nëpër fillimin e koordinatave dhe janë një lloj të larguara prej tij.

Mbaj mend!

Funksionet, grafikët e të cilëve janë simetrik në lidhje me boshtin y quhen ***funksione çifte***.
Funksionet grafikët e të cilëve janë simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave quhen ***funksione tek***.

6 Vërteto se funksionet janë tek:

a) $f(x)=-\frac{1}{x}$; b) $f(x)=x^3-x$; c) $f(x)=3x-\sin x$.

Shqyrto zgjidhjen:

a) $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ është bashkësi simetrike, $f(-x)=-\frac{1}{(-x)}=-\left(-\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

b) $D=\mathbb{R}$ është bashkësi simetrike dhe $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-(x^3-x)=-f(x)$.

c) $D=\mathbb{R}$, $f(-x)=3(-x)-\sin(-x)=-3x+\sin x=-(3x-\sin x)=-f(x)$.

7 Shqyrto cili prej funksioneve është çift, kurse cili është tek, nëse:

a) $y=\frac{4x}{1+x^2}$; b) $y=(x-1)^2$; c) $y=\frac{x\sin x}{1+\cos x}$; ç) $y=\sqrt{x^2+2x}$.

Vëre mënyrën e zgjidhje:

a) $D=\mathbb{R}$ është bashkësi simetrike dhe $f(-x)=\frac{4(-x)}{1+(-x)^2}=\frac{-4x}{1+x^2}=-\frac{4x}{1+x^2}=-f(x)$, funksioni është tek.

b) $D=\mathbb{R}$ është bashkësi simetrike. $f(-x)=(-x-1)^2=((-1)(x+1))^2=(x+1)^2\neq f(x)$, nuk është çift; $f(-x)=(x+1)^2\neq -f(x)$, nuk është çift. Domethënë, funksioni nuk është as çift, as tek.

c) $D=\mathbb{R}\setminus\{(1+2k)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ është bashkësi simetrike.

$f(-x)=\frac{-x\cdot\sin(-x)}{1+\cos(-x)}=\frac{-x\cdot(-\sin x)}{1+\cos x}=\frac{x\sin x}{1+\cos x}=f(x)$, funksioni është çift.

ç) $D: x^2+2x\geq 0$, d.m.th. $x\in(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$ nuk është bashkësi simetrike, domethënë funksioni nuk është as çift, as tek.

- Nëse domeni D i funksionit f është bashkësi simetrike, atëherë funksioni f është edhe çift edhe tek nëse dhe vetëm nëse për çdo $x\in D$, $f(x)=0$ (atë veti e ka vetëm funksioni zero i përkufizuar në D)

Detyra:

1. Vizato grafikun e funksionit:

a) $y=-2x+3$; b) $y=x^2-2x-3$; c) $y=\frac{2}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Cakto zerot reale të funksionit:

2. a) $f(x)=-\frac{2}{3}x+1$; b) $f(x)=\frac{3}{2}x-2$.

3. a) $f(x)=-2+3x-x^2$; b) $f(x)=x^5-5x^3+4x$.

4. a) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^3+8}$; b) $f(x)=\dfrac{x^4-17x^2+16}{x^2+2}$.

5. a) $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}$; b) $f(x)=\sqrt{\sin x+1}$.

6. a) $f(x)=3^{x^2-3}-3$; b) $f(x)=\log_2\left(x^2+2x\right)-3$.

7. Vërteto se funksioni është çift, nëse:

a) $f(x)=x^2|\sin x|$; b) $f(x)=\dfrac{3x^2}{4-x^2}$; c) $f(x)=\sqrt{\cos x}$.

8. Vërteto se funksioni është tek, nëse:

a) $f(x)=2x^3-x^5-2x^7$; b) $f(x)=x^3+4\operatorname{tg} x$.

Konstato cilët prej këtyre funksioneve janë çift, kurse cilët janë tek.

9. a) $f(x)=x^2-1-3\cos x$; b) $f(x)=x^3+2+\sin x$; c) $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$.

10. a) $f(x)=\dfrac{\sin x+\operatorname{tg} x-x^3}{\cos^2 x}$; b) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

11. a) $f(x)=\dfrac{\left(1+a^x\right)^2}{a^x}$; b) $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

3 PERIODICITETI I FUNKSIONIT. MONOTONIA E FUNKSIONIT

Kujtohu!

Domeni i funksioneve trigonometrike $y=\sin x$ dhe $y=\cos x$ është bashkësia $\mathbb{R}$. Pika M (fig. 1), duke lëvizur nëpër vijën rrethore trigonometrike (për shembull në kahen pozitive), do të gjendet në pozitën e njëjtë pas një rrotullimi të plotë, d.m.th. për këndin prej 2π radianë. Prandaj, funksionet sinus dhe kosinus do të kenë vlerë përkatëse të njëjtë për këndin $x+2\pi$ sikurse për këndin x, Për çdo $x\in\mathbb{R}$, d.m.th.

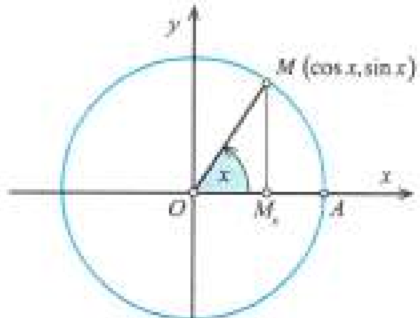


fig. 1

$$\sin(x+2\pi)=\sin x;\qquad \cos(x+2\pi)=\cos x.$$

Pasi për çdo $x\in\mathbb{R}$ dhe për çdo $k\in\mathbb{Z}$ vlen:

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \text{ dhe } \cos(x+2k\pi)=\cos x,$$

domethënë se vlerat e $\sin x$ dhe $\cos x$ përsëriten periodikisht pas çdo ndërrimi të argumentit x për 2π (ose për $2k\pi$), prandaj për funksionet $y=\sin x$ dhe $y=\cos x$ themi se janë ***funksione periodike***, kurse për numrin 2π se është ***perioda më e vogël***.

Funksione periodike janë funksionet $y=\operatorname{tg} x$ dhe $y=\operatorname{ctg} x$, kurse perioda më e vogël është π.

A

Ka edhe funksione tjera, përveç funksioneve trigonometrike, që kanë vetinë e periodicitetit.

Përkufizimi. Funksioni f me domen D është ***periodik,*** nëse ekziston numër pozitiv real ω, ashtu që:

a) Nëse $x \in D$, atëherë $x-\omega,\ x+\omega \in D$. b) Për çdo $x \in D$, $f(x+\omega)=f(x)$.

Numri ω quhet ***periodë*** e funksionit f, kurse numri më i vogël prej tyre, nëse ekziston, quhet perioda ***më e vogël*** ose ***themelore*** e funksionit.

Prej vet përkufizimit vijon saktësia edhe e këtyre gjykimeve:

a) Nëse funksioni f me domen D është periodik me periodë ω, atëherë numri $k\omega,\ k \in \mathbb{Z}$ është periodë e funksionit f, d.m.th. $f(x+k\omega)=f(x)$.

b) Nëse funksioni $f(x)$ me domen D është periodik me periodë ω dhe nëse a është numër real i ndryshueshëm prej zeros, atëherë funksioni $F(x)=f(ax)$ me domen D_1, ku $x \in D_1 \Leftrightarrow ax \in D$ është periodik me periodë $\dfrac{\omega}{|a|}$.

Shih mënyrën e vërtetimit:

Prej $x \in D_1 \Rightarrow ax \in D \Rightarrow ax+\omega \in D \Rightarrow a\left(x+\dfrac{\omega}{a}\right) \in D \Rightarrow \left(x+\dfrac{\omega}{a}\right) \in D_1$, pra

$$F\left(x+\frac{\omega}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right)=f(ax+\omega)=f(ax)=F(x).$$

Prej gjykimit paraprak vijon se perioda më e vogël e funksionit $y=\sin 2x$ është $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$, kurse të funksionit $y=\cos\dfrac{2x}{3}$ perioda më e vogël është $\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$.

1 Cakto periodën më të vogël të funksionit $y=a\sin(bx+c)$.

Shqyrto zgjidhjen:

Le të jetë ω perioda e kërkuar. Prej përkufizimit $a\sin(b(x+\omega)+c)=a\sin(bx+c)$ vijon

$$\sin(b(x+\omega)+c)-\sin(bx+c)=0.$$

Me transformimin në prodhim fitojmë:

$$2\cos\frac{b(x+\omega)+c+(bx+c)}{2}\sin\frac{b(x+\omega)+c-(bx+c)}{2}=0, \quad \text{d.m.th.} \quad 2\cos\frac{2(bx+c)+b\omega}{2}\sin\frac{b\omega}{2}=0.$$

Prej këtu vijon $\sin\dfrac{b\omega}{2}=0$ nëse $\dfrac{b\omega}{2}=0$, d.m.th. $\omega=0$ ose $\dfrac{b\omega}{2}=\pi$, d.m.th. $\omega=\dfrac{2\pi}{b}$, pra perioda themelore është $\omega=\dfrac{2\pi}{b}$.

2 Cakto periodën themelore të funksionit: a) $y=a\ \mathrm{tg}(bx+c)$; b) $y=2\ \mathrm{ctg}\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

3 Cakto periodën themelore të funksionit: a) $y=2\sin 3x$; b) $y=\dfrac{1}{3}\cos 4x$; c) $y=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

4 Cakto periodën më të vogël të funksionit: a) $y=\cos^2 x$; b) $y=\sin x\cos x$;

c) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

Shqyrto zgjidhjen:

a) $y=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$. Pra $\omega=\pi$. b) $y=\sin x\cos=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$. Pra $\omega=\pi$.

c) Le të jetë $y_1=\sin x,\ \omega_1=2\pi;\ \ y_2=\dfrac{1}{2}\sin 2x,\ \omega_2=\pi;\ \ y_3=\dfrac{1}{3}\sin 3x,\ \omega_3=\dfrac{2\pi}{3}$.

Perioda më e vogël $\omega=SHVP(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. Pasi $\omega_1=2\pi=\dfrac{6\pi}{3},\ \omega_2=\pi=\dfrac{3\pi}{3},\ \omega_3=\dfrac{2\pi}{3}$,

$SHVP\left(\dfrac{6\pi}{3},\dfrac{3\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{6\pi}{3}=2\pi$, domethënë, perioda themelore është $\omega=2\pi$.

5 Funksioni $f(x)=x-[x],\ D=\mathbb{R}$ është periodik me periodë 1. Vërteto.

Shqyrto vërtetimin:

Funksioni $[x]$ është pjesë e plotë e x, d.m.th. numri i plotë më i madh që nuk është më i madh se x, kurse funksioni $f(x)=x-[x]$ quhet pjesa thyesore prej x. Pasi $[x+1]=[x]+1$, kemi:

$$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-([x]+1)=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x).$$

Periodiciteti, sikurse funksioni çift dhe tek të funksionit të dhënë, mundëson të studiuarit e tij të kufizohet në një nënbashkësi ku ai është përkufizuar.

Nëse funksioni $f(x)$ është periodik me periodë ω, që t'i studiojmë vetitë e tij mjafton që t'i studiojmë vetitë vetëm të një segmenti $[a,b]$ me gjatësi ω. Për shembull, grafiku dhe vetitë e funksionit $y=\sin x$, $y=\cos x$ i studiojmë në segmentin $[0,2\pi]$.

Nëse $x\in[0,1)$, atëherë $[x]=0$, pra për $x\in[0,1)$ grafiku i funksionit $f(x)=x-[x]$ puthitet me grafikun e $f_1(x)=x$. Pasi funksioni $f(x)=x-[x]$ është periodik me periodë 1, grafikun do ta fitojmë ashtu që grafikun $f_1(x)=x$ për $x\in[0,1)$, do ta translatojmë nëpër boshtin x majtas dhe djathtas për 1. fig. 2.

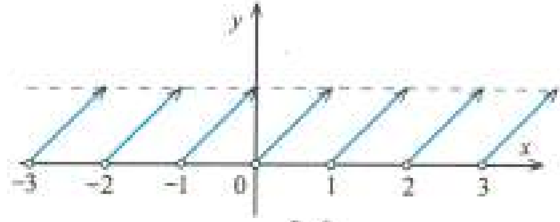


fig. 2

Kujtohu!

Në fig. 3 është paraqitur grafiku i funksionit $f(x)=x+1$ me domen $D=\mathbb{R}$.

Vëren se për çfarëdo dy vlera të ndryshme x_1 dhe x_2 prej domenit, vlerës më të madhe të argumentit i përgjigjet vlera më e madhe e funksionit, d.m.th. funksioni rritet në $(-\infty,+\infty)$.

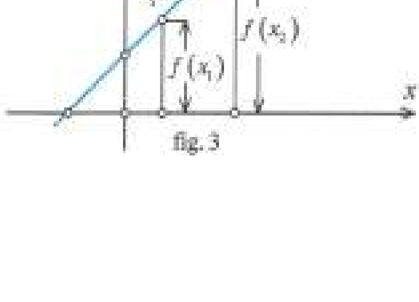


fig. 3

Në fig. 4 është paraqitur grafikisht funksioni $f(x)=x^2$. Vëren se funksioni ***zvogëlohet*** në intervalin $(-\infty,0)$, kurse ***rritet*** në intervalin $(0,+\infty)$.

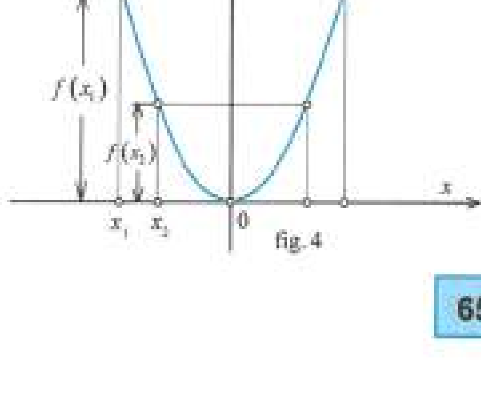


fig. 4

B

Në përgjithësi. Për një funksion $f(x)$ të përkufizuar në bashkësinë D themi se në D:

a) ***rritet*** (është ***rritës***), nëse për $x_1 < x_2$ vijon $f(x_1) < f(x_2)$;

b) ***zvogëlohet*** (është ***zvogëlues***), nëse për $x_1 < x_2$ vijon $f(x_1) > f(x_2)$;

c) ***nuk zvogëlohet*** (është ***jozvogëlues***), nëse për $x_1 < x_2$ vijon $f(x_1) \le f(x_2)$;

ç) ***nuk rritet*** (është ***jorritës***), nëse për $x_1 < x_2$ vijon $f(x_1) \ge f(x_2)$;

për çfarëdo numra $x_1, x_2 \in D$.

Funksioni i cili ka ndonjë veti prej a) deri në ç) quhet ***funksion monoton***.

Funksionet të cilët vetëm rriten ose vetëm zvogëlohen quhen ***funksione rigorozisht monotone***.

Në fig. 5 është paraqitur grafiku i funksionit që rritet, kurse në fig. 6 grafiku i funksionit që zvogëlohet.

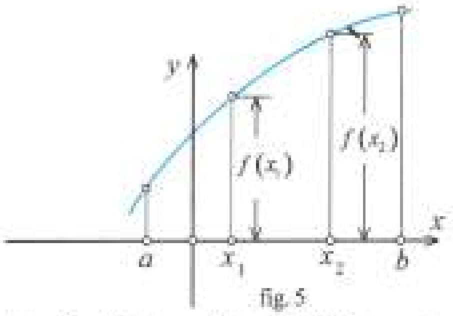


fig. 5

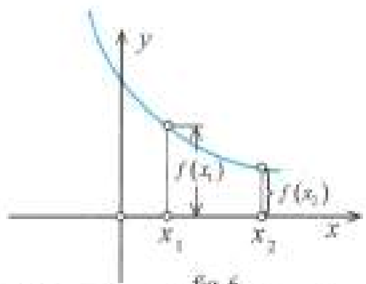


fig. 6

Mëtutje D më së shpeshti do të jetë interval, pra monotonin e funksionit do ta shqyrtojmë në interval.

6 Shqyrto monotonin e funksionit: a) $f(x) = -2x + 3$; b) $f(x) = 3x - 2$; c) $f(x) = x^2$.

Shqyrto zgjidhjen:

a) Domeni i funksionit $D = (-\infty, +\infty)$. Le të jetë $x_1, x_2 \in D$ dhe le të jetë $x_1 < x_2$. Kemi:

$$f(x_1) - f(x_2) = (-2x_1 + 3) - (-2x_2 + 3) = -2(x_1 - x_2).$$

Prej $x_1 < x_2$ vijon $x_1 - x_2 < 0$, pra

$$f(x_1) - f(x_2) = -2(x_1 - x_2) > 0, \text{ d.m.th. } f(x_1) > f(x_2).$$

Domethënë, funksioni $y = -2x + 3$ zvogëlohet në intervalin $(-\infty, +\infty)$.

c) Funksioni $f(x) = x^2$ në $D = (-\infty, +\infty)$ nuk është monoton, pasi, për shembull:

$-2 < -1$ dhe $f(-2) = 4 < 1 = f(-1)$; $-1 < 3$ dhe $f(-1) = 1 < 9 = f(3)$. Por, në çdonjërin prej intervaleve $(-\infty, 0)$ dhe $(0, +\infty)$ në veçanti, ai është monoton.

Funksionet $y = x^3$, $y = x^3 + 2$, $y = x^3 + 1$ janë rritëse, kurse funksionet $y = -x^3$, $y = -x^3 + 2$ janë zvogëluese.

7 Funksioni eksponencial $y = 2^x$ rritet monotonisht në mënyrë rigoroze. Vërteto.

Nëse funksioni $f(x)$ është jozvogëlues, atëherë për disa vlera të argumentit $x_1, x_2 \in D$ mund të jetë $f(x_1) = f(x_2)$.

Të shqyrtojmë segmentin $[x_1, x_2]$ dhe çfarëdo vlere të argumentit $x \in [x_1, x_2]$. Pasi funksioni është jozvogëlues dhe $x_1 < x < x_2$, vijon se

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \text{ d.m.th. } f(x) = f(x_1) = f(x_2),$$

që do të thotë se funksioni $f(x)$ është konstant në segmentin $[x_1, x_2]$, fig. 7. Në mënyrë analoge, deri te përfundimi i njëjtë arrihet edhe nëse funksioni është jorritës, fig. 8.

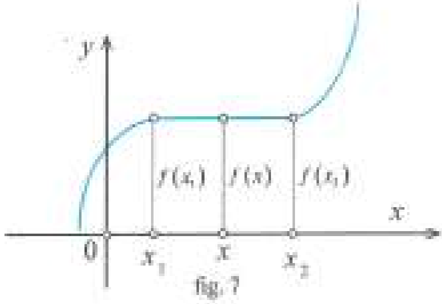


fig. 7

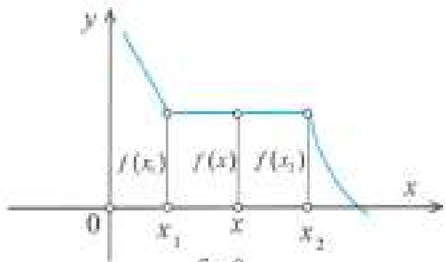


fig. 8

8 Funksioni $f(x) = \begin{cases} x & \text{për } x \in (-\infty, 1) \\ 1 & \text{për } x \in [1, 3) \\ x+1 & \text{për } x \in [3, +\infty) \end{cases}$

është monoton që rritet në pjesë, d.m.th.në intervalet $(-\infty, 1)$ dhe $[3, +\infty)$, kurse në intervalin $[1, 3)$ është konstant.

Ekzistojnë funksione që nuk janë monotone te asnjë interval. Për shembull, i atillë është funksioni i Dirihleut

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{për } x \in R \\ 0 & \text{për } x \in R \setminus N. \end{cases}$$

Detyra:

Cakto periodën themelore të funksionit:

1 a) $y = \sin \frac{4}{5} x$; b) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; c) $y = 2\cos 3x$.

2 a) $y = |\sin x|$; b) $y = \sin x + \cos x$; c) $y = \sin^2 \frac{x}{2}$.

3 a) $y = \sin \frac{3}{2} x + \cos \frac{2}{3} x$; b) $y = \cos 3x + \sin \frac{3x}{2}$.

Provo cili prej funksioneve është periodik:

4 a) $f(x) = x \sin x$; b) $f(x) = \sin 2x + \sin x$.

5 a) $f(x) = -2 + \sin x$; b) $f(x) = x + \cos x$.

6 Vërteto se funksioni: a) $f(x) = -\frac{2}{3} x + 1$ është zvogëlues; b) $f(x) = \frac{1}{2} x + 3$ është rritës.

7 Vërteto se funksioni:

a) $y = \log_2 x$ është rritës; b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ është zvogëlues; c) $y = 3^{-x}$ është zvogëlues.

8 Cili prej funksioneve është rritës, kurse cili zvogëlues në intervalin e dhënë:

a) $y = x^2 + 1$, $[0, \infty)$; b) $y = \frac{1}{x+1}$, $[0, 1]$; c) $y = \frac{1}{x^2+1}$, $[0, \infty)$?

4 FUNKSIONI I KUFIZUAR. VLERAT EKSTREME TË FUNKSIONIT

Kujtohu!

Në fig. 1 është paraqitur grafiku i funksionit $y = x^2 - 1$ me domen $D = \mathbb{R}$, kurse në fig. 2 grafiku i funksionit $y = \sin x$ me domen $D = \mathbb{R}$.

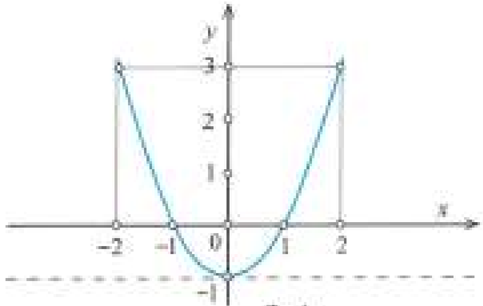


fig. 1

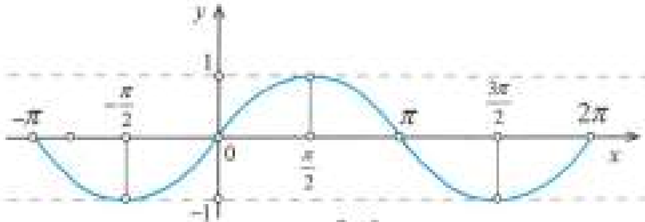


fig. 2

- Vëreve se bashkësia e vlerave të funksionit $y = x^2 - 1$ është $V_f = [-1, +\infty)$.
- Funksioni ka vlerë më të vogël, d.m.th. i kufizuar prej poshtë.
- Funksioni është i kufizuar prej sipër.
- Nëse $x \in [0, 2]$, atëherë $V_f = [-1, 3]$.

- Vëreve se bashkësia e vlerave të funksionit $y = \sin x$ është $V_f = [-1, 1]$, pasi $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Funksioni ka vlerë më të madhe, d.m.th. është i kufizuar prej sipër, por ka edhe vlerë më të vogël, pra është i kufizuar prej poshtë. Domethënë, funksioni është i kufizuar.

A

Përkufizimi. Funksioni f, me domen D është:

a) i kufizuar prej poshtë nëse ekziston numër real m, ashtu që $m \leq f(x)$ për çdo $x \in D$;

b) i kufizuar prej sipër nëse ekziston numër real M, ashtu që $M \geq f(x)$ për çdo $x \in D$;

c) i kufizuar nëse ekziston numër real k, ashtu që $|f(x)| \leq k$ përçdo $x \in D$.

Me fjalë të tjera, $f(x)$ është: i kufizuar prej poshtë, i kufizuar prej sipër, i kufizuar, nëse atë veti e ka bashkësia e vlerave të saj V_f.

Numri M quhet ***kufiri i sipërm***, kurse m ***kufiri i poshtëm*** i funksionit f.

Për çdo funksion që nuk e plotëson kushtin c) themi se është i pakufizuar në D.

- Prej përkufizimit për funksionin e kufizuar vijon se grafiku i një funksioni të kufizuar $f(x)$ gjendet ndërmjet drejtëzave paralele $y = -k$ dhe $y = k$, d.m.th. $-k \leq f(x) \leq k$.
- Funksioni $f(x) = \sin x$ (fig. 2) është i kufizuar, pasi për çdo $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq 1$. Gjithashtu, funksioni $y = \cos x$ është është i kufizuar, d.m.th. $|\cos x| \leq 1$ për çdo $x \in \mathbb{R}$.
- Funksioni $f(x) = x^2$ është i kufizuar në bashkësinë e numrave realë, pasi sa do që të jetë i madh numri k, gjithmonë mund të gjendet numër real x, ashtu që $|x|^2 > k$.

Nëse funksioni është i kufizuar prej sipër, atëherë ai ka shumë kufi të sipërm.

Për shembull, funksioni $f(x)=-x^2+2$ është i kufizuar prej sipër, d.m.th., $f(x)\leq 2$. Kufiri i lartë i funksionit $f(x)=-x^2+2$ mmund të jetë çdo numër real $a\geq 2$.

Mbaj mend!

Kufiri më i vogël i sipërm p i funksionit $f(x)$ quhet ***supremum*** i funksionit dhe shënohet me $\sup(f(x))=p$.

Kufiri i poshtëm më i madh m i funksionit $f(x)$ quhet ***infimum*** i funksionit dhe shënohet me $\inf(f(x))=m$.

Supremumi dhe infimumi mundet, por nuk është e thënë t'i takojnë bashkësisë së vlerave V_f të funksionit.

Funksioni $f(x)=1+x^2,\ x\in\mathbb{R}$ është i kufizuar prej poshtë. Numri 0, për shembull, është një kufi i poshtëm, kurse numri 1 është infimumi i funksionit. Ai i takon bashkësisë së vlerave V_f, pasi $f(0)=1$.

Funksioni $f(x)=2^x,\ x\in\mathbb{R}$ është i kufizuar prej poshtë. Numri -1, për shembull, është një kufi i poshtëm, kurse infimumi është numri 0. Ai nuk i takon bashkësisë së vlerave V_f të funksionit, pasi barazimi $2^x=0$ nuk ka zgjidhje në $\mathbb{R}$.

Funksioni $f(x)=\dfrac{1}{x},\ D=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ nuk është i kufizuar as prej poshtë as prej sipër në D. Nëse, tani, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ e shqyrtojmë në ndonjë interval (a,b) prej D, për shembull në intervalin $(0,\infty)$, atëherë ai ka kufi të poshtëm dhe poashtu $\inf(f(x))=0$, i cili nuk i takon bashkësisë V_f, domethënë nuk ka vlerë më të vogël.

Në intervalin $(2,5)$ funksioni $f(x)=\dfrac{1}{x}$ është i kufizuar dhe poashtu $\inf(f(x))=\dfrac{1}{5}$, kurse $\sup(f(x))=\dfrac{1}{2}$.

Funksioni nuk ka as vlerë më të madhe as vlerë më të vogël në intervalin $(2,5)$.

Në intervalin $[2,5]$ funksioni $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ka vlerë më të vogël $\dfrac{1}{5}$, kurse vlera më e madhe $\dfrac{1}{2}$.

1 Shqyrto funksionin $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2},\ D=\mathbb{R}$ a është i kufizuar.

Shihe zgjidhjen:

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{x^2+1-1}{1+x^2}=\frac{x^2+1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}.$$

Për çdo $x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq 0$, kurse $f(0)=0$.

Për çdo $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, funksioni $f(x)=1-\dfrac{1}{1+x^2}<1$, domethënë është i kufizuar, d.m.th. $0\leq f(x)<1$, inf(*f*(*x*))=0, kurse sup(*f*(*x*))=1 Infimumi i takon bashkësisë $V_f=[0,1)$, ndërsa, supremumi nuk i takon bashkësisë V_f, d.m.th. ka vlerë më të vogël, por nuk ka më të madhe.

2 Shqyrto se funksioni a është i kufizuar: a) $f(x)=\frac{-2x^2}{1+x^2}$; b) $f(x)=\frac{1+2x}{x}$, $D=\mathbb{R}^+$.

3 Shqyrto se funksioni a është i kufizuar: a) $y=x^2-4x+3$; b) $y=2x^2-3$.

Shqyrto mënyrën:

a) $y=(x^2-4x+4)-4+3=(x-2)^2-1$. $(x-2)^2\geq 0$ për çdo $x\in\mathbb{R}$, kurse për $x=2$, $f(2)=-1$.

Domethënë, funksioni është i kufizuar prej poshtë, $\inf(f(x))=-1\in V_f$, $V_f=[-1,\infty)$.

Funksioni ka vlerë më të vogël -1, për $x=2$.

B

Përkufizimi. Funksioni $f(x)$ me domen D në pikën $x_0\in D$ ka maksimum lokal, nëse ekziston numër real pozitiv δ, ashtu që $f(x_0)$ është vlera më e madhe e funksionit $f(x)$ në bashkësinë $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D$, d.m.th.

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ për çdo } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D.$$

Numri $f(x_0)$ quhet ***maksimumi lokal*** i funksionit f, kurse x_0 quhet ***pika e maksimumit lokal*** (fig. 3). Nëse

$$f(x)< f(x_0) \text{ për çdo } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

atëherë $f(x_0)$ quhet ***maksimumi lokal rigoroz***.

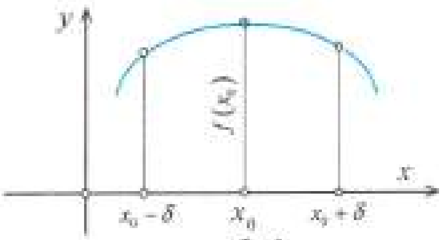


fig. 3

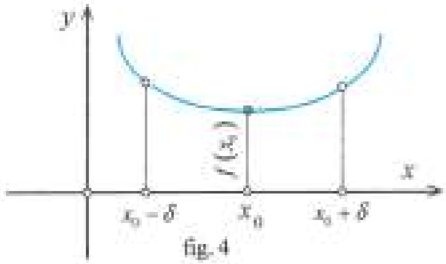


fig. 4

Përkufizimi. Funksioni $f(x)$ me domen D në pikën $x_0\in D$ ka minimum lokal, nëse ekziston numër real pozitiv δ, ashtu që $f(x_0)$ është vlera më e vogël e funksioinit $f(x)$ në bashkësinë $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D$, d.m.th.

$$f(x)\geq f(x_0) \text{ për çdo } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

Numri $f(x_0)$ quhet ***minimumi lokal*** i funksionit f, kurse x_0 quhet ***pika e minimumit lokal*** (fig. 4). Nëse

$$f(x)> f(x_0) \text{ për çdo } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

atëherë $f(x_0)$ quhet ***minimumi lokal rigoroz***.

Mbaj mend!

Maksimumi lokal dhe minimumi lokal me emër të përbashkët quhen ***ekstreme lokale*** ose vetëm ***ekstreme***.
Me ekstrem do të nënkuptojmë ekstrem lokal rigoroz nëse ndryshe nuk është theksuar .

4 Cakto vlerat ekstreme të funksionit $y=\left|1-x^2\right|$.

Përcille zgjidhjen:

$$y=\left|1-x^2\right|=\begin{cases} 1-x^2 \text{ për } x\in[-1,1] \\ -(1-x^2) \text{ për } x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty). \end{cases}$$

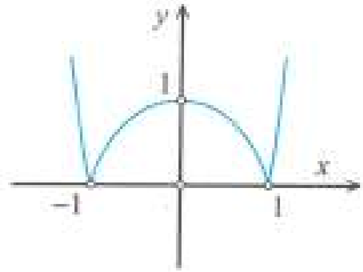


fig. 5

Funksioni ka maksimum lokal $f(0)=1$ pvr $x=0$, kurse minimum lokal për $x_1=-1$ dhe $x_2=1$, d.m.th. $f(-1)=f(1)=0$, fig. 5.

Nëse ndonjë maksimum lokal ose minimum është vlera më e madhe ose më e vogël e funksionit f në domenin D, atëherë ajo vlerë quhet ***maksimumi absolut*** ose ***minimumi absolut***.

Vëre, funksioni $y=\left|1-x^2\right|$ ka minimum absolut $f(-1)=f(1)=0$, kurse x=-1 dhe x=1 janë pika të maksimumit absolut dhe pika të minimumit absolut. Funksioni ka maksimum lokal, kurse ai është $f(0)=1$, kurse nuk ka maksimum absolut.

5 Cakto vlerat ekstreme të funksionit: a) $y=|x-2|$; b) $y=-2x^2+1$.

Detyra:

Shqyrto cili prej funksioneve të dhënë është i kufizuar prej poshtë, cili prej sipër, kurse cili i kufizuar.

1. a) $y=2x^2+3$; b) $y=3-x^2$; c) $y=x^3-2$.
2. a) $y=x^2+5x-6$; b) $y=-2x^2-3x+2$.
3. a) $y=|x|+x+1$; b) $y=1-|x-1|$.
4. a) $y=3^{-x}+1$; b) $y=3^x+1$.
5. a) $y=\sin x\cos x$; b) $y=-3\cos 2x$.
6. Për çdonjërin prej funksioneve te detyrat 1 - 5 cakto bashkësinë e vlerave V_f. Cakto: supremumin, infimumin, vlerën më të madhe dhe më të vogël të funksionit, nëse ekzistojnë.

Cakto ekstremete funksioneve $(7-9)$:

7. a) $y=x^2-2x$; b) $y=-x^2+3x-2$; c) $y=|x|$.
8. a) $y=\sin x,\ x\in(0,2\pi)$; b) $y=\cos x-1,\ x\in[0,2\pi]$.
9. a) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; b) $y=\dfrac{3x-2}{x}$.
10. Është dhënë funksioni $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) Cakto D_f e funksionit.

b) Cakto V_f e funksionit.

c) Shqyrto funksionet e kufizuara

ç) Cakto ekstremet e funksionit.

d) Cakto intervalet e monotonisë.

e) Shqyrto se funksionet a janë çift, tek.

f) Shqyrto se funksioni a është periodik.

5 OPERACIONE ME FUNKSIONE. FUNKSIONI I PËRBËRË. FUNKSIONI INVERZ

A **1** Le të jenë dhënë polinomët $P_1(x)=x^2-x+1$ dhe $P_2(x)=x+2$. Cakto shumën, ndryshimin, prodhimin dhe herësin e polinomëve të dhënë.

Shihe zgjidhjen:

$P_1(x)+P_2(x)=x^2-x+1+x+2=x^2+3$; $\quad P_1(x)-P_2(x)=x^2-x+1-(x+2)=x^2-2x-1$;

$P_1(x)\cdot P_2(x)=(x^2-x+1)\cdot(x+2)=x^3+x^2-x+2$; $\quad P_1(x):P_2(x)=(x^2-x+1):(x+2)=x-3$ dhe mbetja 7.

Vëreve: shuma, ndryshimi dhe prodhimi i dy polinomëve nuk është gjithmonë polinom. Herësin e dy polinomëve mundemi ta shqyrtojmë edhe si thyesë, përkatësisht

$P_1(x):P_2(x)=\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$, $P_2(x)\neq 0$, d.m.th. si funksion racional thyesor.

Le të jenë f dhe g dy funksione me domen D_f dhe D_g, përkatësisht. Atëherë, ***shuma*** $f+g$, ***ndryshimi*** $f-g$, ***prodhimi*** $f\cdot g$ dhe ***herësi*** $\dfrac{f}{g}$ janë funksione të përkufizuara në këtë mënyrë:

a) $f+g: x\mapsto f(x)+g(x)$; b) $f-g: x\mapsto f(x)-g(x)$; c) $f\cdot g: x\mapsto f(x)\cdot g(x)$; ç) $\dfrac{f}{g}: x\mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Funksionet a), b) dhe c) janë të përcaktuara për të gjitha vlerat e x për të cilët janë përcaktuar f dhe g, d.m.th. për $x\in D=D_f\cap D_g$, kurse funksioni $\dfrac{f}{g}$ është përcaktuar për të gjitha vlerat e x për të cilët janë përcaktuar funksionet f dhe g, ku $g(x)\neq 0$, d.m.th. domeni është $D=D_f\cap D_g\setminus\{x\in D_g : g(x)=0\}$.

2 Le të jetë $f(x)=2x+3$, $D_f=\mathbb{R}$ dhe $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$, $D_g=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Caktoji:

$(f+g)(x)$; $(f-g)(x)$; $(f\cdot g)(x)$; $\dfrac{f}{g}(x)$ dhe domenet e tyre.

Shihe zgjidhjen:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x+3+\dfrac{x^2-1}{x+2}=\dfrac{3x^2+7x-5}{x+2}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$;

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=2x+3-\dfrac{x^2-1}{x+2}=\dfrac{x^2+7x+7}{x+2}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$;

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(2x+3)\cdot\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{2x^3+3x^2-2x-7}{x+2},\ D=\mathbb{R}\setminus\{-2\};$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x+3}{\frac{x^2-1}{x+2}}=\frac{(2x+3)\cdot(x+2)}{x^2-1}=\frac{2x^2+7x+6}{x^2-1},\ D=\mathbb{R}\setminus\{\{-2\}\cup\{-1,1\}\}=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,1\},$$

pasi për $x=1$ dhe $x=-1$, $g(x)=0$.

3 Le të jetë $f(x)=\sqrt{x-2}$, $D_f=[2,\infty)$ dhe $g(x)=x^2-9$, $D_g=\mathbb{R}$. Caktoji: $(f+g)(x),(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x),\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ dhe domenet e tyre.

Operacionet me dy funksione të përkufizuara me rregullat paraprake mund të zgjerohet për tre dhe më shumë funksione sipas rregullave të njëjta.

Le të jetë $f(x)=\sqrt{x-2}$, $D_f=[2,\infty)$ dhe $g(x)=\sqrt{1-x}$, $D_g=(-\infty,1]$. Atëherë

$f(x)+g(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$.

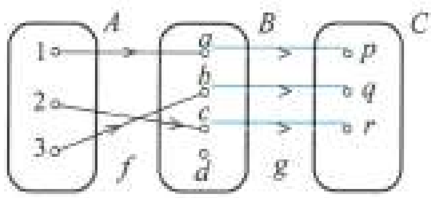
Domeni është $D_{f+g}=D_f\cap D_g=\varnothing$, d.m.th. D_{f+g} është bashkësi e zbrazët. Në këtë rast $(f+g):x\to f(x)+g(x)$ nuk paraqet funksion,pasi nuk e kënaq përkufizimin për funksion. Për „funksionet" e atilla të shkruara në formën analitike themi se janë të ***zbrazëta***.

Vëren se për funksionet e dhëna f dhe g, dhe „funksionet" $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ dhe $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ janë të zbrazëta.

B Le të jetë f pasqyrim prej A në B, kurse g pasqyrim prej B në C, d.m.th. $f:A\to B$, $g:B\to C$.
Me pasqyrimin f çdo elementi $x\in A$ i është shoqëruar elementi $f(x)\in B$.

Me pasqyrimin g elementit $f(x)$ prej bashkësisë B i është shoqëruar elementi i vetëm prej bashkësisë C, të cilin e shënojmë me $g(f(x))$.

Në këtë mënyrë është përcaktuar një pasqyrim prej A në C. Ky pasqyrim quhet përbërje ose kompozicion prej f dhe g, të cilin e shënojmë me $g\circ f$.



Prandaj:

$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ ose $x\mapsto f(x)\mapsto g(f(x))$, d.m.th. $(g\circ f):A\to C$.

Vëren se pasqyrimi i përbërë $g\circ f$ është përcaktuar vetëm nëse bashkësia e vlerave të f i takon domenit të g, d.m.th. nëse $V_f\subset D_g$.

Duke pasur parasysh se funksionet janë lloje të pasqyrimeve të veçanta prej $D\subseteq R$ në R, përbërja $g\circ f$ prej dy funksioneve f dhe g është funksion për të cilën mund të shprehet ky përkufizim

Përkufizimi. Nëse f dhe g janë funksione të dhëna, atëherë përbërjen (ose kompozicionin) e f dhe g të shënuar me $g \circ f$ është funksion

$$g \circ f : x \to g(f(x))$$

i përkufizuar për ato numra x, për të cilin është përcaktuar funksioni i dhënë f dhe për cilën numri $f(x)$ i takon domenit të funksionit g. Domethënë, $g \circ f$ është funksion për të cilin vlen:

1. $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f \wedge f(x) \in D_g$ dhe
2. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ për çdo $x \in D_{g \circ f}$.

Funksioni $g \circ f$ paraqet rregullë, ku së pari zbatohet f, kurse pastaj g. Ndërsa, te funksioni $f \circ g$ së pari zbatohet g, kurse pastaj f. Ke kujdes, $g \circ f$ nuk është i njëjtë sikurse edhe prodhimi $g\,f$.

4 Janë dhënë funksionet $f(x) = x^2 + 1$ dhe $g(x) = -3x + 2$. Caktoji funksionet: a) $g \circ f$; b) $f \circ g$.

Shihe përgjigjen:

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -3(f(x)) + 2 = -3(x^2 + 1) + 2 = -3x^2 - 1$;

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = (-3x + 2)^2 + 1 = 9x^2 - 12x + 5$.

Vëren, për përbërjen e funksioneve f dhe g nuk vlen vetia komutative, d.m.th. $f \circ g \neq g \circ f$.

5 Le të jetë $f(x) = \sqrt{x-2}$, $D_f = [2, \infty)$ dhe $g(x) = 11 - x^2$, $D_g = \mathbb{R}$. Caktoji funksionet e përbëra $f \circ g$ i $g \circ f$ dhe domenet e tyre.

Shqyrto zgjidhjen:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 2} = \sqrt{11 - x^2 - 2} = \sqrt{9 - x^2}$, $D_{f \circ g} = [-3, 3]$;

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 11 - (f(x))^2 = 11 - \left(\sqrt{x-2}\right)^2 = 13 - x$, $D_{g \circ f} = [2, \infty)$,

pasi $\left(\sqrt{x-2}\right)^2 = x - 2$, për $x \in [2, \infty)$.

6 Caktoji funksionet e përbëra $h = g \circ f$ dhe $\varphi = f \circ g$ nëse $f(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ dhe

$g(x) = \dfrac{1}{x+5}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Përcille zgjidhjen:

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{f(x) + 5} = \dfrac{1}{2(x+3)}$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$;

$\varphi(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot \dfrac{1}{x+5} + 1 = \dfrac{x+7}{x+5}$, $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

7 Funksionet $f(x) = x + 1$, $g(x) = x + 2$ dhe $h(x) = x^3$ le të jenë përkufizuar për çdo $x \in \mathbb{R}$. Vërteto se vlen vetia asociative

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Kujtohu!

Në fig. 1 janë paraqitur grafikët e funksioneve $y=2^x$ dhe $y=\log_2 x$.

Vëre:

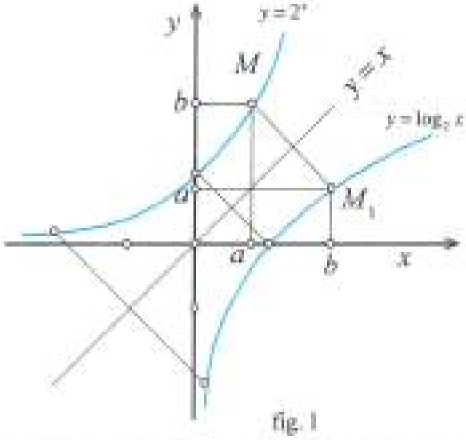


fig. 1

- Për funksionin eksponencial $y=2^x$ është

$$D_f=\mathbb{R},\ V_f=\mathbb{R}^+.$$

- Grafiku i funksionit $y=2^x$ është lakore e cila kalon nëpë pikën $M(a,b)$.

- Për funksionin logaritmik $y=\log_2 x$ është:

$$D_f=\mathbb{R}^+,\ V_f=\mathbb{R}.$$

- Grafiku i funksionit $y=\log_2 x$ është lakore e cila kalon nëpër pikën $M_1(b,a)$.

- Grafikët e të dy funksioneve kanë formë të njëjtë dhe janë simetrike në lidhje me drejtëzën $y=x$, d.m.th. simetralja e kuadrantit të parë.
- Nëse pika $M(a,b)$ i takon grafikut të funksionit $y=2^x$, atëherë pika $M_1(b,a)$ i takon grafikut të funksionit $y=\log_2 x$.

- Funksionet $y=2^x$ dhe $y=\log_2 x$ janë inverze njëra me tjetrën.

C Përveç operacioneve aritmetike dhe kompozicionin e funksionit, është me interes edhe ***operacioni invers.***

Nëse është dhënë funksioni f me domen D_f dhe bashkësia e vlerave V_f, parashtrohet pyetja a ekziston funksion g me domen $D_g=V_f$ dhe bashkësi e vlerave $V_g=D_f$, e atillë që ka veprim të anasjelltë, d.m.th.

$$g(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y, \text{ për çdo } x\in D_f \text{ dhe } y\in V_f.$$

Funksioni g që i kënaq kërkesat paraprake quhet funksion inverz (inverzioni) i funksionit f.

Funksionin inverz të f do ta shënojmë me f^{-1}, d.m.th. nëse g është inverzion i f, atëherë funksioni inverz $g(x)=f^{-1}(x)$.

Për funksionin e dhënë f a ekziston inverzion g, përgjigjen e jep kjo teoremë:

Teorema. Për funksionin e dhënë f ekziston inverzion g nëse dhe vetëm nëse f e kënaq kushtin

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2, \text{ për çdo } x_1,x_2\in D_f.$$

Në këtë rast inverzioni g është njëvlerësisht i përcaktuar.

Këtë gjykim nuk do ta vërtetojmë, kurse në praktikë nuk është e domosdoshme të provohet a është i kënaqur kushti i kërkuar, por mjafton të provohet barazimi $y=f(x)$ a ka zgjidhje të njëvlershme sipas x, ku $y\in V_f$. Nëse x është zgjidhje e atij barazimi, atëherë $f^{-1}(y)=g(y)=x$ është funksion inverz i f.

8 Cakto funksionin inverz të f, nëse $D_f = V_f = \mathbb{R}$ dhe nëse:

a) $y = 3x - 1$; b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$; c) $y = x^3$.

Shihe zgjidhjen:

a) Prej $y = 3x - 1$ vijon $3x = y + 1$, d.m.th. $x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$. Domethënë, funksioni inverz $f^{-1} = g(y) = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$.

Zakonisht, me x shënohet ndryshorja e pavarur, kurse me y − ndryshore e varur. Prandaj, funksioni inverz g shkruhet në formën

$$y = g(x).$$

Prandaj, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ ose $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ është funksion inverz i funksionit $y = 3x - 1$.

b) $y = f^{-1}(x) = -2x + 4$; c) $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Për funksionin $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ me domen $D = \mathbb{R}$ dhe $V_f = \mathbb{R}^+$ inverz është funksioni $y = f^{-1}(x) = \log_a x$ me domen $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$ dhe $V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Vëren se të gjitha funksionet në detyrën 8 janë monotone rigoroze, kurse funksionet e tyre inverze, gjithashtu, monotone rigoroze, kurse kjo vlen në përgjithësi, sikurse pohohet në këtë teoremë.

Teorema. Çdo funksion f që është monotonisht rigoroz në domenin D_f ka funksionin inverz f^{-1} që është gjithashtu monoton rigoroz në bashkësinë e vlerave V_f.

Poashtu, f dhe f^{-1} kanë natyrë të njëjtë të monotonis, d.m.th. të dy janë ose rritës ose zvogëlues.

Funksioni që është monoton jorritës ose jozvogëlues nuk ka funksionin e vet inverz.

Nëse $[a,b]$ është segment te i cili funksioni f ka vlerë konstante, atëherë për çdo

$$x \in [a,b],\ f(x) = f(a) = f(b) = c.$$

Anasjalltas, vlerës $y = c$ nuk i përgjigjet një, por bashkësia vlerave x, ajo është bashkësia e të gjitha vlerave për të cilat $y = c$, d.m.th. $x \in [a,b]$. Prandaj, nuk është e mundshme të përkufizohet funksioni inverz.

Më parë theksuam se grafikët e funksioneve $y=2^x$ dhe $y=\log_2 x$ janë simetrik në lidhje me drejtëzën $y = x$ (simetralja e kuadrantit të parë dhe kuadrantit të tretë).

Në fig. 2 janë paraqitur grafikët e funksioneve reciprokishti nverze $y = 2x$ dhe $y = \frac{1}{2}x$, kurse në fig. 3 grafikët e funksioneve $y = x^3$ dhe $y = \sqrt[3]{x}$.

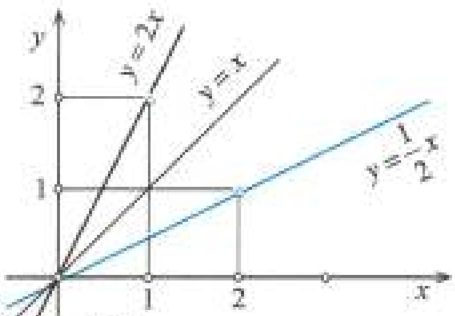


fig. 2

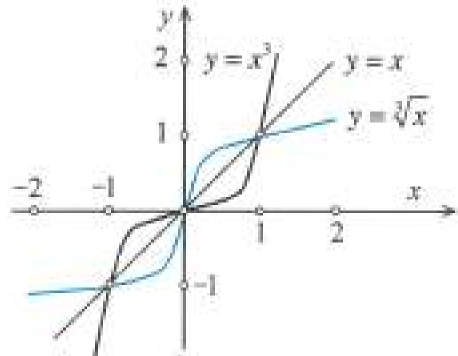


fig.3

Funksionet $y=f(x)$ me domen D_f dhe $x=f^{-1}(y)$ me domen $D_{f^{-1}}=V_f$ janë reciprokisht inverz, d.m.th.

$$f^{-1}(f(x))=x \text{ dhe } f(f^{-1}(y))=y.$$

Për shembull, 2^x dhe $\log_2 x$ janë funksione reciprokisht inverz. Për ato vlen: $2^{\log_2 x}=x$ dhe $\log_2 2^x=x$.

9 Shqyrto se funksioni $y=x^2$, $D_f=\mathbb{R}$, $V_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ a ka funksion inverz.

Funksioni i dhënë nuk ka funksion inverz pasi $f(-2)=4=f(2)$, d.m.th. nuk është i kënaqur kushti $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Megjithate, nëse funksioni shqyrtohet në veçanti në zonat $D_1=(-\infty,0]$ dhe $D_2=[0,+\infty)$, atëherë funksioni $y=x^2$ zbërthehet në dy funksione: $y_1=x^2$ me D_1 dhe $y_2=x^2$ me D_2, (të cilat quhen kufizime të funksionit f). Funksioni $f_1:D_1\to V_f$ ka funksion inverz $y=-\sqrt{x}$, kurse funksioni $f_2:D_2\to V_f$ ka funksion inverz $y=\sqrt{x}$. Por, funksionet e fituara nuk janë inverze në funksionin $y=x^2$ me domen $D_f=\mathbb{R}$.

Nëse është dhënë funksioni $f(x)$ me domen D_f dhe kodomen V_f, atëherë funksioni inverz $f^{-1}(x)$ është me domen $D_{f^{-1}}=V_f$ dhe kodomen $V_{f^{-1}}=D_f$. Funksioni inverz f^{-1} i funksionit f mundëson shumë më lehtë të caktohet bashkësia V_f e funksionit f.

10 Shqyrto kufizimin e funksionit: a) $y=x^2-4x+5$; b) $y=-x^2+x$.

Shqyrto zgjidhjen:

Kufizimi i funksionit f është përcaktuar prej vlerave të bashkvsisë V_f, d.m.th. prej bashkësisë së përkufizimit të funksionit inverz.

- a) $y=x^2-4x+5$; $x^2-4x+5-y=0$.

Funksioni $x=f^{-1}(y)$ është përkufizuar për numrin real y për të cilin $D=b^2-4ac\geq 0$. Prandaj, $D=16-20+4y\geq 0$, d.m.th. $y\geq 1$. Domethënë, $V_f=[1,+\infty)$, pra funksioni është i kufizuar prej poshtë.

- b) Prej $y=-x^2+x$ vijon $x^2-x+y=0$, $D=1-4y\geq 0$, d.m.th. $y\leq\frac{1}{4}$, pra $V_f=\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$. Domethënë, funksioni është i kufizuar.

11 Cakto bashkësinë e vlerave të funksionit:

a) $y=\dfrac{x+1}{x-2}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$; b) $y=\dfrac{2x+5}{3x+4}$, $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$.

Përcille zgjidhjen:

a) E caktojmë funksionin inverz të funksionit të dhënë, kemi:

$$y(x-2)=x+1,\qquad x=f^{-1}(y)=\frac{2y+1}{y-1}.$$

Bashkësia e vlerave të funksionit të dhënë është bashkësia e përkufiizimit të funksionit inverz, d.m.th. $V_f=D_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Detyra:

1. Caktoji $f+g$ dhe $f\cdot g$ dhe domenet e tyre nëse:

   a) $f(x)=2x+5,\ g(x)=3x^2-1$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x-1},\ g(x)=x-1$; c) $f(x)=\dfrac{1-x}{x+1},\ g(x)=3x^2-1$.

2. Le të jetë $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{x}}$ dhe $g(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$. Caktoji: a) $f+g$; b) $f\cdot g$ dhe domenet e tyre.

3. Nëse $f(x)=2x+1$, cakto: a) $f+f$; b) $f\cdot f\cdot f$.

   Caktoji funksionet e përbëra $f\circ g$ dhe $g\circ f$ nëse:

4. a) $f(x)=5x-4,\ x\in\mathbb{R}$ dhe $g(x)=2-3x,\ x\in\mathbb{R}$;

   b) $f(x)=\dfrac{1}{x+2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ dhe $g(x)=2x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

5. $f(x)=1-x,\ x\in\mathbb{R}$ dhe $g(x)=\dfrac{x+3}{2x+4},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

6. $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,\infty),\ g(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R}$.

7. Nëse $f(x)=\dfrac{1+3x}{x-3},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, vërteto se $f\circ f=x$.

8. Nëse $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$, vërteto se $f(f(x))=x$.

9. Cakto funksioni inverz të funksionit:

   a) $y=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}x$; b) $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$; c) $y=\sqrt[3]{x}+1$; ç) $y=10^{x-2}+3$.

10. Vërteto se funksionet

    a) $y=\dfrac{1}{x}$; b) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ janë inverze me vetveten.

6 FUNKSIONET ELEMENTARE

A

Në vijimin e gjer tanishëm të mësimit të matematikës hase funksione të ndryshme.

Këto funksione i quajmë ***funksione themelore elementare:***

1. c – funksioni konstant (c është konstante);
2. Funksioni i fuqisë x^r, $r\in\mathbb{R}$;
3. Funksioni eksponencial a^x, $a>0,\ a\neq 1$;
4. Funksioni logaritmik $\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$;
5. Funksionet trigonometrike: $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x$;
6. Funksionet inverze të funksioneve trigonometrike: $\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x$;

Me ndihmën e këtyre funksioneve do ta përkufizojmë klasën e ***funksioineve elementare.***

Përkufizimi. Çdo funksion që mund të fitohet prej funksioneve themelore elementare duke zbatuar operacionet aritmetike (mbledhje, zbritje, shumëzim dhe pjesëtim) dhe operacionit formim quhet funksion elementar.

Për shembull, për funksionet $f(x)=\sqrt{x-1}+\sin^2 x$ është shumë prej funksioneve $\sqrt{x-1}$ me domen $D_1=[1,+\infty)$ dhe $\sin^2 x$ me domen $D_2=(-\infty,+\infty)$, pra funksioni $f(x)$ është me domen $D=D_1\cap D_2=[1,+\infty)$.

Llojet e funksioneve elementare janë:

1. Funksionet Polinomiale (ose e plota racionale)

Shembull: $P(x)=2x^4+3x^2-x+5$; $R(x)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}x^2-3x^3$ etj.

2. Funksionet racionale thyesore

Shembull: $g(x)=\frac{3x^2-4x+1}{x^2+1}$, $\varphi(x)=\frac{x-2}{x^2+4x+5}$ ose në përgjithësi $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, ku $P(x)$ dhe $Q(x)$ janë polinome dhe poashtu $Q(x)$ është polinom jozero.

Vëreve se funksionet racionale janë fituar prej funksioneve elementare të llojit 1. dhe 2. për $r\in\mathbb{N}$, por duke i zbatuar operacionet aritmetike dhe operacionin e kompozicionit.

Funksioni $f(x)$ quhet algjebrik nëse është fituar prej funksioneve elementare të llojit 1. dhe 2. për $r\in\mathbb{N}$ me zbatimin e operacioneve aritmetike, operacionit të formimit dhe operacionit nxjerrja e rrënjës, d.m.th. për $r=\frac{m}{n}$; $m,n\in\mathbb{N}$. Nëse n është numër çift, atëherë punohet me vlerë aritmetike të rrënjës.

Mbaj mend!

Çdo funksion racional (polinomial ose thyesor) është funksion ***algjebrik***.
Anasjelltas nuk vlen, d.m.th. çdo funksion algjebrik nuk është racional.
Për shembull, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt[3]{x+1}$ janë algjebrik, por nuk janë racional.

3. Funksionet algjebrike që nuk janë racional quhen **funksione iracionale**.

Shembull: $2\sqrt[3]{x}-3x+5$; $x+\sqrt{1+x^2}$; $|x|=\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}$; x^r, $r\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ etj.

4. Funksionet elementare që nuk janë algjebrike quhen **funksione transhendente.**

Të atilla janë: funksioni eksponencial, funksioni logaritmik, funksioni trigonometrik etj.

Ndarja e funksioneve elementare është paraqitur në këtë tabelë.

Funksionet elementare

- Funksionet algjebrike
  - Funksionet e plota racionale (polinomiale)
  - Funksionet racionale thyesore
  - Funksionet iracionale
- Funksionet transhidente

1 Ta shqyrtojmë funksionin $f(x)=x^r$, $r\in\mathbb{R}$ i cili quhet ***funksioni i fuqisë***.

Nëse treguesi r është numër racional, atëherë funksioni i fuqisë është ***algjebrik***, por kur r është numër iracional, atëherë funksioni i fuqisë është ***transhendent***.

Funksionin e fuqisë do ta shqyrtojmë në këto raste:

1. Treguesi r është numër natyror, d.m.th. funksioni është i llojit $f(x)=x^{2n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Disa veti të funksionit janë:

1^0. Domeni është $D_f=\mathbb{R}$. 2^0. $V_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$.

3^0. Funksioni është çift, $f(-x)=(-x)^{2n}=x^{2n}=f(x)$.

4^0. Funksioni zvogëlohet në intervalin $(-\infty,0)$, kurse rritet në intervalin $(0,\infty)$, fig. 1.

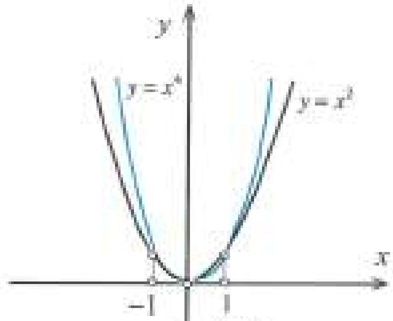


fig. 1

2. Treguesi r është numër natyror tek, d.m.th.

$f(x)=x^{2n-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

Vetitë e funksionit janë:

1^0. Domeni është $D_f=\mathbb{R}$. 2^0. $V_f=\mathbb{R}$.

3^0. Funksioni është tek,d.m.th.

$$f(-x)=(-x)^{2n-1}=-x^{2n-1}=-f(x).$$

4^0. Funksioni është rritës fig. 2.

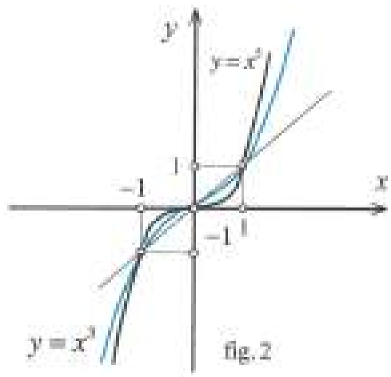


fig. 2

3. Treguesi r është numër i plotë negativ:

a) $f(x)=x^{-2n}=\dfrac{1}{x^{2n}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Disa veti të funksionit janë:

1^0. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2^0. $V_f=(0,+\infty)$.

3^0. Funksioni është çift d.m.th.

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^{2n}}=\frac{1}{x^{2n}}=f(x).$$

b) $f(x)=x^{-(2n-1)}=\dfrac{1}{x^{2n-1}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Disa veti të funksionit janë:

1^0. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2^0. $V_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

3^0. Funksioni është tek, d.m.th.

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^{2n-1}}=-\frac{1}{x^{2n-1}}=-f(x).$$

4^0. Rritet në intervalin $(-\infty, 0)$, kurse zvogëlohet në intervalin $(0, +\infty)$, fig. 3.

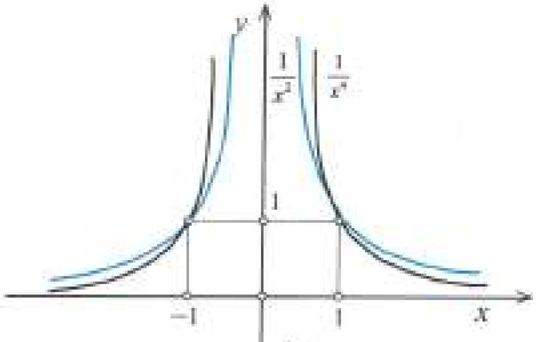


fig.3

4^0. Funksioni zvogëlohet për çdo $x \in D_f$, fig. 4

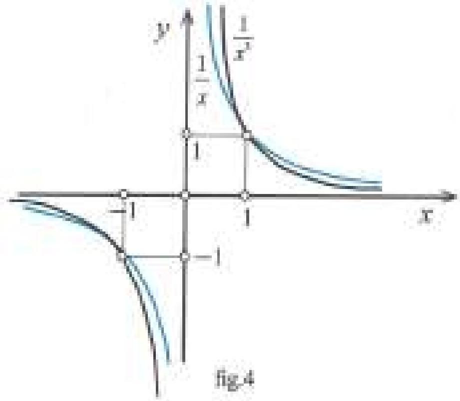


fig.4

4. Treguesi r është numër racional pozitiv, d.m.th. $r = \frac{m}{n}$, ku m dhe n janë numra reciprokisht të thjeshtë, pra $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

- Nëse n është numër çift, atëherë $D_f = [0, +\infty)$, $V_f = [0, +\infty)$, $f(x)$ rritet.
- Nëse n është numër tek, atëherë $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}$ edhe funksioni rritet.

Në fig. 5 janë paraqitur grafikët e funksioneve:

$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$.

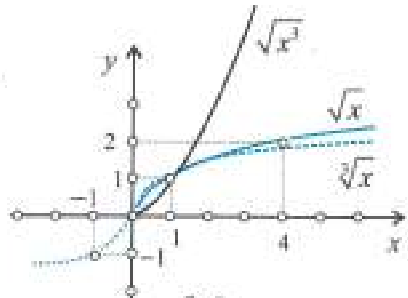


fig.5

Detyra:

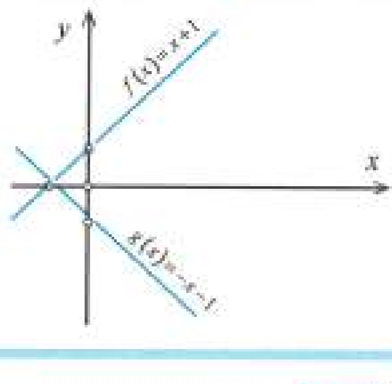
Vizato grafikun efunksionit:

1. a) $y = x^6$, $y = x^{-5}$; b) $y = x^{\frac{1}{5}}$.
2. a) $y = 5^x$; b) $y = 0{,}2^x$; c) $y = \log_5 x$; ç) $y = \log_{0.2} x$.
3. a) $y = 2\sin x$; b) $y = \cos\frac{x}{2}$.

7 SKICIMI I GRAFIKËVE TË DISA FUNKSIONEVE ME NDIHMËN E GRAFIKËVE TË FUNKSIONEVE ELEMENTARE

Kujtohu.

- Në të njëjtin sistem koordinativ janë paraqitur grafikët e funksioneve $f(x) = x + 1$ dhe $g(x) = -x - 1$.
- Vëre, $g(x) = -f(x)$.
- Grafikët e funksioneve $f(x)$ dhe $g(x)$ janë simetrik në lidhje me boshtin x.



A **1** Grafiku i ndonjë funksioni $f(x)$ është paraqitur në fig. 1. Skicoje grafikun e funksionit:

a) $y=-f(x)$; b) $y=|f(x)|$; c) $y=\dfrac{1}{f(x)}$.

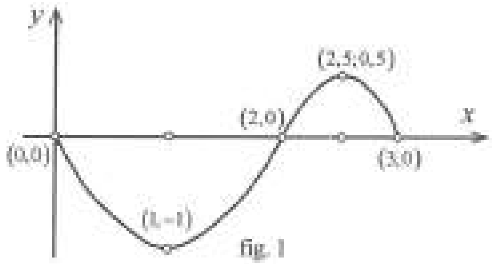


fig. 1

Shqyrto zgjidhjen:

a) Vëre se grafiku i funksionit $y=-f(x)$ është simetrik me $f(x)$ në lidhje me boshtin x, fig. 2.

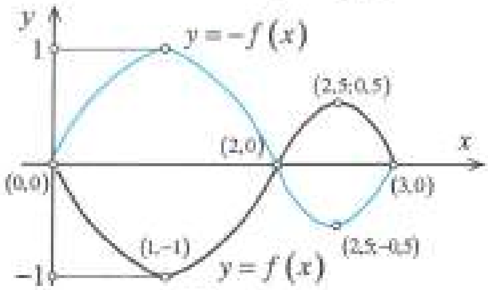


fig. 2

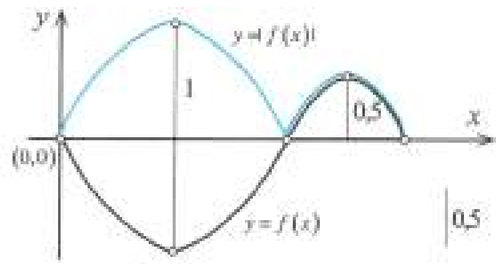


fig. 3

b) Grafikun e funksionit $y=|f(x)|$ do ta vizatojmë ashtu që pjesën e grafikut të $f(x)$, ku $f(x)<0$ do ta pasqyrojmë simetrikisht në lidhje me boshtin x, kurse pjesën e grafikut ku $f(x)\geq 0$ është grafik edhe i funksionit $f(x)$, fig. 3.

c) Grafiku i funksionit $y=\dfrac{1}{f(x)}$, i cili quhet funksioni reciprok $f(x)$, është paraqitur në fig. 4.

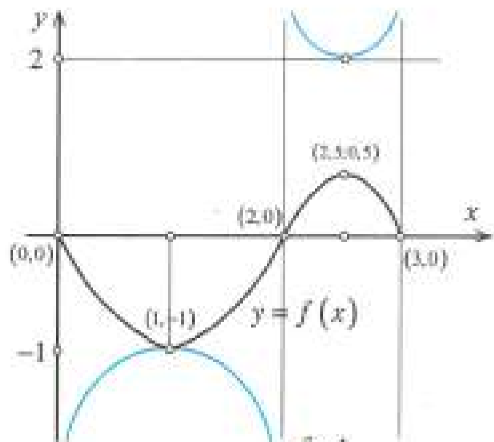


fig. 4

- Vëreve se funksioni $y=\dfrac{1}{f(x)}$ është përkufizuar për $x=0$, $x=2$ dhe $x=3$, d.m.th. drejtëzat $x=0$, $x=2$ dhe $x=3$ janë asimptota vertikale.

- Nëse $f(x)=\pm 1$, atëherë edhe $\dfrac{1}{f(x)}=\pm 1$. Pikat $M(1,\pm 1)$ dhe $N(-1,\pm 1)$ i takojnë edhe grafikut të $f(x)$ edhe grafikut të $\dfrac{1}{f(x)}$.

- Gjatë skicimit të grafikut të funksionit $\dfrac{1}{f(x)}$ duhet pasur parasysh këtë:

1.nëse $f(x)\geq 1$, atëherë $0<\dfrac{1}{f(x)}\leq 1$;

2. nëse $0\leq f(x)\leq 1$, atëherë $1\leq \dfrac{1}{f(x)}<+\infty$;

3. nëse $-1\leq f(x)\leq 0$, atëherë $-\infty<\dfrac{1}{f(x)}\leq -1$;

4. nëse $f(x)\leq -1$, atëherë $-1\leq \dfrac{1}{f(x)}<0$.

2 Është dhënë funksioni $f(x)=\frac{1}{2}x-1$. Skicoje grafikun e funksionit:

a) $y=f(x)+2$; b) $y=|f(x)|$; c) $y=\frac{1}{f(x)}$.

Shqyrto mënyrën e zgjidhjen:

a)

x	-2	0	2
$f(x)$	-2	-1	0
$f(x)+2$	0	1	2

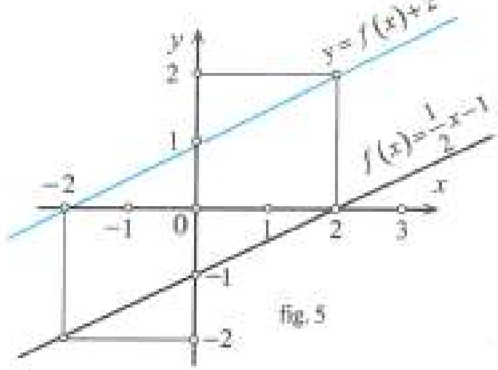


fig. 5

Vëre se grafiku i funksionit $f(x)+2$ është fituar ashtu që ordinata e çdo pike të funksionit $f(x)$ është zmadhuar për 2, fig. 5.

b) Grafiku i funksionit $y=|f(x)|$ është vizatuar ashtu që pjesa prej grafikut $f(x)$ ku $f(x)<0$ është pasqyruar simetrikisht në lidhje me boshtin x, fig. 6, kurse pjesa tjetër në vetvete.

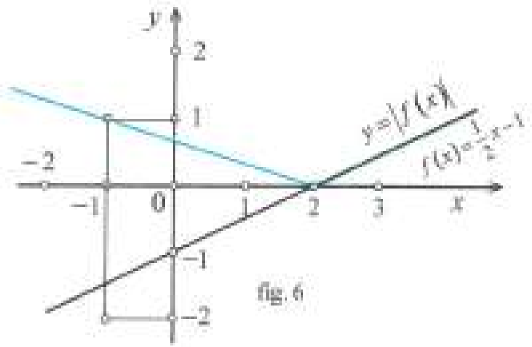


fig. 6

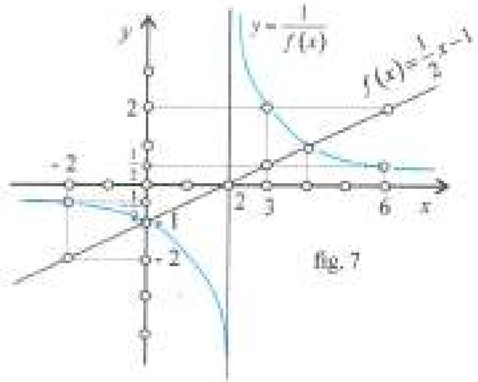


fig. 7

c) Grafiku i funksionit $y=\frac{1}{f(x)}$ është paraqitur në fig. 7.

Vëre se domeni i funksionit $\frac{1}{f(x)}$ është $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$. Funksioni inverz i $f(x)$ është

$x=\varphi^{-1}(y)=\frac{2(1+y)}{y}$, $D_{\varphi^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pra bashkësia e vlerave $V_{\varphi}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Drejtëza $x=2$ është asimptotë vertikale, kurse drejtëza $y=0$, d.m.th. boshti x është asimptotë horizontale.

Pikat $(0,-1)$ dhe $(4,1)$ shtrihen në grafikun e funksionit $\frac{1}{f(x)}$. Pasi $f(6)=2$, $\frac{1}{f(6)}=\frac{1}{2}$,

kurse $\frac{1}{f(-2)}=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{0,5}=2$.

3 Vizato grafikun e funksionit: a) $y=|2^x-3|$; b) $y=|\log_2 x|$.

4 Është dhënë funksioni $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$. Skicioje grafikun e funksionit:

a) $y=f(x)-2$; b) $y=|f(x)|$; c) $y=\frac{1}{f(x)}$.

Përcille zgjidhjen:

Grafikun e funksionit $f(x)$ do ta vizatojmë ashtu që me sistemin koordinativ ndihmës $x_1O_1y_1$ do ta paraqesim grafikun e funksionit x^2, ku $O_1(\alpha,\beta)$, $\alpha=-\frac{b}{2a}$, $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

$\alpha=2$, $\beta=2$ d.m.th. $O_1(2,-2)$

x	-2	-1	0	1	2
$\frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

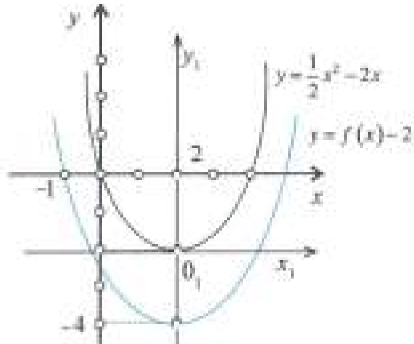


fig. 8

Grafiku i fituar është grafiku i funksionit

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$ në sistemin koordinativ xOy.

a) Grafiku i funksionit $y=f(x)-2$ është fituar ashtu që ordinata e çdo pike të funksionit $f(x)$ është normale për 2, d.m.th. grafiku i funksionit $f(x)$ është „lëshuar" poshtë nëpër boshtin y, kurse për 2 njësi, fig. 8.

b)

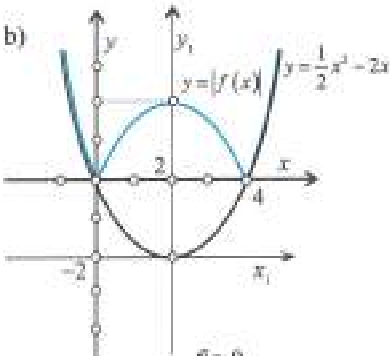


fig. 9

Disa veti të funksionit $y=|f(x)|$ janë:

1^0. $D_y=\mathbb{R}$. 2^0. $V_y=[0,+\infty)$.

3^0. Funksioni nuk është as çift as tek.

4^0. $y_{max}=2$ për $x=2$, $y_{min}=0$ për $x=0$ dhe $x=4$.

5^0. Nuk ka maksimum absolut, por ka minimum absolut.

6^0. Rritet për $x\in(0,2)\cup(4,+\infty)$, zvogëlohet për $x\in(-\infty,0)\cup(2,4)$, fig. 9.

c)

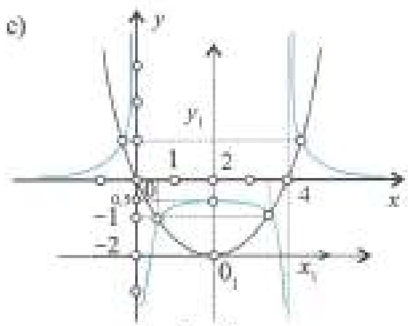


fig. 10

Disa veti të funksionit $y=\frac{1}{f(x)}$ janë:

1^0. $D_y=(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$.

2^0. $V_y=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup(0,+\infty)$.

3^0. Rritet për $x\in(-\infty,0)\cup(0,2)$, kurse zvogëlohet për $x\in(2,4)\cup(4,+\infty)$.

4^0. $y_{max}=-\frac{1}{2}$ për $x=2$. Nuk ka maksimum absolut as minimum absolut, fig. 10.

5 Është dhënë funksioni $f(x)=\sin x,\ x\in[0,2\pi]$. Vizato grafikun e funksionit:

a) $y=|f(x)|$; b) $y=\dfrac{1}{f(x)}$.

Përcille zgjidhjen:

a) Për $x=0$, $x=\pi$ dhe $x=2\pi$, $f(x)=0$. Për $x=\dfrac{\pi}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, kurse për $x=\dfrac{3\pi}{2}$, $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$.

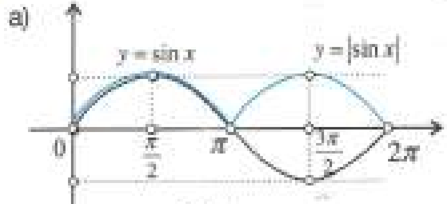


fig. 11

Pjesën e grafikut të $f(x)$ ku $f(x)<0$ do ta pasqyrojmë simetrikisht në lidhje me boshtin x, kurse pjesën tjetër në vetvete, fig. 11.

b) Vëre: 1^0. Drejtëzat $x=0$, $x=\pi$ dhe $x=2\pi$ janë asimptota vertikale.

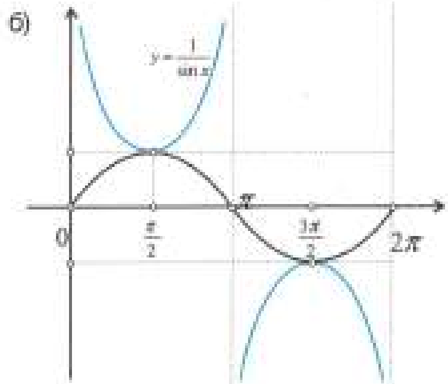


fig. 12

2^0. $D_y=(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$. 3^0. $V_y=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

4^0. $y_{max}=-1$ za $x=\dfrac{3\pi}{2}$, $y_{min}=1$ për $x=\dfrac{\pi}{2}$. Nuk ka minimum dhe maksimum absolut.

