MATEMATIKA

viti II

ARSIMI I GJIMNAZIT

АЛБИ

Borivoje Miladinoviq
Trajçe Gjorgjijevski
Nikola Petreski

MATEMATIKA

viti II

ARSIMI I GJIMNAZIT

2020

PARATHËNËJA

Ky libër do të ndihmon gjatë të mësuarit e matemetikës në vitin e dytë. Të jesh aktiv, këmbëngulës dhe i rregulltë në punë, që do të ndihmon në mënyrë të pavarur të përvetësosh njohuri, që do të sjellë kënaqësi dhe sukses gjatë të mësuarit.

Libri është ndarë në tetë tërësi tematike. Çdo tërësi tematike fillon me numërimin e koncepteve me të cilët do të ballafaqohesh në të mësuarit e përmbajtjes së temës, kurse njësitë mësimore janë të numëruara.

Vëreji shenjat te njësitë mësimore dhe shihe porosinë e tyre.

Kujtohu! Njësitë mësimore fillojnë me diçka që e ke të njohur, por janë të nevojshme për përvetësimin e përmbajtjeve të reja. Duhet të kujtohesh dhe t'i zgjidhish kërkesat.

A, **B**, ... Me këto shenja njësia mësimore është ndarë në pjesë që janë për koceptet e tyre.

1, 2, 3, ... Me shenjat e këtilla janë shënuar aktivitetet, pyetjet dhe detyrat që do t'i zgjidhish në orë në mënyrë të pavarur ose me ndihmën e profesorit tënd. Ato janë te vet njësia mësimore.

- Me shenjën rreth të drejtohet pyetja për të cilën duhet të japish përgjigje.

- Me këtë shenjë është dhënë informacioni për sqarimin e konceptit të ri.

Mbaj mend! Kjo të udhëzon çka është e rëndësishme për konceptin e ri.

Duhet të dish! Kjo shenjë të udhëzon çka duhet të dish, të mbash mend, që të të shërbej gjatë zgjidhjes së detyrave.

Vëre

Në përgjithësi Këto dy porosi të japin në dijeni t'i kushtosh kujdes më të madh.

Ushtrime

Detyra

1, 2, 3, ... Pas çdo njësi mësimore janë dhënë detyra. Me zgjidhje të rregullt dhe në mënyrë të pavarur të këryre detyrave më mirë do ta kuptosh atë që e ke mësuar. Përgjigjet tua krahasoji me përgjigjet që janë dhënë në fund të librit.

Në fund të çdo teme:1, 2, 3, 4, 5 dhe 6 janë dhënë ushtrime kontrolluese tematike të përbëra prej pyetjeve dhe detyrave. Zgjidhi në mënyrë të pavarur, me të cilin do t'i kontrollosh njohuritë e tua nga tema e mësuar.

Ushtrim kontrollues tematik

Kur të hasish në vështirësi gjatë të mësuarit e përmbajtjeve të caktuara, mos u dorëzo, përpiqu përsëri, bëju i vendosur. Do të na gëzon nëse ky libër të mundëson ta duash matematikën dhe të arrish sukses solid.

Nga autorët

TEMA I

FUNSKIONET TRIGONOMETRIKE TË KËNDIT TË NGUSHTË TE TREKËNDËSHI KËNDDREJT

Libri i madh i natyrës është shkruar me gjuhën e matematikës

Galileo Galilej

Në këtë temë për herë të parë do të mësosh për:

- përkufizimet për funksionet trigonometrike funksionet sinus, kosinus, tangens dhe kotangens të këndit të ngushtë;
- varësitë themelore trigonometrike të këndit të njëjtë;
- caktimi i vlerave të funksioneve trigonometrike për këndin e dhënë;
- caktimi i këndit nëse është dhënë vlera e funksionit trigonometrik për atë kënd;
- zgjidhja e trekëndëshit kënddrejt.

1 KONCEPTI PËR KËND. NJËSIA PËR MATJEN E KËNDEVE

Kujtohu!

- Cili është kënd i drejt?
- Vizato kënd të ngushtë, të drejtë dhe të gjerë.

A 1 Në vizatim janë tërhequr gjysmëdrejtëzat OA dhe OB.

- Në sa pjesë është ndarë rrafshi me gjysmëdrejtëzat?

Mbaj mend!

Figura gjeometrike e formuar prej dy gjysmëdrejtëzave me pikë të përbashkët të fillimit dhe pjesës së rrafshit të kufizuar me ato quhet ***kënd***.

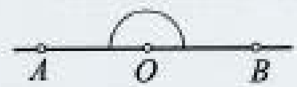
- Gjysmëdrejtëzat OA dhe OB quhen ***krah*** të këndit.
- Fillimi i tyre i përbashkët O quhet ***kulm*** i këndit.
- Për një kënd themi se është ***konveks***, nëse çdo segment pikat e skajshme të të cilit janë krah të këndit, shtrihet në atë kënd.
- Si është këndi AOB?

Kujtohu!

Në vizatim është dhënë një kënd.

- Emërto atë kënd.
- Emërto krahët dhe kulmin e atij këndi.

B 2 Shqyrto këndin AOB në vizatim, mendo dhe përgjigju.

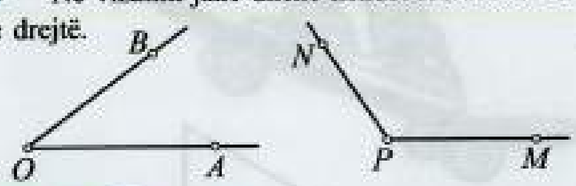


- Çka formojnë krahët e këndit AOB?

Mbaj mend!

Këndi krahët e të cilit formojnë një drejtëz quhet ***kënd shtimtar***.
Gjysma e këndit shtimtar quhet ***kënd i drejtë***.

3 Në vizatim janë dhënë këndet AOB dhe MPN. Krahasoje çdonjërin prej atyre këndeve me këndin e drejtë.



- Cili prej këndeve të dhënë është më i vogël, kurse cili është më i madh se këndi i drejtë?

Vëre dhe mbaj mend

Këndi që është më i vogël se këndi i drejtë quhet ***kënd i ngushtë***.
Këndi që është më i madh se këndi i drejtë, kurse më i vogël se këndi shtimtar, quhet ***kënd i gjerë***.
Dy kënde që kanë kulm të përbashkët dhe një krah të përbashkët, kurse zonat e tyre shtrihen në anë të ndryshme të krahut të përbashkët quhen ***kënde fqinje***.
Dy kënde fqinje që formojnë kënd shtimtar quhen ***kënde të përbrinjshme***.

Kujtohu!

- Deri më tani shpeshherë ke matur madhësi të ndryshme: gjatësi, masë, syprinë, vëllim.

- Cilët janë njësi për matjen e gjatësisë, syprinës dhe vëllimit?
- A mundet këndet të krahasohen sipas madhësisë dhe a mund të maten?

C **4** Shqyrtoje këndmatësin dhe përgjigju:
- Në sa pjesë të barabarta është ndarë këndi i drejtë?

Mbaj mend!

Pjesa e 90 e këndit të drejtë quhet shkallë (shënohet 1^0).
Shkalla është njësi matëse për matjen e këndeve.

Njësitë më të vogla se shkalla për matjen e këndeve janë ***minuta*** (shënohet $1'$) dhe ***sekonda*** (shënohet $1''$). Një shkallë ka gjashtëdhjetë minuta, kurse një minutë ka gjashtëdhjetë sekonda.

Mbaj mend!

$$1^0=60';\ \ 1'=60'';\ \ 1^0=(60\cdot 60)''=3600''.$$

5 Shndërroji këndet në minuta:
a) 5^0; b) $12^0 45'$; c) $45^0 15'$.

6 Shndërroji këndet në sekonda:
a) 4^0; b) $10^0 15'$; c) $20^0 20' 20''$.

Ç Njësi tjera për matjen e këndeve janë ***grada*** dhe ***radiani***.
Grada (g) është e 100 - ta pjesë e këndit të drejtë. Njësi më të vogla se grada janë minuta centizimale ($1'$ ose 1^c) dhe sekonda centizimale ($1''$ ose 1^{cc}), kurse $1g=100^c$ dhe $1^c=100^{cc}$.
Radiani (rad) është kënd qëndror që i përgjigjet harku rrethor, gjatësia e të cilit është e barabartë me rrezen e vijës rrethore.
Nëse me r e shënojmë rrezen e çfarëdo vije rrethore, me ℓ gjatësinë e harkut të asaj vije rrethore, kurse me α kënd qëndror që i takon harkut, atëherë ai kënd i shprehur në radian është:

$$\alpha=\frac{\ell}{r}rad.$$

Për shembull, nëse është α kënd shtimtar, atëherë $\ell=\frac{2r\pi}{2}$, dhe $\alpha=\frac{\frac{2r\pi}{2}}{r}=\pi\, rad$, $\boxed{180^0=\pi\, rad.}$

Kjo barasi e jep lidhjen ndërmjet shkallës dhe radianit, si njësi gjatësie për matjen e këndit. Prej këtu kemi:

$$1rad=\frac{180^0}{\pi}=57,29578^0=57^0 17' 44,8'',\ \text{kurse}\ 1^0=\frac{\pi}{180^0}rad=0,01745\,rad,\ (\pi\approx 3,14159).$$

Në bazë të kësaj, këndin e shprehur në shkallë e shndërrojmë në radian me formulën:

$$\alpha^0=\frac{\pi}{180^0}\cdot\alpha\, rad.$$

7 Këndin e drejtë shprehe në radian.

8 Këndin prej 150^0 shprehe në radian.

Vëreje zgjidhjen:

■ Me zbatimin e formulës $\alpha = \frac{\pi}{180^0} \cdot \alpha\, rad$, kemi: $150^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 150^0\, rad = \frac{5}{6}\pi\, rad = 2,6\, rad$.

9 Shprehe në radian këndi prej $21^0 18' 48''$.

Vëreje zgjidhjen:

■ $21^0 18' 48'' = \frac{\pi}{180^0} \cdot 21,313^0 \approx 0,372\, rad$.

10 Këndet prej 160^0 dhe $32^0 25' 16''$, shprehi në radian.

11 Këndin $\alpha = \frac{4}{3}\pi\, rad$, shprehe në shkallë.

Vëreje zgjidhjen:

■ Prej barasisë $\pi\, rad = 180^0$, vijon se $1 rad = \frac{180^0}{\pi}$, në rastin,

$$\alpha = \frac{4}{3}\pi\, rad = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{180^0}{\pi} = 240^0, \text{ d.m.th. } \alpha = 240^0.$$

12 Shprehe në shkallë këndin $\alpha = 0,73\, rad$.

Vëreje zgjidhjen:

■ $\alpha = 0,73\, rad = 0,73 \cdot \frac{180}{\pi} = 41,8^0 = 41^0 48'$.

13 Këndet $\alpha = \frac{2}{3}\pi\, rad$ dhe $\beta = 0,45\, rad$, shprehi në shkallë.

Duhet të dish!

Çka është kënd?
Për cilin kënd thuhet se është konveks?
Cili kënd është i drejtë, kurse cili shtimtar?
Cili kënd është i ngushtë, kurse cili i gjerë?
Cilët kënde janë fqinje?
Çka është shkalla, grada, radiani?
Të dish këndin e matur në shkallë ta shndërrosh në radian dhe anasjelltas.

Detyra:

1. Cakto këndin e përbrinjshëm të këndit $\alpha = 68^0 25'$.

2. Shndërroji në minuta këndet: a) 8^0; b) $16^0 24'$; c) $46^0 25'$.

3. Shndërroji në radian këndet: a) 15^0; b) 45^0; c) 210^0; ç) 300^0.

4. Shprehi në shkallë këndet e dhëna në radian: a) $\frac{3}{2}\pi\, rad$; b) $\frac{7}{3}\pi\, rad$; c) $\frac{11}{12}\pi\, rad$.

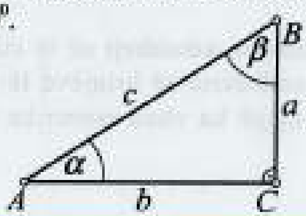
2 PËRKUFIZIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE TË KËNDIT TË NGUSHTË

Kujtohu!

- Cilët janë elementet e trekëndëshit kënddrejt?
- Për cilët dy trekëndësha themi se janë të ngjashëm?
- Si thotë teorema e Pitagorës?

Këndet e ngushtë α dhe β te trekëndëshi kënddrejt janë komplementar, d.m.th.

$\alpha + \beta = 90^0$.



A

Zakonisht, të shënuarit e brinjëve dhe këndeve të trekëndëshit kënddrejt është përkatës me kulmet e tij. Për shembull, këndi te kulmi A shënohet me α, kurse brinja përballë kulmit të njëjtë shënohet me a.

Kateta a është ***katetë e përballtë*** e këndit α, kurse është ***katetë e pranshme*** për këndin β.

- Cila katetë është përball këndit β?

Trekëndëshi kënddrejt është plotësisht i përcaktuar nëse dihen dy elemente të tij, prej të cilëve të paktën njëra është brinjë.

Për trekëndëshin kënddrejt me katete a dhe b dhe hipotenuzë c, vlen teorema e Pitagorës, d.m.th.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

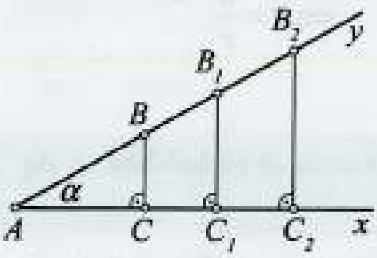
1 Janë dhënë numrat matës të brinjëve të trekëndëshit:

a) 2,3,4; b) 3,4,5; c) 8,9,10; ç) 6,8,10.

Cilët prej tyre janë brinjë të trekëndëshit kënddrejt?

B

Dihet se dy trekëndësha janë të ngjashëm nëse dy kënde të njërit trekëndësh janë të barabartë me dy kënde përkatës të trekëndëshit tjetër. Trekëndëshat kënddrejt janë të ngjashëm, nëse kanë të barabartë nga një kënd të ngushtë.



Brinjët përkatëse të trekëndëshave të ngjashëm janë proporcionale.

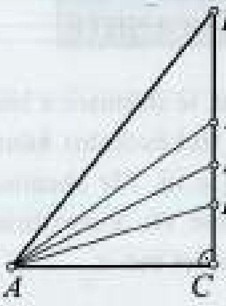
Pikat B, B_1, B_2,... le të shtrihen në krahun Ay nga këndi $\alpha = xAy$. Nëse prej pikave B, B_1, B_2,... tërheqim normale të krahut Ax, do të fitojmë trekëndësha kënddrejt ABC, AB_1C_1, AB_2C_2,... të cilët kanë kënd të përbashkët α.

Trekëndëshat e fituar janë të ngjashëm, pra brinjët e tyre janë proporcionale, d.m.th.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \ldots \quad \text{dhe} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}} = \ldots$$

Vëren, raporti i brinjëve të trekëndëshave kënddrejt të ngjashëm nuk varet prej madhësisë së brinjëve.

T'i shqyrtojmë trekëndëshat kënddrejt ACB, ACB_1, ACB_2,... në vizatim të cilët kanë katetën e njëjtë AC, kurse kënde të ndryshme.



- Si janë raportet

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}};\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}};\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}},\ldots \text{ dhe } \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}};\frac{\overline{B_1C}}{\overline{AC}};\frac{\overline{B_2C}}{\overline{AC}},\ldots?$$

- Është i qartë se raporti i katetës së përballtë të atij këndi dhe katetës së pranshme janë të ndryshëm. Gjithashtu, edhe raporti i katetës së pranshme dhe hipotenuzës për çdonjërin prej atyre trekëndëshave kënddrejt ka vlera të ndryshme.

Domethënë, raporti i dy brinjëve te trekëndëshi kënddrejt ndryshon nëse ndryshon këndi i ngushtë te ai trekëndësh.
Prandaj, për një kënd të njëjtë të ngushtë raporti i brinjëve te trekëndëshi kënddrejt në të cilin gjendet ai kënd gjithmonë ka vlera numerike të barabarta, pavarësisht prej madhësisë së brinjëve të trekëndëshit, ndërsa për këndet e ndryshme të ngushtë ai raport te trekëndëshi i njëjtë ka vlera numerike të ndryshme.

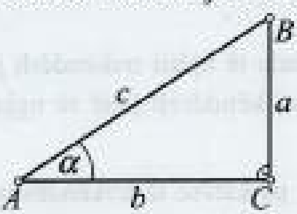
Mbaj mend!

Raporti i dy brinjëve te trekëndëshi kënddrejt është funksion prej këndit të ngushtë te ai trekëndësh.

C Pasi raporti i brinjëve te trekëndëshi kënddrejt varet prej madhësisë të këndit të ngushtë, ato raporte quhen ***funksione trigonometrike***.

(Fjalët greke trigonon-trekëndësh dhe metreo-matje, domethënë matje e trekëndëshit).

Le të jetë dhënë trekëndëshi kënddrejt ABC.



- Raporti $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ quhet sinus prej këndit α dhe shkruhet

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}.$$

Mbaj mend!

P_1: Sinus i këndit të ngushtë te trekëndëshi kënddrejt është raporti i katetës së përballshme të atij këndi dhe hipotenuzës.

- Raporti $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, quhet kosinus prej këndit α dhe shkruhet me formulën $\cos\alpha=\frac{b}{c}$.

Mbaj mend!

P_2: Kosinus i këndit të ngushtë te trekëndëshi kënddrejt është raporti i katetës së pranshme të atij këndi dhe hipotenuzës.

■ Raporti $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, quhet tangens i këndit α dhe shkruhet me formulën $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$.

Mbaj mend!

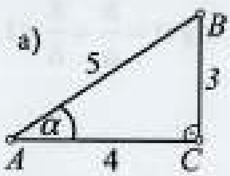
P_3: Tangens i këndit të ngushtë në trekëndëshin kënddrejt është raporti i katetës së përballshme dhe katetës së pranshme të atij këndi.

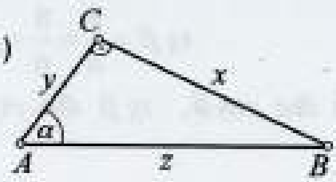
■ Raporti $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, quhet kotangens i këndit α dhe shkruhet me formulën $ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$.

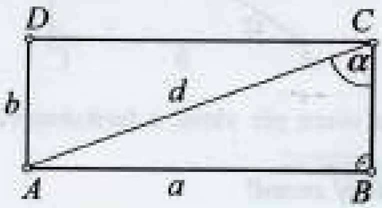
Mbaj mend!

P_4: Kotangens i këndit të ngushtë në trekëndëshin kënddrejt është raporti i katetës së pranshme dhe katetës së përballshme të atij këndi.

2 Cakto vlerat e funksioneve trigonometrike për këndin α, të dhënë në këto vizatime:

a)


b)


c)


Vëre zgjidhjen.

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6;$ $\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8;$ $tg\,\alpha = \frac{3}{4} = 1{,}75;$ $ctg\,\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}333...$

b) $\sin\alpha = \frac{x}{z};$ $\cos\alpha = \frac{y}{z};$ $tg\,\alpha = \frac{x}{y};$ $ctg\,\alpha = \frac{y}{x}.$

c) $\sin\alpha = \frac{a}{d};$ $\cos\alpha = \frac{b}{d};$ $tg\,\alpha = \frac{a}{b};$ $ctg\,\alpha = \frac{b}{a}.$

3 Cakto lartësinë e drurit, i cili në tokë hedh hije me gjatësi $8\,m$, nëse këndi i rrezes së diellit dhe drurit formojnë kënd prej 45^0.

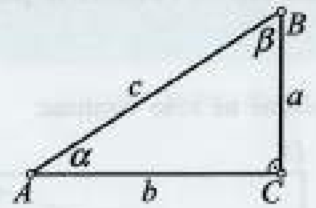
Detyra:

1. Cilat prj barasive janë të vërteta: a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$; b) $\cos\alpha = \sqrt{2}$; c) $tg\,\alpha = \frac{5}{4}$; ç) $ctg\,\alpha = \frac{1}{7}$?
2. Është dhënë trekëndëshi kënddrejt me katete $a = 28$ dhe $b = 96$.. Cakto vlerat e funksioneve trigonometrike, për këndin α.
3. Cakto përafërsisht lartësinë e drurit, hija e të cilit është e gjatës $5\,m$, kurse rrezet e diellit me tokën formojnë kënd prej 50^0.
4. Cakto vlerat e funksioneve trigonometrike prej këndit të ngushtë në trekëndëshin kënddrejt, nëse katetet e tij qëndrojnë si $8:15$.

3 FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE PREJ KËNDEVE KOMPLEMENTARE

Kujtohu!

- Këndet shuma e të cilëve është 90^0 quhen kënde komplementare.
- Cili është këndi komplementar i çdonjërit prej këndeve: $60^0, 15^0, 80^0, 75^0$?
- Këndet e ngushtë në trekëndëshin kënndrejt a janë komplementar?



A 1 Katetet e trekëndëshit kënddrejt janë $a = 6cm$ dhe $b = 8cm$. Cakto vlerën e funksioneve trigonometrike $\sin\alpha$ dhe $\cos\beta$, $tg\,\beta$ dhe $ctg\,\alpha$.

Vëre zgjidhjen.

- Me zbatimin e teoremës së Pitagorës, kemi: $c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100$, pra $c = 10cm$.

- Prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike, vijon:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = 0,6;\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = 0,6;$$

$$tg\,\beta = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = 1,33...;\ ctg\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = 1,33...$$

- Çka vëren për vlerat e funksioneve $\sin\alpha$ dhe $\cos\beta$, $tg\,\beta$ dhe $ctg\,\alpha$?

Mbaj mend!

Nëse këndet α dhe β janë komplementar, pra. $\alpha + \beta = 90^0$, atëherë $\sin\alpha = \cos\beta$ dhe $tg\,\beta = ctg\,\alpha$.

- A janë të sakata barasitë: $\sin\beta = \cos\alpha$ dhe $tg\,\alpha = ctg\,\beta$?
- Vëre, prej $\alpha + \beta = 90^0$, $\beta = 90^0 - \alpha$, kemi:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha; \qquad tg\,(90^0 - \alpha) = ctg\,\alpha;$$

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha. \qquad ctg\,(90^0 - \alpha) = tg\,\alpha.$$

Zakonisht, për funksionin kosinus thuhet se është ***kofunksion*** i sinusit dhe anasjelltas. Gjithashtu për funksionin kotangens thuhet se është kofunksion i tangensit dhe anasjelltas.

Mbaj mend!

Çdo funksion trigonometrik për këndin e dhënë është i barabartë me kofuksionin përkatës të këndit të tij komplementar.

B 2 Funksionet trigonometrike për këndin prej: a) 75^0 dhe b) $46^0 20'$ shprehi me funksione trigonometrike të këndit të tij komplementar.

Vëre zgjidhjen:

- a) $\sin 75^0 = \sin(90^0 - 15^0) = \cos 15, \cos 75^0 = \cos(90^0 - 15^0) = \sin 15^0,$

$$tg\,75^0 = ctg\,15^0,\ ctg\,75^0 = tg\,15^0.$$

b) Nëse $\alpha = 46^0 20'$, atëherë $\beta = 89^0 60' - 46^0 20' = 43^0 40'$; $\sin 46^0 20' = \cos 43^0 40'$, $\cos 46^0 20' = \sin 43^0 40'$, $tg\, 46^0 20' = ctg\, 43^0 40'$, $ctg\, 46^0 20' = tg\, 43^0 40'$.

3 Cakto këndin e ngushtë α, nëse: a) $\sin(\alpha - 10^0) = \sin 20^0$, b) $\sin\alpha = \cos 50^0$, c) $tg\,\alpha = ctg\, 37^0$.

Vëre zgjidhjen:

a) Prej $\alpha - 10^0 = 20^0$ vijon $\alpha = 30^0$; b) $\alpha + 50^0 = 90^0, \alpha = 40^0$; c) $\alpha + 37^0 = 90^0, \alpha = 53^0$.

4 Cakto këndin e ngushtë α, nëse: a) $\cos(\alpha + 15^0) = \cos 40^0$, b) $\cos(\alpha + 5^0) = \cos 40^0$,

c) $tg(\alpha - 15^0) = ctg\, 20^0$, ç) $ctg(\alpha + 10^0) = tg\, 30^0$.

5 Cakto këndin e ngushtë α, nëse:

a) $\sin(\alpha + 15^0) = \cos 23^0 15'$, b) $\cos(\alpha - 20^0) = \sin 63^0 25'$, c) $tg(\alpha + 20^0) = ctg(2\alpha - 10^0)$.