5^0. Rritet në intervalin $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, kurse zvogëlohet në $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$, fig. 12.

Detyra:

Vizato grafikun e funksionit:

1 a) $y=-x^3$; b) $y=-2^x$; c) $y=-\dfrac{1}{x}$.

2 a) $y=2^{x+1}-3$; b) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$; c) $y=\left|\log_{\frac{1}{2}}x\right|$.

3 a) $y=|x+2|-3$; b) $y=|1-x^2|$; c) $y=|\cos x|$.

4 a) $y=x^2+6|x|$; b) $y=||x|-1|$.

5 a) $y=|-x^2-3x|$; b) $y=\dfrac{1}{|x^2-3x|}$.

6 a) $y=|3-2x|$; b) $y=\dfrac{1}{|3-2x|}$; c) $y=\dfrac{1}{|\cos x|}$.

7 a) $y=\dfrac{|2x|}{x}$; b) $y=|x+2|+2x-3$.

8 a) $y=\dfrac{1}{x+2}$; b) $y=\dfrac{2}{|4-x^2|}$.

8 VLERA KUFITARE E FUNKSIONIT

Kujtohu!

- Numri a është kufiri i vargut $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ nëse për çdo numër pozitiv ε, ekziston numër natyror n_0 (n_0 varet prej ε), ashtu që $|a_n - a| < \varepsilon$ për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $n > n_0$, përshkruajmë
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$
- Për vargun (a_n) që e ka kufirin a themi se quhet konvergjent, d.m.th. konvergjon nga a.
- Intervali $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ është qendra e rrethinës dhe δ është rrezja e asaj rrethine.

A **1** Është dhënë funksioni
$$y = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$
Argumenti x le të afrohetnga 0, nëpërmjet vargut prej vlerave $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, d.m.th.. $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Formo tabelë që i përmban vlerat x_n të argumentit dhe vlerat $y_n = f\left(\frac{1}{n}\right), n = 1, 2, 3, \ldots$

si edhe vlerat $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right|, n = 1, 2, 3, \ldots$

Vëre, nga cili numër tenton vargu $f(x_n)$, por nga afrohet ndryshimi $|f(x_n) - 1|$.

Shqyrto zgjidhjen:

x_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{10}$	...	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{1000}$	...
$f(x_n)$	0,5	0,8	0,9	0,94	...	0,990099	...	0,9999	...	0,999999	...
$\lvert f(x_n) - 1\rvert$	0,5	0,2	0,1	0,06	...	0,009901	...	0,0001	...	0,000001	...

Prej tabelës mund të vërehet se vlerat $f(x_n)$ të funksionit afrohen deri te 1, kurse ndryshimi $|f(x_n) - 1|$ afrohet deri te zero kur argumenti x tenton nga zero nëpërmjet vargut $\left(\frac{1}{n}\right), n = 1, 2, 3, \ldots$

Nëse e marrim cilindo varg (x_n) që konvergjon nga 0, d.m.th. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, mund të bindemi se vargu përkatës prej vlerat të funksionit $f(x_n) = \frac{1}{1+x_n}$ tenton nga numri 1, d.m.th. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$. Prandaj themi se 1 është vlera kufitare e funksionit në pikën $x = a$.

Përkufizimi 1. Funksioni $f(x)$ le të jetë përkufizuar në ndonjë rrethinë të pikës a, ku në pikën a nuk është e thënë të jetë i përkufizuar.

Numri A quhet ***vlera kufitare*** ose ***kufiri*** i funksionit $f(x)$ në pikën $x = a$, nëse çdo varg (x_n), ashtu që $x_n \in D_f$, $x_n \neq a$ dhe $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, vargu përkatës prej vlerave të funksionit $f(x)$:
$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots \text{ konvergjon nga A, d.m.th. } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$
Në këtë rast shkruajmë
$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad (\text{ose} \quad f(x) \to A \quad \text{kur} \quad x \to a.).$$

2 Shqyrto se funksioni $f(x)=3x-1$ a ka kufi në pikën $a=1$.

Shihe zgjidhjen:

Domeni i funksionit është $D_f=\mathbb{R}$, pra $f(x)$ është përkufizuar (çdo) rrethina e pikës 1, $1\in D_f$.

- Le të jetë $x\to 1$ nëpërmjet vargut: $x_1=2, x_2=1+\frac{1}{2}, x_3=1+\frac{1}{3}, x_4=1+\frac{1}{4},\dots, x_n=1+\frac{1}{n},\dots$ d.m.th. afrohet nga 1 nga e djathta. Vargu i vlerave përkatëse të funksionit është $f(x_n)$:

$$f(x_1)=3\cdot 2-1=5;\ \ f(x_2)=3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)-1=2+\frac{3}{2};\ \ f(x_3)=3;\ \ f(x_4)=2+\frac{3}{4};\dots,\ f(x_n)=2+\frac{3}{n};\dots,$$

i cili tenton nga 2 kur $n\to\infty$, d.m.th. kur $x\to 1$.

- Tani le të jetë $x\to 1$ nëpërmjet vargut: $x_1=1-\frac{1}{2};\ x_2=1-\frac{1}{3};\ x_3=1-\frac{1}{4};\ x_4=1-\frac{1}{5};\dots,x_n=1-\frac{1}{n+1},\dots,$ d.m.th. afrohen nga 1nga e majta,

atëherë $f(x_1)=\frac{1}{2};\ \ f(x_2)=1;\ \ f(x_3)=2-\frac{3}{4};\ \ f(x_4)=2-\frac{3}{5};\dots\ \ f(x_n)=2-\frac{3}{n+1},\dots$

Është e qartë, $f(x_n)\to 2$ kur $n\to\infty$, për $x_n=1+\frac{1}{n}$ dhe $x_n=1-\frac{1}{n}$.

Nëse (x_n) është çfarëdo varg që konvergjon nga 1, d.m.th. $\lim_{n\to\infty}x_n=1$, atëherë:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(3\cdot(x_n)-1)=\ 3\cdot\lim_{n\to\infty}x_n-1=3\cdot 1-1=2,\ \text{fig. 1.}$$

Prandaj:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(3x-1)=\ 3\cdot 1-1=2.$$

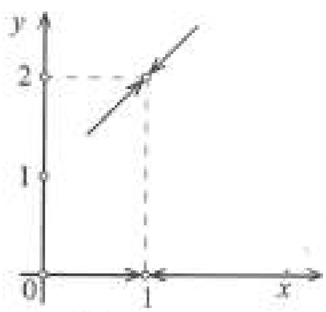


fig. 1

3 Cakto vlerën kufitare të funksionit $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ në pikën $x=-2$.

Shihe zgjidhjen:

- Funksioni është përkufizuar për $x+2\neq 0$, d.m.th. $x\neq -2$, pra $D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$. Edhe këtu mund të shqyrtojmë çfarëdo varg (x_n) në rrethinën e pikës -2, edhe pse $-2\notin D_f$ të funksionit $f(x)$.

Nëse (x_n) është çfarëdo varg ashtu që $x_n\neq -2, x_n\in D_f$ dhe $\lim_{n\to\infty}x_n=-2$, atëherë

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-4}{x_n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-2)(x_n+2)}{x_n+2}=\lim_{n\to\infty}(x_n-2)=-2-2=-4,\qquad \lim_{x\to -2} f(x)=-4.$$

Vëren se thyesën e thjeshtuam me x_n+2, kurse thjeshtimi është i mundshëm pasi $x_n\neq -2$, d.m.th. $x_n+2\neq 0$.
Prandaj:

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4.$$

(Edhe këtu thjeshtimi është i mundshëm, pasi $x\neq -2$, d.m.th. $x+2\neq 0$).

Ta shqyrtojmë ndryshimin $|f(x_n)-1|$ prej tabelës në detyrën 1. Mund të vërejmë se ndryshimi $|f(x_n)-1|$ tenton nga 0 kur x tenton nga $a=0$ nëpërmjet vargut $\left(\frac{1}{n}\right)$. Vëre, ndryshimin $|f(x_n)-1|$ mund ta bëjmë çfarëdo të vogël, d.m.th. më të vogël prej çfarëdo numri pozitiv ε, vetëm nëse x_n zgjedhet mjaftë afër deri te $a=0$, d.m.th. nëse ndryshimi $|x_n-a|$ bëhet mjaft i vogël.

4 Shqyrto se funksioni $f(x)=\frac{|x|}{x}, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a ka kufi në pikëna $x_0=0$.

Shihe përgjigjen:

Kurse grafiku $|x|=\begin{cases} x, \text{ për } x>0 \\ 0, \text{ për } x=0 \\ -x, \text{ për } x<0 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ për } x>0 \\ -1, \text{ për } x<0 \end{cases}$, i tij është në fig. 3.

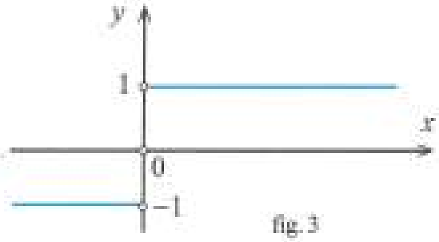


fig. 3

Ky funksion nuk ka kufi në pikën $x_0=0$, pasi nëse $x_n\to 0$ prej të majtës, atëherë $f(x_n)=-1$, por nëse $x_n\to 0$ nga e djathta nëpërmjet vlerave pozitive, atëherë $f(x_n)=1$. Prandaj, nuk ekziston numër real A, ashtu që ndryshimi $|f(x)-A|$ mund të bëhet çfarëdo i vogël për çdo x që është afër te 0, d.m.th. për çdo $x\in(0-\delta,0+\delta)$.

Konceptin kufi të funksionit mund ta fusim edhe me këtë përkufizim

Përkufizimi 2. Numri A është kufi i funksionit $y=f(x)$ në pikë a, i cili nuk është e thënë t'i takoj D_f, nëse për çdo $\varepsilon>0$, ekziston $\delta>0$, (δ varet prej ε) i atillë që për çdo $x\in D_f$ që e kënaq kushtin $0<|x-a|<\delta$ është e saktë barasia

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Të dy përkufizimet për vlerën kufitare të funksionit janë ekuivalente, d.m.th. i pari vijon prej të dytit dhe anasjelltas. .

Vërtetimin e këtij gjykimi nuk do ta bëjmë.

Interpretimi gjeometrik i përkufizimit 2 është paraqitur në fig. 2.

Numri A është vlera kufitare e funksionit $f(x)$ kur $x\to a$, nëse për çfarëdo $\varepsilon>0$ ekziston rrethinë δ $(a-\delta,a+\delta)$ të a, ashtu që për çdo $x\in(a-\delta,a+\delta)$ vlera e funksionit $f(x)$ është në intervalin $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$, përveç ndoshta për pikën a, nëse a nuk i takon D_f.

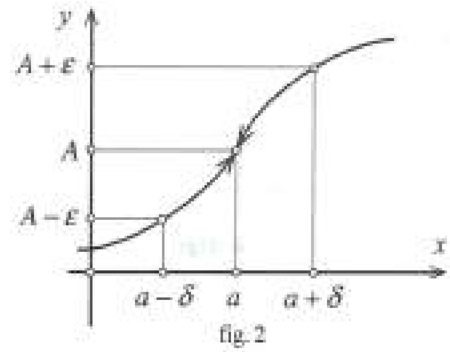


fig. 2

Detyra:

1 Cakto vlerën kufitare të funksionit në pikën a, me ndihmën e përkufizimit 1, nëse:

a) $f(x)=2x-3,\ \ a=1;$ b) $f(x)=2x+1,\ \ a=-1.$

2 Vërteto se funksioni $f(x)=\cos\frac{1}{x},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, nuk ka vlerë kufitare në pikën 0.

Cakto vlerën kufitare $(3-6)$:

3 a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{2x}$; b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+1}{2x}$. **4** a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

5 a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$. **6** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{|x|-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$;

9 VLERA KUFITARE E MAJTË DHE E DJATHTË. ZGJERIMI I KUPTIMIT VLERË KUFITARE

A Shqyrto funksionin $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ në mësimin e kaluar, vërejtëm se

$f(x)=\begin{cases}1, \text{ për } x>0\\ -1, \text{ për } x<0\end{cases}$, d.m.th.nëse $x_n\to 0$ nga e majta nëpërmjet vargut të numrave negativ, atëherë $f(x_n)\to -1$, por nëse $x_n\to 0$ nga e djathta nëpërmjet vargut të numrave pozitiv, atëherë $f(x_n)\to 1$. Domethënë, funksioni nuk ka kufi kur $x\to 0$.

Ky shembull na tregon se ka kuptim të flasim për kufirin e majtë dhe të djathtë të funksionit $f(x)$ në pikën $x=a$.

Për numrin A_1 themi se është kufiri i majtë i funksionit $f(x)$ në pikën $x=a$, nëse për çdo varg (x_n), ashtu që $x_n\in D_f$, $x_n<a$ dhe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, vargu $f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_n),\ldots$ prej vlerave të funksionit $f(x)$ është konvergjent dhe e ka kufirin A_1.

Në këtë rast shkruajmë:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=A_1.$$

Në mënyrë të ngjashme përkufizohet edhe kufiri i djathtë i funksionit $f(x)$, vetëm që në atë rast $x_n>a$, dhe shkurtimisht shkruajmë:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=A_2.$$

1 Cakto kufirin e funksionit $f(x)=3+\sqrt{2-x}$ në pikën $x=2$.

Shqyrto zgjidhjen:

Funksioni është përkufizuar për $2-x\geq 0$, d.m.th. $x\leq 2$. $D_f=(-\infty,2]$, pra x mund të tenton nga 2 vetëm prej anës së majtë, d.m.th. mund të kërkojmë vetëm kufi të majtë.

x le të tenton nga 2 nëpërmjet vargut

$$(x_n): x_1=2-1,\ \ x_2=2-\frac{1}{2},\ \ x_3=2-\frac{1}{3},\ \ x_4=2-\frac{1}{4},\ldots,\ \ x_n=2-\frac{1}{n},$$

kurse vargu përkatës $f(x_n)$ është:

$$f(x_1)=3+\sqrt{2-1}=4;\quad f(x_2)=3+\sqrt{2-\left(2-\frac{1}{2}\right)}=3+\sqrt{\frac{1}{2}};\ldots,\quad f(x_n)=3+\sqrt{2-\left(2-\frac{1}{n}\right)}=3+\sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Pasi $\sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$ kur $n \to \infty$, vijon se $f(x_n) \to 3$ kur $n \to \infty$.

Le të jetë (x_n) çfarëdo varg, ashtu që $x_n \in D_f$ dhe $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$. Atëherë

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 3 + \sqrt{2 - \lim_{n \to \infty} x_n} = 3 + \sqrt{2 - 2} = 3,$$

kurse atë mund ta shkruajmë:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(3 + \sqrt{2 - x}\right) = 3.$$

Zakonisht, gjatë përcaktimit të kufirit të majtë dhe të djathtë, d.m.th. kur $x \to a^+$ ose $x \to a^-$ e marrim zëvendësimin $x = a + h$ ose $x = a - h, (h > 0)$, ashtu që $h \to 0$ kur $x \to a^+$ ose $x \to a^-$.

Duke e zbatuar këtë zëvendësim te detyra paraprake kemi:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2-h} \left(3 + \sqrt{2 - x}\right) = \lim_{h \to 0} \left(3 + \sqrt{2 - (2 - h)}\right) = 3.$$

2 Cakto vlerën kufitare të funksionit $f(x) = 5 - \sqrt{x - 3}$ në pikën $x = 3$.

Përcille zgjidhjen:

- Funksioni është përkufizuar për $x - 3 \geq 0$, d.m.th. $x \geq 3$, pra $D_f = [3, +\infty)$.

Pasi x mund të tenton nga 3 vetëm prej anës së djathtë, pra mund të kërkojmë kufi të djathtë

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \left(5 - \sqrt{x - 3}\right) = \lim_{x \to 3+h} \left(5 - \sqrt{x - 3}\right) = \lim_{h \to 0} \left(5 - \sqrt{3 + h - 3}\right) = 5.$$

3 Cakto vlerën kufitare të funksionit $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ në pikën $x = 1$.

Shihe zgjidhjen:

Funksioni është përkufizuar për $x - 1 \neq 0$, d.m.th. $x \neq 1$, pra $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

- Nëse (x_n) është çfarëdo varg, ashtu që $x_n \neq 1, x_n \in D_f$ dhe $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$, atëherë

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n^2 - 4x_n + 3}{x_n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{(x_n - 1)(x_n - 3)}{x_n - 1} = \lim_{n \to \infty} (x_n - 3) = \lim_{n \to \infty} x_n - 3 = 1 - 3 = -2.$$

Vëren se thjeshtimi i thyesës me $x_n - 1$ është i mundshëm, pasi $x_n \neq 1$, d.m.th. $x_n - 1 \neq 0$.
Gjatë të zgjidhurit e detyrës veprojmë në këtë mënyrë.

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x - 3) = -2.$

(Thjeshtuam me $x - 1$, pasi $x \neq 1$, d.m.th. $x - 1 \neq 0$.)

Gjatë përcaktimit të kufirit të majtë dhe të djathtë të funksionit në pikën $x = 1$, $1 \notin D_f$, kemi:

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-h} \dfrac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1-h} (x - 3) = \lim\limits_{h \to 0} (1 - h - 3) = -2$, përkatësisht

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+h} \dfrac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1+h} (x - 3) = \lim\limits_{h \to 0} (1 + h - 3) = -2.$

Vëre: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

Mbaj mend!

Nëse funksioni $y=f(x)$ është përkufizuar te ndonjë rrethinë e pikës $x=a$ (përveç ndoshta mundet në a) edhe në pikën $x=a$ ka vlerë kufitare, atëherë ai ka vlerë kufitare të majtë dhe të djathtë dhe poashtu

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x).$$

Anasjelltas, nëse funksioni $y=f(x)$ në pikën $x=a$ ka vlerë kufitare të majtë dhe të djathtë nëse $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$, atëherë funksioni $f(x)$ në atë pikë ka vlerë kufitare dhe poashtu vlen barasia

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a} f(x).$$

4 Cakto vlerën kufitare të majtë dhe të djathtë të funksionit $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{për } x>-1 \\ x & \text{për } x<-1 \end{cases}$ në pikën $x=-1$.

B Në ligjërimin e mëtutjeshëm do të shqyrtojmë disa përgjithësime të konceptit vlera kufitare e funksionit.

1. Kufiri i pafundshëm

Le të jetë dhënë funksioni $f(x)$ me domen D_f. Nëse për çdo varg (x_n), ashtu që $x_n\in D_f$, $x_n\neq a$ dhe $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, vargu përkatës $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$,...., $f(x_n)$,... prej vlerave të funksionit $f(x)$ pakufi rritet (zvogëlohet), përkatësisht $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$ $\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)=-\infty\right)$, atëherë themi se funksioni $f(x)$ tenton nga $+\infty$ (përkatësisht $-\infty$), kur x tenton nga a, dhe në këtë rast shkruajmë:

$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ (përkatësisht $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$), fig. 1.

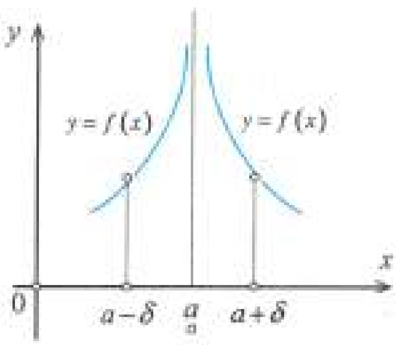
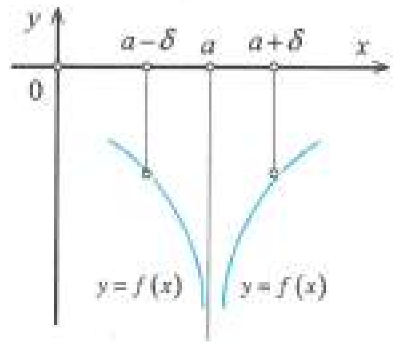


fig. 1



Le të jetë dhënë funksioni $f(x)$ me domen D_f. Nëse për çdo varg (x_n), ashtu që $x_n\in D_f$, $x_n\neq a$ dhe $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, vargu përkatës $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$,... ~~prej~~ vlerave të funksionit $f(x)$ pakufi rritet sipas vlerës absolute, përkatësisht $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$, atëherë funksioni $f(x)$ tenton nga ∞ kur x tenton nga a, d.m.th. ***funksioni $f(x)$ ka kufi të pafundshëm***, në këtë rast shkruajmë:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

5 Trego se funksioni $f(x)=\frac{1}{x}$ ka kufi të pafundshëm kur $x\to 0$..

Shihe zgjidhjen:

Domeni i funksionit është $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Le të jetë $x\to 0$ nëpërmjet vargut $x_1=1, x_2=\frac{1}{2}, x_3=\frac{1}{3},\ldots,x_n=\frac{1}{n},\ldots$, d.m.th. x afrohen nga 0 nga e djathta. Atëherë vargu përkatës i vlerave të funksionit është

$$f(x_1)=\frac{1}{1}=1, f(x_2)=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2, f(x_3)=3,\ldots,f(x_n)=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n,\ldots$$

Është e qartë, vargu $f(x_n)\to+\infty$ kur $n\to\infty$, pra $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.

Nëse $x\to 0$ nëpërmjet vargut $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=-\frac{1}{3},\ldots,\ x_n=-\frac{1}{n},\ldots$, d.m.th. x afrohet nga 0 nga e majta, atëherë vargu përkatës i vlerave të funksionit $f(x)$ është

$f(x_1)=\frac{1}{-1}=-1,\ f(x_2)=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2,\ f(x_3)=-3,\ldots,\ f(x_n)=-n,\ldots$, pra $\frac{1}{x}\to-\infty$ kur $x\to 0^-$, d.m.th.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Mbaj mend!

Funksioni $\frac{1}{x}$ pakufi rritet sipas vlerës absolute në pikën $x=0$, d.m.th.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

6 Cakto kufirin e funksionit $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ në pikën $x=1$.

Përcille zgjidhjen:

Funksioni është përkufizuar për $x-1\neq 0$, d.m.th. për $x\neq 1$, pra $D_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Për ato shkaqe do t'i caktojmë kufirin e majtë dhe të djathtë kur $x\to 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1-h}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{1-h+1}{1-h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{2-h}{-h}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1+h}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h+1}{1+h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{2+h}{h}=+\infty.$$

Domethënë, funksioni nuk ka vlerë kufitare kur $x\to 1$, por ka kufi të majtë të pakufishëm dhe kufi të djathtë të pakufishëm (ato nuk janë të barabartë). Funksioni pakufi rritet sipas vlerës absolute në pikën $x=1$, d.m.th.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty.$$

2. Kufiri në pikën e pafundshme

Domeni D_f i funksionit $f(x)$ le të jetë bashkësi e pafundshme dhe le të jetë (x_n) varg, ashtu që $x_n \in D_f$ dhe $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ (ose $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ose $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$). Nëse për çdo varg (x_n) që e ka vetinë paraprake, vargu përkatës $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$ është konvergjent dhe e ka kufirin A, d.m.th

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A,$$

themi se $f(x)$ tenton nga A kur x tenton nga ∞ (ose $-\infty$, ose $+\infty$) d.m.th. ***funksioni $f(x)$ ka vlerë kufitare në pikën e pafundshme*** dhe shkruajmë

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad (\text{ose } \lim_{x\to\infty} f(x) = A, \text{ ose } \lim_{x\to\infty} f(x) = A,).$$

7 Vërteto se: a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2$; b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{2x^2-3} = \frac{3}{2}$.

Shihe zgjidhjen:

a) Vargu përkatës prej vlerave të funksionit $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$, për vargun $(x_n), x_n \in D_f$ dhe

$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ me anëtarin e përgjithshëm $f(x_n) = \frac{2x_n - 3}{x_n + 1}$.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n-3}{x_n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x_n}}{1+\frac{1}{x_n}} = 2. \text{ Prandaj, } \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 2.$$

3. Kufiri i pafundshëm në pikën e pafundshme

Domeni D_f i funksionit $f(x)$ le të jetë bashkësi e pakufizuar dhe le të jetë (x_n) varg, ashtu që $x_n \in D_f$ dhe $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Nëse për çdo varg (x_n) që i ka këto veti vargu përkatës

$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ pakufi rritet sipas vlerës absolute, themi se funksioni $f(x)$ tenton nga ∞ kur x tenton nga ∞ (ose $-\infty$, ose $+\infty$) d.m.th. funksioni $f(x)$ ka ***kufi të pafundshëm në pikën e pafundshme*** dhe shkruajmë:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Në mënyrë analoge, përkufizohet: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$,

8 Trego se $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

Shihe zgjidhjen:

Le të jetë $x \to \infty$ nëpërmjet vargut $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ ashtu që $x_n \in D_f$ dhe $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Vargu i vlerave përkatëse të funksionit $f(x_n)$ e $f(x_1) = x_1^2, f(x_2) = x_2^2, f(x_3) = x_3^2, \ldots, f(x_n) = x_n^2, \ldots$ Është e qartë, vargu $f(x_n) \to \infty$ kur $n \to \infty$, d.m.th.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty \qquad \text{ose} \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty.$$

9 Vërteto se $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x-1}{x+1}=\infty$.

Vëre zgjidhjen:

Le të jetë (x_n) varg, ashtu që $x_n \in D_f$ dhe $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\infty$. Atëherë $f(x_n)=\dfrac{x_n^2-2x_n-1}{x_n+1}$, kurse

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2-2x_n-1}{x_n+1}=\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n-2-\dfrac{1}{x_n}}{1+\dfrac{1}{x_n}}=\lim_{n\to+\infty} (x_n-2)=+\infty, \text{ pasi } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n}=0.$$

Prandaj,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty.$$

Detyra:

Njehso vlerën kufitare të majtë dhe të djathtë të funksionit $f(x)$ në pikën a, nëse:

1 a) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$, $a=-1$; b) $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$, $a=1$.

2 a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$, $a=-1$; b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $a=1$.

3 Cakto kufirin: a) $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{3}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{3}{x-2}$.

Njehsoji kufijtë:

4 a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{x-2}$.

5 a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x^2+4}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^2+4}$.

6 a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4}{x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4}{x+1}$.

7 Cakto vlerën kufitare të funksionit $f(x)$ në pikën a, nëse:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$, $a=3$; b) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x}$, $a=0$;

c) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-4}$, $a=\pm2$; ç) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{(x-1)^2}$, $a=1$.

10 OPERACIONET ME VLERAT KUFITARE TË FUNKSIONEVE

Kujtohu!

Nëse (a_n) dhe (b_n) janë vargje konvergjente, ku $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, atëherë konvergjent janë edhe vargjet $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ dhe $a_n \cdot b_n$, por nëse $b_n \neq 0$ dhe $b \neq 0$, atëherë vargu $\dfrac{a_n}{b_n}$ është konvergjent dhe poashtu:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;

ç) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Le të jenë f dhe g dy funksione me domen D_f dhe D_g, përkatësisht. Atëherë, ***shuma*** $f + g$, ***ndryshimi*** $f - g$, ***prodhimi*** $f \cdot g$ dhe ***herësi*** $\dfrac{f}{g}$ janë funksione të përkufizuara në këtë mënyrë:

a) $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$;

b) $f - g : x \mapsto f(x) - g(x)$;

c) $f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$;

ç) $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Funksionet a), b) dhe c) janë të përcaktuara për të gjitha vlerat e x për të cilat janë përcaktuar f dhe g, d.m.th.për $x \in D = D_f \cap D_g$, kurse funksioni $\dfrac{f}{g}$ është përcaktuar për të gjitha vlerat e x për të cilat janë përcaktuar funksionet f dhe g, ku $g(x) \neq 0$, d.m.th. domeni është $D = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g, g(x) = 0\}$.

Përcaktimi i vlerës kufitare të funksionit sipas përkufizimit shpeshherë është punë e ndërlikuar. Me ndihmën e vetive paraprake vargjet konvergjente mund të vërtetohen edhe vetitë përkatëse për kufirin e funksioneve dhe me ndihmën e tyre të lehtësohet gjetja e kufirit të disa funksioneve.

Teorema. Funksionet $f(x)$ dhe $g(x)$ le të jenë përkufizuar në rrethinën e ndonjë pike a, ku në pikën a nuk është e thënur të jenë të përkufizuar. Nëse ekzistojnë kufijtë $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ dhe $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, atëherë

1) $\lim\limits_{x\to a} c = c$;

2) $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \cdot A$;

3) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$. Nëse edhe $B \neq 0$, atëherë

5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Vërtetimi i 3). Nëse (x_n) është çfarëdo varg i cili konvergjon nga a, d.m.th. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ku $x_n \in D_f \cap D_g$, $x_n \neq a$, atëherë $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ dhe $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$, pra prej vetisë të vargjeve konvergjente kemi

$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[f(x_n) \pm g(x_n)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A \pm B.$

Pjesët tjera të teoremës vërtetoji vet

Duhet të dish!

Vlera kufitare e polinomit $P(x)$ në pikën $x = a$ është e barabartë me vlerën e polinomit në atë pikë, d.m.th.

$$\lim_{x\to a} P_n(x) = P(a).$$

4 Me zbatimin e teoremës caktoji vlerat kufitare:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2 - 3x + 4\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x - 3 - \dfrac{3}{x-2}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to -2}(3x+2)\cdot 2^x$; ç) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-4}{\sqrt{x^2-3}}$.

Shihe zgjidhjen:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2 - 3x + 4\right) = \lim\limits_{x\to 1} 2x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 3x + \lim\limits_{x\to 1} 4 = 2\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 3\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 4 = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 4 = 3;$

Në bazë të gjykimit për vlerën kufitare të polinomit drejtpërdrej tmund të shkruajmë:

$$\lim_{x\to 1}\left(2x^2 - 3x + 4\right) = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 4 = 3.$$

5 Caktoji kufijtë: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1}{x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$; c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$; ç) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$.

Shihe zgjidhjen:

Nëse $f(x)$ është funksion racional thyesor dhe nëse $a \in D_f$, atëherë $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)} = f(a).$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1}{x+2} = \dfrac{1^2-3\cdot 1+1}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$; b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9} = \dfrac{-3+3}{(-3)^2-9} = "\dfrac{0}{0}"$.

Pas zëvendësimit të kryer fituam shprehje pa kuptim $"\dfrac{0}{0}"$. Prandaj duhet të kryejmë transformim të shprehjes të cilët do të mundësojnë përcaktimin e kufirit.

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9} = \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to -3}\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6}.$$

Këtu do të bëjmë thjeshtim me $x+3$, kurse ajo lejohet pasi $x \neq -3$ ose $x + 3 \neq 0$.

c) Pasi $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6} = \dfrac{3^2-4\cdot 3+3}{2\cdot 3-6}$ është shprehje e pakuptim $"\dfrac{0}{0}"$, numëruesin do ta zbërthejmë si trinom katror $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, d.m.th. $x^2-4x+3 = (x-3)(x-2)$, ku x_1=3 ose x_2=1janë rrënjë të barazimit $x^2-4x+3=0$. Prej këtu kemi:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{2(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-1}{2} = 1.$$

ç) Pasi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ është shprehje pa kuptim $"\dfrac{0}{0}"$, në këtë rast kryejmë racionalizimin e numëruesit dhe kemi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$ (thjeshtimi me x, pasi $x\neq 0$).

6 Cakto kufijtë: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x^2+x-1\right)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x+1}{x^2+x-1}$.

Përcille zgjidhjen:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x^2+x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=\infty$, pasi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$.

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2+x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=-\infty.$$

7 Caktoji vlerat kufitare: a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{2x}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$.

Shihe zgjidhjen:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{2x}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2\cdot\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{2\cos^2 x}=\dfrac{1}{2}$.

Nëse $f(x)=\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ dhe $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$, atëherë $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)}{\lim\limits_{x\to a}\beta(x)}$ është shprehje pa kuptim $"\dfrac{0}{0}"$.

Nëse, tani, $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\infty$ dhe $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$, atëherë $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ është shprehja $\dfrac{\infty}{\infty}$, vlera e së cilës, gjithashtu, nuk mund të caktohet. Në rastet e këtilla kryejmë disa transformime të caktuara të funksionit $f(x)$, të cilat do të mundësojnë caktimin e kufirit.

Ekzistojnë edhe shprehje të tjera të pa caktuara, si për shembull: $\infty-\infty$, ∞^0, 0^∞, 0^0, 1^∞ etj. Të përmendim se këtu me simbolet $0, 1, \infty, +\infty$ nuk shënohen numra, por me ndihmën e tyre shprehim procese të nevojshme përkatëse. Për shembull, duke shkruar 1^∞ (në pikën a) për funksionin $h=f^g$ kemi se $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, kurse $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Shprehja 1^∞ është e pacaktuar, pra në varshmëri prej funksioneve f dhe g kufiri $\lim\limits_{x\to a}h(x)$ mund të ekziston ose të mos ekziston

Caktoji këto vlera kufitare:

1. a) $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3-5x-7\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4-2x^3+x-1\right)$.

2. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-4}{2x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt[3]{4x^2-3}-\sqrt{2x+6}\right)$.

3. a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x}{x^3-x^2}$.

4. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}$.

5. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^3-4x+1}{2x^3-x+1}$.

6. a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{2x-2}-\dfrac{2-x}{x^2-1}\right)$.

7. a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{2\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 2x)^2}{1-\cos 2x}$.

8. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

11 DISA KUFIJ KARAKTERISTIK

Këtu do t'i caktojmë vlerat kufitare të disa funksioneve të cilat i zbatojmë gjatë njehsimit të vlerave kufitare të funksioneve tjera.

A **1** Cakto vlerën kufitare $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$.

Shihe zgjidhjen:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x}{x\cos x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Vëren se $\dfrac{\sin x}{x}$ shprehje e pacaktuar "$\dfrac{0}{0}$".

Që ta caktojmë vlerën kufitare, pa vërtetim do ta përvetësojmë këtë teoremë:

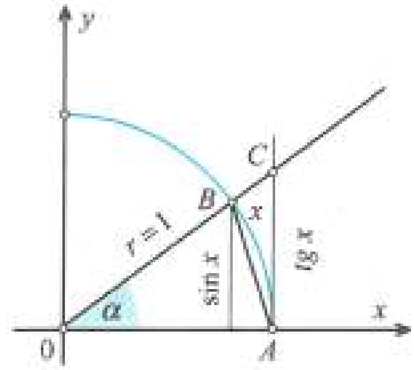
Teorema. Nëse ekziston rrethina ε e pikës a, ashtu që $f(x)\le h(x)\le g(x)$ për çdo $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ edhe pse $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$, atëherë

$$\lim_{x\to a}h(x)=A.$$

2 Është dhënë funksioni $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Vërteto se $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Shihe vërtetimin:

Funksioni $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ është përkufizuar për çdo x prej rrethinës të pikës $x=0$, përveç për pikën $x=0$. Në vizatim është paraqitur vija rrethore me rreze r dhe është shënuar sektor rrethor me kënd qëndror AOB. T'i krahasojmë syprinat e trekëndëshave OAB dhe OAC dhe syprinën e sektorit rrethor OAB. Vërejmë:



$$S_{\Delta OAB}<S_{sr}<S_{\Delta OAC} \text{ përkatësisht } \frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x, \text{ d.m.th.}$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Pasi për çdo $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin x>0$, kemi:

$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$, përkatësisht $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$ (pasi prej $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ vijon $a>b$), d.m.th., $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

Kjo jobarasi është e saktë edhe për $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, pasi $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$, domethënë është e saktë për çdo $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}$. Prandaj, $\lim\limits_{x\to0}\cos x<\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}<\lim\limits_{x\to0}1$, d.m.th. $1<\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}<1$. Sipas teoremës paraprake vijon

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Këtë formulë mund ta përgjithësojmë

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin kx}{x}=k \quad \text{ose} \quad \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin kx}=\frac{1}{k},\ k\neq0.$$

3 Caktoji vlerat kufitare:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; ç) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-3x}{\sin x}$.

Shihe zgjidhjen:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=1$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\sin 2x\cdot\dfrac{1}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cdot\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{3x}{3\cdot\sin 3x}=\dfrac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sin 3x}=\dfrac{2}{3}$;

Në përgjithësi $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=\dfrac{m}{n}$, $m\neq0, n\neq0$.

ç) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{\sin x}-\dfrac{3x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(1-3\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right)=-2$.

B Pa vërtetim do t'i përmendim kufijtë $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ dhe $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

të cilët do t'i shfrytëzojmë për njehsimin e kufijve të llojit 1^{∞}.

4 Cakto vlerë kufitare:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$; ç) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

Shihe zgjidhjen:

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}=e\cdot1^{2}=e;$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot3}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=e^{3};$$

Vëre!

Formulat paraprake mund të përgjithësohen, d.m.th.

$$\lim_{\substack{f(x)\to\infty\\ \text{kur } x\to\infty}}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e \quad\text{ose}\quad \lim_{\substack{f(x)\to0\\ \text{kur } x\to\infty}}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e.$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}(-6)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right)^{-6}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right)^{-6}=e^{-6};$$

ç) $$\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}(1+(-2x))^{\frac{3}{x}\cdot\frac{-2}{-2}}=\lim_{x\to0}(1+(-2x))^{\frac{-6}{-2x}}=\lim_{x\to0}\left((1+(-2x))^{-\frac{1}{2x}}\right)^{-6}=\left(\lim_{x\to0}(1+(-2x))^{-\frac{1}{2x}}\right)^{-6}=e^{-6}.$$

Detyra:

Caktoji vlerat kufitare $(1-8)$:

1 a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin4x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^{2}}$.

2 a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$.

3 a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin2x}{1-\cos x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin x}$.

4 a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos3x}{x^{2}}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{x\sin2x}$.

5 a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{x}$.

6 a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{x+2}$.

7 a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.

8 a) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-3x}$.

12 VIJUESHMËRIA E FUNKSIONIT

Në fig. 1 është paraqitur grafiku i funksionit $y=\frac{1}{2}x^2$, kurse në fig. 2 grafiku i funksionit $y=[x], x\in\mathbb{R}$.

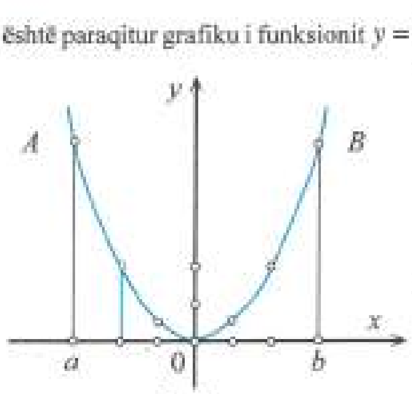


fig. 1

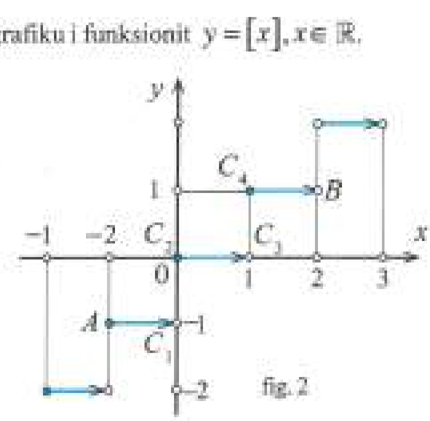


fig. 2

Vëreve se grafiku i funksionit në fig. 1 mund të vizatohet „pa e ngritur lapsin" prej A deri në B. Që të vizatohet grafiku i funksionit në fig. 2 lapsi patjetër duhet të „ngritet" që të arrihet prej pikës C_1 deri te pika C_2 dhe prej pikës C_3 deri te pika C_4. Domethënë, funksioni $y=\frac{1}{2}x^2$ është i vijueshëm në intervalin (a,b), ndërsa tani, funksioni $y=[x]$ është i pavijueshëm në pikat C_1 dhe C_3.

Funksioni $y=\frac{1}{2}x^2$ në çdo pikë $x\in\mathbb{R}$ ka vlerë të caktuar. E njëjta vlen edhe për funksionin $y=[x]$. Për funksionin $y=[x]$ kemi

nëse $0\le x<1$, atëherë $[x]=0$ dhe $\lim\limits_{x\to1^-}[x]=0$, por nëse $1\le x<2$, atëherë $[x]=1$, pra $\lim\limits_{x\to1^+}[x]=1$.

Domethënë, funksioni $y=[x]$ nuk kakufi në pikën $x=1$.

Koncepti për vijueshmërinë e funksionit $f(x)$ në pikën e dhënë a është ngusht e lidhur me vlerën kufitare të funksioinit në pikën e dhënë a.

Përkufizimi. Funksioni $f(x)$ është i vijueshëm në pikën a nëse:

1) $a\in D_f$, d.m.th. $f(a)$ ekziston;

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $f(x)$ ka vlerë kufitare për $x=a$;

3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A=f(a)$.

1 Le të jetë dhënë funksioni $f(x)=\frac{2x}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Shqyrto $f(x)$ a është i vijueshëm në pikën:

a) $a=3$; b) $a=1$.

Zgjidhje:

a) Pasi $3\in D_f$ dhe $\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)=3$, vijon se funksioni është i vijueshëmnë pikën $x=3$.

b) Pasi $1 \notin D_f$ vijon se $f(x)$ nuk është i vijueshëm në pikën (d.m.th. $f(x)$ është ***i pavijueshëm*** në 1 dhe 1 është pikë e pavijimit të funksionit $f(x)$)

- Nëse funksioni $f(x)$, $x \in (a,b)$ është i vijueshëm në çdo pikë prej intervalit (a,b), atëherë themi se ai është ***i vijueshëm në intervalin*** (a,b).
- Nëse funksioni $f(x)$ nuk kënaq njërin prej kushteve 1), 2) ose 3), atëherë funksioni nuk është i vijueshëm në pikën a dhe themi se ai është ***i pavijueshëm në pikën a***, kurse pika a quhet ***pika e pavijimit***.

Funksioni $f(x)=\frac{1}{x}$ është i vijueshëm në çdo pikë $a \neq 0$, pasi

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}, \text{ për } a \neq 0.$$

2 Shqyrto vijueshmërinë e funksionit :

a) $f(x)=\frac{2x^2-3}{x+2}$ në pikën $x=1$; b) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{për } x>0 \\ x & \text{për } x \le 0 \end{cases}$, $x \in R$;

c) $f(x)=[x]$ në pikën $x=2$; ç) $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ në pikën $x=1$.

Shihe zgjidhjen:

a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $1 \in D_f$ dhe $\lim_{x\to 1} f(x)=-1=f(1)$, domethënë funksioni është i vijueshëm në pikën 1.

b) Pasi $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ dhe $f(0)=0$, vijon se funksioni është i pavijueshëm në pikën $x=0$, fig. 3.

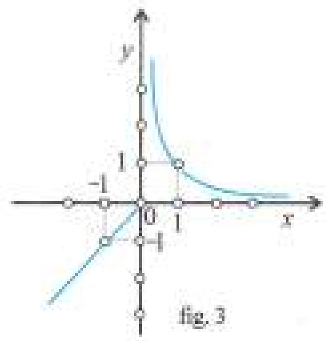


fig. 3

c) Funksioni f është i pavijueshëm në pikën $x=2$, pasi $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}[x]=1$, kurse $\lim_{x\to 2^+}[x]=2$, domethënë funksioni nuk ka vlerë kufitare në pikën $x=2$.

ç) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, pra pasi $1 \notin D_f$ vijon se funksioni $f(x)$ është i pavijueshëm në pikën $x=1$.

3 Shqyrto vijueshmërinë e funksionit: a) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, për $x=0$;

b) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{për } x\neq 0 \\ 1 & \text{për } x=0 \end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{për } x\neq 2 \\ 2 & \text{për } x=2. \end{cases}$

Shihe zgjidhjen:

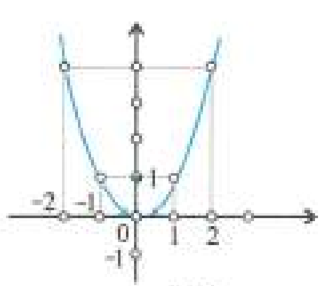


fig. 4

b) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, kurse $f(0)\neq 0$, domethënë pika $x=0$ është pika e pavijimit, pasi kushti $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, nuk është plotësuar fig. 4.

Vijueshmëria e funksioneve është një koncept i rëndësishëm, pra vërtetimi i vijueshmërisë së funksionit vijon

Teorema. Nëse funksionet $f(x), x \in D_f$ dhe $g(x), x \in D_g$ janë të vijueshme në pikën $a, a \in D_f \cap D_g$, atëherë në pikën a janë të vijueshëm edhe funksionet:

a) $y = f(x) \pm g(x)$; b) $y = f(x) \cdot g(x)$; c) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \ (g(a) \neq 0)$.

Vërtetim. Prej vijueshmërisë së funksioneve $f(x)$ dhe $g(x)$ në pikën a kemi

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ dhe } \lim_{x \to a} g(x) = g(a),$$

kurse prej vetisë për vlerë kufitare të shumës së funksioneve kemi

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a),$$

d.m.th. $f + g$ është funksion i vijueshëm në pikën $x = a$.

Gjykimet tjera vërtetoji vet.

Prej teoremës vijon:

- Çdo funksion i plotë racional, (d.m.th. çdo polinom) $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ është i vijueshëm në çdo pikë $a \in \mathbb{R}$, pasi është përkufizuar në a, ekziston kufi në a dhe $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- Funksioni racional thyesor $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ku $P(x)$ dhe $Q(x)$ janë polinom është i vijueshëm në çdo pikë $x = a$ në të cilën $Q(a) \neq 0$.

4 Cakto në cilat pika funksioni është i pavijueshëm

a) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$; b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$; c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{për } x \neq 0 \\ -2 & \text{për } x = 0 \end{cases}$; ç) $y = \operatorname{tg} x$.

Përgjigje:

b) $x^2 - 4 = 0$; në $x = 2$ dhe $x = -2$ $f(x)$ është i pavijueshëm.

5 Në cilin interval funksioni është i vijueshëm

a) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$; b) $y = \dfrac{x+2}{x^2+4}$; c) $y = \dfrac{5x-1}{x^2+2x-3}$?

- Të vijueshme janë funksionet

$y = a^x$, $a > 0$, për çdo $x \in \mathbb{R}$;

$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, për çdo $x \in \mathbb{R}^+$;

$y = \sin x$, për çdo $x \in \mathbb{R}$;

$y = \cos x$, për çdo $x \in \mathbb{R}$.

Detyra:

1. Shqyrto vijueshmërinë e funksioneve

a) $y = 2x + 1$, në pikën $x = 2$; b) $y = \dfrac{1}{x}$, në pikën $x = 0$.

2. Vërteto se funksioni $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ është i pavijueshëm në pikën $x = 0$.

(3) Vërteto se funksioni $f(x)=x\cdot\operatorname{sgn}x$ është i vijueshëm në pikën $x=0$.

(4) Vërteto se funksioni $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 2, & x=1\\ 4-x, & x>1\end{cases}$ është i pavijueshëm në pikën $x=1$.

(5) Shqyrto vijueshmërinë e funksionit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{për } x\ne 0\\ A & \text{për } x=0.\end{cases}$

Cili numër duhet të jetë A, pra $f(x)$ të jetë i vijueshëm në pikën $x=0$?

(6) Shqyrto vijueshmërinë e funksionit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{për } x<0\\ x & \text{për } x\ge 0\end{cases},\ x\in R$

(7) Është dhënë funksioni $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{2(x^3-1)}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Vërteto se funksioni është i vijueshëm për çdo $x\ne 1$. A mundet ky funksion të jetë i përcaktuar për $x=1$, ashtu që të jetë i vijueshëm në pikën $x=1$?

(8) Vërteto se funksioni $y=\sin x$ është i vijueshëm në pikën $x=a\in\mathbb{R}$.

13 ASIMPTOTAT E GRAFIKUT TË FUNKSIONIT

Kujtohu!

- Në fig. 1 është paraqitur grafiku i funksionit $y=2^x$.

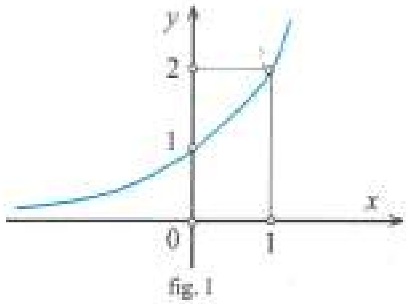


fig. 1

- Boshti x, d.m.th. drejtëza $y=0$ është asimptotë horizontale e grafikut të funksionit.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$, kurse $\lim\limits_{x\to\infty}2^x=\infty$.

- Në fgig. 2 është paraqitur grafiku i funksionit $y=\log_2 x$.

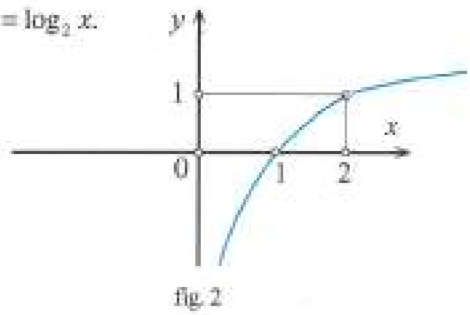


fig. 2

- Boshti y, d.m.th. drejtëza $x=0$ është asimptotë vertikale e grafikut të funksionit.
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_2 x=-\infty$.

- Cilat drejtëza janë asimptota vertikale të funksionit $y=tg\,x$?

1 Është dhënë funksioni $f(x)=\frac{1}{2}x-1$. Skicoje grafikun e funksionit $y=\frac{1}{f(x)}$.

Shqyrtoje zgjidhjen:

Grafiku i funksionit është paraqitur në fig. 3 (shihe detyrën 2 c te mësimi 7 prej kësaj teme).

Vëreve se pikat e drejtëzave $x=2$ dhe $y=0$ afrohen deri te degët përkatëse të grafikut për derisa ato largohen nga fillimi i koordinatave. Drejtëzat e këtilla quhen ***asimptota***.

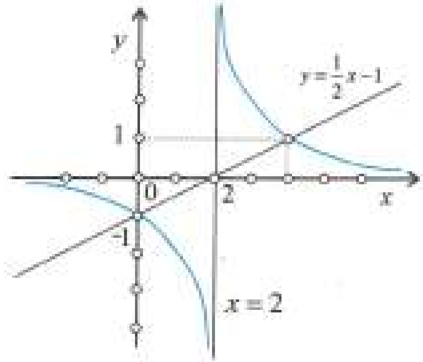


fig. 3

Le të jenë dhënë drejtëza p, grafiku i funksionit $f(x)$ dhe pika e ndryshueshme $M(x, f(x))$, fig. 4.

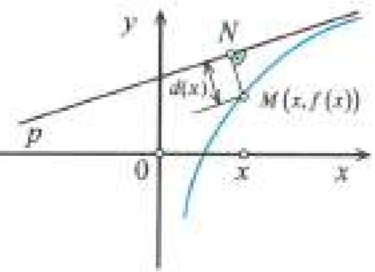


fig. 4

Përkufizimi. Nëse largësia d prej pikës së ndryshueshme $M(x, f(x))$ që shtrihet në lakoren $y=f(x)$ deri te drejtëza e caktuar p tenton nga zero kur M pafundësisht largohet prej fillimit të koordinatave, d.m.th.

$$\lim_{OM\to\infty} d(x)=0,$$

atëherë drejtëza p quhet ***asimptotë*** e lakores.

Për atë themi se:

1. ***asimptota vertikale*** është paralele me boshtin y;
2. ***asimptota horizontale*** është paralele me boshtin x;
3. ***asimptota e pjerrtë*** nëse nuk është paralele me asnjërin prej boshteve koordinative.

Mbaj mend!

Le të jetë dhënë funksioni $f(x)$. Nëse:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$,

atëherë drejtëza $x=a$ është asimptotë vertikale;

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=n$,

atëherë drejtëza $y=n$ është asimptotë horizontale;

Simboli $x\to\pm\infty$ domethënë duhet të shqyrtohet kufiri kur $x\to+\infty$ dhe kur $x\to-\infty$.

2 Është dhënë funksioni $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}$.

a) Cakto asimptotat horizontale dhe vertikale të grafikut për funksionin e dhënë.

b) Skicoje grafikun e funksionit.

Shihe mënyrën:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}$, kurse $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=1$, d.m.th. drejtëza $y=1$

është asimptotë horizontale.

- Pikat e pavijimit janë zgjidhjet e barazimit $x^2+2x-3=0$, pra ato janë $x=1$ dhe $x=3$.

Do ta shqyrtojmë sjelljen e funksionit në rrethinën e pikave 1 dhe -3, kurse për atë shkak e caktojmë kufirin e majtë dhe të djathtë në pikat 1dhe -3.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1-h}\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}=\lim_{h\to 0}\frac{(1-h)^2-2(1-h)}{(1-h)^2+2(1-h)-3}=\lim_{h\to 0}\frac{-1+h^2}{-4h+h^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1+h}\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-2(1+h)}{(1+h)^2+2(1+h)-3}=\lim_{h\to 0}\frac{-1+h^2}{4h+h^2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to -3-h}\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}=\lim_{h\to 0}\frac{15+8h}{4h+h^2}=+\infty,\ \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to -3-h}\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}=\lim_{h\to 0}\frac{15-8h}{-4h+h^2}=-\infty.$$

Domethënë, drejtëzat $x=-3$ dhe $x=1$ janë asimptota vertikale.

- Nëse i caktojmë pikëprerjet e grafikut me boshtet e koordinatave, do të mundemi më lehtë ta vizatojmë grafikun e funksionit.

Për $x=0$, $f(0)=0$, pra grafiku kalon nëpër fillimin e koordinatave $(0,0)$.

Për $f(x)=0$ kemi $x^2-x=0$, d.m.th. $x=0$ ose $x=2$, domethënë grafiku e pret boshtinet në pikat $O(0,0)$ dhe $A(2,0)$. Grafiku është paraqitur në fig. 5.

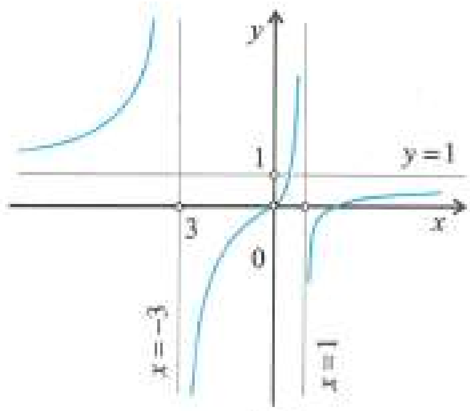


fig. 5

- Për drejtëzën $x=a$ të jetë asimptotë vertikale e funksionit $f(x)$, mjafton të jetë e pafundshme vetëm njëri prej kufijve të njëanshëm (i majti ose i djathti) në atë pikë.

Për shembull, te detyra 2 b) nga mësimi i kaluar kemi:

$$x=0 \text{ nëse } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty, \text{ kurse } \lim_{x\to 0^-} f(x)=0.$$

3 Caktoji asimptotat horizontale dhe vertikale të funksionit $y=\dfrac{2x^2+3}{x^2-1}$, kurse pastaj skicoje grafikun e funksionit.

Te kufijtë me të cilët i caktojmë asimptotat që janë paralele me boshtet koordinative përmban edhe kufij të llojit

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty.$$

Nëse për funksionin e dhënë $f(x)$ ekziston kufi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, atëherë është e mundshme, por jo, të ekziston drejtëz e llojit $y=kx+n$ e cila është asimptotë e grafikut të funksionit $y=f(x)$.

Le të jenë dhënë drejtëza $y = kx + n$ dhe grafiku i funksionit $f(x)$, fig. 6.

Nëse pika $N(x, y(x))$ është prej drejtzës, kurse pika $M(x, f(x))$ prej grafikut të $f(x)$, atëherë drejtëza $y = kx + n$ është ***asimptotë e pjerrtë*** e lakores f, nëse largësia

$$d = \overline{MN} = f(x) - y(x)$$

tenton nga zero kur x tenton në pakufi, përkatësisht nëse ekziston të paktën njëri prej kufijve:

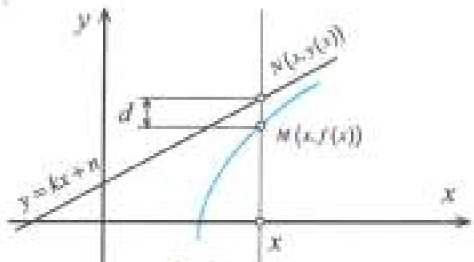


fig. 6

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (kx+n)] = 0 \text{ ose } \lim_{x\to-\infty}[f(x) - (kx+n) = 0.$$

Nëse $k = 0$, atëherë drejtëza $y = n$ është asimptotë horizontale.

Nëse drejtëza $y = kx + n$ është asimptotë e pjerrtë, atëherë k dhe n do t'i caktojmë në këtë mënyrë:

Së pari barasinë e pjesëtojmë me x, $x \neq 0$ dhe fitojmë

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x) - (kx+n)}{x} = 0, \text{ pra } \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{n}{x} \right) = 0, \text{ d.m.th } k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ pasi } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{n}{x} = 0.$$

Prej barasisë $\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - (kx+n) \right) = 0$ vijon $n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx \right)$.

Nëse ekzistojnë kufijtë paraprak kur $x \to +\infty$, atëherë kemi ***asimptotë të pjerrtë të djathtë***, por nëse ekzistojnë ato kufi kur $x \to -\infty$, atëherë kemi ***asimptotë të pjerrtë të majtë***. Në mënyrë të ngjashme përkufizohet asimptota horizontale ***e djathtë*** dhe ***e majtë***, përkatësisht asimptota vertikale ***e sipërme*** dhe ***e poshtme***.

4 Caktoji asimptotat e lakores $f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Shihe zgjidhjen:

a) Asimptota horizontale:

$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x+2} = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x+2} = -\infty$, që do të thotë se funksioni nuk ka asmptotë horizontale.

b) Asimptota vertikale:

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2+h} \frac{2x^2}{x+2} = \lim_{h\to0} \frac{2(-2+h)^2}{-2+h+2} = \infty$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2-h} \frac{2x^2}{x+2} = \lim_{h\to0} \frac{2(-2-h)^2}{-2-h+2} = -\infty$,

domethënë drejtëza $x = -2$ është asimptota vertikale.

c) Asimptota e pjerrtë $y = kx + n$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2+2x} = 2.$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x+2}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-2x^2-4x}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x}{x+2}=-4.$$

Drejtëza $y=2x-4$ është asimptotë e lakores së dhënë.

Që ta caktojmë pozitën e ndërsjellë të lakores dhe asimptotës së pjerrtë , do ta shqyrtojmë ndryshimin ndërmjet ordinatave të pikave përkatëse prej grafikëve, d.m.th.. $f(x)-y=\frac{2x^2}{x+2}-(2x-4)=\frac{8}{x+2}$.

- $f(x)-y>0$, nëse $\frac{8}{x+2}>0$, d.m.th. nëse $x>-2$.

Domethënë, për $x>-2$, $f(x)>y$, pra grafiku i funksionit $f(x)$ është mbi asimptotën $y=2x-4$.

- $f(x)-y<0$ nëse $\frac{8}{x+2}<0$, d.m.th. $x<-2$.

Domethënë, për $x<-2$, $f(x)<y$, pra grafiku i funksionit $f(x)$ është nën asimptotën $y=2x-4$.

Grafiku është paraqiturnë fig. 7.

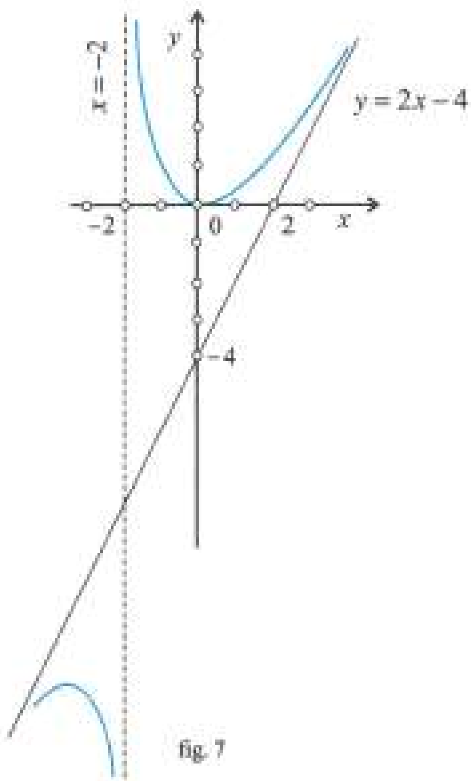


fig. 7

Detyra:

Cakto asimptotat e lakores:

1. a) $y=\frac{x}{x-2}$; b) $y=\frac{x^2+1}{x-2}$.

2. a) $y=x+1+\frac{1}{x^2}$; b) $y=\frac{1}{x^2+1}$.

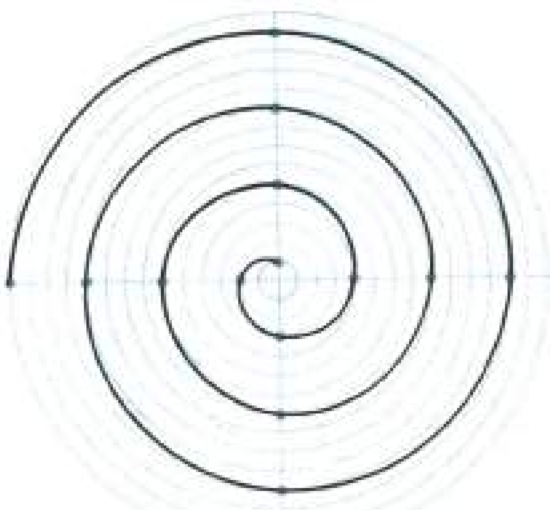
3. a) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$; b) $y=\frac{x^3}{2(1+x^2)}$.

4. a) $y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$; b) $y=x\cdot e^{-x}$.

TEMA 3

NJEHSIMI DIFERENCIAL

Në këtë temë do të mësosh:



1 RRITJA E FUNKSIONIT. DERIVATI I FUNKSIONIT

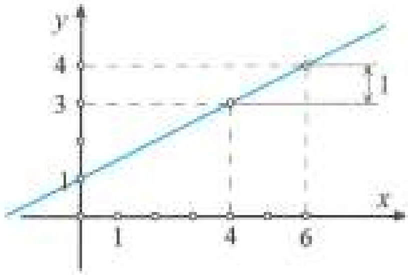
Kujtohu!

- Nëse argumenti x te funksioni $y = 0,5x + 1$ fiton vlerë 4, atëherë vlera e funksionit është 3.

- Për sa do të rritet funksioni nëse argumenti x rritet prej 4 në 6?

Zgjidhje:

$(0,5 \cdot 6 + 1) - (0,5 \cdot 4 + 1) = 1$



- Funksioni $y = f(x)$ është i vijueshëm në pikën $x = a$, nëse dhe vetëm nëse $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- Provo se funksioni $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ a është i vijueshëm për $x = 2$.

A Funksioni f le të jetë përcaktuar në intervalin (a,b) dhe le të jetë $x_0, x \in (a,b)$.

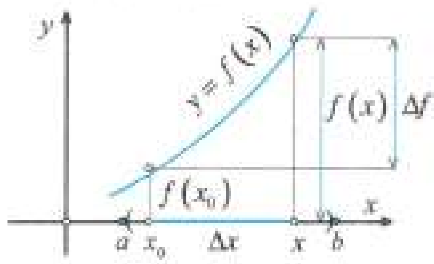
Vlerat përkatëse të funksionit f për x dhe x_0 janë $f(x)$ dhe $f(x_0)$.

- Ndryshimi $x - x_0$ quhet ***rritja*** e argumentit dhe shënohet me Δx, d.m.th. $\Delta x = x - x_0$.

- Ndryshimi i vlerave përkatëse të funksionit $f(x) - f(x_0)$ quhet ***rritja e funksionit*** dhe shënohet me Δf, d.m.th.

$$\Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Nëse funksioni është dhënë me barazimin $y = f(x)$, atëherë $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.



Prej $x - x_0 = \Delta x$ vijon se $x = x_0 + \Delta x$, pra rritja e funksionit mund të shkruhet në këtë formë

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

1 Caktoji rritjet Δx dhe Δf të $f(x) = x^2$ në pikën $x_0 = 2$, nëse: a) $x = 1,9$; b) $x = 2,1$.

Zgjidhje:

- a) $\Delta x = x - x_0 = 1,9 - 2 = -0,1$; $\quad \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 - 0,1) - f(2) = 1,9^2 - 2^2 = -0,39$.
- b) $\Delta x = x - x_0 = 2,1 - 2 = 0,1$; $\quad \Delta f = f(2,1) - f(2) = 2,1^2 - 2^2 = 0,41$.

2 Është dhënë funksioni $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Cakto rritjen Δf të funksionit f nëse:

a) $x_0 = 3$, $\Delta x = 1$. b) $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,5$.

Zgjidhje:

- a) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(3+1) - f(3) = f(4) - f(3) = (4^2 - 5 \cdot 4 + 6) - (3^2 - 5 \cdot 3 + 6) = 2 - 0 = 2$.

Deri te rezultati i njëjtë do të arrijmë edhe ndryshe. Së pari e caktojmë rritjen Δf për çfarëdo vlera të argumentit x dhe Δx, kurse pastaj i zëvëndësojmë vlerat e tyre.

- $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - 5(x+\Delta x) + 6 - (x-5x+6) = (2x-5)\Delta x + (\Delta x)^2$.
- Për $x=x_0=3$ dhe $\Delta x=1$ kemi: $\Delta f = (2\cdot 3-5)\cdot 1 + 1^2 = 2$.

3 Cakto rritjen e funksionit $y = \dfrac{x}{x+1}$ nëse: a) $x_0 = -3,\ \Delta x = 1$; b) $x_0 = 3,\ \Delta x = -0,5$.

Shihe zgjidhjen:

- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \dfrac{x+\Delta x}{(x+\Delta x)+1} - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{\Delta x}{(x+1)(x+\Delta x+1)}$.
- a) Për $x=x_0=-3$ dhe $\Delta x=1$, $\Delta y = \dfrac{1}{(-3+1)(-3+1+1)} = \dfrac{1}{2}$.

4 Cakto rritjen e funksionit:

a) $f(x)=x^2-2x$ nëse $x_0=2$ dhe $\Delta x=-1$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nëse $x_0 = -2$ dhe $\Delta x = 0,5$.

B

5 Funksioni $f(x) = x^2 + 1$ është përkufizuar për çfarëdo numër real.

a) Cakto rritjen Δf të funksionit f në çfarëdo pikë x.

b) Cakto herësin e rritjes së funksionit dhe rritjes së argumentit, d.m.th. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

c) Cakto vlerën kufitare të $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, kur $\Delta x \to 0$ d.m.th. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Cakto vlerën kufitare nëse $x = 3$.

Zgjidhje:

- a) $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$

$$\Delta f = \left((x+\Delta x)^2+1\right) - (x^2+1)$$

$$\Delta f = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 1 - x^2 - 1$$

$$\Delta f = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x+\Delta x);$$

- b) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;
- c) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim (2x+\Delta x) = 2x$.

Për $x=3$, kemi $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2x = 2\cdot 3 = 6$.

Vëreve se $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, në pikën $x=3$ ka vlerë.Për numrin 6.Themi se funksioni ka derivat në pikën $f(x) = x^2 + 1$ në pikën $x = 3$.

Përkufizimi. Nëse ekziston vlera kufitare e herësit prej rritjes së funksionit $y = f(x)$ dhe rritjes së argumentit në pikën $x_0 \in D_f$, kur rritja e argumentit tenton nga zero, atëherë ai numër quhet ***derivati i funksionit $f(x)$ në*** pikën x_0 dhe e shënojmë

$$f'(x_0) \text{ ose } y'(x_0).$$

Prandaj:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Pasi x_0 mund të jetë cilado pikë prej D_f, atëherë për derivat të funksionit $f(x)$ në çfarëdo pikë $x\in D_f$ kemi:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Nëse funksioni $f(x)$ është dhënë me barazimin $y=f(x),\ x\in D_f$, atëherë derivatin e shënojmë edhe me y'.

6 Cakto derivatin e funksionit:

a) $y=x^2-3x$ në pikat: $x_0=-2$; $x_0=1,5$; $x_0=3,5$.

b) $y=(x+2)^2$, në çfarëdo pikë $x\in\mathbb{R}$.

Zgjidhje:

a) E caktojmë Δy, d.m.th.

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\left((x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)\right)-\left(x^2-3x\right)=\Delta x(2x-3+\Delta x).$$

E caktojmë $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, d.m.th. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x-3+\Delta x)}{\Delta x}=2x-3+\Delta x.$

E caktojmë $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, d.m.th. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x-3+\Delta x)=2x-3.$

Për $x=x_0$, $y'(x_0)=2x_0-3$. Për $x_0=-2$, $y'(-2)=2\cdot(-2)-3=-7$.

Për $x_0=1,5$, $y'(1,5)=2\cdot 1,5-3=0$ etj.

7 Cakto derivatin e funksionit: a) $y=\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; b) $y=\frac{x}{x-1},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Vëre mënyrën:

a) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)\cdot x}.$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)\cdot x}}{\Delta x}=-\frac{1}{(x+\Delta x)\cdot x}.$

$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{(x+\Delta x)\cdot x}=-\frac{1}{x^2}$, D.m.th. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$

Për funksionin $f(x)=\sqrt{x},\ (x\geq 0)$ në pikën $x=0$ kemi:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{0+\Delta x}-\sqrt{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}.$$

Funksioni $f(x)=\sqrt{x}$ nuk ka derivat në pikën $x=0$, edhe pse është i përkufizuar në atë pikë, pasi nuk ekziston $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$.

Teorema. Nëse funksioni $f(x)$ ka derivat në pikën x_0,atëherë ai është i vijueshëm në atë pikë.

Vërtetim. Duhet të vërtetojmë se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Të supozojmë se $f'(x_0)$ ekziston. Atëherë

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Prej $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0$, vijon $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, që do të thotë se funksioni $f(x)$ është i vijueshëmnë pikën x_0.

Gjykimi i anasjelltë nuk është e thënë të jetë i saktë, d.m.th. nëse funksioni $f(x)$, $x\in D_f$ është i vijueshëm në pikën $x_0\in D_f$, atëherë ai nuk është e thënë të jetë diferenciabil në pikën x_0. Këtë do ta tregojmë te funksioni $f(x)=|x|$, i cili është i vijueshën në pikën $x\in\mathbb{R}$, por në pikën $x_0=0$ nuk është diferenciabil.

Funksioni $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ është i vijueshëm në pikën $x_0=0$, pasi

$\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, d.m.th. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, kurse kjo do të thotë se funksioni është diferenciabil për çdo $x\in\mathbb{R}$.

Do të tregojmë se funksioni $f(x)=|x|$ në pikën $x_0=0$ nuk ka derivat.

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0.\end{cases}$$

Domethënë, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nuk ekziston,d.m.th. $f'(0)$ nuk ekziston.

Mënyra se si arrihet deri te derivati $f'(x)$ i funksionit $f(x)$ quhet ***diferencim*** i atij funksioni.

Pjesa e matematikës që i studion derivatet e funksioneve dhe zbatimin e tyre quhet ***njehsimi diferencial***.

C Ngjashëm sikurse konceptet vlera kufitare e majtë dhe e djathtë, pë rfunksionin $f(x)$ mund të përkufizohet derivati i majtë dhe i djathtë.

Funksioni $f(x)$ le të jetë përkufizuar për $x=x_0$. Nëse ekziston $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'_+(x_0)$ edhe pse është i fundshëm, atëherë atë e quajmë ***derivat i djathtë*** i funksionit $f(x)$ në pikën x_0, por e shënojmë me $f'_+(x_0)$. Në mënyrë analoge, nëse ekziston $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'_-(x_0)$, atëherë atë e quajmë ***derivat i majtë*** i funksionit $f(x)$ në pikën x_0 dhe e shënojmë me $f'_-(x_0)$. Derivati i majtë dhe i djathtë i funksionit $f(x)$ me emrin e përbashkët e quajmë ***derivat të njëanshëm***.

Vëre, funksioni $f(x)=|x|$ në pikën $x=0$ ka derivat të majtë dhe të djathtë, por të ndryshëm,d.m.th. $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, prandaj funksioni $f(x)=|x|$ nuk ka derivat në pikën $x=0$.

Mbaj mend!

Nëse $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ dhe $f(x)$ është i vijueshëm në pikën x_0, atëherë funksioni ka derivat në atë pikë dhe

$$f'_-(x_0)=f'(x)=f'_+(x_0).$$

Për funksionin $f(x)$ themi se është ***diferenciabil*** në pikën $x_0\in D_f$, nëse ekziston derivati $f'(x_0)$.

Nëse $f'(x_0)$ nuk ekziston, funksioni $f(x)$ nuk është diferenciabil në pikën x_0.

Çdo funksion diferenciabil është gjithmonë i vijueshëm, por ka edhe funksione të vijueshme që nuk janë diferenciabile.

- Funksioni $f(x)$ është diferenciabil në intervalin (a,b), nëse është diferenciabil në çdo pikë të atij intervali.

8 Shqyrto diferenciabilitetin e funksionit $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$, në pikën $x_0=1$.

Zgjidhje:

- Për $0\le x\le 1$ dhe $x_0=1$ kemi: $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1+\Delta x-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1.$

- Për $x>1$ dhe $x_0=1$ kemi:

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

Pasi $f'_-(1)\ne f'_+(1)$, funksioni nuk është diferenciabil në pikën $x_0=1$. Vëren se funksioni $f(x)$ ka ndërprerje në pikën $x_0=1$.

Bashkësia e të gjitha vlerave të argumentit x prej fushës së përkufizimit të funksionit f, në të cilin ai është diferenciabil quhet ***fusha e diferenciabilitetit*** D'_f të funksionit f. Poashtu gjithmonë D'_f është nënbashkësi e D_f.

Përshembull, për $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x^2, & x\ge 0 \end{cases}$, $D_f=\mathbb{R}$, në pikën $x_0=0$ kemi $f'_-(0)=-1$, a $f'_+(0)=0$.

Domethënë $f'(0)$ nuk ekziston, pra është $D'_f=R\setminus\{0\}\ne D_f=R$, d.m.th. $D'_f\subset D_f$.

Mbaj mend!

Nëse funksioni $f(x)$ është diferenciabil në çdo pikë x_0 prej intervalit (a,b), atëherë derivati $f'(x)$ është funksion i përkufizuar në atë interval.

Vëre!

Gjatë përcaktimit të derivatit sipas përkufizimit të funksionit $f(x)$, $x \in D_f$ veprojmë në këtë mënyrë:

1. E caktojmë rritjen e funksionit $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$;
2. E caktojmë $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;
3. E njehsojmë $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Detyra:

1. Brinjët e drejtkëndëshit janë 15 m dhe 20 m. Cakto rritjen e perimetrit dhe rritjen e syprinës së drejtkëndëshit:

   a) brinja më evogël të zmadhohet për $0{,}11m$; b) brinja më e madhe të zmadhohet për $0{,}2m$.

2. Rrezja e rrethit është e barabartë me $2cm$. Cakto gabimin gjatë njehsimit të syprinës së tij nëse gjatësia e rrezes është:

   a) Δr; b) $0{,}2cm$; c) $0{,}1cm$.

3. Cakto rritjen e funksionit $f(x)$ në pikën x_0, nëse:

   a) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}2$; b) $f(x) = 2x^2 - 3$, $x_0 = 3$, $\Delta x = -0{,}2$;

   c) $f(x) = 3x + 1$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 0{,}01$; ç) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$.

4. Cakto rritjet Δx dhe Δy në pikën $x=0$, nëse:

   a) $f(x) = 4x - x^2$, $x_0 = 2{,}5$; $x = 2{,}6$; b) $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $x_0 = 1{,}22$; $x = 1{,}345$;

   c) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}$; $x = \dfrac{3\pi}{4}$; ç) $f(x) = tg\, x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $x = \dfrac{\pi}{3}$.

5. Cakto derivatin e funksionit:

   a) $y = x + 2$, në pikë $x_0 = 3$; b) $y = x^2 - 3$, në pikën $x_0 = 2$;

   c) $y = x^3$, në pikën $x_0 = -1$; ç) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, në pikën $x_0 = 1$.

6. Cakto derivatin e majtë dhe të djathtë të funksionit

   a) $y = |x+1|$, në pikën $x = -1$; b) $y = |x-1|$, në pikën $x = 1$;

   c) $y = x^{\frac{1}{3}}$, në pikën $x = 0$.

7. Shqyrto diferenciabilitetin efunksionit

   a) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^+$; b) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x \le 1 \\ x^2 - x, & x > 1 \end{cases}$, në pikën $x_0 = 1$;

   c) $f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ 1 - x, & x \ge 1 \end{cases}$, në pikën $x_0 = 1$.

2 DERIVATI I DISA FUNKSIONEVE ELEMENTARE

Kujtohu!

- Cilët janë funksionet elementare?

- $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{n}b^n.$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$
- $\log A - \log B = \log\frac{A}{B},\ A>0, B>0.$
- $n\log A = \log A^n,\ A>0.$

Përcaktimi i derivatit sipas përkufizimit prej ndonjë funksioni shpeshherë është punë e gjatë dhe e ndërlikuar. Këtu do t'i caktojmë sipas përkufizimit derivatet e disa funksioneve, të cilat duhet t'i dijmë si „tabelën e shumëzimit". Më tu je do të kemi parasysh këtë:

- Nëse funksioni është dhënë me ndonjë shprehje analitike, pa u theksuar domeni, do të llogarisim se domeni përbëhet prej të gjithë numrave realë për të cilin ajo shprehje analitike ka kuptim.

1. *Derivati i konstantes*

- Le të jetë $f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Atëherë $f(x+\Delta x)=c$, pra $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0$, d.m.th.

$$c'=0.$$

2. *Derivati i funksionit* $f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N}$

Rritja $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, i.e. $\Delta f = (x+\Delta x)^n - x^n$.

Nëse $(x+\Delta x)^n$ e zbërthejmë sipas formulës së binomit, kemi

$$(x+\Delta x)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + \binom{n}{n}(\Delta x)^n$$

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n$$

$$\Delta f = (x+\Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + ... + (\Delta x)^{n-1}\right)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}\right) = nx^{n-1},\ \text{d.m.th.}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

1 Duke e zbatuar teoremën paraprake cakto derivatin e funksionit:

a) $f(x)=x$; b) $f(x)=x^2$; c) $f(x)=x^5$.

Zgjidhje:

a) $f'(x)=x'=1\cdot x^{1-1}=1\cdot x^0=1$; b) $f'(x)=2\cdot x^{2-1}=2x$; c) $f'(x)=2\cdot x^{5-1}=5x^4$.

Funksioni $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$ quhet ***funksioni i fuqisë***, kurse formula $\left(x^n\right)'=n\,x^{n-1}$ vlen për çdo numër real. Këtë gjykim nuk do ta vërtetojmë, kurse zbatimin e saj do ta vështrojmë në shembuj.

2 Cakto derivatin e funksionit: a) $f(x)=\sqrt{x}$; b) $y=\sqrt[3]{x^2}$; c) $y=\frac{1}{x}$; ç) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Përcille zgjidhjen:

a) $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; b) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

c) $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-1\cdot x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}$; ç) $f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}-1}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$.

3. *Derivati i funksionit eksponencial* $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.\quad \text{Pasi } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a \ \text{ Kemi}$$

$f'(x)=a^x\cdot\ln a$, d.m.th. $\boxed{\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a.}$ Nëse $a=e$, atëherë $\boxed{\left(e^x\right)'=e^x.}$

4. *Derivati i funksionit logaritmik* $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$.

$$\Delta y=f(x+\Delta x)=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{x}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.\quad \text{Pasi } \lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\log_a e$$

vijon se $y'(x)=\frac{1}{x}\cdot\log_a e$, d.m.th. $\boxed{\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e.}$ Nëse $a=e$, atëherë $\boxed{\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}.}$

5. *Derivati i funksionit trigonometrik* $y=\sin x.$

$$\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x},\ \text{kurse}\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Pasi $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$ kemi $f'(x)=\cos x$, d.m.th. $(\sin x)'=\cos x.$

3 Trego se $(\cos x)'=-\sin x.$

Derivatet e disa funksioneve do t'i paraqesim me tabelë

1	$(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	5	$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$
2	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	6	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
3	$(a^x)'=a^x\ell\text{n}\,a$	7	$(\sin x)'=\cos x$
4	$(e^x)'=e^x$	8	$(\cos x)'=-\sin x$

Detyra:

1. Duke e zbatuar formulën përkatëse cakto derivatin e funksionit:

   a) $y=x^6$; b) $y=x\sqrt{x}$; c) $y=\frac{1}{x^{10}}$.

2. Cakto sipas përkufizimit derivatin e funksionit: a) $y=\frac{1}{x}$; b) $y=\sqrt{x}$; c) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

   ç) $y=2x^2+3x-4$; d) $y=\frac{x-1}{2x+1}$.

3. Caktoji pikat te të cilat funksionet $y=x+2$ dhe $y=2x^2-3x+4$ kanë derivate të barabarta.

4. Caktoji pikat te të cilat derivati i funksionit $y=\sin x$ është i barabartë me 1.

5. Caktoji pikat te të cilat derivati i funksionit $y=\cos x$ është i barabartë me 0.

6. Caktoji pikat te të cilat derivati i funksionit $y=\sin x$ është i barabartë me derivatin e funksionit $y=\cos x$.

3 RREGULLAT THEMELORE PËR DIFERENCIM

Gjer më tani caktuam derivate të disa funksioneve elementare. Në praktikë do të hasim kombinime të ndryshme prej këtyre funksioneve të fituara me disa prej operacioneve aritmetike. Caktimi i derivatit të funksioneve të atilla të fituara sipas përkufizimit zakonisht është i gjatë dhe i ndërlikuar. Për caktimin e derivatit të funksioneve ekzistojnë rregulla të caktuara të cilat mundësojnë caktimin më të lehtë të derivatit.

1. *Derivati prej prodhimit të konstantes dhe funksionit*

Teorema. Nëse $f(x)$ është funksion diferenciabil në intervalin (a,b) dhe c është konstante, atëherë

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x).$$

Vërtetim. Le të jetë $g(x)=c\cdot f(x)$, atëherë $g(x+\Delta x)=c\cdot f(x+\Delta x)$, pra $g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot f(x+\Delta x)-c\cdot f(x)}{\Delta x}=c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=c\cdot f'(x).$$

1 Cakto derivatin e funksionit:

a) $f(x)=-5x^4$; b) $f(x)=3ax^5$; c) $f(x)=3\sin x$; ç) $f(x)=\dfrac{2}{5}\ln x$.

Zgjidhje:

a) $f'(x)=\left(-5x^4\right)'=-5\left(x^4\right)'=-5\cdot 4x^3=-20x^3$; b) $f'(x)=\left(3ax^5\right)'=3a\left(x^5\right)'=3a\cdot 5x^4=15ax^4$;

c) $f'(x)=(3\sin x)'=3(\sin x)'=3\cos x$; ç) $f'(x)=\left(\dfrac{2}{3}\ln x\right)'=\dfrac{2}{3}(\ln x)'=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{3x}$.

2 Cakto derivatin e funksionit a) $y=\dfrac{3}{4}x^4$; b) $y=2\cos x$; c) $y=2\sqrt{x}$; ç) $y=4a^x$.

2. *Derivati i shumës së funksioneve*

Teorema. Nëse $u=u(x)$, $v=v(x)$ janë funksione diferenciabile në intervalin (a,b), atëherë edhe funksioni $u(x)+v(x)$ është diferenciabil në të njëjtin interval dhe poashtu

$$(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x),\ \text{d.m.th.}\ (u+v)'=u'+v'.$$

Vërtetim. Nëse Δx është rritja e argumentit x, atëherë $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$ dhe $\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)$ janë rritjet përkatëse të funksioneve $u(x)$ dhe $v(x)$. Le të jetë $f(x)=u(x)+v(x)$, atëherë

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x),$$

d.m.th. $\Delta f=\Delta u+\Delta v$, kurse

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x},\ \text{pra}\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x},\ \text{d.m.th.}\ f'(x)=u'(x)+v'(x).$$

Domethënë, $(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x)$ d.m.th. $(u+v)'=u'+v'$.

3 Cakto derivatin e funksionit: a) $f(x)=2x^2-3x$; b) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$; c) $f(x)=2x+\cos x$.

Zgjidhje:

a) $f'(x)=(2x^2)'-(3x)'=2\cdot 2x-3\cdot 1=4x-3$; b) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=x^2-x$.

Kjo rregullë vlen për shumë të tre dhe më shumë funksione diferenciabile në të njëjtin interval (a,b), d.m.th.

$$(u+v+w)'=u'+v'+w'.$$

4 Cakto derivatin e funksionit: a) $f(x)=3x^2+4x^3-\frac{2}{3}x^6$; b) $y=2x-3x^2-4x^5$;

c) $y=3\ln x+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}$; ç) $f(x)=3\sin x+2\cos x-x^2$.

Zgjidhje:

- Gjatë zgjidhjes së detyrave shfrytëzoji formulat që i ke mësuar gjer më tani për derivatin e funksionit.
- a) $f'(x)=(3x^2)'+(4x^3)'-\left(\frac{2}{3}x^6\right)'=3\cdot 2x+4\cdot 3x^2-\frac{2}{3}\cdot 6x^5=6x+12x^2-4x^5$;
- c) $y'=(3\ln x)'+(\sqrt{x})'-(\sqrt[3]{x^2})'=3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{3}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{3}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

5 Cakto derivatin e funksionit: a) $f(x)=3x^2-2\sin x+3\cdot 2^x$; b) $y=2\cos x+\frac{1}{x}-\log_3 x$.

3. *Derivati i prodhimit të funksioneve*

Teorema. Nëse $u=u(x)$ dhe $v=v(x)$ janë funksione diferenciabile në intervalin (a,b), atëherë funksioni $u(x)\cdot v(x)$ është diferenciabil në të njëjtin interval dhe poashtu

$$(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x),\quad \text{d.m.th.}\quad (u\cdot v)'=u'v+u\cdot v'.$$

Vërtetim. Le të jetë $f(x)=u(x)\cdot v(x)$, atëherë $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)$.
Më tutje do t'i shfrytëzojmë simbolet $u(x)=u$, $u(x+\Delta x)=u+\Delta u$, $v(x)=v$ dhe $v(x+\Delta x)=v+\Delta v$, ku

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0.$$

Prandaj:

$$\Delta f=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)-u\cdot v,$$

$$\Delta f=u\cdot v+\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x},$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\right)=$$

$$=u'\cdot v+u\cdot v'+u'\cdot 0=u'\cdot v+u\cdot v',\ \text{d.m.th.}$$

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

6 Cakto derivatin e funksionit: a) $f(x)=(2x^2-3)(x^4-3x^2+5)$;

b) $f(x)=x^2\cdot\sin x$; c) $y=(2x^2-3x)\cdot\ln x,\ x>0$; ç) $y=(1+\sin x)\cdot\cos x$.

Krahasoje zgjidhjen tënde me zgjidhjen e dhënë:

a) Le të jetë: $u(x)=2x^2-3$ dhe $v(x)=x^4-3x^2+5$.
Sipas formulës kemi:

$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$, d.m.th.

$$f'(x)=(2x^2-3)'(x^4-3x^2+5)+(2x^2-3)(x^4-3x^2+5)'$$

$$f'(x)=4x(x^4-3x^2+5)+(2x^2-3)(4x^3-6x)$$

$$f'(x)=4x^5-12x^3+20x+8x^5-12x^3-12x^3+18x$$

$$f'(x)=12x^5-36x^3+38x.$$

ç) $y'=(1+\sin x)'\cdot\cos x+(1+\sin x)\cdot(\cos x)'$

$$y'=\cos x\cdot\cos x+(1+\sin x)\cdot(-\sin x)$$

$$y'=\cos^2 x-\sin x-\sin^2 x$$

$$y'=\cos 2x-\sin x.$$

7 Cakto derivatin e funksionit:

a) $y=x^2(x^3-1)$; b) $y=2x\sqrt{x},\ x>0$; c) $y=(x^2+a^2)(x^2-a^2)$; ç) $y=x-\sin x\cos x$.

Teorema për derivatin e prodhimit të funksioneve diferenciabile mund të përgjithësohet për tre dhe më shumë, por numër të fundshëm të funksioneve diferenciabile, në intervalin e njëjtë (a,b).

Nëse $y=u\cdot v\cdot w$ është prodhim i funksioneve diferenciabile $u=u(x)$, $v=v(x)$ dhe $w=w(x)$, atëherë

$y=(u\cdot v)\cdot w$, pra $y'=(u\cdot v)'\cdot w+(u\cdot v)\cdot(w)'$ ose $y'=(u'\cdot v+u\cdot v')\cdot w+(u\cdot v)\cdot(w)'$, d.m.th.

$$y'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'.$$

Në mënyrë të ngjashme mund të caktohet derivati i prodhimit prej katër e më shumë funksione.

8 Cakto derivatin e funksionit: a) $y=x^2\cdot e^x\cdot\sin x$; b) $y=e^x\sin x\cos x$.

Zgjidhje:

a) $y'=(x^2)'\cdot e^x\sin x+x^2(e^x)'\sin x+x^2\cdot e^x\cdot(\sin x)'$; $y'=2xe^x\sin x+x^2e^x\sin x+x^2e^x\cos x$;

$$y'=xe^x(2\sin x+x\sin x+x\cos x).$$

4. *Derivati i herësit të funksioneve*

Teorema. Nëse $u=u(x)$ dhe $v=v(x)$ janë funksione diferenciabile në intervalin (a,b), ku për $v(x)\neq 0$ për çdo $x\in(a,b)$, atëherë funksioni $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ është diferenciabil në të njëjtin interval dhe poashtu

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)},\ \text{d.m.th.}\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

Vërtetim. Le të jetë $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, atëherë $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Sipas simboleve që i përdorëm më parë:

$$\Delta f=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{(u+\Delta u)\cdot v-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}=\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot u-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v(v+\Delta v)}.$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v(v+\Delta v)}=(u'v-uv')\cdot\frac{1}{v^2},\text{ pasi }\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0,\text{ d.m.th}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

9 Cakto derivatin e funksionit: a) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$; b) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2}$; c) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Shihe zgjidhjen:

a) Duke e zbatuar formulën $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, ku $u=2x$, kurse $v=1-x^2$ kemi:

$$y'=\frac{(2x)'(1-x^2)-2x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}.$$

10 Cakto derivatin e funksionit: a) $y=\operatorname{tg}x,\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; b) $y=\operatorname{ctg}x,\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Zgjidhje:

a) Pasi $tg\,x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ kemi

$$y'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},\quad\text{d.m.th.}$$

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

b) Vërteto se $(\operatorname{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Këto formula mund të shënohen në tabelën e derivateve në fund të mësimit 2.

11 Cakto derivatin e funksionit: a) $y=\frac{1}{\cos x}$; b) $y=\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}$; c) $y=\frac{x\cdot e^x}{\sin x}$.

Shqyrto zgjidhjen:

c) $y'=\frac{\left(x\cdot e^x\right)'\sin x-xe^x\left(\sin x\right)'}{\sin^2 x}=\frac{\left(x'\cdot e^x+x\cdot\left(e^x\right)'\right)\sin x-xe^x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{e^x\left(\sin x+x\sin x-x\cos x\right)}{\sin^2 x}$.

12 Njehso $f'(x_0)$ nëse:

a) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x_0=1$; b) $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$, $x_0=0$; c) $y=\frac{\ln x}{x+1}$, $x_0=1$; ç) $y=e^x\sin x+\frac{1}{e^x}$, $x_0=0$.

Detyra:

Duke i zbatuar formulat njehsoji derivatet e funksioneve.

1 a) $y=0{,}5x^2$; b) $y=-x^3$; c) $y=-4\sqrt[4]{x}$; ç) $y=mx+n$.

2 a) $y=2x^2-3x+5$; b) $y=x\sqrt{2}-3x^2-4$;

c) $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4}x^4$; ç) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}$.

3 a) $y=x^{\frac{1}{3}}$; b) $y=x^{-\frac{2}{5}}$; c) $y=\sqrt[3]{x^2}$; ç) $y=4\sqrt[4]{x}-3\sqrt[3]{x}$.

4 a) $y=\sin x-2\cos x$; b) $y=x^5-e^x+\ln x$; c) $y=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$.

5 a) $y=\left(x^2-3x\right)(1-2x)$; b) $y=(3x+2)\left(x^2-4x-1\right)$; c) $y=x^2\left(x^2+1\right)(x-1)$.

6 a) $y=\sin x\cos x$; b) $y=\sin x\cdot\operatorname{tg} x$; c) $y=\cos x\cdot\operatorname{ctg} x$.

7 a) $y=x^3\ln x$; b) $y=x^2\cdot e^x$; c) $y=x\cdot e^x\cdot\ln x$.

8 a) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; b) $y=\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}$; c) $y=\frac{1}{\sin x}$; ç) $y=\frac{\cos x}{1+\cos x}$.

9 a) $y=\frac{\ln x-1}{\ln x+1}$; b) $y=\frac{\ln x}{x^2}$; c) $y=\frac{x}{e^x}$.

10 Për funksionet $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ cakto $f'(0)$ dhe $f'(1)$. Vërteto se $f'(1)=f'(-1)$.

4 DERIVATET PREJ FUNKSIONEVE TË PËRBËRA

Le të jetë $f(x)=3x, x\in R$ dhe $g(x)=x^2+1, x\in R$. T'i formojmë funksionet $f(g(x))$ dhe $g(f(x))$. Kemi:

$f(g(x))=3\cdot g(x)=3(x^2+1)=3x^2+3$ dhe $g(f(x))=g\cdot(3x)=(3x)^2+1=9x^2+1$.

Vëre se $f(g(x))\neq g(f(x))$.

Funksioni $f(g(x))$ quhet ***funksion i përbërë*** ose ***kompozicion*** prej $f(x)$ dhe $g(x)$.

Kujtohu!

- Funksionin $y=\sqrt{1+x^2}$ mund ta shqyrtojmë si funksion të përbërë, pra ai mund të shkruhet me ndihmën e funksionit $u(x)=1+x^2$, d.m.th. $y=\sqrt{u}$.
- Funksioni $u(x)$ shpeshherë quhet ***funksion ndërmjetësues***.
- Funksioni $y=(x^2-1)^3$ është funksion i përbërë. Funksioni ndërmjetësues është $u(x)=x^2-1$, pra $y=u^3$, $u(x)=x^2-1$. Funksioni ndërmjetësues $u(x)$ nuk është gjithmonë njëvlerësisht i përcaktuar.

1 Janë dhënë funksionet:

a) $y=\sqrt{\sin x}$; b) $y=e^{2x-3}$; c) $y=\ln^2 x$; ç) $y=\cos 3x$; d) $y=\ln(x^2-x+2)$.

Cakto funksionin $u(x)$ dhe funksionin $y=f(u)$.

Shihe përgjigjen:

- a) $u(x)=\sin x,\ y=\sqrt{u}$;
- ç) $u(x)=3x,\ y=\cos u$;
- c) $u(x)=\ln x,\ y=u^2$;
- d) $u(x)=x^2-x+2,\ y=\ln u$.

2 Cakto funksionin $u(x)$ nëse:

a) $y=e^{x^2}$; b) $y=\ln(\sin x)$; c) $y=(x+2)^{14}+3$; ç) $y=\sin(3x-2)$.

Rregulla për caktimin e derivatit të funksionit të përbërë është dhënë me këtë teoremë

Teorema. Funksioni $u(x)$ le të jetë përcaktuar në intervalin (a,b) është diferenciabil në intervalin $x_0\in(a,b)$, kurse funksioni $f(x)$ i përcaktuar në intervalin që e përmban bashkësinë e vlerave të $u(x)$ është diferenciabil në pikën $u_0=u(x_0)$. Atëherë funksioni i përbërë $h(x)=f(u(x))$ është diferenciabil në pikën x_0, ku:

$$h'(x_0)=f'(u(x_0))\cdot u'(x_0).$$

Vërtetim. Le të jetë $u(x_0+\Delta x)-u(x_0)=k$ është rritja e funksionit $u(x)$. Prej këtu vijon

$$u(x_0+\Delta x)=u(x_0)+k=u_0+k.$$

Pasi $u(x)$ është diferenciabil në pikën x_0, ai është i vijueshëm në pikën, pra rritja e tij në pikën x_0 tenton nga 0 kur $\Delta x\to 0$.

$$h'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u(x_0+\Delta x))-f(u(x_0))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u_0+k)-f(u_0)}{\Delta x}.$$

Nëse numëruesin dhe emëruesin i shumëzojmë me k, pasi $k=u(x_0+\Delta x)-u(x_0)$, kemi

$$h'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u_0+k)-f(u_0)}{\Delta x}\cdot\frac{k}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(u_0+k)-f(u_0)}{k}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}=$$

$$f'(u_0)\cdot u'(x_0)=f'(u(x_0))\cdot u'(x_0).$$

Gjatë zbatimit praktik të teoremës, funksionin e shënojmë me $y=f(u(x))$, kurse derivati i funksionit në pikën $x\in D_f$ është

$$\boxed{y'=f'(u)\cdot u'(x).}$$

3 Cakto derivatin e funksionit: a) $y=(2x-3)^5$; b) $y=\sqrt{x^2+3}$; c) $y=(4x+3)^{\frac{2}{5}}$.

Vëre mënyrën:

a) Funksioni ndërmjetësues $u=2x-3$, pra $y=u^5$, kurse derivati i tij është

$y'=5u^4\cdot u'(x)$;

$y'=5(2x-3)^4\cdot(2x-3)'$;

$y'=5(2x-3)^4\cdot 2=10(2x-3)^4$.

b) $u=x^2+3$, $y=\sqrt{u}$; $y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'(x)$;

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot(x^2+3)'$;

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

4 Cakto derivatin e funksionit:

a) $y=e^{-x^2}$; b) $y=e^{x^2-x+2}$; c) $y=\ln^2 x,\ x>0$; ç) $y=\ln(x^2-2x+3)$.

Krahasoje zgjidhjen tënde me zgjidhjen e dhënë:

a) $y=e^{-x^2}; u(x)=-x^2$ pra $y=e^u$, kurse $y'=e^u\cdot u'(x)=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$.

c) $y=\ln^2 x; u(x)=\ln x$, pra $y=u^2$, kurse $y'=2u\cdot u'(x)=2\ln x\cdot(\ln x)'=\frac{2\ln x}{x}$.

5 Cakto derivatin e funksionit:

a) $y=\sin^2 x$; b) $y=\cos 2x$; c) $y=\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x$.

Shqyrto zgjidhjen:

a) $y=\sin^2 x, u=\sin x$, pra $y=u^2$, kurse $y'=2u\cdot u'(x)=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x=2\sin 2x$;

b) $y'=(\cos u)'\cdot u'(x)=-\sin 2x\cdot(2x)'=-2\sin 2x$;

c) $y'=3\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x)'-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{\cos^2 x}$.

Në fund të mësimit të dytë në tabelë i shënuam derivatet të disa funksioneve elementare. Këtu do të japim tabelë për derivatet e funksioneve të përbëra ku $u=u(x)$ është funksion ndërmjetësues:

1	$\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$	6	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
2	$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	7	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
3	$\left(a^{u}\right)'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$	8	$(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
4	$\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'$	9	$(\operatorname{ctg} u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
5	$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$	10	$(\log_a u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'\cdot\log_a e$

6 Cakto derivatin e funksionit:

a) $y=\sin x^3$; b) $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$; c) $y=\sqrt{x}\cos^2 x$; ç) $y=\ln\sin\sqrt{x}$.

Shihe zgjidhjen:

a) $y'=\cos x^3\cdot\left(x^3\right)'=3x^2\cos x^3$;

b) $y'=\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x+1}}\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'=\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\dfrac{(x-1)'\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1}{x-1}\cdot\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{x^2-1}$;

c) $y'=\left(\sqrt{x}\right)'\cos^2 x+\sqrt{x}\left(\cos^2 x\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos^2 x+\sqrt{x}\cdot 2\cos x(\cos x)'=\dfrac{\cos^2 x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cdot 2\cos x(-\sin x)=\dfrac{\cos^2 x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\sin 2x$;

ç) $y'=\dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\left(\sin\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{x}$.

7 Cakto derivatin e funksionit:

a) $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2+1}$;

b) $f(x)=e^{\operatorname{tg} x}$;

c) $f(x)=x^2e^{-2x}$;

ç) $f(x)=\sin\sqrt{1-x^2}$.

8 Cakto derivatin e funksionit $y = y(x)$ të përcaktuar me barazimin:

a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$; b) $x^3 + y^3 - 3x^2 - x = 0$;

c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = 1$; ç) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

Vëreje mënyrën:

Funksioni $y = y(x)$ është dhënë në formën implicite pra përcaktimin e derivatit $y' = y'(x)$ barazimin e dhënë do ta zgjidhim sipas y, d.m.th. do ta shkruajmë në formën eksplicite, duke pasur llogari për bashkësinë e përkufizimit të funksionit të fituar.

a) Prej barazimit të dhënë kemi:

$$y^2 = 1 - x^2, \text{ d.m.th. } y = \sqrt{1-x^2} \text{ ose } y = -\sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1], \text{ pra}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(1-x^2\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ose } y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ d.m.th. } y' = \pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) $y^3 = x + 3x^2 - x^3$, d.m.th. $y = \sqrt[3]{x+3x^2-x^3}$, $x \in \mathbb{R}$, pra

$$y' = \frac{\left(x+3x^2-x^3\right)'}{3\sqrt[3]{x+3x^2-x^3}} = \frac{1+6x-3x^2}{3\sqrt[3]{x+3x^2-x^3}}.$$

ç) $\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$, d.m.th. $y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2$, $x \geq 0$, pra

$$y' = 2\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}}.$$

9 Cakto vlerën e derivatit të funksionit të dhënë me barazimin në pikën x, nëse:

a) $x^2 + xy - 3x + y + 2 = 0$, $x = -2$; b) $e^x - x^2 + yx + 2y = 0$, $x = 0$.

Shqyrtoje zgjidhjen:

a) $y = \frac{3x-2-x^2}{x+1}$, $y' = \frac{5-2x-x^2}{(x+1)^2}$; $y'(-2) = 5$;

b) $y = \frac{x^2 - e^x}{x+2}$, $y' = \frac{x^2+4x-xe^x-e^x}{(x+2)^2}$; $y'(0) = -\frac{1}{4}$.

Detyra:

Cakto derivatin e funksionit:

(1) a) $y=\left(3x^2+5x-1\right)^4$; b) $y=\left(5-3x^4\right)^{11}$; c) $y=(a+bx)^5$; ç) $y=\left(a-bx^3\right)^5$.

(2) a) $y=(2x-3)^2(x-3)$; b) $y=(3x-2)^7\left(x^2+3x-4\right)^3$.

(3) a) $y=\sqrt{x^2-2}$; b) $y=\sqrt[3]{4+2ax^3}$.

(4) a) $y=2x+\sqrt{1-4x^2}$; b) $y=x^2+1-\sqrt{9-x^2}$.

(5) a) $y=x\sqrt{2x^2+1}$; b) $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(6) Janë dhënë funksionet $f(x)=3-2x$, $g(x)=x^2$ dhe $p(x)=\sin x$.
Formo funksion të përbërë $h(x)$, nëse:
a) $h(x)=f(g(x))$; b) $h(x)=g(p(x))$; c) $h(x)=g(f(x))$; ç) $h(x)=p(f(x))$.
Cakto derivatin e funksionit $h(x)$.

(7) Janë dhënë funksionet $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\cos x$ dhe $p(x)=\sqrt{x}$. Formoje funksionin e përbërë $h(x)$, nëse: a) $h(x)=f(g(x))$; b) $h(x)=f(p(x))$; c) $h(x)=p(g(x))$; ç) $h(x)=p(f(x))$. Cakto fushën e përkufizimit të funksionit $h(x)$. Cakto derivatin e funksionit $h(x)$.

(8) Cakto derivatin e funksionit:

a) $y=e^{2x-3}$; b) $y=\ln\left(x^2-3x\right)$; c) $y=\ln\sin x$.

(9) Cakto derivatin e funksionit:

a) $y=\sin 3x$; b) $y=\sin^3 x$; c) $y=\cos\dfrac{x}{2}$.

(10) Cakto derivatin e funksionit:

a) $y=\cos\sqrt{ax}$; b) $y=\cos 2x\cdot\mathrm{tg}^2 x$.

(11) Cakto derivatin e funksionit $y=y(x)$ të përcaktuar me barazimin

a) $x^3+y^5-x=0$; b) $y^2-x=0$;

c) $x^2+y^2-4x+3=0$; ç) $2x^2-xy-x+y=0$.

5 DERIVATET E RENDIT MË TË LARTË

Kujtohu!

- Si caktohet derivati i funksionit të dhënë sipas përkufizimit?

- Nëse $y=2x^3-3x^2+4x-5$, atëherë derivati i tij është $y'=6x^2-6x+4$.

1 Është dhënë funksioni $f(x)=x^2+x$. cakto derivatin e funksionit $f'(x)$.

Zgjidhje:

- Derivati i funksionit $f(x)$ është $f'(x)=2x+1$, kurse derivati i funksionit $f'(x)$ është

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f'}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)+1-(2x+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2.$$

Derivati i funksionit $f'(x_0)$ në pikën $x_0\in D'_f$, nëse ekziston, quhet *derivati i dytë* ose *derivati i rendit të dytë* dhe shënohetme $f''(x)$ (lexohet f sekundum). Në këtë kuptim $f'(x)$ quhet *derivati i parë* ose *derivati i rendit të parë*. Prandaj, derivati i rendit të dytë të funksionit $f(x)$ është derivati i funksionit $f'(x)$, d.m.th.

$$(f'(x))'=f''(x).$$

- Për detyrën e dhënë kemi: $(x^2+x)''=2$.

Me diferencimin e më tutjeshëm të funksionit $f''(x)$ fitohet derivati i tretë, d.m.th.

$(f'')'=f'''$, kurse $(f''')'=f^{(4)}, (f^{(4)})'=f^{(5)}$ etj. deri sa është plotësuar supozimi për ekzistimin e derivatit pasardhës.

Mbaj mend!

Funksioni f i cili ka n derivate quhet n herë funksion diferenciabil.

- Për funksionin $f(x)=x^4$ kemi:

$f'(x)=4x^3$; $\quad f''(x)=12x^2$; $\quad f'''(x)=24x$; $\quad f^{(4)}(x)=24$; $\quad f^{(5)}(x)=0$ dhe çdo derivat pasardhës.

2 Cakto derivatin e tretë të funksionit $f(x)=x\cdot e^x$.

Zgjidhje:

$f'(x)=x'\cdot e^x+x\cdot(e^x)'=(1+x)e^x$; $\qquad f''(x)=(1+x)'\cdot e^x+(1+x)\cdot(e^x)'=(2+x)e^x$;

$f'''(x)=(2+x)'\cdot e^x+(2+x)\cdot(e^x)'=(3+x)\cdot e^x$.

3 Cakto derivatin e katërtë të funksionit: a) $y=\sin x$; b) $y=\cos x$.

Shihe zgjidhjen:

a) $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$, $f^{(5)}(x)=\cos x$;

b) $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, $f'''(x)=\sin x$, $f^{(4)}(x)=\cos x$, $f^{(5)}(x)=-\sin x$.

Vazhdo me kërkimin e derivatit të rendit më të lartë të funksioneve. Çka vëren?

Vëre, të dy funksionet janë diferenciabil shumë herë në $\mathbb{R}$, prandaj për këto funksione vlen barasia $f^{(n)}_{(x)}=f^{(n+4)}_{(x)}$, $n\in\mathbb{N}$.

4 Cakto derivatin e dytë të funksionit: a) $y=xe^{-x}$; b) $y=x^2\cdot\ln x$; c) $y=\sqrt{x^2+1}$.

Zgjidhje:

c) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

$$y''=\frac{(x)'\sqrt{x^2+1}-x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

5 Vërteto se funksioni $y=\sin x+\cos x$ e kënaq barazimin $y'''+y''+y'+y=0$.

Detyra:

Cakto derivatin e dytë të funksionit $(1-5)$:

(1) a) $y=5x^2-3x+4$; b) $y=\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{7}{6}x^3+\dfrac{9}{5}$.

(2) a) $y=\dfrac{4x}{1+x^2}$; b) $y=\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$.

(3) a) $y=x\cdot\ln x$; b) $y=x\cdot e^{2x}$.

(4) a) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$; b) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; c) $y=x\cdot e^{\sin x}$.

(5) a) $x^2+y^2=25$; b) $y-xy-x^2=1$.

(6) Cakto vlerën e derivatit të funksionit në pikën e dhënë:

a) $y=x^3-3x^2-9x+10$, $x=-1$; b) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$, $x=4$.

(7) Caktoji koeficientët a, b dhe c të funksionit $f(x)=ax^2+bx+c$, nëse $f(-1)=7$, $f'(3)=9$ dhe $f''(x)=4$.

(8) Vërteto se funksioni $y=e^x\cdot\sin x$ e kënaq barazimin $y''-2y'+2y=0$.

(9) Vërteto se funksioni $y=\dfrac{x-2}{x+3}$ e kënaq barazimin $(x-2)y''+2yy'=0$.

(10) Vërteto se funksioni $y=e^{4x}+2e^{-x}$ e kënaq barazimin $y'''-13y'-12y=0$.

6 DIFERENCILI I FUNKSIONIT

Të supozojmë se funksioni $f(x)$ është përkufizuar në intervalin (a,b) dhe ka derivat në pikën $x_0 \in (a,b)$. Atëherë për çdo Δx, ashtu që $x+\Delta x \in (a,b)$ dhe $\Delta x \neq 0$ është përkufizuar ndryshimi

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon,$$

ku ε është funksion prej Δx, d.m.th. $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$, dhe poashtu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Që të jetë $\varepsilon(\Delta x)$ i përkufizuar, do të vëndojmë $\varepsilon(0) = 0$.

Prej barasisë paraprake e fitojmë barasinë $\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$, i njohur si *formula për rritje të fundshme.* Formula është e saktë për $\Delta x = 0$, pavarësisht prej asaj se si është përkufizuar ε.

Prandaj, rritja e funksionit $f(x)$ paraqet shumë prej dy mbledhësave,

$f'(x_0) \cdot \Delta x$ dhe $\varepsilon \cdot \Delta x$.

Mbledhësi i parë $f'(x_0)\Delta x$ quhet *diferenciali i funksionit* $f(x)$ në pikën x_0 dhe shënohet me $df(x_0)$ ose df.

Diferenciali i funksionit $y = x$ është $dy = (x)' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, d.m.th. $dx = \Delta x$.

Prandaj

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \quad \text{ose} \quad dy = f'(x_0)dx.$$

Përkufizimi. Diferenciali i funksionit $f(x)$ në pikën $x \in D_f$ është prodhim i derivateve të funksionit $f(x)$ në atë pikë dhe diferencialit të argumentit, d.m.th.

$$df = f'(x)dx \quad \text{ose} \quad dy = f'(x)dx.$$

1 Cakto diferencialin e funksionit

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; b) $y = \sin x$; c) $y = x \cdot e^x$; ç) $y = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Krahasoje zgjidhjen tëndë me zgjidhjen e dhënë

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, pra

$dy = f'(x)dx$, d.m.th.

$dy = (3x^2 - 6x + 3)dx$;

ç) $y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, pra

$dy = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Vëre, prej $dy = f'(x)dx$ vijon $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, pra $\dfrac{dy}{dx}$ është edhe një shënim për funksionin $f(x)$.

Prej barasisë $\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x$ kemi $\Delta f(x_0)=df(x_0)+\varepsilon dx$, d.m.th. $\Delta f(x_0)-df(x_0)=\varepsilon dx$, poashtu, kur $\Delta x\to 0$, atëherë $\varepsilon dx\to 0$. Domethënë, për mjaft të vogël Δx mund të thuhet se

$$\Delta f(x_0)-df(x_0)=0,\quad \text{d.m.th.}\quad \Delta f(x_0)\approx df(x_0).$$

2 Cakto dryshimin $\Delta f-df$ të funksionit $f(x)=x^2$ në pikën $x=2$, nëse $dx=\Delta x=0{,}1$.

Zgjidhje:

■ $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=(2x+\Delta x)\Delta x$; ■ $df=f'(x)dx=2x\,dx$.

Për $x=2$ dhe $dx=0{,}1$, $\Delta f=(2\cdot 2+0{,}1)\cdot 0{,}1=0{,}41$, kurse

$$df=2\cdot 2\cdot 0{,}1=0{,}4,\quad \text{pra}\quad \Delta f-df=0{,}41-0{,}4=0{,}01.$$

3 Njehso diferencialin e funksionit $f(x)=x^3-2x-1$ në pikën $x=2$ dhe cakto gabimin nëse Δy të zëvëndësohet me dy: a) $dx=\Delta x=0{,}1$; b) $dx=\Delta x=0{,}01$.

Zgjidhje:

■ a) $f'(x)=3x^2-2$, kurse $df=(3x^2-2)\cdot dx$ $\quad df(2)=(3\cdot 2^2-2)\cdot 0{,}1=1$.

■ $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)-1-(x^3-2x-1)=(3x^2-2)\Delta x+(3x+\Delta x)\cdot(\Delta x)^2$.

Pasi $f'(x)\Delta x=(3x^2-2)\Delta x$, prej $\Delta f=f'(x)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x$ vijon

$$\varepsilon\cdot\Delta x=(3x+\Delta x)\cdot(\Delta x)^2,\ \text{d.m.th.}\ \varepsilon=(3x+\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Për $x=2$ dhe $\Delta x=0{,}1$, $\varepsilon=(3\cdot 2+0{,}1)\cdot 0{,}1=0{,}61$.

Ndryshimi i kërkuar është $\Delta f-df=\varepsilon\cdot\Delta x=0{,}61\cdot 0{,}1=0{,}061$. Domethënë nëse Δf e zëvëndësojmë me df do të bëjmë gabim për $0{,}061$.

Nëse Δx është shumë i vogël, gabimi do të jetë shumë i vogël.

● Zgjidhe detyrën nën b), me të cilën do ta vërtetosh përfundimin paraprak.

Prej përfundimitt $\Delta f(x_0)\approx df(x_0)$, d.m.th. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)dx$ kemi

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)dx.$$

Kjo formulë mundëson zbatim praktik të diferencialit për njehsime të përafërta por njehsimi i vlerës të funksionit $f(x)$ në pikën x_0, pasi diferenciali i një funksioni, sipas rregullës, më lehtë caktohet prej rritjes së funksionit.

4 Me zbatimin e diferencialit të funksionit, njehsimi i përafërtë: a) $\sqrt{10}$; b) $\sqrt[3]{28}$.

Vëreje mënyrën

■ a) Funksioni është $f(x)=\sqrt{x}$. Pasi e dijmë saktësisht sa është $\sqrt{9}$, kurse 9 është afër 10, për $x_0=9$ dhe $\Delta x=1$, sipas formulës $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)dx$ kemi:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot dx,\ \text{d.m.th.}\ f(9+1)=f(9)+\frac{1}{2\sqrt{9}}\cdot 1,\ \text{pra}\ \sqrt{10}=\sqrt{9}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot 1=3+\frac{1}{6}=3\frac{1}{6}.$$

b) Funksioni është $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=27$, $\Delta x=dx=1$, pra $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)dx=f(x_0)+\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}\cdot 1$,

d.m.th. $\sqrt[3]{28}=\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}\cdot 1=3+\frac{1}{3^3}=3\frac{1}{27}$.

5 Përafërsisht njehso vlerën e:

a) $f(x)=x^3-x$, nëse $x_0=1$ dhe $\Delta x=0,1$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt[4]{16,64}$.

6 Cakto vlerën e përafërtë të a) $\operatorname{tg}46^0$; b) $\cos 59^0$.

Shqyrto mënyrën:

a) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $x_0=45^0$, $\Delta x=dx=1^0=\frac{\pi}{180}$;

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)dx$$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\frac{1}{\cos^2 x_0}dx$$

$$\operatorname{tg}(45^0+1^0)=\operatorname{tg}45^0+\frac{1}{\cos^2 45^0}\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\operatorname{tg}46^0=1+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot\frac{\pi}{180}=1+2\cdot\frac{\pi}{180}=1,0349.$$

b) $f(x)=\cos x$, $x_0=60^0$, $\Delta x=dx=-1^0=-\frac{\pi}{180}$;

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+(-\sin x_0)dx$$

$$f(60^0-1^0)=f(60^0)-\sin 60^0\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\cos 59^0=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=0,5151149.$$

Detyra:

Cakto rritjen dhe diferencialin e funksionit $y=f(x)$, nëse:

1) a) $y=x^2-x+1$, $x_0=1$, $\Delta x=0,1$; b) $y=x^3-2x^2+x-3$, $x_0=-2$, $\Delta x=0,2$;

c) $y=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$, $\Delta x=\frac{\pi}{18}$;

2) Cakto diferencialin e funksionit $y=f(x)$, nëse:

a) $y=\frac{1}{x}$; b) $y=\frac{1}{x^2}$; c) $y=\sqrt{1+x^2}$.

3) Cakto diferencialin e funksionit $y=f(x)$, nëse:

a) $y=x\cdot\sqrt{1+x^2}$; b) $y=x^2\cdot\ln x$; c) $y=\sin^2 x$.

4) Cakto gabimin absolut që fitohet gjatë zëvëndësimit të rritjes së funksionit me diferencialin,me $y=\sqrt{x}$, $x_0=4$, $\Delta x=0,01$.

(5) Cakto diferencialin e funksionit $f(x)$ në pikën x_0, kurse për $\Delta x = 0,01$ caktoji vlerat e

$f(x_0 - \Delta x)$ dhe $f(x_0 + \Delta x)$, nëse: a) $f(x)=3x, x_0=1$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, x_0 = 1$.

(6) Njehso përafërsisht: a) $\sqrt[3]{65}$; b) $\sqrt{8,76}$.

(7) Njehso përafërsisht: a) $\sin 31^0$; b) $\ln 0,9$.

(8) Sa është gabimi te syprina e katrorit brinja e të cilit është e gjatë $(50 \pm 0,01)$m?

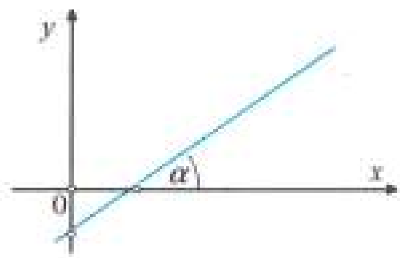
(9) Brinja e katrorit është $a = (20 \pm 0,01)$m. Cakto gabimin te syprina etij.

(10) Sa është gabimi i mundshën te syprina e rrethit me rreze $r = (50 \pm 0,2)$cm?

7 INTERPRETIMI GJEOMETRIK I DERIVATIT TË FUNKSIONIT

Kujtohu!

- Koeficienti k i drejtimit të drejtëzës $y = kx + n$ në sistemin kënddrejt koordinativ $k = \text{tg}\,\alpha$, α është këndi që drejtëza e formon me kahen pozitive të boshtit x.



- Drejtëzat $y = k_1x + n_1$ dhe $y = k_2x + n_2$ janë:
  a) paralele,nëse $k_1 = k_2$;
  b) normale, nëse $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$.
- Tangjenta e vijës rrethore është drejtëz e cila ka vetëm një pikë të përbashkët me vijën rrethore.
- Koeficienti i drejtimit të drejtëzës që kalon nëpër pikat $A(x_1,y_1)$ dhe $B(x_2,y_2)$ është $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

A Nëpër pikën M që shtrihet në lakoren $y = f(x)$ kalojnë drejtëzat t_1, t_2 dhe t_3 të cilat me lakoren kanë një pikë të përbashkët (fig. 1). Drejtëzat t_1, t_2 dhe t_3 a janë tangjenta të lakores?

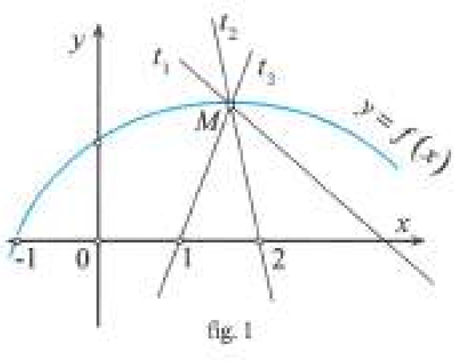


fig. 1

- Është dhënë parabolla $y = ax^2$. Nëpër pikat e parabollës janë tërhequr drejtëza të cilat janë paralele me boshtin e simetrisë së parabollës. Sa pika të përbashkëta ka çdonjëra prej atyre tre drejtëzave me parabollën?
  Ato drejtëza a janë tangjenta të parabollës?

Drejtëza e cila kalon nëpër pikën e palëvizshme T dhe cilado pikë A, A_1, A_2, ... quhet sekante e lakores (k), fig. 2.

Nëse pika A lëviz nëpër lakoren (k), atëherë sekanta e ndërron pozitën, pra nëse gjatë procesit kufitar kur pika A_i, $i \in \{1,2,3,...\}$ puthitet me T, sekanta $TA_i \equiv s_i$ ka pozitë të caktuar kufitare, atëherë për drejtëzën e fituar t themi se është *tangjentë e lakores* (k).

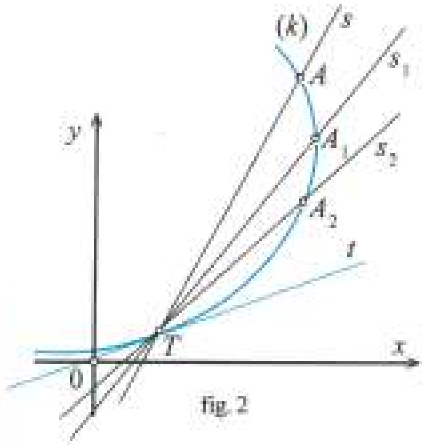


fig. 2

Përkufizimi. Tangjenta e lakores (k) në pikën T është pozita kufitare, nëse ekziston, sekanta TA, kur pika A nëpër lakoren (k) tenton nga pika T.

Në sistemin koordinativ xOy lakorja $G(x, f(x))$ le të jetë grafiku i funksionit $y = f(x)$ për të cilën supozojmë se është diferenciabil në pikën x_0 (fig. 3).

Pikat $T_0(x_0, f(x_0))$ dhe $T_1(x, f(x))$ le të shtrihen në lakoren $G(x, f(x))$, atëherë koeficienti i drejtimit të sekantës T_0T_1 është

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad 0 < \beta < \pi.$$

Kur $x \to x_0$ $(T_1 \to T_0)$, atëherë klëndi β i sekantës tenton nga këndi α, d.m.th.

$$\lim_{x \to x_0} \beta = \alpha, \text{ pra } \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg}\beta = tg\,\alpha.$$

Pasi $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, kurse prej $x - x_0 = \Delta x$ vijon $x = x_0 + \Delta x$, atëherë:

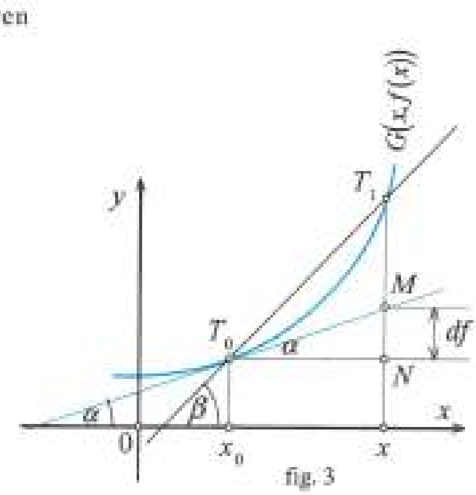


fig. 3

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{T_1 \to T_0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Poashtu, drejtëza T_0M ndaj të cilës tenton sekanta T_0T_1 kur $T_1 \to T_0$ është tangjentë e lakores në pikën T_0.

Mbaj mend!

Koeficienti i drejtimit k të tangjentës së lakores $y = f(x)$ në pikën $x_0 \in D_f$ është

$$k = f'(x_0), \text{ nëse } f'(x_0) \text{ ekziston.}$$

Nëse $f'(x_0)$ nuk ekziston, d.m.th. $\operatorname{tg}\alpha = \pm\infty$, atëherë tangjenta e lakores në pikën $T(x_0, f(x_0))$ është paralele me boshtin y, d.m.th. është e formës $x = x_0$.

Prandaj, interpretimi gjeometrik i derivatit të funksionit $f(x)$ qëndron në këtë: derivati i funksionit $f(x)$ në pikën x_0 është i barabartë me koeficientin e drejtimit të tangjentës në pikën abshisa e së cilës është x_0, d.m.th. $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=k$.

1 Cakto koeficientin e drejtimit të tangjentës së lakores në pikën x, nëse:

a) $f(x)=x^2-2x,\ x=1;$

b) $f(x)=x^3+2x^2-3,\ x=-1;$

c) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2},\ x=0;$

ç) $f(x)=\sin x,\ x=-\dfrac{\pi}{4}.$

Shqyrto përgjigjen

a) $f'(x)=2x-2,\ k=f'(1)=2\cdot 1-2=0;$

c) $f'(x)=\dfrac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ k=f'(0)=1.$

2 Në cilën pikë të lakores $y=x^3+2x^2-1$ koeficienti i drejtimit të tangjentës është i barabartë me 4?

Shihe zgjidhjen:

$y'=3x^2+4x$. Pasi $k=4$, vijon $y'(x_0)=4$, d.m.th. $3x_0^{\,2}+4x_0=4$, pra $x_0=\dfrac{2}{3}$ dhe $x_0=-2$.

$$\text{Për } x_0=\frac{2}{3},\ y_0=\left(\frac{2}{3}\right)^3+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-1=\frac{5}{27};\ A\left(\frac{2}{3},\frac{5}{27}\right).$$

$$\text{Për } x_0=-2,\ y_0=(-2)^3+2\cdot(-2)^2-1=-1;\ A(-2,-1).$$

3 Në cilën pikë prej lakores $y=x^3$ tangjenta është:

a) paralele me drejtëzën $y=3x-4;$

b) paraleleme boshtin x;

c) normale në drejtëzën $3x-4y+5=0$?

Vëreje mënyrën:

c) Derivati i funksionit $y=x^3$ është $y'=3x^2$, kurse derivati i funksionit $3x+4y+5=0$ është $3+4\cdot y'=0$, d.m.th. $y'=-\dfrac{3}{4}$. Koeficienti i drejtimit të tangjentës të lakores së dhënë në pikën e dhënë x_0 është $k_1=3x_0^{\,2}$, kursekoeficienti i drejtimit të drejtëzës është $k_2=-\dfrac{3}{4}$.

Prej kushtit $1+k_1\cdot k_2=0$ kemi $1-\dfrac{3}{4}\cdot 3x_0^{\,2}=0$, d.m.th. $x_0=\pm\dfrac{2}{3}$.

$$\text{Për } x_0=\frac{2}{3},\ y_0=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27},\ \text{pra } A\left(\frac{2}{3},\frac{8}{27}\right).$$

$$\text{Për } x_0=-\frac{2}{3},\ y_0=-\frac{8}{27},\ A\left(-\frac{2}{3},-\frac{8}{27}\right).$$

a) Shfrytëzoje kushtin për paralelizëm të dy drejtëzave.

B Ta shqyrtojmë kuptimin gjeometrik të dieferencialit për funksionit $f(x)$.

Në fig. 3 vëre se $x-x_0=\overline{T_0N}=\Delta x$ është rritja e argumentit, kurse rritja e funksionit është

$\Delta f=\overline{NT_1}=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Prej ΔT_0NM vijon

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\overline{NM}}{\overline{T_0N}},\ \text{d.m.th.}\ \overline{NM}=\overline{T_0N}\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Pasi $f'(x)=tg\alpha$, kurse $\overline{T_0N}=\Delta x=dx$ vijon se

$$\overline{NM}=\overline{T_0N}\cdot tg\,\alpha,\ \text{d.m.th.}\ \ \overline{NM}=f'(x_0)\cdot dx=df(x_0).$$

Interpretimi gjeometrik i diferencialit të funksionit $f(x)$ është ky: nëse abshisa e pikës takuese x_0 të tangjentës t me lakoren $y=f(x)$ rritet për Δx, atëherë ordinata e tangjentës do të rritet për vlerën e difrencialit $df(x_0)$.

Numri $\Delta f(x_0)-df(x_0)=\overline{NT_1}-\overline{NM}=\overline{MT_1}$ e tregon gabimin i cili bëhet kur rritja Δf i funksionit kur të zëvëndësohet me diferencialin df të funksionit $f(x)$ në pikën $x_0\in D_f$.

Detyra:

1. Cakto koeficientin e drejtimit të tangjentës së lakores $y=5x^2-2x$ në pikën:

   a) $x=0$; b) $x=1$; c) $x=-2$; ç) $x=\frac{1}{5}$.

2. Cakto koeficientin e drejtimit të tangjentës së lakores $y=\cos x$ në pikën:

   a) $x=0$; b) $x=\frac{\pi}{4}$; c) $x=\frac{2\pi}{3}$.

3. Cakto koeficientin e drejtimit të tangjentës së lakores $y=tg\,x$ në pikën

   a) $x=\frac{\pi}{4}$; b) $x=-\frac{3\pi}{4}$; c) $x=\frac{2\pi}{3}$.

4. Në cilat pika koeficienti i drejtimit të tangjentës së lakores $y=x^3$ është i barabartë me 3?

5. Në cilat pika të lakores $y=-3+x-x^2$ tangjenta është:

   a) paralele me boshtin x; b) paralele me simetralen e kuadrantit të parë?

6. Në cilat pika tangjenta e lakores : a) $y=x^2-3x+2$; b) $y=(3x-2)(2x-1)$ me boshtin x formon kënd $\alpha=\frac{\pi}{4}$?

7. Në cilat pika tangjenta e lakores $y=\ln x$ është paralele me drejtëzën:

   a) $y=x-1$; b) $y=2x-3$?

8. Caktoji pikat te të cilat tangjentat e lakores $y=x^3-x-1$ dhe $y=3x^2-4x+1$ janë paralele.

9. Në cilat pika tangjenta e lakores $y=x^3-3x^2+3x+3$ është normale në drejtëzën $x+3y-4=0$?

10. Nën cilin kënd priten lakoret: a) $y=x^2$ dhe $y^2=x$; b) $y=\sin x$ dhe $y=\cos x$?

(Poashtu, me këndin ndërmjet dy lakoreve L_1 dhe L_2 që priten në pikën M_0 e nënkuptojmë këndin ndërmjet tangjentave të tyre në pikën M_0.)

8 BARAZIMI I TANGJENTËS DHE BARAZIMI I NORMALES

A Prej më parë dijmë se barazimi i drejtëzës nëpër pikën $T(x_0, y_0)$ dhe koeficientin e drejtimit të dhënë k është $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Pasi koeficienti i drejtimit k të tangjentës në pikën x_0 të lakores së funksionit diferenciabil $y = f(x)$ është $f'(x_0)$, d.m.th. $k = f'(x_0)$, barazimi i tangjentës është

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

ku $y_0 = f(x_0)$.

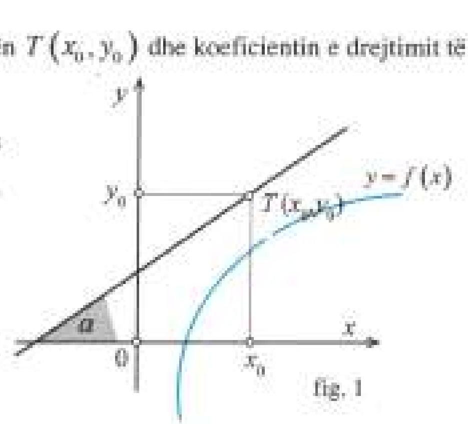


fig. 1

Mbaj mend!

Barazimi i tangjentës së grafikut të funksionit $y = f(x)$ i cili është diferenciabil në pikën x_0 është

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0).$$

1 Cakto barazimin e tangjentës së parabollës $y = 4x^2 + 4x - 3$ në pikën $T(-1, y)$.

Zgjidhje:

- Për $x = -1$, $y = 4\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) - 3 = -3$, d.m.th. $T(-1, -3)$.
- $y' = 8x + 4$, $k = f'(-1) = 8\cdot(-1) + 4 = -4$, pra barazimi i tangjentës është $y - y_0 = k(x - x_0)$, d.m.th. $y + 3 = -4(x + 1)$, pra $t: 4x + y + 7 = 0$.

2 Shkruaje barazimin e tangjentës së elipsës $3x^2 + 4y^2 = 48$ në pikën $T(2, y > 0)$.

Shihe zgjidhjen:

- Prej barazimit $3x^2 + 4y^2 = 48$ vijon $y^2 = \dfrac{48 - 3x^2}{4}$. Pasi $y > 0$, domethënë $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{48 - 3x^2}$, pra

$$y' = \frac{-3x}{2\sqrt{48 - 3x^2}}.$$

Për $x_0 = 2, y_0 = 3$, kurse $k = y'(2) = \frac{1}{2}$, pra barazimi i tangjentës në pikën $A(2,3)$ për $y - y_0 = k(x - x_0)$,

d.m.th. $y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x - 2)$ ose $x + 2y - 8 = 0$.

3 Cakto barazimin e tangjentës së vijës rrethore $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$ në pikën $T(0, -3)$.

(*Ke kujdes, kërkohet tangjenta në pikën ordinata e së cilës është* $y < 0$).

B **4** Cakto barazimin e normales së lakores $y = f(x)$ në pikën $T(x_0, f(x_0))$.

Funksioni $y = f(x)$ le të jetë diferenciabil në pikën x_0, fig. 2.

Normalja e lakores $y = f(x)$ është drejtëza n që është normale në tangjentën t në pikën takuese.

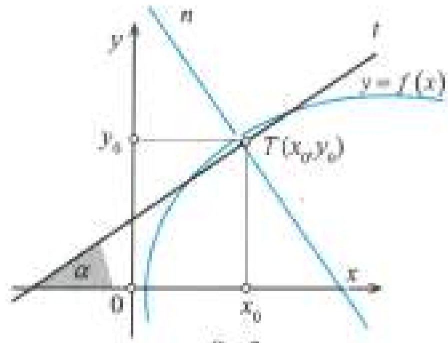


fig. 2

- Pasi $k_t = f'(x_0)$, prej kushtit për drejtëza normalet të dy drejtëzave vijon $k_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$, $f'(x_0) \neq 0$, pra barazimi i normales është

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0.$$

5 Shkruaje barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales së lakores $f(x) = x^3 - 2x$ në pikën $A(-1, y_0)$.

Shqyrtoje zgjidhgjen:

- Derivati i parë i funksionit është $y' = 3x^2 - 2$. Për $x = -1$ vijon $y = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) = 1$, $A(-1, 1)$, kurse

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 = 1, \text{ pra}$$

- Barazimi i normales është:

$$t: \; y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$
$$y - 1 = 1 \cdot (x + 1), \text{ d.m.th.}$$
$$x - y + 2 = 0.$$

- Barazimi i normales është

$$n: \; y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0),$$
$$y - 1 = -\frac{1}{1} \cdot (x + 1), \text{ d.m.th.}$$
$$x + y = 0.$$

6 Cakto barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales së funksionit $x^2 - y^2 = 3$ në pikën $A(2, y)$.

C Në fig. 3 janë paraqitur tangjenta t dhe normalja n e lakores $y = f(x)$ në pikën

$$T(x_0, y_0), \; y_0 = f(x_0).$$

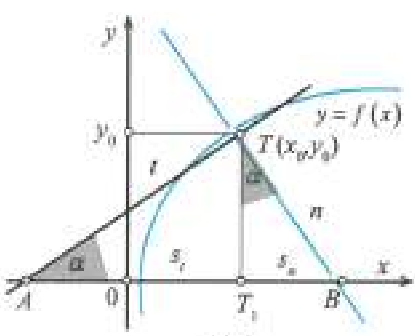


fig. 3

- Gjatësia e segmentit prej tangjentës ndërmjet pikës takuese dhe pikëprerjes së tangjentës me boshtin x quhet *gjatësia e tangjentës*.
  Ajo është gjatësia e segmentit AT, fig. 3.
- Gjatësia e proeksionit ortogonal të segmentit AT mbi boshtin x quhet *subtangjenta*, por shënohet me s_t, d.m.th. $s_t = \overline{AT_1}$.

Gjatësia e segmentit prej normales ndërmjet pikës takuese dhe pikëprerjes me boshtin x – quhet *gjatësia e normales*. Në fig. 3, ajo është gjatësia e segmentit BT, kurse gjatësia e BT_1 quhet *subnormale* dhe shënohet me s_n, d.m.th. $s_n = \overline{BT_1}$.

8 Caktoji gjatësitë e tangjentës dhe normales së lakores në fig. 3.

Pasi $\angle TAB = \angle BTT_1 = \alpha$ (kënde me krah reciprokisht normal) kemi:

$$\text{Prej } \Delta AT_1T: \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\overline{AT_1}}{\overline{TT_1}}, \text{ d.m.th. } s_t = \overline{AT_1} = \overline{TT_1}\cdot\operatorname{ctg}\alpha = y_0\cdot\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\text{Prej } \Delta T_1BT: \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BT_1}}{\overline{TT_1}}, \text{ d.m.th. } s_n = \overline{BT_1} = \overline{TT_1}\cdot\operatorname{tg}\alpha = y_0\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Duke dijtur se $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ kemi $\boxed{s_t = \left|\frac{y_0}{\operatorname{tg}\alpha}\right| = \left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|}$ dhe $\boxed{s_n = |y_0\cdot f'(x_0)|}$.

Prej ΔAT_1T: $t = \overline{AT} = \sqrt{s_t^2 + \overline{T_1T}^2} = \sqrt{\left(\frac{y_0}{f'(x_0)}\right)^2 + (y_0)^2}$, d.m.th. $\boxed{t = \left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|\sqrt{1+(f'(x_0))^2}}$.

Prej ΔT_1BT: $n = \overline{BT} = \sqrt{s_n^2 + \overline{T_1T}^2} = \sqrt{(y_0 f'(x_0))^2 + (y_0)^2}$, d.m.th. $\boxed{n = |y_0|\sqrt{1+(f'(x_0))^2}}$.

8 Caktoji gjatësitë t dhe n të tangjentës dhe normales për lakoren $y = \frac{2}{1+x^2}$, në pikën $T(1,1)$.

Përcille zgjidhjen:

Derivati i parë është $y' = -\frac{2\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = -\frac{2\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$. Për $x_0 = 1$, $f'(x_0) = -\frac{4\cdot 1}{(1+1^2)^2} = -1$, pra

$$t = \left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|\sqrt{1+(f'(x_0))^2} = \left|\frac{1}{-1}\right|\sqrt{1+(-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \text{kurse} \quad n = |y_0|\sqrt{1+(f'(x_0))^2} = 1\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Mbaj mend!

Barazimi i tangjentës së grafikut të funksionit $y = f(x)$ i cili është diferenciabil në pikën x_0 është

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, kurse barazimi i normales është $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Gjatësia e tangjentës është $t = \left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|\sqrt{1+(f'(x_0))^2}$, kurse e normales është $n = |y_0|\sqrt{1+(f'(x_0))^2}$.

Ku $f'(x_0)$ është funksioni i parë i funksionit $y=f(x)$, kurse $y_0=f(x_0)$

Gjatësia e subtangjentës është $\boxed{s_t = \left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|}$, kurse e subnormales është $\boxed{s_n = |y_0\cdot f'(x_0)|}$.

Detyra:

1. Shkruaje barazimin e tangjentrës dhe barazimin e normales për lakoren $y = x^4 - x^2 + 3$ në pikën $M(1, y)$.

2. Shkruaje barazimin e tangjentrës dhe barazimin e normales për lakoren $y = (x+1)\sqrt{3-x}$ në pikën:
b) $A(-1,0)$; c) $B(2,3)$. cakto gjatësinë e tangjentës dhe normales për lakoren.

3. Shkruaje barazimin e tangjentrës dhe barazimin e normales për parabollën $y = 4 - x^2$ në pikëprerjet e tyre me boshtin x.

4. Shkruaje barazimin e tangjentës dhe barazimin e normales për vijën rrethore $x^2 + y^2 + 4x - 9 = 0$ në pikëprerjen me pjesën pozitive të boshtit y.

5. Shkruaje barazimin e tangjentrës dhe barazimin e normales për lakoren $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ në pikëprerjet e tij me hiperbollën $y = \dfrac{1}{1+x}$.

6. Shkruaje barazimin e tangjentrës dhe barazimin e normales për lakoren $y = x^3 - 2x^2$, koeficienti i drejtimit të të cilit është 4.

7. Shkruaje barazimin e tangjentës për parabollën $y = x^2 + 4x + 3$ e cila është paralele me simetralen e kuadrantit të dytë. Cakto gjatësinë e tangjentës.

8. Shkruaje barazimin e tangjentës për lakoren $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{14x^2 - 28}$ e cila është normale në drejtëzën $2x + 4y - 3 = 0$. Cakto gjatësinë e normales.

9. Janë dhënë funksionet $y = x^3 - 2x^2$ dhe $y = 2x^2 + 3x - 2$. Caktoji pikat te të cilat tangjentat e grafikëve të tyre janë paralele dhe shkruaji barazimet e atyre tangjentave.

10. Është dhënë vija rrethore $x^2 + y^2 = r^2$. Vërteto se barazimi i tangjentës për vijën rrethore në pikën $T(x_0, y_0)$ është $x x_0 + y y_0 = r^2$.

9 INTERPRETIMI FIZIKË I DERIVATIT TË FUNKSIONIT

A Kur themi se largësia prej pikës A deri te vendi B, treni e ka kaluar me shpejtësi prej 75km në orë, mendojmë në shpejtësinë mesatare me të cilën lëviz treni, edhe pse gjatë lëvizjes ndryshon shpejtësia.

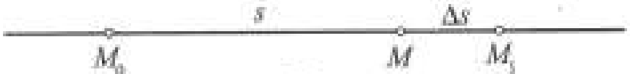


fig. 1

Nëse me s e shënojmë rrugën e kaluar të pikës materijale M nëpër drejtëzën p (fig. 1), atëherë pozita e pikës M në çdo moment prej kohës t është përcaktuar me funksionin $s = f(t)$, e cila në fizikë njihet si *ligji për lëvizjen e trupave.* Domethënë, në momentin t pika gjendet në pozitën M, kurse rruga e kaluar është $s = f(t)$. Në momentin $t + \Delta t$, pika M_0 do të gjendet në pozitën M_1, pra rruga e kaluar është $s_1 = f(t + \Delta t)$, d.m.th. në intervalin e kohës prej t deri në $t + \Delta t$ pika M e ka kaluar rrugën $\Delta s = s_1 - s$ ose

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Domethënë, rruga e kaluar është rritja e funksionit $f(t)$ që i përgjet rritjes Δt të kohës. Shpejtësia e pikës (trupit) është përcaktuar me formulën

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t},\ \text{d.m.th.}\ V_m=\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

e njohur si *shpejtësia e mesatare* e pikës lëvizëse. Gjatë lëvizjes drejtvizore herësi $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, d.m.th. shpejtësia mesatare e trupit është madhësi konstante. Kur lëvizja e trupit është drejtvizore, atëherë shpejtësia ndryshon në çdo moment.

Nëse rritja Δt e kohës është mjaft e vogël, atëherë në momentin t shpejtësia mesatare e mesme V_m do të jetë mjaft afër shpejtësisë së vërtetë V të trupit, e cila quhet *shpejtësia momentale*. Sipas kësaj dhe ligjit të shpejtësisë $s=f(t)$, shpejtësia momentale V në momentin t është vlera kufitare e shpejtësisë mesatare V_m, nëse ekziston, kur $\Delta t \to 0$, d.m.th.

$$V=\lim_{\Delta t\to 0} V_m=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t).$$

Mbaj mend!

Shpejtësia momentale e trupit që lëviz sipas ligjit $s=f(t)$ është e barabartë me vlerën e derivatit të funksionit $f(t)$ sipas ndryshores t në momentin t_0, d.m.th.

$$V=f'(t_0).$$

[illegible] $\lim_{\Delta t\to 0} V_m=f'(t)$ [illegible] $f(t)$ [illegible]

1 Cakto shpejtësinë e trupit gjatë ramjes së lirë në kohën:

a) $t=2\text{s}$; b) $t=4{,}5\text{s}$; c) $t=10\text{s}$.

Shqyrto zgjidhjen:

- Dihet se rruga gjatë ramjes së lirë njehsoje me formulën $s=\frac{1}{2}gt^2\left(g=9{,}81m/s^2\right)$,
  pra $V=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=\frac{1}{2}g\cdot 2t=g\cdot t$.
- a) Për $t=2\text{s}$, $V=9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 2\text{s}=19{,}62\,\text{m/s}$, që do të thotë se në fund të sekondës së dytë pas fillimit të ramjes së trupit e ka shpejtësinë $19{,}62\,\text{m/s}$;
- b) Për $t=4{,}5\text{s}$ $V=44{,}145\,\text{m/s}$.

2 Cakto shpejtësinë e trupit që lëviz sipas ligjit $s=5t^2$ në momentin kur:

a) $t=3\text{s}$; b) $t=10\text{s}$.

C Le të jetë t_1 koha në të cilën është përcaktuar shpejtësia momentale $V = f'(t_1)$. T'i shqyrtojmë funksionin e shpejtësisë $V = f'(t_1)$ dhe herësin $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ në rrethinën t_1, d.m.th. $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{f'(t+\Delta t)-f'(t)}{\Delta t}$.

Prej fizikës dijmë se herësi $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ e jep nxitimin mesatar të trupit në intervalin $[t_0, t_0+\Delta t]$, kurse $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}$ është nxitimi momental a në momentin t_0, d.m.th.

$$a = V' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f'(t_0+\Delta t)-f'(t_0)}{\Delta t} = f''(t_0).$$

Shkronja a është shkronja fillestare e fjalës latine acceleratio (nxitimi).

3 Cakto nxitimin e pikës në momentin $t_0 = 8\,\text{s}$ të lëvizjes drejtvizore të dhënë me ligjin $s = t^3 - 5$.

Përgjigje:

$a(t) = \left(\left(t^3-5\right)'\right)' = \left(3t^2\right)' = 6t;\ a(8) = 6\cdot 8 = 48\,\text{m/s}^2.$

4 Cakto shpejtësinë dhe nxitimin e pikës në fund të sekondës së pestë te lëvizja drejtvizore të përcaktuar me ligjin:

a) $s = 2 - 3t + t^2$; b) $s = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{10}t + 20$; c) $s = \frac{1}{8}t^3 + t$.

Le të jetë $Q = f(t)$ ndonjë madhësi e cila ndryshon gjatë kohës t, sipas ligjit f. Shpejtësia mesatare e ndryshimit të madhësisë Q në intervalin $[t, t+\Delta t]$ është $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$, kurse shpejtësia e ndryshimit të madhësisë Q në momentin t është $Q = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = f'(t)$.

5 Temperatura T e një trupi ndryshon varësisht prej kohës t sipas ligjit $T = 1{,}5t^2$. Cakto shpejtësinë e nxemjes së trupit në fund të sekondës së dytë.

Krahasoje përgjigjen tënde me përgjigjen e dhënë:

Sipas asj që i theksuar paraprakisht kemi:

$T(2) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1{,}5(t+\Delta t)^2 - 1{,}5t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1{,}5(2+\Delta t)^2 - 1{,}5\cdot 2^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} 1{,}5(4+\Delta t) = 6$, ose

$T = f'(2) = \left(1{,}5\cdot t^2\right)' = 3\cdot t = 3\cdot 2 = 6$. Domethënë, në fund të sekondës së dytë trupi nxehet me shpejtësi prej 3 shkallë në sekond.

6 Sa është energjia kinetike $E = \frac{1}{2}mV^2$ e trupit me masë 100 gramë në fund të sekondës së pestë kur lëvizja e trupit është përcaktuar me ligjin $s = t^2 - 3t + 2$?

Detyra:

1 Pika materijale bën lëvizje drejtvizore sipas ligjit $s = 2t^2 - 3t + 4$, ku koha është matur në sekonda, kurse rruga në metro.

a) Cakto shpejtësinë mesatare të lëvizjes në intervalin kohor prej $t = 5$ deri në $t = 5 + \Delta t$, nëse $\Delta t \in \{1; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}01\}$.

b) Cakto shpejtësinë në fund të sekondës së pestë.

c) Nxirre formulën për caktimin e shpejtësisë në çfarëdo moment prej kohës.

2 Një trup lëviz sipas ligjit $s = t^3 - 2t^2 + 3t + 1$. Cakto, pozitën dhe nxitimin e trupit:

a) në momentin fillestar $t = 0$;

b) në momentin $t = 2\text{s}$ prej fillimit të lëvizjes.

3 Një pikë lëviz drejtvizorisht dhe për t sekonda kalon rrugë prej s metro. Cakto shpejtësinë dhe nxitimin dhe nxitimin e pikës në fund të $t-$ sekonda, nëse ai lëviz sipas ligjit:

a) $s = 3t^3 - 4t^2 + t - 5,\ t = 3;$ b) $s = 3t^3 - \dfrac{2}{t},\ t = 2;$ c) $s = 3\sin 2t,\ t = \dfrac{\pi}{6} = 0{,}523.$

4 Trupi lëviz drejtvizorisht sipas ligjit $s = \dfrac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$. Cakto shpejtësinë dhe nxitimin e trupit. Në cilin moment trupi e ndryshon kahen e lëvizjes?

5 Ligji për rrugën e lëvizje së një trupi është $s = \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + t$. Në cilin moment shpejtësia e trupit është $V = 5$?

6 Trupi lëviz drejtvizorisht sipas ligjit $s = \sqrt{t}$. Trego se nxitimi i pikës është proporcionale me kubin e shpejtësisë.

7 Rrjedhja Q e lëngut nëpër hapjen e një ene është përcaktuar me ligjin $Q = 120t + t^2 - \dfrac{1}{3}t^3$.

a) Cakto shpejtësinë e rrjedhjes në fund të sekondës së dhjetë.

b) Pas sa sekonda rrjedhja do të mbaron dhe sa lëng për atë kohë ka rrjedhë prej enës?

8 Temperatura T e trupit mdryshon sipas ligjit $T = 0{,}5t^2 - 2t$. Cakto shpejtësinë e nxemjes (ftohjes) së trupit në fund të sekondës së pestë.

9 Trupi me masë 10 kg lëviz drejtvizorisht sipas ligjit $s = 3t^2 + t + 4$. Cakto energjinë kinetike që e ka trupi në fund të sekondës së katërtë.

10 Një trup lëviz sipas ligjit $s = ae^2 + be^{-1}$. Trego se nxitimi i tij numerikisht është i barabartë me rrugën e kaluar.

10 SHQYRTIMI I MONOTONISË SË FUNKSIONIT ME NDIHMËN E DERIVATIT

Kujtohu!

- Për një funksion $f(x)$, $x \in D_f$ themi se:

  a) rritet, nëse: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; b) zvogëlohet nëse: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

- Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = 2x - 1$, $D_f = \mathbb{R}$ dhe le të jetë $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ dhe $x_1 < x_2$. Atëherë kemi:

  $f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 - 1) - (2x - 1) = 2(x_1 - x_2)$. Prej $x_1 < x_2$ vijon $x_1 - x_2 < 0$, pra

  $f(x_1) - f(x_2) = 2(x_1 - x_2) < 0$, d.m.th. $f(x_1) < f(x_2)$. Domethënë, funksioni rritet në intervalin $(-\infty, \infty)$.

Le të jetë funksioni $y = f(x)$, grafiku i të cilit është paraqitur në fig. 1 është diferenciabil në intervalin (a,b) dhe le të jetë $x_0 \in (a,b)$.

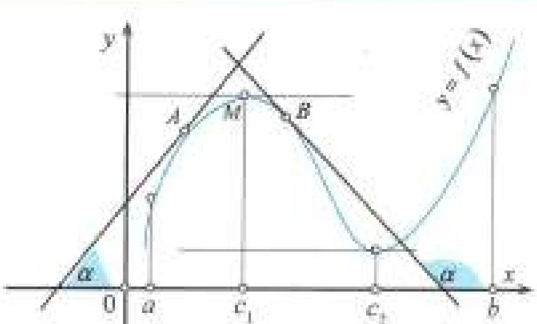


fig. 1

Funksioni $f(x)$ rritet në intervalin (a, c_1), kurse tangjenta e lakores në çdo pikë x prej intervalit (a, c_1) me kahen pozitive të boshtit $x-$ formon kënd të ngushtë α, pra $\operatorname{tg}\alpha > 0$, d.m.th. $f'(x) \geq 0$.

Funksioni $f(x)$ zvogëlohet në intervalin (c_1, c_2), kurse tangjenta e lakores në çdo pikë x prej intervalit (c_1, c_2), me kahen pozitive të boshtit $x-$ formon kënd të gjerë α, pra $\operatorname{tg}\alpha < 0$, d.m.th. $f'(x) \leq 0$.

- Edhe në cilin interval rritet funksioni grafiku i të cilit është në fig. 1? Cakto derivatin e funksionit $f(x)$.

Shqyrtimi i monotonisë së funksionit me zbatimin e përkufizimit për monotonin nuk është gjithmonë i thjeshtë dhe i lehtë. Me zbatimin e derivatit të funksionit shqyrtimi i monotonisë lehtësohet. Këtë na mundëson kjo teoremë:

Teorema. Nëse funksioni $f(x)$ është diferenciabil në intervalin (a,b), atëherë:

1. Nëse funksioni rritet monotonisht në intervalin (a,b), atëherë $f'(x) \geq 0$, për çdo $x \in (a,b)$.
2. Nëse funksioni monotonisht zvogëlohet në intervalin (a,b), atëherë $f'(x) \leq 0$, për çdo $x \in (a,b)$.

Vërtetim. Funksioni $y = f(x)$ le të jetë diferenciabil dhe monotonisht rritet në intervalin (a,b), fig. 2 dhe le të jetë $x, x + \Delta x \in (a,b)$. Kur argumenti x rritet në intervalin (a,b), atëherë $\Delta x > 0$, dhe rritja përkatëse e funksionit është $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) > 0$, pra $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$.

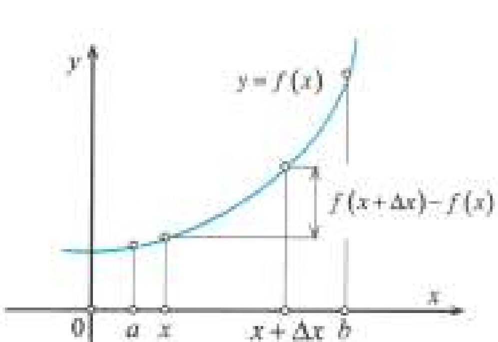


fig. 2

Prandaj, derivati i parë nuk mund të jetë negativ, d.m.th.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0.$$

Funksioni $f(x)$ le të jetë diferenciabil në intervalin (a,b) dhe le të zvogëlohet monotonisht, fig. 3.