Vëre zgjidhjen:

a) Prej $\alpha + 15^0 + 23^0 15' = 90^0$, përkatësisht $\alpha = 89^0 60' - 38^0 15'$, fitojmë $\alpha = 51^0 45'$.

6 Cakto këndin α, nëse: a) $\sin(\alpha - 10^0) = \cos 34^0 25'$; b) $\cos(23^0 - \alpha) = \sin 38^0 25' 30''$;

c) $tg(\alpha + 20^0) = ctg\, 63^0 24'$; ç) $ctg(\alpha - 40^0) = tg\, 63^0 15' 20''$.

7 Thjeshto shprehjet:

a) $2\sin 35^0 - 3\cos 55^0$; b) $\dfrac{5tg\, 50^0 + 3ctg\, 40^0}{3tg\, 50^0 - ctg\, 40^0}$; c) $\dfrac{5\sin 15^0 - 2\cos 75^0}{5\sin 15^0 + 2\cos 75^0}$.

Vëre zgjidhjen: Pasi këndet prej 35^0 dhe 55^0 janë komplementar, vijon:

a) $2\sin 35^0 - 3\cos 55^0 = 2\sin 35^0 - 3\sin 35^0 = -\sin 35^0$;

b) $\dfrac{5tg\, 50^0 + 3ctg\, 40^0}{3tg\, 50^0 - ctg\, 40^0} = \dfrac{5tg\, 50^0 + 3tg\, 50^0}{3tg\, 50^0 - tg\, 50^0} = \dfrac{8tg\, 50^0}{2tg\, 50^0} = 4.$

8 Thjeshto shprehjet:

a) $3\cos 15^0 - 2\sin 75^0$; b) $\dfrac{2\sin 20^0 + \cos 70^0}{2\sin 20^0 - \cos 70^0}$; c) $\dfrac{3tg\, 80^0 - 2ctg\, 10^0}{3tg\, 80^0 + ctg\, 10^0}$.

Detyra:

1. Cakto këndin α, nëse:

   a) $\sin(\alpha + 10^0) = \sin 30^0$; b) $\cos(\alpha - 15^0) = \cos 23^0 15'$; c) $tg(\alpha + 20^0) = ctg\, 15^0 20'$;

   ç) $ctg(\alpha - 15^0) = tg\, 15^0 23'$; d) $tg(\alpha - 20^0) = ctg(\alpha + 20^0)$; e) $\sin(\alpha + 10^0) = \cos(10^0 + \alpha)$.

2. Thjeshto shprehjet: a) $\dfrac{3\sin 70^0 - 2\cos 20^0}{2\sin 20^0 + \cos 70^0}$; b) $\dfrac{4tg\, 5^0 - 2ctg\, 85^0}{4tg\, 5^0 + ctg\, 85^0}$.

3. Thjeshto shprehjet, nëse dihet se $\alpha + \beta = 90^0$:

   a) $\cos\beta + \sin\alpha$; b) $\sin\alpha + \cos\beta$; c) $\sin^2\alpha + \cos^2\beta$.

4 VLERAT E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE PREJ $45^0, 60^0, 30^0$.

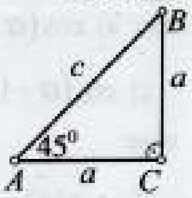
Kujtohu!

- Cili trekëndësh është brakrahas kënddrejt?
- Si janë brinjët dhe këndet e trekëndëshit barakrahas?
- Cilën veti e ka lartësia e trekëndëshit barakrahas?

A

1 Le të jetë a katetë e trekëndëshit barakrahas kënddrejt ABC. Cakto hipoptenuzën e atij trekëndëshi.

Vëre zgjidhjen.



■ Sipas teoremës së Pitagorës, kemi:

$$c^2 = 2a^2 \text{ ose } c = a\sqrt{2}.$$

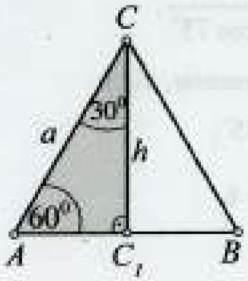
■ Sipas përkufizimit për funksionet trigonometrike, fitojmë:

$$\sin 45^0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \; tg\, 45^0 = \frac{a}{a} = 1.$$

● Sa është $\cos 45^0$ dhe $ctg\, 45^0$?

2 Cakto lartësinë e trekëndëshit barakrahas nëse është dhënë brinja e tij a.

Vëre zgjidhjen.



■ Prej ΔAC_1C, kemi $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

■ Sipas përkufizimit për funksionet trigonometrike, fitojmë:

$$\sin 60^0 = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2};$$

$$tg\, 60^0 = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}; \quad ctg\, 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3 Duke e shfrytëzuar vetinë për kënde komplementar, cakto vlerën e funksionit trigonometrik për këndin prej 30^0.

Vëre zgjidhjen:

■ $\sin 30^0 = \sin\left(90^0 - 60^0\right) = \cos 60^0 = \frac{1}{2}; \; \cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$tg\, 30^0 = ctg 60^0 \frac{\sqrt{3}}{2}, \; ctg\, 30^0 = tg\, 60^0 = \sqrt{3}.$$

B **4** Cakto vlerën e shprehjeve:

a) $2\sin 30^0 + 2\cos 60^0$; b) $(1+\sin 60^0)(1-\sin 60^0)$.

Vëre zgjidhjen.

a) $2\sin 30^0 + 2\cos 60^0 = 2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=2$;

b) $(1+\sin 60^0)(1-\sin 60^0)=1-\sin^2 60^0=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

5 Cakto vlerën e shprehjeve:

a) $3\sin 30^0\cdot tg\,30^0+\cos 60^0\cdot ctg\,60^0$; b) $(1+\cos 30^0)(1-\cos 30^0)$.

6 Provo saktësinë e barasive:

a) $3ctg\,60^0-2\sin 60^0=0$; b) $\sin 30^0+\cos 60^0=tg\,45^0$; c) $\cos^2 60^0+\sin^2 60^0=ctg\,45^0$.

Vëre zgjidhjen.

a) $3ctg\,60^0-2\sin 60^0=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$; b) $\sin 30^0+\cos 60^0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=tg\,45^0$.

7 Provo saktësinë e barasive

a) $\frac{1}{\sin 30^0}+\frac{1}{\cos 60^0}=(tg\,45^0+ctg\,45^0)^2$; b) $4\sin^2 60^0+4\cos^2 30^0=tg^2 60^0+ctg^2 30^0$.

Detyra:

(1) Cakto vleën e shprehjeve:

a) $3\sin 60^0-2\cos 30^0$; b) $(tg\,45^0+tg\,60^0)(tg\,45^0-tg\,60^0)$.

(2) Provo saktësinë e barasisë $2\sin 30^0-2\cos 30^0+\sqrt{3}=1$.

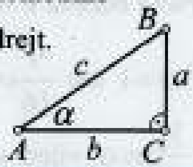
(3) Sa është hija e drurit lartësia e të cilit është $8m$, nëse rrezja e diellit me trungun e drurit formon kënd prej: a) 30^0, b) 45^0, c) 60^0?

5 LIDHJA NDËRMJET FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE TË KËNDIT TË NJËJTË

Kujtohu!

- Për përkufizimin e funksioneve trigonometrike të këndit të ngushtë te trekëndëshi kënddrejt.
- Për teoremën e Pitagorës.

Prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike prej këndit α te trekëndëshi kënddrejt kemi:



$\sin\alpha=\frac{a}{c}$; $tg\,\alpha=\frac{a}{b}$; $\cos\alpha=\frac{b}{c}$; $ctg\,\alpha=\frac{b}{a}$.

A Prej $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, vijon: $(\sin\alpha)^2=\left(\frac{a}{c}\right)^2$, d.m.th. $\sin^2\alpha=\frac{a^2}{c^2}$.

Prej $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ vijon: $(\cos\alpha)^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2$, d.m.th. $\cos^2\alpha = \frac{b^2}{c^2}$. Nëse i mbledhim anët përkatëse të dy barasive, kemi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$. Pasi $a^2 + b^2 = c^2$ vijon:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{c^2}{c^2} = 1$, pra: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = tg\,\alpha$, a $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = ctg\,\alpha$, dhe $tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1$.

Mbaj mend!

Nëse α është çfarëdo kënd i ngushtë, atëherë të saktë janë barasitë:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{dhe } tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1,$$

të cilat quhen identitete themelore trigonometrike.

1. Provo saktësinë e barasive: a) $\sin^2 60^0 + \cos^2 60^0 = 1$; b) $tg\,30^0 \cdot ctg\,30^0 = 1$.

Identitetet themelore trigonometrike kanë zbatim të madh. Me ndihmën e tyre, nëse është dhënë vlera e një funksioni trigonometrik, i caktojmë vlerat e funksioneve tjera trigonometrike>

2. Nëse është $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, cakto vlerat e funksioneve tjera trigonometrike.

Vëre zgjidhjen.

■ Prej $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, kemi, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, d.m.th. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$;

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$, $ctg\,\alpha = \frac{4}{3}$.

3. Nëse është dhënë $\cos\alpha = \frac{9}{40}$, cakto vlerat e funksioneve tjera trigonometrike.

4. Nëse është a) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$; b) $\cos\alpha = \frac{20}{29}$, cakto vlerat e funksioneve tjera trigonometrike.

5. Nëse është dhënë $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$ cakto vlerat tjera trigonometrike.

Vëre zgjidhjen.

■ Prej $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, kemi $\sin\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha$. Nëse barasia e fundit zëvëndësohet me identitetin themelor $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, fitojmë: $\left(\frac{3}{4}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$ ose $\frac{9}{16}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, përkatësisht

$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$, d.m.th. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, pasi $\sin\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha$ vijon $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Prej $ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$, vijon $ctg\,\alpha = \frac{4}{3}$.

Mënyra për caktimin e vlerës të funksioneve tjera trigonometrike, nëse është dhënë vlera e funksionit $tg\,\alpha$ ose $ctg\alpha$, mund të nxirret në këtë mënyrë:

Prej $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\,\big|:\cos^2\alpha$, fitojmë $tg^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ ose $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, d.m.th.

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{25}{16}$, prej ku $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$. Zgjidhe me mënyrën që e ke më të lehtë.

6 Nëse $ctg\,\alpha=\dfrac{12}{35}$, cakto vlerat e funksioneve tjera trigonometrike.

B 7 Vërteto saktësinë e barasisë $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)(tg\,\alpha+ctg\,\alpha)=ctg\,\alpha$ me zbatimin e identiteteve themelore trigonometrike.

Vëre zgjidhjen:

Nëse me L e shënojmë anën e majtë, kurse me D anën e djathtë të barasisë, atëherë kemi:

$$L=(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)(tg\,\alpha+ctg\,\alpha)=\left(1-\sin^2\alpha\right)\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=$$

$$=\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\,\alpha=D.$$

Domethënë, barasia e dhënë është e vërtetë, për çfarëdo kënd të ngushtë α.

7 Vërteto saktësinë e barasisë $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-1}=-2ctg\,\alpha.$

Detyra:

1 Nëse është: a) $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$, b) $\cos\alpha=0{,}28$, cakto vlerat e funksioneve tjera trigonometrike.

2 Le të jetë: a) $tg\,\alpha=\dfrac{35}{12}$, b) $ctg\,\alpha=1{,}05$, cakto vlerat e funksioneve tjera trigonometrike.

3 Vërteto saktësinë e barasisë: a) $(1+tg\,\alpha)^2+(1-tg\,\alpha)^2=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$;

b) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$; c) $\dfrac{\sin\alpha}{1+ctg\,\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+tg\,\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

6 NDRYSHIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE NËSE KËNDI NDRYSHON PREJ 0^0 DERI 90^0

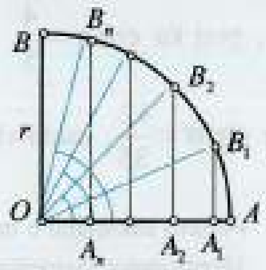
Kujtohu!

- Radhiti sipas madhësisë vlerat sinus prej: $30^0, 60^0, 45^0$.
- Cakto shenjën e ndryshimit:

  a) $\sin 30^0 - \sin 45^0$; b) $\cos 30^0 - \cos 45^0$;

  c) $tg\, 30^0 - tg\, 45^0$; ç) $ctg\, 30^0 - ctg\, 45^0$.
- Çka vëren

A **1** Shqyrto vizatimin i cili është një e katërta e vijës rrethore me rreze $r = 1$.



Vëren: $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = ... = \overline{OB_n} = r = 1$.

Le të jetë $\measuredangle A_1OB_1 = \alpha_1$; $\measuredangle A_1OB_2 = \alpha_2$; ...; $\measuredangle A_1OB_n = \alpha_n$. Vëren se $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$, a $\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2} < ... < \overline{A_nB_n}$.

Prej $\sin\alpha_1 = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{r}$, $\sin\alpha_2 = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{r}$, ... $\sin\alpha_n = \dfrac{\overline{A_nB_n}}{r}$, vijon $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2 < ... < \sin\alpha_n$,

d.m.th. vlera e funksionit ***„sinus i këndit të ngushtë"*** rritet, nëse këndi rritet. Rritja e funksionit sinus është e kufizuar, pasi segmentet $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n$ gjithmonë janë më të vegjël se $\overline{OB} = r = 1$. Prandaj, $\sin\alpha < 1$.

Mbaj mend!

Nëse këndi α rritet dhe tenton nga 90^0, atëherë edhe $\sin\alpha$ rritet dhe tenton nga 1.

2 Radhiti sipas madhësisë: $\sin 15^0, \sin 8^0, \sin 23^0, \sin 16^0$.
Vëre zgjidhjen.

■ Pasi $8^0 < 15^0 < 16^0 < 23^0$, vijon $\sin 8^0 < \sin 15^0 < \sin 16^0 < \sin 23^0$.

3 Radhiti sipas madhësisë: $\sin 25^0$, $\sin 36^0$, $\sin 20^0$, $\sin 68^0$.

- Si ndryshon vlera e funksionit kosinus prej këndit të ngushtë, nëse ai kënd rritet prej 0^0 deri 90^0?

■ $\cos\alpha_1 = \dfrac{\overline{OA_1}}{r}$, $\cos\alpha_2 = \dfrac{\overline{OA_2}}{r}$, ..., $\cos\alpha_n = \dfrac{\overline{OA_n}}{r}$.

Pasi për $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$, $\overline{OA_1} > \overline{OA_2} > ... > \overline{OA_n}$, vijon se vlera e kosinusit prej këndit të ngushtë zvogëlohet kur këndi rritet prej 0^0 deri 90^0.

Mbaj mend!

Nëse këndi α rritet dhe tenton nga 90^0, atëherë $\cos\alpha$ zvogëlohet dhe tenton nga zeroja.

4 Rradhiti sipasa madhësisë: $\cos 20^0, \cos 15^0, \cos 25^0$.

Vëre zgjidhjen:

- Pasi $15^0 < 20^0 < 25^0$, vijon $\cos 15^0 > \cos 20^0 > \cos 25^0$.

5 Rradhiti sipas madhësisë: $\cos 35^0, \cos 18^0, \cos 48^0, \cos 8^0$.

B

Për funksionet trigonometrike $tg\,\alpha$ dhe $ctg\,\alpha$ kemi:

$$tg\,\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}, tg\,\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}}, \ldots, tg\,\alpha_n = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}}.$$

Duke i shqyrtuar thyesat, vërejmë se numëruesi i thyesave rritet, ndërsa, emëruesët zvogëlohen. Domethënë, nëse këndi rritet prej 0^0 deri 90^0, atëherë vlera e funksionit të tangensit prej atij këndi të ngushtë rritet.

Në mënyrë të ngjashme, për kotangensin, kemi: $ctg\,\alpha_1 = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{A_1B_1}}, ctg\,\alpha_2 = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{A_2B_2}}, \ldots, ctg\,\alpha_n = \frac{\overline{OA_n}}{\overline{A_nB_n}}$. Pasi $\overline{OA_1} > \overline{OA_2} > \ldots \overline{OA_n}$ dhe $\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2} < \ldots < \overline{A_nB_n}$, vijon se nëse këndi rritet prej 0^0 deri 90^0, atëherë vlera e kotangensit zvogëlohet.

Mbaj mend!

Nëse këndi α rritet dhe tenton nga 90^0, atëherë $tg\,\alpha$ rritet dhe tenton në pakufi, ndërsa $ctg\,\alpha$ zvogëlohet dhe tenton nga zero.

6 Rradhiti sipas madhësisë: a) $tg\,15^0, tg\,18^0, tg\,6^0$; b) $ctg\,25^0, ctg\,15^0, ctg\,12^0$.

Vëre zgjidhjen:

- a) Prej $6^0 < 15^0 < 18^0$, vijon $tg\,6^0 < tg\,15^0 < tg\,18^0$;
- b) Prej $12^0 < 15^0 < 25^0$, vijon $ctg\,12^0 > ctg\,15^0 > ctg\,25^0$.

7 Rradhiti sipas madhësisë: a) $tg\,35^0, tg\,20^0, tg\,10^0, tg\,18^0$; b) $ctg\,10^0, ctg\,12^0, ctg\,8^0, ctg\,30^0$.

8 Cakto shenjën e shprehjes $A = \frac{\cos 50^0 - \sin 24^0}{ctg\,20^0 - tg\,10^0}$.

Vëre zgjidhjen:

- $A = \frac{\cos 50^0 - \sin 24^0}{ctg\,20^0 - tg\,10^0} = \frac{\sin 40^0 - \sin 24^0}{tg\,70^0 - tg\,10^0}$. Pasi $40^0 > 24^0$, vijon $\sin 40^0 > \sin 24^0$, d.m.th.

$\sin 40^0 - \sin 24^0 > 0$ dhe $tg\,70^0 > tg\,10^0$, përkatësisht $tg\,70^0 - tg\,10^0 > 0$, pra $A > 0$.

9 Cakto shenjën e shprehjes $A = \frac{\sin 15^0 - \cos 35^0}{tg\,25^0 - ctg\,15^0}$.

C

Prej asaj që u përmend më lartë, mund të përfundojmë:

- Vlera e sinusit dhe kosinusit prej këndit të ngushtë është numër pozitiv më i vogël se një, d.m.th.
$$0 < \sin\alpha < 1,\ 0 < \cos\alpha < 1, \text{ nëse } 0^0 < \alpha < 90^0.$$
- Vlera e tangensit dhe kotangensit prej këndit të ngushtë është numër pozitiv, d.m.th.
$$0 < tg\,\alpha < \infty,\ 0 < ctg < \infty \text{ за } 0^0 < \alpha < 90^0.$$

Detyra:

(1) Radhiti sipas madhësisë vlerat e funksioneve trigonometrike:

a) $\sin 12^0, \sin 75^0, \sin 25^0$; b) $\sin 23^0, \cos 15^0, \sin 20^0, \cos 35^0$; c) $tg\, 15^0, ctg\, 20^0, tg\, 10^0, ctg\, 40^0$.

(2) Cakto shenjën e shprehjes:

a) $\sin 20^0 - \sin 30^0$; b) $\sin 35^0 + \cos 15^0$; c) $\dfrac{\cos 15^0 - \sin 35^0}{\sin 65^0 - \cos 18^0}$; ç) $\dfrac{tg\, 25^0 - ctg\, 45^0}{ctg\, 60^0 - tg\, 35^0}$.

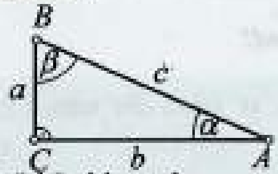
7 ZGJIDHJA E TREKËNDËSHIT KËNDDREJT

Kujtohu!

- Cakto këndin β të trekëndëshit kënddrejt, nëse $\alpha = 34^0 20'$.
- Le të jetë $a = 3\,cm$ katetë, kurse $c = 5\,cm$ hipotenuzë e trekëndëshit kënddrejt ABC. Cakto katetën b.

A 1 Cakto elementet e trekëndëshit kënddrejt, nëse hipoteinuza është $c = 12\,cm$ dhe këndi $\alpha = 30^0$.

Vëre zgjidhjen:



Duhet ta caktojmë këndin β dhe katetat a dhe b. Pasi β është kënd komplementar i këndit α, kemi: $\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 30^0 = 60^0$. Prej $\dfrac{a}{c} = \sin\alpha$, vijon $a = c \cdot \sin\alpha = 12 \cdot 0{,}5 = 6\,cm$.

Domethënë, $\beta = 60^0$, kurse katetat janë: $a = 6\,cm$ dhe $b = \sqrt{108} = 10{,}4\,cm$.

Vërejtje: Kateta b mund të caktohet edhe ndryshe, d.m.th. prej $\dfrac{b}{c} = \cos\alpha$, vijon $b = c \cdot \cos\alpha$.

Të ***zgjidhet trekëndëshi kënddrejt***, domethënë të caktohen elementet e tij themelore. Të mundshme janë këto katër detyra themelore: të zgjidhet trekëndëshi kënddrejt, nëse dihen: hipotenuza dhe një kënd i ngushtë; një katetë dhe një kënd i ngushtë; hipotenuza dhe një katetë; të dy katetat. Për zgjidhjen e detyrave të llojit të këtillë duhet të dijmë t'i caktojmë vlerat e funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi. Për këtë qëllim, mësoje këtë

Udhëzim për shfrytëzimin e kalkulatorit (digitronit)

Vlerat e funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi të ngushtë i caktojmë me ndihmën e kalkulatorit që ka mundësi të atilla teknike.

Duke e shtypur tastin **DRG**, në këndin e sipërm majtas të displejit shkruhet shenja **DEG**, **RAD** ose **GRAD**. Kjo do të thotë, nëse te displeji është shkruar shenja **DEG**, është aktivizuar opcioni me të cilën madhësia e këndit futet dhe përpunohet në shkallë.

Shembulli 1. Njehso vlerat e funksioneve trigonometrike për këndin prej 74^0.

Vëre mënyrën:

- E shtypim tastin **DRG** dhe përcjellim në displej të shkruhet opcioni **DEG**.
- Nëpërmjet tastaturës e fusim numrin matës të këndit, d.m.th. numrin 74.

E shtypim tastin te i cili është shkruar shenja e funksionit vlerën e të cilit dëshirojmë ta njehsojmë (sin, cos ose tg). Nëse e shtypim tastin me shenjën sin, te displej do të shkruhet numri 0,96126..., kurse kjo do të thotë se sin $74^0 = 0,96123...$ Nëse dëshirojmë të caktojmë cos74^0, atëherë e fusim numrin 74 e shtypim tastin me shenjën cos, pra në displej e lexojmë rezulltatin 0,27563..., d.m.th. cos $74^0 = 0,27563...$ Në të njëjtën mënyrë e caktojmë tg 74^0.

Vëren se te tasti i kalkulatorit nuk ka shenjë me shenjën ctg.

Nëse duhet të caktojmë ctg 74^0, atëherë veprojmë kështu:

- E fusim numrin 74, e shtypim tastin tg dhe në displej lexojmë 3,48741...

Pasi funksionet tg 74^0 dhe ctg 74^0 janë reciprok, vijon ctg $74^0 = 1$: tg 74^0, d.m.th. 1 : 3,48741.

- Pas fitimit të numrit 3,48741... e shtypim tastin me shenjën **2nd**, poashtu edhe tastin me shenjën $1/x$ ose $1/a$ (vlera reciproke e x ose e a), dhe në displej do të shkruhet numri 0,28674.... Domethënë, ctg $74^0 = 0,28674...$

Nëse numri matës i këndit përmban minuta dhe sekonda, atëherë madhësia e këndit shprehet në shkallë, si numër dhjetor.

***Shembulli* 2.** Cakto vlerat e funksioneve trigonometrike për këndin prej $37^0 45' 18''$.

Sekondat dhe minutat i shndërrojmë në shkallë, d.m.th. $18'' : 60 = 0,3'$; $45' + 0,3' = 45,3'$; $45,3' : 60 = 0,755^0$; $37^0 + 0,755^0 = 37,755^0$; pa $37^0 45' 18'' = 37,755^0$.

E fusim numrin dhe sipas mënyrës tani më të njohur i fitojmë rezulltatet:

$\sin 37,755^0 = 0,61228...$; $\cos 37,755^0 = 0,79063...$; $tg 37,755^0 = 0,77442...$; $ctg 37,755^0 = 1,29128...$

Vëren se rezulltatet në displej shkruhen me pesë dhjetore. Në praktikë kryhet rrumbullakimi i shënimit dhjetor me saktësi të caktuar na është është e nevojshme, zakonisht me saktësi prej 0,01.