Kur x rritet në intervalin (a,b), atëherë $\Delta x > 0$, kurse $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) < 0$, pra herësi

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} < 0$, d.m.th. derivati i parë nuk mund të jetë pozitiv, domethënë

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) \le 0.$$

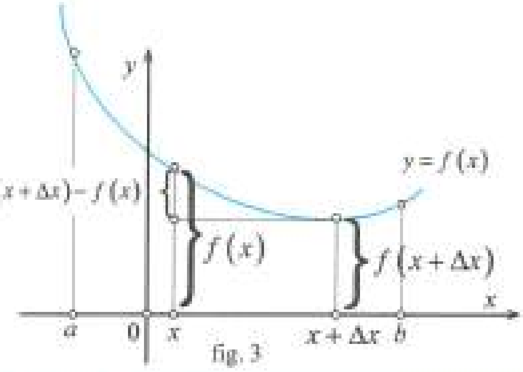


fig. 3

Për monotoninë e funksionit vlen edhe kjo teoremë:

Teorema. Funksioni $f(x)$ le të jetë diferenciabil në intervalin (a,b).

Nëse $f'(x) > 0$ për çdo $x \in (a,b)$, atëherë funksioni rritet në intervalin (a,b).

Nëse $f'(x) < 0$ për çdo $x \in (a,b)$, funksioni zvogëlohet në intervalin (a,b).

Këtë teoremë nuk do ta vërtetojmë, por do ta zbatojmë në zgjidhjen e detyrave.

1 Shqyrto monotoninë e funksionit $f(x) = 2x+3$.

Zgjidhje:

Prej $f(x) = 2x+3$ vijon $f'(x) = 2 > 0$ për çdo $x \in \mathbb{R}$, pra funksioni monotonisht rritet.

2 Është dhënë funksioni $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Cakto intervalin në të cilin funksioni:

a) monotonisht rritet; b) monotonisht zvogëlohet.

Shqyrtoje zgjidhjen:

$f'(x) = 4x - 4$.

a) Prej $f'(x) > 0$ vijon: $4x - 4 > 0$ ose $x > 1$, domethënë në intervalin $(1, \infty)$ funksioni rritet;

b) $f'(x) < 0$ për $4x - 4x < 0$ ose $x < 1$, d.m.th. në intervalin $(-\infty, 1)$ funksioni zvogëlohet.

Nëse $x = 1$, atëherë $f'(x) = 0$.

Pika x_0 për të cilën $f'(x) = 0$ quhet *pikë stacionare*. Prandaj, $x = 1$ është pikë stacionare për funksionin $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

3 Cakto intervalin në të cilin funksioni rritet, përkatësisht zvogëlohet:

a) $y = -x^2$; b) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2$; c) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$.

Vëreje mënyrën:

c) $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3) = -3(x-3)(x-1)$;

$f'(x) > 0$ nëse $(x-3)(x-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ x-1>0 \end{cases}$ ose $\begin{cases} x-3>0 \\ x-1<0 \end{cases}$, vijon $x \in (1,3)$.

Domethënë, për $x \in (1,3)$, funksioni rritet.

$f'(x) < 0$ nëse $(x-3)(x-1) > 0$, d.m.th. për $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ funksioni zvogëlohet.

4 Cakto intervalet në të cilin funksioni rritet, përkatësisht zvogëlohet:

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; b) $f(x)=x^2\cdot e^x$.

Shihe zgjidhjen:

a) $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Ke kujde, $(x-1)^2>0$ për çdo $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$f'(x)>0$ nëse $x(x-2)>0$, për $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ funksioni rritet në intervalin $(-\infty,0)$, $(2,+\infty)$.

$f'(x)<0$ nëse $x(x-2)<0$, për $x\in(0,2)$ funksioni zvogëlohet në $(0,2)$.

5 Vërteto se funksioni gjithmonë rritet:

a) $f(x)=x^3-1$; b) $g(x)=\sqrt[3]{x}$; c) $f(x)=\operatorname{tg}x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Shihe zgjidhjen:

a) Derivati është $f'(x)=3x^2$ për $x\neq0$ ekziston dhe është pozitiv. Megjithatë, $f'(0)=0$, por funksioni përsëri rritet në intervalint $(-\infty,\infty)$, fig. 4.

b) Derivati është $g'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ për $x\neq0$ ekziston dhe është pozitiv. Megjithatë, $g'(0)$ nuk ekziston, por funksioni përsëri rritet në intervalin $(-\infty,\infty)$, fig. 5.

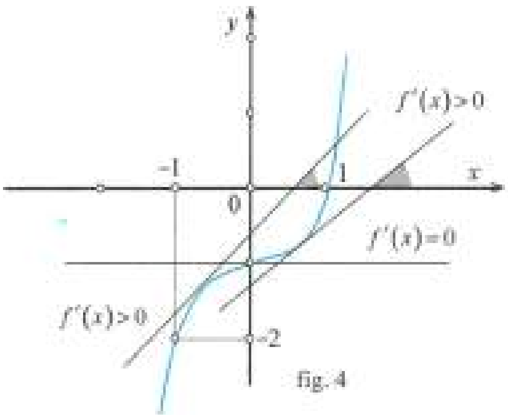


fig. 4

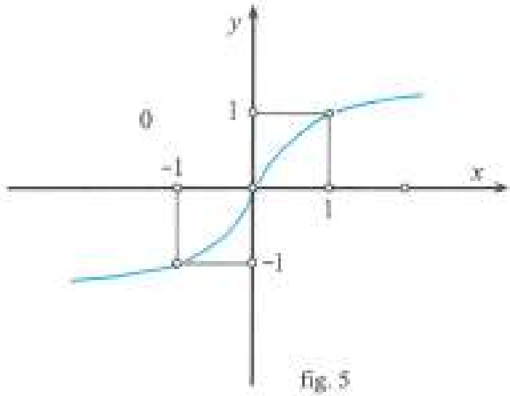


fig. 5

Domethënë, jobarasia $f'(x)>0$ është i mjaftueshëm, por jo edhe i nevojshëm për rritjen e funksionit $f(x)$.

Vëre!

Shqyrtimi i monotonisë së funksionit $y=f(x),\ x\in D_f$ sillet në zgjidhjen e jobarasisë $f'(x)>0$ ose $f'(x)<0$.

Detyra:

Cakto intervalet e motonisë së funksionit $(1-6)$.

(1) a) $y=-\dfrac{1}{2}x+2$; b) $y=3x-2$; c) $y=x^2$; ç) $y=-x^3$.

(2) a) $y=2+x-x^2$; b) $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2$; c) $y=x^3-3x-5$.

3 a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; b) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$.

4 a) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$; b) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.

5 a) $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$; b) $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$.

6 a) $f(x)=\sin x$; b) $f(x)=\cos^2 x$.

7 Vërteto se funksioni gjithmonë zvogëlohen:

a) $y=\operatorname{ctg} x,\ x\in(0,\pi)$; b) $y=-2x-\cos x$; c) $y=4-x^5$.

8 Shqyrto monotoninë e funksionit në intervalin:

a) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3},\ x\in[-2,1]$; b) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2},\ x\in(-\infty,3]$.

11 CAKTIMI I VLERAVE EKSTREME TË FUNKSIONIT ME NDIHMËN E DERIVATIT

Kujtohu!

- Funksioni $y=f(x)$ i vijueshëm në intervalin (a,b) ka maksimum në pikën $x_0\in(a,b)$, ekziston rrethinë ε në x_0, ashtu që për çdo $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, $f(x)<f(x_0)$, fig. 1.

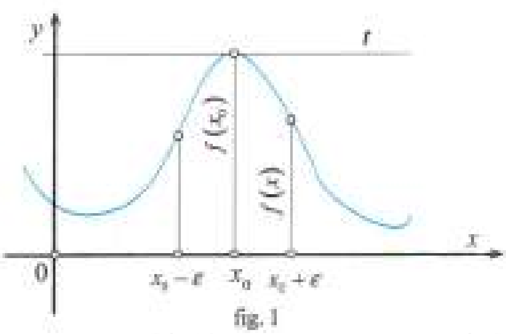


fig. 1

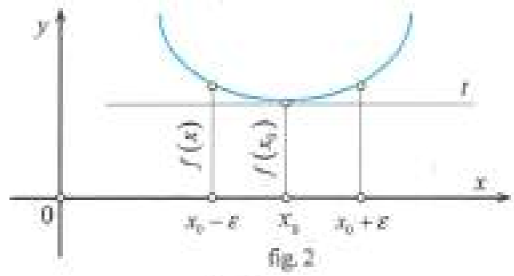


fig. 2

- Funksioni $y=f(x)$ i vijueshëm në intervalin (a,b) ka minimum në pikën $x_0\in(a,b)$, nëse ekziston rrethinë ε në x_0, ashtu që për çdo $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, $f(x)>f(x_0)$, fig. 2.

- Fjalët minimum, përkatësisht maksimum që janë përdor në sqarimin paraprak nuk do të thotë vlera më e vogël, përkatësisht vlera më e madhe e funksionit në fushën e tij të përkufizimit. Këto janë vlera më e vogël, përkatësisht vlera më e madhe e funksionit në rrethinën e pikës përkatëse. Për këtë shkak, shpeshherë quhen minimum lokal, përkatësisht maksimum lokal.

- Maksimumi dhe minimumi i një funksioni quhen *vlerat ekstreme* të funksionit.

Pika x_0 në të cilën funksioni $f(x)$ ka vlerë kufitare, i ndan intervalet e rritjes dhe zvogëlimit, d.m.th. nëse për $\varepsilon > 0$ në intervalin $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ funksioni rritet (zvogëlohet), atëherë në intervalin $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ zvogëlohet (rritet).

A 1 Cakto vlerat ekstreme të funksionit $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

Shihe zgjidhjen:

Do t'i caktojmë intervalet e monotonisë së funksionit.

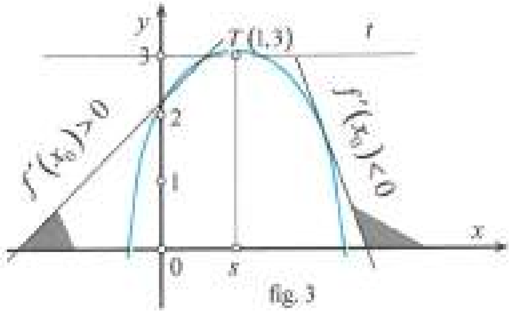


fig. 3

$f'(x) = -2x + 2$; $f'(x) > 0$ nëse $-2x + 2 > 0$, d.m.th. për $x \in (-\infty, 1)$ funksioni rritet, kurse $f'(x) < 0$ nëse $-2x + 2 < 0$, d.m.th. për $x \in (1, \infty)$ funksioni monotonisht zvogëlohet (fig. 3). Domethënë, kur argumenti x kalon nëpër pikën $x = 1$, derivati i parë e ndërron shenjën prej pozitiv në negativ, pra funksioni ka maksimum

$$y_{max} = f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 2 = 3.$$

Vëre!

Tangjenta e lakores në pikën $T(1,3)$ (pika e maksimumit) me boshtin x – formon kënd $\alpha = 0^0$.

Në përgjithësi, vlen:

Teorema. Nëse funksioni $f(x)$ është diferenciabil në intervalin (a, b) dhe nëse për çdo pikë $x_0 \in (a, b)$ funksioni ka vlerë ekstreme, atëherë $f'(x_0) = 0$.

Gjykimi i anasjelltë nuk vlen, d.m.th. derivati i ndonjë funksioni te ndonjë pikë $x_0 \in D_f$ mund të jetë i barabartë me zero, por edhe në pikën x_0 funksioni të mos ketë vlerë ekstreme. Për shembull, për funksionin $f(x) = x^3$ kemi: $f'(x) = 3x^2$, për $x_0 = 0$, $f'(0) = 0$. Megjithatë, për $x_0 = 0$ funksioni nuk ka vlerë ekstreme, ai monotonisht rritet në intervalin $x_0 \in (-\infty, \infty)$, shihe fig. 4 nga mësimi i kaluar.

Prej këtu vijon se $f'(x_0) = 0$ paraqet kusht të nevojshëm, por jo edhe kusht i mjaftueshëm për ekzistimin e vlerës ekstreme të funksionit $f(x)$ në pikën x_0.

Kushti i mjaftueshëm për vlerë ekstreme të funksionit

Nëse funksioni $f(x)$ është diferenciabil në intervalin (a, b) dhe nëse për çdo pikë $x_0 \in (a, b)$ janë plotësuar këto dy kushte:

a) $f'(x_0) = 0$ dhe

b) $f'(x)$ e ndërron shenjën në rrethinën e x_0,

atëherë $f(x_0)$ është vlerë ekstreme e funksionit $f(x)$.

Nëse kalimi i argumentit x nëpër pikën x_0, fig. 5 a), b), c):

$f'(x)$ e ndërron shenjën prej negative në pozitive, atëherë funksioni ka maksimum, $y_{max} = f(x_0)$.

$f'(x)$ e ndërron shenjën prej pozitive në negative, atëherë funksioni ka minimum $y_{min} = f(x_0)$.

$f'(x)$ nuk e ndërron shenjën, atëherë funksioni nuk ka vlerë ekstreme.

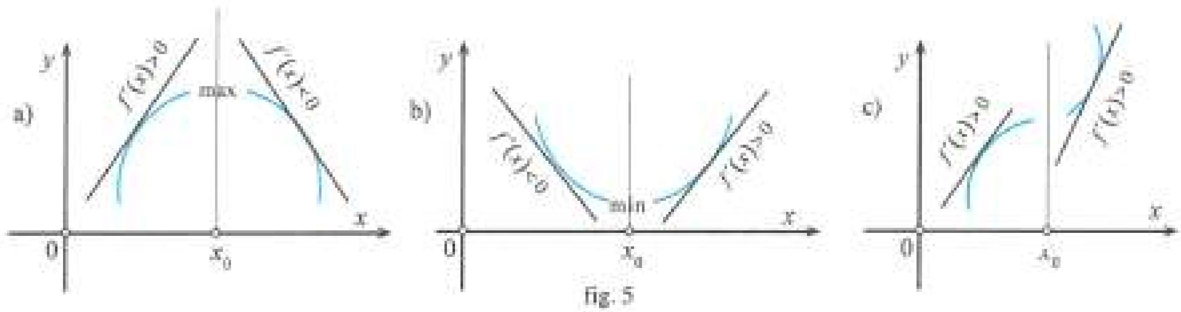


fig. 5

2 Caktoji vlerat ekstreme të funksionit $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

Vëreje mënyrën:

- $f'(x) = 4x - 3$; $f'(x) = 0$ nëse $4x - 3 = 0$, d.m.th. $x = \frac{3}{4}$.
- $f'(x) > 0$ nëse $4x - 3 > 0$, d.m.th. për $x > \frac{3}{4}$ funksioni rritet.
- $f'(x) < 0$ nëse $4x - 3 < 0$, d.m.th. për $x < \frac{3}{4}$ funksioni zvogëlohet.

Domethënë, për $x < \frac{3}{4}$, $f'(x) < 0$, kurse për $x > \frac{3}{4}$, $f'(x) > 0$, pra në rrethinën e pikës $x = \frac{3}{4}$ derivati e ndërron shenjën prej negative në pozitive, d.m.th. funksioni ka minimum,

$$y_{min} = f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{4} + 4 = \frac{28}{3}.$$

3 Caktoji vlerat ekstreme të funksionit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$.

Shihe zgjidhjen:

- Derivati i parë i funksionit është $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.
  Prej $f'(x) = 0$ vijon $x^2 - 2x - 3 = 0$, d.m.th. $x = 3$ dhe $x = -1$ janë pika stacionare, pra në ato pika funksioni mund të ketë vlera ekstreme, por nuk është e domosdoshme. Për këtë shkak e shqyrtojmë shenjën e derivatit të parë në rrethinën e pikës $x = -1$ dhe $x = 3$.

- $f'(x) > 0$, nëse $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) > 0$, d.m.th. $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.
- $f'(x) < 0$, nëse $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) < 0$, d.m.th. $x \in (-1, 3)$.

Për $x \in (-\infty, -1)$ funksioni rritet, $f'(x) > 0$, kurse për $x \in (-1, 3)$ funksioni zvogëlohet, $f'(x) < 0$, pra në rrethinën e pikës $x = -1$ derivati i parë e ndërron shenjën prej pozitiv në negativ, d.m.th. për $x = -1$ funksioni ka maksimum

$$y_{\max} = f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3\cdot(-1) = \frac{5}{3}.$$

Pika $A\left(-1, \frac{5}{3}\right)$ është pika e maksimumit të funksionit, pra në atë pikë grafiku e ka formën formën „ ", fig. 4.

Për $x \in (-1, 3)$ funksioni zvogëlohet, $f'(x) < 0$, kurse për $x \in (3, \infty)$ funksioni rritet, $f'(x) > 0$. Domethënë, në rrethinën e pikës $x = 3$ derivati i parë e ndërron shenjën prej negativ në pozitiv, d.m.th. për $x = 3$ funksioni ka minimum

$$y_{\min} = f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3^2 - 3\cdot 3 = -9.$$

Pika $B(3, -9)$ është pikë e minimumit të funksionit, pra në atë pikë grafiku e ka këtë formë „ ", fig. 4.

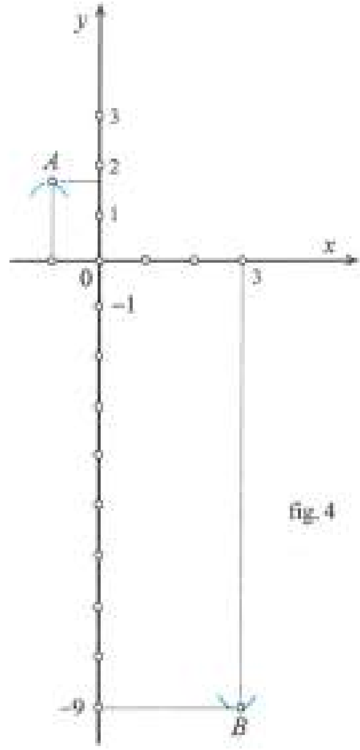


fig. 4

Nëse një funksion $f(x)$ është diferenciabil në rrethinën ε të pikës x_0, përveç në pikën x_0, atëherë funksioni mund të ketë vlerë ekstreme në pikën x_0, edhe pse në atë pikë nuk ka derivat, d.m.th. $f'(x_0)$ nuk ekziston. Për shembull,

Funksioni $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ka derivat $f'(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, por nuk ka derivat në pikën $x = 0$.

Vëre, derivati i parë e ndërron shenjën në rrethinën e pikës $x_0 = 0$ prej negativ në pozitiv, prandaj, për $x = 0$ funksioni ka minimum $y_{\min} = f(0) = 0$, edhe pse $f'(0)$ nuk ekziston.

4 Cakto vlerat ekstreme të funksionit: a) $y = -3x^2 - 6x + 7$; b) $y = x^3 + 12x - 6$.

5 Cakto vlerat ekstreme të funksionit $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

Vëreje mënyrën:

$y' = \dfrac{2x(x-2) - x^2(x-2)'}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$. $y' = 0$ për $x^2 - 4x = 0$, d.m.th. $x = 0$; $x = 4$.

Pasi $(x-2)^2 > 0$ për çdo $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, shenja e derivatit varet prej numëruesit.

$y'(x)>0$ nëse $x^2-4x=x(x-4)>0$, d.m.th. $x\in(-\infty,0)\cup(4,\infty)$.

$y'(x)<0$ nëse $x^2-4x<0$, d.m.th. $x\in(0,4)$.

- Në rrethinën e pikës $x=0$ derivati i parë e ndërron shenjën prej pozitiv në negativ. Domethënë, për $x=0$ funksioni ka maksimum $y_{max}=f(0)=\dfrac{0^2}{0-2}=0$.
- Në rrethinën e pikës $x=4$ derivati i parë e ndërron shenjën prej negativ në pozitiv. Domethënë, për $x=4$ funksioni ka minimum $y_{min}=f(4)=\dfrac{4^2}{4-2}=8$.

B Përcaktimi i shenjës së derivatit të parë të funksionit nuk është gjithmonë e thjeshtë dhe e lehtë, kurse me atë edhe përcaktimi i vlerave ekstreme të funksionit nuk është detyrë e thjeshtë.

Me zbatimin e derivatit të dytë të funksionit, zgjidhja e detyrave të këtij lloji është shumë e thjeshtë. Me ndihmën e shenjës të derivatit të parë $f'(x)$ konstatojmë se funksioni $f(x)$ a rritet ose zvogëlohet. Gjithashtu, me shenjën e $(f'(x))'=f''(x)$ mund të kosntatohet se funksioni $f'(x)$ a rritet apo zvogëlohet në rrethinën e pikës x_0, në të cilën $f'(x_0)=0$.

Funksioni $f(x)$ le të jetë dy herë diferenciabil në rrethinën e pikës $x_0\in D_f$.

- Nëse funksioni $f(x)$ në pikën x_0 ka *maksimum*, atëherë derivati i parë i tij $f'(x)$ në rrethinën e pikës x_0 prej vlerave pozitive $(x<x_0, f'(x)>0)$ nëpërmjet zeros $f'(x_0)=0$, fiton vlera negative (për $x_0<x, f'(x)<0$), domethënë funksioni $f'(x)$ zvogëlohet. Prandaj, derivati i funksionit $f'(x)$, d.m.th. $(f'(x))'=f''(x)$ në rrethinën e pikës x_0 është negativ, domethënë, $f''(x_0)<0$.

- Nëse funksioni $f(x)$ në pikën $x_0$ka *minimum*, atëherë derivati i parë i tij $f'(x)$ në rrethinën e x_0 prej vlerave negative (për $x<x_0, f'(x)<0$) nëpërmjet zeros $f'(x_0)=0$ fiton vlera negative (për $x_0<x, f'(x)>0$), domethënë, funksioni $f'(x)$ rritet. Prandaj, derivati i funksionit $f'(x)$, d.m.th. $(f'(x))'=f''(x)$ në rrethinën e pikës x_0 është pozitiv, domethënë, $f''(x_0)>0$.

Kështu arrijmë deri te kjo rregullë:

Funksioni $f(x)$ le të ketë derivat të parë dhe të dytë, derivat të vijueshëmnë rrethinën e pikës x_0 dhe le të jetë $f'(x_0)=0$ dhe $f''(x_0)\neq 0$. Funksioni $f(x)$ ka vlerë ekstreme në pikën x_0, ku:

1.Nëse $f''(x_0)<0$, funksioni ka maksimum, $y_{max}=f(x_0)$.

2. Nëse $f''(x)>0$, funksioni ka minimum, $y_{min}=f(x_0)$.

Nëse për $x=x_0, f'(x_0)=0$ dhe $f''(x_0)=0$, atëherë derivatin e dytë nuk mund ta shfrytëzojmë për caktimin e vlerave ekstreme të funksionit. Në këtë rast do ta shqyrtojmë shenjën e derivatit të parë të funksionit në rrethinën e pikës x_0.

Ekziston mënyrë tjetër se si kryhet caktimi i vlerave ekstreme të funksionit në rastin kur $f'(x_0)=0$ dhe $f''(x_0)=0$, megjithatë për atë nuk do të flasim.

6 Cakto vlerat ekstreme të funksionit

a) $y=2x^2-3x+1$; b) $y=3x^2-2x^3$; c) $y=x^4+2x^2+3$.

Zgjidhje:

b) $y'=6x-6x^2$. Prej $y'=0$ vijon $6x-6x^2=0$, d.m.th. $x=0$ dhe $x=1$.

$y''=6-12x$. Za $x=0$ kemi $y''(0)=6>0$, domethënë për $x=0$ funksioni ka minimum

$$y_{min}=f(0)=3\cdot 0^2-2\cdot 0^3=0.$$

Për $x=1$ kemi $y''(1)=6-12\cdot 1=-6<0$, domethënë për $x=1$ funksioni ka maksimum

$$y_{max}=f(1)=3\cdot 1^2-2\cdot 1^3=1.$$

Mbaj mend!

Caktimi i vlerave ekstreme të funksionit dy herë diferenciabil $f(x)$ sillet në këto rregulla:

1. Caktohet derivati i parë $f'(x)$ i funksionit.

2. Zgjidhet barazimi $f'(x)=0$, d.m.th. caktohen pikat stacionare.

3. Caktohet derivati i dytë $f''(x)$ dhe shqyrtohet shenja e tyre veçmas për çdo pikë stacionare.

6 Cakto vlerat ekstreme të funksionit $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Përcille zgjidhjen:

1. Derivati i parë është $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

2. $f'(x)=0; 1-\frac{1}{x^2}=0; x=1$ dhe $x=-1$.

3. $f''(x)=0+\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$.

Për $x=1$, $f''(1)=\frac{2}{1^3}=2>0$, funksioni ka minimum $y_{min}=f(1)=1+\frac{1}{1}=2$.

Për $x=-1$, $f''(-1)=\frac{2}{(-1)^3}=-2<0$, funksioni ka maksimum $y_{max}=f(-1)=-1+\frac{1}{-1}=-2$.

Detyra:

Cakto vlerat ekstreme të funksioneve $(1-7)$:

1 a) $f(x)=-\frac{1}{3}x+2$; b) $f(x)=x^2-5x+1$; c) $f(x)=-x^4+2x^2-3$.

2 a) $f(x)=2x^3-9x^2+12x$; b) $f(x)=x^3-6x^2+12x-5$.

3 a) $y=x^2(x-2)^2$; b) $y=x^3(x-1)$.

4 a) $y=x^2\cdot e^{-x}$; b) $y=e^x+e^{-x}$.

5 a) $y=x\cdot\ln x,\ x>0$; b) $y=\frac{\ln x}{x},\ x>0$.

6 a) $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$; b) $f(x)=x-\sqrt{x},\ x\geq 0$.

7 a) $f(x)=\sin x+\cos x,\ x\in[0,2\pi]$; b) $f(x)=\sin 2x-x,\ x\in[0,2\pi]$.

8 Është dhënë trinomi ax^2+bx+c. Cakto a, b dhe c, nëse për $x=2$ trinomi ka minimum të barabartë me -1, kurse për $x=1$ vlera e trinomit është e barabartë me zero.

9 Cakto a dhe b ashtu që funksioni $f(x)=ax^3+bx^2-36x-1$ të ketë minimum për $x=3$, kurse maksimum për $x=-2$.

10 Cakto vlerën më të madhe dhe më të vogël të funksionit në intervalin e dhënë:

a) $f(x)=x^4-8x^2+3,\ x\in[-2,2]$; b) $f(x)=\sqrt{4-x^2},\ x\in[-2,2]$.

12 DISA ZBATIME PRAKTIKE TË MAKSIMUMIT DHE MINIMUMIT

Me zbatimin e rregullave për caktimin e vlerave ekstreme të funksionit të dhënë mund të zgjidhen detyra të ndryshme nga fusha e shkencave natyrore dhe teknike. Gjatë zgjidhjes së tyre duhet të vërehet varshmëria ndërmjet madhësive të cilat ndryshojnë dhe të formohet funksioni.

1 Numrin 9 ndaje në dy pjesë ashtu që shuma e kubeve të tyre të jetë më e vogël.

Shihe zgjidhjen:

- Nëse njërën pjesë e shënojmë me x, tjetra është $9-x$. Prej kushtit të detyrës vijon funksioni $y=x^3+(9-x)^3$, kurse prej këtu $y'=3x^2+3(9-x)^2\cdot(9-x)'=54x-243$.
- $y'=0$ nëse $54x=243$, d.m.th. $x=4,5$.
- $y''=54>0$, domethënë, për $x=4,5$ funksioni ka vlerë më të vogël, pra pjesët e kërkuara janë 4,5 dhe 4,5.

2 Prej të gjithë drejtkënmdëshave me perimetër 22cm cakto atë që ka syprinë më të madhe.

Shihe zgjidhjen:

- Perimetri i drejtkëndëshit është $P=2(a+b)$ ose $22=2(a+b)$, $a+b=11$, kurse $S=a\cdot b$. Prej $a+b=11$ vijon $a=11-b$, kurse $S=(11-b)\cdot b=11b-b^2$.
- Syprina e drejtkëndëshit është funksion prej brinjës b, pra $S'(b)=11-2b$; $S'(b)=0$ nëse $11-2b=0$, d.m.th. $b=5{,}5$. $S''(b)=-2<0$, funksioni ka maksimum nëse $b=5{,}5$, kurse brinja $a=11-5{,}5=5{,}5$. Domethënë, prej të gjithë drejtkëndëshave me perimetër 22cm, syprinë më të madhe ka katrori me brinjë 5,5cm.

3 Prej kartuçi në formë të katrorit me brinjë a bën kuti me vëllim më të madh.

Krahasoje zgjidhjen tënde me zgjidhjen e dhënë:

Që të bëjmë kuti, duhet në çdo kulm të katrorit të prejmë nga një katror me brinjë x. Pjesa tjetër e kartuçit mbështjellet në kuti me lartësi x dhe bazë të katrorit me brinjë $a-2x$, fig. 1.

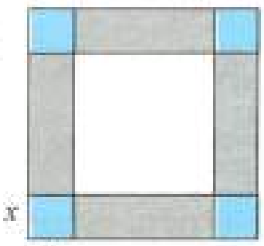


fig. 1

- Kutia e fituar e ka formën e prizmit të rregullt katërkëndore, pra për vëllimin e tij kemi:

$V=B\cdot H=(a-2x)^2\cdot x=a^2x-4ax^2+4x^3$; $V'(x)=a^2-8ax+12x^2$.

$V'(x)=0$, nëse $a^2-8ax+12x^2=0$, d.m.th. nëse $x=\frac{a}{2}$ dhe $x=\frac{a}{6}$. Këto janë vlerat e x për të cilat funksioni $V(x)$ mund të ketë maksimum, por mund edhe të mos ketë. Është e qartë, nëse $x=\frac{a}{2}$ nuk mund të bëhet kuti.

Prandaj, zgjidhje e mundshme është $x=\frac{a}{6}$. $V''(x)=-8a+24x$, pra $V''\left(\frac{a}{6}\right)=-8a+24\cdot\frac{a}{6}=-4a<0$ (ke kujdes, $a>0$), domethënë funksioni V ka maksimum për $x=\frac{a}{6}$, d.m.th. $V_{max}=\left(a-2\cdot\frac{a}{6}\right)^2\cdot\frac{a}{6}=\frac{2a^3}{27}$.

4 Duhet të bëhet gotë e zbrazët në formë të cilindrit të rregulltë me vëllim të dhënë V. Cakto rrezen dhe lartësinë e gotës, ashtu që përpunimi i saj të jetë sa më e lirë.

Vëreje mënyrën:

- Përpunimi i gotës do të jetë më e lirë nëse syprina e saj është më e lirë, fig. 2.

$V=r^2\pi H$, kurse $S=r^2\pi+2r\pi H$. Prej $V=r^2\pi H$ vijon $H=\frac{V}{r^2\pi}$, kurse

$S=r^2\pi+2r\pi\cdot\frac{V}{r^2\pi}=r^2\pi+\frac{2V}{r}$, d.m.th. syprina e gotës është funksion prej r.

$S'(r)=2r\pi-\frac{2V}{r^2}$, π dhe V janë konstante. $P'(r)=0$ nëse $2r\pi-\frac{2V}{r^2}=0$,

$r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, d.m.th. $S''(r)=2\pi+\frac{4V}{r^3}$, pra $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)=2\pi+\frac{4V}{\frac{V}{\pi}}=6\pi>0$.

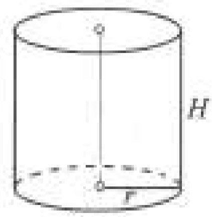


fig. 2

- Për $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, syprina ka vlerë më të vogël, kurse dimenzionet e gotës janë $H=r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

5 Te topi me rreze të dhënë R është brendashkruar koni me vëllim maksimal. Cakto rrezen dhe lartësinë e konit.

Krahasoje përgjigjen tënde me përgjigjen e dhënë:

Le të jetë r rreze, kurse H lartësia e konit (fig.3). Duhet vëllimin e konit ta shprehim si si funksion prej r dhe H, kurse njërën prej atyre madhësive ta shprehim me ndihmën e rrezes R të topit.

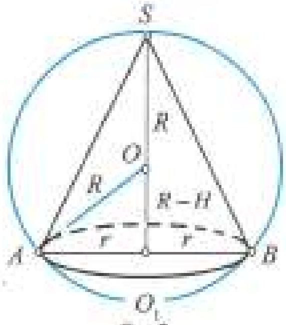


fig. 3

- Vëllimi i konit është $V=\frac{1}{3}\pi r^2 H$, $H=\overline{O_1S}$. Prej ΔAO_1O kemi

$R^2=r^2+(R-H)^2$, d.m.th. $r^2=2HR-H^2$, pra për vëllimin fitojmë

$V=\frac{1}{3}\pi(2HR-H^2)H=\frac{1}{3}\pi(2H^2R-H^3)$. Vëllimi i konit është

funksion prej H, kurse π dhe R janë konstante. $V'(H)=\frac{1}{3}\pi(4HR-3H^2)$.

- $V'(H)=0$, nëse $4HR-3H^2=0, H=0$ dhe $H=\frac{4}{3}R$. Për $H=0$ detyra nuk ka zgjidhje.

$V''(H)=\frac{1}{3}\pi(4R-6H)$, kurse për $H=\frac{4}{3}R$ kemi $V''\left(\frac{4}{3}R\right)=\frac{1}{3}\pi\left(4R-6\cdot\frac{4}{3}R\right)=-\frac{4\pi R}{3}<0.$

- Domethënë, për $H=\frac{4}{3}R$ koni ka vëllim maksimal. Prandaj, $r^2=2\cdot\frac{4}{3}R\cdot R-\left(\frac{4}{3}R\right)^2=\frac{8R^2}{9}$,

d.m.th. $r=\frac{2R\sqrt{2}}{3}$, kurse $V_{max}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{8R^2}{9}\cdot\frac{4}{3}R=\frac{32R^3\pi}{81}$.

6 Prej burimit A rrjedh rreze drite, ndaj rrafshit π, prej së cilës reflektohet, kurse pas reflektimit duhet të kalon nëpër pikën B. Në rrafshin π cakto pozitën e pikës C prej të cilës reflektohet rrezja e dritës, nëse dihet se rrzja e dritës e kalon rrugën ACB për kohë më të shkurtër, d.m.th. rruga ACB të jetë më e shkurtër.

Vëreje mënyrën:

Pikat A, C dhe B, d.m.th. rruga e përmendur e rrezes së dritës gjendet në rrafshin π_1 e cia është normale në rrafshin π, fig. 4.

- Le të jenë A_1 dhe B_1 proeksionet ortogonale të pikave A dhe B mbi rrafshin π dhe le të jetë $\overline{AA_1}=a$, $\overline{BB_1}=b$, $\overline{A_1B_1}=d$. Gjatësitë a, b, d dhe shpejtësia V e rrezes së dritës janë konstante, kurse t është e ndryshueshme. Le të jetë $\overline{A_1C}=x$. Për rrugën ACB kemi:

$\overline{ACB}=\overline{AC}+\overline{CB}=V\cdot t=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}$, pra.

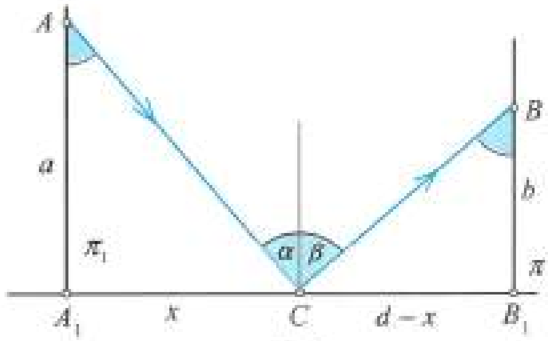


fig. 4

- funksioni është $t(x)=\frac{1}{V}\left(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}\right)$, pra

$t'(x)=\frac{1}{V}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}\right)$. $t'(x)=0$ nëse $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$, d.m.th.

$\frac{x^2}{a^2+x^2}=\frac{(d-x)^2}{b^2+(d-x)^2}$ ose $\frac{a^2+x^2}{x^2}=\frac{b^2+(d-x)^2}{(d-x)^2}$. Prej këtu vijon:

- $\frac{a^2}{x^2}=\frac{b^2}{(d-x)^2}$; $\frac{a}{x}=\frac{b}{d-x}$, pra $x_1=\frac{ad}{a+b}$ ose $\frac{a}{x}=-\frac{b}{d-x}$; pra $x_2=\frac{ad}{a-b}$. Të detyrës së dhënë, me kusht $a>b$, zgjidhja është $x_1=\frac{ad}{a+b}$, pasi $x_2=\frac{d}{1-\frac{b}{a}}>1$.

- Funksioni $t'(x)$ është i vijueshëm, pra në pikën A_1 për $x=0$, $t'(0)=-\frac{d}{V\cdot\sqrt{b^2+d^2}}<0$, kurse në pikën B_1 për $x=d$, $t'(d)=-\frac{d}{V\cdot\sqrt{a^2+d^2}}>0$. Domethënë, derivati e ndërron shenjën prej negativ në pozitiv në rrethinën e pikës C, d.m.th. funksioni ka minimum në pikën C, e cila është në largësi $x=\frac{ad}{a+b}$ prej pikës A_1.

- Nëse α është këndi i ramjes, kurse β është këndi i reflektimit të rrezes së dritës, atëherë $\angle A_1AC=\alpha$ dhe $\angle B_1BC=\beta$. Prej ΔA_1AC, $\sin\alpha=\frac{\overline{A_1C}}{AC}$; Prej ΔB_1BC, $\sin\beta=\frac{\overline{CB_1}}{BC}$; $\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\sin\beta=\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$, pra barazimi $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ për të cilin $f'(x)=0$ është i llojit $\sin\alpha=\sin\beta$, d.m.th. $\alpha=\beta$, kurse ky është ligji i njohur i reflektimit.

7 Mbi qendrën e një terace rrethore me rreze r lartësi H duhet të vendoset burim i dritës, ashtu që teraca të jetë maksimalisht e ndriçuar. Në çfarë lartësie duhet të vendoset burimi i dritës, nëse forca T e ndriçimit është dhënë me formulën $T(H)=\frac{k\cdot\sin\alpha}{r^2+H^2}$, k është konstante madhësia e së cilës është përcaktuar me forcën e burimit të dritës, α është këndi që drejtëzën SA e formon me rrafshin e teracës, S është burimi i dritës, kurse A është çfarëdo pikë prej tehut të teracës.

Vëreje mënyrën:

- Le të jetë $\overline{SO}=H$ dhe $\angle SAO=\alpha$ fig. 5. Prej ΔAOS kemi $\operatorname{tg}\alpha=\frac{H}{r}$, d.m.th. $H=r\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

- Funksionin $T(H)=\frac{k\cdot\sin\alpha}{r^2+H^2}$ mund ta shqyrtojmë edhe si funksion prej argumentit α, d.m.th. $T(\alpha)=\frac{k\cdot\sin\alpha}{r^2+r^2\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{k\cdot\sin\alpha}{r^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}=$

$=\frac{k}{r^2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, k dhe r janë konstante.

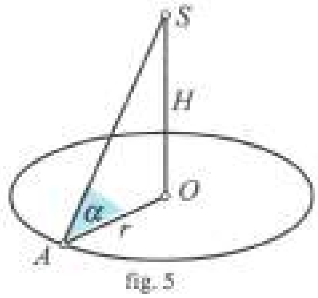


fig. 5

Le të jetë $\sin\alpha = x$, $\cos^2\alpha = 1-x^2$, pra funksioni $T(\alpha)$ është $T(x)=\frac{k}{r^2}\cdot x\cdot(1-x^2)$. $T'(x)=\frac{k}{r^2}\cdot(1-3x^2)$.

$T'(x)=0$ nëse $1-3x^2=0$, d.m.th. nëse $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Vlera $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ nuk është e mundshme, pasi $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ vijon $\alpha>180^\circ$. Zgjidhja e detyrës është $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. $T''(x)=\frac{k}{r^2}\cdot(-6x)<0$ për $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Domethënë, funksioni $T(x)$ ka maksimum për $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Prej $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, pra

$tg\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, d.m.th. lartësia e kërkuar është $H=\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

8 Komponentet F_1 dhe F_2 të forcës F ndërmjet veti formojnë kënd α. Për cilën madhësi të këndit α forca $F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2\cdot F_1\cdot F_2\cdot\cos\alpha}$ ka vlerë maksimale?

Vëreje zgjidhjen:

Forca F është funksion prej këndit α, pra $F'(\alpha)=\frac{-F_1\cdot F_2\cdot\sin\alpha}{\sqrt{F_1^2+F_2^2+2\cdot F_1\cdot F_2\cdot\cos\alpha}}$, $F'(\alpha)=0$ nëse $\sin\alpha=0$, d.m.th. $\alpha=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Për $\alpha=2k\pi$ forca F është maksimale, $F=F_1+F_2$, pasi F_1 dhe F_2 janë me kahe të njëjtë. Për $\alpha=(2k+1)\pi$ forca F është minimale, $F=|F_1-F_2|$, pasi F_1 dhe F_2 janë me kahe të kundërta.

9 Është i njohur se intenziteti i i rrymës elektrike që kalon nëpër përçues, është funksion periodik prej kohës t, e shprehur me formulën $i=c\cdot\sin\frac{2\pi t}{T}$, ku c është intenziteti maksimal i rrymës, kurse T është kohëzgjatja e një periode. Për cilën vlerë të t intenziteti i rrymës do të jetë maksimale?

Shihe përgjigjen:

Prej $i(t)=c\cdot\sin\frac{2\pi t}{T}$ kemi $i'(t)=c\cdot\cos\frac{2\pi t}{T}\cdot\frac{2\pi}{T}=\frac{2c\pi}{T}\cdot\cos\frac{2\pi t}{T}$.

$i'(t)=0$ nëse $\cos\frac{2\pi t}{T}=0$, d.m.th. $\frac{2\pi t}{T}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. $t=\frac{T}{4}+kT,\ k\in\{0,1,2,3,\ldots\}$. k nuk mund të jetë numër negativ, pasi koha e rrjedhjes së rrymës nëpër përçuesin nuk mund të jetë negativ.

Detyra:

1. Numrin 30 ndaje në dy mbledhësa, ashtu që prodhimi i tyre të jetë sa më i madh.
2. Numrin a ndaje në dy mbledhësa, ashtu që shuma prej katrorëve të tyre të jetë sa më i madh.
3. Është dhënë trekëndëshi me brinjë 10 cm dhe lartësia përkatëse 4 cm. Në trekëndësh është brendashkruar drejtkëndësh, ashtu që dy kulmet e tij të shtrihen në brinjën e dhënë, kurse dy kulmet në brinjët tjera të trekëndëshit. Caktoji brinjët e drejtkëndëshit ashtu që syprina e tij të jetë sa më e madhe.

4. Prej kartuçi që e ka formën e drejtkëndëshit me dimenzione 32 cm dhe 20 cm bën kuti pa kapak me vëllim sa më të madh.

5. Është dhënë bashkësia e trekëndëshave barakrahas perimetri i të cilit është a. Caktoji dimenzionet e trekëndëshit që ka syprinë më të madhe.

6. Te gjysmëvija rrethore me rreze r të brendashkruhet trapez barakrahas me syprinë të madhe nëse baza e madhe është diametri i vijës rrethore. Cakto lartësinë dhe bazën e vogël.

7. Cakto brinjët e trekëndëshit barakrahas që ka syprinë më të madhe, kurse është brendashkruar te elipsa $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

8. Cili kon i drejtë me syprinë $72\pi\,\text{cm}^2$ ka vëllim më të madh? Cakto vëllimin.

9. Prej të gjithë koneve të drejtë gjeneratrisat e të cilit janë 12 cm, cakto diemnzionet e konit vëllimi i të cilit është më i madh.

10. Cakto dimenzionet e cilindrit të drejtë me vëllim maksimal i cili mund të brendashkruhet te koni i drejtë me rreze të bazës R dhe lartësi H.

11. Në një trup i cili gjendet në rrafsh i mënjanuar nën këndin φ në lidhje me rrafshin horizontal vepron forca $F=\dfrac{k\cdot G}{\cos\varphi+k\cdot\sin\varphi}$, k është koeficienti i fërkimit, kurse G është pesha e trupit. Për cilin kënd φ forca F ka vlerë më të madhe?

13 KONVEKSIVITETI. KONKAVITETI. PIKAT E LAKIMIT

A Në fig. 1 është paraqitur grafiku i lakores konvekse, kurse në fig. 2 grafiku i lakores konkave.

Konkav, fjala latine që do të thotë e thelluar.

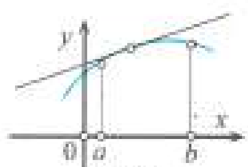


fig. 1

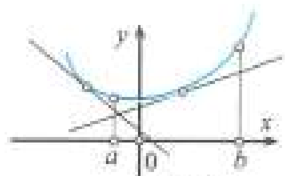


fig. 2

Vëre!

Grafiku i funksionit diferenciabil $f(x)$ në intervalin (a,b) është konveks (konkav), nëse ai është nën (mbi) tangjentën e lakores të tërhequr në çfarëdo pike prej intervalit (a,b).

Në njërën nga mësimet paraprake shqyrtuam monotoninë e funksionit $f(x)$ në intervalin me ndihmën e derivatit $f'(x)$.

Nëse $f'(x)>0$, funksioni rritet, por nëse $f'(x)<0$, funksioni zvogëlohet. Në mënyrë të ngjashme gjykojmë edhe kur e caktojmë shenjën e derivatit të dytë $f''(x)$ me rritjen dhe zvogëlimin e funksionit $f'(x)$ me këtë teoremë:

Teorema. Funksioni $f(x)$ le të ketë derivat të dytë në çdo pikë nga intervali (a,b).
Nëse $f''(x)<0$ për çdo $x\in(a,b)$, atëherë grafiku i funksionit është konveks në atë interval. Nëse $f''(x)>0$ për çdo $x\in(a,b)$, atëherë grafiku i funksionit është konkav në atë interval.

Teoremën nuk do ta vërtetojmë, kurse ajo na mundëson ta shqyrtojmë natyrën e lakueshmërisë së grafikut të funksionit $f(x)$. Funksioni $f(x)$ le të ketë derivat të dytë në intervalin (a,b).

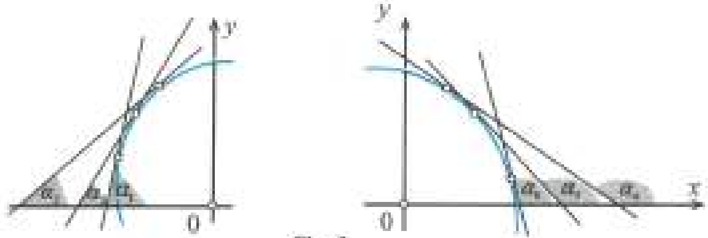


Fig. 3

- Nëse në atë interval $f''(x)<0$, atëherë funksioni $f'(x)$ zvogëlohet.
Kjo do të thotë, gjatë lëvizjes nëpër grafikun e funksionit $f(x)$ prej majtas në të djathtë, këndi i tangjentës (d.m.th. koeficienti i drejtimit) zvogëlohet fig. 3. Tangjenta rrotullohet në kahe në të cilën lëvizin akrepat e orës dhe poashtu, grafiku i funksionit shtrihet nën tangjentat, d.m.th. lakorja është konvekse.

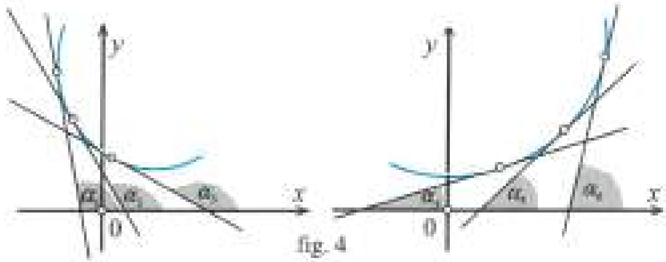


fig. 4

- Nëse në atë interval $f''(x)>0$, atëherë funksioni $f'(x)$ rritet.
Kjo do të thotë, gjatë lëvizjes nëpër grafikun e funksionit $f(x)$ prej majtas nga e djathta, këndi i tangjentës (d.m.th. koeficienti i drejtimit) rritet, fig. 4. Tangjenta rrotullohet në kahen e kundërtë të lëvizjes së akrepave të orës dhe poashtu grafiku i funksionit shtrihet mbi tangjentat, d.m.th. lakorja është konkave.

1 Cakto intervalet e konveksivitetit dhe konkavitetit të funksioneve:

a) $y=x^3$; b) $f(x)=x^3-5x^2+3x-5$; c) $y=e^{-x^2}$.

Shqyrto zgjidhjen

- b) $f'(x)=3x^2-10x+3$; $f''(x)=6x-10$. $f''(x)>0$ nëse $6x-10>0$, d.m.th. nëse $x>\dfrac{5}{3}$. Lakorja është konkave, d.m.th. për $x\in\left(\dfrac{5}{3},\infty\right)$ grafiku i tij e ka këtë formë „ ".

$f''(x)<0$ nëse $6x-10<0$, d.m.th. $x<\dfrac{5}{3}$, lakorja është konvekse, pra grafiku i tij në atë interval e ka formën „ "

2 Në cilin interval lakorja është konvekse, kurse në cilin konkav, nëse:

a) $f(x)=2x^2+\ln x,\ x>0$; b) $y=\sin x,\ x\in[0,2\pi]$.

Zgjidhje

- a) $f'(x)=4x+\dfrac{1}{x}$; $f''(x)=4-\dfrac{1}{x^2}$. $f''(x)>0$ për $4-\dfrac{1}{x^2}>0$, $4x^2-1>0$, pra për $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$, lakorja është konkave.

$f''(x)<0$ për $4-\dfrac{1}{x^2}<0$; $4x^2-1<0$, $x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, lakorja është konvekse.

Vëre!

Përcaktimi i intervaleve të konveksivitetit dhe konkavitetit të lakores $y=f(x)$ kur $f(x)$ është dy herë diferenciabil, sillet në zgjidhjen e jobarazimit $f''(x)>0$ ose $f''(x)<0$.

B Është dhënë funksionit $f(x)$ që është dy herë diferenciabil në pikën x_0. Nëse për $x<x_0$ funksioni është konveks, kurse për $x>x_0$ është konkav dhe anasjelltas, d.m.th. në pikën x_0 e ndërron konkavitetin, atëherë pika $(x_0, f(x_0))$ quhet pika *e lakimit (i fleksioinit)*. Domethënë, kur x rritet dhe kur kalon nëpër pikën x_0 në të cilën derivati i dytë $f''(x)$ e ndërron shenjën, atëherë në pikën e lakimit ai është i barabartë me zero, d.m.th.

$$f''(x)=0.$$

Mbaj mend!

Kusht i nevojshëm për lakoren $y=f(x)$ të ketë pikë të lakimit në pikën x_0 është $f''(x)=0$, kurse kusht i mjaftueshëm është $f''(x)$ ta ndërron shenjën në rrethinën e pikës x_0.

3 Caktoji pikat e lakimit të funksionit: a) $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$; b) $y=x^4-6x^2$.

Vëreje mënyrën:

b) $y'=4x^3-12x$, $y''=12x^2-12$.

$y''=0$, nëse $12x^2-12=0$, d.m.th. nëse $x=\pm 1$.

$y''>0$, nëse $x^2-1>0$, $x^2>1$ ose $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

$y''<0$, nëse $x^2-1<0$, $x^2<1$ ose $x\in(-1,1)$.

Në rrethinën e pikave $x=-1$ dhe $x=1$, derivati i dytë e ndërron shenjën.

Për $x=-1$, $y=(-1)^4-6\cdot(-1)^2=-5$, kurse për $x=1$, $y=-5$, pra pikat $P_1(-1,-5)$ dhe $P_2(1,-5)$ janë pikat lakuese të kërkuara.

Vëre!

Përcaktimi i pikave lakuese të lakores $y=f(x)$ kur $f(x)$ ka derivat të dytë qëndron në këtë:

1. Përcaktohet $f''(x)$.
2. Zgjidhet barazimi $f''(x)=0$.
3. Shqyrtohet shenja e $f''(x)$ në rrethinën e pikave që janë zgjidhje të barazimit $f''(x)=0$.

4 Cakto intervalet e konveksivitetit dhe konkavitetit dhe caktoji pikat e lakimit të lakores:

a) $y=x^3-2x^2-x+2$; b) $y=x^2(3-x)$.

Zgjidhje

a) $y'=3x^2-4x-1$; $y''=6x-4$. $y''=0$ nëse $6x-4=0$, d.m.th. $x=\frac{2}{3}$.

$y''>0$ nëse $6x-4>0$, d.m.th. $x>\frac{2}{3}$. Domethënë, prej $x\in\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ lakorja është konkave, për

$y''<0$ për $x\in\left(-\frac{2}{3},\infty\right)$ lakorja është konvekse.

Për $x=\frac{2}{3}$, $y=\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{27}$, pra pika e lakimit është $P\left(\frac{2}{3},\frac{20}{27}\right)$.

Detyra:

(1) Në cilin interval janë konveks, kurse në cilin janë konkav këto lakore:

a) $y=3x^2-10x^3$; b) $y=4x-4x^3$?

(2) Cakto intervalin e konveksivitetit dhe intervalin e konkavitetit për lakoren:

a) $f(x)=x-\frac{1}{x}$, $x\neq 0$; b) $f(x)=6x^2-4x$.

(3) Cakto pikat e lakimit për funksionet: a) $f(x)=\frac{x}{1-x}$, $x\neq 1$; b) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

Cakto intervalin te të cilat lakorja është konvekse, përkatësisht konkave dhe caktoji pikat e tyre të lakimit $(4-7)$:

(4) a) $f(x)=\frac{x}{2-x}$, $x\neq 2$; b) $f(x)=\frac{2}{x^2+2}$.

(5) a) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $x\in(0,2\pi)$; b) $f(x)=\cos 2x$, $x\in(0,2\pi)$.

(6) a) $f(x)=2x+e^{x^2}$; b) $f(x)=x\cdot e^{-x}$.

(7) a) $f(x)=x\cdot\ln^2 x$, $x>0$; b) $f(x)=x\cdot\ln x$, $x>0$.

14 SHQYRTIMI I VETIVE TË DISA FUNKSIONEVE DHE TË VIZATUARIT E GRAFIKËVE TË TYRE

Deri më tani vërejtëm se me ndihmën e derivatit të parë dhe të dytë të funksionit të dhënë saktësisht shqyrtohen disa veti të tij, si për shembull: monotonia, vlerat ekstreme, lakueshmëria (konveksiviteti, konkaviteti), pikat e lakimit. Me shqyrtimin e vetive tjera: funksioni çift, tek, periodiciteti, pikat e pavijimit, caktimi i asimptotave, fitohen mjaft të dhëna të sakta për vijimin e funksionit pra grafikun e tij mund ta vizatojmë. Prej grafikut të funksionit mund të vërejmë shumë veti të funksionit.

Që ta vizatojmë grafikun e funksionit $y=f(x)$ i shqyrtojmë këto veti:

1. Fushën e përkufizimit të funksionit.
2. Vetitë simetrike të funksionit (çift, tek, periodiciteti).
3. Pikëprerjet e grafikut të grafikut të funksionit me boshtet koordinative (zero dhe prerja me boshtin y).
4. Asimptotat e funksionit.
5. Vlerat ekstreme, natyra e tyre dhe intervalet e monotonisë.
6. Pikat e lakimit, konveksiviteti dhe konkaviteti.

Në bazë të të dhënave të cilat mund të paraqiten në tabelë (por nuk është e domosdoshme) vizatohet grafiku i funksionit. Megjithatë, të vizatuarit e grafikut shpeshherë bëhet paralelisht me shqyrtimin analitik të vetive të funksionit. Skema e përmendur nuk është e thënë bukvalisht të bëhet, d.m.th. radhitja e shqyrtimit të vewtive nuk është e rëndësishme. Nëse funksioni është çift, mjafton të shqyrtohet për $x>0$, pra të shfrytëzohet simetria. Nëse gjatë përcaktimit të vlerave ekstreme, caktimi i derivatit të dytë është i ndërlikuar, atëherë shqyrtoje ndryshimin e shenjës të derivatit të parë në rrethinën e pikës në të cilën derivati i parë është i barabartë me zero etj.

Shqyrtimi i vijimit të funksionit dhe konstruksioni i grafikut të tij do ta shqyrtojmë në disa detyra.

1 Shqyrto vijimin dhe vizatoje grafikun e funksionit $y=-x^2+2x+3$.

Vëreje mënyrën:

1. Funksioni është përkufizuar për $x\in\mathbb{R}$, d.m.th. $D_f=\mathbb{R}$.

2. $f(-x)=-(-x)^2+2(-x)+3=-x^2-2x+3\neq f(x)$,

- Funksioni nuk është çift:

$f(-x)=-x^2-2x+3=-(x^2+2x-3)\neq -f(x)$,

- Funksioni nuk është çift, domethënë funksioni nuk është as çift, as tek.
- Funksioni nuk është periodik. (Periodiciteti është i pranishëm më së shpeshti te funksionet trigonometrike).

3. Prerjet me boshtet e koordinatave.

- Prerja me boshtin x:

$y=0$, d.m.th. $-x^2+2x+3=0$, $x_1=-1$ dhe $x_2=3$. Pikëprerjet janë $A(-1,0)$ dhe $B(3,0)$.

- Prerja me boshtin y:

$x=0$, d.m.th. $y=-0^2+2\cdot 0+3=3$, pika e prerjes është $C(0,3)$.

4. Asimptotat e funksionit.

- Asimptotë horizontale nuk ka, pasi

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(-x^2+2x+3\right)=\lim_{x\to\infty} x^2\left(-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=-\infty.$$

- Asimptotë vertikale nuk ka, funksioni është përkufizuar për çdo $x\in\mathbb{R}$.

- Asimptota e pjerrët $y = kx + n$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^2 + 2x + 3}{x} = -\infty,$$ nuk ka asimptotë të pjerrët

5. Vlera ekstreme:

$y' = -2x + 2$; $y' = 0$ nëse $-2x + 2 = 0$, d.m.th. $x = 1$.

$y'' = -2 < 0$, domethënë funksioni për $x = 1$ ka maksimum $y_{max} = y(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4$.

Pika $D(1,4)$ është pika e maksimumit, pra grafiku në pikën e ka formën „ $\frown$ " .

$y' > 0$ nëse $-2x + 2 > 0$, $x < 1$, d.m.th. për $x \in (-\infty, 1)$ funksioni rritet.

$y' < 0$ nëse $-2x + 2 < 0$, $x > 1$, d.m.th. për $x \in (1, \infty)$ funksioni zvogëlohet.

6. $y'' = -2 \neq 0$, pra për çdo $x \in \mathbb{R}$ lakorja nuk ka pika të lakimit dhe në gjithë intervalin është konveks, kurse grafiku i tij e ka formën „ $\frown$ " .

Të dhënat e fituara i paraqesim në tabelë:

x	$-\infty$		-1	0		1		3		∞
y	$-$ $-\infty$	$-$	0	$+$ 3		4	$+$	0	$-$	$-$ $-\infty$
y'	$+$	$+$ $\nearrow$		$+$	$\nearrow$	0	$-$ $\searrow$		$-$ $\searrow$	$-$
y''		$-$ $\frown$		$-$	$\frown$		$-$		$-$ $\frown$	

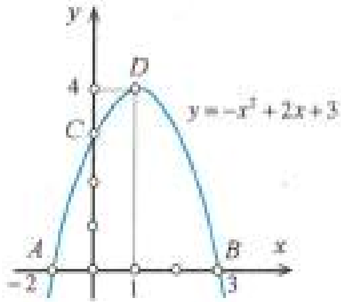


fig. 1

Grafiku i funksionmit është paraqitur në fig. 1.

2 Shqyrto vijimin dhe vizatoje grafikun e funksionit $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

Vëreje mënyrën:

1. Funksioni është përkufizuar për çdo numër real, d.m.th. $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - (-x) - 1 = -x^3 + x^2 + x - 1 \neq f(x)$ dhe

$f(-x) = -(x^3 - x^2 - x + 1) \neq -f(x)$, domethënë funksioni nuk është as çift, as tek.

3. Prerjet me boshtet koordinative.

- Prerja me boshtin y. Për $x = 0$, $f(0) = -1$, prerja është pika $A(0,1)$.
- Zerot e funksionit, prerjet me boshtin x.

Për $y = 0$, $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$;

$x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2 - 1) = (x+1)^2(x-1) = 0$, për $x = 1$ ose $x = -1$, pra pikëprerjet janë $B(-1,0)$ dhe $C(1,0)$.

- Te funksionet polinomiale përcaktimi i zerove shpeshherpë paraqet problem, pasi në atë rast kemi zgjidhjen e barazimeve të shkallës më të lartë, për zgjidhjen e së cilës nuk ka rregullë të përgjithshme.

4. Asimptotat e funksionit.

- Pasi $y = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \pm\infty$, nuk ka asimptotë horizontale.

Funksioni nuk ka asimptotë vertikale as asimptotë të pjerrët.

5. Vlerat ekstreme. $f'(x)=3x^2+2x-1.$

- $f'(x)=0$ nëse $3x^2+2x-1=0$, d.m.th. $x=-1$ ose $x=\frac{1}{3}$ janë pika në të cilat funksioni mund të ketë ose të mos ketë vlera ekstreme.

$f''(x)=6x+2.$

- Për $x=-1$, $f''(-1)=-6+2=-4<0$, domethënë për $x=-1$ funksioni ka maksimum

  $y_{max}=f(-1)=(-1)^3+(-1)^2-(-1)-1=0.$ $N(-1,0)$ është pika e maksimumit.

- Za $x=\frac{1}{3}$, $f''\left(\frac{1}{3}\right)=6\cdot\frac{1}{3}+2=4>0$, domethënë për $x=\frac{1}{3}$ funksioni ka minimum

  $y_{min}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}-1=-\frac{32}{27}.$ $M\left(\frac{1}{3},-\frac{32}{27}\right)$ është pika e minimumit.

$f'(x)=3x^2+2x-1=3(x-x_1)(x-x_2)=(x+1)(3x-1).$

- $f'(x)>0$ nëse $(x+1)(3x-1)>0$, për $x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{3},\infty\right)$ funksioni monotonisht rritet në $(-\infty,-1)$, $\left(\frac{1}{3},\infty\right)$.

- $f'(x)<0$ nëse $(x+1)(3x-1)<0$, për $x\in\left(-1,\frac{1}{3}\right)$ funksioni monotonisht zvogëlohet në $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$.

6. Pikat e lakimit, konveksiviteti dhe konkaviteti. $f''(x)=6x+2.$

- $f''(x)=0$ per $x=-\frac{1}{3}$, $f''(x)>0$ nese $6x+2>0$ d.m.th. për $x>-\frac{1}{3}$ lakorja është konkave.

  $f''(x)<0$ nese $6x+2<0$ d.m.th. per $x<-\frac{1}{3}$, lakorja është konvekse, kurse për $x=-\frac{1}{3}$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{16}{27}$, d.m.th. $P\left(-\frac{1}{3},-\frac{16}{27}\right)$ është pikë e lakimit (e infleksionit).

Tabela e të dhënave:

x	$-\infty$		-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1		∞
$f(x)$	$-$ $-\infty$	$-$	0	$-$ $-\frac{16}{27}$	$-$ -1	$-$ $-\frac{32}{27}$	0	$+$ $+$ $+$	∞
$f'(x)$	$+$	$+$ $\nearrow$	0	$-$	$-$ $\searrow$	0	$+$	$+$ $\nearrow$	$+$
$f''(x)$		$-$ $\frown$	$-$ $\frown$	0	$+$ $\smile$		$+$ $\smile$		$+$ $\smile$

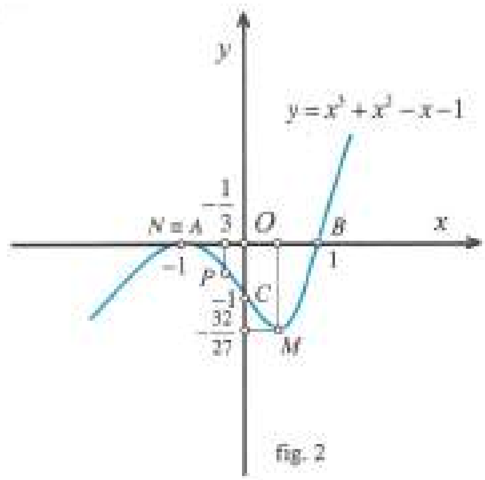


fig. 2

Grafiku i funksionit është në fig. 2

3 Shqyrto vijimin dhe vizatoje grafikun e funksionit $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Krahasoje zgjidhjen tënde me zgjidhjen e dhënë.

1. Funksioni është përkufizuar për $x-2\neq 0, x\neq 2$, d.m.th. $D_f=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

2. Funksioni çift dhe tek. $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{-x-2}=\dfrac{x^2}{-x-2}\neq f(x)$; $f(-x)=\dfrac{x^2}{-x-2}=-\dfrac{x^2}{-x-2}\neq -f(x)$, funksioni nuk është as çift as tek.

3. Prerja me boshtet e koordinatave.

- Prerja me boshtin y: për $x=0$, $y=0$, $A(0,0)$.
- Prerja me boshtin x: për $y=0$, $\dfrac{x^2}{x-2}=0$, $x=0$, $A(0,0)$.

4. Asimptotat e funksionit.

- Horizontale: $y=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-\dfrac{2}{x}}=+\infty$;

  $y=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1-\dfrac{2}{x}}=-\infty$. Funksioni nuk ka asimptota horizontale.

- Asimptota vertikale është $x-2=0$, $x=2$. do ta shqyrtojmë sjelljen e funksionit në rrethinën e pikës $x=2$.

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2+h}\frac{x}{x-2}=\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^2}{2+h-2}=\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^2}{h}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2-h}\frac{x}{x-2}=\lim_{h\to0}\frac{(2-h)^2}{2-h-2}=\lim_{h\to0}\frac{(2-h)^2}{-h}=-\infty.$$

- Asimptota e pjerrët. $y=kx+n$; $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x-2}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=1.$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-k(x)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-2}=2$, $y=x+2$ është asimptotë e pjerrët.

5. Vlerat ekstreme. $f'(x)(=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$; $f'(x)=0, x^2-4x=0, x=0$ ose $x=4$. $f''(x)=\dfrac{8}{(x-2)^3}$.

- Për $x=0$, $f''(0)=-1<0$, funksioni ka maksimum $y_{max}=f(0)=0$; $A(0,0)$.
- Për $x=4$, $f''(4)=1>0$, funksioni ka minimum $y_{min}=f(4)=\dfrac{4^2}{4-2}=8$; $B(4,8)$.
- $f'(x)>0$ nëse $x^2-4x>0$, $x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$. Funksioni rritet në $(-\infty,0)$, $(4,+\infty)$.
- $f'(x)<0$ nëse $x^2-4x<0$, për çdo $x\in(0,4)$. Funksioni zvogëlohet në $(0,4)$.

6. Pikat e lakimit. $f''(x)=0$, nëse $\dfrac{8}{(x-2)^3}=0$, $f''(x)\neq 0$ për çdo $x\in D_f$, pra lakorja nuk ka pika të lakimit.

Pasi $8>0$, shenja e derivatit të dytë varet prej emëruesit.

$f''(x)>0$ nëse $x-2>0$, d.m.th. për $x>2$ lakorja është konkave.

$f''(x)<0$ nëse $x-2<0$, d.m.th. për $x<2$ lakorja është konvekse.

Të dhënat e fituara i paraqesim tabelarisht:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y	$-$ $-\infty$	$-$	0	$-$	‖	$+$	8	$+$	$+$ $+\infty$
y'	$+$	$+$ ↗	0	$-$ ↘		$-$	0	$+$ ↗	$+$
y''	$-$ ⌢		$-$ ⌢		|	$+$ ⌣		$+$ ⌣	

$y=x-2$

x	-1	0	1
y	1	2	3

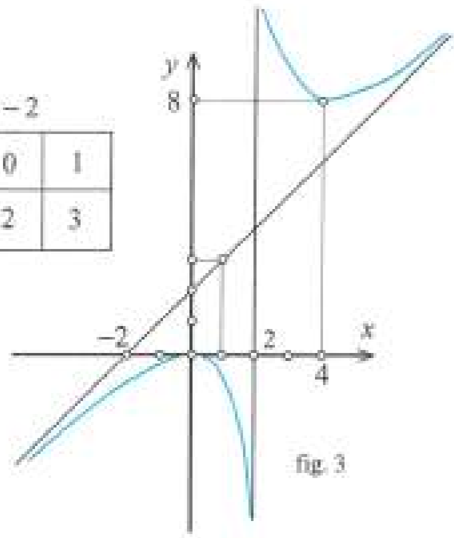


fig. 3

Grafiku i funksionit është në fig. 3

4 Shqyrto vijimin dhe vizatoje grafikun e funksionit $y=x\cdot e^x$.

Krahasoje zgjidhjen tënde me zgjidhjen e dhënë:

1. Funksioni është përkufizuar për çdo numër real, d.m.th. $D=(-\infty,\infty)$.

2. $f(-x)=-x\cdot e^{-x}\neq f(x)$ ose $f(-x)\neq -f(x)$, funksioni nuk është as çift as tek.

3. Për $x=0$ dhe $y=0$, $A(0,0)$.

4. Asimptota horizontale: $y=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$; $y=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$, domethënë boshti x është asimptotë horizontale kur $x\to-\infty$ (nga ajo afrohen prej poshtë), $y\to-0$.

   Asimptotat vertikale:

5. Vlerat ekstreme.

$f'(x)=(1+x)e^x$; $f'(x)=0$ nëse $1+x=0$, d.m.th. $x=-1$. $\qquad f''(x)=(2+x)e^x$.

- Për $x=-1$, $f''(-1)=e^{-1}>0$, $y_{\min}=f(-1)=-1\cdot e^{-1}=-e^{-1}$, $B(-1,-e^{-1})$.
- $f'(x)>0$, $(1+x)e^x>0$, $1+x>0$, $x>-1$. Për $x\in(-1,\infty)$ funksioni rritet.
- $f'(x)<0$, $x<-1$, $x\in(-\infty,-1)$ funksioni zvogëlohet.

6. Pikat e lakimit. $f''(x)=(2+x)e^x$; $f''(x)=0$ per $x=-2$, $f(-2)=-2e^{-2}$. $P(-2,-2e^{-2})$.

$f''(x)>0$, nëse $x>-2$, d.m.th. për $x\in(-2,\infty)$ lakorja është konkave.

$f''(x)<0$, nëse $x<-2$, d.m.th. për $x\in(-\infty,-2)$ lakorja është konvekse.

Të dhënat janë dhënë në tabelë:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	$-2e^{-2}$	$-$	$-e^{-1}$	$-$	0	$+$ $+$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ $\searrow$	$-$		0	$+$ $\nearrow$	$+$	$+$	
$f''(x)$	$-$	$-$ $\frown$	0	$+$	$\smile$	$+$	$\smile$	$+$	

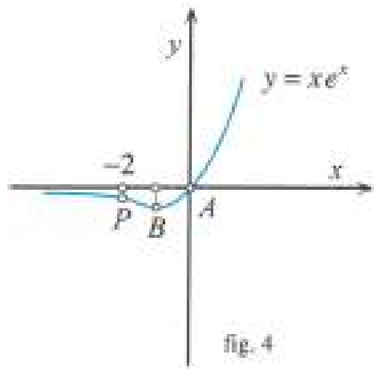


fig. 4

Grafiku i funksionit është dhënë në fig. 4

Detyra:

Shqyrto vijimin dhe vizatoje grafikun e funksionit $(1-6)$:

1. a) $y=2x^2-3x+2$; b) $y=x^3-3x+2$; c) $y=x^4-2x^2$.

2. a) $y=\dfrac{x+2}{2x+1}$; b) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

3. a) $y=\dfrac{4x}{4-x^2}$; b) $y=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$.

4. a) $y=x^2\cdot e^x$; b) $y=x\cdot e^{-x^2}$.

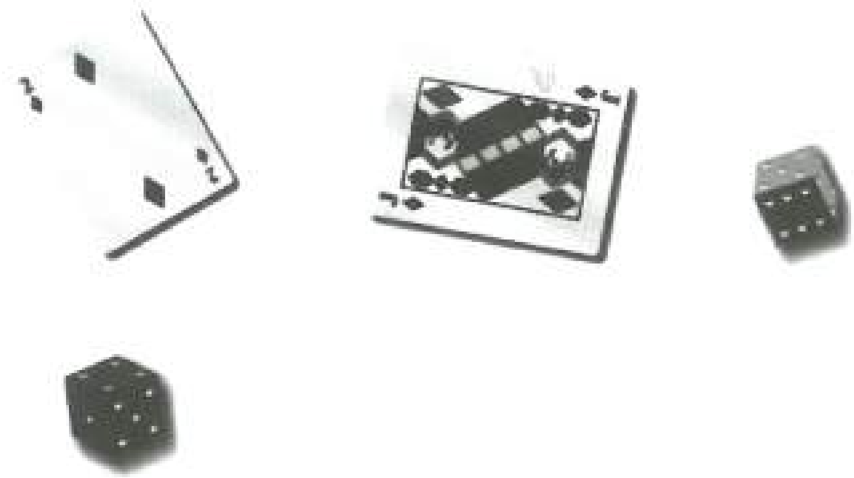
5. a) $y=x\cdot\ln x$; b) $y=x-\ln x$.

6. a) $y=\sin x+\cos x$; b) $y=\sin^2 x-3\sin x$.

TEMA 4

GJASA

Në këtë temë do të mësosh për:



1 NGJARJET E RASTIT DHE GJASA

Kujtohu!

1. Një monedhë hudhet në ajër dhe pas ramjes së saj në tokë, në pjesën e sipërme të monedhës mund të paraqitet „stema" ose „koka". Me hudhjen e monedhës kemi krye një *eksperiment* dhe si rrezulltat i atij eksperimenti mund të fitohet njëra prej këtyre mundësive: „në pjesën e sipërme të monedhës paraqitet stema" ose „në pjesën e sipërme të monedhës të paraqitet koka".

2. Nëse uji ngrohet deri $100°C$, atëherë ai do të vlon. Këtu është krye një eksperiment (nxemja e ujit) dhe si rrezulltat i ati eksperimenti paraqitet mundësia „uji vlon".

3. Nëse provohet rregullshmëria e prodhimeve në një fabrikë, atëherë meret nga një prodhim, provohet rregullshmëria e kualitetit të tij dhe konstatohet a është në rregull ose jo. Domethënë, eksperimenti është kontrolla e kualitetit, kurse të mundshme janë: „prodhimi është në rregull" dhe „prodhimi nuk është në rregull".

4. Bëhet testi që të kontrollohen njohuritë e nxënësve. Notimi i testit bëhet me ndihmën e pikëve prej 0 deri 100. Atëherë eksperimenti është notimi i një nxënësi, kurse e mundshme është: „nxënësi të arrinë i poenë", ku $i = 0, 1, 2, \ldots, 100$.

A *Mbaj mend!*

Eksperiment është çdo realizim i bashkësisë së kushteve të caktuara S.
Çdo rezulltat në lidhje me eksperimentin S quhet *ngjarje* në lidhje me eksperimentin S.

- Ngjarjet shënohen me shkronjat e mëdhaja të alfabetit latin: A, B, C,...
- Një eksperiment mund të jetë deterministik (i përcaktuar) dhe jodeterministik (i pa përcaktuar). Nëse mundësia e eksperimentit është i njohur prej më parë, atëherë ai eksperiment është *deterministik*, në të kundërtën, mundësia nuk mund me siguri të dihet prej më parë, ai eksperiment është *jodeterministik*.

1 Si janë eksperimentet të paraqitura në shembujt 1, 2, 3 dhe 4?

B **2** Të kthehemi përsëri në eksperimentin e hudhjes së monedhës. Le të jenë krye 8 seri prej nga 1000 eksperimente nën kushte të njëjta.

Te çdonjëri prej eksperimenteve vërehet ngjarja A: „paraqitet stema". Me $n_i(A)$ shënohet numri i eksperimenteve të eksperimenteve të serisë i në të cilën është paraqitur ngjarja A. Rezulltatet prej këtyre tetë serive janë paraqitur në këtë tabelë:

i	$n_i(A)$	$\frac{n_i(A)}{n}$
1	502	0,502
2	504	0,504
3	492	0,492
4	500	0,500
5	510	0,510
6	490	0,490
7	493	0,493
8	509	0,509

Në shtyllën e fundit janë dhënë vlerat e herësit $\frac{n_i(A)}{n}$, ku n është numri i eksperimenteve të kryera në një seri. Në rastin tonë $n = 1000$.

Vëren se të gjitha vlerat në këtë shtyllë janë afër deri më 0,5. Poashtu, nëse numri i eksperimenteve në një seri zmadhohet, atëherë ai herës afrohet aq më shumë deri 0,5

Mbaj mend!

Numri $\frac{n_i(A)}{n}$ quhet *frekuenca relative* për ngjarjen A në serin i. Numri real rreth të cilit grumbullohen këta frekuenca relative quhet *gjasa statistike* (ose *empirike*) e ngjarjes A.

- Sa është gjasa statistike e ngjarjes A: është paraqitur stema, në eksperimentin hudhja e monedhës?

- Për ngjarjen e dhënë A në lidhje me eksperimentin S, mund të zbatohet ky përkufizim, i quajtur përkufizim statistik i gjasës, nëse:

  1. eksperimenti S mund të përsëritet në kushte të njëjta sa herë që duam ;
  2. frekuencat relative të ngjarjes A, në çdonjërën prej më shumë serive të eksperimenteve të kryera, janë numra të cilët përafërsisht janë të barabartë.

- Kushti 2 siguron stabilitet statistik, kurse kushti 1 siguron kontrollën e kushtit 2.