Te disa kalkulator ekziston opcioni me të cilën minutat dhe sekondat automatikisht shndërrohen në shkallë, kurse ai opcion shpeshherë aktivizohet me tastin **DEG** ose ndoshta me tast tjetër, varësisht prej tipit të kalkulatorit. Prej atyre shkaqeve, gjatë përdorimit të kalkulatorit preferojmë të shfrytëzohet udhëzimi i prodhuesit.

Nëse këndi për të cilin i caktojmë vlerat e funksioneve trigonometrike është dhënë në radian (RAD) ose madhësi tjetër matëse, sëpari kryejmë shndërrimin e këndit në shkallë.

Megjithatë, nëse kalkulatori ka mndësi teknike, atëherë nëse këndi është dhënë në radian në ekran duhet të shkruhet opcioni **RAD**, kurse mënyra e mëtutjeshme është e njëjtë sikurse për këndin të dhënë në shkallë.

Në një pjesë të detyrës për zgjidhjen e trekëndëshit kënddrejt kërkohet të caktohet këndi nëse është dhënë vlera e çdo funksioni trigonometrik për atë kënd.

Është e njohur se, nëse $\sin\alpha = 1/2$, atëherë $\alpha = 30^0$.

Mënyra për caktimin e këndit do ta sqarojmë në shembullin që vijon.

***Shembulli* 3.** Cakto kndin α, nëse $\sin\alpha = 0,64278$.

Nëse dëshirojmë kndin ta lexojmë në shkallë, atëherë veprojmë në këtë mënyrë:

- Në displej është aktivizuar dhe i shkruar opcioni **DEG**.

- fusim numrin 0,64278, e shtypim tastin **2nd**, kurse pastaj edhe tastin $\sin^{-1}$. Në displej shkruhet numri 40, kurs kjo do të thotë $\alpha = 40^0$.

Nëse dëshirojmë që këndin ta kemi të shprehur në radian, atëherë në displej do të jetë i shkruar opcioni **RAD**, kurse pas kryerjes së mënyrës së njëjtë fitohet numri 0,69812..., pra $\alpha = 0,698\,rad$.

Vëren se opcioni **2nd** mundëson të caktohet funksioni inverz vlera e të cilit është paraqitur në displej. Shënimet $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, tg^{-1} domethënë funksioni inverz i funksionit $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$.

***Shembulli* 4.** Cakto këndin α, nëse $\cos\alpha = 0,67589$.

Vëre mënyrën:

- E fusim numrin 0,67589, e shtypim tastin **2nd**, kurse pastaj tastin $\cos^{-1}$. Në displej është shkruar numri 47,47669799. Domethënë, $\alpha = 47,47669^0$.

- Këndi ka 47^0; $0,47669^0 \cdot 60 = 28,6018'$ ose $28'$ dhe $0,6018' \cdot 60 = 36,1080''$ ose $36''$.

Përfundimisht fitojmë $\alpha = 47^0 28' 36''$.

Te disa kalkulator ekziston opcioni me të cilin pjesa dhjetore e fuqisë shndërrohet në minuta dhe sekonda. Në këtë rast veprojmë kështu:

- Pasi që te displej do të shkruhet numri 47,47669, përsëri e aktivizojmë tastin **2nd**, kurse pastaj edhe tastin **DMS** dhe në displej shkruhet numri 47,2836108..., kurse kjo do të thotë $\alpha = 47^0 28' 36''$.

***Shembulli* 5.** Cakto këndin α, nëse $tg\alpha = 2,65486$.

- E fusim numrin 2,35486;
- E aktivizojmë tastin **2nd**.
- E aktivizojmë tastin tg^{-1} dhe në displej shkruhet numri 88,788433.
- E aktivizojmë tastin **2nd**.
- E aktivizojmë tastin **DMS** dhe në displej do të shkruhet numri 88,4718..., kurse kjo do të thotë $\alpha = 88^0 47' 18''$.

***Shembulli* 6.** Cakto këndin α, nëse $ctg\alpha = 4,5678$.

- E fusim numrin 4,5678.
- E aktivizojmë tastin **2nd**.
- E shtypim tastin x^{-1}, pasi $tg\alpha = 1/ctg\alpha$.
- E aktivizojmë tastin 2nd.
- E aktivizojmë tastin tg^{-1} dhe në displej lexojmë 12,3425....
- E aktivizojmë tastin **2nd**.
- E aktivizojmë tastin **DMS** dhe lexojmë 12,20, kurse kjo do të thotë $\alpha = 12^0 20'$.

Nëse fusim vlerë jo të vërtetë për ndonjë funksion, në displej do të shkruhet porosia **E**, që do të thotë e pamundshme. Për shembull, nëse fusim 2,456, kurse pastaj e aktivizojmë tastin **2nd**, pastaj tastin $\sin^{-1}$, do të paraqitet porosia **E**. Ku është gabimi?

2 Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejt, nëse janë dhënë hipotenuza c dhe këndi β:

a) $c = 8,2\,cm$ dhe $\beta = 65^0$; b) $c = 45\,cm$ dhe $\beta = 36^0 20'$.

3 Zgjidhe trekëndëshin kënddrejt, nëse janë dhënë kateta $b = 8\,cm$ dhe këndi $\alpha = 38^0 40'$.

Vëre zgjidhjen:

Duhet ta caktojmë këndin β, katetën a dhe hipotenuzën c.

Këndi $\beta = 90^0 - \alpha = 89^0 60' - 38^0 40' = 51^0 20'$.

Prej $\frac{a}{b} = tg\,\alpha$, vijon $a = b \cdot tg\,38^0 40' = 8 \cdot tg\,38,66 = 8 \cdot 0,80 = 6,40$. Hipotenuzën c, do ta caktojmë duke e zbatuar teoremëne e Pitagorës, kemi $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6,40^2 + 8^2} = 10,24$.

Domethënë, $\beta = 51^0 20'$, katetata $a = 6,4\,cm$ dhe hipotenuza $c = 10,24\,cm$.

4 Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejt, nëse janë dhënë:

a) $a=12\,cm$ dhe $\alpha=23^0 45'$; b) $b=23\,cm$ dhe $\beta=63^0 20'$.

5 Zgjidhe trekëndëshin kënddrejt nës janë dhënë katetet $a=12\,cm$ dhe $b=5\,cm$.

Vëre zgjidhjen.

Hipotenuzën c e caktojmë sipas teoremës së Pitagorës, d.m.th.

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13cm.$$

Prej $\frac{a}{b}=tg\,\alpha$, vijon $tg\,\alpha=2,4$ dhe $\alpha=67^0 38'$. Këndin $\beta=90^0-\alpha=89^0 60'-67^0 38'=22^0 32'$.

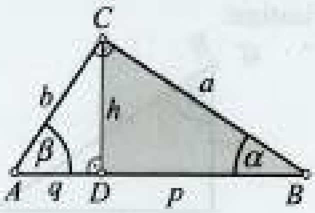
Domethënë, $\alpha=67^0 38'$, $\beta=22^0 32'$ dhe $c=13$.

6 Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejt, nëse janë dhënë:

a) $a=3\,cm$ dhe $b=4cm$; b) $a=8\,cm$ dhe $c=17\,cm$; c) $b=12\,cm$ dhe $c=37\,cm$.

7 Zgjidhe trekëndëshin kënddrejt, nëse janë dhënë $h=12\,cm$ dhe $p=5\,cm$. (proeksionet ortogonale të kateteve a dhe b mbi hipotenuzën i shënojmë me p dhe q, përkatësisht).

Vëre zgjidhjen:



Prej vizatimit, kemi

$$a=\sqrt{h^2+p^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13cm,\ \sin\beta=\frac{h}{a}=\frac{12}{13}=0,9230,$$

kurse $\beta=67^0 23'$ dhe $\alpha=90^0-\beta=22^0 37'$.

Prej $tg\,\beta=\frac{b}{a}$, vijon $b=a\,tg\,\beta=13\cdot tg\,0,616=31,2\,cm$; $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13^2+31,2^2}=28,8\,cm$.

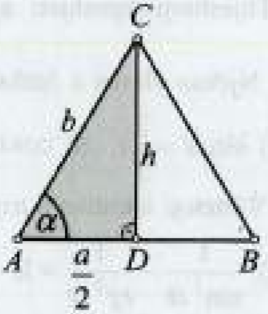
8 Të zgjidhet trekëndëshi kënddrejt, nëse është dhënë:

a) $h=12\,cm$ dhe $\alpha=36^0 52'$; b) $p=2\,cm$ dhe $q=8\,cm$.

B

9 Njehso perimetrin dhe lartësinë e trekëndëshit barakrahas, krahu i të cilit është $b=14\,cm$ dhe këndi i bazës 50^0.

Vëre zgjidhjen.



Prej ΔADC, vijon:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{b},$$ prej ku $a=2b\cos\alpha=28\cos 50^0=28\cdot 0,642=18\,cm$.

Për perimetrin kemi: $P=2b+a=28+18=48cm$.

Prej $\sin\alpha=\frac{h}{b}$, vijon $h=b\sin\alpha=14\sin 50^0=14\cdot 0,766=10,7\,cm$.

10 Njehso perimetrin e drejtkëndëshit, diagonalja e të cilit është $15\,cm$ dhe i cili me brinjën e madhe formon kënd prej $36^0 52'$.

Detyra

1. Zgjidhe trekëndëshin kënddrejt, nëse është dhënë:

   a) $a = 5cm$ dhe $\alpha = 40^0$; b) $a = 25cm$ dhe $\beta = 72^0 30'$;

   c) $c = 17cm$ dhe $a = 8cm$; ç) $a = 7cm$ dhe $b = 24cm$.

2. Njehso perimetrin e trekëndëshit barakrahas, nëse është dhënë:

   a) krahu $b = 15cm$ dhe $\alpha = 53^0 08'$; b) $h_a = 20cm$ dhe $\gamma = 92^0 48'$.

3. Njehso brinjën e rombit, nëse diagonalet e tij janë $32cm$ dhe $60cm$.

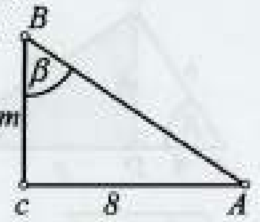
4. Cakto këndet e trapezit barakrahas, bazat e të cilit janë: $18cm$ dhe $8cm$, kurse krahu $13cm$.

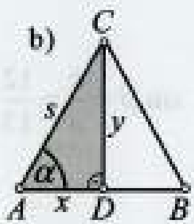
5. Prej majës së një ndriçuesi, të lartë $150m$, shihet anija nën këndin e depresionit 9^0. Sa është largësia prej ndriçuesit deri te anija?

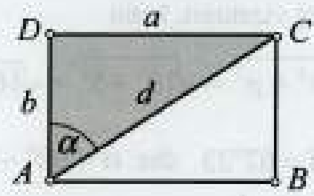
Ushtrim kontrollues tematik

1. Brinjët e trekëndëshit janë: a) $9cm, 12cm\ 13cm$; b) $21cm, 35cm, 40cm$. Cili prej tyre është kënddrejt?

2. Shkruaji përkufizimet e funksioneve trigonometrike prej këndit të ngushtë te trekëndëshi kënddrejt nga vizatimi:

a) 

b) 

c) 

3. Cilët prej këtyre barasive janë të vërteta:

   a) $\sin\alpha = \frac{4}{3}$; b) $\cos\alpha = \sqrt{3}$; c) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; ç) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $tg\,\alpha = \sqrt{3}$; e) $ctg\,\alpha = 3$?

4. Njehso vlerën shprehjeve: a) $2\cos 60^0 + ctg\,45^0$; b) $3tg\,30^0 - 3ctg\,60^0$;

   c) $\frac{1+\cos 60^0}{1-\sin 30^0}$; ç) $\frac{\sin 30^0 - \sin 30^0}{\cos 30^0 - \sin 60^0}$; d) $\frac{4\cos^2 45^0 - 1}{tg^2\,60^0}$.

5. Thjeshtoji shprehjet: a) $\frac{\sin^2 25^0 - \cos^2 65^0}{\sin 65^0 + \cos 25^0}$; b) $\frac{2tg\,20^0 - 7ctg\,70^0}{2ctg\,20^0 + 3ctg\,70^0}$.

6. Njehso vlerën e funksioneve tjera trigonometrike nëse:

   a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $tg\,\alpha = \sqrt{3}$.

7. Vërtetoji identitetet trigonometrike

   a) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{tg^2\,\alpha} = 1$; b) $\frac{ctg\,\alpha - \cos\alpha}{ctg\,\alpha} = 1 - \sin\alpha$; c) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$.

8. Krahasoji vlerat: a) $\sin 23^0$ dhe $\sin 34^0$; b) $\cos 15^0$ dhe $\cos 80^0$; c) $tg\,18^0$ dhe $tg\,40^0$.

9. Njehso perimetrin e drejtkëndëshit diagonalja e të cilit është $d = 15cm$ dhe me brinjën e vogël formon kënd $\alpha = 36^0 52'$.

TEMA 2

NUMRAT KOMPLEKS

Gjuha e matematikës jo që është më e thjeshta dhe më e lehta për ta kuptuar nga të gjitha gjuhët tjera, por është edhe më e shkurtëra

H. Brum

- njësia imagjinare;
- numrat imagjinar;
- numrat kompleks dhe vetitë e tyre;
- bashkësia e numrave kompleks;
- numri kompleks si rreze vktor;
- moduli i numrit kompleks;
- operacionet me numra kompleks.

1 NJËSIA IMAGJINARE. NUMRAT IMAGJINAR

Kujtohu!

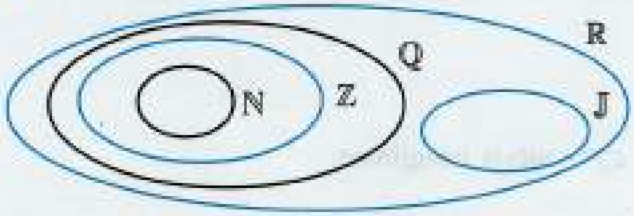
- Cilët bashkësi numerike i ke mësuar deri më tani?.
- Barazimi $x^2+1=0$ nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyrorë.
- Në cilën bashkësi numerike ka zgjidhje barazimi $x+3=0$?.
- Cili prej barazimeve $2x+5=0$ dhe $2x-\sqrt{3}=0$ ka zgjidhje në bashkësinë numrave racionalë?

A **1** caktoji të gjitha bashkësitë numerike te të cilët ka zgjidhje çdonjëra prej barazimeve:

a) $x-2=0$; b) $x+2=0$; c) $2x-3=0$;

ç) $x^2-5=0$; d) $x^2+4=0$.

- Vër zgjidhjen:



a) $x=2\in\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$; b) $x=-2\in\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$; c) $x=\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$;

ç) $x=\sqrt{5}\in\mathbb{J}\subset\mathbb{R}$ ose $x=-\sqrt{5}\in\mathbb{J}\subset\mathbb{R}$; d) Nuk ka zgjidhje në bashkësinë $\mathbb{R}$.

2 Cakto bashkësinë numerike që i takon zgjidhja e çdonjërit prej barazimeve:
a) $x-5=0$; b) $x+5=0$; c) $2x+5=0$; ç) $x^2-7=0$; d) $x^2+9=0$.

Kujtohu!

- Shkaqet pse e zgjerojmë bashkësinë e numrave natyrorë, kurse pse bashkësinë e numrave të plotë.
- Shprehja x^2-4 mund të zbërthehet në prodhim $(x-2)(x+2)$.
- Shprehja x^2+25 a mund të zbërthehet në shumëzues?
- Barazimi $x^2+1=0$ do të ketë zgjidhje vetëm nëse $x^2=-1$, por a është ajo e mundshme?

B **3** Zbërtheje në shumëzues të thjeshtë shprehjen x^2+4.

Vëre zgjidhjen:

Në vitin e parë mësove se vetëm ndryshimi i katrorëve mund të zbërthehet në prodhim të shumëzuesëve.

Tani theksuam se barazimi $x^2+1=0$ nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave realë.

Këto detyra, edhe shumë të tjera, e imponojnë nevojën e zgjerimit të bashkësisë $\mathbb{R}$ me numra të tjerë, me qëllim që të mundësohet ato të kenë zgjidhje.

Gjatë zgjerimit duhet:

1. bashkësia e re t'i përmban numrat realë;
2. bashkësia e re të përmban të paktën një element katrori i të cilit është -1;
3. në bashkësinë e re të numrave të përkufizohen operacionet mbledhje dhe shumëzim dhe për ato të vlejnë përkatësisht vetitë si edhe te bashkësia e numrave realë.

Që të plotësohen kërkesat për zgjerimin e bashkësisë $\mathbb{R}$, sipas përkufizimit fusim numrin i, katrori i të cilit është i barabartë me -1, d.m.th. $i^2 \overset{def}{=} -1$. Numri i quhet ***njësia imagjinare***, kurse numrat $2i$; $-\frac{1}{2}i$; $0{,}3i$;... ose në përgjithësi ai, $a\in\mathbb{R}$ quhen ***numra imagjinar*** dhe poashtu:

$1\cdot i=i$; $-1\cdot i=-i$; $0\cdot i=0$. Prandaj, $x^2+4=x^2-i^2 4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$.

4 Zgjidhi barazimet: a) $x^2 + 4 = 0$; b) $x^2 + 1 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

Barazimi $x^2 + 4 = 0$ ka zgjidhje $x = 2i$ ose $x = -2i$. Zgjidhje e barazimit $x^2 + 1 = 0$ është $x = i$ ose $x = -i$, pasi $x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$, d.m.th. $x - i = 0$ ose $x + i = 0$.

Mbaj me nd!

Numri i quhet ***njësia imagjinare*** dhe katrori i tij është i barabartë me -1, pra, $i^2 \overset{def}{=} -1$.

5 Zgjidhi barazimet: a) $x^2 - 9 = 0$; b) $x^2 + 9 = 0$.

Kujtohu!

$(-1)^2 = 1$; $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2)$;

$a^2 = a \cdot a$.

Cakto vlerën e fuqisë x^{-2},

nëse $x = -1$; $x = 3$; $x = -\dfrac{1}{2}$.

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -1$.

C

6 Caktoji dhe shkruaji fuqitë e njësisë imagjinare.

Vëre zgjidhjen

$i^1 = i$,

$i^2 = -1$, $\qquad i^{-1} = \dfrac{1}{i} = -i$,

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$,

$i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = +1$, $\qquad i^{-2} = \dfrac{1}{i^2} = -1$,

$i^5 = i^4 \cdot i = i$, $\qquad i^{-3} = \dfrac{1}{i^3} = +i$,

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$,

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$, $\qquad i^{-4} = \dfrac{1}{i^4} = 1$.

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1, \ldots$

Vëren se $i^n \in \{i, -1, -i, 1\}$ ose

$i^n = i^{4k+r} = i^r$; $r \in \{0,1,2,3\}$; $n, k \in \mathbb{Z}$.

Me të vërtetë:

1) për $n = 4k + 0$ vijon $i^n = i^{4k+0} = i^{4k} \cdot i^0 = \left(i^4\right)^k \cdot i^0 = 1^k \cdot i^0 = i^0 = 1$;

2) për $n = 4k + 1$ vijon $i^n = i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i^1 = \left(i^4\right)^k \cdot i^1 = 1 \cdot i^1 = i^1 = i$;

3) për $n = 4k + 2$ vijon $i^n = i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = \left(i^4\right)^k \cdot i^2 = 1 \cdot i^{2i} = i^2 = -1$;

4) për $n = 4k + 3$ vijon $i^n = i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = \left(i^4\right)^k \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i$.

7 Njehso: a) i^{327}; b) i^{-125}.

Vëre zgjidhjen:

a) $i^{327} = i^{4 \cdot 81 + 3} = i^3 = -i$; b) $i^{-125} = i^{4(-32)+3} = i^3 = -i$ ose $i^{-125} = \dfrac{1}{i^{125}} = \dfrac{1}{i^{4 \cdot 31+1}} = \dfrac{1}{i^1} = \dfrac{i}{i^2} = -i$.

8 Njehso vlerën e shprehjeve:

a) i^{2002}; b) $\dfrac{1}{i^{2002}}$; c) $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{10}$; ç) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{i^2} + \dfrac{1}{i^3} + \ldots + \dfrac{1}{i^{10}}$.

Kujtohu!

- Numrat $2, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ paraqiti në boshtin numerik.
- Numrat $2i, -2i, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i$ a mund të paraqiten në boshtin numerik real?

Ç

■ Numrat ai dhe $\frac{b}{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ janë numra imagjinar dhe paraqiten në boshtin numerik i cili quhet ***boshti imagjinar***, kurse shënohet me Jm.

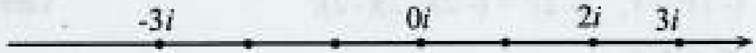
Mbaj mend!

Bashkësia e numrave imagjinar shënohet me Jm.

9 Paraqiti në boshtin numerik imagjinar këto numra: $2i, 3i, -3i, 0i$.

- Si janë numrat $3i$ dhe $-3i$?

Vëre zgjidhjen:



■ Numrat $3i$ dhe $-3i$ janë numra imagjinar të kundërtë.

10 Në boshtin numerik imagjinar paraqiti këto numra $5i, \frac{3}{i}, -\frac{2}{3}i$.

Vëre:

■ $\frac{a}{i} = -ai$; ■ $ai \cdot bi = -ab \in \mathbb{R}$; ■ $ai \pm bi = (a \pm b)i$; ■ $\frac{ai}{bi} = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

Detyra:

1. Cakto bashkësitë numerike te të cilët kanë zgjidhje barazimet:
   a) $x - 7 = 0$; b) $x + 8 = 0$; c) $2x - 9 = 0$; ç) $x^2 - 11 = 0$; d) $x^2 + 16 = 0$.
2. Zbërtheji në prodhim binomët: a) $x^2 + 25$; b) $x^2 + 13$; c) $x^2 + y^2$.
3. Cakto vlerën e shprehjes:
   a) i^{203}; b) i^{1002}; c) $\frac{1}{i^{101}}$; ç) $i^{2000} + \frac{1}{i^{200}}$; d) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^{10}$.
4. Në boshtin numerik imagjinar paraqiti numrat e kundërtë të numrave:
   $2i$, $-3i$, $5i$, $-7i$.

2 KONCEPTI PËR NUMËR KOMPLEKS. BARASIA E NUMRAVE KOMPLEKS

Kujtohu!

■ Numrat $-2, \sqrt{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ janë numra real.

■ Numrat $2i, -5i, \frac{3}{i}, \sqrt{7}i, \ldots$ janë numra imagjinar

- Numri $2 + 3i$ a është numër real?

A

■ Numri $a + bi$ shënoht me z, d.m.th. $z = a + bi$ dhe quhet ***numër kompleks***.

Numri a është ***pjesa reale*** i numrit kompleks dhe shënohet $a = Re(z)$, kurse numri b është ***pjesa imagjinare*** e numrit kompleks dhe shënohet $b = Jm(z)$.

Mbaj mend!

Numri kompleks $z=a+bi$ ose $z=Re(z)+Jm(z)\cdot i$ është shkruar në formën (standarde) algjebrike.

Bashkësinë e numrave kompleks e shënojmë me $\mathbb{C}$, d.m.th. $\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\}$.

1 Shkruaji numrat kompleks për të cilët janë dhënë:

a) $Re(z)=-2$, $Jm(z)=0$; b) $Re(z)=0$, $Jm(z)=-3$; c) $Re(z)=3$, $Jm(z)=5$; ç) $Re(z)=0$, $Jm(z)=0$.

Vëre zgjidhjen:

- a) $z=-2+0i=-2$; $-2\in\mathbb{R}$; $-2\in\mathbb{C}$; b) $z=0-3i=-3i$; $-3i\in Jm$; $-3i\in\mathbb{C}$;
  c) $z=3+5i$, $z\in\mathbb{C}$; ç) $z=0+0i=0$, $0\in\mathbb{R}$, $0\in Jm$; $0\in\mathbb{C}$.