- Nëse për eksperimentin S janë plotësuar kushtet 1 dhe 2, atëherë çdo ngjarje në lidhje me eksperimentin S, quhet *ngjarje e rastit.*

C **3** T'i shqyrtojmë këto eksperimente dhe ngjarjet në lidhje me ato.

a) Eksperimenti le të jetë hudhja e zarit. Shqyrtohen ngjarjet:

A_1: është paraqitur numër prej 1 deri më 6,
A_2: është paraqitur numri 7.

b) Eksperimenti nxjerrja e topit prej kutisë në të cilën ka 5 topa të bardhë. Shqyrtohen ngjarjet:

B_1: nxjerrja e topit të bardh,
B_2: nxjerrja e topit të zi.

c) Eksperimenti është notimi i nxënësit rastësisht të zgjedhur. Shqyrtohen ngjarjet:

C_1: nxënësi ka marrë notë prej 1 deri më 5, C_2: nxënësi ka marrë notë 12.

- Çka mund të thuhet për ngjarjet e përmendura?

Përgjigje.

Ngjarjet A_1, B_1 dhe C_1 paraqiten gjatë çdo realizimi të eksperimentit përkatës, kurse ngjarjet A_2, B_2 dhe C_2 nuk paraqiten asnjë herë gjatë realizimit të eksperimentit.

Mbaj mend!

Ngjarje e sigurtë në lidhje me eksperimentin e dhënë ngjarja e cila paraqitet gjatë çdo realizimi në atë eksperiment.
Ngjarje e pamundshme në lidhje me eksperimentin e dhënë është ngjarje që nuk paraqitet asnjë herë gjatë realizimit të ekesperimentit të dhënë.

Domethënë, A_1, B_1 dhe C_1 janë të sigurta, kurse A_2, B_2 dhe C_2 – ngjarje të pamundshme për eksperimentet përkatëse.

Detyra:

(1) Eksperimenti le të jetë hudhja e zarit. Bën 4 seri prej nga 50 hudhje dhe caktoje gjasën statistike të paraqitjes së paraqitjes së ngjarjeve:

A: në pjesën e sipërme të zarit paraqitet numri 2;

B: në pjesën e sipërme të zarit paraqitet numër çift.

(2) Eksperimenti është nxjerrja e letrës prej shpilit me 52 letra. Bën 5 seri prej nga 100 eksperimente. Gjatë çdo tërheqëje, regjistro numrin ose shenjën e letrës dhe këtheje prapa te shpili. Cakto cili është numri rreth të cilit grumbullohen dendësitë relative të ngjarjeve:

A: është tërhequr letër me numrin 10;

B: është tërhequr letër me shenjën gjeth.

2 BASHKËSIA E NGJARJEVE ELEMENTARE DHE OPERACIONET ME NGJARJE

A Ta shqyrtojmë eksperimentin hudhja e zarit. Disa prej ngjarjeve të mundshme të rastit në lidhje me këtë eksperiment janë këto:

A: paraqitet numër çift;
B: paraqitet numër i plotëpjesëtueshëm me 3;
E_1: paraqitet numri 1;
E_2: paraqitet numri 2;
E_3: paraqitet numri 3;
E_4: paraqitet numri 4;
E_5: paraqitet numri 5;
E_6: paraqitet numri 6.

1 Vëre ndryshimin ndërmjet ngjarjeve A dhe B, prej njërës dhe ngjarjeve E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 dhe E_6 nga ana tjetër.

Ngjarja A paraqitet nëse paraqitet njëra prej ngjarjeve E_2, E_4 ose E_6, kurse ngjarja B paraqitet nëse paraqitet ngjarja E_3 ose nëse paraqitet E_6. Domethënë, ngjarja A mund të zbërthehet në ngjarjet E_2, E_4 dhe E_6, kurse ngjarja B mund të zbërthehet në ngjarjet E_3 dhe E_6.

Nga ana tjetër, ngjarjet E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 dhe E_6 nuk mund të zbërthehen në ngjarje të tjera. Prandaj, ato ngjarje i quajmë *ngjarje elementare*. Ngjarjet elementare do t'i shënojmë me simbolet E me indeks 1,2,...

Mbaj mend!

Ngjarje elementare në lidhje me eksperimentin e dhënë është çdo mundësi logjike e cila nuk mund të zbërthehet në ngjarje tjera. Poashtu, gjatë çdo realizimi të eksperimentit paraqitet një dhe vetëm një ngjarje elementare.
Bashkësia e të gjitha ngjarjeve të këtilla në lidhje me një eksperiment quhet ***bashkësia e ngjarjeve elementare*** dhe shënohet me Ω.

2 Cakto bashkësinë e ngjarjeve elementare për eksperimentin hudhja e zarit.

Zgjidhje:

Gjatë çdo realizimi të eksperimentit paraqitet njëra dhe vetëm njëra prej ngjarjeve E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 dhe E_6, prandaj bashkësia e ngjarjeve elementare në lidhje me këtë eksperiment është

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}.$$

3 Cakto bashkësinë e ngjarjeve elementare për eksperimentin hudhja e dy monedhave.

Shihe zgjidhjen:

Gjatë hudhjes së një monedhe, e mundshme është „paraqitet koka" ose „paraqitet stema" (do të shkruajmë shkurtimisht „koka" ose „stema"). Por, eksperimenti përbëhet prej hudhjes të dy monedhave së bashku, pra të mundshme do të jenë çiftet e radhitura, ku elementin e parë do ta shënojmë mundësinë e monedhës së parë, kurse elementi i dytë mundësia e të dytës. Me fjalë tjera, bashkësia e ngjarjeve elementare është kjo:

$$\Omega = \{(\text{koka, koka}), (\text{koka, stema}), (\text{stema, koka}), (\text{stema, stema})\}.$$

4 Eksperimenti le të jetë hudhja e monedhës deri sa nuk paraqitet stema. Cakto bashkësinë e ngjarjeve elementare.

Zgjidhje:

Bashkësia e ngjarjeve elementare është e formës $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots\}$, ku $E_1 = (\text{stema})$, $E_2 = (\text{koka, stema})$, etj. Në rastin e përgjithshëm për fiks $i = 2,3,\ldots$, ngjarja elementare

$$E_i = (\underbrace{\text{koka, koka,..., koka, stema}}_{i-1})$$

dhe ai paraqitet nëse në $i-1$ hudhjet e para të monedhës paraqitet koka, kurse në i-tën hudhje stema. Në këtë rast, bashkësia e ngjarjeve elementare është bashkësi e numërueshme e pafundshme, pasi teoretikisht eksperimenti mund të mos mbaron asnjë herë.

5 Cakto bashkësinë e ngjarjeve elementare për eksperimentin matja e njeriut rastësisht të zgjedhur nga grupi i njerëzve.

Zgjidhje:

Nëse x është lartësia e personit të zgjedhur në centimetra, atëherë $x \in [50,250]$, ku 50 është lartësia minimale, kurse 250 lartësia maksimale që mund ta ketë një njeri. Tani, bashkësia e ngjarjeve elementare është i formës $\Omega = \{x \mid x \in [50, 250]\} = [50, 250]$. Në këtë rast, Ω është interval, d.m.th. është bashkësi e pafundshme e panumërueshme.

Prej shembujve paraprak mund të vërejmë se varësisht prej eksperimentit, bashkësia e ngjarjeve elementare nuk mund të jetë e fundshme, ose bashkësi e pafundshme e panumërueshme.

Në pjesën e më tutjeshme të tekstit do të ndalemi te eksperimentet për të cilët bashkësia e mgjarjeve elemenetare është e fundshme.

B Te detyra 1 përfundojmë se ngjarja A do të paraqitet njëra prej ngjarjeve E_2, E_4 ose E_6, kurse ngjarja B do të paraqitet nëse paraqitet ngjarja E_3 ose nëse paraqitet ngjarja E_6. Prej këtu, ngjarjet A dhe B mund të shkruhen në këtë mënyrë $A = \{E_2, E_4, E_6\}$, $B = \{E_3, E_6\}$. Të vërejmë se ngjarjet A dhe B janë paraqitur si nënbashkësi prej bashkësisë së ngjarjeve elementare Ω.

Mbaj mend!

Ngjarje rasti është çfarëdo nënbashkësi prej bashkësisë së ngjarjeve elementare Ω.
Do të themi se ngjarja *A është paraqitur* nëse është paraqitur ndonjëra prej ngjarjeve elementare të cilët i takojnë nënbashkësisë përkatëse të ngjarjeve elementare.

6 Nëse eksperimenti është hudhja e dy monedhave, përshkruaje ngjarjen C: të paktën një herë është paraqitur stema.

Përgjigje:

Ngjarja C do të paraqitet nëse te njëra prej monedhave paraqitet stema, kurse te tjetra koka nëse te dy monedhat të paraqitet stema, d.m.th.

$$C = \{(\text{koka, stema}), (\text{stema, koka}), (\text{stema, stema})\}.$$

7 Eksperimenti përbëhet në hudhjen e dy zareve. Të përshkruhet bashkësia e ngjarjeve elementare dhe këto ngjarje të rastit:

A: te dy zaret të paraqitet numër çift;

B: te zari i parë të paraqitet numër çift, kurse te i dyti numër tek.

Zgjidhje:

Bashkësia e ngjarjeve elementare për këtë eksperiment do të përbëhet prej çifteve të radhitura (x, y), ku x është mundësia e zarit të parë, kurse y mundësia e zarit të dytë $x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Prej këtu,

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

Për ngjarjen A fitohet kjo: $A = \{(x, y) \mid x, y \in \{2,4,6\}\}$, ose në formën e zbërthyer

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\},$$

kurse ngjarja B kemi: $B = \{(x, y) \mid x \in \{2,4,6\}, y \in \{1,3,5\}\}$, ose

$$B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}.$$

Ngjarja e sigurtë paraqitet gjithmonë kur realizohet eksperimenti, d.m.th. çdo ngjarje elementare mundëson deri në paraqitjen e saj. Prandaj ajo shënohet me Ω. Ngjarja e pamundshme, nuk paraqitet asnjë herë kur realizohet eksperimenti, përkatësisht asnjë ngjarje elementare nuk mundëson deri te paraqitja e saj. Prej këtu, ngjarjen e pamundshme do ta shënojmë me $\varnothing$.

C

Mbaj mend!

Prodhimi i ngjarjeve A dhe B është ngjarje e cila paraqitet atëherë dhe vetëm atëherë kur do të paraqiten të dy ngjarjet A dhe B. Ajo ngjarje është përcaktuar me bashkësinë e ngjarjeve elementare që është prerje e ngjarjeve elementare të ngjarjes A dhe ngjarjes B. Prodhimi i dy ngjarjeve A dhe B shënohet me $A\cap B$ ose AB.

8 Eksperimenti le të jetë hudhja e zarit. I shqyrtojmë ngjarjet:

A: paraqitet numër më i vogël ose i barabrtë me 3;

B: paraqitet numër i plotpjesëtueshëm me 3;

C: paraqitet numër më i madh se 4.

Të caktohet prodhimi i ngjarjeve A dhe B dhe prodhimi i ngjarjeve A dhe C.

Zgjidhje:

Ngjarjet A, B dhe C përshkruhen në këtë mënyrë: $A=\{E_1, E_2, E_3\}$, $B=\{E_3, E_6\}$ dhe $C=\{E_5, E_6\}$. Ngjarja $A\cap B$ paraqet se është paraqitur numër i cili është më i vogël ose i barabartë me 3 dhe i plotëpjesëtueshëm me 3, pra kështu $A\cap B=\{E_3\}$. Ngjarja $A\cap C$ shënon se është paraqitur numër i cili është më i vogël ose i barabartë me 3 dhe më i madh se 4, që është e pamundshme. Domethënë, ngjarjet A dhe C nuk mund të paraqiten njëkohësisht, d.m.th. $A\cap C=\varnothing$.

Mbaj mend!

Nëse dy ngjarje A dhe B nuk mund të paraqiten njëkohësisht atëherë ato quhen *ngjarje disjunkte*. Prodhimi i tyre është ngjarje e pamundshme, d.m.th. $A\cap B=\varnothing$.

Mbaj mend!

Shuma e ngjarjeve A dhe B është ngjarje e cila paraqitet atëherë dhe vetëm atëherë kur do të paraqitet të paktën njëra prej ngjarjeve A ose B. Ajo ngjarje është përcaktuar me bashkësinë e ngjarjeve elementare që është union prej bashkësive të ngjarjeve elementare të bashkësisë A dhe ngjarjes B.
Shuma e dy ngjarjeve A dhe B, në rastin e përgjithshëm, shënohet me $A\cup B$.
Për deri sa ngjarjet A dhe B janë disjunkte, atëherë shumën e tyre do ta shënojmë me $A+B$.

Kur thuhet se është paraqitur të paktën njëra prej ngjarjeve A ose B, atëherë nënkuptohet se është paraqitur ose vetëm ngjarja A ose vetëm ngjarja B ose të dy ngjarjet njëkohësisht.

Nëse ngjarjet A dhe B janë disjunkte, atëherë njëkohësisht paraqitja e të dy ngjarjeve është e pamundshme, pra paraqitja e ngjarjes $A \cup B$ nënkupton paraqitjen ose vetëm të ngjarjes A, ose vetëm ngjarja B. Prandaj, në këtë rast, për shumë të dy ngjarjeve shfrytëzohet shënimi $A + B$. Domethënë, $A + B = A \cup B$, nëse $AB = \varnothing$.

9 Cakto shumën me ngjarjeve A dhe B; si edhe ngjarjet A dhe C, nëse A, B dhe C janë ngjarjet të përkufizuara te detyra 8.

Zgjidhje:

Ngjarjet A, B dhe C janë përcaktuar me: $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_6\}$ dhe $C = \{E_5, E_6\}$. Ngjarja $A \cup B$ do të thotë se do të paraqitet numri më i vogël se 3 ose numër i plotëpjesëtueshëm me 3, dhe kjo mund të përshkruhet në këtë mënyrë:

$$A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_6\}.$$

Ngjarja $A \cup C$ do të thotë se do të paraqitet numër i cili nuk është më i madh se 3 ose numër i cili është më i madh se 4. Gjithashtu, te detyra 8 vërejtëm se ngjarjet A dhe C janë disjunkte. Prej këtu, për shumën e tyre fitojmë $A + C = \{E_1, E_2, E_3, E_5, E_6\}$.

Mbaj mend!

Ngjarja e kundërtë e ngjarjes A është ngjarje e cila paraqitet atëherë dhe vetëm atëherë kur nuk paraqitet ngjarja A. Kjo ngjarje shënohet me $\overline{A}$. Bashkësia e ngjarjeve elementare $\overline{A}$ është komplement e bashkësisë së ngjarjeve elementare përkatësisht të ngjarjes A në lidhje me Ω.
Për çdo ngjarje A vlen:

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = \Omega.$$

10 Cakto ngjarjet e kundërta të ngjarjeve A dhe B prej detyrës 8.

Vëreje zgjidhjen:

Ngjarja A nuk do të paraqitet, nëse paraqitet njëra prej ngjarjeve E_4, E_5 ose E_6, prandaj $\overline{A} = \{E_4, E_5, E_6\}$, kurse përkatësisht $\overline{B} = \{E_1, E_2, E_4, E_5\}$.

Mbaj mend!

Ngjarja A e *tërheq* ngjarjen B (shkruajmë $A \subseteq B$), nëse gjithmonë kur paraqitet ngjarja A paraqitet edhe ngjarja B.

11 Ta shqyrtojmë përsëri eksperimentin hudhja e dy monedhave. Le të jetë

A: paraqitet saktësisht koka; B: paraqitet të paktën koka.

Mund të vërehet se gjithmonë kur do të paraqitet ngjarja A paraqitet edhe ngjarja B, d.m.th. $A \subseteq B$.

Mbaj mend

Nëse $A \subseteq B$ dhe $B \subseteq A$, atëherë për ngjarjet A dhe B themi se janë *të barabarta*.

12 Përsëri, eksperimenti le të jetë hudhja e dy monedhave. Shqyrtohen këto ngjarje:

A: paraqitet të paktën një kokë; B: paraqitet të paktën një stemë.

Përshkruani ngjarjet A, B, $A \cap B$, $A \cup B$.

Pasi ngjarjet e rastit janë nënbashkësi të bashkësisë së ngjarjeve elementare në lidhje me një eksperiment, për operacionet me ngjarje vlejnë ligje të njëjtë sikurse për operacionet me bashkësi. Disa prej tyre, do t'i shfrytëzojmë në ligjërimin e më tutjeshëm, ato janë këto.

Kujtohu!

Ligji distributiv:

$$A(B \cup C) = AB \cup AC,$$

$$(A \cup B)C = AC \cup BC.$$

Ligjet e De Morganit:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Ç Në këtë pjesë do t'i përgjithësojmë përkufizimet për shumë dhe prodhim për më shumë se dy ngjarje.

Mbaj mend!

Shuma e ngjarjeve $A_1, A_2, \ldots, A_n$ është ngjarja e cila paraqitet atëherë dhe vetëm atëherë kur do të paraqitet të paktën njëra prej ngjarjeve $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Kjo ngjarje shënohet me $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, kurse bashkësia e tij është union prej bashkësisë së ngjarjeve elementare përkatësisht të çdonjërit prej ngjarjeve $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Mbaj mend!

Prodhimi i ngjarjeve $A_1, A_2, \ldots, A_n$ është ngjarje e cila paraqitet atëherë dhe vetëm atëherë kur do të paraqiten njëkohësisht të gjitha ngjarjet $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Kjo ngjarje shënohet me $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ (ose $A_1\ A_2 \ldots A_n$), kurse bashkësia e ngjarjeve elementare është prerje prej bashkësisë së ngjarjeve elementare përkatësisht të çdonjërës prej ngjarjeve $A_1, A_2, \ldots, A_n$

13 Në shënjestër gjuhet tri herë. Shqyrtohen ngjarjet A_1, A_2 dhe A_3 të cilat paraqesin të qëlluarit e shënjestrës në të qëlluarit e parë, të dytë dhe të tretë, përkatësisht. Me ndihmën e këtyre ngjarjeve, të përshkruhen këto ngjarje:

B: janë arritur tre të qëlluara;

C: shënjestra tre herë nuk është qëlluar;

D: është arritur një e qëlluar;

E: është arritur një e pa qëlluar;

F: është arritur jo më shumë se dy të qëlluara;

G: deri në gjuajtjen e tretë nuk ka të qëlluar.

Shihe zgjidhjen:

- Ngjarja B do të paraqin të gjitha tre ngjarjet A_1, A_2 dhe A_3, njëkohësisht. Prej këtu, $B = A_1A_2A_3$.

- Ngjarja C do të paraqitet nëse nuk paraqitet asnjëra prej ngjarjeve A_1, A_2 dhe A_3, d.m.th. nëse paraqiten ngjarjet e tyre të kundërta, pra $C = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

- Ngjarja D do të paraqitet nëse paraqitet të paktën njëra prej ngjarjeve A_1, A_2 dhe A_3, pra $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Përkatësisht, $E = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$.

- Të vërejmë se ngjarja F do të paraqitet nëse paraqitet ngjarja E, dhe anasjelltas, paraqitja e ngjarjes F e tërheq paraqitjen e ngjarjes E. Domethënë, $F = E$.

- Ngjarja G do të paraqitet nëse nuk paraqiten ngjarjet A_1 dhe A_2, pra $G = \overline{A}_1\overline{A}_2$.

14 Një anije ka një timon, 4 kazana me avull dhe 2 turbina. I shënojmë këto ngjarje:

B_k: kazani me avull k është në rregull, $k = 1, 2, 3, 4$;

C_j: turbina j është në rregull, $j = 1, 2$.

Ngjarja D: anija është në gjendje të rregullt për vozitje, mundet nëse është në rregull timoni, të paktën njëri prej kazanave dhe të paktën njëra prej turbinave. Të përshkruhen ngjarjet D dhe $\overline{D}$, me ndihmën e ngjarjeve A, B_k dhe C_j

Zgjidhje:

- Me shfrytëzimin e operacioneve të ngjarjeve A, B_k dhe C_j ngjarja D mund të përshkruhet si $D = A(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)(C_1 \cup C_2)$. Ngjarjen $\overline{D}$ do ta përshkruajmë duke i shfrytëzuar ligjet e De Morganit. Kështu, $\overline{D} = \overline{A} \cup \overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4 \cup \overline{C}_1\overline{C}_2$.

Detyra:

1. Eksperimenti përbëhet së pari prej hudhjes së monedhës. Pastaj, nëse paraqitet stema, hudhet zari dhe regjistrohet numri i pikave në anën e sipërme të zarit, por nëse paraqitet koka, monedha hudhet edhe një herë. Të përshkruhet bashkësia prej ngjarjeve elementare.

2. Në një kuti ka 5 topa të numëruara me numrat prej 1 deri më 5. Në mënyrë të rastësishme nxirren topa një nga një (pa i këthyer), për deri sa nuk nxirret top me numër tek. Nëse regjistrohen numrat e topave të nxjerrura, të përshkruhet bashkësia e ngjarjeve elementare.

3. Eksperimenti përbëhet në hudhjen e tre zareve. Të përshkruhet bashkësia e ngjarjeve elementare edhe këto ngjarje të rastit:

   A: te dy zaret e parë të paraqitet numër çift, kurse te i treti numër tek;

   B: te të tre zaret të paraqitet numër tek;

   C: shuma e pikëve te të tre zaret është numër çift;

   D: te të dy zaret e parë të paraqitet vlera e njëjtë;

   E: te të tre zaret të mos paraqitet asnjë pesëshe;

   F: te të tre zaret të paraqitet të paktën një pesëshe.

(4) Shenjtari ka pasur 4 plumba dhe gjuan në shënjestër për deri sa nuk qëllon dy herë njëra pas tjetrës ose për deri sa nuk e humb shansin ta plotëson atë kusht. Të përshkruhet bashkësia e ngjarjeve elementare dhe këto ngjarje të rastit:

A: shënjestra është qëlluar të paktën dy herë; B: një plumb ka ngelur i pa shfrytëzuar;

C: ka pasur shumë të qëlluara të humbura.

(5) Eksperimenti përbëhet në hudhjen e tre monedhave. Ngjarjet A_1, A_2 dhe A_3, paraqesin ngjarje stema te e para, monedha e dytë dhe e tretë, përkatësisht. Duke i shfrytëzuar këto ngjarje të përshkruhen këto ngjarje të rastit:

B: stema paraqitet vetëm te monedha e parë; C: stema paraqitet te monedha e parë dhe e dytë;

D: stema paraqitet te të tre monedhat; E: stema paraqitet të paktën te dy monedha;

F: stema paraqitet në njërën monedhë; G: stema paraqitet saktësisht te dy monedha;

H: stema paraqitet më së shumti te dy monedha.

3 PËRKUFIZIMI I GJASËS DHE VETITË

Kujtohu!

- Bashkësia e ngjarjeve elementare Ω është bashkësia prej të gjitha mundësive logjike për eksperimentin e dhënë me vetitë: gjatë çdo realizimi të eksperimentit të paraqitet një dhe vetëm një element prej asaj bashkësie.

- Çdo ngjarje e rastit A në lidhje me eksperimentin e dhënë është nënbashkësi prej bashkësisë të ngjarjeve elementare Ω.

A Le të jetë $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ bashkësi e ngjarjeve elementare në lidhje me eksperimentin S dhe le të jenë $p_1, p_2, \dots, p_n$ numra realë të dhënë ndërmjet 0 dhe 1, d.m.th. $0 \le p_i \le 1$, ashtu që $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. do të supozojmë p_i është gjasa e ngjarjeve elementare E_i. Shënojmë $p_i = P(E_i)$, për $i = 1, 2, \dots, n$. Le të jetë A ngjarje e dhënë në lidhje me eksperimentin e njëjtë. Ngjarja A, si nënbashkësi e Ω, le të jetë e formës $A = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}\}$, ku $k \le n$, kurse $i_1, i_2, \dots, i_k$ janë elemente të ndryshme prej bashkësisë $\{1, 2, , V\}$.

Përkufizimi: Gjasa e ngjarjes A është shuma e gjasave të ngjarjeve elementare që përmbahen në ngjarjen A. Kjo do të thotë se,

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}. \qquad (1)$$

Për gjasën e këtillë të përkufizuar vlen kjo teoremë:

Teorema.

i) $P(A) \ge 0$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) Nëse A dhe B janë dy ngjarje disjunkte, atëherë $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Vërtetim:

i) Gjasa e ngjarjes A e formës $A=\{E_{i_1},E_{i_2},\dots,E_{i_k}\}$, e përcaktuar sipas barasisë (1) është shumë e numrave jonegativ, pra është e qartë se ajo është jonegative.

ii) Ngjarja e sigurtë Ω i përmban të gjitha ngjarjet elementare, d.m.th. $\Omega=\{E_1,E_2,\dots,E_n\}$. Në pajtim me përkufizimin

$$P(\Omega)=p_1+p_2+\dots+p_n,$$

kurse numrat $p_1, p_2,\dots, p_n$ i zgjedhëm ashtu që shuma e tyre është 1. Domethënë, $P(\Omega)=1$.

iii) Le të jetë $A=\{E_{i_1},E_{i_2},\dots,E_{i_k}\}$ dhe $B=\{E_{j_1},E_{j_2},\dots,E_{j_m}\}$ janë dy ngjarje disjunkte. Domethënë, $A\cap B=\varnothing$. Atëherë, shuma e këtyre dy ngjarjeve, $A+B=\{E_{i_1},E_{i_2},\dots,E_{i_k},E_{j_1},E_{j_2},\dots,E_{j_m}\}$ përmban $k+m$ ngjarje elementare. Për gjasën e saj fitohet:

$$\begin{aligned}P(A+B)&=p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_k}+p_{j_1}+p_{j_2}+\dots+p_{j_m}=\\&=(p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_k})+(p_{j_1}+p_{j_2}+\dots+p_{j_m})=\\&=P(A)+P(B).\end{aligned}$$

1 Një tabllo për pikado është ndarë me rrathë koncentrik në zona që kanë nga 10, 9, 8 dhe 7 poenë. Një lojtar gjuan në tabllo me shigjetat dhe e qëllon zonën e cila ka 10 poenë me gjasë 0,1, zona e cila ka 9 poenë me gjasë 0,2, zona me 8 poenë me gjasë 0,3, ajo me 7 poenë me gjasë 0,3 e gabon tabllon (arrinë 0 poenë) me gjasë a. Nëse lojtari gjuan në pikado një herë, cakto gjasën e këtyre ngjarjeve:

A: lojtari do të arrinë më së paku 8 poenë;

B: lojtari do të arrinë më pak se 8 poenë.

Zgjidhje:

Gjatë çdo realizimi të eksperimentit „të qëlluarit në tabllon e pikados", paraqitet një dhe vetëm një prej këtyre ngjarjeve elementare:

E_1: është qëlluar zona e cila ka 10 poenë;

E_2: është qëlluar zona e cila ka 9 poenë;

E_3: është qëlluar zona e cila ka 8 poenë;

E_4: është qëlluar zona e cila ka 7 poenë;

E_5: tablla aspak nuk është qëlluar.

Domethënë, bashkësia e ngjarjeve elementare $\Omega=\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\}$, kurse prej kushteve të detyrës kemi se $p_1=P(E_1)=0{,}1$, $p_2=P(E_2)=0{,}2$, $p_3=P(E_3)=0{,}3$, $p_4=P(E_4)=0{,}3$ dhe $p_5=P(E_5)=a$. Konstanta a përcaktohet prej kushtit $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$. Kemi, $0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}3+a=1$, d.m.th. $a=0{,}1$, pra edhe $p_5=0{,}1$.

Tani, ngjarjet A dhe B mund të përshkruhen në këtë mënyrë:

$$A=\{E_1,E_2,E_3\}\text{ dhe }B=\{E_4,E_5\}.$$

Në pajtim me përkufizimin e gjasës (1), për gjasat e ngjarjeve përkatëse fitojmë:

$$P(A)=p_1+p_2+p_3=0{,}1+0{,}2+0{,}3=0{,}6,\quad P(B)=p_4+p_5=0{,}3+0{,}1=0{,}4.$$

B Duke i shfrytëzuar vetitë e gjasës nga teorema paraprake, mund të nxirren edhe këto veti.

1. Gjasa e ngjarjes të pamundshme është 0, d.m.th. $P(\varnothing) = 0$.

Është e qartë se nëse shqyrtohet ngjarja e pamundshme, atëherë te shuma në barasinë (1) nuk ka për të pasur asnjë mbledhës, pra ajo shumë do të jetë e barabartë me 0.

2. Nëse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ janë gjarje disjunkte, atëherë $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Vetinë do ta tregojmë duke e shfrytëzuar induksionin matematik sipas numrit të mbledhësave n.

- Për $n = 2$, gjykimi vijon drejtpërdrejt prej barasisë *iii)* nga teorema paraprake.
- Të supozojmë se gjykimi vlen për $k = n-1$.
- Le të jetë $k = n$. Duke i shqyrtuar $A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}$ si ngjarje elementare, kurse A_n si ngjarje tjetër dhe duke e zbatuar barasinë *iii)* nga teorema paraprake, fitohet kjo:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P((A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) + A_n) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) + P(A_n)$$

Duke e zbatuar supozimin induktiv në barasinë e fundit, drejtpërdrejt vijon gjykimi i sipërm.

3. Nëse $A \subseteq B$, atëherë $P(A) \leq P(B)$.

Pa humbur nga e përgjithshmja le të jetë $A = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}\}$, kurse $B = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}, E_{i_{k+1}}, \ldots, E_{i_m}\}$, ku $k \leq m$. Atëherë për gjasën e ngjarjes B fitohet:

$$P(B) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k} + p_{i_{k+1}} + \ldots + p_{i_m} \geq p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k} = P(A).$$

4. Për gjasën e çfarëdo ngjarje A në lidhje me eksperimentin e dhënë vlen

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Për çdo ngjarje A vlen se $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$, pra prej vetisë 3, vijon se $P(\varnothing) \leq P(A) \leq P(\Omega)$, d.m.th. $0 \leq P(A) \leq 1$.

5. Për gjasën e ngjarjes së kundërtë $\overline{A}$ të ngjarjes së dhënë A vlen

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Pasi për çdo ngjarje A vlen se $\Omega = A + \overline{A}$, poashtu A dhe $\overline{A}$ janë ngjarje disjunkte, prej barasisë *iii)* prej teoremës paraprake, vijon se $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$, d.m.th. $1 = P(A) + P(\overline{A})$, prej ku vijon vetia 5.

6. Gjasa e çfarëdo dy ngjarjeve A dhe B në lidhje me eksperimentin e dhënë është

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

do të shqyrtojmë dy raste: kur ngjarjet A dhe B janë disjunkte dhe kur nuk janë disjunkte.

Nëse A dhe B janë ngjarje disjunkte, atëherë $P(AB) = 0$, kurse $A \cup B = A + B$, pra barasia e fiton formën $P(A + B) = P(A) + P(B)$. kjo është, në realitet, barasia *iii)* prej teoremës paraprake dhe saktësia e saj tanimë është vërtetuar.

A dhe B le të mos jenë ngjarje disjunkte.

Do të marrim $A = \left\{E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}, E_{i_{k+1}}, \ldots, E_{i_{k+m}}\right\}$, kurse $B = \left\{E_{i_{k+1}}, \ldots, E_{i_{k+m}}, E_{i_{k+m+1}}, \ldots, E_{i_{k+m+n}}\right\}$. Prodhimi i këtyre dy ngjarjeve është $AB = \left\{E_{i_{k+1}}, \ldots, E_{i_{k+m}}\right\}$, kurse shuma e tyre $A \cup B = \left\{E_{i_1}, \ldots, E_{i_k}, E_{i_{k+1}}, \ldots, E_{i_{k+m}}, E_{i_{k+m+1}}, \ldots, E_{i_{k+m+n}}\right\}$. Sipas përkufizimit (1), për gjasën e shumës së ngjarjeve A dhe B fitohet:

$$P(A \cup B) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k} + p_{i_{k+1}} + \ldots + p_{i_{k+m}} + p_{i_{k+m+1}} + \ldots + p_{i_{k+m+n}} =$$
$$= \left(p_{i_1} + \ldots + p_{i_k} + p_{i_{k+1}} + \ldots + p_{i_{k+m}}\right) + \left(p_{i_{k+1}} + \ldots + p_{i_{k+m}} + p_{i_{k+m+1}} + \ldots + p_{i_{k+m+n}}\right) - \left(p_{i_{k+1}} + \ldots + p_{i_{k+m}}\right) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB).$$

2 Një basketbollist bën dy hudhje të lira. Megjithatë janë të mundshme këto ngjarje elementare:

E_1: kosh në hudhjen e parë dhe kosh në hudhjen e dytë;

E_2: kosh në hudhjen e parë dhe dështim në hudhjen e dytë;

E_3: dështim në hudhjen e parë dhe kosh në hudhjen e dytë;

E_4: dështim në hudhjen e parë dhe dështim në hudhjen e dytë.

Gjasat e ngjarjeve elementare janë këto: $P(E_1) = 0{,}49$, $P(E_2) = P(E_3) = 0{,}21$ dhe $P(E_4) = 0{,}09$. Të caktohet gjasa e këtyre ngjarjeve:

A: lojtari do të jep kosh në hudhjen e parë;

B: lojtari do të jep kosh në hudhjen e dytë;

C: lojtari do të jep kosh në të dy hudhjet;

D: lojtari do të jep kosh të paktën në njërën prej hudhjeve.

Zgjidhje:

Ngjarjet A dhe B mund të paraqiten si $A = \{E_1, E_2\}$, kurse $B = \{E_1, E_3\}$. Prej këtu, për gjasën e tyre fitohet:

$$P(A) = p_1 + p_2 = 0{,}49 + 0{,}21 = 0{,}7,$$
$$P(B) = p_1 + p_3 = 0{,}49 + 0{,}21 = 0{,}7,$$
$$P(C) = P(E_1) = 0{,}49.$$

Ngjarja D do të paraqitet nëse arrihet kosh vetëm në hudhjen e parë ose vetëm në të dytën ose në të dy hudhjet d.m.th. $D = A \cup B$. Të vërejmë se ngjarjet A dhe B nuk përjashtohen, pasi $AB = \{E_1\} \neq \varnothing$. Prej këtu, duke e shfrytëzuar vetinë 6, për gjasën e D fitohet kjo:

$$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}7 - 0{,}49 = 0{,}91.$$

3 Cakto gjasën e ngjarjes D drejtpërdrejt, pa e shfrytëzuar vetinë 6.

C Do të shqyrtojmë një rast të veçantë të gjasës paraprakisht të përkufizuar.

Le të jetë $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ bashkësi e dhënë prej ngjarjeve elementare dhe le të jenë të gjitha këto ngjarje elementare të cilat kanë gjasa të barabarta të paraqiten, d.m.th $p_i = p_j$ për $i, \ j = 1, 2, \dots, n$.

Prej kushtit $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, vijon se $p_i = \frac{1}{n}$, për të gjithë $i = 1, 2, \dots, n$. Prej këtu, nëse $A = \left\{E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}\right\}$ është ngjarje e dhënë, për gjasën e saj fitohet nëse

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{k \text{ here}} = \frac{k}{n}.$$

Mbaj mend!

Le të jetë $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ bashkësi e fundshme e dhënë prej ngjarjeve elementare dhe çdonjëra prej tyre ka gjasë të paraqitet, d.m.th. $P(E_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Nëse A është ngjarje e rastit në lidhje me eksperimentin e dhënë në të cilin përmbahen k ngjarje elementare, atëherë gjasa e ngjarjes A përcaktohet me:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Ky është i njohur si *përkufizimi klasik* i gjasës.

Të vërejmë se n është numri i përgjithshëm i ngjarjeve elementare, d.m.th. numri i elementeve në Ω. Do të shënojmë $n = |\Omega|$. Çdo ngjarje elementare mund ta interpretojmë si „rast të mundshëm" në lidhje me eksperimentin e dhënë. Nga ana tjetër, k është numri i ngjarjeve elementare të cilët përmbahen në ngjarjen A, d.m.th. $k = |A|$ dhe çdo ngjarje elementare A do ta interpretojmë si „rast të volitshëm" për paraqitjen e ngjarjes A. Në pajtim me përkufizimin klasik, gjasa e ngjarjes së rastit të dhënë A është e barabartë me herësin prej numrit të rasteve të volitshme për paraqitjen e ngjarjes A dhe numrit të gjitha rasteve të mundshme për eksperimentin e dhënë, d.m.th.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

4 Të caktohet gjasa gjatë hudhjes së zarit që të fitohet numër çift.

Zgjidhje:

Nëse eksperimenti është hudhja e zarit, bashkësia e ngjarjeve elementare $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, ku E_i është ngjarja: paraqitet numri i, $i = 1, 2, \dots, 6$. Ngjarja A: paraqitja e numrit çift mund të përshkruhet me $A = \{E_2, E_4, E_6\}$. Domethënë, numri i mundësive të volitshme për paraqitjen e ngjarjes A është 3, kurse numri i përgjithshëm i mundësive gjatë realizimit të eksperimentit është 6. Prej këtu, sipas përkufizimit klasik të gjasës, për gjasën e ngjarjes A fitohet:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

5 Në kuti ka 5 topa të bardhë dhe 4 topa të zi. Prej kutisë të nxirren dy topa menjëherë. Të caktohet gjasa ashtu që të dy topat e nxjerrë të jenë të bardhë.

Zgjidhje:

E shënojmë ngjarjen A: janë të tërhequr dy topa të bardhë. Numri i rasteve të mundshme të eksperimentit , d.m.th numri i përgjithshëm i ngjarjeve elementare është $C_9^2 = \binom{9}{2} = 36$, kurse numri i volitshëm i mundësive që të paraqitet ngjarjat A janë $C_5^2 = \binom{5}{2} = 10$. Domethënë, gjasa për paraqitjen e ngjarjes A është

$$P(A) = \frac{10}{36} = 0,2778.$$

6 Në një sipërmarrje ka pasur 100 të punësuar. Prej tyre 40 flasin gjuhën angleze, 30 flasin gjuhën frenge, kurse 15 i flasin të dy gjuhët. Rastësisht zgjedhet një person. Të caktohet gjasa e këtyre ngjarjeve:

B: personi flet vetëm gjuhën frenge; C: personi flet vetëm gjuhën angleze;
D: personi i zgjedhur të paktën flet një gjuhë; E: personi i zgjedhur nuk flet asnjë gjuhë.

Zgjidhje:

Do t'i shënojmë këto ngjarje:

A: personi i zgjedhur flet anglisht; F: personi i zgjedhur flet gjuhë frenge.

Prej kushteve të detyrës mund të caktohet se $P(A) = \frac{40}{100} = 0,4$; $P(F) = \frac{30}{100} = 0,3$ dhe $P(AF) = \frac{15}{100} = 0,15$. Për caktimin e gjasës së ngjarjes B, është e nevojshme të caktohet numri i atyre që dijnë vetëm frengjisht. Ai numër do të fitohet kur prej numrit të atyre që flasin frengjish zbritet numri i atyre që i flasin dy gjuhë. Kështu, numri i atyre që dijnë vetëm frengjisht është $30 - 15 = 15$. Prej këtu, $P(B) = \frac{15}{100} = 0,15$. Në mënyrë analoge, numri i atyre që dijnë vetëm anglisht është $40 - 15 = 25$, pra $P(C) = \frac{25}{100} = 0,25$. Ngjarja D mund të paraqitet si $D = A \cup F$, pra duke e shfrytëzuar vetinë 6, fitohet:

$$P(D) = P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(AF) = 0,4 + 0,3 - 0,15 = 0,55.$$

Në fund, të vërejmë se $E = \overline{D}$, pra duke e shfrytëzuar vetinë 5, fitojmë

$$P(E) = 1 - P(D) = 1 - 0,55 = 0,45.$$

Detyra:

1. Një sistem për zbulimin e tymit në ajër përmban dy instrumente A dhe B. Nëse ka tym, atëherë instrumenti, A e zbulon me gjasë 0,95, instrumenti B me gjasë 0,98, kurse të dy instrumentet së bashku me gjasë 0,94. Të caktohet gjasa e këtyre ngjarjeve:

   C: të paktën një instrument do ta zbulon praninë e tymit në ajër;

   D: asnjëri instrument nuk do ta zbulon praninë e tymit në ajër.

2. Faqet e një tetraedri janë të numëruara me numrat 1,2,3 dhe 4. Tetraedri hudhet në sipërfaqen e rafshët dhe vërehet ajo faqe e cila shtrihet në sipërfaqe. Gjatë kryerjes së eksperimentit, çdo faqe paraqitet me gjasë proporcionalisht me numrin e saj. Të caktohet gjasa e këtyre ngjarjeve:

   A: është paraqitur numri më i vogël se 3; B: është paraqitur numër çift.

3. Të caktohet gjasa gjatë hudhjes të njëkohësishme të dy zareve ashtu që të fitohet shuma 10.

4. Janë dhënë 5 segmente me gjatësi prej 2,3,4,7,9 centimetra. Të caktohet gjasa prej tre segmenteve rastësisht të zgjedhur që të mund të konstruktohet trekëndësh.

5. Në një loto ka 100 fletë loto të numëruara me numrat prej 1 deri më 100. Janë fituar këto letra të lotos numra që plotëpjesëtohen edhe me 4 edhe me 5. Sa është gjasa e këtyre ngjarjeve:

A: gjatë blerjes së një loto do të fitohet e qëlluara;

P: gjatë blerjes së dy lotove do të fitohet të paktën një e qëlluar.

6. Një person ka blerë 7 llamba prej 40 W, 5 llamba prej 60 W dhe 3 llamba prej 100 W. Për rruge i janë thyer tre tre llamba. Sa është gjasa se llambat e thyera kanë gjithsej 180 W?

4 GJASA KUSHTORE. PAVARËSIA E NGJARJEVE TË RASTIT

Kujtohu!

- Nëse bashkësia e ngjarjeve elementare $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ dhe $P(E_i) = 1/n$, për çdo $i = 1, 2, \ldots, n$, atëherë gjasa e ngjarjes së rastit A e cila përmban k ngjarje elementare përcaktohet me $P(A)=k/n$.
- Nëse A dhe B janë ngjarje disjunkte, atëherë $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

A Shpeshherë ndodh që gjasa për paraqitjen e një ngjarje të varet prej asaj se a do të paraqitet ose jo ngjarje tjetër. T'i shqyrtojmë këto ngjarje:

A: do të bie shi; B: në qiell ka re.

Është e qartë se gjasa për paraqitjen e ngjarjes A varet prej asaj a do të paraqitet ose jo ngjarja B. Përkatësisht, informata se është paraqitur ngjarja B, e zmadhon gjasën e paraqitjes së ngjarjes A. Prandaj, paraqitet nevoja për përkufizimin e të ashtuquajturës gjasa kushtore. *Gjasa kushtore* e ngjarjes A me kusht B është gjasë të paraqitet ngjarja A, nëse paraqitet ngjarja B. Këtë gjasë do ta shënojmë me $P(A \mid B)$.

- Motivi për atë se si të përkufizohet gjasa kushtore vjen prej frekuencës relative si masë për mundësitë e paraqitjes të ngjarjes së caktuar. Përkatësisht, le të bëhen n eksperimente te të cilët mund të paraqiten ngjarjet A dhe B. Le të jetë $n(B)$ numri i eksperimenteve te të cilët është paraqitur ngjarja B, kurse $n(AB)$ është numri i eksperimenteve te të cilët është paraqitur ngjarja AB. Atëherë $\dfrac{n(AB)}{n(B)}$ është relative dendësia e paraqitjes së ngjarjes A nëse është paraqitur ngjarja B. Fitojmë,

$$\frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{\frac{n(AB)}{n}}{\frac{n(B)}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)},$$ ku $P(AB)$ është gjasa e prodhimit të ngjarjeve A dhe B.

Mbaj mend!

Gjasa kushtore e ngjarjes A me kusht B (nëse $P(B)>0$) përkufizohet me:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

kurse gjasa kushtore e ngjarhes B me kusht A (nëse $P(A)>0$) me:

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

1 Eksperimenti përbëhet me hudhjen e zarit. Të caktohet gjasa se është paraqitur numër çift, nëse dihet se është paraqitur numër i cili është më i vogël ose i barabartë me 4.

Zgjidhje:

T'i shënojmë këto ngjarje:

A: është paraqitur numër çift; B: është paraqitur numër më i vogël ose i barabrtë me 4.

Në këtë rast, ngjarjet AB do të thotë se është paraqitur numër çift i cili është më së shumti 4. Gjasa e ngjarjeve B dhe AB është:

$$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}; \quad P(AB)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Në fund, gjasa $P(A|B)$ sipas përkufizimit për gjasë kushtore, do të jetë:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Prej formulave të gjasës kushtore mund të shprehet gjasa për prodhimin e dy ngjarjeve.

Mbaj mend!

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

2 Në një kuti ka 4 topa të bardhë dhe 3 topa të zi. Prej kutisë janë nxjerrë dy topa njëri pas tjetrit, pa e kthyer prapa në kuti. Të caktohet gjasa se të dy topat e nxjerrura janë të bardhë.

Zgjidhje:

T'i shënojmë ngjarjet

A_1: në tërheqjen e parë është fituar top i bardhë, A_2: në tërheqjen e dytë është fituar top i bardhë.

E kërkojmë gjasën e ngjarjes A_1A_2. Sipas vetisë paraprake kemi se $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)$. Poashtu, $P(A_1)=\frac{4}{7}$, kurse gjasa $P(A_2|A_1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, pasi nëse nxirret top i bardh në tërheqjen e parë, në kuti ngelin 6 topa prej të cilëve 3 janë të bardhë, atëherë, $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}$.

B Formula për gjasën e prodhimit të dy ngjarjeve mund të përgjithësohet për çfarëdo numër n ngjarjesh me këtë gjykim:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_2A_1)\ldots P(A_n \mid A_{n-1}\ldots A_2A_1).$$

Gjykimin do ta vërtetojmë me induksionin matematik.

Për $n=2$, fitojmë $P(A_1A_2)=P(A_1)\,P(A_2|A_1)$, që vijon drejtpërdrejt prej përkufizimit kushtor.

Të supozojmë se gjykimi vlen për $k=n-1$.

Për $k=n$ fitojmë:

$$P(A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n)=P((A_1A_2\ldots A_{n-1})\,A_n)$$

(sipas përkufizimit) $\qquad = P(A_1A_2\ldots A_{n-1})\,P(A_n \mid A_1A_2\ldots A_{n-1})$

duke zbatuar supozimin induktiv për $P(A_1\,A_2\ldots\,A_{n-1})$ fitohet se:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_2A_1)\,\ldots\,P(A_{n-1} \mid A_{n-2}\ldots A_2A_1)\,P(A_n \mid A_{n-1}\ldots A_1).$$

3 Në një kuti ka 4 topa të bardhë dhe 5 topa të zi. Lojtari tërheq nga një top prej kutisë, pa e kthyer prapa në kuti, për deri sa nuk nxjerrë top të bardhë. Të caktohet gjasa se ai do të nxjerrë saktësisht 4 herë.

Vëreje mënyrën te zgjidhja:

Lojtari do të tërheq saktësisht 4 herë, nëse në 3 përpjekjet tërheq top të zi, kurse në përpjekjen e katërtë top të bardhë. Nëse A_i është ngjarje se lojtari do të tërheq top të bardhë nëtërheqjen i, $i=1, 2, 3, 4$, atëherë e kërkojmë gjasën e ngjarjes $\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\,A_4$. Sipas vetisë paraprake, kemi:

$$P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\,A_4)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1\,\overline{A}_2)P(A_4 \mid \overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3).$$

Poashtu, $P(\overline{A}_1)=\frac{5}{9}$. Nëse në tërheqjen e parë është tërhequr top i zi, atëherë në kuti kanë ngelur 4 topa të zi prej gjithsej 8 topave, pra

$$P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Nëse në dy tërheqjet e para janë fituar dy topa të zi, në kuti do të ketë 3 topa të zi prej gjithsej 7 topave, pra

$$P(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{3}{7},$$

dhe në fund, pas 3 tërheqjeve të topave të zi, në kuti ka 2 topa të zi dhe 4 topa të bardhë, pra

$$P(A_4 \mid \overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Kështu, $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4)=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{63}=0{,}0794.$

C Për ngjarjen A themi se është e pavarur prej ngjarjes B, nëse $P(A|B) = P(A)$. Kjo do të thotë se, paraqitja e ngjarjes B nuk e ndryshon gjasën të paraqitet ngjarja A.

Nëse ngjarja A është e pavarur prej ngjarjes B, atëherë kemi

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B),$$

kurse kjo do të thotë se ngjarja B është e pavarur prej ngjarjes A. Atëherë për A dhe B themi se janë *ngjarje të pavarura*. Në këtë rast,

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B).$$

Anasjelltas, nëse barasia e fundit vlen, atëherë

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B),$$

pra A dhe B janë ngjarje të pavarura. Me këtë është vërtetuar kjo teoremë:

Teorema. Ngjarjet A dhe B janë *të pavarura*, nëse dhe vetëm nëse

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Në disa raste pavarësia mund të vërehet prej vet kushteve të detyrës. Për shembull, nëse hudhen dy zare dhe vërehen ngjarjet

A: te zari i parë është paraqitur numri gjashtë,

B: te zari i dytë është paraqitur numri pesë,

atëherë është e qartë se A dhe B janë ngjarje të pavarura, pasi mundësia e njërës nuk ndikon në mundësinë e zarit tjetër. Por, në disa raste është e domosdoshme të kontrollohet kushti për pavarësi nga teorema e fundit.

4 Prej shpilit me 52 letra është tërhequr një letër. T'i shqyrtojmë këto ngjarje:

A: është tërhequr letër te e cila është numri pesë; B: letra e tërhequr është me gjeth.

Provo ngjarjet A dhe B a janë të pavarura.

Shihe zgjidhjen:

$$P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}, \quad P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}, \quad P(AB)=\frac{1}{52}=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{4}=P(A)\cdot P(B).$$

Domethënë, kushti për pavarësi është i plotësuar, pra A dhe B janë ngjarje të pavarura, edhe pse intuitivisht ajo nuk shihet ashtu (ndërmjet letrave me shenjë gjeth ka pesëshe dhe ndërmjet katër pesësheve ka pesë gjethe).

5 Dy shenjtar në një shënjestër pavarësisht njëri prej tjetrit. Gjasa e të parit ta qëllon shënjestrën është 0,7, kurse i dyti 0,9. Të caktohet gjasa se shënjestra do të qëllohet të paktën një herë.

Zgjidhje:

I shënojmë ngjarjet

A: shenjtari i parë e ka qëlluar shënjestrën; B: shenjtari i dytë e ka qëlluar shënjestrën.

Prej kushtit të detyrës është e qartë se A dhe B janë ngjarje të pavarura pasi të dy shenjtarët gjuajnë pavarësisht njëri prej tjetrit. Poashtu, $P(A)=0,7$, kurse $P(B)=0,9$. E kërkojmë gjasën e ngjarjes $A\cup B$. Fitojmë:

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)=\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\\&=0,7+0,9-0,7\cdot 0,9=0,97.\end{aligned}$$

6 Për ngjarjet A dhe B, prej detyrës 4, konstatuam se janë të pavarura . Provo pavarësinë e çifteve të ngjarjeve A dhe $\overline{B}$; $\overline{A}$ dhe B; si edhe $\overline{A}$ dhe $\overline{B}$.

Zgjidhje:

Prej detyrës 4 kemi se $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ dhe $P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$.

Ngjarja $A\overline{B}$ paraqet se është tërhequr letër me numrin 5 e cila nuk është gjeth. Ekzistojnë 3 mundësi të volitshme për këtë ngjarje, pra

$$P(A\overline{B})=\frac{3}{52}=\frac{1}{13}\cdot\frac{3}{4}=P(A)P(\overline{B}).$$

Domethënë, A dhe $\overline{B}$ janë ngjarje të pavarura.

Përkatësisht, $\overline{A}B$ është ngjarje: është tërhequr letër me shenjën gjeth në të cilën numri është i ndryshueshëm prej 5. Ka 12 mundësi të volitshme për këtë ngjarje. Prej këtu,

$$P(\overline{A}B)=\frac{12}{52}=\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{4}=P(\overline{A})P(B),$$

d.m.th. edhe ngjarjet $\overline{A}$ dhe B janë të pavarura.

Në fund, $\overline{A}\overline{B}$ është ngjarje: është tërhequr letër e cila nuk është pesëshe dhe nuk është gjeth. Mundësi të volitshme ka 36, pra

$$P(\overline{A}\overline{B})=\frac{36}{52}=\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{4}=P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

Prej këtu, edhe $\overline{A}$ dhe $\overline{B}$ janë ngjarje të pavarura.

Do ta vërtetojmë saktësinë e kësaj teoreme:

Teorema. Nëse A dhe B janë ngjarje të pavarura, atëherë të pavarura janë edhe çiftet: A dhe $\overline{B}$; $\overline{A}$ dhe B; $\overline{A}$ dhe $\overline{B}$.

Vërtetim. Nëse A dhe B janë ngjarje të pavarura, atëherë $P(AB)=P(A)P(B)$. Tani, $A=A\Omega=A(B+\overline{B})=AB+A\overline{B}$,

pra për gjasën e A fitohet:

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}).$$

Prej supozimit të ngjarjeve të pavarërura A dhe B kemi:

$$P(A)=P(A)P(B)+P(A\overline{B}),\text{ pra}$$

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B}),$$

pasi $1-P(B)$ është gjasa e ngjarjes së kundërtë të B. Prej barasisë së fundit përfundojmë:

se A dhe $\overline{B}$ janë ngjarje të pavarura. Pavarshmëria e $\overline{A}$ dhe B vijon për shkak të simetrisë, kurse pavarshmëria e $\overline{A}$ dhe $\overline{B}$ është pasojë prej pavarshmërisë së dy çifteve të ngjarjeve paraprake. (Vërteto gjykimin e sipërm!).

Ç Koncepti për pavarshmëri të ngjarjeve mund të përgjithësohet për më shumë se dy ngjarje.

Mbaj mend!

Ngjarjet $A_1, A_2, \ldots, A_n$ janë *të pavarura në tërësi*, nëse për çfarëdo k ($2 \leq k \leq n$) dhe për çfarëdo zgjedhje të indeksave $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ vlen

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right)=P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\ldots P\left(A_{i_k}\right).$$

- Domethënë, nëse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ janë ngjarje të pavarura, atëherë për gjasën e prodhimit të tyre fitohet se është prodhim i gjasave të ngjarjeve të veçanta, d.m.th.

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

- Në mënyrë të ngjashme sikurse edhe për dy ngjarjet tregohet se nëse janë të pavarura ngjarjet $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ atëherë të pavarura janë edhe ngjarjet $A_1, A_2, \ldots, \overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots$

7 Në një kuti ka 6 topa të bardhë dhe 2 topa të zi. Lojtari tërheq një top, e sheh ngjyrën e tij dhe e kthen në kuti. Të caktohet gjasa se top të bardhë do të tërheq për herë të parë në tërheqjen e katërtë.

Shihe zgjidhjen:

Le të jetë A_i se në tërheqjen i është fituar top i bardhë, $i = 1,2,\ldots$ Pasi për çdo tërheqje, topi i tërhequr këthehet në kuti, mundësia e çdo tërheqje nuk varet prej mundësisë të tërheqjeve paraprake, d.m.th. ngjarjet A_i, $i=1,2,\ldots$, janë të pavarura. Poashtu, $P(A_i) = 6/8 = 3/4$, kurse $P\left(\overline{A}_i\right)=1/4$ për $i = 1, 2, 3,\ldots$ Prej këtu,

$$P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)P\left(A_4\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{256}.$$

Detyra:

1. Prej bashkësisë $S = \{1,2,\ldots, 20\}$ në mënyrë të rastësishme zgjedhet një numër. Të caktohet gjasa se numri i tërhequr është çift, nëse dihet se është i plotëpjesëtueshëm me3.

2. Gjasa e një shenjtori ta qëllon shënjestrën në gjuajtjen e parë është 2/3. Nëse e qëllon shënjestrën në përpjekjen e parë, ka të drejtë në përpjekjen e dytë. Gjasa që ta qëllon shënjestrën në të dy përpjekjet është 0,5. Të caktohet gjasa ta qëllon shënjestrën në përpjekjen e dytë, nëse fiton të drejtë për përpjekjen e dytë.

3. Një parapagues e ka haruar shifrën e fundit të numrit të telefonit të mikut të tij dhe e ka zgjedhur rastësisht.

   a) Të caktohet gjasa se do ta qëllon në përpjekjen e tretë.

   b) Të caktohet gjasa e njëjtë, nëse e din se shifrën të cilën e ka haruar është numër çift.

(4) Në letra të veçanta janë shkruar shkronjat E, A, A, A, I, M, M, T, T, K. Letrat përzihen, kurse pastaj tërhiqet një nga një dhe radhiten sipas radhitjes së tërheqjes.
Të caktohet gjasa për tu fituar fjala MATEMATIKA.

(5) Në një kuti ka 4 topa të bardhë dhe 3 topa të gjelbër. Lojtarët A dhe B tërheqin pavarësisht nga një top. Fiton ai i cili i pari do të tërheq top të bardhë. Të caktohet gjasa që të fiton lojtari A, nëse topat e tërhequr të mos kthehen në kuti.

(6) Ta shqyrtojmë lojën e njëjtë sikurse te detyra 5. Të caktohet gjasa të fiton lojtari B, më së shumti pas 3 tërheqjeve të tija, nëse pas çdo tërheqje, topi i tërhequr kthehet në kuti.

5 NDRYSHORE TË RASTËSISHME TË TIPIT DISKRET

Kujtohu!

- Ngjarjet A dhe B janë të pavarura nëse dhe vetëm nëse $P(AB) = P(A)P(B)$.
- Ngjarjet $A_1, A_2, \ldots, A_n$ janë të pavarura në tërësi, nëse për çfarëdo k $(2 \le k \le n)$ dhe për çfarëdo zgjedhje të indeksave $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ vlen

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\ldots P\left(A_{i_k}\right).$$

A Koncepti i ndryshores së rastit është njëri prej koncepteve themelore në teorinë e gjasës. Shpeshherë ndodh që çdo ngjarjeje elementare $E_i \in \Omega$ t'i shoqërohet edhe ndonjë numër $X\left(E_i\right) \in \mathbb{R}$.

Qe disa shembuj:

1 Nëse eksperimenti është hudhja e zarit, atëherë $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, ku ngjarja elementare E_i paraqet se në anën e sipërme të zarit të paraqiten i pika. Në lidhje me këtë eksperiment mund të shqyrtohet funksioni X prej bashkësisë së ngjarjeve elementare Ω në bashkësinë e numrave realë $\mathbb{R}$, të dhënë me $X(E_i) = i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ky funksion mund të përshkruhet si numër i pikave të paraqitura në anën e sipërme të zarit. Funksioni X do të pranon vlera prej bashkësisë $R_X = \{1,2,3,4,5,6\}$ dhe çdonjëra prej vlerave do ta pranon me gjasë të caktuar e cila varet prej gjasës të mundësive elementare. Përkatësisht,

$$P\{X = i\} = P(E_i) = 1/6, \quad \text{për çdo} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

2 Eksperimenti le të jetë hudhja e dy monedhave. Atëherë $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, ku $E_1 =$ (koka, koka), $E_2 =$ (koka, stema), $E_3 =$ (stema, koka) dhe $E_4 =$ (stema, stema). Të gjitha ngjarjet elementare janë të barabarta me gjasë, d.m.th. $P(E_i) = 1/4$, $i = 1, 2, 3, 4$. Ta shqyrtojmë funksionin Y i cili paraqet numër të kokave të paraqitura të dy monedhave. Funksioni Y do të pranon vlera prej bashkësisë $R_Y = \{0, 1, 2\}$, kurse gjasat me të cilat do t'i pranon ato vlera varen prej gjasave të ngjarjeve elementare. Kështu,

$$P\{Y = 0\} = P(E_4) = 1/4, \quad P\{Y = 1\} = P\{E_2, E_3\} = 1/4 + 1/4 = 1/2, \quad P\{Y = 2\} = P(E_1) = 1/4.$$

3 Faqet e një tetraedri homogjen janë të numëruara me numrat 1, 2, 3, 4. Eksperimenti qëndron në dy hudhje të tetraedrit në sipërfaqen e rrafshët, ku shihet faqeja me të cilën tetraedri shtrihet në sipërfaqen e rrafshët. Bashkësia e ngjarjeve elementare është $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. Poashtu, të gjitha ngjarjet elementare (x, y) janë të me gjasë të barabartë, d.m.th. $P((x, y)) = 1/16$, për çdo $(x, y) \in \Omega$. Ta shqyrtojmë funksionin Z - shuma e numrave të fituar gjatë hudhjes së tetraedrit. Funksioni Z do të pranon vlera prej bashkësisë $R_z = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, kurse gjasat përkatëse me të cilat do t'i pranon ato vlera përcaktohen në këtë mënyrë:

$$P\{Z=2\} = P\{(1, 1)\} = 1/16$$
$$P\{Z=3\} = P\{(1, 2), (2, 1)\} = 2/16$$
$$P\{Z=4\} = P\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} = 3/16$$
$$P\{Z=5\} = P\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} = 4/16$$
$$P\{Z=6\} = P\{(2, 4), (3, 3), (4, 2)\} = 3/16$$
$$P\{Z=7\} = P\{(3, 4), (4, 3)\} = 2/16$$
$$P\{Z=8\} = P\{(4, 4)\} = 1/16$$

Në këtë mënyrë me shoqërimin e numrit për çdo ngjarje elementare konstruktohet funksion i përkufizuar në bashkësinë e ngjarjeve elementare. Ai funksion pranon vlera me gjasë të caktuar e cila varet prej gjasave të ngjarjeve elementare. Prandaj, funksionet e tilla do t'i quajmë *ndryshore të rastësishme.*

Mbaj mend!

Ndryshorja e rastësishme X është funksion prej bashkësisë së ngjarjeve elementare Ω në bashkësinë e numrave realë $\mathbb{R}$.

Bashkësia e vlerave të një ndryshore të rastësishme X është nënbashkësi prej $\mathbb{R}$ dhe ajo mund të jetë e fundshme, e pafundshme e numërueshme ose e pafundshme e panumërueshme.
Nëse bashkësia e vlerave të X është e fundshme ose e pafundshme, atëherë themi se ndryshorja e rastësishme X është e *tipit diskret* ose *ndryshore e rastësishme diskrete.*
Nëse, tani, bashkësia e vlerave të X është e pafundshme e panumërueshme, atëherë X është ndryshore e rastësishme të *tipit të vijueshëm absolut.*

Deri më tani ndryshoret e rastësishme të shqyrtuara janë vlera të ndryshores të rastësishme diskrete.
Ndryshore të rastësishme të tipit diskret me vlera të bashkësisë së numërueshme janë, për shembull, numri i hudhjeve të zarit për deri sa nuk fitohet numri 5, numri i prodhimeve të kontrolluara fitohet prodhim defekt (nëse çdo prodhim i kontrolluar kthehet në magaze), etj.

Ndryshore të rastësishme të tipit të vijueshëm absolut janë, për shembull, lartësia e personit rastësisht të zgjedhur prej grupit të njerëzve të dhënë, koha e punës të pandërprerë në një makinë, sasia e sheqrit në një mollë etj.
Këtu do të ndalemi vetëm në ndryshoret e rastësishme të tipit diskret me vlera të bashkësisë së fundshme. Në tekstin e më tutjeshëm, *me termin ndryshore të rastësishme diskrete do të nënkuptojmë pikërisht ndryshore të rastësishme me vlera të bashkësisë së fundshme.*

Mbaj mend!

Ndryshorja e rastësishme X është e ***tipit diskret*** (ose ***ndryshore e rastësishme diskrete***), nëse pranon vlera prej bashkësisë së fundshme $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dhe poashtu gjasa X të pranon vlera prej komplementit të R_X është 0, d.m.th. $P\{X \in \mathbb{R} \setminus R_X\} = 0$. Me fjalë të tjera, ndryshorja e rastësishme X nuk mund të pranon vlera prej bashkësisë $\mathbb{R} \setminus R_X$ me gjasë jozero.

Ndryshorja e rastësishme prej tipit diskret është plotësisht e përcaktuar me vlerat e bashkësisë R_X dhe gjasat përkatëse:

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Poashtu, gjasat p_i patjetër duhet t'i plotësojnë këto kushte:

1. $0 \le p_i \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$
2. $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$

- Në këtë mënyrë, me vlerat e bashkësisë të cilat i pranon ndryshorja e rastësishme X dhe gjasat përkatëse, themi se është dhënë *ligji i shpërdarjes* të X.
- Nëse X pranon pak vlera, atëherë i zakonshëm është ligji i shpërdarjes të paraqitet në tabelë, ku në rreshtin e parë qëndrojnë vlerat e ndryshores, kurse në rreshtin e dytë gjasat përkatëse. Kështu, ligjet e shpërdarjes të ndryshoreve të rastit X, Y dhe Z të përcaktuar nga shembujt 1, 2 dhe 3 mund të paraqiten në këtë mënyrë:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}, \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix},$$

$$Z : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1/16 & 2/16 & 3/16 & 4/16 & 3/16 & 2/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

Vëren se shuma e gjasave në çdonjërin prej të tre rasteve është e barabartë me 1.

B **4** Eksperimenti le të jetë hudhja e monedhës. Të përshkruhet ndryshorja e rastit X – numri i kokave të paraqitura në anën e sipërme të monedhës.

Zgjidhje:

- Bashkësia e ngjarjeve elementare për këtë eksperiment është $\Omega = \{E, \overline{E}\}$, ku E është ngjarje elementare „paraqitja e kokës", kurse $\overline{E}$ – „paraqitja e stemës". Ndryshorja e rastit X do të pranon vlera prej bashkësisë $R_X = \{0, 1\}$ dhe

$$P\{X = 0\} = P(\overline{E}) = \frac{1}{2}, \quad P\{X = 1\} = P(E) = \frac{1}{2}.$$

Domethënë

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ndryshorja e rastit e këtillë quhet *indikator i ngjarjes* E, e cila në rastin konkret paraqet paraqitjen e kokës.

Në rastin e përgjithshëm, te eksperimenti le të vërehet a do të paraqitet ose nuk do të paraqitet ngjarja e dhënë A dhe le të jetë $P(A) = p$. Ndryshorja e rastit I_A e cila është përcaktuar me:

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},$$

ku $q = 1 - p$ quhet *indikator i ngjarjes A*.

C *Mbaj mend!*

Nëse T është nënbashkësi prej bashkësisë së numrave realë $\mathbb{R}$, atëherë $P\{X \in T\}$ është shuma e të gjitha gjasave $p_i = P\{X = x_i\}$, për të gjithë $x_i \in T$.

5 Tre shenjtar gjuajnë në një shënjestër pavarësisht njëri prej tjetrit. I pari e qëllon shënjestrën me gjasë 0,6, i dyti me gjasë 0,5, kurse i treti me 0,8. Të caktohet:

a) ligji i shpërdarjes të ndryshores së rastit X – numri i të qëlluarit të shënjestrës;

b) $P\{1 < X \leq 3\}$.

Zgjidhje:

a) Do t'i shënojmë ngjarjet A_i: i shenjtor e ka qëlluar shënjestrën, $i = 1, 2, 3$. Prej kushteve të detyrës, ngjarjet A_1, A_2 dhe A_3 janë të pavarura dhe $P(A_1) = 0,6$, $P(A_2) = 0,5$ dhe $P(A_3) = 0,8$. Ndryshorja e rastit X do të pranon vlera prej bashkësisë $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Poashtu, ngjarja $\{X = 0\}$ paraqet të gjithë shenjtorët që e kanë dështuar qëllimin, ngjarja $\{X = 1\}$ paraqet se saktësisht një shenjtor e ka qëlluar shënjestrën etj. Për gjasat përkatëse fitohet:

$$p_0 = P\{X = 0\} = P\left(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3\right) = P\left(\bar{A}_1\right)P\left(\bar{A}_2\right)P\left(\bar{A}_3\right) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,2 = 0,04.$$

$$p_1 = P\{X = 1\} = P\left(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3\right) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0,26.$$

$$p_2 = P\{X = 2\} = P\left(A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3\right) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0,46.$$

$$p_3 = P\{X = 3\} = P\left(A_1 A_2 A_3\right) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0,24.$$

Domethënë:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,04 & 0,26 & 0,46 & 0,24 \end{pmatrix}$$

b) $P\{1 < X \leq 3\} = p_2 + p_3 = 0,46 + 0,24 = 0,7$.

6 Cakto shpërdarjen e ndryshores së rastit X nga detyra paraprake, nëse të gjithë shenjtorët e qëllojnë me gjasë $p\,(0 < p < 1)$.

Zgjidhje:

Nëse në zgjidhjen e detyrës paraprake vëndohet $P(A_i) = p$, kurse $P\left(\bar{A}_i\right) = 1 - p = q$, $i = 1, 2, 3$, fitohet kjo:

$$p_0 = P\{X=0\} = P\left(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\right) = q^3,$$
$$p_1 = P\{X=1\} = P\left(A_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3\right) = 3pq^2 = C_3^1 pq^2,$$
$$p_2 = P\{X=2\} = P\left(A_1\,A_2\,\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3\right) = 3p^2q = C_3^2 p^2 q,$$
$$p_3 = P\{X=3\} = P\left(A_1\,A_2\,A_3\right) = p^3.$$

Shkurtimisht, këto gjasa mund të shkruhen në formën:

$$p_i = C_3^i p^i q^{3-i}, \quad i = 0,1,2,3.$$

Për ndryshoren e rastit të këtillë X themi se ka shpërdarje binare me parametra 3 dhe p, shkruhet

$$X \sim B(3, p).$$

Ta përgjithësojmë rezultatin paraprak. Le të kryhet seri prej n eksperimenteve të pavarur dhe të barabartë. Në çdonjërin prej tyre vërehet paraqitja ose jo e ngjarjes A në serinë n eksperimenteve. X pranon vlera prej bashkësisë $R_X = \{0, 1, \ldots, n\}$. Poashtu

$$P\{X=0\} = P(\underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n}) = q^n, \qquad P\{X=n\} = P(\underbrace{A\,A\,A\ldots A}_{n}) = p^n.$$

Ta caktojmë $P\{X=i\}$, për $i = 1, 2, \ldots, n$-1. Le të jetë B_{1i} ngjarja në i eksperimente do të paraqitet ngjarja A, kurse në $n-i$ të ardhshmet nuk do të paraqitet, d.m.th. $B_{1i} = \underbrace{A\,A\,A\ldots A}_{i}\underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-i}$. Për shkak të pavarshmërisë së ngjarjeve përfundojmë se $P(B_{1i}) = p^i q^{n-i}$. Prej gjithsej n eksperimente, të C_n^i mënyrave mund të zgjedhen i, në të cilët do të paraqitet ngjarja A. Prej këtu,

$$P\{X=i\} = C_n^i p^i q^{n-i},\ i = 0,1,\ldots,n.$$

Në këtë mënyrë është përcaktuar ndryshorja e rastësishme e cila ka *shpërdarje binomiale* me parametra n dhe p. Shkruajmë $X \sim B(n, p)$.

Ç Me shfrytëzimin e përkufizimit për pavarshmëri të dy ngjarjeve të rastësishme, mund të përkufizohet pavarshmëria e dy ndryshoreve të rastit X dhe Y.

Mbaj mend!

Ndryshoret e rastit X dhe Y janë *të pavarura* nëse për çfarëdo vlere x_i që i takon vlerave të bashkësisë X dhe çfarëdo vlere y_j që i takon vlerave të bashkësisë Y, ngjarjet e rastit $\{X = x_i\}$ dhe $\{Y = y_j\}$ janë të pavarura. Përkatësisht,

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}, \text{ për çdo } x_i \in R_X \text{ dhe çdo } y_j \in R_Y.$$

Në mënyrë analoge, me ndihmën e përkufizimit për pavarshmëri në tërësinë e n ngjarjeve të rastit, do të përkufizojmë pavarshmërinë e n ndryshorve të rastit $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Mbaj mend!

Ndryshoret e rastit $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ janë *të pavarura*, nëse për çfarëdo vlera $x_i \in R_{X_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ngjarjet e rastit $\{X_1 = x_1\}, \{X_2 = x_2\}, \ldots, \{X_n = x_n\}$ janë të pavarura në tërësi, përkatësisht $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\} \cdot P\{X_2 = x_2\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n = x_n\}$, për çdo $x_i \in R_{X_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Detyra:

1. Ndryshorja e rastit X është dhënë me $X : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & p & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

   Të caktohet: a) konstanta p; a) $P\{1 < X < 5\}$.

2. Në një kuti gjenden 4 topa të shënuara me numrat 1,2,3,4. Në mënyrë të rastësishme është zgjedhur nga një top (pa e kthyer), përderisa nuk nxirret top me numër tek. Të caktohet shpërdarja e ndryshoreve të rastit:

   X: shuma e numrave të tërhequr; Y: numri i topave të tërhequr.

3. Një njeri ka pasur lidhëse për katër çelësa, por vetëm njëri prej tyre e hap derën e tij të zyrës. Njeriu ka haruar cili është çelësi i vërtetë, prandaj e ka zgjedhur rastësisht. Të caktohet shpërdarja e ndryshores së rastit X – numri i përpjekjeve deri te gjetja e çelësit të vërtetë, nëse pas çdo prove çelësi jo përkatës lehet në një anë.

4. Në tavolinë hudhen dy zare. Të caktohet shpërdarja e ndryshores së rastit Z – shuma e pikave të anës së sipërme prej dy zareve.

5. Gjasa që të lind fëmijë mashkull është 0,51. Nëse llogaritet se gjinia e çdo fëmije të ardhshme të një familje nuk varet prej gjinisë të paraprakëve, të caktohet shpërdarja e ndryshores së rastit X – numri i fëmijëve meshkuj në një familje katër anëtarëshe.

6. Në një fabrikë ka 4 makina. Gjatë ditës e para prej tyre mund të prishet me gjasë 0,1, e dyta me gjasë 0,2, gjasa për prishjen e të tretës është 0,09, kurse për të katërtën është 0,11. Nëse makinat prishen pavarasisht njëra prej tjetrës, të caktohet shpërdarja e ndryshores së rastit X – numri i makinave të prishura gjatë një dite.

6 KARAKTERISTIKAT NUMERIKE TË NJË NDRYSHORE TË RASTIT

Kujtohu!

- Çdo ndryshore e rastit X është plotësisht e përcaktuar me bashkësinë e vlerave të saja $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dhe vlerave përkatëse $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Indikatori i ngjarjes së dhënë A, për çdo $P(A) = p$, kurse $q = 1 - p$, është ndryshore e rastit e dhënë me

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

A

Ndonjë herë është e domosdoshme njohuria e shpërdarjes të ndonjë ndryshore të rastit, por mjafton të dihen disa karakteristika (parametra) të cilat e përshkruajnë atë ndryshore të rastit. Disa prej atyre parametrave janë pritja matematike dhe disperzioni i një ndryshore të rastit.

Le të jetë X ndryshore e rastit e cila pranon vlera prej bashkësisë $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ dhe eksperimenti le të përsëritet N herë. Poashtu, n_1 herë le të paraqitet numri x_1, n_2 herë numri x_2, etj., n_k herë numrit x_k. Mesi aritmetik i këtyre numrave do të jetë:

$$\overline{x}_N = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{N}.$$

Shprehja e fundit mund të shkruhet në formën:

$$\overline{x}_N = \frac{n_1}{N} x_1 + \frac{n_2}{N} x_2 + \ldots + \frac{n_k}{N} x_k.$$

Nëse N është mjaft i madh, atëherë frekuenca relative $\frac{n_i}{N}$ do të jetë përafërsisht e barabartë me gjasën statistike të gjasës $\{X = x_i\}$, për $i = 1, 2, \ldots, k$, d.m.th. $\frac{n_i}{N} = P\{X = x_i\} = p_i$. Atëherë, mesi aritmetik mund të shkruhet në formën:

$$\overline{x_N} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_k x_k.$$

Prej këtu vjen ideja për përkufizimin e pritjes matematike ose vlera mesatare e një ndryshore të rastit në këtë mënyrë.

Mbaj mend!

Nëse X është ndryshore e rastit me bashkësinë e vlerave $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ dhe gjasat $p_i = P\{X = x_i\}$, për $i = 1, 2, \ldots, k$, atëherë ***pritja matematike*** (vlera mesatare) e X shënohet me EX dhe përcaktohet me barasinë:

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k.$$

1 Të caktohet pritja matematike e ndryshores së rastit X të dhënë me këtë ligj të shpërdarjes së gjasave:

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Zgjidhje:

Sipas formulës për caktimin e pritjes matematike kemi se

$$EX = 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}5 = 4{,}3.$$

2 Të caktohet pritja matematike e indikatorit të ngjarjës së dhënë A e cila paraqitet me gjasë p.

Zgjidhje:

Indikatori i ngjarjes A është dhënë me $I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, pra për pritjen e tij matematike fitohet

$$EX = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

B *Mbaj mend!*

Pritja matematike i ka këto veti:

1. $Ec = c$, ku c është çfarëdo konstante.
2. $E(cX) = cEX$.
3. $E(X+Y) = EX + EY$.
4. Nëse X dhe Y janë ndryshore të rastit të pavarura, atëherë $E(XY) = EX \cdot EY$.
5. Për konstantet e dhëna $c_1, c_2, \ldots, c_n$ $\quad E(c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \ldots + c_nE(X_n)$

3 Le të jenë X dhe Y ndryshore të rastit të pavarura të dhëna me këto ligje të shpërdarjes:

$X: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$, $Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. Të caktohet pritja matematike $X+Y$ dhe XY.