Sigurisht vëreve:

- Nëse $Jm(z)=0$, atëherë $z=a+0\cdot i=a\in\mathbb{R}$. Prej këtu vijon se çdo numër real është edhe kompleks, d.m.th. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Domethënë, është i kënaqur kushti i parë për zgjerimin e bashkësisë $\mathbb{R}$.
- Nëse $Re(z)=0$, atëherë $z=a+bi=bi\in Jm$, domethënë çdo numër real është numër kompleks, kurse $Jm\cap\mathbb{R}=\{0\}$.
- Numri kompleks $-z=-a-bi$ është i kundërtë i numrit kompleks $z=a+bi$.
- Numri kompleks $a-bi$ është kompleks i konjuguar i numrit $z=a+bi$ dhe shënohet me
$$\overline{z}=a-bi.$$

2 Shkruaje numrin kompleks të kundërtë dhe të konjuguar për numrin:

a) $z=3+0\cdot i$; b) $z=0+2i$; c) $z=0+0i$; ç) $z=2+3i$.

3 Nëse $z=2-3i$, cakto: a) $\overline{\overline{z}}$; b) $\overline{(-z)}$.

4 Nëse $z=a+bi$, provo saktësinë e barasisë: a) $\overline{(-z)}=-\overline{z}$; b) $\overline{\overline{z}}=z$; c) $a^2+b^2=z\cdot\overline{z}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\overline{(-z)}=\overline{(-a-bi)}=-a+bi=-(a-bi)=-\overline{z}$; b) $\overline{\overline{z}}=\overline{(\overline{z})}=\overline{(\overline{a+bi})}=\overline{(a-bi)}=a+bi=z$;

c) $a^2+b^2=a^2-i^2b^2=a^2-(bi)^2=(a+bi)(a-bi)=z\cdot\overline{z}$.

Kujtohu!

- Numrat $z_1=2-3i$ dhe $z_2=-2-3i$ a janë të barabartë?
- Numri $z_1=2-5i$ është i barabartë me numrin $z_2=x-5i$ nëse $x=2$.
  A ekziston vlerë tjetër e x për të cilin $z_1=z_2$?

B

- Dy numra kompleks janë të barabartë nëse dhe vetëm nëse i kanë pjesët reale të barabarta dhe kanë pjesët imagjinare të barabarta.

5 Cakto numrat real x dhe y prej barasisë:

a) $x+3i=2-yi$; b) $3x+xi-2y=2i$;
c) $5x-3yi+2i=6-ix-y$.

Vëre zgjidhjen:

a) Sipas gjykimit për barasi të numrave kompleks vijon: $x = 2$ dhe $y = -3$.

b) Prej $3x + xi - 2y = 2i$ vijon $(3x - 2y) + xi$, pra kemi:

$\begin{cases} x = 2 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x = 6 - y \\ -3y + 2 = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (6 - y):5 \\ x = 3y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

Mbaj mend!

Nëse $z_1 = a_1 + b_1 i$ dhe $z_2 = a_2 + b_2 i$, atëherë $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2) \\ Jm(z_1) = Jm(z_2). \end{cases}$

Detyra.

1. Shkruani numrat kompleks, kurse pastaj numrat e tyre të kundërtë dhe numrat e tyre kompleks të konjuguar nëse janë dhënë:

   a) $Re(z) = -1, Jm(z) = -3$; b) $Re(z) = 0, Jm(z) = -3$; c) $Re(z) = -4, Jm(z) = 0$.

2. Shkruaj të paktën një numër kompleks z, ashtu që $13 = z \cdot \overline{z}$.

3. Provo saktësinë e barasisë $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$, nëse $z = a + bi,\ a \neq 0,\ b \neq 0$.

4. Për cilat vlera të x dhe y janë të sakta barasitë:

   a) $3x + xi - 2y = 12 - iy - i$; b) $2x + 2iy + ix - y = 1 + 3i$.

3 OPERACIONET ME NUMRAT KOMPLEKS

Kujtohu!

Le të jetë $z_1 = 2 - 3i$ dhe $z_2 = -3 + 5i$. Atëherë,

$Re(z_1) + Re(z_2) = -1$ dhe

$Jm(z_1) + Jm(z_2) = 2$.

- Si mbidhen monomët?
- Reduktoje polinomin

$$2(x-3) - (x+1)(2x-1).$$

A Shuma e dy numrave kompleks është numër kompleks pjesa reale e të cilit është shumë prej pjesës së tyre reale, kurse pjesa imagjinare është shumë prej pjesës së tyre imagjinare.

1. Cakto shumën dhe ndryshimin e numrave kompleks:

   a) $z_1 = -4 + 3i$ dhe $z_2 = 5 - 7i$;

   b) $z_1 = -3$ dhe $z_2 = -8i$;

   c) $z_1 = 0 + 0i$ dhe $z_2 = 3 - 2i$.

   Vëre zgjidhjen.

a) $z_1 + z_2 = (-4 + 3i) + (5 - 7i) = (-4 + 5) + (3i - 7i) = 1 - 4i$;

$z_1 - z_2 = (-4 + 3i) - (5 - 7i) = -4 + 3i - 5 + 7i = -4 - 5 + 3i + 7i = -9 + 10i$;

b) $z_1 + z_2 = -3 - 8i$ и $z_1 - z_2 = -3 + 8i$; c) $z_1 + z_2 = 3 - 2i$ и $z_1 - z_2 = -3 + 2i$.

Vëre dhe mbaj mend!

Nëse $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$, atëherë $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i;\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2 Cakto shumën dhe ndryshimin e numrave:

a) $z_1 = -2 + i\sqrt{3}$ dhe $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{27}$;

b) $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$ dhe $z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}i$.

3 Nëse $z = a + bi$, cakto $z + \bar{z}$ i $z - \bar{z}$.

Kujtohu!

- Njehso prodhimin $(a+b)\cdot(c+d)$.
- Sipas rregullës për shumëzimin e polinomëve, shumëzoji numrat kompleks

$$z_1 = 2 - 3i \text{ dhe } z_2 = -5 + 2i.$$

B

4 Nëse $z_1 = a + bi$ dhe $z_2 = c + di$.

Cakto prodhimin $z_1 \cdot z_2$.

Vëre zgjidhjen:

$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$, për shkak të $i^2 = -1$ fitojmë: $z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd$.

Domethënë:

$Re(z_1 \cdot z_2) = ac - bd$, kurse

$Jm(z_1 \cdot z_2) = ad + bc$.

Vëre dhe mbaj mend!

Nëse $z_1 = a + bi$ dhe $z_2 = c + di$, atëherë $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$,

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

5 Njehso prodhimin $z_1 \cdot z_2$, nëse $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 4 - 3i$.

$z_1 \cdot z_2 = (-3+2i)\cdot(4-3i) = -12 + 9i + 8i - 6i^2 = -12 + 6 + 17i = -6 + 17i.$

6 Kryeje fuqizimin: a) $(1+i)^2$; b) $(3-2i)^2$; c) $(1-i)^{10}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $(1 + i)^2 = (1 + i)(1 + i) = 1 + 2i + i^2 = 2i$ ose $(1 + i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$;

b) $(3 - 2i)^2 = 9 - 12i + (2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$;

c) $(1-i)^{10} = \left((1-i)^2\right)^5 = (-2i)^5 = -32i^5 = -32i$.

7 Nëse $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, njehso vlerën e shprehjeve: a) z^3; b) $(\bar{z})^3$; c) $z^{2001} + (\bar{z})^{2001}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $$z^3 = \frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{8} = \frac{1 + 3\sqrt{3}i + 3(\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3}{8} = \frac{1 + 3\sqrt{3}i + 9i^2 + 3\sqrt{3}i^3}{8} =$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i}{8} = -1.$$

b) $(\bar{z})^3 = \frac{(1-i\sqrt{3})^3}{8} = \frac{1 - 3i\sqrt{3} - 9 + 3i\sqrt{3}}{8} = -1$; c) $z^{2001} + (\bar{z})^{2001} = (z^3)^{667} + \left((\bar{z})^3\right)^{667} = -2$.

Kujtohu!

- $\frac{1}{3-\sqrt{2}}=\frac{1}{3-\sqrt{2}}\cdot\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{2}}{5}=\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{2}}{5}.$
- Le të jetë $z = 3 + i$, atëherë

$$z\cdot\bar{z}=(3+i)\cdot(3-i)=10.$$

Çfarë numri është prodhimi i dy numrave kompleks të konjuguar?

- Cakto x dhe y nëse $2 - 3i = (1 + i)(x + yi)$.

C **8** Cakto herësin e numrave kompleks $z_1 = a + bi$ dhe $z_2 = c + di$.

Vëre zgjidhjen:

Mënyra e parë. Me zbatimin e përfundimit se prodhimi i numrave kompleks të konjuguar është numër real kemi:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=$$

$$=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

9 Janë dhënë numrat $z_1 = 2-3i$ dhe $z_2=-1+i$. Cakto herësat:

a) $z_1 : z_2$; b) $z_2 : \overline{z_1}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{-1+i}=\frac{2-3i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}=\frac{-2-2i+3i+3i^2}{(-1)^2-i^2}=\frac{-5+i}{2}.$

Mënyra e dytë. Prej $z_1 : z_2 = z$ sipas përkufizimit vijon $z_1 = z_2\cdot z$. Le të jetë $z = x + yi$, atëherë

$\frac{z_1}{z_2}=z$, ose $\frac{a+bi}{c+di}=x+yi$, përkatësisht $a+bi=(c+di)(x+yi)$, d.m.th. $a+bi=cx+cyi+dxi-dy$.

Prej përkufizimit për barasin e numrave kompleks vijon:

$$\begin{cases}cx-dy=a\\ dx+cy=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c^2x-cdy=ac\\ d^2x+cdy=bd\end{cases},\ \text{pra}\ x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\ \text{dhe}\ y=\frac{-ad+bc}{c^2+d^2},\ \text{pra}\ z=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

Mbaj mend!

Nëse $z_1=a+bi$ dhe $z_2=c+di$, $(z_2\neq 0)$ atëherë $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

10 Njehso herësat: a) $\frac{3-2i}{1+i}$; b) $\frac{2+i}{2-i}$; c) $\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}$.

11 Cakto pjesën reale dhe imagjinare të numrit kompleks $z=\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}$.

12 Nëse $z_1=2+3i$, $z_2=-3+5i$, trego se:

a) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$; b) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$; c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

13 Janë dhënë numrat kompleks $z_1 = 2-3i$, $z_2 = -3+4i$ dhe $z_3 = 1-i$. Provo vetitë:

a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; b) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$; c) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$;

ç) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$; d) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$. Si quhen këto veti?

Vëre zgjidhjen;

c) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = \left[(2-3i)+(-3+4i)\right] \cdot (1-i) = (-1+i)(1-i) = 2i$ ose

$$z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = (2-3i)(1-i) + (-3+4i)(1-i) = -1-5i+1+7i = 2i.$$

Vetitë tjera provoji vet.

Detyra:

(1) Le të jenë dhënë numrat kompleks $z_1 = \sqrt{2} + i$ dhe $z_2 = 2 - i\sqrt{2}$. Njehso:

a) $z_1 - \overline{z_1} \cdot z_2$; b) $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$; c) $\frac{z_1}{z_2^{\,2}}$; ç) $\frac{z_1 \cdot z_2}{z_1}$.

(2) Nëse $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} i$, vërteto se: a) $z^2 = -\overline{z}$; b) $\overline{z}^2 = -z$; c) $z^2 + \overline{z}^2 = -1$.

(3) Thjeshto shprehjen $3z - 2z + 1$, nëse: a) $z = 1 + 2i$; b) $z = -\frac{1}{2} + i$.

(4) Zgjidhi barazimet: a) $(2-i)z = 1+i$; b) $(i-3)z = 2-3i$.

4 NUMRI KOMPLEKS SI ÇIFT I RADHITUR

Kujtohu!

- Çka paraqet çifti i radhitur i numrave real në rrafsh?
- Ndërmjet pikave në një rrafsh dhe bashkësisë së çifteve të radhitura prej numrave real mund të vendoset korenspondencë.

- Pikat $A(4,3)$, $B(-1,4)$, $C(-1,-3)$ dhe $D(2,-4)$ paraqiti në rrafshin koordinativ.

A Numri kompleks $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ është plotësisht i përcaktuar me pjesën e tij reale a dhe pjesën imagjinare b, d.m.th. me çiftin e radhitur (a,b). Prandaj, numri kompleks $z = a + bi$ mund të shkruhet edhe si çift i radhitur i numrave real, d.m.th. $z = (a,b)$, pra bashkësia e numrave kompleks shkruhet:

$$\mathbb{C} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1 Numrat kompleks $z_1 = 2+3i$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{2}$, $z_3 = 5$, $z_4 = -2i$, $z_5 = i$ shkruaji si çift të radhitur.

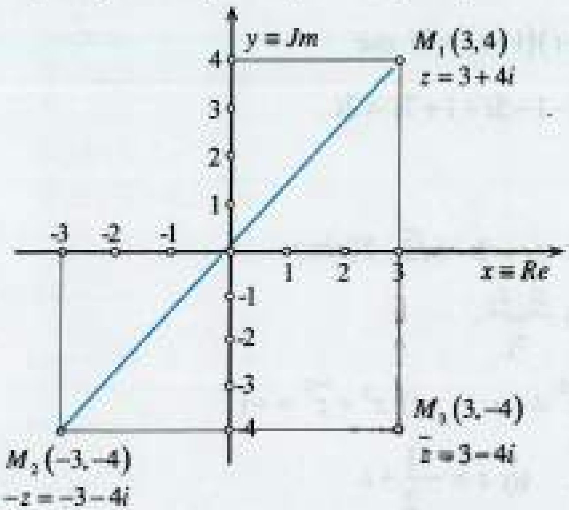
- Numri kompleks $z = (0,b), b \in \mathbb{R}$ është numër i pastër imagjinar, kurse numri kompleks $z = (0,1)$ është njëshe imagjinare, d.m.th. $(0,b) = bi$ dhe $(0,1) = i$.
- Barasia e numrave kompleks dhe operacionet me numrat kompleks të dhënë si çifte të radhitura kryhet sipas rregullave të njëjta, d.m.th.

1. $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$; 2. $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$; 3. $(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.

2 Me zbatimin e rregullave të përmendura kryeji operacionet e shënuara:

a) $(3,5)+(4,2)$; b) $(5,8)(3,0)$; c) $(5,4)(5,-4)$.

3 Në rrafshin koordinativ paraqiti pikat që u përgjigjen numrave kompleks $z=(3,4)$, $-z=(-3,-4)$, $\bar{z}=(3,-4)$.



Mbaj mend!

Rrafshi te i cili me pikat paraqiten numrat kompleks quhet ***rrafsh kompleks*** ose i ***Gausit***, me boshtin real x dhe boshtin imagjinar y.

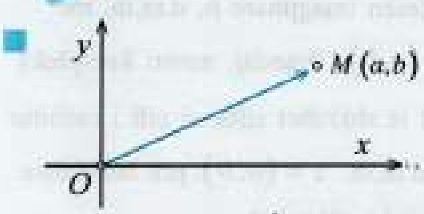
Vëre dhe mbaj mend!

1. Pikat që u përgjigjen numrave kompleks të kundërtë janë simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave.
2. Pikat që u përgjigjen numrave kompleks të konjuguar janë simetrik në lidhje me boshtin real.

4 Në rrafshin kompleks paraqiti numrat kompleks: $z_1=(0,0)$, $z_2=(0,5)$, $z_3=(-4,0)$, $z_4=(-2,3)$ dhe $z_5=(0,1)^2$. Cili prej tyre është real, kurse cilët janë imagjinar?

- Vëre: $(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot0-1\cdot1,\ 0\cdot1+1\cdot0)=(-1,0)$.

Kujtohu!



Vektori $\overline{OM}=(a,b)$ është rreze vektor.

- Cakto shumën dhe ndryshimin e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

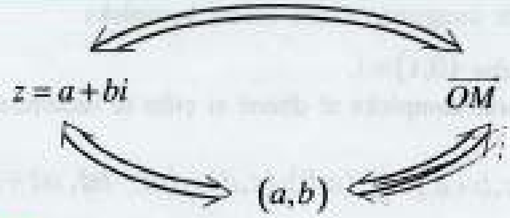
B

Vektori $\overline{OM}$, me fillim në fillimin koordinativ dhe mbarim në pikën e mbarimit $M(a,b)$ quhet ***rreze vektor*** i pikës M.

Koordinatat e pikës M janë edhe koordinatat e rreze vektorit.

Pasi çdo çift i radhitur i numrave real paraqet një numër kompleks, elementet e çiftit të radhitur janë koordinatat e rreze vektorit. Domethënë, ndërmjet numrave kompleks dhe rreze vektorëve mund të vendoset korenspondencë e njëvlershme.

Vëre vizatimin.

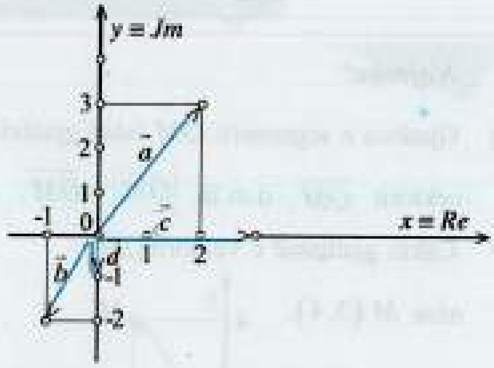


5 Vektorët e dhënë paraqitni në rrafshin kompleks:

$\vec{a}=(2,3)$; $\vec{b}=(-1,-2)$; $\vec{c}=(3,0)$; $\vec{d}=(0,-1)$.

Vëre zgjidhjen:

Vëre, vektorët e dhënë paraqiti në rrafshin kompleks ose të Gausit.



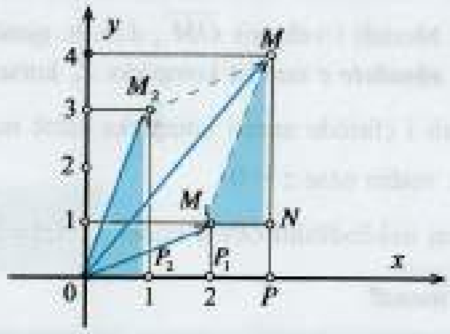
Pasi çdo vektor është përfaqësues i ndonjë numri kompleks, operacionet mbledhje dhe zbritje të numrave kompleks mund të sillen në mbledhjen dhe zbritjen e vektorëve.

6 Janë dhënë numrat kompleks $z_1=2+i$ dhe $z_2=1+3i$. Cakto shumën z_1+z_2 dhe koordinatat e vektorit që është përfaqësues i vektorit $z=z_1+z_2$.

Vëre zgjidhjen:

$z_1=2+i=(2,1)$; $z_2=1+3i=(1,3)$;

$z=z_1+z_2=(2,1)+(1,3)=(3,4)$.



Vëren se $\overline{OM}=\overline{AM_1}+\overline{OM_2}$ sipas rregullës së paralelogramit.

Në përgjithësi, nëse $z_1=a_1+b_1i$ dhe $z_2=a_2+b_2i$,

atëherë $z=z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$.

Pasi $\Delta OP_2M_2\equiv\Delta M_1NM$, për koordinatat e pikës M kemi:

$\overline{OP}=\overline{OP_1}+\overline{P_1P}=\overline{OP_1}+\overline{OP_2}=a_1+a_2$ dhe $\overline{PM}=\overline{PN}+\overline{NM}=\overline{PN}+\overline{P_2M_2}=b_1+b_2$. Domethënë, pika M ka koordinata (a_1+a_2) dhe (b_1+b_2), d.m.th. $M(a_1+a_2,b_1+b_2)$.

7 Janë dhënë numrat kompleks $z_1=-2+3i$ dhe $z_2=3-4i$. Me zbatimin e paraqitjes vektoriale të numrave kompleks cakto: a) z_1+z_2; b) z_1-z_2.

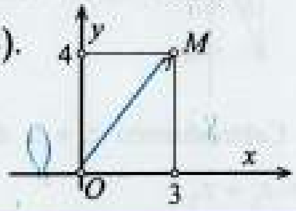
Detyra:

1. Njehso: a) $(-1,4)+(3,-7)$; b) $(-2,3)\cdot(-5,-7)$.
2. Cakto numrat real x dhe y për numrat $z_1=(x+1,3)$ dhe $z_2=(-5,y-4)$ të jenë të barabartë.
3. Në rrafshin kompleks paraqiti numrat: $z_1=(0,0)$; $z_2=(-3,0)$; $z_3=(0,-4)$; $z_4=(-1,5)$; $z_5=(1,-5)$ dhe $z_6=(-1,-5)$.
4. Me zbatimin e paraqitjes vektoriale cakto shumën dhe ndryshimin e numrave kompleks: $z_1=3+4i$ dhe $z_2=2+5i$.

5 MODULI I NUMRIT KOMPLEKS

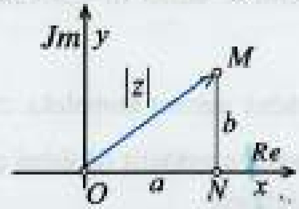
Kujtohu!

- Gjatësia e segmentit OM është gjatësia e vektorit $\overline{OM}$, d.m.th. $\left|\overline{OM}\right| = \overline{OM}$.
- Cakto gjatësinë e vektorit $\overline{OM}$, nëse $M(3,4)$.



A

- Numri kompleks: $z = a + bi,\ a = Re(z),\ b = Jm(z)$ është përcaktuar me çiftin e radhitur (a,b) ose me rreze vektorin $\overline{OM}$ me koordinata (a,b).



- Vëre! Moduli i vektorit $\overline{OM}$, d.m.th. gjatësia e segmentit OM quhet ***modul*** ose ***vlera absolute*** e numrit kompleks Z, kurse shënoht me $|z|$.
- Moduli i çfarëdo numri kompleks është numër real jonegativ, d.m.th. $|z| \geq 0$, kurse $|z| = 0$ vetëm nëse $z = 0$.

Prej trekëndëshit ONM vijon: $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ ose $|z| = \sqrt{Re^2(z) + Jm^2(z)}$.

Mbaj mend!

Moduli i numrit kompleks $z = a + bi$ është $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Vëre se: $|z| = |x + 0 \cdot i| = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$.

1 Cakto modulin e numrit kompleks:

a) $z = 2 + \sqrt{7}\,i$; b) $z = 3 - 4i$; c) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; ç) $z = \frac{(2-i)^2}{1+i}$.

Vëre: $|3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Kujtohu!

- $5 = 4 + 1 = 4 - i^2 = (2 - i)(2 + i)$.
- Cakto katrorin e modulit të numrit kompleks $z = 2 - i$.
- Nëse $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 2 + i$ trego se vlen: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

B

2 Për modulin e numrit kompleks z vlen: $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Me të vërtetë, prej $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ vijon:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi) = z \cdot \overline{z}.$$

3 Le të jetë $|z_1|$ dhe $|z_2|$ module të numrave kompleks z_1 dhe z_2. Do ta vërtetojmë saktësinë e barasive: a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; b) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

■ a) Sipas barasisë $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, kemi $|z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

■ Me zbatimin e vetisë komutative dhe asociative fitojmë:

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}, \text{ pasi } z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2 \text{ dhe } z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_2|^2 \text{ kemi:}$$

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2. \text{ Prej këtu vijon } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

■ b) Për barasinë $\left|z_2 \cdot \dfrac{z_1}{z_2}\right| = |z_1|$ e zbatojmë barasinë paraprake dhe fitojmë:

$$|z_2| \cdot \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1|, \text{ d.m.th. } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

4 Cakto modulin e numrit kompleks $z = (1-i)^4$.

Vëre zgjidhjen:

■ Pasi $z = (1-i)(1-i)(1-i)(1-i)$, prej $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ vijon:

$$|z| = |1-i| \cdot |1-i| \cdot |1-i| \cdot |1-i| = |1-i|^4 = \left(\sqrt{1+1}\right)^4 = 4.$$

Në përgjithësi: $|z^n| = |z|^n$.

5 Cakto modulin e numrit kompleks:

a) $z = \dfrac{(1-i)^5}{(1+i)^4}$; b) $z = \dfrac{\left(1-i\sqrt{2}\right)^5}{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{7}\right)^4}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

Kujtohu!

● Le të jetë $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 5+12i$.

Cakto: $|z_1|, |z_2|, |z_1+z_2|, |z_1-z_2|$.

● Për vlerat paraprakisht të fituara provo a vlejnë këto jobarasi:

a) $|z_1| - |z_2| \le |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

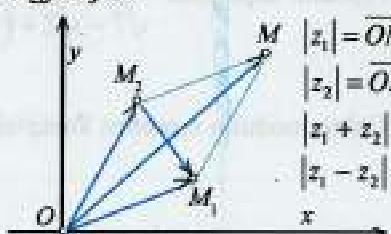
b) $|z| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

C **6** Duke e shfrytëzuar lidhjen ndërmjet vektorëve dhe numrave kompleks, zbato interpretimin grafik për vërtetimin e joabarasive:

1. $|z_1| - |z_2| \le |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$,
2. $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$,

të njohura si jobarasi të trekëndëshit.

Vëre zgjidhjen:



$|z_1| = \overline{OM_1}$

$|z_2| = \overline{OM_2}$

$|z_1+z_2| = \overline{OM}$

$|z_1-z_2| = \overline{M_2M_1}$

■ Prej ΔOM_1M vijon $\overline{OM_1} - \overline{OM_2} < \overline{OM} < \overline{OM_1} + \overline{M_1M}$,

d.m.th. $|z_1| - |z_2| < |z_1+z_2| < |z_1| + |z_2|$.

■ Prej ΔOM_1M_2 vijon $\overline{OM_1} - \overline{OM_2} < \overline{M_1M_2} < \overline{OM_1} + \overline{OM_2}$,

d.m.th. $|z_1| - |z_2| < |z_1 - z_2| < |z_1| + |z_2|$.

Te jobarasitë 1 dhe 2 shenja për barasi vlen vetëm në rastin kur pikat O, M_1 dhe M_2 janë kolineare.

Detyra.

1. Cakto modulin e numrit kompleks:

a) $z=(1+i)^2-3i$; b) $z=\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{7}\right)}{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$; c) $z=\dfrac{(2-i)^2}{3+i}$; ç) $z=\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{5}\right)^3}{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}$.

2. Thjeshtoji thyesat: a) $\dfrac{a^2+1}{a-i}\ (a\neq i)$; b) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+i\sqrt{b}}\ \left(a,b\in\mathbb{R}^+\right)$.

3. Cakto numrin kompleks z, ashtu që $100=z\cdot\bar{z}$, kurse $Re(z)$ dhe $Jm(z)$ janë numra të plotë.

4. Numrat $z_1=5+4i$ dhe $z_2=2+7i$ paraqiti në rrafshin kompleks dhe provo saktësinë e jobarasisë $|z_1|-|z|<|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|$.

Ushtrim kontrollues tematik

1. Njehso $\sqrt{-36}-\sqrt{-16}-\sqrt{-64}+\sqrt{-49}$.

2. Njehso: a) $i^5+i^{-4}-i^{121}$; b) $\dfrac{1}{i^5}+\dfrac{1}{i^{37}}+i^{36}+i^{43}+i^{-18}$.

3. Cakto numër kompleks z, ashtu që $34=z\cdot\bar{z}$ dhe pjesa e tij reale dhe imagjinare janë numra të plotë.

4. Thjeshtoji shprehjet: a) $\dfrac{1+3i}{(-1-i)^2}+\dfrac{(-4+i)(-4-i)}{1+i}$; b) $\dfrac{1-3i}{1-i}-\dfrac{i}{2+i}$.

5. Caktoji numrat real x dhe y prej barasisë $(2+3i)x-(3-4i)y=7i-1$.

6. Thjeshto shprehjen $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)i}{\sqrt{7}-\sqrt{2}+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)i}$.

7. Cakto modulin e numrit kompleks: a) $z=(1-i)^3$; b) $z=\dfrac{1-3i}{3-2i}$.

8. Le të jetë $z_1=3+2i$, $z_2=2+3i$, $z_3=2+5i$. Cakto grafikisht shumën $z_1+z_2+z_3$.

TEMA 3

BARAZIMET KATRORE

Matematikan francez algjebrist, me profesion jurist. I pari e ka futur shënimin e koeficientëve të barazimeve. Me shkronja i ka treguar lidhjet ndërmjet rrënjëve dhe barazimeve katrore.

(1540-1603)

Viet Fransoa

Në këtë temë do të mësosh për:

- barazimet katrore;
- diskriminanta e barazimit katror;
- natyra e zgjidhjeve të barazimit katror;
- formulat e Vietit;
- barazimet bikatrore;
- barazimet iracionale;
- sistem prej një barazimi katror dhe një barazimi linear me dy ndryshore;
- zbatimi i barazimeve katrore.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=0\Rightarrow x_1=x_2,\ \ x_1,x_2\in R$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$D>0\Rightarrow x_1\neq x_2;\quad x_1,\,x_2\in R$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

$$D<0\Rightarrow x_1,x_2\in C$$

1 KONCEPTI PËR BARAZIM KATROR. LLOJET E BARAZIMEVE KATRORE. ZGJIDHJA E BARAZIMEVE JO TË PLOTA KATRORE

Kujtohu!

- Cilët prej këtyre barazimeve janë katrore

  $3x-4y=2;\qquad 2-3x+0\cdot x=0;$

  $3x-x^2=0;\qquad 4x^2-0\cdot x=2;$

  $\frac{1}{x}=x+2,\quad x\neq 0$?

- Rruga gjatë lëvizjes drejtvizore të nxituar $S=V_0t+\frac{at^2}{2}$ është barazim katror me ndryshore t.

- Për cilën vlerë të k barazimi

  $(k-1)x^2-3kx=2$ është katror?

A

Barazimi i llojit $ax^2+bx+c=0$, ku x është ndryshore, kurse $a,b,c\in\mathbb{R}$ dhe $a\neq 0$ quhet barazim katror me një ndryshore.

Monomi ax^2 është anëtar katror, bx anëtar linear, kurse c anëtar i lirë i barazimit katror. Numri a është koeficient i anëtarit katror, b koeficient i anëtarit linear, kurse c është koeficient i lirë.

Për shembull te barazimi $3x^2-x+2=0$, koeficientët janë $a=3$, $b=-1$ dhe $c=2$.

Barazimi $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ quhet ***forma e përgjithshme*** e barazimit katror.

1 Barazimet $3x=4-5x^2$ dhe $(x-1)^2=4x-5$ silli në formën e përgjithshme dhe cakto koeficientët e tyre.

Vëre zgjidhjen:

a) Të gjithë anëtarët e barazimit i sjellim nga njëra anë të barazimit. I radhisim sipas madhësisë treguesit të fuqisë së ndryshores x. I radhisim barazimet njëra nën tjetrën dhe i krahasojmë koeficientët.

$$ax^2+bx+c=0$$

$5x^2+3x-4=0$ Domethënë: $a=5$, $b=3$ dhe $c=-4$.

b) I kryejmë operacionet e shënuara:

$$(x-1)^2=4x-5;$$

$$x^2-2x+1-4x+5=0;$$

$$x^2-6x+4=0$$

$$ax^2+bx+c=0$$

Domethënë: $a=1$, $b=-6$ dhe $c=4$.

2 Transformoji në formën e përgjithshme këto barazime:

a) $\frac{x(x-1)}{3}-2=\frac{x^2-4}{2}$; b) $(x-1)^2-2x=1-(3x+1)^2$.

Kujtohu!

- $\sqrt{x^2}=|x|$
- A është $x=0$ zgjidhje e barazimit $2x^2=0$?
- Barazimi $x^2=4$ ka zgjidhje $x_1=2$ ose $x_2=-2$.
- Barazimi $3x^2=0$ a ka dy zgjidhje?

B

Nëse $b=0$ dhe $c=0$, atëherë barazimi $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ është i formës $ax^2=0$.

3 Zgjidhe barazimin katror $ax^2=0$, $a\neq 0$. Sigurisht pas pjesëtimit me a ke fituar $x^2=0$. Duke rrënjëzuar të dy anët fiton $\sqrt{x^2}=0$, d.m.th. $|x|=0$.

Ky barazim është ekuivalent me barazimet $-x=0$ ose $x=0$ d.m.th. $x_1=0$ ose $x_2=0$.

Mbaj mend!

Barazimi $ax^2=0$ për $a \neq 0$ ka dy zgjidhje të cilët janë të barabartë me zero, d.m.th. $x_1=x_2=0$.
Për $a=0$ barazimi është i formës $0 \cdot x^2=0$, pra çdo vlerë e x është zgjidhje e barazimit.

4 Cakto zgjidhjet e barazimit katror:
a) $(3-\sqrt{2})x^2=0$; b) $(0-3)x^2=0$; c) $mx^2=0$ për $m \neq 0$; ç) $(m-1)x^2=0$ për $m=1$.

Kujtohu!

- Zgjidhje të barazimit $|x|=2$ janë $x_1=2$ ose $x_2=-2$.
- Prej $i^2 \overset{def}{=} -1$ vijon $i=\sqrt{-1}$.
- Cakto vlerën e rrënjës $\sqrt{-4}$.

C Nëse $b=0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$ atëherë barazimi $ax^2+bx+c=0$ është i formës $ax^2+c=0$ të cilin do ta quajmë ***barazim të pastër katror***.

5 Zgjidhe barazimin e pastër katror

$$ax^2+c=0.$$

- Transformo barazimin në këtë formë $x^2=-\frac{c}{a}$.
- Me rrënjëzimin e të dy anëve fiton $|x|=\sqrt{-\frac{c}{a}}$ d.m.th. $x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ose $x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Për shembull:

$2x^2-18=0$	$2x^2+18=0$
$x^2-9=0$	$x^2+9=0$
$x^2=9$	$x^2=-9$
$\|x\|=3$	$\|x\|=3i$
$x_1=-3$ ose $x_2=3$	$x_1=-3i$ ose $x_2=3i$

Mbaj mend!

Barazimi i pastër katror gjithmonë për zgjidhje ka numra të kundërtë $x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ose $x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}}$, të cilët janë numra real $-\frac{c}{a} \geq 0$ ose imagjinar nëse $-\frac{c}{a}<0$.

6 Zgjidhi barazimet e pastërta katrore:
a) $3x^2-12=0$; b) $5x^2+45=0$; c) $14-2x^2=0$.

Kujtohu!

- Polinomi $7x^2+3x$ i zbërthyer në prodhim është $x(7x+3)$.
- Zbërtheje në prodhim polinomin $2x^2-4x$.
- Prodhimi i dy ose më shumë shumëzuesëve është zero kur të paktën njëri prej shumëzuesëve është i barabartë me zero.
- Zero të polinomit $x(x-1)(x+2)$ janë $x_1=0$ ose $x_2=1$ ose $x_3=-2$.

Ç Nëse $c=0,\ a\neq 0,\ b\neq 0$, atëherë barazimi $ax^2+bx+c=0$ është i formës $ax^2+bx=0$, i cili quhet ***barazim katror i përzier***.

7 Zgjidhe barazimin katror $ax^2+bx=0$.

- Barazimin do ta transformojmë në formën $x\cdot(ax+b)=0$, i cili quhet barazim prodhim.
- Barazim prodhim është ekuivalent me disjunksionin e barazimeve

$$x=0 \text{ ose } ax+b=0 \text{ d.m.th. } x_1=0 \text{ ose } x_2=-\frac{b}{a}.$$

Për shembull: $2x^2-11x=0$; $x(2x-11)=0$. Domethënë, $x=0$ ose $x_2=\dfrac{11}{2}$ janë zgjidhje të barazimit të dhënë.

Mbaj mend!

Barazimi katror i përzier gjithmonë ka zgjidhje reale ku, gjithmonë njëra zgjidhje është zero.

Mbaj mend!

Barazimi i formës $ax^2=0;\ ax^2+c=0;\ ax^2+bx=0,\ (a\neq 0)$ quhen barazime katrore jo të plota.

8 Këto barazime katrore jo të plota zgjidhe duke shfrytëzuar disjunksionin e barazimeve.

a) $5x^2=0$; b) $x^2-5=0$; c) $x^2+1=0$; ç) $6x^2-7x=0$.

Vëre zgjidhjen:

a) $5x\cdot x=0$

$x=0$ ose $x=0$, d.m.th.

$x_1=0$ ose $x_2=0$.

b) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$

$x-\sqrt{5}=0$ ose $x+\sqrt{5}=0$

Domethënë $x_1=\sqrt{5}$ ose $x_2=-\sqrt{5}$.

c) $(x-i)(x+i)=0$

$x-i=0$ ose $x+i=0$

Domethënë: $x_1=i$ ose $x_2=-i$.

ç) $x(6x-7)=0$

$x=0$ ose $6x-7=0$, pra

$x_1=0$ ose $x_2=\dfrac{7}{6}$.

D Nëse koeficientët $a\neq 0, b\neq 0$ dhe $c\neq 0$ atëherë barazimi $ax^2+bx+c=0$ quhet barazim i plotë katror. Nëse koeficientët a, b dhe c janë numra real, atëherë themi se barazimi është me koeficienta real.

Ndonjëri prej koeficientëve a, b ose c mund të jetë shprehje, i cili varet prej ndonjë parametri. Në këtë rast themi se ai është ***barazim katror parametrik***.

Për shembull barazimi $(k-2)x^2+2(k+3)x-k+2p=0$ është barazim katror parametrik, kurse koeficientët e tij janë: $a=k-2$, $b=2(k+3)$ dhe $c=-k+2p$.

9 Për cilat vlera të parametrit m barazimi $(2m-1)x^2-3(m+2)x-m+5=0$ është:

a) katror, b) i formës $ax^2+c=0$, c) i formës $ax^2+bx=0$.

Vëre zgjidhjen:

- a) Barazimi është katror nëse $a\neq 0$, d.m.th. $2m-1\neq 0$. Prej këtu vijon $m\neq\frac{1}{2}$.
- b) Te barazimi nuk ka anëtar linear. Domethënë, $b=0$, d.m.th. $-3(m+2)=0$. Prej këtu vijon $m=-2$, pra barazimi është $(2\cdot(-2)-1)x^2-(-2)+5=0$, d.m.th. $-5x^2+7=0$.
- c) Për $c=0$, d.m.th. $-m+5=0$, $m=5$, pra barazimi është $(2\cdot 5-1)x^2-3(5+2)x=0$; $9x^2-21x=0$.

10 Është dhënë barazimi $2x^2-3x-2=0$.

Nëse $x\in\left\{1,2,-2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},3\right\}$, cakto për cilat vlera të x barazimi kalon në barazim numerik të saktë.

Vëre zgjidhjen:

- Me provë do të konstatosh se për $x=2$ dhe $x=-\frac{1}{2}$ barazimi kalon në barazim numerik të saktë.

Mbaj mend!

Vlera e të panjohurës për të cilin barazimi $ax^2+bx+c=0$ kalon në barazim numerik të saktë quhet ***rrënjë*** ose ***zgjidhje*** e barazimit katror.

Detyra:

1. Sili barazimet në formën e përgjithshme:

   a) $\frac{(2x-3)^2}{2}-\frac{x+1}{3}-5=0$; b) $(x+1)^3-(x+2)^3=(x+2)^2$;

   c) $\frac{x+1}{2}\cdot\frac{x+3}{3}-\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2=0$; ç) $(x-2)+(x+k)^2=(k-2)x^2$.

2. Për cilat vlera të parametrit k barazimi $(3k+2)x^2-(k+2)x+5k-2=0$ është:

   a) katror, b) i formës $ax^2+bx=0$, c) i formës $ax^2+c=0$?

3. Zgjidhi barazimet: a) $-8x^2=0$; b) $ax^2+2x^2=0$; c) $ax^2+bx^2=cx^2$.

4. Zgjidhi barazimet e pastra katrore: a) $x(x+5)=5(x+20)$; b) $(x-2)(x-3)=-5(x+2)$.

5. Për cilat vlera të parametrit m barazimi $(m-2)x^2+1=0$ do të ketë rrënjë reale?

6. Duke e shfrytëzuar ekuivalencën $h(x)g(x)=0\Leftrightarrow h(x)=0$ ose $g(h)=0$ zgjidhi barazimet:

   a) $(x-4)(x+5)=0$; b) $(2k-3x)(4x+3k)=0$.

7. Zgjidhi barazimet katrore të përziera:

   a) $\frac{2x^2+3x}{5}-5x+\frac{x^2}{2}=0$; b) $(3x-5)^2-(x-3)^2=16$.

2 ZGJIDHJA E BARAZIMEVE TË PLOTA KATRORE

Kujtohu!

- Në metodat për zbërthimin e polinomëve në shumëzues të thjeshtë.
- Në formulat për shumëzimin e shkurtuar.
- Provo a janë të sakta barasitë:

a) $x^2-4x+4=(x-2)^2$;

b) $x^2+x+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

- Cakto zgjidhjen e barazimit $x^2-2x-8=0$, nëse $x\in\{-3,-2,0,1,4\}$.

A

1 Polinomët zbërtheji në shumëzues:

a) x^2+x-6; b) x^2+2x-3.

Vëre zgjidhjen:

a) $x^2+x-6=x^2+3x-2x-6=$
$=x(x+3)-2(x+3)=(x+3)(x-2)$.

b) Dy anëtarët e parë plotësoji në katror të plotë duke shtuar dhe zbritur numrin 1.

$$x^2+2x-3=(x^2+2x+1)-1-3=$$
$$=(x+1)^2-4=(x+1-2)(x+1+2)=$$
$$=(x-1)(x+3).$$

2 Zgjidhe barazimin $x^2+3x+2=0$. a) duke e zbërthyer në prodhim;
b) duke plotësuar në katror të plotë.

Vëre zgjidhjen:

a) $x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x^2+2x+x+2=0 \Leftrightarrow x(x+2)+(x+2)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)=0$,

$x+2=0$ ose $x+1=0$,

d.m.th. $x=-2$ ose $x=-1$.

b) Anëtari linear $3x$ mundemi ta shkruajmë si prodhim të dyfishtë, d.m.th. $3x=2x\cdot\frac{3}{2}$, pra kemi:

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9-8}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)=0$, pra $x=-1$ ose $x=-2$, janë zgjidhje të barazimit.

3 Zgjidhe barazimi e plotë katror $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$.

Barazimin e pjesëtojmë me a dhe fitojmë $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Anëtari linear $\frac{b}{a}x$ është i barabartë me prodhimin $2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}$, pra $x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{c}{a}=0$.

Është e qartë se anëtari i dytë i binomit është $\frac{b}{2a}$, duke shtuar dhe zbritur $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ fitojmë:

$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$. Prej këtu vijon barazimi: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$.

1) Këtë barazim mund ta llogarisim si barazim të pastër katror, d.m.th.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},\text{ pra me rrënjëzim kemi }\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\text{ d.m.th.}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\text{ose}\quad x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Zgjidhja përfundimtare është: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ose $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2) Deri te zgjidhja e barazimit $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=0$ mund të arrijmë edhe me zbërthim:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0,\text{ d.m.th. }\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

Prej disjunksionit të barazimeve i fitojmë zgjidhjet e mësipërme.

Mbaj mend!

Zgjidhjet e barazimit të plotë katror $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ përcaktohen me formulat

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Vëre se:

1) Me zëvëndësimin $b=0$ dhe $c=0$ te formula për zgjidhjen e barazimit të plotë katror, fitohen zgjidhjet e barazimit katror prej formës $ax^2=0$, t.e. $x_1=0$ ose $x_2=0$.

2) Duke zëvëndësuar $b=0$, fitohen zgjidhjet e barazimit e formës $ax^2+c=0$,

d.m.th. $x_1=-\sqrt{\dfrac{c}{a}}$ ose $x_2=\sqrt{\dfrac{c}{a}}$.

3) Duke zëvëndësuar $c=0$, fitohen zgjidhjet e barazimit prej formës $ax^2+bx=0$,

d.m.th. $x_1=0$ ose $x_2=-\dfrac{b}{a}$.

4 Zgjidhi barazimet katrore: a) $x^2+x-12=0$; b) $x^2=2x+1$;
c) $(5x-2)(8x-1)-(3x+1)(4x-1)-9=0$.

Vëre zgjidhjen:

a) Koeficientët $a=1$, $b=1$ dhe $c=-12$, i zëvëndësojmë te formula $x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ dhe fitojmë $x_{1/2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}$, d.m.th. $x_1=3$ ose $x_2=-4$.

b) Sëpari barazimin e transformojmë në formë të përgjithshme, d.m.th. $x^2-2x-1=0$, kurse pastaj i caktojmë koeficientët $a=1$, $b=-2$, $c=-1$, pra $x_{1/2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2}$.

Dihet se $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, pra $x_{1/2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}$, d.m.th. $x_1=1+\sqrt{2}$ ose $x_2=1-\sqrt{2}$.

c) Pas kryerjes së operacioneve fitojmë: $40x^2-5x-16x+2-12x^2+3x+4x+1-9=0$, d.m.th. $28x^2-22x-6=0$.

Pas pjesëtimit me 2 kemi: $14x^2-11x-3=0$.

Koeficientët e barazimit janë: $a=14$, $b=-11$, $c=-3$.

Me zbatimin e formulave fitojmë: $x_{1/2}=\frac{11\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 14\cdot(-3)}}{2\cdot 14}=\frac{11\pm\sqrt{121+168}}{28}=\frac{11\pm 17}{28}$,

d.m.th. $x_1=\frac{11+17}{28}=1$ ose $x_2=\frac{11-17}{28}=-\frac{3}{14}$. Domethënë, zgjidhje janë $x_1=1$ ose $x_2=-\frac{3}{14}$.

5 Me zbatimin e formulës për zgjidhjen e barazimit katror, zgjidhi barazimet:

a) $7x^2=0$; b) $2x^2-8=0$; c) $7x^2-4x=0$; ç) $2x^2+5x-12=0$.

Kujtohu!

- Cakto vlerën numerike të shprehjes b^2-4ac, nëse a, b dhe c janë koeficientët të barazimit $x^2-4x+3=0$.
  Është dhënë barazimi $(k-1)x^2-kx+1=0$.
- Cakto vlerën e shprehjes b^2-4ac, nëse a, b dhe c janë koeficientët t barazimit të dhënë.

B Zgjidhjet e barazimit katror $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ dhe $a\neq 0$, i caktojmë me formulën

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Shprehja nën rrënjë b^2-4ac shënohet me D, d.m.th. $D=b^2-4ac$ quhet ***diskriminanta*** e barazimit katror, pra formula $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ është, gjithashtu, formulë për caktimin e zgjidhjes së barazimit katror.

Është e dobishme të dish!

1) Nëse koeficientët a, b, c të barazimit katror janë numra real, atëherë zgjidhe duke zbatuar formulën $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Për shembull: $x^2-7x+10=0$, $x_{1/2}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}$, d.m.th. $x_1=5$ ose $x_2=2$.

2) Nëse ndonjëri prej koeficientëve a, b ose c është parametër ose shprehje, atëherç zgjidhe atë që sëpari ta caktosh diskriminantën $D=b^2-4ac$, kurse pastaj shfrytëzo formulën

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Për shembull, barazimi $x^2-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}=0$ do ta zgjidhim barazimin që sëpari do ta caktojmë diskriminantën, d.m.th.

$$D=b^2-4ac=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2.$$

Me zëvendëpsimin te formula $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ fitojmë $x_{1/2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}\pm\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2}$, pra $x_1=\sqrt{3}$ ose $x_2=\sqrt{2}$.

6 Zgjidhe barazimin $x^2-(a+b)x+ab=0$. Diskutoe zgjidhjen e barazimit të barazimit varësisht prej parametrit a dhe b.

Vëre zgjidhjen:

- E caktojmë diskriminantën: $D=(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$,

pra $x_{1/2}=\frac{a+b\pm(a-b)}{2}$.

Për $a\neq b$, $x_1=\frac{a+b+a-b}{2}=a$ ose $x_2=\frac{a+b-a+b}{2}=b$. Për $a=b$, $x_1=\frac{b+b+0}{2}=b$ ose $x_2=\frac{b+b+0}{2}=b$.

Detyra:

1. Zgjidhi barazimet katrore me zbatimin e drejtpërdrejt të formulës:
   a) $6x^2+x-2=0$; b) $4x^2-12x+9=0$; c) $x^2-4x+13=0$.
2. Zgjidhi barazimet katrore së pari duke e caktuar diskriminantën:
   a) $x^2-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{35}=0$; b) $ax^2-(a+1)x+1=0$.

3 DISKUTIMI PËR ZGJIDHJEN E BARAZIMIT KATROR

Kujtohu!

- Çka është diskriminanta e barazimit katror?
- Cakto diskriminantën e çdonjërit prej barazimeve a) $2x^2-3x=0$ dhe b) $x^2+4=0$, kurse pastaj cakto zgjidhjet e tyre.
- Cilës bashkësi i takojnë zgjidhjet e dy barazimeve paraprake??
- Vëre, prej çka varet a është $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ose $x_1,x_2\in\mathbb{C}$?
- Si janë numrat 2 - 3i dhe 2 + 3i?
- Sa është: $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-2}$?