Zgjidhje:

Për pritjen matematike X dhe Y fitojmë:

$$EX = 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,3 = 2,8 \text{ dhe } EY = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,7 = 1,7.$$

Me shfrytëzimin e vetisë 3, fitohet se $E(X+Y) = EX + EY = 2,8 + 1,3 = 4,1$, por me shfrytëzimin e pavarshmërisë së X dhe Y dhe vetisë 4, e caktojmë pritjen matematike

$$E(XY) = EX \cdot EY = 2,8 \cdot 1,7 = 4,76.$$

C

4 Ndryshorja e rastit X le të jetë dhënë me $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$, kurse

ndryshorja e rastit Y është konstante $P\{Y=3\}=1$. Cakto EX dhe EY.

Shihe zgjidhjen:

$EX = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,2 = 3$, kurse $EY = 3 \cdot 1 = 3$.

Vëreve se të dy ndryshoret e rastit kanë pritje të njëjtë matematike, edhe pse shpërdarja e tyre ndryshon. Përkatësisht, ndryshorja e parë e rastësishmeit pranon pesë vlera, kurse e dyta është konstante.

5 Një tabllo për pikado është ndarë me rrathë koncentrik në zona të cilat kanë nga 10,9 dhe 8 poenë. Dy lojtarë A dhe B gjuajnë në pikado dhe X le të jetë numri i poenëve të cilët i arrinë lojtari A, kurse Y numri i i poenëve që i arrin lojtari B. Shpërdarja e X dhe Y është dhënë në këtë mënyrë:

$X: \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$, $Y: \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$. Cakto numrin e pritur të poenëve të lojtarëve A dhe B.

Zgjidhje:

$EX = 8 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,6 = 9,5$ dhe $EY = 8 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,7 = 9,5$.

Vëreve se të dy ndryshoret e rastësishme kanë pritje të njëjtë matematike, d.m.th. numri i pritur i poenëve është i barabartë edhe për të dy lojtarët, edhe pse shpërdarja e të dy ndryshoreve të rastit ndryshon. Nga ana tjetër, ta shqyrtojmë shmangëjen e poenëve prej pritjes së fituar matematike

$EX = EY = 9,5$. Mund të vërehet se $P\{X = 8\} < P\{Y = 8\}$, që thekson përfundimin se te lojtari i dytë mund të pritet numër i madh i të qëlluarave në zonën me 8 poenë, kurse me të edhe shmangëje më të madhe të poenëve prej pritjes matematike, e cila është 9,5, se sa shmangëja te lojtari i parë.

Prandaj paraqitet nevoja e futjes së karakteristikës së re që caktohet prej shmangëjeve të vlerave të një ndryshore të rastit prej pritjes së saj matematike. Ajo karakteristikë quhet disperzioni i ndryshores së rastit.

Mbaj mend!

Nëse X është ndryshore e rastit me bashkësinë e vlerave $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ dhe gjasat $p_i = P\{X = x_i\}$, për $i = 1, 2, \ldots, k$, atëherë ***disperzioni*** i X shënohet me DX dhe caktohet me barasinë:

$$DX = E(X - EX)^2 = (x_1 - EX)^2 \times p_1 + (x_2 - EX)^2 \times p_2 + \ldots + (x_k - EX)^2 \cdot p_k$$

E shprehur me fjalë, disperzioni është vlera mesatare e katrorëve të shmangëjeve të vlerave të ndryshoreve të rastit prej pritjes së saj matematike.

Me zbërthimin e shprehjes për caktimin e disperzionit dhe zbatimi i vetive të pritjes matematike fitohet kjo:
$X = E(X^2 - 2X\,EX + (EX)^2) = E(X^2) - 2EX\,EX + (EX)^2 = EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$,
ku EX^2 caktohet me formulën $EX^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_k^2 p_k$.

6 Të caktohet disperzioni i ndryshoreve të rastit X dhe Y prej detyrës 5.

Zgjidhje:

Te detyra 5 caktuam $EX = EY = 9,5$. Tani,

$$EX^2 = 8^2 \cdot 0,1 + 9^2 \cdot 0,3 + 10^2 \cdot 0,6 = 90,7; \quad EY^2 = 8^2 \cdot 0,2 + 9^2 \cdot 0,1 + 10^2 \cdot 0,7 = 90,9.$$

Për disperzionet e të dy ndryshoreve të rastit fitohet:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 90,7 - 9,5^2 = 0,45; \quad DY = EY^2 - (EY)^2 = 90,9 - 9,5^2 = 0,65.$$

Pasi, $DX < DY$, mund të përfundohet se shpërdarja e poenëve të lojtarit të parë është më homogjene se sa shpërdarja e poenëve të lojtarit të dytë.

7 Të caktohet disperzioni i indikatorit të ngjarjes A.

Zgjidhje:

Indikatori i ngjarjes A është dhënë me $I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ dhe caktuam se pritja e tij matematike është $EI_A = p$. Për EI_A^2 kemi $EI_A^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$.

Tani, $DI_A = EI_A^2 - (EI_A)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$.

8 Ndryshorja e rastit X paraqet notën nga matematika në IV[1], kurse ndryshorja e rastit Y – nota nga matematika në IV[2]. Ligjet e shpërdarjes së ndryshoreve të rastësishme X dhe Y janë këto:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,1 & 0,15 & 0,3 & 0,15 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Cakt notat mesatare nga matematika në të dy klasët. Në rastin të jenë të barabarta, cakto në cilin prej të dy klasave shpërdarja e notave është më homogjene.

Zgjidhje:

Për notat mesatare të dy klasëve kemi:

$EX = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 = 3,4$ dhe $EY = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,3 = 3,4$.

Domethënë, notat mesatare të dy klasave janë të barabarta. Për EX^2 dhe EY^2 kemi:

$EX^2 = 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,2 = 13$ dhe

$EY^2 = 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,15 + 3^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,15 + 5^2 \cdot 0,3 = 13,3$. Tani

$DX = EX^2 - (EX)^2 = 13 - 3,4^2 = 1,44$ dhe $DY = EY^2 - (EY)^2 = 13,3 - 3,4^2 = 1,74$.

Pasii $DX < DY$, mund të përfundohet se shpërdarja e notave në IV[1] është më homogjene se në IV[2].

Ç *Mbaj mend!*

Disperzioni i ka këto veti:

1. $DX \geq 0$; $DX = 0$ nëse dhe vetëm nëse $P\{X = \text{const}\} = 1$.
2. $D(cX) = c^2 DX$, për konstanten e dhënë c.
3. Nëse X dhe Y janë ndryshore të rastit të pavarura, atëherë
$$D(X + Y) = DX + DY.$$
4. Nëse $X_1, X_2, \ldots, X_n$ janë ndryshore të rastësishme të pavarura, atëherë
$$D(c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n) = c_1^2D(X_1) + c_2^2D(X_2) + \ldots + c_n^2D(X_n).$$

9 Le të jetë X dhe Y ndryshore të rastit të pavarura të dhëna në detyrën 3. Të caktohet disperzioni i $X + Y$.

Zgjidhje:

$EX^2 = 1^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,3 = 10,6$ dhe $EY^2 = 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,7 = 3,1$. Për disperzionin e të dy ndryshoreve të rastit fitohet $DX = EX^2 - (EX)^2 = 10,6 - 2,8^2 = 2,76$ dhe $DY = EY^2 - (EY)^2 = 3,1 - 1,7^2 = 0,21$.
Në fund, prej pavarshmërisë së X dhe Y dhe me zbatimin e vetisë 3, gjejmë se
$$D(X + Y) = DX + DY = 2,76 + 0,21 = 2,97.$$

Detyra:

1. Shpërdarja e ndryshores së rastit X – nota nga matematika në një klasë është:
$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,1 & 0,15 & 0,3 & 0,3 & 0,15 \end{pmatrix}$. Të caktohet nota mesatare nga matematika në klasë dhe disperzioni i asaj note.

2. Shpërdarja e ndryshores së rastit Y – numri i anëtarëve në një amvisëri në Shkup është kjo:
$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0,237 & 0,317 & 0,178 & 0,157 & 0,07 & 0,026 & 0,015 \end{pmatrix}$. Të caktohet numri mesatar në një familje në Saraj të Shkupit dhe disperzioni përkatës.

3. Një shenjtor e qëllom shënjestrën me gjasë $p = 0,8$ në çdo gjuajtje. Ai ka pasur 4 plumba dhe gjuan përderi sa nuk e qëllon shënjestrën ose deri sa nuk i shpenzon të gjitha plumbat. Të caktohet:
   a) shpërdarja e ndryshores së rastit X – numri i gjuajtjeve në shënjestër;
   b) EX dhe EY.

4. Hudhen dy zare për lojë. Të caktohet shuma e pritur e pikëve të dy zareve dhe disperzioni i tij.

TEMA 5

STATISTIKA

Në këtë temë do të mësosh për:

1 POPULLACIONI, SHËNIMI, EKZEMPLARI. STATISTIKA

Kujtohu!

Ndryshoret e rastit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ janë të pavarura, nëse për çfarëdo vlere $x_i \in R_{X_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ngjarjet e rastit $\{X_1 = x_1\}, \{X_2 = x_2\}, \ldots, \{X_n = x_n\}$ janë të pavarura në tërësi. Përkatësisht,

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\} \cdot P\{X_2 = x_2\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n = x_n\}, \text{ për të gjithë } x_i \in R_{X_i},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

A

Statistika matematike është shkencë e cila në vete i përfshin tre tipa të aktiviteteve:

1. mbledhja e të dhënave statistike;
2. studimi i atyre të dhënave statistike;
3. përpunimi i metodave dhe rregullave të përgjithshme për mbledhjen e të dhënave statistike, për studimin e tyre, fitimi i rezulltateve të besueshme dhe zgjidhje të cilat janë të bazuara shkencëtarisht.

Lënda e statistikës matematike është tipi i tretë i aktiviteteve me të cilin janë lidhur shumë detyra teorike dhe praktike.

Gjatë çdo hulumtimi statistik niset prej bashkësisë të objekteve të një lloji të cilët kanë një ose më shumë karakteristika të përbashkëta.

Për shembull, bashkësisë prej të gjithë fëmijëve në Shkup në moshën dhjetë vjeçare mund të shqyrtohen këto karakteristika: lartësia, pesha, suksesi në shkollë, gjinia, nacionaliteti, ngjyra ec syve etj. Bashkësisë, tani, rrushi i blerë në një podrum të verës, mund të hulumtohen karakteristikat: pesha, përqindja e sheqerit, përqindja e alkoolit (nëse ka filluar të fermentohet) etj.

Në statistikë, bashkësia e objekteve të një lloji ose rezulltatet prej ndonjë operacioni të cilët kanë një ose më shumë karakteristika të përbashkëta quhet *popullacion*. Karakteristika e përbashkët quhet *shënim*.

Popullacioni është koncept themelor në statistikë dhe ai nuk është i përkufizuar. Popullacioni shënohet me Ω, pasi ai është bashkësi prej të gjitha mundësive të mundshme në lidhje me një eksperiment (bashkësia e ngjarjeve elementare).

Te shembujt e përmendur, për popullaacionin „fëmijët në Shkup", shënime janë: lartësia, pesha, suksesi, gjinia, nacionaliteti, ngjyra e syve etj., kurse për popullacionin „rrushi i blerë në një podrum të verës", shënime janë: pesha, përqindja e sheqrit, përqindja e alkoolit etj.

Mund të vërehet se vlera që e fiton shënimi është madhësi e ndryshueshme dhe ajo nuk mund me siguri të parashihet për njësi konkrete prej popullacionit. Prandaj, do të llogarisim se çdo shënim është ndryshore e rastësishmeit.

Më së shpeshti, gjatë zgjidhjes të problemeve praktike, shpërdarja e shënimeve dihet prej më parë. Prej këtu, qëllimi i statistikës është me shfrytëzimin e metodave të caktuara dhe të caktohet ajo shpërdarje ose të caktohen karakteristikat etij, të vlerësohen disa parametra etj.

Shënimet mund të jenë kuantitative dhe kualitative. Vlerat e shënimit kuantativ janë numra realë. Shënimet kunatitaive janë: lartësia, pesha, suksesi (te popullacioni nxënësa), ose përqindja e sheqerit, pesha etj. (te popullacioni blerja e rrushit në podrumin e verës). Shënime kualitative janë: gjinia, nacionaliteti, ngjyra e syve etj.

Shënimet kuantitative mund të jenë diskrete dhe të vijueshme, ngjashëm sikurse që mund të jenë ndryshore e rastit.

B Më së shpeshti, gjatë kryerjes së hulumtimeve statistike, nuk është e mundshme të hulumtohen të gjitha elementet prej popullacionit. Ndodh që hulumtimet të zgjasin shumë gjatë, të jenë të lidhura me shpenzimin e mjeteve finansiare ose, edhe aq më shumë, gjatë hulumtimit të objekteve të caktuara të vjen deri te zhdukja e tyre.

Prandaj, zgjedhet pjesë e popullacionit në të cilin kryhen të gjitha hulumtimet poashtu duhet të sillen përfundime të cilat do të vlejnë për gjithë popullacionin me gjasë të caktuar.

Mbaj mend!

Pjesa e popullacionit në të cilën kryhen hulumtimet e nevojshme quhet *ekzemplar.*
Numri i elementeve në ekzemplar quhet *madhësia e ekzemplarit.*

Përfundimet që do të sillen në bazë të ekzemplarit duhet të vlejnë për gjithë popullacionin.
Që të arrihet kjo, është e nevojshme që ekzemplari të jetë *reprezentativ*, d.m.th. të paraqet mini-model të popullacionit. Që të arrihet kjo, është e nevojshme çdo element prej popullacionit të ketë shansa të barabarta të hyjë te ekzemplari. Domethënë, zgjedhja e çdo elementi duhet të jetë i pavarur dhe i rastësishëm.

Mbaj mend!

Ekzemplari i cili fitohet prej një vargu të eksperimenteve të pavarur dhe të barabartë quhet *ekzemplar i thjesht i rastit.*

Shmangëja prej parimit të zgjedhjes së rastit mund të sjellë deri në gabime serioze. Ta shqyrtojmë këtë shembull real.

1 Një revistë amerikane ka bërë anketë për hulumtimin e mendimit publik rreth zgjedhjeve për kryetar zgjedhje në SHBA në vitin 1936. Kandidatë kanë qenë F. Ruzvelt dhe A. Lendon. Për zgjedhje të ekzemplarit, revista e ka përdor regjistrin telefonik. Kanë qenë të zgjedhur 4 milionë adresa dhe të gjithëve u janë dërguar anketa me pyetje rreth kandidatëve. Revista ka shpenzuar shumë mjete finansiare për dërgimin e kartolinave dhe përpunimi i të dhënave dhe ka botuar se për kryetar do të zgjedhet A. Lendon. Rezulltati prej zgjedhjeve është vërtetuar se prognoza ka qenë e gabuar. Ku ka qenë gabimi?

Përgjigje:

- Në këtë rast, janë bërë dy gabime. Së pari, në atë periudhë ka qenë krizë ekonomike, telefona kanë pasur vetëm pasanikët. Së dyti, në anketë janë përgjigjur më së shumti njerëzit e punësuar, të cilës në realitet, kanë pasur shprehi të përgjigjen në letra, kurse të gjithë ato e kanë përmbajtur Lendonin.
- Nga ana tjetër, dy sociolog, rreth të njëjtës pyetje, kanë bërë anketë me 4 mijë peytësor dhe kanë arritur deri te përgjigja e vërtetë. Shkak për atë është që ato jo vetëm që drejt e kanë parashtruar ekzemplarin, por janë nisur prej asaj që shoqëria përbëhet prej shtresave sociale të ndryshme dhe pjesa më e madhe që i kanë takuar një shtrese përmbajnë kandidatin e njëjtë. Kështu, me ndihmën e hulumtimeve sipas shtresave sociale janë sjellur përfundime të cilat vlejnë për tërë shtetin.
- Sot, metoda të këtilla për sjelljen e përfundimeve të këtilla janë në përgjithësi të përvetësuara.

C Për popullacionin e dhënë le të vërehet shënimi X. Le të jetë X_1 vlera e X në kryerjen e parë të eksperimentit. Është e qarë, X_1 është një ndryshore rasti. Pastaj, le të jetë X_2 ndryshore rasti - vlera e X gjatë kryerjes së dytë të eksperimentit etj., X_n– vlera e X gjatë kryerjes n të eksperimentit. Në këtë mënyrë është fituar ekzemplar i thjeshtë i rastit $X_1, X_2, ..., X_n$.

Mbaj mend!

Vargu i shpërdarjes të ndryshoreve të rastit të pavarur dhe të barabartë $X_1, X_2, ..., X_n$ quhet ***ekzemplar i rastit*** për shënimin X.
Kur ndryshoret e rastit $X_1, X_2, ..., X_n$ do të fitojnë vlera konkrete prej popullacionit, atëherë fitohet një ***realizim të ekzemplarit të rastit.***

- Kështu, nëse x_i është vlera e ndryshores së rastit X_i, $i = 1, 2, ..., n$, atëherë $x_1, x_2, ..., x_n$ është një realizim i ekzemplarit të rastit $X_1, X_2, ..., X_n$.

2 Le të jetë X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ekzemplar me madhësi 5 për shënimin X – lartësia e nxënësve të moshës dhjetë vjeçare në Shkup. Nëse rastësisht zgjedhen 5 nxënës të atillë dhe maten lartësitë e tyre, atëherë do të fitohet një realizim i ekzemplarit. Për shembull, 102, 104, 99, 95, 110 është një realizim i ekzemplarit, 115, 110, 97, 99, 104 është realizim tjetër konkret i ekzemplarit në bazë të 5 zgjedhjeve tjera të rastit etj.

Ç Gjatë hulumtimeve teorike dhe sjellja e përfundimeve teorike, në statistikë shfrytëzohet ekzemplar i rastit $X_1, X_2, ..., X_n$, kurse gjatë detyrave praktike punohet me realizim konkret të ekzemplarit.

- Një numër i madh i metodave në statistikë shfrytëzohen funksione prej ekzemplarit të cilët, gjithashtu, ndryshore rasti. Ato funksione do t'i quajmë statistikë.

Mbaj mend

Statistika është funksion prej ekzemplarit të rastit $X_1, X_2, ..., X_n$ për shënimin X.
Gjatë realizimit konkret $x_1, x_2, ..., x_n$ të ekzemplarit, statistika do të fiton një vlerë konkrete të cilën do ta quajmë ***realizimi i statistikës.***

3 Le të jetë X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ekzemplar rasti për shënimin X – lartësia e nxënësve në Shkup në moshën 10 vjet. Atëherë funksioni $U=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5}$ është një funksion prej ekzemplarit, d.m.th. statistika. Nëse marrim një realizim të ekzemplarit, për shembull, 102, 104, 99, 95, 110, atëherë do të fitojmë një vlerët (realizimi) i statistikës U.

Përkatësisht, $u=\frac{102+104+99+95+110}{5}=102$ edhe në rastin konkret, paraqet mes aritmetik të lartësive prej realizimit të ekzemplarit.

Detyra:

1. Ta shqyrtojmë popullacionin e llambave të prodhuara për një ditë në një fabrikë. Përmend cilët prej këtyre shënimeve janë kualitative, kurse cilat kuantitative: intenziteti i llambës, ngjyra, rregullshmëria, madhësia (në cm) dhe pesha.

2. Është dhënë popullacioni $\Omega=\{2, 3, 4, 5\}$. Cilat janë të gjithë ekzemplarët e mundshëm me madhësi 2 të cilët mund të tërhiqen me kthim prej atij popullacioni?

3. Le të jetë $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ekzemplar i dhënë rasti, kurse $Y=\frac{1}{n}(X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2)$ është statistika e dhënë.

   a) Të njehsohet realizimi y i statistikës Y, nëse është dhënë ky ekzemplar i realizuar:

   1 4 6 2 3 0 5 1

   b) Çka është ndryshimi ndërmjet Y dhe y?

2 HIPOTEZAT DHE GABIMET

Kujtohu!

Funksioni statistikor prej ekzemplarit të rastit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ për shënimin X. Gjatë realizmit konkret $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i ekzemplarit, statistika fiton një vlerë konkrete të cilën e quajmë realizim të statistikës.

A Sikurse është theksuar më parë, numri më i madh i problemeve në statistikë sillen në caktimin e shpërdarjes të panjohur të shënimit ose përcaktimi i karakteristikave numerike, vlerësojmë në disa parametra të panjohur për shënimin etj. Në shumë raste, përcaktimi i këtyre karakteristikave kryhet duke dhënë disa supozime saktësia e të cilave, pastaj, duhet të kontrollohet, d.m.th. testohet.

1 Një fabrikë e çokollatave blen qumësht prej prodhuesëve privat. Të punësuarit në fabrikë dyshojnë se prodhuesët fusin ujë në qumësht me qëllim që ta zmadhojnë profitin e tyre. Teprica e ujit në qumësht mund të zbulohet me përcaktimin e temperaturës së ngrirjes së qumështit. Pika e ngrirjes së qumështit natyror (pa shtuar ujë) është mesatarisht afër – 0,5°C, por nëse futet ujë, qumështi ngrinë në temperaturë më të lartë prej –0,5°C. Në këtë rast, interesimi i fabrikës është të tregon se në qumësht është futur ujë. Prandaj, formohet një ekzemplar rasti duke marrë mostra prej disa enëve të qumështit të zgjedhura rastësisht prej një prodhuesi dhe kontrollohet pika e ngrirjes së qumështit. Në bazë të rezulltateve të fituara duhet të bëhet një test statistik në të cilin duhet të vednoset se supozimi (hipoteza) për futjen e ujit në qumësht do të pranohet ose do të hudhet.

Mbaj mend!

Çdo supozim për popullacionin, për shpërdarjen e disa shënimeve të saj, për vlerat e disa parametrave të shënimit etj. quhet *hipoteza statistike.*
Mënyra me të cilën kontrollohet saktësia e hipotezës së parashtruar në bazë te të dhënave prej ekzemplarit të dhënë quhet *testi satistik.*

2 Mënyra për testim të hipotezave statistike është shumë e ngjashme për sjelljen e përfundimeve të vendimit gjyqësor. Përkatësisht, kur dikush është i akuzuar për vjedhje, gjyqi mendon se është fajtor, përderi sa nuk vërtetohet se është fajtor, prokurori mbledh fakte dhe i prezenton para gjyqit, me qëllim ta hudh supozimin „nuk është fajtor" dhe i akuzuari të jetë i gjykuar. Megjithatë, nëse i akuzuari nuk ka sukses ta hudh supozimin „nuk është fajtor", atëherë nuk është treguar se i akuzuari nuk është fajtor, pasi nuk ka fakte të mjaftueshme për atë të shpallet për fajtor.

Sikurse mund të vërehet nga dy shembujt paraprak, mënyra e testimit sillet përfundimi për njërën prej dy hipotezave të cilat përjashtohen njëra me tjetrën. Përkatësisht, nëse njëra përvetësohet, tjetra automatikisht hudhet, dhe anasjelltas. Kështu, në shembullin e parë, njëri supozim është se në qumësht nuk është futur ujë, kurse supozimi i dytë është i kundërtë: në qumështë është futur ujë. Në shembullin me gjykatësin, të dy supozimet e kundërta janë se i akuzuari nuk është fajtor.

Mbaj mend!

Hipoteza e cila testohet quhet ***hipoteza zero*** dhe shënohet me H_0, kurse e kundërta quhet ***hipoteza alternative*** dhe shënohet me H_a.
Për hipotezën zero zakonisht zgjedhet ajo te e cila janë dhënë disa standarde për karakteristikën konkrete ose vlerat të cilat kanë qenë aktuale deri te matja e fundit.

Kështu te shembulli 1, standardet tregojnë se pika e ngrirjes të qumështit natyror është $-0,5°C$, pra do të zgjedhim hipotezën zero të jetë e formës:

$$H_0: t = -0,5,$$

kurse kontrollojmë se temperatura e ngrirjes së qumështit prej prodhuesëve a është më e madhe prej $-0,5°C$, pra hipoteza alternative do të jetë e formës:

$$H_a: t > -0,5.$$

Gati në çdo situatë parashtrohet pyetja si të zgjidhet hipoteza alternative. Përgjigja eksplicite e kësaj pyetje e cila vlen për çdo problem, nuk ekziston. Çka do të zgjedhet për hipoytezë alternative, gjithmonë varet prej detyrës konkrete. Kështu, në shembullin 1, përveç të dhënës për hipotezën alternative ekzistojnë edhe dy mundësi, ato janë:

$H_a:\ t < -0,5$ dhe $H_a:\ t \neq -0,5$. Në këtë rast, u përcaktuam për hipotezën e parë të përmendur ($H_a:\ t > -0,5$), pasi rasti $t < -0,5$, shkon në kontekst të hipotezës zero. Përkatësisht, nëse pika e ngrirjes së qumështit është më e vogël se ajo standarde, atëherë qumështi përmban më pak ujë, pra është më e dendur nuk i dëmton standardet.

3 Në një qumështore prodhohet jogurti yndyra e të cilit duhet të jetë 3 njësi. Që të kontrollohet se një seri e ka yndyrën e kërkuar, zgjedhet ekzemplar prej disa pakove të jogurtit dhe matet yndyra.Në këtë rast, do të mund të testohet hipoteza zero:

$$H_0:\ a = 3,$$

përballë alternativës $H_a:\ a \neq 3$. Vendosim për këtë hipotezë alternative, pasi nëse hipoteza alternative është $H_a:\ a < 3$, dhe nëse ajo kalon si e saktë, kjo do të thotë se yndyra është më e vogël se ajo që është shkruar (me të cilën do të ishin të mashtruar shfrytëzuesit), por nëse hipoteza alternative është $H_a:\ a > 3$ edhe pse ajo do të kalon si e saktë, atëherë qumështorja do të jetë në humbje

- Në shembullin 3, hipoteza alternative $H_a:\ a \neq 3$. Për testin e këtillë themi se është e *dyanshme*. Nëse zgjedhet hipoteza alternative $H_a:\ a < 3$ ose $H_a:\ a > 3$, atëherë testi është i *njanshëm*.
- Të supozojmë se shpërdarja e një shënimi X varet prej një parametri të panjohur b, kurse të gjithë parametrat tjerë të asaj shpërdarje janë të njohur. Hipoteza e cila parashtrohet le të caktohet vlera e parametrit të panjohur, është i formës $H_0:\ b = b_0$, ku b_0 është numër fiks real. Hipotezat e këtilla te të cilët paraqitet vetëm një vlerë e parametrit të panjohur quhen *hipoteza të thjeshta*.

- Nëse, tani, parashtrohet hipoteza e formës $H:\ b > b_0$ (hipoteza H mund të jetë zero ose alternative), atëherë parametri b mund të pranon shumë vlera. d.m.th. $b \in (b_0, \infty)$. Hipoteza me të cilët për parametrin janë të lejuara më shumë vlera quhet *hipoteza e përbërë*. Të përbëra janë hipotezat e formës $H:\ b < b_0$ ose $H:\ b \neq b_0$.

- Në shembuj praktik mund të testohet e thjeshta përkundër hipotezës së thjeshtë, e thjeshta përkundër të përbërës ose e përbëra përkundër hipotezës së përbërë.

4 Se çka ka në një kutie në të cilën ka 20 topa nuk është plotësisht e njohur. T'i përkufizojmë këto hipoteza:

H_0: në kuti ka topa 6 të kuq dhe 14 të bardhë;

H_a: në kuti ka topa 5 të kuq dhe 15 të bardhë.

Në këtë rast kemi të thjeshtë përkundër hipotezës së thjeshtë, pasi nëse llogarisim se parametri është numër topat e kuq, atëherë ai është njëvlerësisht i dhënë edhe në hipotezën zero dhe në hipotezën alternative. Të vërejmë se nëse dihet numri i topave të kuq, atëherë numri i topave të bardhë në kuti është plotësisht i përcaktuar. Por, nëse hipotezat përkufizohen në këtë mënyrë:

H_0: në kuti ka 6 të kuq dhe 14 të bardhë;

H_a: në kuti ka më shumë se 5 topa të kuq;

atëherë hipoteza alternative është e përbërë. Përkatësisht, numri i topave të kuq mund të jetë 6, …,20, d.m.th. ekzistojnë më shumë vlera për parametrin e shqyrtuar.

Në procesin e testimit të një hipoteze, vendimi se ai a do të pranohet ose do të hudhet, sillet në bazë të të dhënave prej një ekzemplari. Pasi bëhet fjalë për ekzemplar rasti, ekziston mundësi vendimet të cilat do të jenë të sjellura me ndonjë gabim.

Mbaj mend!

Hudhja e hipotezës zero kur ajo është e saktë quhet *gabim i tipit të parë*. Gjasa e saj quhet *gjasa e gabimit të tipit të parë* dhe shënohet me α.
Pranimi i hipotezës zero kur ajo nuk është e saktë quhet *gabimi i tipit të dytë*. Gjasa e saj quhet *gjasa e gabimit e tipit të dytë* dhe shënohet me β.

Të dy mundësitë për hipotezën zero (e saktë ose jo e saktë) dhe të dy vendimet e mundshme t'i sjellë ai i cili e përcjellë testimin mund të paraqiten në një tabelë njëdimenzionale.

Vendimi	Hipoteza zero H_0	
	e saktë	jo e saktë
H_0 hudhet	gabim i tipit të parë	vendim i drejtë
H_0 pranohet	vendim i drejtë	gabimi i tipit të dytë

5 Dihet se në një kuti ka 10 topa, por nuk është e sigurtë se a janë: 6 të kuq dhe 4 të gjelbër ose janë 5 të kuq dhe 5 të gjelbër. Prandaj përkufizohen këto hipoteza:

H_0: në kuti ka 6 të kuq dhe 4 të gjelbër;

H_a: në kuti ka 5 të kuq dhe 5 të gjelbër.

Përkufizohet kjo rregullë e testimit:

1) hipoteza H_0 nuk hudhet nëse dhe vetëm nëse nxirret top i kuq;
2) në të kundërtën H_0 hudhet.

Të caktohen gjasat e gabimit prej tipit të parë dhe të dytë.

Zgjidhje:

Gabimi i tipit të parë do të paraqitet nëse hudhet hipoteza zero kur ajo është e saktë. Nëse H_0 është e saktë, atëherë në kuti ka 6 topa të kuq dhe 4 të gjelbër. Hipotezën do ta hudhim nëse nxirret top i gjelbër, kurse gjasa ajo të ndodh është $4/10 = 0,4$. Prej këtu,

$$a = P\{\text{është tërhequr top i gjelbër} \mid H_0 \text{ është e saktë}\} = 0,4.$$

Gabimi i tipit të dytë do të paraqitet nëse hipoteza zero pranohet, nëse nuk është e saktë, d.m.th. nëse është e saktë hipoteza alternative. Në këtë rast, në kuti ka 5 topa të kuq dhe 5 të gjelbër. Hipoteza zero do të pranohet nëse nxirret top i kuq. Gjasa që kjo të ndodh, në këtë përbërje në kuti, është $5/10 = 0,5$, domethënë

$$b = P\{\text{është tërhequr topi i kuq} \mid H_a \text{ është e saktë}\} = 0,5.$$

Qëllimi i çdo testi statistik është të dy tipat e gabimeve të jenë çka është e mundshme më të vogla. Poashtu, nëse α zvogëlohet, d.m.th. nëse zvogëlohet gjasa e hipotezës zero të jetë hudhur kur është e saktë, atëherë zmadhohet gjasa të jetë e pranuar kur është jo e saktë, d.m.th. zmadhohet β, dhe anasjelltas. Prandaj, zakonisht, jepet vlera e lejuar maksimale për α dhe zgjedhet kriterium me të cilin për vlerën e zgjedhur për α, sigurohet vlera më e vogël për β.

Mbaj mend!

Gjasa më e madhe e lejuar e gabimit të tipit të parë quhet *niveli i rëndësisë së testit.*

Më së shpeshti, zgjedhet $\alpha = 0{,}05$ ose $\alpha = 0{,}01$. Zgjedhja $\alpha = 0{,}05$, d.m.th. zgjedhjen e gjasës ta hudhim hipotezën zero kur ajo është e saktë të jetë 0,05, e tregon këtë. Testi le të përsëritet shumë herë. Çdo përsëritje të testit do ta llogarisim për përpjekje të gjendet vërtetim se hipoteza zero është jo e saktë. Nëse $\alpha = 0{,}05$, Atëherë mund të llogaritet se vërtetimi i atillë do të gjendet më së shumti 5% prej provave, nëse hipoteza zero është e saktë. Nëse, tani, $\alpha = 0{,}01$, kjo do të thotë gjatë përsëritjes së testit shumë herë, hipoteza zero nuk do të pranohet më së shumti 1% prej rasteve, nëse ajo është e saktë.

Nëse kthehemi te krahasimi me procesin gjyqësor, $\alpha = 0{,}05$, paraqet se më së shumti 5% prej fakteve do të jenë kundër të akuzuarit (në këtë rast, kundër hipotezës zero e cila thotë „i akuzuari nuk është fajtor"), të tjerat 95% do të jenë në dobi të tij, në rastin kur ai nuk është faktor.

Mbaj mend!

Gjasa të hudhet hipoteza zero kur ajo nuk është e saktë quhet *fuqia e testit* dhe shënohet me p.

Nëse hipoteza është jo e saktë, ajo mund të pranohet ose të hudhet. Gjasa të pranohet, nëse është jo e saktë është β, kurse gjasa të hudhet kur është jo e saktë është p. Prej këtu,

$$p + \beta = 1, \quad \text{d.m.th} \quad p = 1 - \beta.$$

6 Në kuti ka 10 topa. Testohet hipoteza zero

H_0: në kuti ka 2 topa të kuq dhe 8 të bardhë,

përkundër hipotezës alternative

H_a: në kuti ka 4 topa të kuq dhe 6 të bardhë.

Nxirren dy topa pa i kthyer dhe përvetësohet kjo rregullë për testim:

1) H_0 hudhet, nëse të dy topat e nxjerrur janë të kuq;
2) në të kundërtën, H_0 pranohet.

Të caktohen gjasat e gabimit të tipit të parë dhe të dytë dhe fuqia e testit.

Zgjidhje:

T'i shënojmë këto ngjarje:

A_i: në tërheqjen i – është fituar top i kuq, $i = 1, 2$.

Gabimi i tipit të parë do të paraqitet, nëse hudhet hipoteza zero kur ajo është e saktë. Nëse hipoteza zero është e saktë, në kuti ka 2 topa të kuq dhe 8 të bardhë, kurse ajo do të hudhet nëse tërhiqen dy topa të kuq, d.m.th. nëse paraqitet ngjarja A_1A_2. Për gjasën e sajt fitohet:

$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{45}$. Prej këtu, gjasa e gabimit të tipit të parë është $\alpha = 1/45$.

Gabimi i tipit të dytë do të paraqitet nëse pranohet hipoteza zero kur nuk është e saktë. Nëse hipoteza zero nuk është e saktë, atëherë është e saktë hipoteza alternative, d.m.th.në kuti ka 4 topa të kuq dhe 6 të bardhë.

Hipoteza zero do të pranohet nëse prej kutisë, me përbërje të këtillë, nuk nxirren dy topa të kuq, d.m.th. nëse nxirret më së shumti një top i kuq. Në realitet, kjo ngjarje është e kundërtë e ngjarjes A_1A_2, e cila tregon senë të dy tërheqjet është fituar top i kuq. Tani,

$$P(\overline{A_1A_2})=1-P(A_1A_2)=1-P(A_1)P(A_2\mid A_1)=1-\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{13}{15}.$$

Domethënë, $\beta=13/15$, pra fuqia e testit do të jetë $p=1-\beta=2/15$.

Hapi vijues në mënyrën e testimit të hipotezës zero është zgjedhja e *test statistikës* . Kjo zgjedhje varet prej hipotezës të cilën e testojmë. Në lloj konkret të testeve konkrete do të ndalemi te mësimet e ardhshme kur të testojmë hipoteza konkrete.

Hapi i parafundit në një test statistikë është përcaktimi i kriteriumit domen. Kjo është, në realitet, fusha e hudhjes së hipotezës zero. Përkatësisht, boshti real është ndarë në dy nënzona: zona e pranimit të hipotezës zero dhe zona e hudhjes së saj (*domeni kritik*). Domenin kritik do ta shënojmë me C dhe ai zgjedhet ashtu që gjasa testi statistik Z të pranon vlerë e cila gjendet në atë domen kritik, nëse hipoteza zero është e saktë, më së shumti α, d.m.th.

$$P\{Z\in C \mid H_0 \text{ është e saktë}\}\leq\alpha.$$

Sikurse është theksuar më parë, më së shpeshti testohet për vlerën e dhënë të gabimit të tipit të parë α, të caktohet vlera minimale e gabimit prej tipit të dytë β. Domeni kritik për të cilin ai është plotësuar quhet *domen optimal kritik* ose *domeni më i fuqishëm kritik*. Domethënë, nëse C^* është domeni më i fuqishëm kritik, atëherë çdo domen tjetër kritik C vlen:

$$P\{Z\notin C^* \mid H_a \text{ është i saktë}\}\leq P\{Z\notin C \mid H_a \text{ është i saktë}\}.$$

7 Në një kuti gjenden 8 topa prej të cilëve disa janë të bardhë , kurse të tjerët të zi. Përbërja e saktë e topave nuk është e njohur, prandaj parashtrohen këto hipoteza:

H_0: në kuti ka 4 topa të bardhë dhe 4 të zi,

H_a: në kuti ka 2 topa të bardhë dhe 6 të zi.

Që të konstatohet cila prej hipotezave është e saktë, prej kutisë nxirren 3 herë nga një top duke e kthyer. Për nivelin e dhënë të rëndësisë $\alpha=0{,}1$, të konstaohet domeni më i fuqishëm kritik për testin të hipotezës së parashtruar.

Zgjidhje:

Kriteriumi për pranimin ose jo të hipotezës zero , duhet të varet prej numrit të topave të bardhë të nxjerrur në të tre nxjerrjet e kryera. Prandaj, për test statistikë do ta zgjedhim Z i cili paraqet pikërisht numrin e topave të bardhë të nxjerrur. Është e qartë se bashkësia e vlerave të Z është $R_Z=\{0,1,2,3\}$. Nëse hipoteza zero është e saktë, atëherë gjasa që të nxirret top i bardhë është 4/8 = 1/2, që do të thotë se ndryshorja e rastit Z do të ketë shpërdarje binomiale, $Z\sim B(3,1/2)$. Nëse, tani, hipoteza alternative është e saktë, atëherë gjasa do të fitohet top i bardhë gjatë një nxjerrje është 2/8 = 1/4 dhe $Z\sim B(3,1/4)$. Domethënë, testohet hipoteza zero H_0: $Z\sim B(3,1/2)$ kundër hipotezës alternative H_a: $Z\sim B(3,1/4)$. Ta caktojmë domenin kritik për testim të hipotezave të këtilla, gjatë nivelit të rëndësisë $\alpha=0{,}1$. Atë do ta bëjmë prej këtij kushti:

$$P\{Z\in C \mid H_0 \text{është e saktë}\}\leq\alpha.$$

Nëse H_0 është e saktë, atëherë shpërdarja e Z është përcaktuar me:

$$P\{Z=k\}=\binom{4}{k}\frac{1}{2^4},\ \text{per}\ \ k=0,1,2,3,4,\quad \text{ose}$$

$$Z:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,0625 & 0,25 & 0,375 & 0,25 & 0,0625 \end{pmatrix}.$$

I kërkojmë ato nënbashkësi prej bashkësisë së vlerave të Z për të cilët vlen $P\{Z\in C \mid H_0$ është e saktë$\}\le 0,1$. Është e qartë se ato janë vetëm bashkësitë një elementëshe $C_1=\{0\}$ dhe $C_2=\{4\}$, pasi $P\{Z=0\}=P\{Z=4\}=0,0625<0,1$, kurse gjasa Z t'i takoj cilësdo bashkësi tjetër do të jetë më e madhe se $0,1$. Prej këtu mund të përfundohet se C_1 dhe C_2 mund të llogariten për domene kritike gjatë testimit të hipotezës së dhënë. Prej tyre domeni më i mirë është ai për të cilin gjasa e gabimit të tipit të dytë është më i vogël, d.m.th. gjasa të pranohet hipoteza zero, nëse është e saktë hipoteza alternative.

Nëse H_a është e saktë, atëherë $Z\sim B(3,1/4)$, përkatësisht:

$$P\{Z=k\}=\binom{4}{k}\frac{1}{4^k}\left(\frac{3}{4}\right)^{4-k},\ \text{per}\ \ k=0,1,2,3,4\quad \text{d.m.th.}$$

$$Z:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 81/256 & 108/256 & 54/256 & 12/256 & 1/256 \end{pmatrix}.$$

Tani, $\beta_1=P\{Z\notin C_1 \mid H_a$ është e saktë$\}=P\{Z\in\{1,2,3,4\}\mid H_a$ është e saktë$\}=\dfrac{108}{256}+\dfrac{54}{256}+\dfrac{12}{256}+\dfrac{1}{256}=\dfrac{175}{256}=0,68.$

Nga ana tjetër

$\beta_2=P\{Z\notin C_2 \mid H_a$ është e saktë$\}=P\{Z\in\{0,1,2,3\}\mid H_a$ është e saktë$\}=\dfrac{81}{256}+\dfrac{108}{256}+\dfrac{54}{256}+\dfrac{12}{256}=\dfrac{255}{256}=0,99.$

Pasi $\beta_1<\beta_2$, përfundojmë se C_1 është domen më i mirë kritik se sa C_2, d.m.th. C_1 është domeni më i fuqishëm kritik. Poashtu, gjasa e gabimit të tipit të dytë është shumë i madh, $\beta_1=0,68$, por ajo mund të zvogëlohet, nëse zmadhohet numri i eksperimenteve të kryer.

- Ekzistojnë metoda për caktimin e domenit më të fuqishëm kritik për testimin e një hipoteze, por këtu nuk do të ndalemi në sqarimin e atyre metodave, para së gjithash për shkak të nevojës prej paranjohurive paraprake teorike.

- Në fund njehsohet vlera z e testit statistikë Z në bazë të ekzemplarit të dhënë dhe kontrollohet ajo a i takon domenit të përcaktuar kritik. Nëse $z\in C$, atëherë zero hipoteza hudhet si e pa saktë, në të kundërtën hipoteza zero nuk hudhet, d.m.th. pranohet si e saktë.

- Prej asaj paraprakisht që u prezentua, mund të jepet ky algoritëm për testimin e hipotezave statistike.

Mbaj mend!

1. Vendoset hipoteza zero H_0 dhe hipoteza alternative H_a.
2. Përcaktohet niveli i lejuar më i madh i gabimit prej tipit të parë α, d.m.th. përcaktohet niveli i rëndësisë së testit.
3. Përcaktohet testi statistikë Z për testin konkret statistik dhe njehsohet vlera e tij z për realizimin konkret të ekzemplarit të rastit.
4. Përcaktohet domeni kritik C, ashtu që $P\{Z \in C \mid H_0$ është e saktë$\} \leq \alpha$.
5. Kontrollohet vlera e njehsuar e z të test statistikës Z a i takon domenit kritik ose jo.
Nëse $z \in C$, atëherë hipoteza zero hudhet si jo e saktë, në të kundërtën, ajo pranohet si e saktë.

Detyra:

1. Brinjët e një tetraedri janë numëruar me numrat 1,2,3,4. Loja qëndron në hudhjen e tetraedrit dhe vërejtja e numrit të faqes me të cilin tetraedri shtrihet në sipërfaqen e rrafshët. Vërehet se faqeja e dhënë me numrin 1 paraqitet në 1/2 prej eksperimenteve të kryera, faqeja 2 në 1/4 prej rasteve, kurse çdonjëra prej faqeve 3 dhe 4 në 1/8 prej rasteve. I parashtrojmë këto hipoteza:

H_0: tetraedri është homogjen, d.m.th. të gjitha faqet kanë gjasë të paraqiten,

H_a: tetraedri nuk është homogjen dhe faqet paraqiten sipas ligjshmërisë paraprake.

Tetraedri hudhet tre herë. Propozohet ky kriterium për testim:

1) nëse tre herë paraqitet numri 1, atëherë hipoteza H_0 hudhet;

2) në të kundërtën, H_0 pranohet.

Të përcaktohet gjasa e gabimit të tipit të parë dhe të dytë dhe fuqia e testit.

3 TË LEXUARIT PREJ TABELAVE PËR SHPËRDARJEN NORMALE, SHPËRDARJA t DHE SHPËRDARJA χ^2

Në testet statistike të cilët më tutje do t'i shqyrtojmë paraqitet nevoja prej leximit të vlerave prej tabelave për shpërdarjen normale, shpërdarja t – dhe shpërdarja χ^2 (hi-katror). Prandaj, në këtë pjesë do të sqarojmë se si lexohet prej atyre tabelave.

A Tabelat për shpërdarjen normale është Tabela 1 e dhënë në fund të librit. Në të, për vlerën e dhënë të $z \in \mathbb{R}$, mund të lexohet vlera $\Phi(z)$, e cila paraqet syprinën e figurës të dhënë në fig. 1. Nëse z=1,35, në shtyllën e parë të Tabelës 1 kërkohet 1,3, kurse në rreshtin e parë kërkohet 0,05. Prerja e rreshtit dhe shtyllës përkatëse e jep vlerën $\Phi(1,35)$. Gjejmë se $\Phi(1,35) = 0,9115$. Përkatësisht, $\Phi(-2,34) = 0,0096$.

1 Caktoji $\Phi(-3,35)$, $\Phi(1,58)$, $\Phi(-1,78)$, $\Phi(2,35)$.

Funksioni i cili e përcakton lakoren e fig. 1, është përkufizuar për gjithë $z \in \mathbb{R}$. Ky funksion e arrinë maksimumin e tij për $z = 0$ dhe është simetrik në lidhje me boshtin y. Syprina e figurës që lakorja e formon me boshtin x është 1.

Prej simetrisë vijon se syprina e pjesës së kësaj figure e cila gjendet majtas prej drejtëzës $x = 0$ është 1/2, dhe përkatësisht pjesa djathtas prej drejtëzës $x = 0$, ka syprinë, gjithashtu, 1/2.

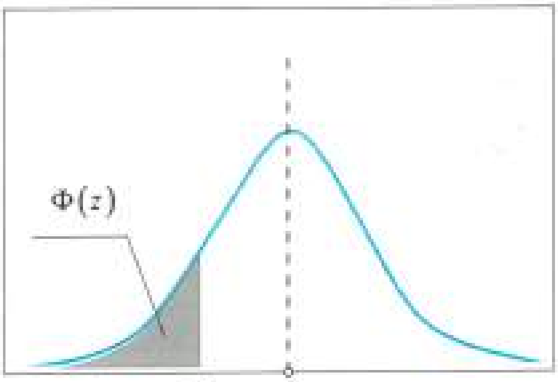


fig. 1

Lakorja e takon boshtin x, në realitet, boshti x është asimptotë e saj. Megjithatë, mund të llogaritet se e tërë syprina e figurës është kufizuar me lakoren dhe boshtin x është koncentruar ndërmjet -3,4 dhe 3,4. Përkatësisht, syprina e pjesës prej figurës e kufizuar me lakoren dhe boshtin x majtas prej drejtëzës $x = -3,4$ dhe pjesa djathtas prej drejtëzës $x = 3,4$, është përafërsisht e barabartë me 0. Prej këtu, kemi $x < -3,4$, atëherë $\Phi(x) = 0$, por nëse $x > 3,4$, atëherë $\Phi(x) = 1$.

Mbaj mend!

1. Për vlerën fikse të z, ashtu që $-3,4 \leq z \leq 3,4$, vlera $\Phi(z)$, lexohet prej tabelës 1 për shpërdarjen normale, dhe ajo vlerë gjendet në prerjen e rreshtit, përkatësisht e gjithë pjesës dhe dhjetores së parë të z dhe shtyllës përkatëse të dhjetores së dytë të z.
2. $\Phi(z) = 0$, për $z < -3.4$.
3. $\Phi(z) = 1$, për $z > 3,4$.

B Në disa raste, është e nevojshme që të kryhet mënyra e anasjelltë. Për vlerën e dhënë të α, prej Tabelës 1, të lexohet vlera u_α, ashtu që $\Phi(u_\alpha) = \alpha$. Atëherë në Tabelën 1, kërkohet vlera α ose vlera që është më afër deri te ajo. Ajo vlerë shtrihet në prerjen e ndonjë rreshti dhe shtylle. Vlerat të cilat gjenden në fillim të rreshtit përkatës dhe shtyllës përkatëse e japin e vlerën e u_α.

2 Të caktohen vlerat e x, ashtu që $\Phi(x) = 0,9564$ dhe $\Phi(x) = 0,8$.

Zgjidhje:

Së pari në Tabelën 1, kërkohet vlera 0,9564. Ajo gjendet në prerjen e rreshtin përkatës të 1,7 dhe shtyllës përkatëse të 0,01. Prej këtu, $x = u_{0,9564} = 1,71$. Në rastin e dytë, në Tabelën 1 kërkohet vlera 0,8. Saktësisht ai numër nuk ekziston në këtë tabelë, prandaj e kërkojmë numrin i cili është më afër deri te 0,8. Ai është numri 0,7995 dhe është në prerjen e rreshtit 0,8 dhe shtyllës 0,04. Domethënë, $x = 0,84$.

C

Në Tabelën 1 e dhënë në fund të librit, është e tabeluar, në realitet, shpërdarja e një ndryshore rasti e cila gjen zbatim të madh në përshkrimin e një numri të madh të dukurive në natyrë. Ajo, në realitet, ndryshorja e rastit me shpërdarje normale.

- Në rastin e përgjithshëm, shpërdarja normale varet prej dy parametrave a dhe σ^2. Shkruhet $X \sim N\left(a,\sigma^2\right)$, ku $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.
- Në Tabelën 1 janë tabeluar vlerat për ndryshoren e rastit $X \sim N(0,1)$, për të cilën themi se ka shpërdarje normale të normiruar.

Mbaj mend!

Ndryshorja e rastit X e cila ka shpërdarje normale të normiruar, është përcaktuar në këtë mënyrë:

$$P\{X < z\} = \Phi(z), \quad \text{për çdo } z \in \mathbb{R},$$

ku për numrin e dhënë z, vlera $\Phi(z)$ lexohet prej Tabelës 1 për shpërdarjen normale.

Është e qartë se ndryshorja e rastit X e përkufizuar në këtë mënyrë është ndryshore diskrete e rastit, pasi i pranon të gjitha vlerat prej $\mathbb{R}$. Por, këtu nuk do të futemi më thellë në vetitë e ndryshores së rastit. Është e rëndësishme të theksohet se shumë ndryshore të rastit të cilat paraqiten në jetën reale, si për shembull, lartësia, pesha etj. kanë pikërisht shpërdarje normale. Gabimet që paraqiten gjatë matjeve të ndonjë madhësie kanë, gjithashtu, shpërdarja normale.

Ç

Tabela për shpërdarjen t është Tabela 2 e dhënë në fund të librit. Prej kësaj tabele, për n dhe α të dhënë, mund të lexohet vlera $t_{n,\alpha}$, ku n është numër natyror, kurse α është numër ndërmjet 0 dhe 1, d.m.th. $0 < \alpha < 1$.

- Vlera $t_{n,\alpha}$ lexohet prej prerjes të rreshtit në të cilën gjenden vlera përkatëse e n dhe shtylla përkatëse e numrit α. Vlera $t_{n,\alpha}$ është përcaktuar ashtu që syprina e figurës të dhënë në fig. 2, është e barabartë me α.

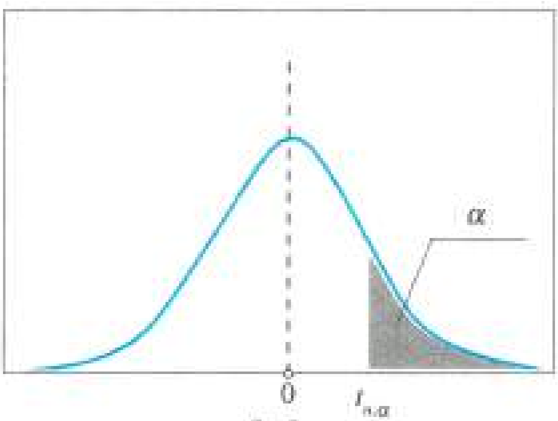


fig. 2

- Ngjashëm sikurse te shpërdarja normale, syprina e figurës të kufizuar me lakoren dhe boshtin x është 1.
- Për shembull, $t_{15;0,01} = 2,602$ është numër i cili gjendet në rreshtin përkatës të $n = 15$ dhe shtyllën përkatëse të $\alpha = 0,01$.
- Lakorja në fig. 2, varet prej n, d.m.th. është e ndryshueshme për vlera të ndryshme të n.

3 Cakto $t_{9;0,05}$, $t_{5;0,02}$.

𝒯

Tabela për shpërdarjen χ^2 − është Tabela 3 e dhënë në fund të librit. Prej kësaj tabele, për n dhe α, të dhënë mund të lexohen vlerat $\chi^2_{n,\alpha}$. Poashtu, n është numër natyror, kurse α është numër ndërmjet 0 dhe 1, t.e. $0 < \alpha < 1$.

Ngjashëm sikurse te shpërdarja $t-$ vlera lexohet në rreshtin në të cilin gjendet vlera e n dhe shtylla përkatëse e numrit α.

Vlera e përcaktuar ashtu që syprina e figurës të dhënë në fig. 3, është e barabartë me α.

Edhe në këtë rast, sikurse në dy rastet paraprak, syprina e figurës e kufizuar me lakoren dhe boshtin x është 1.

Të përmendim se ngjashëm sikurse te shpërdarja t, lakorja në fig. 3 varet prej n, d.m.th. për vlerë të ndryshme të n fitohet lakore e ndryshme. Numri n quhet *shkalla e lirisë* te shpërdarja χ^2-.

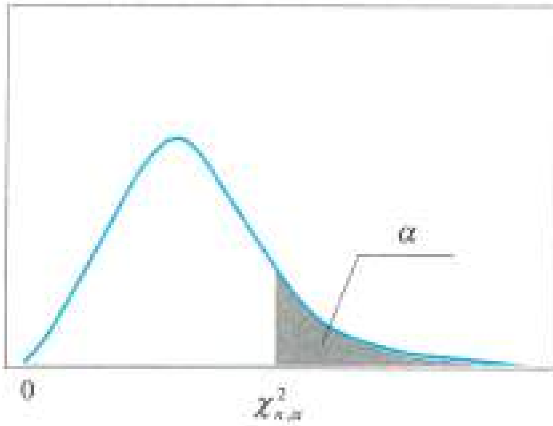


fig. 3

Kështu, për $n = 15$ dhe $\alpha = 0,05$, vlera $\chi^2_{15;0,05} = 32,80$.

4 Cakto $\chi^2_{12;0,01}$, $\chi^2_{2;0,025}$.

Detyra

1. Me zbatimin e Tabelës 1 për shpërdarjen normale, cakto $\Phi(2,45)$, $\Phi(-2,95)$ dhe $\Phi(4,45)$.

2. Prej Tabelës për shpërdarjen normale, cakto x ashtu që $\Phi(x) = 0,075$ dhe $\Phi(x) = 0,776$.

3. Prej Tabelës 1 për shpërdarjen $t-$, cakto $t_{12;0,02}$, $t_{20;0,05}$.

4. Prej Tabelës 3 për shpërdarjen χ^2-, cakto $\chi^2_{15;0,05}$ dhe $\chi^2_{30;0,1}$.

4 TESTE PËR VLERË TË PRITJES MATEMATIKE GJATË DISPERZIONIT TË NJOHUR

Kujtohu!

Vargu i ndryshoreve të rastit të pavarura dhe shpërdarje të barabartë $X_1, X_2, \ldots, X_n$ quhet ekzemplar rasti për shënimin X. Kur ndryshoret e rastit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ do të fitojnë vlera konkrete prej popullacionit, atëherë fitohet një realizim i ekzemplarit të rastit.

Statistika është funksion prej ekzemplarit të rastit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ për shënimin X. Gjatë realizmit konkret $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i ekzemplarit, statistika do të fiton një vlerë konkrete do ta quajmë realizimi i statistikës.

Për çfarëdo ndryshore rasti X dhe për çfarëdo konstante c, vlen $D(cX) = c^2 DX$.

Mesi aritmetik $\overline{x_n}$, përkatësisht disperzioni s_n^2 i një ekzemplari të realizuar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ njehsohet sipas formulës

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \text{ përkatësisht } s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}_n^2;$$

devijimi standard është rrënja katrore prej disperzionit: $s_n = \sqrt{s_n^2}$.

A Të supozojmë se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ është ekzemplar rasti me madhësi n për shënimin X i cili ka shpërdarje normale, dhe disperzioni i X le të jetë i njohur, d.m.th. $DX = \sigma_0^2$, ku $\sigma_0 > 0$ është numër i dhënë.

1 Të supozojmë së pari në shembullin me fabrikën për çokollata nga mësimi 2. Përkatësisht, fabrika blen grumbullon qumështin prej prodhuesëve privat. Të punësuarit në fabrikë dyshojnë se prodhuesët fusin ujë në qumësht me qëllim që ta zmadhojnë profitin e tyre. Teprica e ujit në qumësht mund të të zbulohet me përcaktimin e temperaturës së ngrirjes së qumështit. Pika e ngrirjes së qumështit natyror (pa shtuar ujë) është përafërsisht $-0,5°C$, por nëse i futet ujë, qumështi ngrin në temperaturë më të lartë prej $-0,5°C$. Të kontrollohet se në qumështin e prodhuesit të zgjedhur rastësisht a ka futur ujë.

Në rastin konkret, shqyrtohet shënimi X–pika e ngrirjes së qumështit dhe sipas standardeve vlera e pritur e X, d.m.th. pritja e saj matematike $EX = -0,5$. Prandaj, është e nevojshme të testohet hipoteza H_0: $EX = -0,5$, përkundër hipotezës alternative H_a: $EX > -0,5$. Domethënë, duhet të bëhet test për vlerën e pritjes matematike .

Varësisht prej hipotezës alternative, ekzistojnë 3 lloje të testeve për vlerën e pritjes matematike: dy të njëanshëm dhe një të dyanshëm. Ato janë këto:

Testi I	Testi II	Testi III
$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX > a_0$	$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX < a_0$	$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX \neq a_0$

Gjatë disperzionit të njohur të shënimit, për testimin e të tre llojeve të hipotezave, të përmendura më lartë shfrytëzohet ky test statistik:

$$U = \frac{\overline{X}_n - a_0}{\sigma_0}\sqrt{n},$$

ku $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ është mesi aritmetik i ekzemplarit të rastit $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Të vërejmë se $\overline{X}_n$ është funskion prej ekzemplarit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, pra $\overline{X}_n$ është një statistikë.

Për realizimin konkret $x_1, x_2, \ldots, x_n$ të ekzemplarit të rastit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, fitohet realizimi i statistikës U:

$$u = \frac{\bar{x}_n - a_0}{\sigma_0}\sqrt{n},$$

ku $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ është mesi aritmetik i ekzemplarit të realizuar $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ta vërejmë ndryshimin ndërmjet $\bar{X}_n$ dhe $\bar{x}_n$. Përkatësisht, $\bar{X}_n$ është statistikë, domethënë është një ndryshore e rastit, kurse $\bar{x}_n$ është numër, i cili paraqet një vlerë të ndryshores së rastit $\bar{X}_n$.

Arsyeshmëria e shfrytëzimit të këtij testi qëndron në këtë. Së pari do të përcaktojmë pritjen matematike dhe disperzionin e mesit aritmetik $\bar{X}_n$ të ekzemplarit. Për pritjen matematike kemi:

$$E\bar{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = EX,$$

pasi të gjithë ndryshoret e rastit prej ekzemplarit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ janë shpërdar barabar sikurse edhe shënimi X, pra $EX_i = EX$, për çdo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Gjithashtu, $DX_i = DX = \sigma_0^2$, për çdo $i = 1, 2, \ldots, n$, kurse $X_1, X_2, \ldots, X_n$ janë ndryshore rasti të pavarur. Nëse shfrytëzohet e gjithë ajo, për disperzionin e $\bar{X}_n$ fitohet:

$$D\bar{X}_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{nDX}{n^2} = \frac{\sigma_0^2}{n}.$$

Tani, nëse është e saktë hipoteza zero, d.m.th. nëse $EX = a_0$, ndryshimi $\bar{X}_n - a_0 = \bar{X}_n - EX$ është, në realitet, shmangëja e fituar e mesit aritmetik e ekzemplarit të rastit prej pritjes matematike të saj. Nga ana tjetër, pritja e shmangëjes së mesit aritmetik prej pritjes matematike të tij është $\sqrt{D\bar{X}_n} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$. Statistika U është fituar si herës i këtyre dy shmangëjeve dhe në ndonjë mënyrë i krahason këto dy shmangëje ndërmjet veti.

Domeni kritik për testim të tre hipotezave të lartpërmendura varet prej hipotezës alternative. Format e domenëve më të fuqishme kritike për nivelin e dhënë të rëndësisë së testit α janë dhënë në tabelë.

Hipoteza alternative	Domeni kritik
$H_a : EX > a_0$	$C = (u_{1-\alpha}, \infty)$
$H_a : EX < a_0$	$C = (-\infty, u_{\alpha})$
$H_a : EX \neq a_0$	$C = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty)$

Vlerat $u_{\alpha}, u_{1-\alpha}, u_{1-\alpha/2}$ lexohen prej Tabelës 1 për shpërdarjen normale, ashtu që

$\Phi(u_{\alpha}) = \alpha, \Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ dhe $\Phi(u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. Të gjithë domenët kritik janë përcaktuar ashtu që

$$P\{U \in C | H_0 \text{ është e saktë}\} = \alpha,$$

kurse poashtu gjasa e gabimit të tipit të dytë është minimale.

Gjatë testimit të hipotezave statistike, më së shpeshti zgjedhet $\alpha = 0{,}05$ ose $\alpha = 0{,}01$. Për këto vlera të nivelit të rëndësisë së testit, prej Tabelës 1, fitohen këto domene kritike:

Hipoteza alternative	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$
$H_a : EX > a_0$	$C = (1{,}65;\infty)$	$C = (2{,}33;\infty)$
$H_a : EX < a_0$	$C = (-\infty;-1{,}65)$	$C = (-\infty;-2{,}33)$
$H_a : EX \neq a_0$	$C = (-\infty;-1{,}96)\cup(1{,}96;\infty)$	$C = (-\infty;-2{,}58)\cup(2{,}58;\infty)$

2 Një stacion grumbullues matën yndyrën e qumështit, ku supozohet se yndyra ka shpërdarje normale me shmangëje standarde $s_0 = 1$. Në një ditë është grumbulluar qumësht prej 25 prodhuesëve. Janë fituar këto rezulltate:

Yndyra në %	Prej 1,5 deri 2,5	Prej 2,5 deri 3,5	Prej 3,5 deri 4,5
Numri i prodhuesëve	5	16	4

Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0{,}05$, të testohet hipoteza se vlera mesatare e yndyrës është 3%.

Zgjidhje:

E shqyrtojmë shënimin X – yndyrën e qumështit, do ta testojmë hipotezën zero:

$$H_0 : EX = 3, \text{ përkundër hipotezës alternative } H_a : EX \neq 3.$$

Të dhënat janë grupuar në intervale, që ta caktojmë mesin aritmetik të ekzemplarit, për përfaqësues të çdo intervali do ta marrim mesin e tij. Kështu, 2 është përfaqësues i intevalit (1,5; 2,5] dhe të 2 i përshkruhet frekuenca 5, pastaj 3 është përfaqësues i intervalit (2,5; 3,5] dhe i përshkruhet frekuenca 16, kurse 4 është përfaqësues i (3,5; 4,5] dhe e ka frekuencën 4. Kjo është mënyrë e zakonshme gjatë njehsimit të karakteristikave numerike të të dhënave të cilët janë të grupuara në intervale.

Tani, mesi aritmetik i ekzemplarit do të jetë $\overline{x}_{25} = \frac{1}{25}(2\cdot 5 + 3\cdot 16 + 4\cdot 4) = 2{,}96$, kurse vlera e test statistikës U do të jetë:

$$u = \frac{\overline{x}_{25} - a_0}{\sigma_0}\sqrt{25} = \frac{2{,}96-3}{1} = -0{,}2.$$

Kemi test dyanshëm, pra për $\alpha = 0{,}05$, domeni kritik është

$$C = (-\infty;-1{,}96)\cup(1{,}96;\infty).$$

Vlera e test statistikës $u = -0{,}2 \notin C$, që do të thotë se hipoteza zero pranohet. Mund të llogarisim se yndyra e qumështit është 3%.

Të theksojmë se madhësia n e ekzemplarit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ është më i madh se 30, atëherë testet paraprake të përmendura mund të krahasohen jo vetëm për shënimin X, i cili ka shpërdarje normale, por edhe për çdo shpërdarje tjetër.

3 Të testohet hipoteza prej detyrës 1, gjatë nivelit të rëndësisë $\alpha = 0{,}05$, nëse prej një rasti rastësisht zgjedhet prodhues dhe janë zgjedhur 40 enë me qumësht, për ato është matur pika e ngrirjes dhe janë fituar këto rtezulltate:

−0,5	−0,4	−0,3	−0,2	−0,6	−0,7	−0,5	−0,4	−0,3	−0,1
−0,3	−0,8	−0,6	−0,5	−0,3	−0,4	−0,5	−0,4	−0,3	−0,5
−0,1	−0,3	−0,4	−0,5	−0,6	−0,8	−0,2	−0,2	−0,3	−0,5
−0,1	−0,4	−0,5	−0,6	−0,6	−0,7	−0,4	−0,3	−0,7	−0,5

Poashtu, dihet se devijimin standard i shënimit është $s_0 = 0{,}2$.

Zgjidhje:

Të vërejmë edhe një herë se testohet hipoteza zero: H_0: $EX = -0{,}5$; H_a: $EX > -0{,}5$. Në bazë të të dhënave të dhëna, mund të njehsohet mesi aritmetik i ekzemplarit të realizuar. Fitohet $\overline{x}_{40} = -0{,}4325$. Tani, realizimi i testit statistikë do të jetë

$$u = \frac{\overline{x}_{40} - a_0}{\sigma_0}\sqrt{40} = \frac{-0{,}4325 + 0{,}5}{0{,}2}\sqrt{40} = 2{,}13.$$

Niveli i rëndësisë së testit është $\alpha = 0{,}05$, pra prej tabelës paraprake, gjejmë se domeni kritik, gjatë hipotezës alternative të dhënë, është $C = (1{,}65; \infty)$. Vlera e testit statistik $u = 2{,}13 \in C$, pra mund të përfundojmë se hipoteza zero hudhet, d.m.th. në qumësht prej prodhuesit të zgjedhur ka futur ujë.

B **4** Në bazë të rezulltateve paraprake dihet se gjasa e një shenjtari ta qëllon shënjeshtrën është 0,9. Pas përgatitjeve për garë, është bërë gjuajtje provuese, ku shenjtari e ka qëlluar shënjestrën 92 herë prej 100 përpjekjeve. Me nivelin e rëndësisët $\alpha = 0{,}01$, të testohet hipoteza se gjasa për arritjen e qëllimit është zmadhuar, përkundër hipotezës alternative se nuk është zmadhuar.

Shihe zgjidhjen:

Ta shënojmë me A: shenjtarin i cili e ka qëlluar shënjestrën. Prej kushteve të detyrës dihet se $P(A) = 0{,}9$. do ta testojmë hipotezën zero H_0: $P(A) = 0{,}9$ përkundër hipotezës alternative H_a: $P(A) > 0{,}9$.

Ky test sillet përsëri në test për vlerë të pritjes matematike. Përkatësisht, shënimin të cilin e shqyrtojmë është indikator i ngjarjes A. Domethënë,

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-P(A) & P(A) \end{pmatrix}$$

Të përkujtohemi se $EI_A = P(A)$, kurse $DI_A = P(A)(1 - P(A))$. Domethënë, në rastin konkret, testohen hipotezat:

$$H_0: EI_A = 0{,}9$$
$$H_a: EI_A > 0{,}9,$$

pra duhet të bëhet test për vlerën e pritjes matematike. Nëse H_0 është e saktë, atëherë $P(A) = 0{,}9$, prej ku vijon se $EI_A = 0{,}9$, kurse $DI_A = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$, që do të thotë se disperzioni është i njohur.

Pastaj, në gjuajtjen provuese janë arritur 92 të qëlluara. Domethënë, për shënimin I_A është fituar ekzemplari x_1, $x_2, \ldots, x_{100}$, dhe poashtu 92 elemente prej ekzemplarit të realizuar 1, kurse tetë prej tyre janë 0 (1 paraqet se do të paraqitet A, d.m.th. 1 paraqet të qëlluar, kurse 0 paraqet dështim). Tani, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 92$, kurse mesi aritmetik i realizimit të ekzemplarit është $\bar{x}_{100} = \frac{92}{100} = 0,92$ dhe ajo paraqet, në realitet, frekuencë relative të ngjarjes A në ekzemplarin e dhënë.

Për vlerën e U statistika për realizimin konkret të ekzemplarit fitohet:

$$u = \frac{\bar{x}_{100} - P(A)}{\sqrt{P(A)(1-P(A))}}\sqrt{100} = \frac{0,92-0,9}{\sqrt{0,09}} \cdot 10 = 0,67.$$

Për nivelin e rëndësisë $\alpha = 0,01$, gjatë hipotezës alternative të formës H_a: $EI_A > 0,9$, prej tabelës së fundit gjejmë se domeni kritik është $C = (2,33;\infty)$. Pasi vlera e njehsuar $u = 0,67 \notin C$, përfundojmë se hipoteza zero nuk hudhet. Domethënë, gjasa për arritjen e të qëlluarve nuk është zmadhuar.

Mbaj mend!

Gjatë testimit të hipotezës zero H_0: $P(A) = p_0$, përkundër prej hipotezës alternative:

i) H_a: $P(A) > p_0$ *ii)* H_a: $P(A) < p_0$ *iii)* H_a: $P(A) \neq p_0$

shfrytëzohet test statistika $U = \frac{\bar{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$, ku $\bar{P}$ është frekuenca relative e ngjarjes A në ekzemplarin e rastit.

Domenet më të fuqishme kritike janë përcaktuar në të njëjtën mënyrë sikurse në rastin paraprak, d.m.th. ato janë identike me ato të dhëna në dy tabelat për çdo hipotezë përkatëse.

5 Gjatë 100 hudhje të monedhës, 60 herë është paraqitur koka. Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0,05$, të testohet hipoteza se monedha është në rregull.

Shihe zgjidhjen:

Le të jetë A ngjarje: është paraqitur koka. Nëse monedha është në rregull, gjasa që të paraqitet kjo ngjarje është 0,5. Prandaj testohet hipoteza zero: H_0: $P(A) = 0,5$ përkundër hipotezës zero H_a: $P(A) \neq 0,5$.

Prej 100 hudhjeve të monedhës, 60 herë është paraqitur koka, që do të thotë se frekuenca relative e ngjarjes A është $\bar{p} = \frac{60}{100} = 0,6$. Vlera e test statistikës U, në rastin konkret, do të jetë

$u = \frac{0,6-0,5}{\sqrt{0,5 \cdot 0,5}}\sqrt{100} = 2$. Testi ëshë i dyanshëm, pra për $\alpha = 0,05$, domeni kritik është $C = (-\infty;-1,96) \cup (1,96;\infty)$.

Vlera e fituar $u = 2 \in C$, prej ku vijon se hipoteza zero hudhet. Domethënë, monedha nuk është në rregull.

Detyra:

1. Dihet se kabllot që prodhohen në një fabrikë kanë intenzitet mesatar prej 1800 njësi dhe shmangëja standarde prej 100 njësi. Me procesin e ri teknologjik janë fituar kabllo për të cilët konstatohet se janë më të fortë. Ky gjykim a është i saktë, nëse intenziteti mesatar të 50 kabllove të ri të prodhuar rastësisht është e barabartë me 1850 njësi me rizik të lejuar prej 1%?

2. Në bazë të regjistrimit të banorëve për numrin e banorëve janë fituar këto të dhëna për numrin e banorëve në 50 fshatra në një zonë:

Numri i banorëve	500 - 1000	1000 - 1500	1500 - 2000	2000 - 2500	2500 - 3000
Numri i fshatrave	1	4	32	10	3

Gjatë nivelit të rëndësisë $\alpha = 0{,}05$, të testohet hipoteza se numri mesatar i banorëve në të gjitha fshatrat prej asaj zone është 2000, nëse dihet se numri i banorëve ka shpërdarje normale me shmangëje standarde 350.

3. Gjasa për mos suksesin e vaksinës është $p = 0{,}09$. Me vaksinën e re pritet se gjasa do të zvogëlohet. Ndërmjet 100 pacientëve të zgjedhur rastësisht, janë vaksinuar me vaksinën e re është konstatuar se te 5 pacientë vaksinimi është i pasuksesshëm. Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0{,}05$, a mund të llogaritet se vaksina e re është më e mirë?

4. Gjatë 180 hudhjes së zarit, 35 herë është paraqitur pesëshi. Të testohet hipoteza se gjasa të paraqitet pesëshi është 1/6, përkundër hipotezës alternative se nuk është 1/6. Niveli i rëndësisë i testit është 0,05.

5 TESTE PËR VLERËN E PRITJES MATEMATIKE GJATË DISPERZIONIT TË PANJOHUR

Kujtohu!

- Gjatë kontrollimit të hipotezës për vlerën e pritjes matematike kur disperzioni σ_0^2 i shënimit është i njohur shfrytëzohet test statistika $U = \frac{\overline{X}_n - a_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$, ku n është madhësia e ekzemplarit, kurse a_0 është vlera e pritjes matematike, nëse hipoteza zero është e saktë.

A Shpeshherë në situatat reale, disperzioni i shënimit X nuk është i njohur.

- Le të jetë $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ekzemplar rasti për shënimin X i cili ka shpërdarje normale dhe madhësia e ekzemplarit le të jetë më e vogël se 30, d.m.th. $n < 30$.
- Varësisht prej hipotezës alternative, përsëri mund të shqyrtohen tre lloje të testeve:

Testi I	Testi II	Testi III
$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX > a_0$	$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX < a_0$	$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX \neq a_0$

Ndryshimi prej rastit paraprak është vetëm në atë që disperzioni i shënimit nuk është i njohur.

- Për vlerësimin e disperzionit të panjohur do ta shfrytëzojmë disperzionin e korigjuar $\overline{S}_n^2$ të ekzemplarit X_1, $X_2, \ldots, X_n$, i cili njehsohet sipas kësaj formule:

$$\overline{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Nëse disperzioni i ekzemplarit është S_n^2, atëherë ai njehsohet sipas formulës

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Tani, lidhja ndërmjet disperzionit të zakonshëm dhe disperzionit të korigjuar të një ekzemplari të rastit është ky:

$$\overline{S}_n^2 = \frac{n}{n-1}S_n^2.$$

- Testi i statistikës i cili shfrytëzohet për testimin e hipotezës zero të këtillë është kjo:

$$T = \frac{\overline{X}_n - a_0}{\overline{S}_n}\sqrt{n} \quad \text{ose} \quad T = \frac{\overline{X}_n - a_0}{S_n}\sqrt{n-1}.$$

- Domeni kritik për testimin e të tre hipotezave të lart përmendura, një lloj sikurse në rastin paraprak, varet prej hipotezës alternative. Format e domeneve më kritike për nivelin e dhënë të rëndësisë së testit α janë dhënë në këtë tabelë.

Hipoteza alternative	Domeni kritik
$H_a: EX > a_0$	$C = (t_{n-1,\alpha}, \infty)$
$H_a: EX < a_0$	$C = (-\infty, -t_{n-1,\alpha})$
$H_a: EX \neq a_0$	$C = (-\infty, -t_{n-1,\alpha/2}) \cup (t_{n-1,\alpha/2}, \infty)$

- Në këtë rast, gjasat $t_{n-1;\alpha}$ dhe $t_{n-1;\alpha/2}$ lexohen prej Tabelës 2 për shpërdarjen t.

1 Për shqyrtimin e rasteve kohore në Ohër, janë zgjedhur rastësisht 15 vjet dhe në bazë të raporteve meteorologjike, është fituar numri i ditëve me diell gjatë viteve të zgjedhura:

190	169	195	195	198	180	179	169
192	194	199	200	180	174	185	

Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0{,}025$, të testohet hipoteza se numri i pritur i ditëve me diell gjatë një viti në Ohër është 180, përkundër hipotezës alternative se është më e madhe se 180.

Shihe zgjidhjen:

- Testohet hipoteza zero H_0: $EX = 180$, përkundër alternativës H_a: $EX > 180$. Prej ekzemplarit të dhënë gjejmë se $\overline{x}_{15} = 186{,}6$, $\overline{s}_{15} = 10{,}7756$. Vlera e t statistikës do të jetë:

$$t = \frac{186{,}6 - 180}{10{,}7756}\sqrt{15} = 2{,}37.$$

Niveli i rëndësisë së testit është $\alpha = 0{,}025$, kurse domeni kritik gjatë hipotezës së dhënë do të jetë $C = (t_{n-1;\alpha}, \infty)$, ku $n = 15$. Prej Tabelës 2 për shpërdarjen t gjejmë $t_{14;0,025} = 2{,}145$. Domethënë, domeni kritik është $C = (2{,}145, \infty)$. Vlera e statistikës t është $t = 2{,}37 \in C$, pra hipoteza zero hudhet, por pranohet hipoteza alternative. Në bazë të ekzemplarit të dhënë, mund të përfundohet se numri i ditëve me diell në Ohër është më i madh se 180.