A **1** Cakto zgjidhjet e barazimeve që së pari cakto diskriminantën:
a) $x^2-4x+3=0$; b) $x^2-4x+4=0$; c) $x^2-4x+5=0$.

Vëre zgjidhjen:

a) $D=16-4\cdot1\cdot3=4=2^2>0$; $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{4\pm2}{2}$, pra $x_1=3$ ose $x_2=1$; $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1\neq x_2$.

b) $D=16-4\cdot1\cdot4=0$; $x_{1/2}=\frac{4\pm0}{2}$, d.m.th. $x_1=2$ ose $x_2=2$; $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ dhe $x_1=x_2$.

c) $D=16-4\cdot1\cdot5=-4<0$; $x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{4\pm2i}{2}$, pra $x_1=2+i$ ose $x_2=2-i$; $x_1,x_2\in\mathbb{C}$, $x_1=\overline{x_2}$.

Vëre dhe mbaj mend!

1) Nëse $D > 0$, zgjidhjet e barazimit katror janë numra real dhe të ndryshme.
2) Nëse $D = 0$, zgjidhjet e barazimit katror janë numra real dhe të barabartë.
   Në përgjithësi, nëse $D \geq 0$, atëherë zgjidhjet e barazimit katrorjanë numra real.
3) Nëse $D < 0$, atëherë zgjidhjet e barazimit katror janë numra kompleks të konjuguar.

2 Pa i zgjhidhur barazimet, cakto natyrën e zgjidhjeve të tyre:

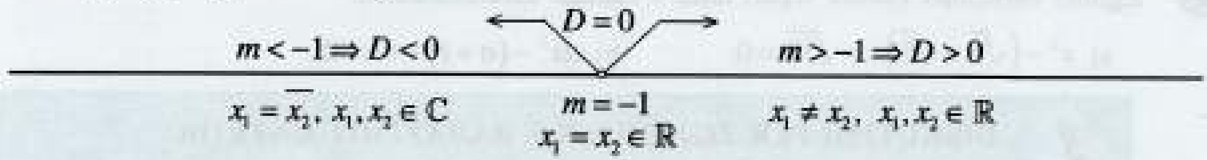
a) $x^2-5x+7=0$; b) $x^2+8x+16=0$; c) $x^2+x+4=0$.

3 Varësisht prej parametrit m, cakto natyrën e zgjidhjeve të barazimeve:

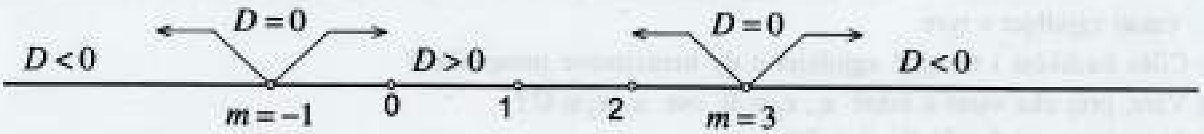
a) $x^2-2x-m=0$; b) $(m-2)x^2-(m+1)x+m+1=0$.

Vëre zgjidhjen:

a) $D = 4 + 4m$. $D = 0$, nëse $4 + 4m = 0$, d.m.th. $m = -1$. Vëre, për $m > -1$, $D > 0$, e për $m < -1$, $D < 0$. Vëre paraqitjen grafike të këtij diskutimi.



b) $D=(m+1)^2-4(m-2)(m+1)=m^2+2m+1-4(m^2-2m+m-2)=-3m^2+6m+9$. Diskriminta $D=0$, nëse $-3m^2+6m+9=0$, d.m.th. $m^2-2m-3=0$ për $m_1=3$ ose $m_2=-1$, me të cilën bashkësia $\mathbb{R}$ është ndarë në tre intervale: $(-\infty,-1),(-1,3)$ dhe $(3,\infty)$.



Me provë e caktojmë shenjën e diskriminantës në një interval, për shembull në intervalin (-1, 3). Nëse intervalin (-1, 3) diskriminanta është negative, atëherë në intervalet tjera është pozitive ose anasjelltas.

Për shembull, për $m = 1$ kemi: $D=-3\cdot 1^2+6\cdot 1+9=12>0$, domethënë në intervalin $(-1, 3)$, $D>0$, kurse në dy të tjerat diskriminanta është negative, d.m.th. $D < 0$. (Ke kujdes, barazimi është katror për $m \neq 2$). Prandaj, nëse:

1) $m\in\{-1, 3\}$, $x_1=x_2$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. 2) $m\in(-1,3)\setminus\{2\}$, $x_1\neq x_2$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.
3) $m\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$, $x_1=\overline{x_2}$, $x_1,x_2\in\mathbb{C}$.

Detyra:

1 Zgjidhi barazimet katrore: a) $x^2-8x+15=0$; b) $x^2+2x+5=0$; c) $x^2-x+\frac{1}{4}=0$.

(2) Pa i zgjidhur barazimet, cakto natyrën e zgjidhjeve:

a) $x^2+x-12=0$; b) $4x^2-12x+9=0$; c) $x^2-6x+25=0$.

(3) Cakto parametrin m, ashtu që barazimi $x^2+2(3-m)x+2m-3=0$ të ketë rrënjë të dyfishtë.

(4) Cakto natyrën e zgjidhjes së barazimit $(k-1)x^2+2(k+2)x+k-3=0$, varësisht prej ndryshimit të parametrit k.

4 LIDHJA NDËRMJET ZGJIDHJEVE TË KOEFICIENTËVE TË BARAZIMIT KATROR

Kujtohu!

- Në teoremat për ekuivalencën e barzimet ekuivalente.
- Barazimin $2x^2-3x+6=0$ transformoje ashtu që koeficienti para anëtarit katror është i barabartë me 1.
- Zgjidhe barazimin $2x^2+3x-5=0$.
- Cakto shumën dhe prodhimin e rrënjëve të barazimit $2x^2+3x-5=0$.
- Për Fransoa Vietin lexo në faqen e titullit të kësaj teme.

A Le të jetë dhënë barazimi katror $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$. Nëse barazimin e dhënë e pjesëtojmë me a, fitohet barazim katror i ri ekuivalent me barazimin e dhënë, d.m.th.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Zakonisht, koeficientët e barazimit të ri i shënojmë me p dhe q, d.m.th.

$\frac{b}{a}=p$ dhe $\frac{c}{a}=q$, pra barazimi është i llojit

$$x^2+px+q=0$$

i cili quhet ***forma normale*** e barazimit katror.

1. Barazimin katror: a) $2x^2+3x+7=0$, b) $mx^2-(m+1)x-3=0$ transformoje në formë normale, kurse pastaj cakto koeficientët e tij

2. Cakto shumën dhe prodhimin e rrënjëve të barazimit $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$.
Vëre zgjidhjen:

- E ke të njohur se rrënjët e barazimit të dhënë janë:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ ose } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \text{ kurse}$$

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Vëre dhe mbaj mend!

Nëse x_1 dhe x_2 janë rrënjë të barazimit katror $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, atëherë

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ dhe $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, quhen ***formulat e Vietiti***

Nëse barazimi është në formën normale, d.m.th. $x^2+px+q=0$, atëherë formulat e Vietit janë

$$x_1+x_2=-p \text{ и } x_1\cdot x_2=q.$$

3 Pa i zgjidhur barazimet: a) $3x^2-4x+5=0$ dhe b) $x^2+(m+1)x-2m+3=0$, cakto shumën dhe prodhimin e rrënjëve të çdo barazimi.

a) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$; b) $x_1+x_2=-p=-(m+1)$, $x_1\cdot x_2=q=-2m+3$.

4 Për numrat x_1 dhe x_2 le të vlej $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$. Vërteto se x_1 dhe x_2 janë zgjidhje të barazimit $x^2+px+q=0$.

Vëre zgjidhjen.

Prej $x_1+x_2=-p$ vijon $p=-(x_1+x_2)$, pra barazimi është i llojit $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$.

Për $x=x_1$ kemi: $x_1^2-(x_1+x_2)\cdot x_1+x_1\cdot x_2=0$ kemi $x_1^2-x_1^2-x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_2=0$, d.m.th. $0=0$. Domethënë, për $x=x_1$ barazimi i dhënë kalon në barasi numerike të saktë, d.m.th. x_1 është zgjidhje e barazimit. Në mënyrë të ngjashme trego se gjykimi është i saktë edhe për $x=x_2$.

Me këtë është vërtetua kjo teoremë:

Teorema: Numrat x_1 dhe x_2 janë zgjidhje të barazimit $ax^2+bx+c=0$ nëse dhe vetëm nëse $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ dhe $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, nëse barazimi është i formës $x^2+px+q=0$, atëherë

$$x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=q.$$

5 Me zbatimin e formulave të Vietit cilët prej numrave të dhënë janë rrënjë të barazimeve përkatëse:

a) 3 dhe 4 për $x^2-7x+12=0$; b) 3 dhe -4 për $x^2+7x-12=0$; c) $1\pm\sqrt{2}$ për $x^2-2x-1=0$.

Nëse numrat e dhënë i kënaqin formulat e Vietit, domethënë ato numra janë zgjidhje të barazimit përkatës.

a) Prej $x_1+x_2=-p$ dhe $x_1\cdot x_2=q$, vijon $p=7$, $q=12$. Pasi $3+4=-(-7)=7$ dhe $3\cdot 4=12$, numrat 3 dhe 4 janë rrënjë të barazimit $x^2-7x+12=0$.

6 Le të jetë x_1 dhe x_2 rrënjë të barazimit $x^2+px+q=0$. Vërteto se $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$.

Vëre vërtetimin:

Shprehjen $x_1^2+x_2^2$ e plotësojmë deri në katror të plotë të binomit. Duke shtuar dhe zbritur $2x_1x_2$ fitojmë: $x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Sipas formulave të Vietit kemi $x_1+x_2=-p$ dhe $x_1\cdot x_2=q$, vijon $x_1^2+x_2^2=(-p)^2-2q=p^2-2q$.

7 Le të jetë x_1 dhe x_2 zgjidhje e barazimit $3x^2-2x+6=0$. Pa e zgjidhur barazimin e dhënë, cakto vlerën e çdonjërit prej shprehjeve:

a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; b) $\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}$; c) $2x_1-3x_2^2+2x_2-3x_1^2$.

Vëre zgjidhjen:

Sipas formulave të Vietit kemi: $x_1+x_2=-\frac{-2}{3}=\frac{2}{3}$ dhe $x_1\cdot x_2=\frac{6}{3}=2$. Çdonëri prej shprehjeve e transformojmë në shprehje që do t'i përmbaj vetëm shprehjet x_1+x_2 dhe $x_1\cdot x_2$.

a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$; b) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1\cdot x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot 2}{2}=-\frac{16}{9}$.

c) $2x_1-3x_2^2+2x_2-3x_1^2=2(x_1+x_2)-3(x_1^2+x_2^2)=2\cdot\frac{2}{3}-3\cdot\left(-\frac{32}{9}\right)=\frac{36}{3}=12.$

Detyra

1. Barazimet katrore të dhëna shkruaji në formë normale, kurse pastaj për çdonjërin prej tyre cakto p dhe q:

   a) $3x^2-6x+5=0$; b) $mx^2-(m+2)x-5m=0$.

2. Le të jenë x_1 dhe x_2 rrënjë të barazimit $x^2+px+q=0$. Vërteto se $x_1^3+x_2^3=3pq-p^3$.

3. Pa e zgjidhur barazimin $2x^2-4x+1=0$, cakto vlerën e çdonjërit prej shprehjeve:

   a) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$; b) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$; c) $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$, nëse x_1 dhe x_2 janë rrënjë të barazimit.

5 ZBATIMI I FORMULAVE TË VIETIT

Kujtohu!

- Zgjidhje të barazimit $x^2+7x+12=0$ janë: $x_1=3$ ose $x_2=4$.
- A mund të formosh barazim rrënjët e të cilit janë numrat 2 dhe 3?
- Cakto parametrin k te barazimi $x^2+(k+1)x+2=0$, nëse rrënjët e tij janë 1 dhe 2.

A Me zbatimin e formulave të Vietit do të zgjidhim disa detyra me të cilat do të japim përgjigje në pjesën „Kujtohu".

1 Formo barazim katror rrënjët e të cilit janë $x_1=2$ ose $x_2=-7$.

Vëre zgjidhjen.

- Sipas formulave të Vietit x_1 dhe x_2 janë zgjidhje të barazimit $x^2+px+q=0$, nëse $x_1+x_2=-p$ dhe $x_1\cdot x_2=q$.

Pra, barazimi i kërkuar është i llojit : $x^2+px+q=0$, ku $p=-(x_1+x_2)$, kurse $q=x_1\cdot x_2$.

- Prej $x_1=2$ dhe $x_2=-7$ vijon $p=-(2-7)=5$, $q=2\cdot(-7)=-14$, pra $x^2+5x-14=0$ është barazimi i kërkuar.

2 Formo barazim katror me koeficient real nëse rrënjët e tij janë:

a) $x_1=-\frac{2}{3}, x_2=0,5$; b) $x_1=3-\sqrt{2}, x_2=3+\sqrt{2}$; c) $x_1=5-4i, x_2=\overline{x_1}$; ç) $x_1=a+b, x_2=a-b$.

Vëre zgjidhjen:

c) $p=-(5-4i+5+4i)=-10$, $q=(5-4i)(5+4i)=25-16i^2=41$, pra barazimi është $x^2-10x+41=0$.

3 Cakto brinjët e drejtkëndëshit syprina e të cilit është 10 cm^2, kurse perimetri 14 cm.

Udhëzim: $a+b=7$ dhe $a\cdot b=10$. Shfrytëzo formula e Vietit.

4 Është dhënë barazimi $mx^2-(2m+2)x+1=0$. Cakto parametrin m, ashtu që rrënjët x_1 dhe x_2 e barazimit të dhënë e kënaqin relacionin $x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2=4$.

Vëre zgjidhjen.

- Sipas formulave të Vietit kemi: $x_1+x_2=-\dfrac{-(2m+2)}{m}=\dfrac{2m+2}{m};\ x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{m}, m\neq 0.$
- Prej $x_1^2x_2+x_1x_2^2=4$ vijon $x_1x_2(x_1+x_2)=4$, pra me zëvëndësimin e fitojmë barazimin

$\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{2m+2}{m}=4$ ose $4m^2-2m-2=0$, d.m.th. $2m^2-m-1=0$, rrënjët e të cilit janë $m=1$ ose $m=-\dfrac{1}{2}$.

Nëse përpiqesh ta zgjidhish detyrën në tjetër mënyrë, d.m.th. sëpari t'i caktosh rrënjët e barazimeve x_1 dhe x_2 të cilët do t'i zëvëndësosh te relacioni i dhënë, në këtë rast do të fitosh barazim të përbërë deri te zgjidhja e të cilit vështir arrihet.

5 Cakto parametrin m te barazimi $x^2-(m+1)x+m+3=0$, ashtu që një rrënjë e tij është dy herë më e madhe se tjetra.

Vëre zgjidhjen:

- Vëre, barazimi është në formën normale, pra $x_1+x_2=-p=-(-(m+1))=m+1$ dhe $x_1\cdot x_2=m+3$.

Prej kushtit $x_1=2x_2$ vijon sistemi:

$$\begin{cases}x_1=2x_2\\ x_1+x_2=m+1\\ x_1\cdot x_2=m+3.\end{cases}$$

Prej sistemit $\begin{cases}x_1=2x_2\\ x_1+x_2=m+1\end{cases}$ kemi:

$3x_2=m+1$, pra $x_2=\dfrac{m+1}{3}$ dhe $x_1=\dfrac{2(m+1)}{3}$.

Me zëvëndësimin x_1 dhe x_2 te barazimi i tretë fitojmë $\dfrac{2(m+1)}{3}\cdot\dfrac{m+1}{3}=m+3$, d.m.th. $2m^2-5m-25=0$, zgjidhjet e të cilit janë $m_1=5$ ose $m_2=-\dfrac{5}{2}$.

Detyra:

1. Formo barazim katror me koeficient real, nëse $x_1=4-7i$ është rrënjë e atij barazimi.
2. Le të jenë x_1 dhe x_2 rrënjë të barazimit $3x^2-6x-5=0$. Pa e zgjidhur barazimin, cakto vlerën e shprehjeve: a) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$; b) $\dfrac{x_1}{x_2^2}+\dfrac{x_2}{x_1^2}$.
3. Cakto parametrin m e barazimit $x^2-4x+m=0$, nëse për rrënjët e tij x_1 dhe x_2 vlen relacioni: a) $x_1-3x_2=0$; b) $x_1^2+x_2^2=40$.
4. Cakto parametrin m te barazimi katror:

   a) $x^2-(m+3)x+m+2=0$, nëse për rrënjët e tij vlen $\dfrac{x_1}{x_1+1}+\dfrac{x_2}{x_2+1}=\dfrac{13}{10}$;

   b) $x^2-2mx+m^2=1$, nëse për rrënjët e tij vlen relacioni $x_1=2x_2$.

6 ZBËRTHIMI I KATRORIT TË TRINOMIT NË PRODHIM. ZBATIMI I BARAZIMEVE KATRORE

Kujtohu!

Vëre se si në shumëzues të thjesht do ta zbërthejmë polinomin $x^2 - 7x + 12$.

$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 =$
$= x(x - 3) - 4(x - 3)=$
$= (x - 3)(x - 4).$

- Cakto vlerën e polinomit $x^2 - 7x + 12$ për $x = 3$.
- Çka është zero e polinomit?
- Çka është trinom?

A Zgjidhjet e barazimit katror $x^2 - 5x + 6 = 0$ janë $x_1 = 3$ ose $x_2 = 2$.

1 Cakto vlerën e polinomit

$x^2 - 5x + 6$ për $x \in \{-1, 0, 2\}$.

Për $x = -1$ kemi:

$x^2 - 5x + 6 = (-1)^2 - 5\cdot(-1) + 6 = 12.$

Për $x = 0$ kemi: $x^2 - 5x + 6 = 6$.

Për $x = 2$ kemi:

$x^2 - 5x + 6 = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0.$

Mbaj mend!

Vlera e ndryshores x, për të cilën polinomi $P(x)$ fiton vlerë zero quhet ***zero e polinomit***.

Vëre, zero e katrorit të trinomit $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ janë, në realitet rrënjët e barazimit katror $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

2 Katrorin e trinomit $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ shkruaje si prodhim prej shumëzuesëve linear. Vëre zgjidhjen:

Le të jenë x_1 dhe x_2 zero reale të katrorit të trinomit. Me zbatimin e formulave të Vietit kemi:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},\text{ pra } ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right) =$$

$$= a\left(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2\right) = a\left(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Mbaj mend!

Barasia $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ tregon se si zbërthehet në prodhim katrori i trinomit $ax^2 + bx + c$, ku x_1 dhe x_2 janë zero të trinomit.

3 Zbërtheje në prodhim trinomin: a) $x^2 - 8x + 12$; b) $x^2 + x - 12$; c) $8x^2 + 2x - 3$.

c) Zero të trinomit janë: $x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 8\cdot(-3)}}{2\cdot 8}$, d.m.th. $x_1 = \dfrac{1}{2}, x_2 = -\dfrac{3}{4}$. Prandaj,

$$8x^2 + 2x - 3 = 8(x - x_1)(x - x_2) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right) = 8\cdot\frac{2x - 1}{2}\cdot\frac{4x + 3}{4} = (2x - 1)(4x + 3).$$

4 Formo barazim katror zgjidhjet e të cilit janë $x_1=\frac{1}{2}$ dhe $x_2=-3$.

Vëre zgjidhjen:

Prej $a(x-x_1)(x-x_2)=0$, pasi $a\neq 0$, vijon $(x-x_1)(x-x_2)=0$ ose $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=0$,

përkatësisht $x^2+3x-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$, d.m.th. barazimi i kërkuar është $2x^2+5x-3=0$.

5 Thjeshto thyesën $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$.

Vëre zgjidhjen:

Për numëruesin kemi: $x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$,

$x_1=2$ dhe $x_2=-3$, pra $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$.

Kujtohu!

Që të thjeshtojmë thyesën e dhënë, duhet numëruesin dhe emëruesin e thyesës ta zbërthejmë në prodhim.

Prandaj, $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2}=\frac{x+3}{x-2}$, për $x\neq 2$.

Kujtohu!

- Për cilën vlerë të x ka kuptim thyesa $\frac{x+1}{x^2-4}$?

- Cakto bashkësinë e përkufizimit të barazimit

$$\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{4+x^2}{1-x^2}.$$

B 6 Është dhënë barazimi thyesor racional

$$\frac{3x}{x-1}+\frac{4x}{x+1}=\frac{2x^2-6x}{x^2-1}.$$

Cakto zgjidhjet e tij.

Vëre zgjidhjen:

Barazimi është përkufizuar për $x-1\neq 0$, $x+1\neq 0$, d.m.th $x\neq 1$ dhe $x\neq -1$.

Domethënë, bashkësia e përkufizimit të barazimit të dhënë është $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Barazimin e dhënë e shumëzojmë me SHVP$(x-1,x+1)=x^2-1$ dhe fitojmë:

$$3x(x+1)+4x(x-1)=2x^2-6x,$$

$$3x^2+3x+4x^2-4x=2x^2-6x,$$

$$5x^2+5x=0,\ x_1=0 \text{ ose } x_2=-1.$$

Pasi $x_2=-1$ nuk i takon bashkësisë së përkufizimit, zgjidhje e barazimit është $x=0$.

7 Zgjidhe barazimi: $\frac{2x+1}{x^2+x-6}-\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{6}{x^2-9}$.

Udhëzim: Zbërtheji emëruesët, cakto SHVP të tyre, cakto bashkësinë e përkufizimit.

8 Cakto zgjidhjen e barazimit thyesor racional $\frac{x-n}{x-m}+\frac{x-m}{x-n}=\frac{10}{3}$, nëse parametrat $m,n\in\mathbb{R}$.

Vëre zgjidhjen:

Barazimi është parametrik, pra për $x\neq m$ dhe $x\neq n$, SHVP$=3(x-m)(x-n)$.

■ Pas lirimit të emëruesëve kemi: $3(x-n)^2+3(x-m)^2=10(x-m)(x-n)$.

■ Forma e përgjithshme e barazimit është $4x^2-4(m+n)x-3m^2-3n^2+10mn=0$.

■ Diskriminanta e barazimit është $D=\left(4(m+n)\right)^2-4\cdot4\left(-3m^2-3n^2+10mn\right)$, d.m.th.

$$D=\left(8(m-n)\right)^2.$$

■ Rrënjët e barazimit janë: $x_{1/2}=\dfrac{4(m+n)\pm8(m-n)}{8}$, d.m.th. $x_1=\dfrac{3m-n}{2}$ ose $x_2=\dfrac{3n-m}{2}$.

Është e dobishme të dish!

Barazimi $\dfrac{x-n}{x-m}+\dfrac{x-m}{x-n}=\dfrac{10}{3}\ (x\neq m, x\neq n)$ mund ta shkruajmë në formën $\dfrac{x-n}{x-m}+\dfrac{1}{\dfrac{x-n}{x-m}}=\dfrac{10}{3}$, pra

me futjen e zëvëndësimit $\dfrac{x-n}{x-m}=y$ ai transformohet në barazim katror

$y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{3}$, zgjidhjet e të cilit janë $y_1=3$ ose $y_2=\dfrac{1}{3}$.

Pastaj prej $\dfrac{x-n}{x-m}=3$ vijon $x_1=\dfrac{3m-n}{2}$, kurse prej $\dfrac{x-n}{x-m}=\dfrac{1}{3}$ vijon $x_2=\dfrac{3n-m}{2}$.

Kujtohu!

- Shkruaj numër që është:
  a) një e katërta e numrit x;
  b) tre herë më i madh se numri x;
  c) tre herë më i vogël se numri x.
- Formo tekst sipas të cilit mund të formosh barazimin $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{10}{3}$.

C

9 Ndryshimi i vlerave reciproke të dy numrave të plotë të njëpasnjëshëm është $\dfrac{1}{30}$. Cilët janë ato numra?

Vëre zgjidhjen:

■ Le të jetë x dhe $x+1$ numra të plotë të njëpasnjëshëm. Vlerat e tyre reciproke janë numrat $\dfrac{1}{x}$ dhe $\dfrac{1}{x+1}$.

■ Sipas kushtit të detyrës e formojmë barazimin $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{30}$, $(x\neq0, x\neq-1)$.

Pas rregullimit e fitojmë barazimin katror të formës së përgjithshme $x^2+x-30=0$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1=5$ ose $x_2=-6$.