B Nëse $n \geq 30$, atëherë gjatë testimit të hipotezave paraprakisht të përmendura shfrytëzohet e njëjta statistikë sikurse më parë. Në këtë rast, test statistika shënohet me U dhe domeni kritik fitohet duke lexuar prej Tabelës 1 për shpërdarjen normale, një lloj sikurse edhe në rastin kur kishim teste për pritjen matematike me disperzionin e njohur.

Përkatësisht, në këtë rast, shfrytëzohet test statistika

$$U = \frac{\overline{X}_n - a_0}{\overline{S}_n}\sqrt{n}.$$

Forma e domenti kritik në varshmëri prej hipotezës alternative është dhënë në këtë tabelë, ku vlerat $u_\alpha, u_{1-\alpha} u_{1-\alpha/2}$ lexohen përsëri prej Tabelës 1 për shpërdarjen normale, ashtu që

$\Phi(u_\alpha) = \alpha,\ \Phi(u_{1-\alpha}) = 1-\alpha,\ \Phi(u_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2.$

Hipoteza alternative	Domeni kritik
$H_a: EX > a_0$	$C = (u_{1-\alpha}, \infty)$
$H_a: EX < a_0$	$C = (-\infty, u_\alpha)$
$H_a: EX \neq a_0$	$C = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty)$

Të përmendim se për $n \geq 30$, ky test mund të realizohet edhe pse shënimi nuk ka shpërdarje normale, d.m.th. testi vlen për çfarëdo shpërdarje tjetër të shënimit.

2 Në një sipërmarrje, shpërdarja e rrogave për muajin janar ka qenë kështu (e shprehur në mijë denarë):

Rroga	7 deri 8	8 deri 9	9 deri10	10 deri 11	11 deri 12	12 deri 13
Numri i të punësuarve	1	5	9	18	12	5

Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0{,}02$, të testohet hipoteza se vlera mesatare e rrogës në këtë sipërmarrje është 10(000) denarë.

Zgjidhje:

Në këtë rast, testohet hipoteza zero H_0: $EX = 10$ përkundër hipotezës alternative H_a: $EX \neq 10$.
Poashtu, kemi test për vlerën e pritjes matematike gjatë disperzionit të panjohur. Do ta shfrytëzojmë U– statistikën pasi kemi ekzemplar me madhësi $n = 50 > 30$. Të përmendim se të tre zerot (000) të cilat paraqesin mijëshe denarë, nuk do t'i shkruajmë, pasi nuk do të ndikon në vlerën e fundit të U statistikës (Provoje!).

Nëse për përfaqësues të çdo intervali meret mesi i tij, atëherë për mesin aritmetik të ekzemplarit fitohet:

$\overline{x}_{50} = \frac{1}{50}(7{,}5\cdot 1 + 8{,}5\cdot 5 + 9{,}5\cdot 9 + 10{,}5\cdot 18 + 11{,}5\cdot 12 + 12{,}5\cdot 5) = 10{,}5,$ kurse disperzioni i tij është:

$$s_{50}^2 = \frac{1}{50}(7{,}5^2\cdot 1 + 8{,}5^2\cdot 5 + 9{,}5^2\cdot 9 + 10{,}5^2\cdot 18 + 11{,}5^2\cdot 12 + 12{,}5^2\cdot 5) - 10{,}5^2 = 1{,}4.$$

Disperzioni i korigjuar i ekzemplarit do të jetë $\overline{s}_{50}^2 = \frac{50}{49} s_{50}^2 = 1,43,$ pra për vlerën e test statistikës

U do të fitohet $u = \frac{10,5-10}{\sqrt{1,43}} \sqrt{50} = 2,96.$

Testi është i dyanshëm, pra domeni kritik do të jetë i formës

$$C = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty), \text{ ku } \alpha = 0,02. \text{ Domethënë, } C = (-\infty, -u_{0,99}) \cup (u_{0,99}, \infty).$$

Prej Tabelës 1 për shpërdarjen normale, gjejmë se $u_{0,99} = 2,33$, pra domeni kritik do të jetë $C = (-\infty, -2,33) \cup (2,33, \infty)$. Vlera e fituar $u = 2,96 \in C$, pra mund të përfundohet se hipoteza zero hudhet. Domethënë, në sipërmarrjen e dhënë, rroga mesatare nuk është 10(000) denarë.

Detyra:

1. Që të vlerësohet fitmi i një grunaje në hektar në regjionin e pellagonisë, janë zgjedhur 18 parcela dhe janë fituar këto të dhëna:

53	54	60	65	55	63	59	58	62
61	60	58	57	62	58	60	60	62

Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0,01$, të testohet hipoteza zero se fitimi mesatar është 60 njësi matëse për hektar, përkundër hipotezës alternative se është më e vogël se 60.

2. Në bazë të ekzemplarit me madhësi $n = 50$, është fituar se koha mesatare e punës së një tipi transistor është $\overline{x}_{50} = 1950$ orë me shmangëje standarde $\overline{s}_{50} = 200$ orë. Me 5% niveli i rëndësisë, të testohet hipoteza zero se koha e pritje së punës së transistorit është 2000 orë, përkundër hipotezës alternative se është:

a) më e madhe se 2000 orë;

b) më e vogël se 2000 orë;

c) e ndryshueshme prej 2000 orë.

3. Shënimi X paraqet numrin e bisedave telefonike nëpërmjet një centrali për një orë. Që të caktohet numri i pritur i bisedave gjatë një dite orë, rastësisht janë zgjedhur 25 orë gjatë një jave dhe numrat e bisedave të kryera gjatë atyre 25 orëve janë këto:

24	35	29	28	29	16	31	26	23	33
25	19	32	23	16	17	26	23	27	27
24	22	23	13	30					

Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0,02$, të testohet hipoteza se numri mesatar i bisedave të kryera nëpërmjet centralit gjatë një dite orë është 25.

4. Për krahasimin e dy metodave për matjen e nishestes te patatja, janë marrë 16 patate dhe janë prerë përgjysmë. Çdonjëra prej gjysmave me njërën prej metodave. Janë fituar këto ndryshime:

2	0	0	1	2	2	3	-3
1	2	3	0	-1	1	-2	1

Të testohet hipoteza se ndryshimet ndërmjet metodave nuk janë të rëndësishme. Testimi të bëhet për 5% dhe 1% niveli i rëndësisë.

6 TESTI PËR VLERËN E DISPERZIONIT

E dijmë se disperzioni është masë për shpërdarjen e të dhënave prej pritjes matematike. Ai e përcakton saktësinë e matjes, shmangëjen etj. Për shembull, aparati i cili në aeroplan e mat lartësinë, procesin e matjes që bëhen gabime, shmangëje. Është e nevojshme që ato shmangëje të jenë në ndonjë kufi të lejuar, pasi çdo shmangëje e madhe prej të lejuarës mund të jetë katastrofike. Ekzistojnë edhe një numër i madh i shembujve të këtillë që na imponojnë nevojën të përkufizohen teste për vlerën e disperzionit (shmangëjen).

Le të jetë $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ekzemplar rasti për shënimin X i cili ka shpërdarje normale. Testohet hipoteza zero: $H_0: DX = \sigma_0^2$, përkundër $H_a: DX > \sigma_0^2$, me nivelin e rëndësisë α.

Për testimin e kësaj hipoteze shfrytëzohet statistika χ^2

$$\chi^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma_0^2},$$

ku $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$ është disperzioni i ekzemplarit të dhënë.

Domeni kritik gjatë testimit të kësaj hipoteze është $C = (\chi^2_{n-1;\alpha}, \infty)$, ku $\chi^2_{n-1;\alpha}$ lexohet prej Tabelës 3 për shpërdarjen χ^2.

1 Në bazë të vështrimeve meteorologjike është përfunduar se lartësia (në centimetra) në shtresën e fundrinës vjetore të ujit ka shpërdarjen normale. Në mënyrë të rastësishme janë zgjedhur 10 vjet dhe në ato vite është matur lartësia e shtresës së fundrinës vjetore të ujit në Shkup, ku janë fituar këto të dhëna:

37 59 36 55 39 65 53 41 54 50

Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0,1$ të testohet hipoteza se disperzioni i lartësisë i shtresës së fundrinës së ujit është 20 cm, përkundër hipotezës alternative se është më e madhe se 20.

Testohet hipoteza $H_0: DX = 20$ përkundër $H_a: DX > 20$. Në bazë të ekzemplarit është fituar se mesi aritmetik i ekzemplarit është $\overline{x}_{10} = 48,9$, kurse disperzioni i tij është $s_{10}^2 = 91,09$. Për vlerën e statistikës χ^2 fitohet:

$$\chi^2 = \frac{10 \cdot 91,09}{20} = 45,545.$$

Domeni kritik do të jetë $C = \left(\chi^2_{n-1;\alpha}, \infty\right)$ ku $n = 10$, kurse $\alpha = 0,1$. Prej Tabelës 3 për shpërdarjen χ^2, caktohet se $\chi^2_{9;0,1} = 14,6837$. Domethënë, $C = (14,6837, \infty)$ dhe poashtu, $\chi^2 = 45,545 \in C$. Domethënë, hipoteza zero hudhet, kurse pranohet hipoteza alternative. Kjo do të thotë se disperzioni i lartësisë së shtresës së fundrinës së ujit në Shkup është më e madhe se 20 cm.

Detyra:

(1) Me matjen e masës së nxënësve në një grup janë fituar këto të dhëna:

Masa në kg	40 deri 50	50 deri 60	60 deri 70	70 deri 80	80 deri 90
Numri i nxënësve	7	16	20	6	1

Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0,025$ të testohet hipoteza se devijimi standard i masës së nxënësve është 8 kilogramë.

(2) Dihet se devijimi standard i masës të pakove prej 40 gramë është 0,25 gramë. Në bazë të ekzemplarit prej 20 pakove, është fituar se devijimi standard i realizmit të ekzemplarit është 0,32 gramë. Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0,05$ dhe $\alpha = 0,01$, a mund të konstatohet se nuk ka ardhur deri në zmadhimin e devijimit standard?

7 TABELAT E KONTINGJENCIONIT

Kujtohu!

Ndryshoret e rastit X dhe Y janë të pavarura, nëse për çfarëdo vlere x_i që i takon vlerave të bashkësisë së X dhe çfarëdo vlerë të y_j që i takon bashkësisë së vlerave të Y, ngjarjet e rastit $\{X = x_i\}$ dhe $\{Y = y_j\}$ janë të pavarura. Përkatësisht,

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}, \text{ për të gjithë } x_i \in R_x \text{ dhe } y_j \in R_Y.$$

A Në shumë detyra praktike, shpeshherë ndodh, për popullacionin e dhënë të shqyrtohen më shumë se një shënim. Kështu, për popullacionin nxënës të moshës dhjetë vjeçare në Shkup, mund të vërehen njëkohësisht më shumë shënime. Për shembull, lartësia, masa, gjinia, ngjyra e syve etj.

Në rastin e këtillë, kur për popullacionin shqyrtohen më shumë shënime, shpeshherë parashtrohet pyetja shënimet a janë të pavarura. Pasi çdo shënim është një ndryshore rasti, problemi sillet në provën se ato dy ndryshore të rastit a janë të pavarura. Prova bëhet me testin statistik.

Për popullacionin e dhënë le të shqyrtohen shënimet X dhe Y. Me nivelin e rëndësisë α, do ta testojmë hipotezën zero:

H_0: shënimet X dhe Y janë të pavarura;

përkundër hipotezës alternative

H_a: shënimet X dhe Y nuk janë të pavarura.

Le të jetë X shënim i bashkësisë së vlerave $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, kurse Y është shënim me bashkësinë e vlerave $R_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$. Të theksojmë se shënimet nuk është e domosdoshme të jenë vetëm kuantitative, ato mund të jenë kualitative. Për shembull, nëse X paraqet gjinin e nxënësve, atëherë bashkësia e vlerave të X do të jetë $R_X = \{\text{meshkuji, femëra}\}$.

Testimi i hipotezës së parashtruar kryhet në bazë të një ekzemplari të realizuar. Për këtë qëllim, le të jenë kryer matjet të n të njësive të zgjedhura rastësisht prej popullacionit, d.m.th. le të jetë zgjedhur ekzemplar me madhësi n. Pasi shqyrtohen dy shënime, për çdo njësi do të ekzistojnë nga dy të dhëna. Në realitet, me matjen e çdo njësie fitohet nga një çift i radhitur (x_i, y_j), ku x_i është vlera për shënimin X, kurse y_j është vlera për shënimin Y.

1 Nëse X paraqet gjininë e nxënësve, kurse Y ngjyrën e syve, atëherë një realizim i ekzemplarit të rastit me madhësi 5 do të jetë kjo:

(meshkuj, të kaltër), (femëra, të zi),(femëra, kafe),(meshkuj, të zi), (femëra,të zi),

ku elementi i parë në çdo çift është gjinia e nxënësit përkatës, kurse elementi i dytë është ngjyra e syve të tij.

Pas matjes së n njësive të zgjedhura rastësisht le të jetë fituar ekzemplar i cili do të përbëhet prej n çifteve të radhitur. Me n_{ij} e shënojmë frekuencën e paraqitjes së çiftit (x_i, y_j) te ekzemplari i dhënë, $i = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, s$. Atëherë frekuencat e dhëna mund të paraqiten në tabelë.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_s
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1s}
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2s}
...	...	...	...	...
x_r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rs}

Tabela e kësaj forme, ku te prerja e rreshtit i dhe shtylla j qëndron elementi n_{ij}, i cili paraqet frekuencën e paraqitjes së çiftit (x_i, y_j) në ekzemplarin e dhënë, quhet *tabela e kontingjencës*.

Në tabelën e sipërme do t'i njehsojmë shumat sipas rreshtave dhe shtyllave. Le të jetë n_{Xi} shuma e elementeve në rreshtin i, $i = 1, 2, \ldots, r$, kurse n_{Yj} është shuma e elementeve në shtyllën j, $j = 1, 2, \ldots, s$. Kjo e paraqitur tabelarisht shihet kështu :

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_s	Σ
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1s}	n_{X1}
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2s}	n_{X2}
...	...	...	...	...	...
x_r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rs}	n_{Xr}
Σ	n_{Y1}	n_{Y2}	...	n_{Ys}	n

Është e qartë se shuma e të gjitha frekuencave prej tabelës së kontingjencës është n, aq sa është edhe madhësia e ekzemplarit. Poashtu, n_{X1} është numri i çifteve prej ekzemplarit te i cili paraqitet vlera x_1, n_{X2} është numri i çifteve ku paraqitet vlera $x_2, \ldots, n_{Xr}$ është numri i çifteve prej ekzemplarit në të cilin paraqitet vlera x_r. Në të njëjtën mënyrë, për vlerë të fiksuar $j = 1, 2, \ldots, s$, numri n_{Yj} është numri i çifteve prej ekzemplarit në të cilin paraqitet vlera y_j.

Nëse çdonjëra prej frekuencave në ekzemplarin pjesëtohet me madhësinë e ekzemplarit n, do të fitohen frekuencat relative për paraqitjen e ngjarjeve përkatëse, të cilët për n mjaft të madh, përafërsisht janë të barabartë me gjasat e atyre ngjarjeve. Kështu $\frac{n_{ij}}{n}$ është frekuenca relative e ngjarjes $\{X = x_i, Y = y_j\}$, pra për n mjaft të madh $\frac{n_{ij}}{n} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$.

Përkatësisht, $\frac{n_{X_i}}{n} = P\{X = x_i\}$, kurse $\frac{n_{Y_j}}{n} = P\{Y = y_j\}$. Tani, hipoteza zero të cilën e testojmë mund të shkruhet në formëm $H_0 : P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$, për të gjithë $i = 1, 2, \dots, r$; $j = 1, 2, \dots, s$, që në realitet është kushti i dy ndryshoreve të rastit të jenë të pavarura.

- Për testimin e kësaj hipoteze shfrytëzohet ky test statistikë:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{X_i} n_{Y_j}}{n}\right)^2}{n_{X_i} n_{Y_j}}.$$

- Nëse kryhen disa operacione algjebrike në formulën paraprake (së pari fuqizojmë, kurse pastaj rregullimin e shprehjes së fituar), ajo e fiton këtë formë e cila është më e thjeshtë për njehsim:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{n_{ij}^2}{n_{X_i} n_{Y_j}} - n.$$

Mbaj mend!

Për testimin e hipotezës për pavarshmëri të dy shënimeve statistike X dhe Y shfrytëzohet test statistika:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{n_{ij}^2}{n_{X_i} n_{Y_j}} - n.$$

Domeni kritik për testimin e kësaj hipoteze është e formës $C = \left(\chi^2_{(r-1)(s-1)\alpha}, \infty\right)$, ku numri $\chi^2_{(r-1)(s-1)\alpha}$ lexohet prej Tabelës 3 për χ^2.

2 Për nivelin e rëndësisë $\alpha = 0{,}05$, të testohet hipoteza se modeli i automobilit „pezho" është i pavarur prej gjinisë së pronarit. Rezulltatet e fituara duke shqyrtuar 350 pronarë të zgjedhur rastësisht të automobilave të dhëna në këtë tabelë të kontingjencës.

Y \ X	pezho 106	pezho 206	pezho 306
Mashkull	40	80	30
Femër	30	120	50

Shihe zgjidhjen:

- Me shënimin X le ta shënojmë gjininë e pronarit, kurse shënimi Y modeli i automobilit Pezho. Në bazë të ekzemplarit të dhënë me madhësi $n = 350$, do ta testojmë hipotezën: H_0: X dhe Y janë shënime të pavarura.
Poashtu, shënimi X pranon dy vlera, kurse shënimi Y pranon tre vlera, që do të thotë se $r = 2$, kurse $s = 3$.

- Me njehsimin e shumave sipas rreshtave dhe shtyllave, tabela e ka këtë formë:

Y \ X	pezho 106	pezho 206	pezho 306	Σ
Mashkull	40	80	30	150
Femër	30	120	50	200
Σ	70	200	80	350

Tani, vlera e statistikës χ^2 është kjo:

$$\chi^2 = 350\left(\frac{40^2}{150\cdot 70}+\frac{80^2}{150\cdot 200}+\frac{30^2}{150\cdot 80}+\frac{30^2}{200\cdot 70}+\frac{120^2}{200\cdot 200}+\frac{50^2}{200\cdot 80}\right)-350 = 7,4375.$$

Për caktimin e domenit kritik për këtë hipotezë, për $\alpha = 0,05$, së pari prej Tabelës 3 për shpërdarjen χ^2, caktojmë $\chi^2_{(r-1)(s-1);\alpha} = \chi^2_{(2-1)(3-1);0,05} = \chi^2_{2;0,05} = 5,99147$. Tani, domeni kritik është $C = (5,99147;\infty)$. Vlera e fituar e testit statistik është $\chi^2 = 7,4375 \in C$, prej ku përfundojmë se hipoteza zero hudhet. Domethënë, modeli i automobilit „pezho" nuk është i pavarur prej gjinisë së pronarit.

3 Janë shqyrtuar përgjigjet e 200 personave rastësisht të zgjedhur në këto dy pyetje:

1) A mendoni se pirja e duhanit është e dëmshme për shëndetin?

2) A pini duhan?

Rezulltatet e përgjigjeve janë dhënë në tabelën e kontingjencës:

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Përgjigjet e pyetjes 1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Përgjigjet e pyetjes 2</td><td>Y / X</td><td>Po</td><td>Jo</td></tr>
<tr><td>Po</td><td>70</td><td>90</td></tr>
<tr><td>Jo</td><td>30</td><td>10</td></tr>
</table>

Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0,01$, të provohet se përgjigja e pyetjes së dytë a nuk varet prej mendimit të personave se pirja e duhanit është e dëmshme për shëndetin e njeriut.

Zgjidhje:

T'i shqyrtojmë shënimet X dhe Y, të cilat paraqesin përgjigje në pyetjen e parë dhe të dytë, përkatësisht. Edhe të ndryshoreve të rastit pranojnë vlera prej bashkësisë së vlerave $\{po, jo\}$. Me mbledhjen sipas rreshtave dhe shtyllave te tabela e kontingjencës fitohet:

Y / X	Po	Jo	Σ
Po	70	90	160
Jo	30	10	40
Σ	100	100	200

Vlera e statistikës është

$$\chi^2 = 200\left(\frac{70^2}{160\cdot 100}+\frac{90^2}{160\cdot 100}+\frac{30^2}{40\cdot 100}+\frac{10^2}{40\cdot 100}\right)-200 = 12,5.$$

Prej Tabelës 3 për shpërdarjen χ^2, caktojmë $\chi^2_{(r-1)(s-1);0,01} = \chi^2_{(2-1)(2-1);0,01} = \chi^2_{1;0,01} = 6,6349$, pra domeni kritik do të jetë $C = (6,6349, \infty)$. Vlera e njehsuar e test statistikës $c^2 = 12,5 \in C$, prej ku mund të përfundohet se të dy shënimet janë të varura.

Detyra:

(1) Kandidatët për kryetar në një organizatë të shkollës së mesme janë një vajzë dhe një djal. Në ekzemplarin e rastit me madhësi 1000 janë fituar rezulltatet të paraqitura në këtë tabelë të kontingjencës:

Zgjedhesit \ Kandidatët	Kandidati vajzë	Kandidati djal
Femëra	250	220
Meshkuj	230	300

Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0{,}01$, të provohet se përcaktimi i votuesëve a varet prej gjinisë së kandidatit.

(2) Në tabelën që vijon janë dhënë kategorizimet e 100 nxënësve sipas interesimit për lëndën e matematikës dhe predispozicionet për matematikën.

Predispozicionet \ Interesimi	Interesimi i madh	I interesuar	Indiferent	I pa interesuar
Mirë	20	15	5	1
Mesatare	10	10	12	9
Dobët	1	7	5	5

Me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0{,}025$, të provohet se interesimi i nxënësve a varet prej predispozicioneve të tyre.

PËRGJIGJE, UDHËZIME DHE ZGJIDHJE E DETYRAVE

TEMA 1 VARGJET DHE PROGRESIONET

1 (1) a) $-2, \frac{3}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{16}, \frac{6}{23}$; b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$; c) 0, 1, 0, 1, 0; ç) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$. (2) a) $a_n = \frac{n}{2^n}$;

b) $a_n = \frac{2^{n-1}}{1+(n-1)100}$; c) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$; ç) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot n$. (3) a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55; b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

(4) a) 1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; b) 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415. (5) a) $4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 1, ...$; b) 16, 8, 4, 2, 1,...

(6) a) monotonisht rritet; b) monotonisht zvogëlohet. (7) a) monotonisht zvogëlohet; b) monotonisht rritet.

(8) a) monotonisht rritet; b) monotonisht zvogëlohet; c) Nuk është monotone, pasi për çdo numër natyror k vlen $a_{2k-1} < a_{2k}$, por edhe $a_{2k+1} < a_{2k}$; ç) monotonish zvogëlohet. (9) a) $|a_n| = 1$, prej ku vijon se vargu është i përcaktuar;

b) $0 < a_n < 2$, prej ku vijon se vargu është i kufizuar; c) $0 < a_n < 1$, i kufizuar; ç) nuk është i kufizuar;

d) $1,4 < a_n < \sqrt{2}$ ose $1 < a_n < 2$ - i kufizuar.

2 (1) Vargje aritmetike janë nën a) dhe ç). (2) a) Po, pasi $\sin^2 60^0 - \sin^2 45^0 = \sin^2 45^0 - \sin^2 30^0 = -\frac{1}{4}$;

b) Po, pasi $\cos^2 45^0 - \cos^2 60^0 = \cos^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{4}$. (4) a) 200; b) 325. (5) a) 25; b) 41; c) $-1,5$; ç) $20a + b$.

(6) a) $-3, -1, 1, 35$; b) 7, 9, 11, 13, 15; c) 10, 8, 6, 4, 2; ç) 7, 10, 13, 16, 19.

(7) $18, 14\frac{2}{3}, 11\frac{2}{3}, 8, 4\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, -2, -5\frac{1}{3}, -8\frac{2}{3}, -12$.

3 (1) a) $n = 10$, $S_{10} = 265$; b) $n = 16$, $S_{16} = -552$. (2) a) $a_n = 29$, $d = 3$; b) $a_n = 35$, $d = 2$.

(3) a) $a_1 = 5$, $S_{13} = 91$; b) $a_1 = 2a$, $S_n = 54a + 36b$. (4) a) $3, 1, -1, -3, ...$; b) 2, 4, 6, 8,...; c) $\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, 6, ...$

(5) Është dhënë: $a_1 = 3$, $a_m = 13$ dhe $S_n = 143$ Prej $a_m = \frac{a_1 + a_n}{2}$ fitojmë $a_n = 23$, kurse me zëvendësimin te formula $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ do të fitojmë $n = 11$. Ndryshimin d e caktojmë prej $a_{11} = a_1 + 10d$, d.m.th. $d = 2$.

(6) Dihet se: $a_1 = 18$, $d = -3$ dhe $a_n = \frac{S_{n-1}}{5}$, ku $a_n = a_1 + (n-1)d$, $S_{n-1} = \frac{n-1}{2}\left[2a_1 + (n-2)d\right]$.

Prej këtu me zëvendësim fitojmë $n = 21$, $n = 4$ (nuk është zgjidhje), domethënë anëtari i kërkuar është $a_{21} = -42$.

(7) $a_1 = -2$, $d = 1$. (8) 20, 50, 80. Udhëzim. Të tre anëtarët e njëpasnjëshëm shënoji me x-d dhe x+d.

(9) 5, 9, 13, 17,... (10) a) $x = \frac{19}{2}$. Udhëzime. $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = 1$, $a_n = x$, $S_n = 200$. b) $x = 2$.

4 (1) Progresione gjeometrike janë vargjet nën a), b) dhe ç). (2) a) $3, -6, 12, -24, \ldots$; b) $-2, -6, -18, -54, \ldots$;

c) $8, -4, 2, -1, \frac{1}{2} \ldots$; ç) $18, 6, 2, \frac{2}{3}, \ldots$ (3) a) $3, 9, 27, 51, \ldots$; b) $5, \frac{10}{3}, \frac{20}{9}, \frac{40}{27}, \ldots$ (4) a) $-2, 8, -32, 128, \ldots$;

b) $\frac{2}{\sqrt{3}}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ (5) $a_5 = 1$. (6) a) $3, 2 \cdot 3^9, 2 \cdot 3^{n-1}$; b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2^9}, \frac{3}{2^{n-1}}$; c) $-2, 3(-2)^9, 3(-2)^{n-1}$;

ç) $-\frac{1}{2}, 3\left(-\frac{1}{2}\right)^9, 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; d) $3, -2 \cdot 3^9, -2 \cdot 3^{n-1}$; e) $\frac{1}{2}, -\left(\frac{1}{2}\right)^9, -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. (7) 1 dhe 2 (8) Do të zmadhohet 256 herë.

5 (1) $s_7 = 86$; (2) a) $q = \frac{3}{2}, s_6 = \frac{4655}{32}$; b) $q = \frac{1}{2}, s_{11} = -\frac{2047}{64}$, $q = -\frac{1}{2}, s_{11} = \frac{-683}{64}$.

(3) a) $n = 8, a_8 = 896$; b) $n = 6, a_6 = -486$. (4) a) Duke shumëzuar me q të dy anët e formulës $a_n = a_1 q^{n-1}$ fitojmë:

$a_n q = a_1 q^n$, kurse pastaj këtë rezultat e shfrytëzojmë në formulën për shumën e n anëtarëve të parë, d.m.th.

$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$. Duke i zëvendësuar vlerat për S_n, a_n dhe a_1 në barasinë $s_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$, fitojmë

$2730 = \frac{2048q - 2}{q - 1}$, prej ku $q = 4$. Pastaj prej $a_n = a_1 q^{n-1}$ kemi $4^{n-1} = 1024$, $n = 6$. b) $q = 5, n = 5$.

(5) $a_1 = 3$, $q = 2$, pra progresioni është: $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$ (6) 9. Udhëzim. Shihe detyrën 4.

(7) Prej kushtit të detyrës kemi $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 26 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 364 \end{cases}$, d.m.th. $\begin{cases} a_1(1 + q + q^2) = 26 \\ a_1^2(1 + q^2 + q^4) = 364 \end{cases}$. Nëse barazimin e parë e kuadrojmë

dhe e pjesëtojmë me barazimin e dytë, do të fitojmë $\frac{(1 + q + q^2)^2}{(1 + q + q^2)(1 - q + q^2)} = \frac{26 \cdot 26}{26 \cdot 14}$ ose $3q^2 - 10q + 3 = 0$, prej ku $q = 3$, $q' = \frac{1}{3}$.

Prej $a_1(2 + q + q^2) = 26$ fitojmë $a_1 = 2$, $a_1' = 18$. Domethënë, ekzistojnë dy progresione të atilla:

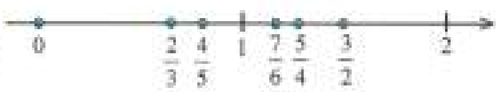
$2, 6, 16, \ldots$ dhe $18, 6, 2 \ldots$ (8) $S_{32} = 2^{32} - 1 = 4294967295$.

(9) Ekzistojnë tre progresione të atilla, dhe ato: (I) $27, -27, 27, -27, \ldots$ (II) $27, \frac{-27}{2}, \frac{27}{4}, -\frac{27}{8}, \ldots$ (III) $27, 9, 3, 1, \ldots$

(10) $S_n = \frac{1}{81}(10^n - 10 - 9n)$; Udhëzim. $1 = \frac{10 - 1}{9}, 11 = \frac{10^2 - 1}{9}, 111 = \frac{10^3 - 1}{9}, \ldots, \underbrace{111 \ldots 1}_{n} = \frac{10^n - 1}{9}$.

6 (2) a) $n > 145$; b) $n > 14445$. (3) a) $n > 5$; b) $n > 28$. (4) a) $\frac{1}{9}$, $n \geq 2$; b) $\frac{27}{99}$, $n \geq 2$.

(5) a) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}$; b)



c) Jo; ç) Po, $0 \leq a_n \leq \frac{3}{2}$; d) $n > 100$; e) 1.

7 (2) a) divergjente, me dy pika të grumbullimit; b) divergjente, me dy pika të grumbullimit.

(3) Prej $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$, d.m.th. $a_n < a_{n+1}$, vijon se vargu është rritës.

Pasi $a_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$ përfundojmë se vargu është i kufizuar, që do të thotë se vargu është konvergjent.

4 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$, $\dfrac{2n-1}{n+1} < \dfrac{2n}{n+1} < \dfrac{2n+2}{n+1}$, d.m.th. $a_n < c_n < b_n$, pra vijon se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

5 a) $\left(\dfrac{5n+4}{n}\right)$; b) $\left(\dfrac{5n-2}{n}\right)$. 6 a), ç), d) konvergjent; b), c) divergjent.

8 2 a) $+\infty$; b) oscilon; c) $-\infty$; ç) oscilon. 3 a) -3; b) 1. 4 a) 7; b) 3. 5 a) 2; b) $\dfrac{2}{3}$; c) $\dfrac{4}{3}$.

6 a) e; b) e; c) e. 7 a) e^2; b) e^4; c) e^3.

9 1 a) 11; b) $\dfrac{1}{3}$; c) $-\dfrac{62}{51}$. 2 a) $\dfrac{a}{c}$; b) $\dfrac{3}{5}$; c) 1. 3 a) 1; b) $\dfrac{1}{4}$. 4 a) $\dfrac{1}{3}$; b) 1; c) 2; ç) 1.

5 a) $\dfrac{1}{2}$; b) 2. 6 a) $\dfrac{1}{9}$; b) $\dfrac{29}{20}$. 7 a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$; b) 0. Udhëzim. $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$.

10 1 a) $\dfrac{2}{3}$; b) $\dfrac{28}{3}$; c) $2(1+\sqrt{2})$; ç) $\dfrac{92}{3}$; d) $2(2+\sqrt{3})$; e) $\dfrac{2}{3}\lg 3$. 3 a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt[3]{45}$. 4 $1\dfrac{53}{99}$.

5 a) $\dfrac{2929}{900}$; b) $\dfrac{521}{110}$. 6 $a_1 = \dfrac{32}{75}$, $a_1' = -\dfrac{8}{75}$. 7 a) $x=3$; b) $\dfrac{5}{4}$. 8 a) $(i)\ 4r\pi$, $(ii)\ 6r\sqrt{3}$; b) $(i)\ \dfrac{4R^2\pi}{3}$.

TEMA 2 FUNKSIONET DHE VLERAT KUFITARE TË FUNKSIONEVE

1 1 $f(2) = 2\cdot 2^2 - 2 + 3 = 9$; $f(-1) = 6$; $f(0) = 3$; $f(a) = 2a^2 - a + 3$.

2 $f(-2) = -1$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f(2) = 4$. 3 $\varphi(2) = 1$; $\varphi(0) = 2$; $\varphi\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\varphi(3) = 2$.

4 a) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{b^2-a^2}{b-a} = b+a$ për $b \neq a$; b) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - f\left(\dfrac{a-b}{2}\right) = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = \dfrac{a+b-a+b}{2}\cdot\dfrac{a+b+a-b}{2} = ab$.

5 $\dfrac{f(x)-f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)} = \dfrac{\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{y-1}{y+1}}{1 + \dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{y-1}{y+1}} = \dfrac{x-y}{1+xy}$.

6 a) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+2, & x \geq 1 \\ x^2+2x-2, & x < 1 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2-1, & x > 0 \end{cases}$. 7 a) $\begin{cases} -a+b=1 \\ 2a+b=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4a-2b+3=-5 \\ a+b+3=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$.

(8) Le të jetë $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. a) $f(t)=t^2-2 \Rightarrow f(x)=x^2-2$;

b) Le të jetë $x+1=t$, d.m.th. $x=t-1$, $f(t)=a(t-1)^2+b(t-1)+c$.

$$f(t)=at^2-2at+a+bt-b+c=at^2-(2a-b)t+a-b+c \Rightarrow f(x)=ax^2-(2a-b)x+a-b+c.$$

(9) a) $D_f=\mathbb{R}$; b) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$; c) $D_f=\mathbb{R}$; ç) $x^2-5x+6\geq 0 \Rightarrow D_f=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$;

d) $1-\sin x\geq 0 \Rightarrow \sin x\geq 1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$; e) $\begin{cases} x^2-2x>0 \\ 5-x\geq 0 \end{cases}$; $D_f=(-\infty,0)\cup(2,5]$.

(10) a) $f(A)=[1,4]$; b) $f(0)=0$; $f(1)=\frac{1}{2}$; $f(A)=\left(0,\frac{1}{2}\right]$. (11) $p=5\operatorname{tg}\alpha$; $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\alpha \mid \alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; $V=\mathbb{R}$.

(12) $b^2=(2R)^2-x^2$, d.m.th $b=\sqrt{4R^2-x^2}$, domethënë $S=xb=x\sqrt{4R^2-x^2}$.

2

(1) a) $y=-2x+3$; $D_f=\mathbb{R}$; $V_f=\mathbb{R}$. fig. 1.

b) $y=x^2-2x-3$; Zero: $x_1=-1$, $x_2=3$; Kulmi: $\alpha=1$, $\beta=-4$; $D_f=\mathbb{R}$, $V_f=\mathbb{R}$, fig. 2

c) $y=\frac{2}{x}$. $y=0$ është asimptotë horizontale; $x=0$ është asimptotë vertikale.

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $V_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, fig. 3

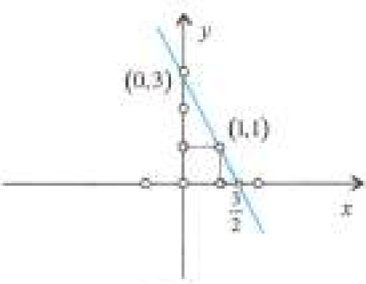


fig. 1

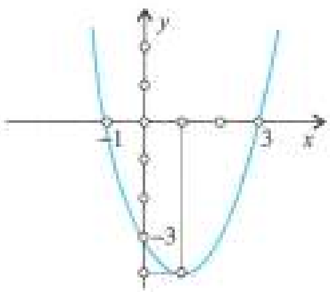


fig. 2

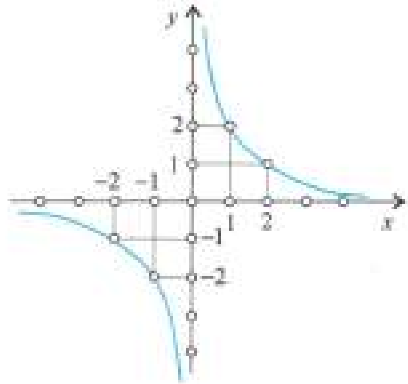


fig. 3

(2) a) $x=\frac{3}{2}$; b) $x=\frac{4}{3}$. (3) a) $x_1=1$ ose $x_2=2$; b) $x(x^4-5x^2+4)=0$; $x_1=0$ ose $x_{2/3}=\pm 1$ ose $x_{4/5}=\pm 2$.

(4) a) $x=2$; b) $x_{1/2}=\pm 1$ ose $x_{3/4}=\pm 4$. (5) a) $x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ose $x_2=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$; b) $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$.

(6) a) $x^2-3=1$ d.m.th. $x_1=-2$ ose $x_2=2$; b) $x^2+2x=8$ d.m.th. $x_1=-4$ ose $x_2=2$.

(7) a) $f(-x)=(-x)^2\cdot|\sin(-x)|=x^2|-\sin x|=x^2|\sin x|=f(x)$; b) $f(-x)=\frac{3(-x)^2}{4-(-x)^2}=\frac{3x^2}{4-x^2}=f(x)$;

c) $f(x)=\sqrt{\cos(-x)}=\sqrt{\cos x}=f(x)$. (8) a) $f(-x)=2(-x)^3-(-x)^5-2(-x)^7=-2x^3+x^5+2x^7=-(2x^3-x^5-2x^7)=-f(x)$;

b) $f(-x)=(-x)^3+4\operatorname{tg}(-x)=-x^3-4\operatorname{tg}x=-(x^3+4\operatorname{tg}x)=-f(x)$.

9 a) $f(-x)=(-x)^2-1-3\cos(-x)=x^2-1-3\cos x=f(x)$; çift

b) $f(-x)=(-x)^3+2+\sin(-x)=-x^3+2-\sin x\neq f(x)$; $f(-x)=-(x^3-2+\sin x)\neq -f(x)$. As çift, as tek.

c) $f(-x)=(-x)^n=\begin{cases} x^n & per\ n=2k; k\in N \\ -x^n & per\ n=2k-1; x\in N\end{cases}$ Domethënë, për n çift, funksioni është çift.për n tek, funksioni është te.

10 a) $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)+\operatorname{tg}(-x)-(-x)^3}{\cos^2(-x)}=\dfrac{-\sin x-\operatorname{tg}x+x^3}{\cos^2 x}=-\dfrac{\sin x+\operatorname{tg}x-x^3}{\cos^2 x}=-f(x)$; tek

b) $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=-\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x)$; tek

11 a) $f(-x)=\dfrac{(1+a^{-x})^2}{a^{-x}}=\dfrac{(a^x+1)^2}{a^x}=f(x)$, çift

b) $f(-x)=\lg\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\lg\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lg\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=\lg\dfrac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}=$

$=-\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)$, tek

3 1 a) $T=\dfrac{2\pi}{b}=\dfrac{2\pi}{\frac{4}{5}}=\dfrac{5\pi}{2}$; b) $T=\dfrac{\pi}{b}=\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$; c) $T=\dfrac{2\pi}{3}$. 2 a) $T=\pi$; b) $T=2\pi$; c) $y=\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$; $T=2\pi$.

3 a) $T_1=\dfrac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\dfrac{4\pi}{3}$, $T_2=\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$; $T=12\pi$; b) $T_1=\dfrac{2\pi}{3}$, $T_2=\dfrac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\dfrac{4\pi}{3}$; $T=\dfrac{4\pi}{3}$.

4 a) $f(x+T)=(x+T)\sin(x+T)\neq f(x)$, nuk është periodik; b) $f(x+T)=\sin 2(x+T)+\sin(x+T)=\sin x$, periodik, me periodë $T=2\pi$. 5 a) $f(x+T)=-2+\sin(x+T)=f(x)$, perodik me periodë $T=2\pi$;

b) $f(x+T)=x+T+\cos(x+T)\neq f(x)$, nuk është periodik.

6 a) $f(x_2)=-\dfrac{3}{2}x_2+1$; $f(x_1)=-\dfrac{3}{2}x_1+1$; Për $x_2>x_1$ nuk do të ketë $f(x_2)-f(x_1)=-\dfrac{3}{2}x_2+1+\dfrac{3}{2}x_1-1=-\dfrac{3}{2}(x_2-x_1)<0$;

b) $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{2}x_2+3-\dfrac{1}{2}x_1-3=\dfrac{1}{2}(x_2-x_1)>0$. 7 a) për $0<x_1<x_2<+\infty$ kemi: $f(x_2)-f(x_1)=\lg_2 x_2-\lg_2 x_1=\lg_2\dfrac{x_2}{x_1}>0$;

b) për $0<x_1<x_2<+\infty$ kemi: $f(x_2)-f(x_1)=\log_{\frac{1}{2}}x_2--\log_{\frac{1}{2}}x_1=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x_2}{x_1}<0$;

c) për $x_1<x_2$ kemi: $f(x_2)-f(x_1)=3^{-x_2}-3^{-x_1}=3^{-x_1}\left(3^{-(x_2-x_1)}-1\right)=\dfrac{1}{3^{x_1}}\left(\dfrac{1}{3^{x_2-x_1}}-1\right)<0$.

8 a) Për $0\le x_1<x_2$ kemi: $f(x_2)-f(x_1)=x_2^2+1-x_1^2-1=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$, rritës;

b) për $0\le x_1<x_2\le 1$ kemi: $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{x_2+1}-\dfrac{1}{x_1+1}=\dfrac{x_1+1-x_2-1}{(x_2+1)(x_1+1)}=\dfrac{x_1-x_2}{(x_2+1)(x_1+1)}<0$; zvogëlues

c) për $0\le x_1<x_2$ kemi: $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{x_2^2+1}-\dfrac{1}{x_1^2+1}=\dfrac{x_1^2+1-x_2^2-1}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}=\dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}<0$; zvogëlues.

4

(1) a) $\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}=3$; $V_f=[3,+\infty)$; b) $\beta=3$, $V_f=(-\infty,3]$; c) $V_f=\mathbb{R}$.

(2) a) $\beta=-\frac{49}{4}$, $V_f=\left[-\frac{49}{4},+\infty\right)$; b) $\beta=-\frac{25}{8}$, $V_f=\left(-\infty,\frac{25}{8}\right]$. (3) a) $y=\begin{cases}2x+1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$, $V_f=[1,+\infty)$;

b) $y=\begin{cases}2-x, & x\geq 1\\ x, & x<1\end{cases}$, $V_f=(-\infty,1]$. (4) a) $V_f=(1,+\infty]$; $y=1$ është asimptotë horizontale; b) $V_f=(1,+\infty)$.

(5) a) $y=\sin x\cos x=\frac{2\sin x\cos x}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x$. $V_f=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; b) $V_f=[-3,3]$.

(6) 1. a) $\inf f(x)=3$; b) $\sup f(x)=3$; c) nuk ekziston. 2. a) $\inf f(x)=-\frac{49}{4}$; b) $\sup f(x)=\frac{25}{8}$. 3. a) $\inf f(x)=1$;

b) $\sup f(x)=1$. 4. a) $\inf f(x)=1$; b) $\inf f(x)=1$. 5. a) $\inf f(x)=-\frac{1}{2}$; $\sup f(x)=\frac{1}{2}$; b) $\inf f(x)=-3$; $\sup f(x)=3$.

(7) a) $y_{min}=\beta=-1$ për b) $y_{max}=\beta=\frac{1}{4}$ për $x=\frac{3}{2}$; c) $y_{min}=0$ për $x=0$. (8) a) $y_{max}=1$ per $x=\frac{\pi}{2}$, $y_{min}=-1$ per $x=\frac{3\pi}{2}$;

b) $y_{max}=0$ për $x=0$ ose $x=2\pi$, $y_{min}=-2$ për $x=\pi$. (9) a) $y_{max}=1$ për $x=0$; b) Nuk ka ekstreme.

(10) a) $1+x^2\neq 0$, domethënë $D_f=\mathbb{R}$; b) $V_f=[-1,1]$, pasi prej $y=\frac{2x}{1+x^2}$, fitojmë $yx^2-2x+y=0$ prej ku

$4-4y^2\geq 0$ d.m.th. $1-y^2\geq 0$; c) funksioni është i kufizuar, $-1\leq f(x)\leq 1$; ç) për $x=1$, $y_{max}=1$; për $x=-1$, $y_{min}=-1$;

d) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; $f(x)$ zvogëlohet; $x\in(-1,1)$; $f(x)$ rritet; e) $f(-x)=\frac{2(-x)}{1+(-x)^2}=-\frac{2x}{1+x^2}=-f(x)$ tek;

f) $f(x+T)=\frac{2(x+T)}{1+(x+T)^2}\neq f(x)$; jo periodik.

5

(1) a) $(f+g)=3x^2+2x+4$; $D=D_f\cap D_g=\mathbb{R}$; $(f\cdot g)=6x^3+15x^2-2x-5$; $D=\mathbb{R}$;

b) $(f+q)=\frac{1}{x-1}+x-1=\frac{x^2}{x-1}$; $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $(f\cdot g)=1$; $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$;

c) $(f+g)=\frac{1-x}{1+x}+3x^2-1=\frac{3x^3+3x^2-2x+1}{1+x}$; $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $(f\cdot g)=\frac{-3x^3+3x^2+x-1}{1+x}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

(2) a) $f(x)+g(x)=\frac{x}{1-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{x}=\frac{x^2+\sqrt{1-x}-\sqrt{x-x^2}}{x(1+\sqrt{x})}$; $D_f=[0,+\infty)\setminus\{1\}$; $D_g=(-\infty,1]\setminus\{0\}$; $D=(-\infty,1)\cup(0,+\infty)$.

b) $f(x)\cdot g(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$; $D=(-\infty,1)\cup(0,+\infty)$. (3) $f+f=4x+2$; $D=\mathbb{R}$; $f\cdot f\cdot f=8x^3+12x^2+6x+1$; $D=\mathbb{R}$.

④ a) $f\circ g=f\left(g\left(x\right)\right)=5g\left(x\right)-4=5\cdot\left(2-3x\right)-4=-15x+6$; $g\circ f=g\left(f\left(x\right)\right)=1-3f\left(x\right)=2-3\left(5x-4\right)=-15x+14$;

b) $f\circ g=f\left(g\left(x\right)\right)=\dfrac{1}{g\left(x\right)+2}=\dfrac{1}{2x+3+2}=\dfrac{1}{2x+5}$; $g\circ f=g\left(f\left(x\right)\right)=2f\left(x\right)+3=2\dfrac{1}{x+2}+3=\dfrac{3x+8}{x+2}$.

⑤ $f\circ g=f\left(g\left(x\right)\right)=1-\dfrac{x+3}{2x+4}=\dfrac{x+1}{2x+1}$; $g\circ f=g\left(f\left(x\right)\right)=\dfrac{f\left(x\right)+3}{2f\left(x\right)+4}=\dfrac{1-x+3}{2\left(1-x\right)+4}=\dfrac{4-x}{6-2x}$.

⑥ $f\circ g=f\left(g\left(x\right)\right)=\sqrt{g\left(x\right)}=\sqrt{\cos x}$; $g\circ f=g\left(f\left(x\right)\right)=\cos f\left(x\right)=\cos\sqrt{x}$.

⑦ $f\circ f=f\left(f\left(x\right)\right)=\dfrac{1+3f\left(x\right)}{f\left(x\right)-3}=\dfrac{1+3f\left(x\right)}{f\left(x\right)-3}=\dfrac{1+3\dfrac{1+3x}{x-3}}{\dfrac{1+3x}{x-3}-3}=\dfrac{x-3+3+9x}{1+3x-3x+9}=x$. ⑧ $f\left(f\left(x\right)\right)=\dfrac{2\dfrac{2x+1}{x-2}+1}{\dfrac{2x+1}{x-2}-2}=\dfrac{4x+2+x-2}{2x+1-2x+4}=x$.

⑨ a) $12y=8-3x$; $3x=8-12y$; $x=\dfrac{8-12y}{3}$, domethënë $f^{-1}\left(x\right)=\dfrac{8-12x}{3}$;

b) $xy-2y=2x+3$; $x\left(y-2\right)=2y+3$; $x=\dfrac{2y+3}{y-2}$, domethënë $f^{-1}\left(x\right)=\dfrac{2x+3}{x-2}$;

c) $\sqrt[3]{x}=y-1$, domethënë $x=\left(y-1\right)^3$; $f^{-1}\left(x\right)=\left(x-1\right)^3$; ç) $10^{x-2}=y-3$, domethënë $x=\lg\left(y-3\right)+2$, $f^{-1}\left(x\right)=\lg\left(x-3\right)+2$.

⑩ a) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$; $x=\dfrac{1}{y}$, domethënë $f^{-1}\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$;

b) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$; $y+xy=1-x, xy+x=1-y, x=\dfrac{1-y}{1+y}$, d.m.th. $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$.

6

① a) $y=x^6$, fig. 1. b) $y=x^{-3}$, fig. 2. c) $y=x^{\frac{1}{3}}$, fig. 3.

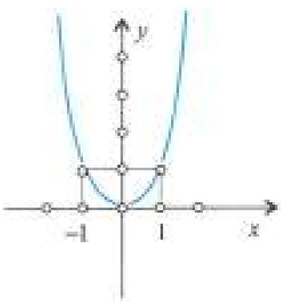


fig. 1

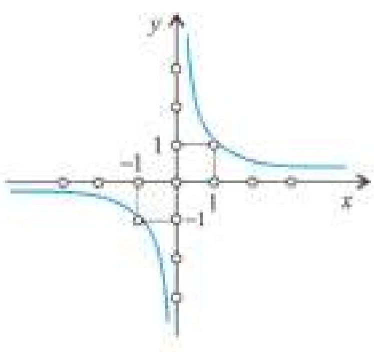


fig 2

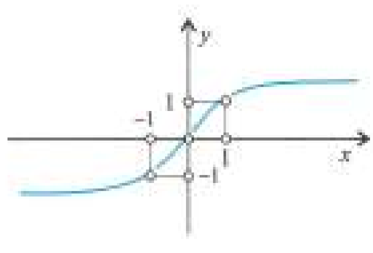


fig. 3

2 a) $y = 5^x$, fig. 4. b) $y = 0,2^x$, fig. 5. c) $y = \log_5 x$, fig. 6. ç) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$, fig. 6.

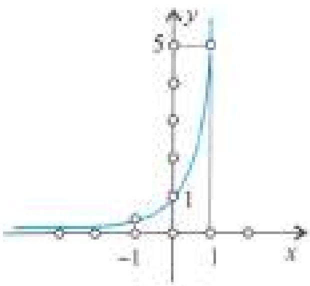


fig. 4

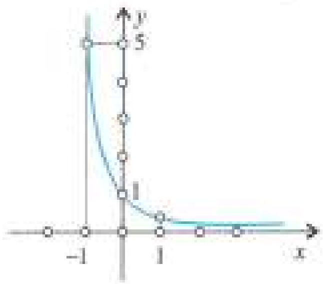
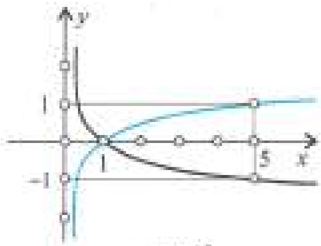


fig. 5



црт. 6

3 a) fig. 7.

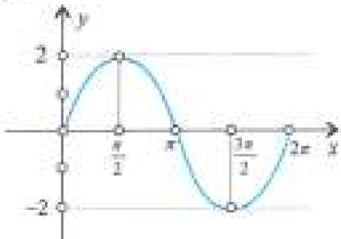


fig. 7

b) fig 8.

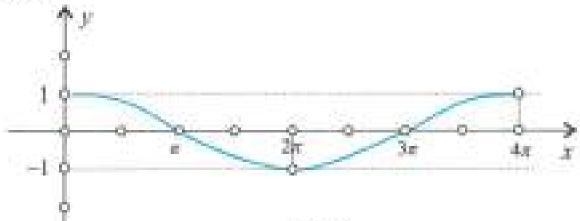


fig. 8

7 1 a) fig. 1. b) fig. 2. c) fig. 3

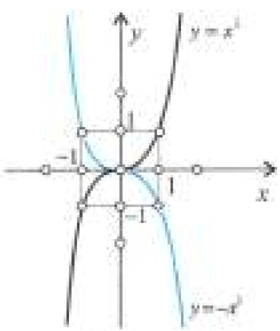


fig. 1

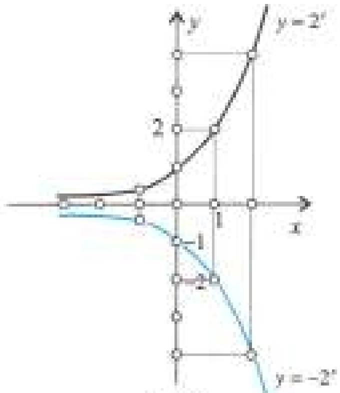


fig. 2

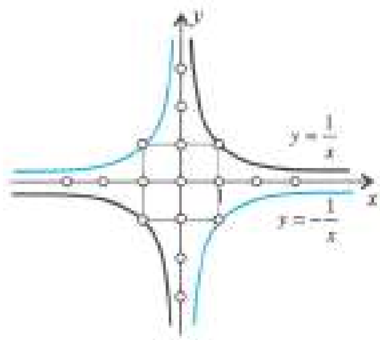


fig. 3

2 a) fig. 4. b) fig. 5. c) fig. 5.

3 a) fig. 6. b) fig. 7. c) fig. 8.

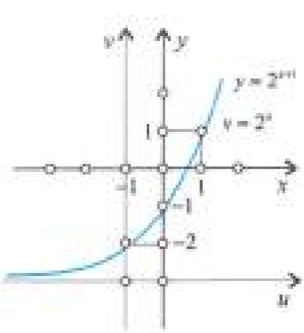


fig. 4

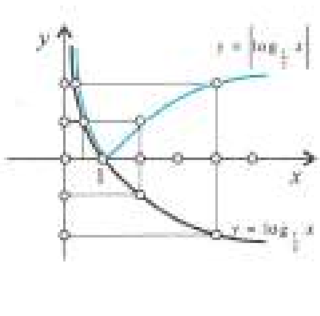


fig. 5

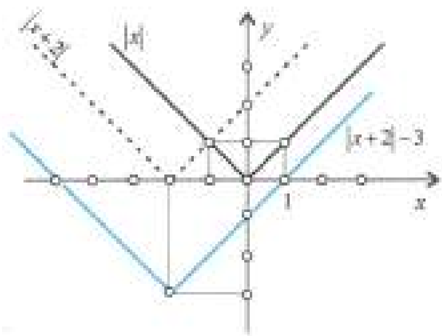
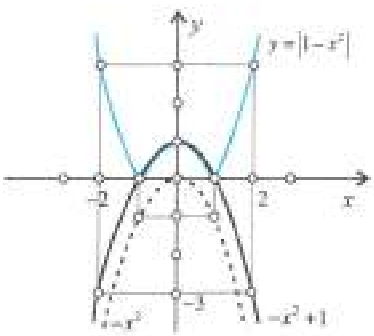
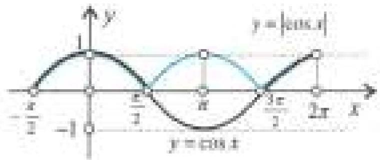


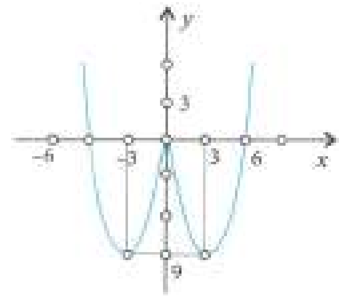
fig. 6



црт. 7

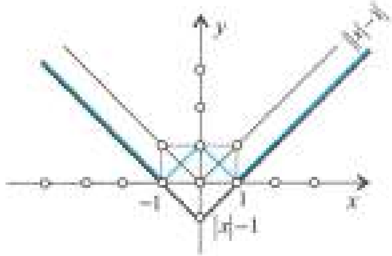


црт. 8

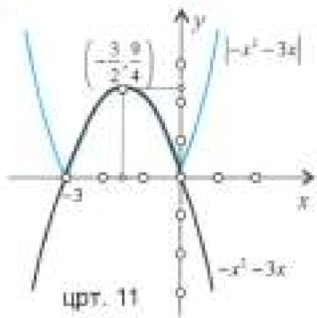


црт. 9

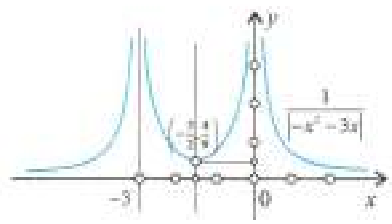
④ а) $y=\begin{cases}x^2+6x & x\geq 0\\ x^2-6x & x<0\end{cases}$, црт. 9. б) црт. 10. ⑤ а) црт. 11. б) црт. 12.



црт. 10

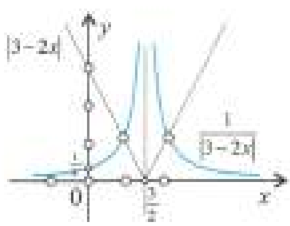


црт. 11

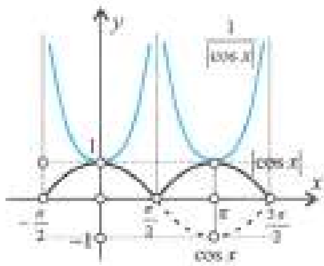


црт. 12

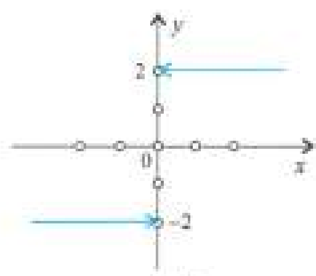
⑥ а) црт. 13. б) црт. 13. в) црт. 14.



црт. 13



црт. 14



црт. 15

⑦ а) $y=\frac{|2x|}{x}=\begin{cases}2; & x>0\\ -2; & x<0\end{cases}$, црт. 15. б) $y=\begin{cases}x+2+2x-3=3x-1, & x\geq -2\\ -x-2+2x-3=x-5, & x<2\end{cases}$, црт. 16. ⑧ а) црт. 17. б) црт. 18.

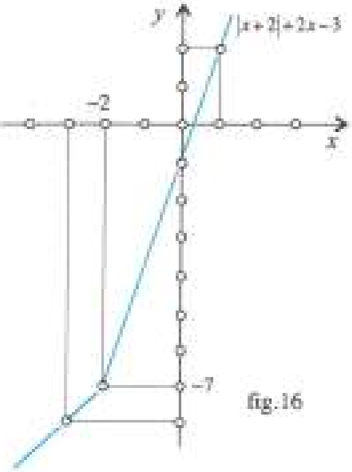


fig.16

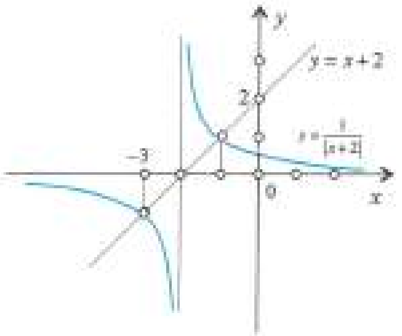


fig.17

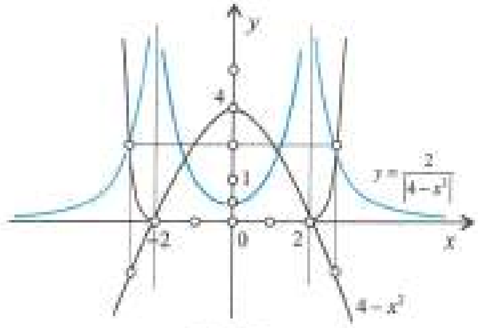


fig. 18

8 (1) a) -1; b) -1. (3) a) 1; b) -1. (4) a) 2; b) 4. (5) a) 2; b) 3. (6) a) -1; b) 0.

9 (1) a) $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{2x}{x+1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{2(-1-h)}{-1-h+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2x}{x+1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{2(-1+h)}{-1+h+1}=-\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{3x}{x-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3(1-h)}{1-h-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x}{x-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3(1+h)}{1+h-1}=+\infty$.

(2) a) $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{-1-h+1}{(-1-h-1)(-1-h+1)}=-\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{-1+h+1}{(-1+h-1)(-1+h+1)}=-\frac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{(1-h-1)(1-h+1)}{1-h-1}=2$; $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{(1+h-1)(1+h+1)}{1+h-1}=2$.

(3) a) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3}{x-2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3}{2+h-2}=+\infty$; b) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3}{x-2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3}{2-h-2}=-\infty$. (4) a) 1; b) 1.

(5) a) 1; b) 0; c) 0. (6) a) ∞; b) $-\infty$; c) $+\infty$. (7) a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $\pm\infty$; ç) $-\infty$.

10 (1) a) -5; b) ∞. (2) a) $-\frac{1}{3}$; b) -1. (3) a) 2; b) $\frac{3}{2}$; c) 3.

(4) a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1}{4}$; b) ∞. (5) a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{2}$.

(6) a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=1$; b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-4+2x}{2(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+4)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{5}{4}$.

(7) a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$; b) 2.

(8) a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\cdot 4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos 4x}{\sin x}=2.$

11

(1) a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}x}{\frac{\sin x}{4x}\cdot 4x\cdot\cos x}=\dfrac{1}{4}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}=2.$ (2) a) $\dfrac{1}{2}$; b) 0.

(3) a) 4; b) 2. (4) a) 4; b) 4. (5) a) e; b) e; (6) a) e^2; b) $e^{-\frac{4}{3}}$.

(7) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{x+1}-1\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)\cdot\frac{1}{-(x+1)}\cdot x}=e^{-1}$; b) e^4.

(8) a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2x\cdot\frac{1}{x}}=e^2$; b) e^{-3}.

12

(1) a) Funksioni është i vijueshëm pasi:

$\lim\limits_{x\to 2^-}(2x+1)=\lim\limits_{h\to 0}(2(2-h)+1)=5$; $\lim\limits_{x\to 2^+}(2x+1)=\lim\limits_{h\to 0}(2(2+h)+1)=5$; $f(2)=5$;

b) Funksioni është i pavijueshëm pasi $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{0-h}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{0+h}=+\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn} x=\lim\limits_{h\to 0}(-1)=-1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn} x=\lim\limits_{h\to 0}(+1)=\pm 1$. Domethënë funksioni është i pavijueshëm.

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}x\operatorname{sgn} x=\lim\limits_{h\to 0}|0-h|=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}x\operatorname{sgn} x=\lim\limits_{h\to 0}|0+h|=0$, domethënë funksioni është i vijueshëm.

(4) $\lim\limits_{x\to 1^-}x=\lim\limits_{h\to 0}(1-h)=1$; $\lim\limits_{x\to 1^+}(4-x)=\lim\limits_{h\to 0}(4-1-h)=3$; $f(1)=2$. Funksioni është i pavijueshëm

(5) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\dfrac{\sin a}{a}=f(a)$, per $a\neq 0$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Domethënë $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{per } x\neq 0\\ 1 & \text{per } x=0\end{cases}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{0-h}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}x=\lim\limits_{h\to 0}(0+h)=0$ dhe $f(x)=0$, i pavijueshëm në $x=0$.

(7) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\dfrac{a^2+a-2}{2(a^3-1)}=f(a)$ për $a\neq 1$. Nëse $a=1$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{2(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{1}{2}$. D.m.th. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{2(x^3-1)} & \text{për } x\neq 1\\ \dfrac{1}{2} & \text{për } x=1\end{cases}$

(8) $|\sin x-\sin a|=\left|2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}\right|\leq 2\cdot 1\dfrac{|x-a|}{2}=|x-a|<\delta=\varepsilon$. Përkatësisht, $\left|\cos\dfrac{x+a}{2}\right|\leq 1$ dhe $\left|\sin\dfrac{x-a}{2}\right|<\left|\dfrac{x-a}{2}\right|$.

13

(1) a) $x=2$ është asimptotë vertikale; $y=1$ është asimptotë horizontale;

b) $x=2$ është asimptotë vertikale; $y=x+2$ është asimptotë e pjerrët.

(2) a) $x=0$ është asimptotë vertikale $y=x+1$ është asimptotë e pjerrët; b) $y=0$ është asimptotë horizontale.

(3) a) $x=\sqrt{3}$ dhe $x=-\sqrt{3}$ janë asimptota vertikale; $y=-x$ është asimptotë e pjerrët; b) $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ është asimptotë e pjerrët.

(4) a) $y=1$ është asimptotë horizontale; b) $y=0$ është asimptotë horizontale kur $x\to+\infty$.

TEMA 3 NJEHSIMI DIEFERNCIAL

1

(1) Pasi $P=2(a+b)$ le të jetë $a = 15\,\text{m}$, $b = 20\,\text{m}$.

a) $\Delta P = 2(a+\Delta a+b)-2(a+b) = 2\cdot\Delta a = 2\cdot 0{,}11 = 0{,}22m.\ \Delta 20 = 2{,}2m S = (a+\Delta a)\cdot b - ab = \Delta a\cdot b = 0{,}11\cdot 20 = 2{,}2m^2.$

b) $\Delta P = 2\cdot\Delta b = 2\cdot 0{,}2 = 0{,}4m;\ \Delta S = a\cdot\Delta b = 15\cdot 0{,}2 = 3m^2.$

(2) a) $S = r^2\pi$. a) $\Delta S = (r+\Delta r)^2\cdot\pi - r^2\pi = \Delta r(2r+\Delta r)\pi$. b) $\Delta S = 0{,}2(2\cdot 2+0{,}2)\pi = 0{,}84\pi cm^2$; c) $0{,}41\pi cm^2$.

(3) a) $\Delta R = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(-2+0{,}1) - f(-2) = f(-1{,}8) - f(-2) = \frac{2}{1{,}8}+1 = 2\frac{1}{9}$. b) -2,32; c) 0,03; ç) 0,205.

(4) a) $\Delta x = 2{,}6-2{,}5 = 0{,}1$, $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \left(4(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^2\right) - \left(4x-x^2\right)$; $\Delta f = \Delta x(4-2x-\Delta x)$.

Për $x = x_0 = 2{,}5$ dhe $\Delta x = 0{,}1. \Delta f = 0{,}1(4-2\cdot 2{,}5-0{,}1) = -0{,}11$. b) $\Delta x = 0{,}125$, $\Delta f = 0{,}1$. c) $\Delta x = \frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$;

$\Delta f = \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right) - \cos^2\frac{2\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; ç) $\Delta x = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, $\Delta f = tg\frac{\pi}{3} - tg\frac{\pi}{4} = \sqrt{3}-1$.

(5) a) $y' = 1$; b) $y' = 2x$, për $x_0 = 2$; $y'_{(2)} = 2\cdot 2 = 4$. c) $\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\cdot\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$;

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2+\Delta 3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}; y' = \lim\limits_{x\to -1}(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2) = 3x^2$, per $x = x_0 = -1, y'(-1) = 3\cdot(-1)^2 = 3$.

ç) $y' = \frac{x^2+1}{x^2}$, për $x = x_0 = 1, y'(1) = 2$.

(6) a) $y = |x+1| = \begin{cases} x+1 \text{ për } x \geq -1 \\ -(x+1) \text{ për } x < -1 \end{cases}$ për $x \geq -1$, $f'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$,

$f'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{(x+\Delta x+1)-(x+1)}{\Delta x} = 1$; $f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{-(x+\Delta x+1)-(-(x+1))}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$.

b) $f'_-(1) = -1$; $f'_+(1) = 1$. c) $f'_-(0)$ nuk ekziston pasi funksioni për $x < 0$ nuk është përkufizuar, d.m.th. $f'_+(0) = 0$.

(7) a) E shqyrtojmë diferenciabilitetin vetëm prej djathtas, d.m.th. $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, pasi

$\Delta x = x-x_0 = x-0$, kur $\Delta x\to 0^+$, atëherë $x\to 0^+$, pra $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}} = 0$.

Domethënë $f'_+(0) = 0$, d.m.th. funksioni është diferenciabil. b) Funksioni nuk është deferenciabil, pasi është i pavijueshëm dhe nëse $f'_-(1) = f'_+(1)$. c) Funksioni nuk është difenrenciabil.

2

(1) a) $y' = 6x^5$; b) $y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$; $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$; c) $y = x^{-10}$, $y' = -10x^{-11} = \frac{-10}{x^{11}}$.

(2) a) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{\Delta x(-2x-\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}$. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2x-\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$; $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-2x-\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2} = \frac{-2}{x^3}$

ose $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-2-1} = -\frac{2}{x^3}$;

b) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\dfrac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\Delta x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

ose $\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. c) $y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$. (3) $(x+2)'=\left(2x^2-3x+4\right)'$; $1=4x-3,\ x=1$.

Për $x=1;\ y(1)=1+2=3$ edhe për funksionin e dytë $y(1)=2\cdot 1^2-3\cdot 1+4=3$, d.m.th. $A(1,3)$.

(4) $y'=\cos x;\ \cos x=1,\ x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. (5) $y'=-\sin x;\ -\sin x=0,\ x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

(6) $(\sin x)'=(\cos x)';\ \cos x+\sin x=0,\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

3 (1) a) $y'=x$; b) $y=-3x^2$; c) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$, $y'=m$. (2) a) $y'=4x-3$; b) $y'=\sqrt{2}-6x$; c) $y'=1-x+x^2$;

ç) $y'=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{12}{x^5}$. (3) a) $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; b) $y'=-\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^8}}$; c) $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$; ç) $y'=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

(4) a) $y'=\cos x+2\sin x$; b) $y'=5x^4-e^x+\dfrac{1}{x}$; c) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{4}{4\sin^2\cos^2 x}=\dfrac{4}{\sin^2 2x}$.

(5) a) $y'=-6x^2+14x-3$; b) $y'=9x^2-20x-11$; c) $y'=5x^4-4x^3+3x^2-2x$.

(6) a) $y'=1$; b) $y'=\dfrac{\left(1+\cos^2 x\right)tg\,x}{\cos x}$; $y'=-\dfrac{\left(1+\sin^2 x\right)ctg\,x}{\sin x}$. (7) a) $y'=x^2\left(3\ln x+1\right)$; b) $y'=xe^x(2+x)$;

c) $y'=(x)'e^x\ln x+x\cdot\left(e^x\right)'\ln x+xe^x\cdot(\ln x)';\ \ y'=e^x\left(\ln x+x\ln x+1\right)$.

(8) a) $y'=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$; b) $y'=\dfrac{-3x^2-2x+3}{\left(x^2+1\right)^2}$; c) $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$; ç) $y'=-\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}=-\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$.

(9) a) $y'=\dfrac{2}{x(\ln x+1)^2}$; b) $y'=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$; ç) $y'=\dfrac{1-x}{e^x}$.
a)

(10) $f'(x)=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$; $f'(0)=0$; $f'(1)=\dfrac{2e}{(e+1)^2}$, kurse $f'(-1)=\dfrac{2e^{-1}}{\left(e^{-1}+1\right)^2}=\dfrac{\frac{2}{e}}{\frac{(1+e)^2}{e^2}}=\dfrac{2e}{(e+1)^2}$, d.m.th. $f'(1)=f'(-1)$.

4 (1) a) $y'=4\left(3x^2+5x-1\right)^3\left(3x^2+5x-1\right)'=4\left(3x^2+5x-1\right)^3\cdot(6x+5)$; b) $y'=-132x^3\left(5-3x^4\right)^{10}$;

c) $y'=2b(a+bx)$; ç) $y'=-15bx^2\left(a-bx^3\right)^4$.

(2) a) $y'=(2x-3)(6x-15)$; b) $y'=3(3x-2)\left(x^2+3x-4\right)^2\left(8x^2+11x-14\right)$. (3) a) $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$; b) $y'=\dfrac{2ax^2}{\sqrt[3]{\left(4+2ax^3\right)^2}}$.

(4) a) $y'=2-\dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$; b) $y'=2x+\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. (5) a) $y'=\dfrac{6x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$; b) $y'=\dfrac{x+2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

(6) a) $h(x)=f(g(x))=3-2g(x)=3-2\cdot x^2$; $f'(x)=-4x$; b) $h(x)=g(f(x))=(f(x))^2=(3-2x)^2$; $h'(x)=-4(3-2x)$;
c) $h(x)=g(p(x))=(\sin x)^2=\sin^2 x$, $h'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$;
ç) $h(x)=p(f(x))=\sin(f(x))=\sin(3-2x)$; $h'(x)=-2\cos(3-2x)$.

7 a) $h(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)-1}=\frac{1}{\cos x-1}$, $D_h: x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. $h'(x)=\frac{-\sin x}{(\cos x-1)^2}$;

b) $h(x)=f(p(x))=\frac{1}{p(x)-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$, $x\in R^+\setminus\{1\}$, $h'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$;

c) $h(x)=p(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\cos x}$; $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, $h'(x)=-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$;

ç) $h(x)=p(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x>1$, $h'(x)=-\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)'}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=-\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$.

8 a) $y'=e^{2x-3}(2x-3)'=2e^{2x-3}$; b) $y'=\frac{\left(x^2-3x\right)'}{x^2-3x}=\frac{2x-3}{x^2-3x}$; c) $y'=\frac{(\sin x)'}{\sin x}=\operatorname{ctg} x$.

9 a) $y'=3\cos 3x$; b) $y'=3\sin^2 x\cdot\cos x$; c) $y'=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$.

10 a) $y'=-\sin\sqrt{a}x\left(\sqrt{ax}\right)'=-\sin\sqrt{ax}\cdot\frac{1}{2\sqrt{ax}}\cdot(ax)'=-\frac{a}{2\sqrt{ax}}\sin\sqrt{ax}$; b) $y'=-2\sin 2x\cdot\operatorname{tg}^2 x+\cos 2x\cdot 2\operatorname{tg} x\cdot(\operatorname{tg} x)'$;

$y'=-2\sin 2x\cdot\operatorname{tg}^2 x+\cos 2x\cdot 2\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$, pas zbatimit të tranformacioneve përkatëse trigonometrike kemi

$y'=\frac{\operatorname{tg} x\left(2\cos 2x-\sin^2 2x\right)}{\cos^2 x}$. 11 a) $y=\sqrt[5]{x-x^3}$; $y'=\frac{-\left(1-3x^2\right)}{5\sqrt[5]{\left(x-x^3\right)^4}}$; b) $y'=\pm\frac{1}{2\sqrt{x}}$; c) $y'=\pm\frac{2-x}{\sqrt{x^2-4x+3}}$; ç) $y'=\frac{1-4x+2x^2}{(1-x)^2}$.

5 1 a) $y'=10x-3$, $y''=10$; b) $y'=4\cdot\frac{1}{12}x^3-\frac{7}{6}3x^2$, $y''=x^2-7x$.

2 a) $y'=\frac{4-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$, $y''=\frac{\left(4-4x^2\right)'\left(1+x^2\right)^2-\left(4-4x^2\right)\left(\left(1+x^2\right)^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^4}$; $y''=\frac{-8x^2\left(1+x^2\right)^2-\left(4-4x^2\right)2\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}$;

$y''=\frac{\left(1+x^2\right)(-8x)\left(x+x^3+2+2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{\left(1+x^2\right)(-8x)\left(1+x^2\right)(x+2)}{\left(1+x^2\right)^4}$; $y''=\frac{-8x(x+2)}{\left(1+x^2\right)^2}$; б) $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; $y''=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$.

3 a) $y'=\ln x+1$; $y''=\frac{1}{x}$; b) $y'=(1+2x)e^{2x}$; $y''=(4+4x)e^{2x}$.

4 a) $y'=\frac{2}{(1-x)^2}$; $y''=-\frac{2\left((1-x)^2\right)'}{\left((1-x)^2\right)^2}=\frac{4}{(1-x)^3}$; b) $y'=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$; $y''=\frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$;

c) $y'=(1+\cos x)e^{\sin x}$; $y''=\left(\cos^2 x+\cos x-\sin x\right)e^{\sin x}$.

5 a) $y=\pm\sqrt{25-x^2}$; $y'=\pm\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$, $y''=-\frac{25}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^3}}$; b) $y''=\frac{4}{(1-x)^3}$.

(6) a) $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y'' = 6x - 6$; $y'(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12$; b) për $y = 8$ kemi $8 = \dfrac{x^2}{x-2}$; $8x - 16 = x^2$; $x = 4$.

$y' = \dfrac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$; $y'' = \dfrac{8}{(x-2)^3}$; $y''_{(4)} = \dfrac{8}{(4-2)^3} = 1$. (7) $f'(x) = 2ax + b$; $f''(x) = 2a$.

Prej këtu vijon $2a = 4$, $a = 2$. Prej $f'(2) = 2 \cdot 2 \cdot 3 + b = 9$; $b = -3$ dhe $f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + c = 7$, $c = 2$.

6

(1) a) $f(x_0 + \Delta x) = f(1{,}1) = 1{,}1^2 - 1{,}1 + 1 = 1{,}11$, $f(x_0) = f(x_0) = f(1) = 1$; $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x) = 1{,}11 - 1 = 0{,}11$, $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx = (2x_0 - 1)dx = (2 \cdot 1 - 1)0{,}1 = 0{,}1$; b) $\Delta f = +3{,}88$; $df(-2) = f'(-2) \cdot dx = 4{,}2$;

c) $\Delta f = -0{,}0871$; $df = -0{,}0872$. (2) a) $dy = -\dfrac{1}{x^2}dx$; b) $dy = -\dfrac{3}{x^4}dx$; c) $dy = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

(3) a) $dy = \dfrac{(1+2x^2)dx}{\sqrt{1+x^2}}$; b) $dy = x(2\ln x + 1)dx$; c) $dy = \sin 2x\,dx$. (4) $\Delta f = 0{,}1$; $dy = 0{,}1025$, pra $|\Delta f - dy| = 0{,}0025$.

(5) a) $df = 6x\,dx$, $f(1 - 0{,}01) = f(x_0) + f'(x)dx = f(0{,}99) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 \cdot (-0{,}01) = 3 - 0{,}06 = 2{,}94$;

b) $df = -\dfrac{1}{x}dx$; $f(1 + 0{,}01) = f(1) + df(1) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

(6) a) $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)dx$; $x_0 = 64$, $dx = 1$, pra $\sqrt[3]{64+1} = \sqrt[3]{64} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = 4 + \dfrac{1}{48} = 4{,}0208$; b) 2,96.

(7) a) $\sin(x_0 + \Delta x) = \sin x_0 + (\sin x_0)'dx$; $x_0 = 30^0$, $\Delta x = 1^0 = \dfrac{\pi}{180^0}$; $\sin 31^0 = \sin 30^0 + \cos 30^0 \cdot \dfrac{\pi}{180^0} = \dfrac{1}{2} + 0{,}01511 = 0{,}51511$;

b) $\ln(x_0 + \Delta x) = \ln x_0 + \dfrac{1}{x_0}dx$; $x_0 = 1$, $dx = -0{,}1$; $\ln 9 = 1 + \dfrac{1}{1} \cdot (-0{,}1) = -0{,}1$.

(8) Prej $S = a^2$ vijon $dS = 2a\,da$, kurse $\Delta S = (a + \Delta a)^2 - a^2 = (2a + \Delta a)\Delta a$. Për a=50m dhe dx=0,01 kemi:

$S = 50^2 = 2500m^2$. $dS = 2 \cdot 50 \cdot 0{,}01 = 1m^2$, kurse $\Delta S = (2 \cdot 50 + 0{,}01)0{,}01 = 1{,}0001m^2$. Prej $S(a + \Delta a) - S(a) = \Delta S$ vijon $S(a + \Delta x) = S(a) + \Delta S$ d.m.th. $S = (2500 + 1{,}0001)m^2$; $S(a + \Delta a) = S(a) + dS$, d.m.th. $S = (2500 + 1{,}00)m^2$.

Gabimi më saktë i syprinës së njehsuar është $\Delta S = 1{,}0001\ m^2$. Nëse në vend të ΔS zëvëndësojmë dS=1,00m^2, ndryshimi është $0{,}0001\,\text{m}^2 = 1\text{cm}^2$, pra me saktësi të madhe mund të meret se gabimi është $dS = 1m^2$.

(9) DS=0,4001, dS=0,4, pra $\Delta S = 0{,}4001$, $ds = 0{,}4$, pra $|\Delta S - ds| = 0{,}0001$.

(10) Gabimi i saktë është S=62,9256, kurse dS=62,8cm^2, pra nëse në vend të ΔS zëvëndësojmë dS, gabimi është

$62{,}9256 - 62{,}8 = 0{,}1256\,\text{cm}^2 = 12{,}56\,\text{mm}^2$.

7

(1) $y' = 10x - 2$; a) $k = y'(0) = -2$; b) $k = 8$; c) $k = -22$; ç) $y' = 10 \cdot \dfrac{1}{5} - 2 = 0$.

(2) $y' = -\sin x$; a) $k = -\sin 0 = 0$; b) $k = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; c) $k = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (3) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; a) $k = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2} = 2$; b) $k = 2$; c) $k = 4$.

(4) $y' = 3x^2$, $3x_0^2 = 3$; $x_0^2 = 1$; $x = \pm 1$, kurse $x = 3 \cdot (\pm 1)^3 = \pm 3$. Pikat e kërkuara janë $A(1,3)$ dhe $B(-1,-3)$.

(5) $y' = 1-2x$, a) $\alpha = 0$, pra $k = tg\,0^0 = 1-2x, x = \frac{1}{2}$, kurse $y = -3 + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2, y = -\frac{11}{4}, A(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4})$;

b) $\alpha=45^0$, kurse $k=1$ pra $x=0$; $y=-3$ d.m.th. $A(0,-3)$.

(6) a) $y' = 2x-3; k = tg\frac{\pi}{4} = 1; 2x-3 = 1; x = 2$, kurse $y = 2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 0$. Pika e kërkuar është $A(2,0)$; b) $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

(7) $y' = \frac{1}{x}$, prej kushtit $k_1 = k_2$, kemi $(x-1)' = \frac{1}{x}$, d.m.th. $\frac{1}{x} = 1; x = 1$, kurse $y = \ln 1 = 0$, $A(1,0)$;

b) $(2x-3)' = \frac{1}{x}; 2 = \frac{1}{x}, x = 2$, kurse $y = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$; $A(2, -\ln 2)$.

(8) Prej kushtit $k_1 = k_2$ vijon $(x^3 - x - 1)' = (3x^2 - 4x + 1)'$ d.m.th. $3x^2 - 1 = 6x - 4$, pra $x = 1$. Pikat e kërkuara abshisa $x = 1$. Pika që shtrihet në lakore $y = x^3 - x - 1$ është $y = 1^3 - 1 - 1$, d.m.th. $A(1,-1)$, kurse në lakoren $y = 3x^2 - 4x + 1$ është $y = 3\cdot 12 - 4 + 1 = 0$ pra $B(1,0)$.

(9) Prej $x + 3y - 4 = 0$ vijon $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, kurse prej kushtit për normalizëm $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ vijon

$1 + (x^3 - 3x^2 + 3x + 3)' \cdot \left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right)' = 0$, d.m.th. $1 + (3x^2 - 6x + 3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$. Prej këtu vijon $1 - x^2 + 2x - 1 = 0$; $x_1 = 0$ dhe $x_2 = 2$. Ordinata të pikës prej lakores janë $y_1=3$ dhe $y_2=5$, pra pikat e kërkuara janë $A(0,3)$; $B(2,5)$.

(10) Këndi nën të cilin priten lakoret të dy funksioneve është kënd që e formojnë tangjentat e lakores në pikëprerjet e tyre.

a) pikëprerja është zgjidhje e sistemit $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$. Pikëprerjet janë $A(0,0)$ dhe $B(1,1)$.

Derivati i funksionit është $y' = 2x$ dhe $2y \cdot y' = 1$, d.m.th. $y' = \frac{1}{2y}$. Në pikën A, $k_1 = 2\cdot 0 = 0$, tangjenta është paralele me boshtin x, kurse për lakoren e dytë k nuk ekziston, domethënë tangjenta është normale me boshtin y, pra këndi ndërmjet tyre është 90^0. Në pikën B, $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$, pra sipas formulës $tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$ kemi $tg\varphi = -\frac{3}{4}$, kurse $\varphi = arctg\frac{3}{4} = 36^0 52'$;

b) Zgjidhja e sistemit $\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases}$ është $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Për $k = 0$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, për $k = 1$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $B\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Pasi këndet nën të cilët priten lakoret janë të barabartë në të gjitha pikëprerjet, mjafton të njehsohet këndi në pikën A. Për funksionin $y = \sin x$ kemi $y' = \cos x$, $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Për funksionin $y = \cos x$ kemi $y' = -\sin x$, $k_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, pra $tg\,\varphi = -2\sqrt{2}$, kurse $\varphi = arctg\,2\sqrt{2} = 70^0 31' 43''$.

8 (1) Për $x = 1$, $y = 1^4 - 1^2 + 3 = 3$; $M(1,3)$. $f'(x) = 4x^3 - 2x$, pra $k = f'(1) = 4\cdot 1^3 - 2\cdot 1 = 3$.

$t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$; $t: 2x - y + 1 = 0$; $n: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$; $x + 2y - 7 = 0$.

(2) $y' = \frac{5-3x}{3\sqrt{3-x}}$. a) $k_1 = f'(-1) = 2$; $t: y = 2x + 2$, $n: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Gjatësia e tangjentës dhe e normales. b) $t: x + 2y - 4 = 0$, gjatësia e tangjentës është $3\sqrt{5}$; $n: 2x - y - 1$, gjatësia e normales është $1{,}5\cdot\sqrt{5}$.

(3) Pikëprerjet me boshtin x janë $A(2,0)$ dhe $B(-2,0)$, kurse $y'=-2x$. Në pikën $A(2,0)$, $k=-4$, kurse $t: y=-4x+8$; $n: x-4y-2=0$. Në pikën $B: k=4$; $t: y=4x+8$; $n: x+4y+2=0$.

(4) Për $x=0$, $y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3$. Tangjentën e kërkojmë në pikën $A(0,3)$. Funksioni është dhënë në formën implicite pra $y=\sqrt{9-4x-x^2}$, kurse $y'=-\dfrac{2+x}{\sqrt{9-4x-x^2}}$. $y'(0)=-\dfrac{5}{3}$, pra $t: 5x+3y-9=0$, kurse $n: 3x+5y+15=0$.

(5) Pikëprerjet janë $A(0,1)$, $B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, $y'=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Në pikën $A(0,1)$, $k=f'(0)=0$, pra $t: y=1$. $A(0,1), k=f'(0)=0$, pra $t: y=1$. Pasi tangjenta është paralele me boshtin x, normalja është paralele me boshtin y, d.m.th. $x=0$, vet boshti y. Në pikën $B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, $k=f'(1)=-\dfrac{1}{2}$, pra $t: x+2y-2=0$, kurse $n: 4x-2y-3=0$.

(6) Pasi $k=f'(x_0)=4$, duhet ta gjejmë pikën. Prej $f'(x_0)=3x^2-4x_0$ kemi $3x_0^2-4x_0=4$. Zgjidhjet e barazimit janë $x_0=2$ dhe $x_0=-\dfrac{2}{3}$ kurse për $x_0=2, y_0=2^3-2\cdot 2^2=0$, pra $A(2,0)$. Për $x=-\dfrac{2}{3}$, $y_0=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3-2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2=-\dfrac{32}{27}$, pra $B\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{32}{27}\right)$. Në pikën A, $t: y \quad x-8$; $n: x+4y-2=0$, kurse në B, $t: 108x-27y-70=0$; $n: 27x+108y+146=0$.

(7) Simetralja e kuadrantit të dytë është $y=-x$, kurse prej kushtit për paralelizëm kemi $\left(x^2+4x+3\right)'=(-x)'$, d.m.th. $2x+4=-1$, $x=-\dfrac{5}{2}$, kurse $y=\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2-4\left(-\dfrac{5}{2}\right)+3=-\dfrac{3}{4}$. Koeficienti i drejtimit të tangjentës është $k=(-x)'=-1$, pra tangjenta është $4x+4y+13=0$. Gjate... angjen... është $t=\left|\dfrac{-\dfrac{3}{4}}{-1}\right|\cdot\sqrt{1+(-1)^2}=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$.

(8) Prej $2x+4y-3=0$, vijon $k=-\dfrac{\ }{2}$ ...urse $k_t=2$, kurse $y'=\dfrac{7x}{\sqrt{14x^2-28}}$, kemi $\dfrac{7x}{\sqrt{14x^2-28}}=2$.

Vijon $x=4$, pra pika takuese e tangjentës është $A(4,7)$, kurse tangjenta është $y=2x-1$. Normalja është $n: y-7=-\dfrac{1}{2}(x-4)$; $x+2y-28=0$. Gjatësia e normales është $n=7\sqrt{1+(2)^2}=7\sqrt{5}$.

(9) $f'(x_0)=\phi'(x_0)$ d.m.th. $\left(x^3-2x^2\right)'=\left(2x^2+3x-\right.$ $\quad -4x=4x+3$, $3x^2-8x-3=0$, $x_1=3$, $x_2=-\dfrac{1}{3}$. Lakores $y=x^3-2x^2$; për $x_1=3$; $y_1=9$; $A_1(3,9)$, kurse për $x_2=-\dfrac{1}{3}, y_2=-\dfrac{7}{27}, A\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{7}{27}\right)$, pra tangjentat janë t_1: $15x-y-36=0$; t_2: $405x-27y+2=0$, lakores $y=2x^2+3x-2$, pikat takuese janë $B(3,25)$ dhe $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{25}{9}\right)$, t_1: $15x-y-20=0$; t_2: $\quad y+70=0$.

(10) $y'=-\dfrac{x_0}{y_0}$ d.m.th. $k_t \quad \dfrac{\ }{y_0}$, pra t: $y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$. Pas rregullimit fitojmë $y\,y_0-y_0^2=-x\,x_0+x_0^2$, d.m.th. $x\,x_0+y\,y_0=x_0^2+y_0^2=r^2$.

9 (1) a) $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \frac{2(t+\Delta t)^2-3(t+\Delta t)+4-(2t^2-3t+4)}{\Delta t}$;

$v_m = 4t + 2\Delta t - 3 = 4\cdot 5 + 2\Delta t - 3 = 17 + 2\Delta t$. Për $\Delta t = 1$, $v_m = 17 + 2\cdot 1 = 19$; $\Delta t = 0{,}5$, $v_m = 18$; $\Delta t = 0{,}1$, $v_m = 17{,}2$; $\Delta t = 0{,}01$, $v_m = 17{,}02\ m/s$. b) $v(5) = (2t^2 - 3t + 4)' = 4t - 3 = 4\cdot 5 - 3 = 17$. c) $v = (4t-3)$m/s.

(2) a) $t = 0$, $s = 1$m; $v(0) = 3$; $a(0) = -4\,\text{m/s}^2$; b) $t = 2$, $s = 2^3 - 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 = 7$m; $v(2) = s'(2) = 7$m/s; $a(2) = s''(2) = 6\cdot 2 - 4 = 8\,\text{m/s}^2$.

(3) a) $v = 58$m/s; $a = 46\,\text{m/s}^2$; b) $v = 12{,}5$m/s; $a = 5{,}5\,\text{m/s}^2$; c) $v = 6\cos 2t$; $v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$m/s, $a = v' = 12(-\sin 2t) = -12\sin 2t = -12\cdot\sin\frac{\pi}{3} = -6\sqrt{3}\,\text{m/s}^2$.

(4) $v = s'(t) = t^2 - 4t + 3$; $a = s''(t) = 2t - 4$. Trupi e ndërron kahen në momentin kur $v = 0$, d.m.th. $t^2 - 4t + 3 = 0$ ose $t_1 = 1$; $t_2 = 3$.

(5) $v = t^2 - 3t + 1$, per $v = 5$ vijon $t^2 - 3t + 1 = 5$; $t_1 = 4$, $t_2 = -1$. Zgjidhja është $t = 4$ sekonda.

(6) $v = s'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$; $a = s''(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)' = -\frac{1}{4\sqrt{t^3}} = -\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^3$, d.m.th. $a = -2\cdot v^3$.

(7) a) $V_{(10)} = 40\,\ell$; b) $v = 0$; $120 + 2t - t^2 = 0$; $t = 12 sek.$ kurse $Q_{max} = 120\cdot 12 + 12^2 - \frac{1}{3}\cdot 12^3 = 1008\,\ell$

(8) $T_{(5)} = (0{,}5t^2 - 2t)' = t - 2 = 5 - 2 = 3$, d.m.th.. 3 shkallë në sekondë.

(9) $v = 6t + 1$; $v_{(4)} = 6\cdot 4 + 1 = 25$, kurse $E = \frac{10\cdot 25^2}{2} = 3125$ xhul. (10) $a = y''(t) = ae^t + be^{-t}$.

10 (1) a) Zvogëlohet për $x \in (-\infty, +\infty)$; b) rritet për $x \in (-\infty, +\infty)$; c) rritet për $x > 0$, kurse zvogëlohet për $x < 0$; ç) zvogëlohet për çdo x.

(2) a) rritet për $x < \frac{1}{2}$, zvogëlohet për $x > \frac{1}{2}$; b) $f'(x) = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$.

Zerot e derivatit të parë janë $0, 2$ ose -2, kurse lakorja e shenjës së derivatit është

$f'(x) > 0$ per $x \in (-2,0)\cup(2,+\infty)$, funksioni rritet; $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty,-2)\cup(0,2)$, funksioni zvogëlohet;

c) rritet për $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-1,1)$.

(3) a) rritet për çdo $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$; b) rrite për $x \in (-1,1)$, zvogëlohet për $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(4) a) $f'(x) = \frac{(2x-x^2)'}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$. $f'(x) > 0$; $1 - x > 0$; $x \in (-\infty,1)$. Pasi funksioni është përkuifizaar për $x \in [0,2]$, kemi $x \in (-\infty,1)\cap[0,2] = [0,1)$. Për $x = 0$, $f'(x)$ nuk ekziston, domethënë funksioni rritet për $x \in (0,1)$. $f'(x) < 0$ për $x \in (1,+\infty)$, pra funksioni zvogëlohet për $x \in [0,2]\cap(1,+\infty) = (1,2)$. Ke kujdes $f'(2)$ nuk ekziston; b) rritet për $x \in (2,+\infty)$, zvogëlohet për $x \in (-\infty,1)$.

(5) a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+x^2)' = \frac{x}{1+x^2}$. Rritet për $x > 0$, kurse zvogëlohet për $x < 0$.

b) $f'(x)=e^{-x^2}+x\cdot e^{-x^2}\cdot\left(-x^2\right)'=e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$. Rritet në $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, zvogëlohet në $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$

(6) a) Rritet në $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, zvogëlohet në $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

b) $f'(x)=2\cos x(\cos x)'=-\sin 2x$. Rritet në $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right)$, zvogëlohet në $\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

(7) a) $f'(x)=-1+\sin x$, pasi $-1\le\sin x\le 1$, vijon $f'(x)\le 0$, domethënë funksioni monotonisht zvogëlohet në gjithë intervalin nëse, në disa pika $f'(x)=0$, përkatësisht për $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $f'(x)=0$. (8) a) zvog.; b) zvog.

11

(1) a) $f'(x)=-\frac{1}{3}<0$, zvogëlohet për $x\in\mathbb{R}$. Nuk ka vlera ekstreme; b) $f'(x)=2x-5=0$ për $x=\frac{5}{2}$.

$f''(x)=2>0$, funksioni ka minimum për $x=\frac{5}{2}$, $y_{min}=-5\frac{1}{4}$; c) $f'(x)=-4x^3+4x; f'(x)=0$ për $x=0; x=1$ dhe $x=-1$.

$f''(x)=-12x+4$, sa $x=0$, $f''(0)=4>0$, $y_{min}=-3$; për $x=1$, $f''(1)=-12<0$, $y_{max}=-2$; për

(2) a) maksimum në $(1,5)$, minimum $(2,4)$. b) $f'(x)=3(x-2)^2>0$ për çdo $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, funksioni gradualisht rritet. Nuk ka as maksimum, as minimum.

(3) a) minimumi në $(0,0);(2,0)$, maksimum në $(1,1)$. b) $y'=x^2(4x-3)$, $y'=0$ për $x=0; x=\frac{3}{4}$.

$y''=36x(2x-1)$; $x=\frac{3}{4}$; $y''\left(\frac{3}{4}\right)>0$, ka minimum në $\left(\frac{3}{4},-\frac{27}{256}\right)$. Për $x=0$, $y''(0)=0$. Me derivatin e dytë nuk mund të konstatojmë çka ka funksioni për $x=0$, do ta shqyrtojmë shenjën e $y'(x)$ në rrethinën e pikës $x=0$.

Për shembull për $x=0{,}1$, $y'(0{,}1)=0{,}1^2(4\cdot 0{,}1-3)<0$, kurse për $x=-0{,}1$, $y'(-0{,}1)=\left(-0{,}1^2\right)(4\cdot(-0{,}1)-3)=0{,}01(-3{,}4)<0$.

D.m.th., domethënë derivati i parë në rrethinën e pikës $x=0$ nuk e ndërron shenjën, d.m.th. për $x=0$ funksioni nuk ka vlerë ekstreme.

(4) a) minimum në $(0,0)$, maksimum në $\left(2,4e^{-2}\right)$. b) minimum në $(0,2)$. (5) a) minimum në $\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$; b) maksimum në $\left(e,e^{-1}\right)$.

(6) a) $f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $f'(x)=0$ për $x=\pm 1$; $f''(x)=\frac{-2x\left(x^2+x+1\right)-2\left(1+x^2\right)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^3}$;

$f''(1)=\frac{-2\cdot 1\cdot 3-0}{3^3}=-\frac{2}{9}<0$, ka minimum në $\left(1,\frac{1}{3}\right)$; $f''(-1)=\frac{-2(-1)\cdot 1-0}{1^3}=2>0$, ka minimum në $(-1,-1)$.

b) minimum në $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$.

(7) a) Maksimumi në $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, minimumi në $\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$; b) maksimumi në $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{2}-\pi}{6}\right)$, minimume $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi-3\sqrt{2}}{6}\right)$.

(8) Le të jetë $f(x)=ax^2+bx+c$; $f'(x)=2ax+b$. Për $x=2$, $f'(2)=2a\cdot 2+b=0$, $4a+b=0$.

Për $x=2$, $f(2)=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=4a+2b+c=-1$ dhe për $x=1$, $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0$; Zgjidhja e sistemit

$\begin{cases}4a+b=0\\4a+2b+c=-1\\a+b+c=0\end{cases}$ është $a=1$, $b=-4$, $c=3$, trinomi është $f(x)=x^2-4x+3$.

(9) $f'(x)=3ax^2+2bx-36$; $f'(3)=27a+6b-36=0$ dhe $f'(-2)=12a-4b-36=0$. Zgjidhja e sistemit të dhënë është $a=2$, $b=-3$, pra $f(x)=2x^3-3x^2-36x-1$. Provo se $f''(3)>0$, a $f''(-2)<0$.

(10) a) $f'(x)=4x^3-16x$; $f'(x)=0$, për $x=0$ dhe $x=\pm2$ $f''(x)=12x^2-16$, $f''(0)=-16<0$ ka maksimum $f_{max}=f(0)=3$. $f''(\pm2)=32>0$ ka minimume $f_{min}=f(2)=f(-2)=-13$. Vlera e funksionit në kufijtë e intervalit puthiten me minimumin. Vlera më e madhe është $f(0)=3$, kurse më e vogla $f(\pm2)=-13$.

b) Vlera më e madhe është maksimumi $f(0)=2$. Vlera më e vogël arrinë në kufijtë e intervalit, d.m.th. $f'(\pm2)=0$.

12

(1) $x=y=15$. (2) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-x}$; $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{a-x}}$, $f'(x)=0$ për $x=\dfrac{a}{2}$, kurse $f_{max}\left(\dfrac{a}{2}\right)=2\sqrt{\dfrac{a}{2}}$.

(3) Brinjët e drejtkëndëshit le të jenë, fig. 1, x dhe y. $S(x,y)=x\cdot y$

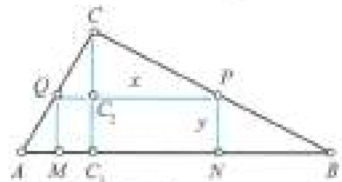


fig. 1

Prej ngjashmërisë së trekëndëshave ABC dhe QPC vijon $\overline{AB}:\overline{QP}=\overline{CC_1}:\overline{CC_2}$, d.m.th.

$10:x=4:(4-x); y=\dfrac{20-2x}{5}; S=\dfrac{x(20-2x)}{5}=\dfrac{20x-2x^2}{5}$,

$S'(x)=\dfrac{20-4x}{5}$, $S'(x)=0$ për $x=5$. $S''(x)=-\dfrac{4}{5}<0$, syprina është maksimale, pra $x=5cm$, $y=2cm$, $S=5\cdot2=10cm^2$.

(4) Le të jetë x brinja e katrorit e cila duhet të prebet prej çdo kulmi të kartuçit. Baza e kutisë është drejtkëndësh me brinjë 32-2x dhe 20-2x kurse lartësia x. $V(x)=(30-2x)(20-2x)\cdot x=4x^3-104x^2+640x$.

$V'(x)=12x^2-208x+640$; $V'(x)=0$; $x=4$; $x=13\frac{1}{3}$. Zgjidhja është $x=13\frac{1}{3}$ e pa mundshme, $x=4$ është zgjidhje.

$V''(x)=24x-208$; $V''(4)=-112<0$; pra $V_{max}(4)=1152cm^3$.

(5) Nëse baza e trekëndëshit është x, atëherë krahu $b=\dfrac{a-x}{2}$, kurse lartësia $h=\sqrt{\left(\dfrac{a-x}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$, pra

$S=\dfrac{1}{2}x\cdot h=\dfrac{1}{2}x\sqrt{\left(\dfrac{a-x}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{4}\sqrt{a^2x^2-2ax^3}$. Syprina S do të jetë maksimale, nëse $f(x)=a^2x^2-2ax^3$ ka vlerë maksimale. $f'(x)=2ax(a-3x)$; $f'(x2)=0$ për $x=0$ dhe $x=\dfrac{a}{3}$. $f''(x)=2a^2\text{-}12ax$, për $x=\dfrac{a}{3}$; $f''\left(\dfrac{a}{3}\right)=-2a^2<0$.

Syprina është maksimale nëse brinja e trekëndëshit është $\dfrac{a}{3}$, d.m.th. trekëndëshi i kërkuar është barabrinjës.

(6) Le të jetë x gjysma e bazës më të vogël, kurse y lartësia e trapezit fig. 2.

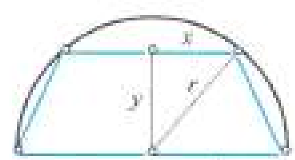


fig. 2

$S=\dfrac{(2r+2x)}{2}=(r+x)\cdot y$; $y=\sqrt{r^2-x^2}$; $S=(r+x)\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{(r+x)^3(r-x)}$.

$x=\dfrac{r}{2}$; $2x=r$ dhe $y=\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

(7) Baza e trekëndëshit të brendashkruar le të jetë paralele me bazën e madhe, kurse maja në kulmin e bazës më të vogël të elipsës. Nëse $A(x, y)$, atëherë baza $\overline{AB}_1 = 2x$, lartësia

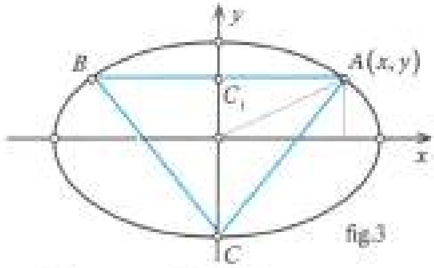


fig.3

$\overline{CC_1} = b + y$, pra $S = \frac{2x \cdot (b+y)}{2} = x(b+y)$. Prej barazimit të elipsës vijon $x^2 = b\frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2 2); x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$, pra $S = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \cdot (b+y)$, d.m.th.

$S = \frac{a}{b}\sqrt{(b+y)^3 \cdot (b-y)}$. Syprina e trekëndëshit është maksimale nëse

$f(y) = (b+y)^3(b-y)$ ka vlerë maksimale. Prej këtu vijon $2x = a\sqrt{3}; h = b + y = \frac{3b}{2}; S_{max} = \frac{3ab\sqrt{3}}{4}$.

(8) Prej $72\pi = \pi r^2 + \pi r s$ vijon $s = \frac{72 - r^2}{r}$, prej $H^2 = s^2 - r^2$ kemi $H = \frac{12}{r}\sqrt{36 - r^2}$, pra $V(r) = 4\pi r\sqrt{36 - r^2}$ ose $V(r) = 4\pi\sqrt{36r^2 - r^4}$. Vëllimi ka maksimum nëse $f(r) = 36r^2 - r^4$ ka maksimum, $r = 3\sqrt{2}; H = 12$, kurse V_{max} $72\pi cm^3$.

(9) $r^2 = 12^2 - H^2, V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{1}{3}\pi(144 - H^2) \cdot H$, d.m.th $V(H) = \frac{1}{3}\pi(144H - H^3)$, prej $V'(H) = 0$, vijon $H = 4\sqrt{3}$, kurse $r = 4\sqrt{6}$.

(10) Le të jetë r rreze e bazës, kurse h lartësia e cilindrit.

Prej ngjashmërisë së trekëndëshave OBS dhe $O_1B_1S_1$ fig. 4 kemi

$R : r = H : (H - h), h = \frac{H(R - r)}{R}; V(r) = \pi r^2 h = \frac{\pi H}{R}(r^2 R - r^3), V'(r) = 0$.

Për $r = \frac{2R}{3}; h = \frac{H}{3}$, kurse $V_{max} = \frac{4\pi R^2 H}{27}$.

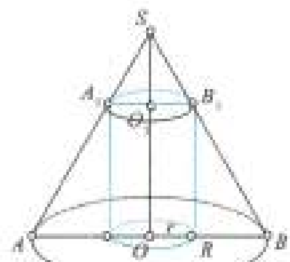


fig. 4

(11) $F'(\varphi) = \frac{-kG(-\sin\varphi + k\cos\varphi)}{(\cos\varphi + k\sin\varphi)^2}$; $F'(\varphi) = 0$, nëse $-\sin\varphi + k\cos\varphi = 0$, d.m.th $\varphi = arctg k$, $F''(\varphi) = \frac{kG + 2(\sin\varphi - k\cos\varphi)}{(\cos\varphi + k\sin\varphi)^3}$.

Për $\varphi = arc\,tg\,k$, $\sin\varphi - k\cos\varphi = 0$ pra $F''(\varphi) > 0$, domethënë forca ka maksimumin nëse $\varphi = arc\,tg\,k$.

13 (1) a) $y' = 6x - 30x^2$; $y'' = 6 - 60x$, $y'' > 0$; $6 - 60x > 0$. Për $x \in (-\infty, \frac{1}{10})$, funksioni është konkav. $y'' < 0$ për $x \in \left(\frac{1}{10}, +\infty\right)$ funksioni është konveks; b) $y'' = 24x(2x - 1)$; $y'' > 0$, për $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ funksioni është konkav, $y'' < 0$, për $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ funksioni është konveks.

(2) a) $y'' = -\frac{2}{x^3}$. Konkav për $x \in (-\infty, 0)$, konveks për $x \in (0, +\infty)$. b) Për $x \in (-1, 1)$ konkav, kurse për $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ - konveks.

(3) a) $f''(x) = \frac{2}{(1 - x^2)^3}$. $f''(x) \neq 0$, për çdo $x \in D_f$. Nuk ka pika të lakimit. b) $f''(x) = \frac{-8x}{(1 + x^2)^3}$, $f''(x) = 0$, nëse $x = 0$. Për $x = 0$ $f(x) = 0$, pra pika $A(0,0)$ është pika e lakimit.

4 a) $f''(x)=\frac{4}{(2-x)^3}$; $f''(x)\neq 0$ për çdo $x\in D_f$. Nuk ka pika të lakimit. Konkav për $x\in(-\infty,2)$, konveks për $x\in(2,+\infty)$.

b) $f''(x)=\frac{4(3x^2-2)}{(x^2+x)^3}$; $f''(x)=0$ për $x\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; $f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{3}{4}$. $f''(x)>0$ për $3x^2-2>0$, $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2}{3}},+\infty\right)$

konkav, $f''(x)<0$ për $x\in\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ konveks. Pikat $P_1\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{3}{4}\right)$ dhe $P_2\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{3}{4}\right)$ janë pikat e lakimit.

5 a) $f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $f''(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $f''(x)=0$ për $x+\frac{\pi}{3}=0$ dhe $x+\frac{\pi}{3}=\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}$ dhe $x=\frac{2\pi}{3}$.

$f''(x)>0$ nëse $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<0$, d.m.th. $\pi<x+\frac{\pi}{3}<2\pi$, $x\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$, $f''(x)<0$ nëse $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0$, d.m.th. $0<x+\frac{\pi}{3}<\pi$, $x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$

Për $x=-\frac{\pi}{3}$, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$; për $x=\frac{2\pi}{3}$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$. Pikat e lakimit $P_1\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$; $P_2\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$.

Konkav e në $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$, konveks në $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$. b) $f''(x)=-4\cos 2x$. Pika të lakimit janë $P_1\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, $P_2\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $P_3\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$, $P_4\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$. Konkave në $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$. Konveks në $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4},7\pi\right)$.

6 a) $f''(x)=\left(2+4x^2\right)e^{x^2}$. $f''(x)>0$ për çdo numër real. Konkav në $\mathbb{R}$. b) $f''(x)=(x-2)e^{-x}$; $f''(x)=0$ për $x=2$. $f''(x)>0$ për $x>2$; konkav për $x\in(2,+\infty)$; $f''(x)<0$ për $x<2$ konveks për $x\in(-\infty,2)$. Pika të lakimit janë $x=2$, $f(2)=2e^{-2}$ janë $P\left(2,2e^{-2}\right)$.

7 a) $f'(x)=1\cdot\ln^2 x+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\ln^2 x+2\ln x$. $f''(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1)\cdot$ $f''(x)=0$, $\ln x+1=0$, $\ln x=-1$, $x=e^{-1}$.

$f''(x)>0$, nëse $\ln x>-1, x>e^{-1}$; $f''(x)>0$, nëse $\ln x<-1$, $0<x<e^{-1}$. Funksioni është konkav për $x\in\left(e^{-1},+\infty\right)$, konveks për $x\in\left(0,e^{-1}\right)$. Për $x=e^{-1}$, $f\left(e^{-1}\right)=e^{-1}\cdot\left(\ln\left(e^{-1}\right)\right)^2=e^{-1}$. Pika të lakimit $P\left(e^{-1},e^{-1}\right)$.

b) $f''(x)=\frac{1}{x}$. Nuk ka pika të lakimit, $f''(x)>0$ për çdo $x>0$, d.m.th.. funksioni është konkav për $x\in(0,+\infty)$.

14 1 a) $D_f: x\in\mathbb{R}$; nuk është as çift, as tek. Nuk ka zero, prerje me boshtin y $(0,2)$, nuk ka asimptota. Ka minimum $y=\frac{7}{8}$ për $x=\frac{3}{4}$. Për $x>\frac{3}{4}$ rritet për $x<\frac{3}{4}$ zvogëlohet.Nuka ka pika të lakimit, funksioni është konkav, fig. 1.

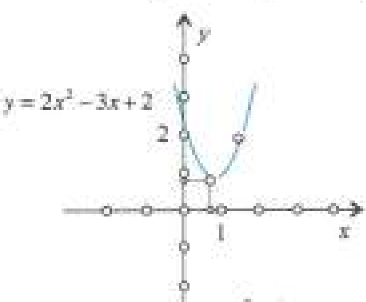


fig. 1

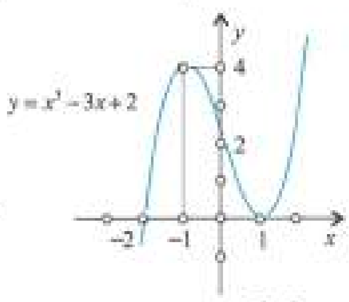


fig. 2

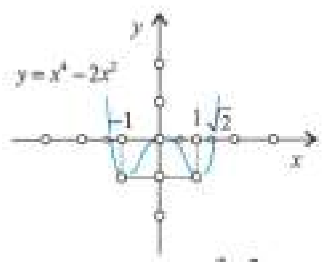


fig. 3

b) I përkufizuar për çdo numër real, d.m.th. $D_f: x \in \mathbb{R}$. Zero të funksionit janë $x=-2$ dhe $x=1$. Prerja me boshtin y $(0,2)$. Për $x=-1$ ka maksimumе $y_{max}=4$. Për $x=1$ ka minimum $y_{min}=0$, d.m.th. $(-1,4)_{max}$; $(1,0)_{min}$. Pika e lakimit $(0,2)$, fig. 2. c) I përkufizuar për $x\in(-\infty,+\infty)$. Funksioni është çift, pra grafiku është simetrik në lidhje me boshtin y . Zerot janë $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$; $(0,0)$, $(0,\sqrt{-2};)$, $(0,\sqrt{2})$. Prerja me boshtin y $(0,0)$. Vlerat ekstreme janë $x=0$ ka maksimum, $y_{max}=0$. Për $x=\pm1$ ka minimum, $y_{min}=-1$. $(0,0)_{max}$; $(\pm1,-1)_{min}$. Pika të lakimit janë $P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{5}{9}\right)$ dhe $P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{5}{9}\right)$, konveks në $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, konkav në $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$, fig. 3.

2 a) I përkufizuar për $x\neq-\frac{1}{2}$, $D_f: x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Nuk është as çift as tek, prerja me boshtin x $(-2,0)$, prerja me boshtin y $(0,2)$. Drejtëza $y=\frac{1}{2}$ është asimptotë horizontale, kurse $x=-\frac{1}{2}$ asimptota vertikale. Kur $x\to-\frac{1}{2}$ prej majtas $y\to-\infty$, kurse kur $x\to-\frac{1}{2}$ prej djathtas $y\to+\infty$. Nuk ka vlera ekstreme, monotonisht zvogëlohet për çdo $x\in D_f$. Nuk ka pika të lakimit, konveks në $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, konkav në $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$, fig. 4.

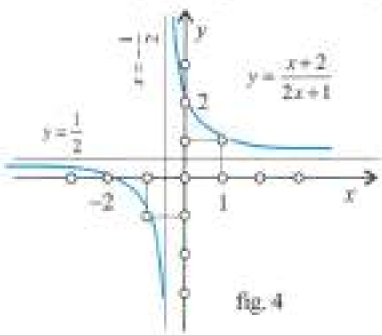


fig. 4

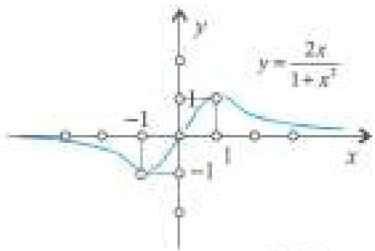


fig. 5

b) $D_f: x\in(-\infty,+\infty)$. Funksioni është tek, grafiku është simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave. Pika $(0,0)$ pikëprerja me boshtet. Boshti x është asimptotë horizontale. Në $(1,1)$ maksimum, në $(-1,-1)$ minimum, rritet në $(-1,1)$, zvogëlohet në $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Pikat e lakimit $P_1\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2(0,0)$, $P_3\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Konveks në $(-\infty,\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$; konkav në $x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$, fig. 5.

3 a) I përkufizuar për $4-x^2\neq0$, d.m.th. $D_f: x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. Funksioni është tek, grafiku është simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave. Pika $(0,0)$ është pikëprerja me boshtet e koordinatave. Drejtëzat $x=-2$ dhe $x=2$ janë asimptota vertikale. Kur $x\to-2$ prej majtas $y\to+\infty$, nëse $x\to-2$ prej djathtas $y\to-\infty$; Kur $x\to2$ prej majtas $y\to+\infty$, nëse $x\to2$ prej djathtas $y\to-\infty$. Boshti x është asimptotë horizontale. Kur $x\to0, y\to-0$, nëse $x\to-\infty, y\to+0$.

$f'(x)=\frac{16+4x^2}{(4-x^2)^2}$. Funksioni nuk ka vlera ekstreme. $f'(x)>0$ për çdo $x\in D_f$, monotonisht rritet. Pika $P_1(0,0)$ është pikë e lakimit. Konveks në $(-2,0)\cup(2,+\infty)$, konkav në $(-\infty,-2)\cup(0,2)$, fig. 6.

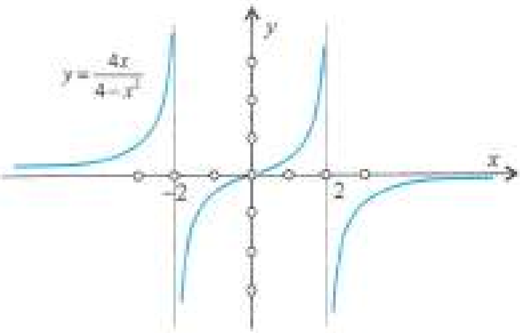


fig. 6

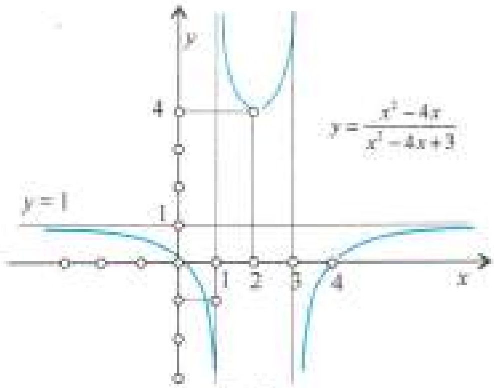


fig. 7

b) I përkufizuar për $x^2-4x+3\neq 0$, $D_f: x\in \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$. Nuk është çift, nuk është tek. x=0 dhe x=4 janë zero të funksionit. Drejtëza $y=1$ është asimptotë horizontale, kurse x=1 dhe x=3 janë asomptota vertikale. Për $x=2$ ka minimum $y_{min}=4$. Për $x>2$ rritet, për $x<2$ zvogëlohet. Nuk ka pika të lakimit, fig. 7.

4 a) $D_f: x\in \mathbb{R}$. Nuk është as çift, nuk është as tek. Për $x=0$, $y=0$. Boshti x është asimptotë horizontale.

Kur $x\to-\infty$, $y\to 0$, nëse $x\to+\infty$, $y\to+\infty$, $y>0$, për çdo $x\neq 0$. Për $x=0$ ka minimum, y_{min}=0, për x=-2 ka maksimum, $y_{max}=4e^{-2}$. Rritet në $(-\infty,-2)$, $(0,+\infty)$; zvogëlohet në $(-2,0)$, fig. 8.

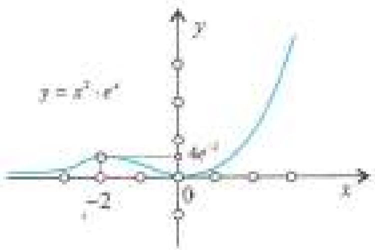


fig. 8

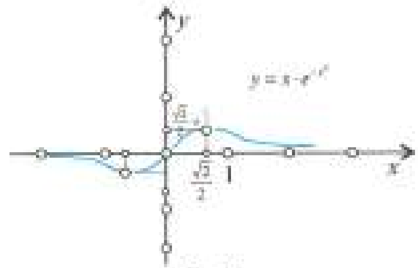


fig. 9

b) $D_f: x\in(-\infty,+\infty)$. Zero e funksionit është $x=0$, është tek. $y=0$ (boshti x) është asimptotë horizontale.

Vlera ekstreme për $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ka maksimum $y_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, për $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ minimum $y_{min}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}$.

Pika të lakimit $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=0$ dhe $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, fig. 9.

5 a) $D_f: x\in(0,\infty)$. Zero e funksionit është x=1 d.m.th. (1,0). Vlera ekstreme për $x=e^{-1}$ ka minimum $y_{min}=-e^{-1}$. Nuk ka pika të lakimit. Konkav për çdo $x\in D_f$. Zvogëlohet në $(0,e^{-1})$; Rritet në $(e^{-1},+\infty)$, fig. 10.

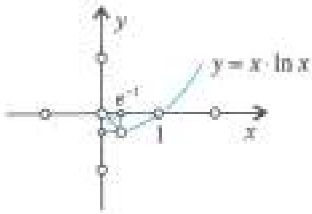


fig. 10

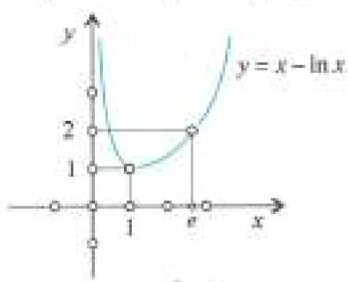


fig. 11

b) $D_f: x\in(0,+\infty)$; Nuk ka zero, nuk është as çift, as tek. $y>0$ për $x\in D_f$; drejtëza $x=0$ është asimptotë vertikale, kur $x\to 0$ përkatësisht $y\to+\infty$. Për $x=1$ ka minimum $y_{min}=1$; për $x\in(0,1)$ zvogëlohet. Për $x\in(1,\infty)$ rritet; konkav për $x\in(0,+\infty)$, fig. 11.

(6) a) $D_f: x\in\mathbb{R}$; Zero të funksionit $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; Periodik me periodë 2π; vlera ekstreme.

$y'=\sin x-\cos x;\ y'=0, tgx=1; x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$, për $x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi, y''(x)>0$.

Funksioni ka minimum $y_{min}=-2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$; Për $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ y''(x)<0$, funksioni ka maksimum $y_{max}=\sqrt{2}$; Pika të lakimit janë $P\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},0\right)$, d.m.th. zerot janë pikat e lakimit, fig. 12.

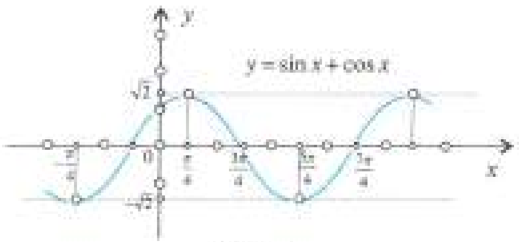


fig. 12

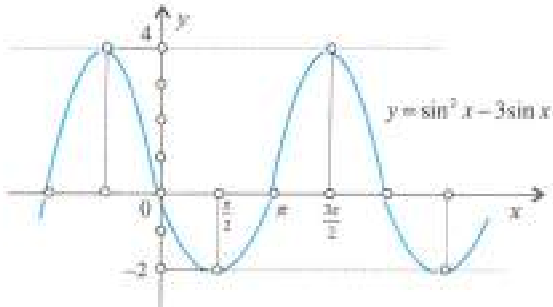


fig. 13

b) $D_f: x\in\mathbb{R}$; Zero të funksionit janë $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; Periodik me periodë 2π;

Për $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ka minimum, $y_{min}=-2$; Za $x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ka maksimum $y_{max}=4$, fig. 13.

TEMA 4 GJASA

1 (1) $=1/6;\ =1/2$. (2) $=1/13;\ =1/4$.

2 (1) $\Omega=\{$(stema, 1), (stema, 2), (stema, 3), (stema, 4), (stema, 5), (stema, 6), (koka, koka), (koka, stema)$\}$.

(2) $\Omega=\{(1),(3),(5),(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(2,4,1),(2,4,3),(2,4,5),(4,2,1),(4,2,3),(4,2,5)\}$.

(3) $\Omega=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$, ku x është numri i pikave në zarin e parë, y – numri i pikave në zarin e dytë, kurse z – numri i pikave i zarit të tretë.

$A=\{(x,y,z)\mid x,y\in\{2,4,6\}, z\in\{1,3,5\}\}$, $B=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,3,5\}\}$,
$C=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\}, x+y+z\in\{4,6,8,10,12,14,16,18\}\}$,
$D=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\}, x=y\}=\{(x,x,z)\mid x,z\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$,
$E=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,3,4,6\}\}$, $F=\overline{E}$.

(4) Nëse 0 paraqet dështimin, kurse 1 të qëlluarën, atëherë:
$\Omega = \{(1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0)\}$;
$A = \{(1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$;
$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 0)\}$; $C = \{(1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1)\}$.

(5) $B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $C = A_1A_2$, $D = A_1A_2A_3$, $E = A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$, $F = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,
$G = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$, $H = \overline{D}$.

3

(1) Prej kushteve të detyrës $P(A) = 0,95$, $P(B) = 0,98$, kurse $P(AB) = 0,94$. Ngjarja $C = A \cup B$, pra

$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,99$. Ngjarja $D = \overline{A}\overline{B} = \overline{A \cup B}$, që vijon prej ligjeve të De Morganit.
Prej këtu, $P(\overline{D}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,99 = 0,01$.

(2) Bashkësia e ngjarjeve elementare $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, ku E_i është paraqitur numri i, $i = 1, 2, 3, 4$. Poashtu, $p_i = Ki$, ku K është koeficienti i proporcionalitetit të cilin do ta caktojmë prej kushtit $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.
Kështu, $K(1 + 2 + 3 + 4) = 1$, d.m.th. $K = 1/10$, kurse $p_i = i/10$, $i = 1,2,3,4$. $P(A) = p_1 + p_2 = 0,3$. $P(B) = p_2 + p_4 = 0,6$.

(3) $\Omega = \{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$. Numri i elementeve në Ω është $\overline{V}_6^2 = 6^2 = 36$. Nëse A është ngjarje: shuma e pikave të dy zareve është 10, atëherë $A = \{(4, 6),(5, 5),(6, 4)\}$, d.m.th. ekzistojnë 3 mundësi të volitshme për paraqitjen e ngjarjes A. Prej këtu,

$P(A) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

(4) Numri i përgjithshëm i zgjedhjeve të mundshme të 3 prej 5 gjatësive të ofruara, është $C_5^3 = 10$. Nëse A është ngjarja: Prej tre segmentëve të zgjedhur të formohet trekëndësh, atëherë A do të paraqitet nëse shuma e gjatësive të çfarëdo dy segmentëve është më i madh prej gjatësisë së segmentit të tretë. Prej këtu, mundësi të volitshme ka gjithsej 3. Ato janë: $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 7, 9\}$, $\{4, 7, 9\}$. Fitojmë se $P(A) = \dfrac{3}{10} = 0,3$.

(5) Fituese janë lotot me numrin rendor 20, 40, 60, 80, 100, pra $P(A) = \dfrac{5}{100} = 0,05$. Gjasën e ngjarjes B do ta përcaktojmë nëpërmjet gjasës të ngjarjes së kundërtë $\overline{B}$: asnjëra prej dy lotove të blera nuk është fituese. $P(\overline{B}) = \dfrac{C_{95}^2}{C_{100}^2} = 0,902$. Tani, $P(B) = 0,098$.

(6) $C_{15}^3 = 455$ është numri i përgjithshëm i mundësive prej 15 llambave të zgjedhen 3 të cilat janë thyer. Le të jetë A ngjarje: llamba të thyera gjithsej ka 180 W. Mundësi të volitshme për paraqitjen e ngjarjes A janë këto: janë thyer 2 llamba prej nga 40 W dhe 1 llambë prej 100 W; ose 3 llamba prej nga 60 W. Prej këtu, mundësi të volitshme për paraqitjen e ngjarjes A ka gjithsej $C_7^2C_3^1 + C_5^3 = 73$.
Kështu, $P(A) = \dfrac{73}{455} = 0,16$.

4

(1) T'i shënojmë ngjarjet: A: numri i tërhequr është çift, B: numri i tërhequr është i plotëpjesëtueshëm me 3.

Sipas përkufizimit për gjasën kushtore fitojmë se $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{3/20}{6/20} = \dfrac{1}{2}$.

(2) Le të jetë A_i: shenjtari e ka qëlluar shënjestrën në gjuajtjen i, $i = 1, 2$. Prej kushteve të detyrës $P(A_1) = 2/3$, kurse

$P(A_1A_2) = 0,5$. Kërkohet gjasa kushtore $P(A_2 \mid A_1) = \dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \dfrac{3}{4}$.

3 Shënojmë:

B: parapaguesi nuk e ka qëlluar shifrën e haruar në dy përpjekjet e para, po e ka qëlluar në përpjekjen e tretë.

A_i: parapaguesi e ka qëlluar shifrën e haruar në përpjekjen i, $i = 1, 2, \ldots$

Të vërejmë se ngjarjet A_i nuk janë të varaura. Përkatësisht, me çdo shifër jo të qëlluar zvogëlohet numri i shifrave prej të cilëve zgjedhet.

Ngjarja B do të paraqitet, nëse parapaguesi nuk e qëllon shifrën në përpjekjen e parë dhe të dytë, por në të tretën, d.m.th. $B = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

Për gjasën e kësaj ngjarje kemi: $P(B) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(A_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)$.

a)Shifra e haruar është njëra prej shifrave 0, 1, 2,…, 10. Gjasa që ta dështon shifrën në përpjekjen e parë është $P(\overline{A}_1) = \dfrac{9}{10}$, pasi 9 shifra janë gabimisht. Përkatësisht, $P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) = \dfrac{8}{9}$, pasi nëse ka dështuar në përpjekjen e parë, ngelin edhe 9 shifra prej të cilave 8 janë gabim. Në fund, $P(A_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2) = \dfrac{1}{8}$, pas dy përpjekjeve të dështuara, ngelin edhe 8 shifra të mundshme, por vetëm njëra është e vërteta.

Me zëvendësimin e formulës paraprake, për gjasën e ngjarjes B fitohet $P(B)=1/10$.

b)Parapaguesi din se shifra është çift, pra zgjedh prej shifrave 0, 2, 4, 6, 8. Në të njëjtën mënyrë sikurse paraprakisht

$$P(B) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{5}.$$

4 $P(MATEMATIKA) = P(M)\cdot P(A \mid M)\cdot P(T \mid MA)\cdot P(E \mid MAT)\cdot P(M \mid MATE)\cdot P(A \mid MATEM)\cdot$
$\cdot P(T \mid MATEMA)\cdot P(I \mid MATEMAT)\cdot P(K \mid MATEMATI)\cdot P(A \mid MATEMATIK)$

$$= \frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{151200}.$$

5 T'i shënojmë këto ngjarje: A_i: lojtari A tërheq top të bardh në tërheqjen i-të tij,

B_i: Lojtari B tërheq top të bardh në tërheqjen i-të tij, i=1,2,…

D: fiton lojtari A.

Ngjarjet A_i dhe B_i janë ngjarje të varura, pasi çdo tërheqje varet prej ecurisë paraprake (topat e tërhequr kthehen në kuti).

Ngjarja $D = A_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1A_2$, kurse për gjasën e tij fitohet kjo:

$$P(D) = P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1 \mid \overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1\overline{B}_1)$$
$$= \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{35}.$$

6 Ngjarjet A_i dhe B_i le të përkufizohen në të njëjtën mënyrë sikurse te detyra 5. Por, tani, pas çdo tërheqje, topi i tërhequr kthehet në kuti, pra çdo eksperiment pasardhës kryhet në kushte të njëjta sikurse paraprakët. Kjo do të thotë se çdo ecuri pasardhëse nuk do të varet prej paraardhësve, d.m.th. A_i dhe B_i janë ngjarje të pavarura dhe $P(A_i) = P(B_i) = 4/7$, por le të jetë C ngjarje: do të fiton lojtari B më së shumti 3 tërheqje të veta. Atëherë $C = \overline{A}_1B_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{A}_3B_3$. Për shkak të pavarësisë së ngjarjeve A_i dhe B_i, i=1,2,…, për gjasën B fitohet: $P(B) = P(\overline{A}_1)P(B_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(B_2) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{B}_2)P(\overline{A}_3)P(B_3)$

$$= \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7} + \left(\frac{3}{7}\right)^3\cdot\frac{4}{7} + \left(\frac{3}{7}\right)^5\cdot\frac{4}{7} = 0,298.$$

5 ① $p=0{,}4$. Udhëzim: p caktohet prej kushtit $0{,}3+0{,}2+p+0{,}1=1$.
$P\{1<X<5\}=P\{X=2\}+P\{X=4\}=0{,}2+0{,}4=0{,}6$.

② Bashkësia e ngjarjeve elementare është kjo $\Omega=\{(1),(3),(2,1),(2,3),(4,1),(4,3),(2,4,1),(2,4,3),(4,2,1),(4,2,3)\}$.

Prej këtu caktohen shumat e mundshme të numrave të tërhequr prej topave të tërhequr. Ato janë: 1, 3, 5, 7, 9, përkatësisht bashkësia e vlerave të ndryshores së rastit X është $R_X=\{1,3,5,7,9\}$. I shënojmë ngjarjet
A_i: është tërhequr top me numrin i, $i=1,2,3,4$.

Tani, ngjarja $\{X=1\}$ do të paraqitet, nëse në tërheqjen e parë fitohet numri 1, pra gjasa e tij është $P\{X=1\}=P\{A_1\}=\dfrac{1}{4}$. Duke i pasur parasysh ngjarjet elementare, ngjarja $\{X=3\}$ do të paraqitet, nëse në tërheqjen e parë fitohet numri 3 ose nëse në tërheqjen e parë fitohet numri 2, kurse në tërheqjen e dytë numri 1. Prej këtu gjasa e tij është

$$P\{X=3\}=P(A_3+A_2A_1)=P(A_3)+P(A_2)P(A_1\mid A_2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Duke vazhduar në të njëjtën mënyrë, fitojmë: $P\{X=5\}=P(A_2A_3+A_4A_1)=P(A_2)P(A_3\mid A_2)+P(A_4)P(A_1\mid A_4)=\dfrac{1}{6}$;

$$P\{X=7\}=P(A_4A_3+A_2A_4A_1+A_4A_2A_1)=\frac{1}{6};\quad P\{X=9\}=P(A_2A_4A_3+A_4A_2A_3)=\frac{1}{12}.$$

Kështu, $X:\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1/4 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/12\end{pmatrix}$.

Ndryshorja e rastit Y pranon vlera prej bashkësisë $R_Y=\{1,2,3\}$. Për caktimin e gjasave përkatëse i shënojmë ngjarjet B_i: në tërheqjen i do të fitohet numër tek, $i=1,2,3$.
Atëherë, ngjarja $\{Y=1\}$ do të paraqitet, nësei në tërheqjen e parë fitohet numër tek, pra gjasa e tij është $P\{Y=1\}=P(B_1)=2/4=1/2$.

Ngjarja $\{Y=2\}$ do të paraqitet, nëse në tërheqjen e parë fitohet numër çift, kurse në të dytën numër tek, pra

$$P\{Y=2\}=P(\overline{B}_1B_2)=P(\overline{B}_1)P(B_2\mid\overline{B}_1)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Nëse vazhdojmë më tutje, fitojmë: $P\{Y=3\}=P(\overline{B}_1\overline{B}_2B_3)=P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2\mid\overline{B}_1)P(B_3\mid\overline{B}_1\overline{B}_2)=\dfrac{1}{6}$, d.m.th. $Y:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1/6\end{pmatrix}$.

③ $X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$. Udhëzim: Punohet në të njëjtën mënyrë sikurse gjatë përcaktimit të shpërdarjes të ndryshores së rastit Y në detyrën paraprake.

④ $Z:\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\ 1/36 & 2/36 & 3/36 & 4/36 & 5/36 & 6/36 & 5/36 & 4/36 & 3/36 & 2/36 & 1/36\end{pmatrix}$. Udhëzim: Punohet në të njëjtën mënyrë sikurse në detyrën e mësimit paraprak, për shumë të numrave të fituar gjatë hudhjes së tetraedrit.

⑤ Vëre se $X\sim B(4{,}0.51)$. Prandaj, $P\{X=i\}=\dbinom{4}{i}\cdot0{,}51^i\cdot0{,}49^{4-i}$, për $i=0,1,2,3,4$. Kështu,

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0{,}0576 & 0{,}24 & 0{,}3747 & 0{,}26 & 0{,}0677\end{pmatrix}$$

(6) T'i shënojmë ngjarjet A_i :makina i - është prishur gjatë ditës, $i = 1, 2, 3, 4$. Këto janë ngjarje të pavarura dhe $P(A_1) = 0{,}1$, $P(A_2) = 0{,}2$, $P(A_3) = 0{,}09$, kurse $P(A_4) = 0{,}11$. Ndryshorja e rastit X - numri i makinave të prishura gjatë ditës do të pranon vlera prej bashkësisë $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Për vlerat përkatëse fitohet:

$$P\{X = 0\} = P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}89 = 0{,}583128$$

$$P\{X = 1\} = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4) = 0{,}340318$$

$$P\{X = 2\} = P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 + A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4) = 0{,}070178$$

$$P\{X = 3\} = P(A_1A_2A_3\bar{A}_4 + A_1A_2\bar{A}_3A_4 + A_1\bar{A}_2A_3A_4 + \bar{A}_1A_2A_3A_4) = 0{,}006178$$

$$P\{X = 4\} = P(A_1A_2A_3A_4) = 0{,}000198$$

Përfundimisht, $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}583128 & 0{,}340318 & 0{,}070178 & 0{,}006178 & 0{,}000198 \end{pmatrix}$.

6

(1) $EX = 3{,}25$, $DX = 1{,}3875$. (2) $EX = 2{,}644$, $DX = 2{,}049$.

(3) Shënojmë A_i: shenjtari e qëllon shënjestrën në përpjekjen i, $i = 1, 2, 3, 4$. Ngjarjet A_i janë të pavarura dhe $P(A_i) = p = 0{,}8$. Ngjarja e rastit X – numri i shenjtarëve në shënjestër,pranon vlera prej bashkësisë $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$, kurse për gjasat përkatëse fitohet:

$$P\{X = 1\} = P(A_1) = 0{,}8$$

$$P\{X = 2\} = P(\bar{A}_1A_2) = 0{,}16$$

$$P\{X = 3\} = P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = 0{,}032$$

$$P\{X = 4\} = P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = 0{,}008$$

Tani, $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}8 & 0{,}16 & 0{,}032 & 0{,}008 \end{pmatrix}$. Tani, $EX = 1{,}248$, $DX = 0{,}298$.

(4) Le të jetë X numri i pikave në zar, Y – numri i pikave në zarin e dytë . Atëherë X dhe Y kanë shpërdarje të njëjtë, të përcaktuar me:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

dhe X dhe Y janë ndryshore të ngjarjeve të pavarura pasi mundësia e njërit zar ndikon te tjetri dhe anasjelltas. Gjejmë $EX = EY = 3{,}5$, kurse $DX = DY = 35/12$. Me shfrytëzimin e vetive të pritjes matematike dhe disperzionit prej shumës të dy ndryshoreve të ngjarjeve të pavarura të rastit fitohet:

$$E(X+Y) = EX + EY = 7, \; D(X+Y) = DX + DY = 70/12 = 35/6.$$

TEMA 5 STATISTIKA

1 ① Shënimet kuantitative janë: intenziteti i llambës, madhësia (në cm) dhe pesha,kurse kualitative janë: ngjyra dhe mregullshmëria.

② Ekzemplar të mundshëm me madhësi 2 janë: 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 3,2; 3,3; 3,4; 3,5; 4,2; 4,3; 4,4; 4,5; 5,2; 5,3; 5,4; ose 5,5. Vërejtje: me shenjën pikë-presje (;) janë ndarë ekzemplarët e ndryshëm.

③ $y = 11,5$. Y është ndryshore rasti si funksion prej ekzemplarit të rastit, kurse y është numër real, i cili, është në realitet, vlera e ndryshores së rastit Y.

2 ① T'i shënojmë ngjarjet:

A_i: në hudhjen i-të tetraedrit është fituar njëshi, $i = 1, 2, 3$.

Prej kushteve të detyrës është e qartë se ngjarjet A_i janë të pavarura.

Nëse është e saktë hipoteza zero, atëherë $P(A_i) = 1/4$, për $i = 1, 2, 3$. Hipoteza zero do të hudhet, nëse paraqitet ngjarja $A_1A_2A_3$, pra për gjasën për gabimin e tipit të parë fitohet:

$$\alpha = P\{A_1A_2A_3 \mid H_0 \text{ është e saktë}\} = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = (1/4)^3 = 1/64.$$

Nëse është e saktë hipoteza alternative, kurse është jo e saktë hipoteza zero, atëherë hipotezën zero do ta pranojmë, nëse të paktën në një hudhje nuk fitohet njëshi, d.m.th. nëse paraqitet ngjarja $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} = \overline{A_1A_2A_3}$. Poashtu, nëse H_a është e saktë, atëherë $P(A_i) = 1/2$, për $i = 1, 2, 3$. Tani, për gjasën e gabimit të tipit të dytë fitojmë:

$$\beta = P\{\overline{A_1A_2A_3} \mid H_a \text{ është e saktë}\} = 1 - P\{A_1A_2A_3 \mid H_a \text{ është e saktë}\} = 1 - (1/2)^3 = 7/8.$$

Fuqia e testit është $p = 1 - \beta = 1/8$.

3 ① $\phi(2,45) = 0,9929$, $\phi(-2,95) = 0,0016$ dhe $\phi(4,45) = 1$ ② $\phi(-1,44) = 0,0749$ dhe $\phi(0,76) = 0,7764$.

③ $t_{12;\,0,02} = 2,303$, $t_{20;\,0,05} = 1,725$. ④ $\chi^2_{15;0,05} = 24,9958$, $\chi^2_{2;0,025} = 7,37776$.

4 ① Testohet hipoteza zero H_0: $EX = 1800$, përkundër hipotezës alternative H_a: $EX > 1800$, me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0,01$. Shmangëja standarde $\sigma = 100$ është e njohur. Vlera e testit statistik do të jetë:

$u = \dfrac{\overline{x}_{50} - a_0}{\sigma}\sqrt{50} = \dfrac{1850 - 1800}{100}\sqrt{50} = 3,54$. Për $\alpha = 0,01$, domeni kritik është $C = (2,33, \infty)$. Pasi $u = 3,54 \in C$, përfundojmë se hipoteza H_0 hudhet, kurse pranohet H_a, kjo do të thotë se kabllot e rinj janë më të fortë se të vjetrit.

② Nëse për përfaqësues të çdo intervali meret mesi i tij, atëherë fitohet se $\overline{x}_{50} = 1850$. Testohet hipoteza H_0 : $EX = 2000$, përkundër hipotezës alternative H_a : $EX \neq 2000$, me nivelin e rëndësisë $\alpha = 0,05$. Për vlerën e testit të statistikës U fitohet: $u = \dfrac{1850 - 2000}{350}\sqrt{50} = -3,03 \in C = (-\infty, -1,96) \cup (1,96, \infty)$, prej ku vijon se numri mesatar i banorëve në fshatrat në atë regjion është i ndryshueshëm prej 2000.

③ Nëse A është ngjarje: vaksina është e pasuksesshme, atëherë testohet hipoteza zero:

$$H_0: P(A) = 0,09$$

përkundër hipotezës alternative

$$H_a: P(A) < 0,09.$$

Prej 100 pacientëve të vaksinuar, te 5 prej tyre vaksina ka qenë e pasuksesshme, që do të thotë se frekuenca relative e ngjarjes A është $\bar{p}=\frac{5}{100}=0,05$. Vlera e test statistikës U, në rastin konkret, do të jetë

$u=\frac{0,05-0,09}{\sqrt{0,09\cdot 0,91}}\sqrt{100}=-1,4$. Për $\alpha=0,05$, domeni kritik është $C=(-\infty,-1,65)$. Vlera e fituar $u=-1,4\notin C$, prej ku vijon se hipoteza zero hudhet. Domethënë, vaksina e re nuk jep rezultate më të mira prej të vjetrës.

4 Testohet hipoteza H_0: $P(A)=1/6$, përkundër hipotezës alternative H_a: $P(A)\neq 1/6$. Niveli i rëndësisë së testit është 0,05 kurse vlera e testit statistik është $u=\frac{35/180-1/6}{\sqrt{(1/6)\cdot(5/6)}}\sqrt{180}=1\notin C=(-\infty,-1,96)\cup(1,96,\infty)$.

Domethënë, hipoteza zero nuk hudhet.

5 1 Testohet hipoteza H_0: $EX=60$, përkundër hipotezës alternative H_a: $EX<60$, ku disperzioni i shënimit është i panjohur. Prej ekzemplarit të dhënë gjejmë: $\bar{x}_{18}=59,278$, $\bar{s}_{18}^2=9,977$. Shfrytëzohet Test statistika dhe vlera e tij

$t=\frac{\bar{x}_{18}-a_0}{\bar{s}_{18}}\sqrt{18}=\frac{59,289-60}{\sqrt{9,977}}\sqrt{18}=-0,955$. Pasi $t\notin C=(-\infty,-2,567)$ vijon se hipoteza zero nuk hudhet, d.m.th.të ardhurat në hektar në regjionin e pellagonisë janë 60 njësi matëse.

2 Testohet hipoteza zero H_0: $EX=2000$, përkundër hipotezës alternative a) H_a: $EX>2000$; b) H_a: $EX<2000$; c) H_a: $EX\neq 2000$. Disperzioni i shënimit nuk është i njohur, por është i vlerësuar në bazë të ekzemplarit dhe $\bar{s}_{50}^2=200^2$, ndërsa mesi aritmetik i ekzemplarit është $\bar{x}_{50}=1950$. Pasi $n=50>30$, shfrytëzohet U test statistika. Vlera e tij është:

$u=\frac{1950-2000}{200}\sqrt{50}=-1,77$. Domeni kritik do të varet prej hipotezës alternative. a) $u\notin C=(1,65,\ \infty)$, pra H_0 nuk hudhet;

b) $u\in C=(-\infty,-1,65)$, pra H_0 hudhet;

c) $u\notin C=(-\infty,-1,96)\cup(1,96,\infty)$ dhe H_0 nuk hudhet. Përfundimi: pranimi ose hudhja e hipotezës zero varet prej asaj se si është vendosur hipoteza alternative.

3 Testohet hipoteza zero H_0: $EX=25$, përkundër hipotezës alternativeH_a: $EX\neq 25$. Prej ekzemplarit caktohet

$\bar{x}_{25}=24,84$, $\bar{s}_{25}^2=31,56$. Vlera e T statistikatës është $t=\frac{24,84-25}{\sqrt{31,56}}\sqrt{25}=-0,142$.

Poashtu, $t\notin C=(-\infty,-2,492)\cup(\ 2,492,\infty)$, pra H_0 nuk hudhet. Domethënë, dhe numri i thirjeve nëpërmjet centralës mesatarisht është 25 gjatë një ore.

4 Ndryshimet e metodave nuk do të jenë të rëndësishme, nëse vlera e pritjes së tyre është 0. Prandaj testohet hipoteza zero H_0: $EX=0$, përkundër hipotezës alternative H_a: $EX\neq 0$. Gjemë $\bar{x}_{16}=0,75$, $\bar{s}_{16}=1,69$. Vlera e test statstikës është $t=1,77$. Për $\alpha=0,05$, domeni kritk është $C=(-\infty,-2,131)\cup(2,131,\infty)$. $t\notin C$, pra gjatë 5% niveli i rëndësisë, hipoteza zero nuk hudhet. Gjithashtu, hipoteza zero nuk do të hudhet edhe për çdo nivel të rëndësisë, pra edhe për 1%.

6 ① Testohet hipoteza H_0: $DX=8^2$, përkundër alternativës H_a: $DX>8^2$. Në bazë të ekzemplarit përcaktohet se $s_{50}^2=88,64$. Vlera e statistikës χ^2është $\chi^2=\frac{50\cdot 88,64}{64}=69,25$. Domeni kritik është i formës $C=\left(\chi^2_{49;0,025},\infty\right)=\left(71,4202,\infty\right)$. Prej tabelës është lexuar vlera për $\chi^2_{50;0,025}$, pasi ajo është vlera më e afërtë vlerës së kërkuar, prej vlerave të cilat ekzistojnë në Tabelën 3. $\chi^2=69,25\notin C$, pra hipoteza zero nuk hudhet.

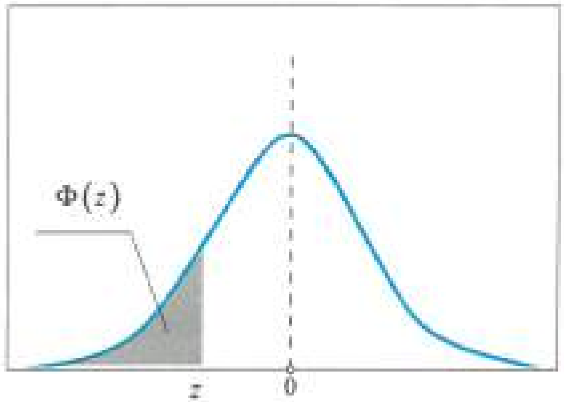
② Testohet hipoteza H_0: $DX=0,25^2$, përkundër alternativës H_a: $DX>0,25^2$. Vlera e statistikës χ^2 është $\chi^2=\frac{20\cdot 0,32^2}{0,25^2}=32,768$. Poashtu, për $\alpha=0,05$, $t\in C=\left(\chi^2_{19;0,05},\infty\right)=\left(30,1435,\infty\right)$, pra hipoteza zero nuk pranohet me 5% niveli i rëndësisë. Për $\alpha=0,01$, $t\notin C=\left(\chi^2_{19;0,01},\infty\right)=\left(36,1908,\infty\right)$, kurse kjo do të thotë se H_0 pranohet me këtë nivel të rëndësisë.

7 ① Vlera e test statistikës $\chi^2=9,575\in C=\left(6,63490,\infty\right)$, pra përcaktimi i votuesëve varet prej gjinisë së kandidatit.

② $\chi^2=20,438\in C=\left(14,4494,\infty\right)$. Interesimi i nxënësve varet prej predispozioneve.

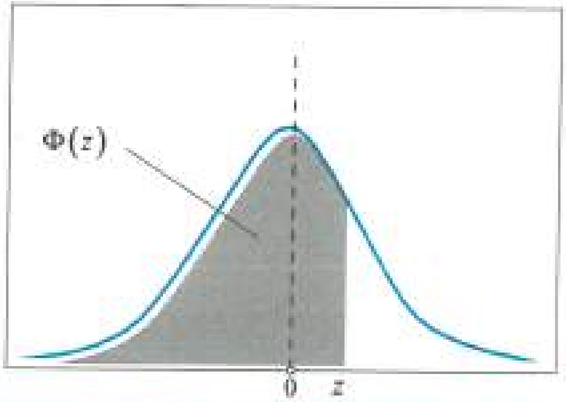
PASQYRA E KONCEPTEVE

TABELA 1 PËR SHPËRDARJEN NORMALE



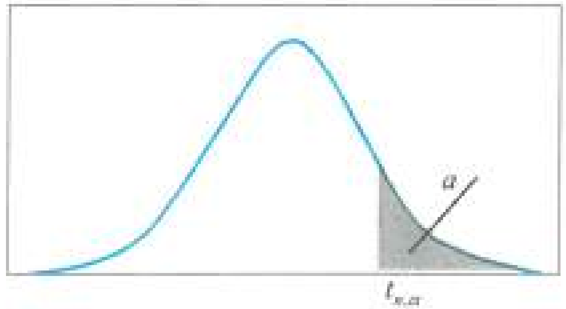
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

TABELA 1 PËR SHPËRDARJEN NORMALE
(vazhdim)



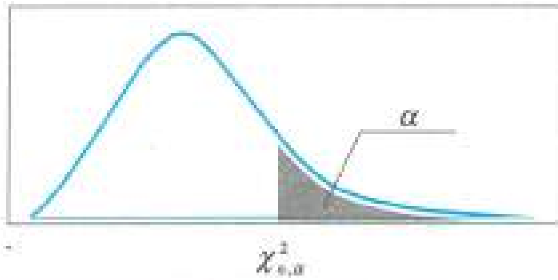
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8089	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	9998

TABELA 2 PËR SHPËRDARJEN *t*



n	α											
	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.104	3.497	4.025	4.437
12	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	.679	.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	.679	.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	.678	.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	.677	.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	.675	.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
∞	.674	.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291

TABELA 3 PËR SHPËRDARJEN χ^2-



n	α				
	0.995	.0990	.0975	0.950	.0900
1	0.0000393	0.0001571	0.0009821	0.0039321	0.0157908
2	0.0100251	0.0201007	0.0506356	0.102587	0.210720
3	0.0717212	0.114832	0.215795	0.351846	0.584375
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.063623
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396
22	8.64272	9.54249.	10.9823	12.3380	14.0415
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581

TABELA 3 PËR SHPËRDARJEN χ^2 –
(vazhdim)

n	α				
	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966
3	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381
4	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602
5	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569
12	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	23.5418	26.2962	28.8485	31.9999	34.2672
17	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
22	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956
23	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585
25	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278
26	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899
27	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449
28	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933
29	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356
30	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321
90	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

PËRMBAJTJA

Autorë: d-r Verica Bakeva
Borivoje Miladinoviq

Recensentë: d-r Naum Cellakoski
Vesna Çervarova-Milenkovska-profesor në SHMSH ,,Pançe Arsovski"-Shkup
Zaim Ademi - profesor në gimnazin ,,Zef Lush Marku"-Shkup

Redaktor: Jovo Stefanovski

Bashkëpunëtorë profesional - konsultantë: Katica Spasovska Binçeva
Trajçe Gjorgijevski

Me vendim të Ministrit të Ministrisë për arsim dhe shkencë të Republikës së Maqedonisë nr. 11-4095/1 prej 29.07.2004 ky libër është lejuar për përdorim në arsimin e mesëm të gjimnazit.

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски" - Скопје

51 (075.3)

БАКЕВА, Верица
Математика : за IV година: гимназиско образование / Верица Бакева, Боривоје Миладиновиќ. - Скопје : Алби, 2004. - 270 стр. : илустр. ; 26 cm

ISBN 9989 - 919 - 60 -7
1. Миладиновиќ, Боривоје

COBISS.MK-ID 58197002

Botues

SHOQATA PËR VEPRIMTARI BOTUESE

„A l b i" Biljana dhe të tjerë sh. p. k. Shkup

rr. „Oslo" nr. 19, Shkup

Drejtor: Biljana Stefanovska

*

d-r Verica Bakeva , Borivoje Miladinoviq

MATEMATIKA

viti IV arsimi i gjimnazit

*

Përktheu

Muzafer Beqiri

*

Përpunimi kompjuterik

Milço Avramoski, Blazhe Tofilovski

*

Asnjë pjesë e këtij libri nuk guxon të shumohet, fotokopjohet dhe në çfarëdo mënyrë të reprodukohet pa lejen me shkrim të botuesit.

Dorëshkrimi është dorëzuar në shtyp në gusht të vitit 2018

Shtypi është kryе në gusht të vitit 2018

Madhësia 270 faqe, formati 21 x 26 cm

Tirazhi: 447 ekzemplarë.

Është shtypur në "NAUMOVSKI" - Shkup