■ Numrat e kërkuar janë 5 dhe 6 ose -6 dhe -5.

10 Sa vjet ka tani Jetoni, nëse ai pas tre vjet do të ketë aq vjet, sa është katrori i numrit të vjetëve të tij që i ka pasur para tre vjet?

11 Te cili shumëkëndësh mund të tërhiqen gjithsej 170 diagonale?

Detyra.

1. Thjeshto shprehjen $\frac{x+1}{x^2+x-2}-\frac{x}{x^2-1}$.

2. Zgjidhe barazimin dhe diskuto zgjidhjen: $\frac{x}{x-a}+\frac{2a}{x+a}=\frac{8a^2}{x^2-a^2},\ (x\neq\pm a, a\in\mathbb{R})$.

3. Dy punëtor mund ta kryejnë një punë për $6\frac{2}{3}$ orë. Sa kohë i nevojitet punëtorit të parë vet ta kryen punën, nëse për atë i nevojiten tre orë më pak se sa punëtorit të dytë kur do të punonte vet?

7 BARAZIMET BIKATRORE

Kujtohu!

- Provo cilët prej numrave 0, -4, 4, 2, -2 janë zgjidhje të barazimit $x^4-16x^2=0$.

- I cilës shkallë është barazimi i dhënë dhe sa zgjidhje ka ai?

A 1 Barazimet e dhëna janë të shkallës së katërtë. Cakto zgjidhjet e çdonjërit prej tyre.

a) $x^4=0$;

b) $x^4-16=0$;

c) $x^4-9x^2=0$;

ç) $x^4-7x^2+12=0$.

Vëre zgjidhjen:

- a) Prej $x\cdot x\cdot x\cdot x=0$ vijon $x_1=x_2=x_3=x_4=0$, pra barazimi ka katër rrënjë të barabarta me zero.
- b) Prej barazimit vijon $(x^2-4)(x^2+4)=0$, d.m.th. $(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)=0$, pra $x_{1/2}=\pm2$, $x_{3/4}=\pm2i$. Domethënë, barazimi ka katër rrënjë: dy reale të ndryshme dhe dy imagjinare të ndryshme.
- c) $x^2(x^2-9)=0$, d.m.th. $x\cdot x(x-3)(x+3)=0$, pra $x_{1/2}=0$, $x_{3/4}=\pm3$. Domethënë, barazimi ka dy rrënjë të barabarta me zero dhe dy rrënjë reale të ndryshme.
- ç) Barazimin $x^4-7x^2+12=0$ mundemi ta shkruajmë në formën $(x^2)^2-7x^2+12=0$.
- Nëse e marrim zëvëndësimin $x^2=y$, e fitojmë barazimin katror $y^2-7y+12=0$, zgjidhjet e të cilit janë $y_1=3$ ose $y_2=4$.
- Kthehemi te zëvëndësimi, pra kemi: $x^2=y_1$ ose $x^2=y_2$, d.m.th. $x^2=3$ ose $x^2=4$.
- Prej $x^2=3$ vijon $x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$, kurse prej $x^2=4$ vijon $x_{3/4}=\pm2$.
- Prandaj, barazimi ka katër rrënjë, $x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$; $x_{3/4}=\pm2$.

Mbaj mend!

Barazimi i formës $ax^4+bx^2+c=0, (a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq0)$ quhet ***barazim bikatror***.

2 Zgjidhe barazimin bikatror $ax^4+bx^2+c=0, \quad (a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0)$.

Vëre zgjidhjen:

- Barazimin e dhënë e shkruajmë në formën $a\left(x^2\right)^2+bx^2+c=0$ dhe marrim ndryshore të re y, d.m.th. $x^2=y$.

- Fitojmë barazim katror $ay^2+by+c=0$, zgjidhjet e të cilit janë y_1 ose y_2, të fituar sipas formulës për zgjidhjen e barazimit katror.

Me kthimin te zëvëndësimi, fitojmë $x^2=y_1$, $x^2=y_2$, d.m.th. $x_{1/2}=\pm\sqrt{y_1}$ ose $x_{3/4}=\pm\sqrt{y_2}$.

3 Zgjidhe barazimin $x^4-13x^2+36=0$.

4 Thjeshto thyesën: a) $\dfrac{x^2-4}{x^4-13x^2+36}$; b) $\dfrac{9b^4-40b^2+16}{4b^4-17b^2+4}$.

Detyra:

1. Zgjidhi barazimet: a) $5x^4=0$; b) $3x^4-27=0$; c) $x^4+4x^2=0$.
2. Cakto zgjidhjet e barazimit bikatror:

   a) $\left(4x^2+5\right)\left(x^2-5\right)=6x^2$; b) $\dfrac{2x^2+3}{5}-\dfrac{5x^2-16}{10}=\dfrac{30-2x^2}{x^2-6}$.
3. Formo barazim bikatror zgjidhjet e të cilit janë $x_{1/2}=\pm3$, $x_{3/4}=\pm\sqrt{2}$.
4. Syprina e një drejtkëndëshi është $60cm^2$, kurse diagonalja e tij është $13cm$. Cakto brinjët e drejtkëndëshit.

8 BARAZIMET IRACIONALE

Kujtohu!

- Për cilën shprehje themi se është iracionale?
- Për cilat vlera reale shprehjet:

  a) $\sqrt{x+5}$; b) $\sqrt[3]{3-2x}$, - kanë kuptim?

  Cakto bashkësinë e përkufizimit të shprehjes
- $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-4}$.

Bashkësia e përkufizimit të shprehjes iracionale është bashkësia e numrave real ku shprehjet iracionale janë numra real.

A **1** Cili prej barazimeve të dhënë janë barazime iracionale:

a) $x+\sqrt{2}=5$; b) $x^2+\sqrt{3}=\sqrt{5}$;

c) $x-\sqrt{x}=2$?

Barazimi te i cili një anëtar i tij që e përmban ndryshoren është shprehje iracionale quhet ***barazim iracional***.

Zgjidhja e barazimeve iracionale kryhet në dy faza:

1) Cakto bashkësia e përkufizimit të barazimit.

2) Anëtarët iracional të barazimit që e përmbajnë të panjohurën transformohen në shprehjet racionale.

2 Cakto bashkësin e përkufizimit të çdonjërës prej barazimeve:

a) $\sqrt{x-1}=3$; b) $\sqrt[3]{x+5}=3$; c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$;

ç) $\dfrac{3}{\sqrt{x-3}}-\sqrt{5-x}=0$; d) $\sqrt{x-4}+\sqrt{2-x}+\sqrt{10-x}=0$.

Vëre zgjidhjen:

- a) Rrënja me tregues të rrënjës numër çift është numër real vetëm nëse shprehja nën rrënjë është numër real jonegativ. Prandaj, $x-1\geq 0$, d.m.th. $D=[1,\infty)$.
- b) Rrënjë me tregues të rrënjës numër tek është përkufizuar për çdo numër real, pra $D=\mathbb{R}$.
- c) $\begin{cases}x\geq 0\\ x+1\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\geq o\\ x\geq -1\end{cases}$; $D=[0,\infty)$, ç) $\begin{cases}x-3>0\\ 5-x\geq 0\end{cases}$; $D=(3,5]$. d) $\begin{cases}x-4\geq 0\\ 2-x\geq 0\\ 10-x\geq 0\end{cases}$; $D=\varnothing$.

3 Zgjidhi barazimet iracionale:

a) $\sqrt{x-1}+7=x$; b) $\sqrt{2x^2+7}=x^2-4$; c) $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$.

Vëre zgjidhjen:

- a) E caktojmë bashkësinë e përkufizimit. Prej $x-1\geq 0$ vijon $D_1=[1,\infty)$.
- Nëse te barazimi ka një anëtar iracional që e përmban të panjohurën x, atë anëtar e lejmë në një anë, kurse anëtarët tjerë i bartim në anën tjetër të barazimit, pra kemi $\sqrt{x-1}=x-7$.
- Është e njohur se $3^2=9$ dhe $(-3)^2=9$. Domethënë, edhe nëse $3\neq -3$, përsëri $3^2=(-3)^2$. Për atë shkak vijon se operacioni i fuqizimit me tregues numër çift në të dy anët e barazimit nuk është transformacion ekuivalent.

Prandaj, barazimet $\sqrt{x-1}=x-7$ dhe $\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-7)^2$ janë ekuivalent nëse

$x-7\geq 0$, d.m.th. $x\geq 7$, pra $D_2=[7,\infty)$.

- Barzimet janë ekuivalente vetëm nëse $x\in D_1\cap D_2$, d.m.th. $D=[1,\infty)\cap[7,\infty)=[7,\infty)$.

Pas kryerjes së fuqizimit e fitojmë barazimin $x-1=x^2-14x+49$, d.m.th.

$x^2-15x+50=0$, rrënjët e të cilëve janë $x_1=10$ ose $x_2=5$.

- Zgjidhje e barazimit të dhënë është $x=10$. Pasi $x_2=5\notin D$, domethënë ai nuk është zgjidhje e barazimit të dhënë, kurse për atë lehtë bindemi.

Për $x=5$, fitojmë barasi numerike jo të sakta, përkatësisht $\sqrt{5-1}-7=5$, d.m.th. $-5=5$.

b) Prej $2x^2+7\geq 0$ vijon $D_1=\mathbb{R}$.

Pas fuqizimit barazimi do të jetë ekuivalent me barazimin e dhënë nëse $x^2-4\geq 0$, d.m.th. $(x-2)(x+2)\geq 0$, pra prej këtu kemi $D_2=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$.

Domethënë, $D=D_1\cap D_2=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$.

Pas fuqizimit fitojmë: $2x^2+7=\left(x^2-4\right)^2$ ose $2x^2+7=x^4-8x^2+16$, d.m.th. $x^4-10x^2+9=0$. Zgjidhjet e barazimit bikatror janë $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=1$ ose $x_4=-1$.

Prej tyre vetëm $x_1,x_2\in D$, pra rrënjët e barazimit të dhënë janë $x=3$ ose $x=-3$.

Në saktësinë e zgjidhjeve të caktuara bindu vet me provën. (Prova bëhet te barazimi i dhënë).

c) Bashkësia e përkufizimit të barazimit të dhënë është $\begin{cases}2x+8\geq 0\\ x+5\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -4\\ x\geq -5\end{cases}, D_1=[-4,\infty)$.

Pasi te barazimi ka dy anëtar iracional që e përmbajnë të panjohurën x, ato i bartim në anë të ndryshme të barazimit, pra kemi:

$$\sqrt{2x+8}=7-\sqrt{x+5} \text{ ose }.$$

$$\left(\sqrt{2x+8}\right)^2=\left(7-\sqrt{x+5}\right)^2$$

$$2x+8=49-14\sqrt{x+5}+x+5$$

$$14\sqrt{x+5}=46-x$$

$$\left(14\sqrt{x+5}\right)^2=(46-x)^2$$

$$196(x+5)=2116-92x+x^2$$

$$x^2-288x+1136=0.$$

Zgjidhjet e barazimit janë $x_1=4$ ose $x_2=280$. Cila vlerë është zgjidhje e barazimit të dhënë iracional, e caktojmë me provë.

Për x = 4, barasia $\sqrt{2\cdot 4+8}+\sqrt{4+5}=7$ është e saktë, d.m.th. 3 + 4 = 7. Për $x=280$, barasia $\sqrt{2\cdot 280+8}+\sqrt{280+5}=7$ është jo e vërtetë. Prandaj, zgjidhje e barazimit të dhënë iracional është $x=4$.

Mbaj mend!

Para çdo kuadrimi, gjatë zgjidhjes së barazimeve iracionale duhet të caktojmë bashkësinë e përkufizimit te e cila fitohen barazimet ekuivalente.

Caktimi i bashkësisë së përkufizimit të disa barazimeve iracionale nuk është e thjeshtë, pra në rastin e atillë barazimin e zgjidhim pa caktuar bashkësinë e përkufizimit. Cilët prej vlerave të fituara të ndryshores do të jenë zgjidhje të barazimit, konstatojmë me provë.

4 Zgjidhe barazimin $\sqrt{2x-15}-\sqrt{x+16}=-1$, pa caktuar bashkësinë e përkufizimit.

Vëre zgjidhjen:

I bartim anëtarët iracional: $\sqrt{2x-15}=\sqrt{x+16}-1$.

Fuqizojmë: $\left(\sqrt{2x-15}\right)^2=\left(\sqrt{x+16}-1\right)^2$; $2x-15=x+16-2\sqrt{x+16}+1$.

Përsëri i bartim anëtarët iracional: $2\sqrt{x+16}=32-x$.

Përsëri fuqizojmë: $\left(2\sqrt{x+16}\right)^2=(32-x)^2, \ldots, x^2-68x+900=0$, $x_1=48$ ose $x_2=20$.

Me provë konstatojmë se $x=20$ është zgjidhje e barazimit të dhënë.

Duhet të dish!

1) Barazimi iracional

$\sqrt{P} = Q, [P = P(x), Q = Q(x)]$

është ekuivalent me sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} P = Q^2 \\ Q \geq 0 \\ P \geq 0. \end{cases}$$

2) Për barazimin iracional

$\sqrt{P(x)} \pm \sqrt{Q(x)} = R(x)$, sëpari caktohet bashkësia e përkufizimit të sistemit

$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \end{cases}$, kurse pas fuqizimit, pasi barazimin do ta sjellim në formën

$\sqrt{F(x)} = f(x)$, përsëri e zbatojmë mënyrën1).

5 Zgjidhe barazimin iracional $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = \sqrt{x+24}$.

B Disa barazime iracionale mund të zgjidhen me zëvëndësim.

6 Zgjidhe barazimin $x^2 - 2x + \sqrt{x^2 - 2x + 6} = 6$.

Vëre zgjidhjen:

- Me zëvëndësimin $x^2 - 2x = y$ fitojmë:

$$y + \sqrt{y+6} = 6$$
$$\sqrt{y+6} = 6 - y$$
$$y + 6 = 36 - 12y + y^2$$
$$y^2 - 13y + 30 = 0,$$
$$y_1 = 10,\ y_2 = 3.$$

Fushën e përkufizimit për ndryshoren y do ta caktojmë prej sistemit

$$\begin{cases} y + 6 \geq 0 \\ 6 - y \geq 0,\ y \in [-6, 6]. \end{cases}$$

- Vëren, $y = 10$ nuk është zgjidhje e barazimit.

Për $y = 3$ kemi: $x^2 - 2x = 3$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, d.m.th. $x_1 = 3$ ose $x_2 = -1$.

- Barazimi i fundit nuk ka kufizim, pra zgjidhjet e barazimit të dhënë janë $x = 3$ ose $x = -1$.

7 Zgjidhe barazimin iracional $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = \dfrac{3}{\sqrt{x+3}}$.

Detyra:

1. Zgjidhi barazimet: a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 2$; b) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x} = -2$.

2. Zgjidhi barazimet iracionale: a) $\sqrt{x^2 - 5x + 10} = 8 - 2x$; b) $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-18} = 5$.

3. Zgjidhi barazimet: a) $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31$; b) $x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7 + 3x$;
   c) $\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 3 = 0$.

9 SISTEM PREJ NJË BARAZIMI LINEAR DHE NJË BARAZIMI KATROR ME DY TË PANJOHURA

Kujtohu!

- Sipas ndryshoreve x dhe y, cakto shkallën e çdonjërit prej polinomëve:
  $P(x,y) = 2x - 3y + 1;$
  $Q(x,y) = x^2 - 2y^2 + 3x - 5.$
- Zgjidhe sistemin e barazimeve lineare
  $$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$
  me metodën e zëvëndësimit
- Cili prej çifteve të radhitur
  $(x, y) \in \{(1,0), (1,1), (2,0)\}$ është zgjidhje e
  sistemit $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$?

A **1** Vëre, sistemin $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

i cili përbëhet prej një barazimi lineare me dy të panjohura dhe një barazimi katror me dy të panjohura prej të njëjtës bashkësi të përkufizimit.

Zgjidhe sistemin e dhënë

Vëre zgjidhjen:

- Prej barazimit linear e shprehim njërën të panjohur, për shembull:
  $$x = 2 - y.$$
- Zëvëndësojmë te barazimi katror dhe fitojmë:
  $$(2 - y)^2 + y^2 = 2, \text{ т.е. } y^2 - 2y + 1 = 0.$$
  Zgjidhje e barazimit katror është $y = 1$, pra $x = 2 - 1 = 1$. Zgjidhje e sistemit është çifti i radhitur $(x, y) = (1, 1)$.

Duhet të dish!

- Sistemi $\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$, ku të gjithë koeficientët janë numra real dhe të paktën njëri prej koeficientëve a, b ose c është i ndryshueshëm prej zeros është forma e përgjithshme e sistemit prej një barazimi linear dhe një barazimi katror me dy të panjohura.
- Sistemi i këtillë zgjidhet me metodën e zëvëndësimit, kurse zgjidhja e tij është bashkësia e çifteve të radhitura.

2 Zgjidhe sistemin $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$

Vëre zgjidhjen:

- Prej barazimit linear kemi $y = 4 - 2x$, pra duke zëvëndësuar te barazimi katror fitojmë:
  $$x^2 + x(4 - 2x) + (4 - 2x)^2 = 7, \text{ t.e. } x^2 - 4x + 3 = 0.$$
- Prej $x_1 = 1$ ose $x_2 = 3$, vijon $y_1 = 2$ dhe $y_2 = -2$. Prandaj, zgjidhja e sistemit është bashkësia $\{(1.2), (3, -2)\}$.

3 Zgjidhe sistemin e barazimeve: a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x^2 + x + y^2 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x \cdot y = 3. \end{cases}$

4 Dy shumëkëndësha gjithsej kanë 20 brinjë dhe 95 diagonale. Cilët janë ato shumëkëndësha?

Detyra:

1 Zgjidhi sistemet: $\begin{cases} 2x^2+2y^2+3x-2=0 \\ x-2y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{20} \\ x-y=-1. \end{cases}$

2 Zgjidhe sistemin $\begin{cases} x+y=5a \\ x\cdot y=6a^2. \end{cases}$

3 Shuma e një thyese dhe vlera e saj reciproke është $2\dfrac{9}{10}$, kurse shuma e numëruesit dhe emëruesit është 7. Cakto atë thyesë.

Ushtrim kontrollues tematik

1 Cakto rrënjët e barazimeve katrore:

a) $2x^2+7=0$; b) $3x^2-5x=0$; c) $x^2-x-6=0$.

2 Zgjidhi barazimet katrore: a) $\dfrac{x^2+1}{3}+\dfrac{2x^2+x}{5}=1+\dfrac{x}{5}$; b) $\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}=1.$

3 Duke e shqyrtuar diskriminantën, cakto natyrën e zgjidhjeve të barazimeve:

a) $x^2-8x+15=0$; b) $4x^2-12x+7=0$; c) $x^2-2x+9=0$.

4 Formo barazim katror me koeficienta real nëse janë dhënë rrënjët e saj:

a) $x_1=\dfrac{5}{8}, x_2=-\dfrac{3}{4}$; b) $x_{1/2}=-6\pm 5i$.

5 Te barazimi $x^2+2(m-5)x+m^2-6=0$ cakto parametrin m, ashtu që për zgjidhjet të vlen barasia $x_1{}^2+x_2{}^2=10$.

6 Thjeshto thyesën $\dfrac{10x^2-7x+1}{6x^2+x-2}$.

7 Zgjidhe barazimin $x^4-(2a+b)x^2+2ab=0$.

8 Zgjidhe barazimin $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$.

9 Cakto zgjidhjet e sistemit $\begin{cases} \dfrac{10x+y}{xy}=3 \\ y-x=2. \end{cases}$

TEMA 4

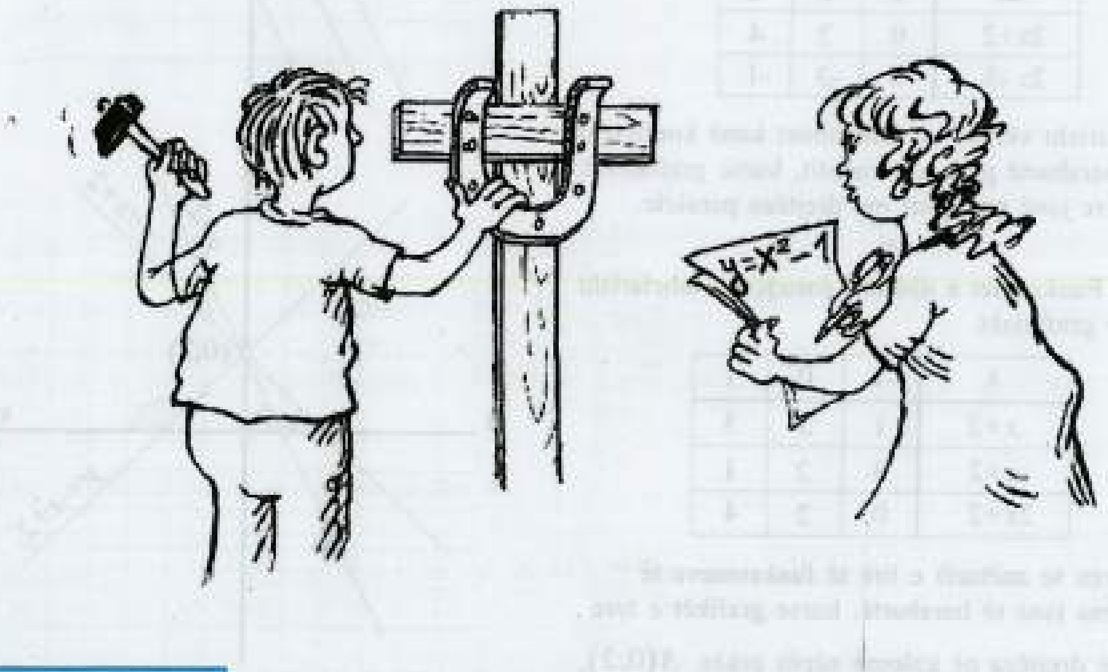
FUNKSIONI KATROR. JOBARAZIMI KATROR

Më lehtë është matematika të mësohet,
se sa të punohet pa te.

H. Boas

Në këtë temë do të mësosh për:

- funksionin katror;
- vizatimin e grafikut të funksionit katror;
- zerot e funksionit katror;
- vlerat ekstreme të funksionit katror;
- monotonin e funksionit katror;
- shenjën e funksionit katror;
- jobarazimin katror;
- sistemin e jobarazimeve katrore.



1 KONCEPTI PËR FUNKSIONIN KATROR

Kujtohu!

- Cili prej funksioneve $y=2x-5$, $y=\dfrac{1}{x}$ ose $y=x^2-x$ është linear?
- Cakto $f(0)$, $f(1)$ dhe $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ nëse $f(x)=3x-4$.
- Në çfarë mënyra mund të paraqitet një funksion?
- Cakto zeron e funksionit
$$y=\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}.$$
- Cakto funksionin $f(x)$, nëse $f(x-1)=2x-3$.

Le të jetë $x-1=t$. Atëherë $x=t+1$,

$f(t)=2(t-1)-3=2t-1$, pra $f(x)=2x-1$.

A **1** Në të njëjtin sistem koordinativ vizato grafikonët e funksioneve lineare:

a) $y=2x$, $y=2x+2$, $y=2x-3$;

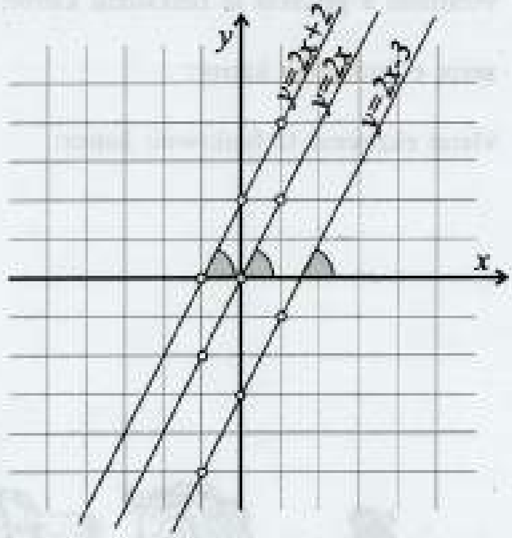
b) $y=x+2$, $y=-x+2$, $y=2x+2$.

Çka vëren?

Vëre zgjidhjen

a) Funksionet e dhëna i paraqesim tabelarisht dhe grafikisht.

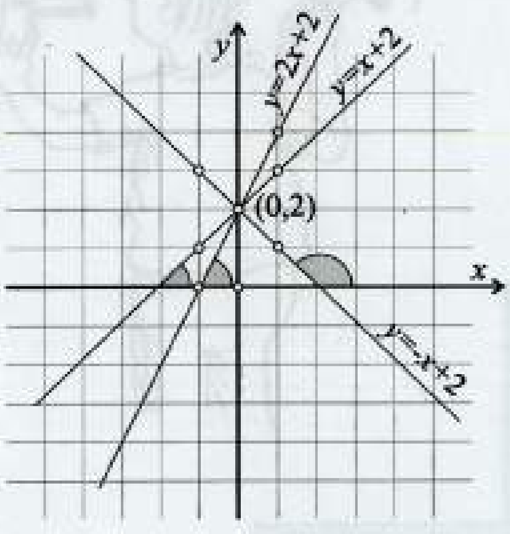
x	-1	0	1
$2x$	-2	0	2
$2x+2$	0	2	4
$2x-3$	-5	-3	-1



Sigurisht vëreve se funksionet kanë koeficient të barabartë para argumentit, kurse grafikonët e tyre janë paraqitur me drejtëza paralele.

b) Funksionet e dhëna i paraqesim tabelarisht dhe grafikisht.

x	-1	0	1
$x+2$	1	2	3
$-x+2$	3	2	1
$2x+2$	0	2	4



Vëren se anëtarët e lirë të funksioneve të dhëna janë të barabartë, kurse grafikët e tyre janë drejtëza që kalojnë nëpër pikën $A(0,2)$.

Vëre!

Cilët gjykime janë ekuivalente:

- koeficienti i drejtimit të funksionit $f(x)$ është numër real pozitiv;
- grafiku i funksionit $f(x)$ formon kënd të ngushtë me kahen pozitive të boshtit x;
- funksioni monotonisht rritet, pasi për çdo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dhe $x_2 > x_1$ vijon $f(x_2) > f(x_1)$.

Duhet të dish!

- Pasqyrimi prej ku $x \to f(x) = y = ax + b$, për $a, b \in \mathbb{R}$ dhe $a \neq 0$ quhet funksion linear, me fushën e përkufizimit $D_f = \mathbb{R}$ dhe bashkësin e vlerave $V_f = \mathbb{R}$.
- Grafiku i funksionit linear është bashkësia
  $G_f = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = f(x) = ax + b; a, b \in \mathbb{R}\}$.
- Bashkësia G_f e paraqitur në rrafshin koordinativ është drejtëz.

Kujtohu!

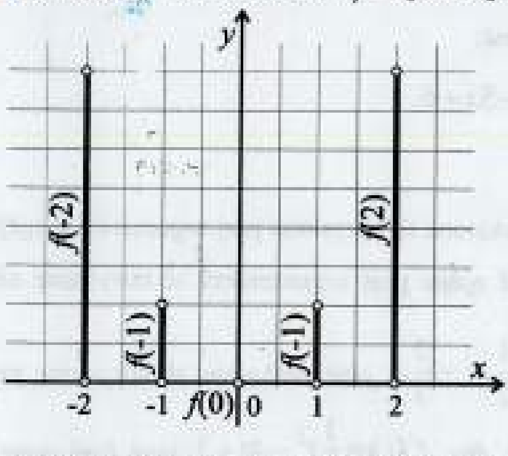
- Cakto $f(0), f(1), f(3)$ të funksionit $f(x) = x^2 - 2x$.
- Le të jetë $f(x) = x^2 + 1$. Paraqite grafikisht vlerën $f(1)$.

B 2 Paraqite tabelarisht dhe grafikisht funksionin $f(x) = x^2$, nëse $D_f = \{-2, -1, 0, +1, +2\}$. Cakto bashkësinë e vlerave të funksionit.

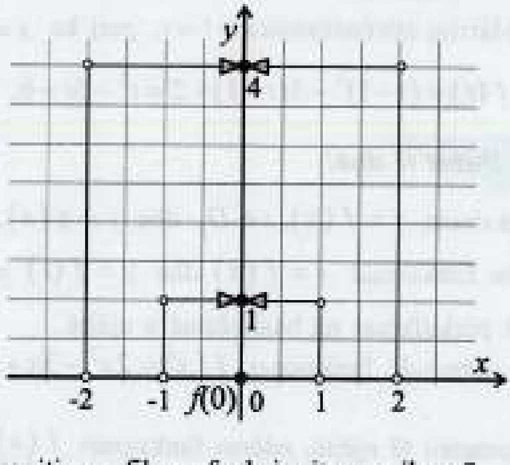
Vëre zgjidhjen:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4

- Funksioni i paraqitur grafikisht është:
- Bashkësia e vlerave është $V_f = \{1, 0, 4,\}$.



- Paraqitja grafike e vlerave të ordinatave të funksionit



- Paraqitja grafike e funksionit me pika në boshtin e ordinatave

Duhet të dish!

- Pasqyrimi f ku $x \to f(x) = ax^2 + bx + c$, për $a, b, c \in \mathbb{R}$ dhe $a \neq 0$ quhet ***funksion katror***, kurse fusha e tij e përkufizimit është $D_f = \mathbb{R}$.

  Ndonjëherë në vend të $f(x) = ax^2 + bx + c$ shkruajmë $y = ax^2 + bx + c$.

- Grafiku i funksionit katror është bashkësia

  $G_f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, y = f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$, kurse bashkësia G_f e paraqitur në rrafshin koordinativ është lakore e cila quhet ***parabollë***.

Kujtohu!

- Cakto funksionin linear $f(x) = ax + b$, nëse $f(0) = 2$ dhe $f(2) = 0$.
- Cakto numrin real c te funksioni katror $f(x) = 2x^2 - 3x + c$, nëse $f(0) = 5$.

C **3** Është dhënë funksioni $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Cakto koeficientët a, b dhe c nëse $f(0) = 0$, $f(3) = 45$, $f(2) = 20$.

Vëre zgjidhjen:

- Sipas kushtit të detyrës e formojmë sistemin

$$\begin{cases} c = 0 \\ 9a + 3b + 0 = 45 \\ 4a + 2b + 0 = 20, \end{cases}$$

zgjidhja e të cilit është: $a = 5$, $b = 0$ dhe $c = 0$, pra funksioni i dhënë është $f(x) = 5x^2$.

4 Cakto funksionin katror $f(x) = x^2 + bx + c$, ashtu që grafiku i tij t'i përmban pikat $A(2,0)$ dhe $B(-3,0)$.

5 Nëse $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, cakto funksionin $f(x)$.

Vëre zgjidhjen:

- Marrim zëvendësmin $x + 1 = t$, prej ku $x = t - 1$ dhe fitojmë:

  $f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6$, pra $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Duhet të dish!

Funksionet $y = f(x), x \in D_f$ dhe $y = g(x), x \in D_g$ janë funksione të ndryshme prej argumentit të njëjtë, kurse funksionet $y = f(x)$ dhe $y = f(t)$ janë funksione të njëjta prej argumenteve të ndryshme nëse janë përkufizuar në bashkësinë e njëjtë..

Për shembull, funksionet $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ dhe $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$ janë funksione të ndryshme prej argumentit të njëjtë, ndërsa funksionet $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 5$ dhe $f(t) = \frac{1}{3}t^2 - 4t + 5$ janë funksione të njëjta prej argumenteve të ndryshme nëse x dhe t janë prej bashkësisë së njëjtë të përkufizimit.

Detyra:

(1) Cili prej funksioneve të dhënë është funksion katror:

a) $f(x)=5+2x-x^2$; b) $f(x)=x(x-1)$; c) $f(x)=x-x^3$; ç) $f(x)=3x^2$.

(2) Cakto bashkësinë e vlerave të funksionit $f(x)=x^2-2x$, nëse:

a) $D_f=\{-2,-1,0,+1,+2\}\subset\mathbb{Z}$; b) $D_f=[-2,2]\subset\mathbb{R}$.

(3) Cakto funksionin katror $f(x)=ax^2+bx+c$, nëse $f(0)=6$, $f(-1)=12$, $f(-2)=0$.

2 GRAFIKU I FUNKSIONIT $f(x)=ax^2$ DHE $f(x)=ax^2+c$

Kujtohu!

- Cilët prej pikave $A(-1,1), B(0,0), C(1,2)$ i takojnë grafikut të funksionit $f(x)=x^2$?

- Grafiku i funksionit $f(x)=x^2$ është parabollë.

- Grafiku i funksionit $f(x)=3x^2$ a është parabollë?

A 1 Në të njëjtin sistem koordinativ vizato grafikonët e funksioneve:

a) $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$;

b) $f(x)=2x^2$, $f(x)=-2x^2$.

Çka vëren?

Vëre zgjidhjen

- a) Funksionet i paraqesim tabelarisht dhe kemi:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$2x^2$	8	2	0	2	8
$\frac{1}{2}x^2$	2	½	0	½	2

- Sipas të dhënave në tabelë, funksionet i paraqesim grafikisht, fig. 1.

- Vëre koordinatat e pikave M_1, M_2 dhe M_3 dhe krahasoji gjatësitë e segmentëve AM_1, AM_2 dhe AM_3.

Sigurisht vëreve se për vlera më të mëdhaja të koeficientit a fitohen edhe ordinata më të mëdhaja të pikave të përmendura dhe anasjelltas..

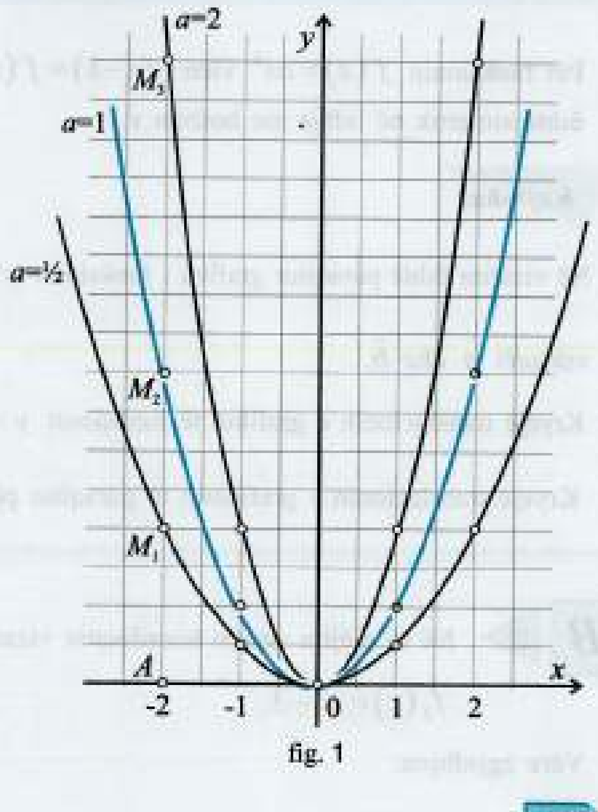


fig. 1

Nëse $a>1$, atëherë me zmadhimin e vlerës së a zmadhohen ordinatat e pikave për vlerën e njëjtë të argumentit x, d.m.th. grafiku i funksionit afrohet deri te boshti y.

- b) Paraqite funksionin tabelarisht

x	-2	-1	0	1	2
$2x^2$	8	2	0	2	8
$-2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

- Funksionin paraqite grafikisht, fig. 2.
- Vëren se ordinatat e pikave M_1 dhe M_2 janë numra të kundërtë.

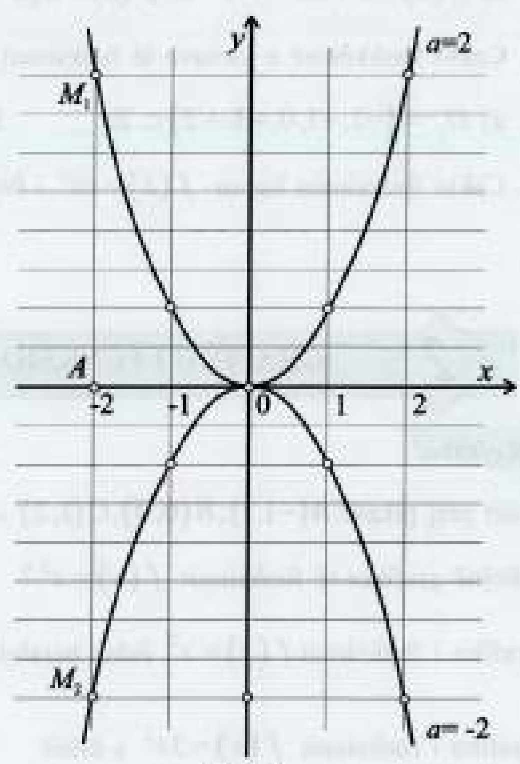


fig. 2

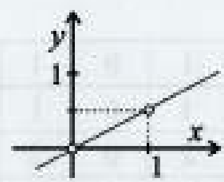
Mbaj mend!

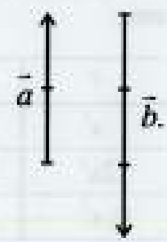
Grafiku i funksionit $y=ax^2, a\neq 0$ është lakore e cila quhet parabollë, kulmi i së cilës është në fillimin koordinativ.
Nëse $a>0$, atëherë parabolla është me hapje nga kahja pozitive e boshtit y, por nëse $a<0$, atëherë parabolla është me hapje nga kahja negative e boshtit y.

- Për funksionin $f(x)=ax^2$ vlen: $f(-x)=f(x)$, kurse kjo do të thotë se grafiku i funksionit është simetrik në lidhje me boshtin y.

Kujtohu!

- Në vizatim është paraqitur grafiku i funksionit $y=\frac{1}{2}x$ dhe vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.





- Kryeje translacionin e grafikut të funksionit $y=\frac{1}{2}x$ për vektor $\vec{a}\,|\vec{a}|=2$.
- Kryeje translacionin e grafikonit të paraqitur për vektor $\vec{b}\,|\vec{b}|=3$.

B **2** Në të njëjtin sistem koordinativ vizato grafikonët e funksioneve $f_1(x)=x^2+2$ dhe $f_2(x)=x^2-3$.

Vëre zgjidhjen:

■ Funksionin $f(x)=x^2$ e paraqesim tabelarisht dhe grafikisht (fig. 3).

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4

■ Vëren se grafikonët e funksioneve $f_1(x)=x^2+2=f(x)+2$, $f_2(x)=x^2-3=f(x)-3$ i fiton me translacion të funksionit $f(x)=x^2$ për dy njësi matëse në kahen pozitive, përkatësisht për tre njësi matëse në kahen negative sipas boshtit y.

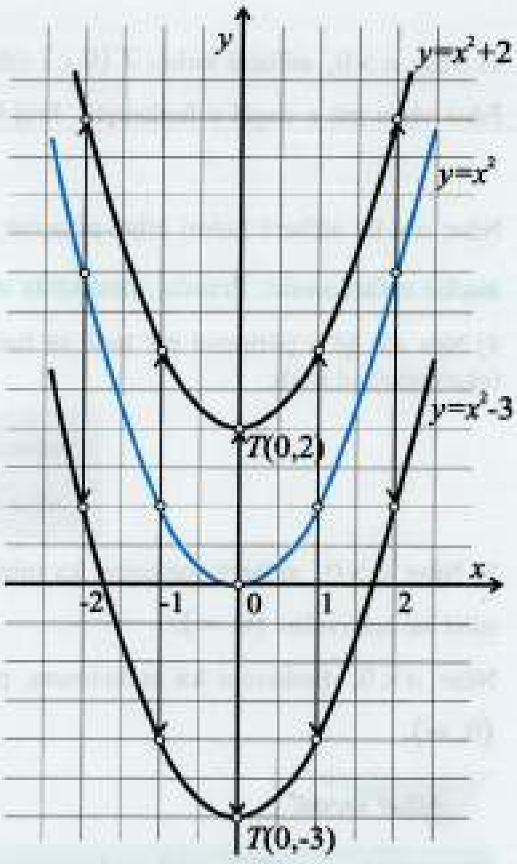


fig. 3

Mbaj mend!

Grafiku i funksionit $f(x)=ax^2+c$ është parabollë me kulm $T(0,c)$, kurse fitohet me translacion të parabollës $y=ax^2$ për $|c|$ njësi në kahen pozitive të boshtit y nëse $c>0$, kurse në kahen negative të boshtit y nëse $c<0$.

3 Vizato grafikonët e funksioneve $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ dhe $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}$ në sistemin e njëjtë koordinativ.

Vëre zgjidhjen:

x	-2	-1	0	1	2
$\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

■ Vëren se grafiku i funksionit $f(x)=ax^2+c$ është parabollë e puthitshme me parabollën $f(x)=ax^2$, boshti i së cilës puthitet me boshtin y.

■ Të vërejmë disa veti të funksionit $f(x)=ax^2+c$.

1) Funksioni është përkufizuar për të gjitha numrat real, d.m.th. $D_f=\mathbb{R}$.

2) Kulmi i parabollës është ë pikën $T(0,c)$.

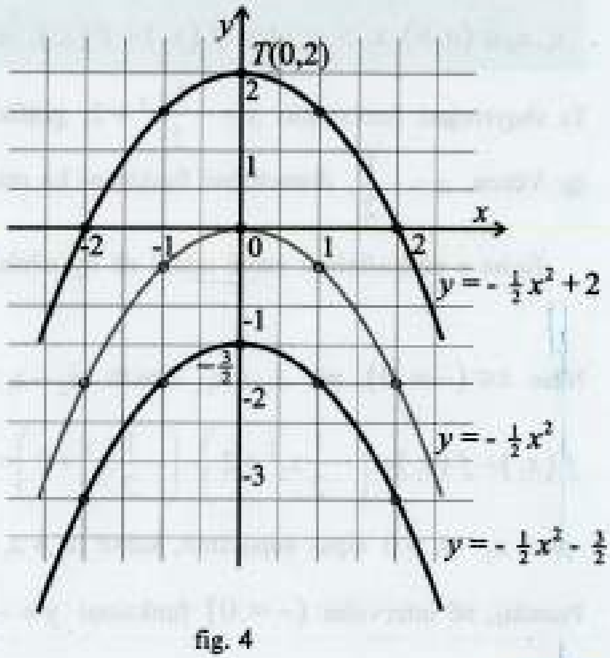


fig. 4

3) Nëse $a>0$, atëherë kulmi $T(0,c)$ është pika më e ulët e grafikonit. Domethënë për $x=0$, $f(x)=c$ është vlera më e vogël e funksionit. Prej këtu vjon se bashkësia e vlerave të funksionit është $V_f=[c,\infty)$.

Nëse $a<0$, atëherë kulmi është pika më e lartë e grafikut. Domethënë, $x = 0$, $f(x) = c$ është vlera më e madhe e funksionit. Prandaj, bashkësia e vlerave të funksionit është $V_f=(-\infty, c]$.

4) Nga ajo që u përmend më lartë se funksioni në kulmin ka vlerë më të vogël ose më të madhe (ekstreme), d.m.th.

nëse $a>0$, $y_{min}=c$ për $x=0$,
nëse $a<0$, $y_{max}=c$ për $x=0$.

5) Nëse $a>0$, atëherë funksioni ka minimum, pra në intervalin $(-\infty,0)$ monotonisht zvogëlohet, kurse rritet në intervalin $(0,\infty)$.

Nëse $a<0$, funksioni ka maksimum, pra në intervalin $(-\infty,0)$ rritet, kurse zvogëlohet në intervalin $(0,\infty)$.

Mbaj mend!

Funksioni $y=f(x), x\in(a,b), a<b$ monotonisht rritet në intervalin (a,b), nëse për çfarëdo $x_1, x_2\in(a,b), x_2>x_1$ vlen $f(x_2)>f(x_1)$, d.m.th. $f(x_2)-f(x_1)>0$.

Funksioni $y=f(x), x\in(a,b), a<b$ monotisht zvogëlohet në intervalin (a,b), nëse për çfarëdo $x_1, x_2\in(a,b), x_2>x_1$ vlen $f(x_2)<f(x_1)$, d.m.th. $f(x_2)-f(x_1)<0$.

Ta shqyrtojmë funksionin $y=-\frac{1}{2}x^2+2$, grafiku i të cilit është paraqitur në fig. 4.

Vëren, $a=-\frac{1}{2}$, domethënë funksioni ka maksimum, d.m.th. $y_{max}=2$ për $x=0$. Prej këtu vijon se fusha e përkufizimit është ndarë në dy nënbashkësi, d.m.th. intervalet $(-\infty,0)$ dhe $(0,\infty)$.

Nëse $x\in(-\infty,0)$, për $x_2>x_1$, d.m.th. $x_2-x_1>0$, kemi:

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(-\frac{1}{2}x_2^2+2\right)-\left(-\frac{1}{2}x_1^2+2\right)=-\frac{1}{2}\left(x_2^2-x_1^2\right)=-\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0,$$

pasi $x_2-x_1>0$ sipas supozimit, kurse $x_2+x_1<0$ si shumë e dy numrave negativ.

Prandaj, në intervalin $(-\infty,0)$ funksioni $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ monotonisht rritet.

Nëse $x \in (0, \infty)$, për $x_2 > x_1$, d.m.th. $x_2 - x_1 > 0$, kemi:

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(-\frac{1}{2}x_2^2 + 2\right) - \left(-\frac{1}{2}x_1^2 + 2\right) = -\frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) = -\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0, \text{ pasi}$$

$x_2 - x_1 > 0$ sipas kushtit, kurse $x_2 + x_1 > 0$ si shumë e dy numrave pozitiv.

Prandaj, në intervalin $(0, \infty)$ funksioni monotonisht zvogëlohet.

Vlera e argumentit për të cilin funskioni ka vlerë ekstreme, e ndan bashkësinë e përkufizimit në dy nënbashkësi (intervale), ashtu që në njërin interval funksioni rritet, kurse te tjetri zvogëlohet, ose anasjelltas.

Mbaj mend! Për funksionin $y = ax^2 + c, a \neq 0$ kemi:

Nëse $a > 0$, $y_{min} = c$ për $x = 0$. Për $x \in (-\infty, 0)$ funksioni monotonisht zvogëlohet, kurse për $x \in (0, \infty)$ funksioni monotonisht rritet.

Nëse $a < 0$, $y_{max} = c$ për $x = 0$. Për $x \in (-\infty, 0)$ funksioni monotonisht rritet, kurse për $x \in (0, \infty)$ funksioni monotonisht zvogëlohet.

4 Shkruaji vetitë e funksionit $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$.

Vëre zgjidhjen

Grafiku i funksionit është paraqitur në fig. 4.

1. $D_f = \mathbb{R}$.
2. $T\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.
3. $a = -\frac{1}{2} < 0$, domethënë funksioni ka maksimum, $y_{max} = -\frac{3}{2}$ për $x = 0$.
4. Për $x \in (-\infty, 0)$ funksioni monotonisht rritet, kurse për $x \in (0, \infty)$ funksioni monotonisht zvogëlohet.
5. Grafiku i funksionit është simetrik në lidhje me boshtin e ordinatës.

5 Janë dhënë funksionet $y = 2x^2 - 1$ dhe $y = 2x^2 + 2$.

a) Vizato grafikonët e funksioneve të dhëna me ndihmën e grafikonit të funksionit $y = 2x^2$.

b) Vizato grafikonët e funksioneve me ndihmën e paraqitjes tabelare.

c) Shqyrtoji vetitë e funksioneve.

Detyra:

1 Në të njëjtin sistem koordinativ vizato grafikonët e funksioneve:

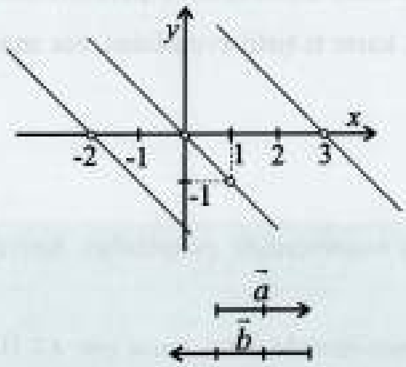
a) $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 - 1$, $f(x) = x^2 + 3$;

b) $f(x) = -x^2$, $f(x) = -x^2 + 2$, $f(x) = -x^2 - 4$, kurse pastaj cakto kulmin, bashkësinë e vlerave dhe monotoninë e çdo funksioni.

3 GRAFIKU I FUNKSIONIT $y=a(x-\alpha)^2$

Kujtohu!

Në vizatim janë dhënë grafiku i funksionit $y=-x$ dhe vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, të cilët kanë drejtim të njëjtë me boshtin x.



Me translacionin e drejtëzës $y=-x$ për vektorin $\overrightarrow{-a}$, $|\vec{a}|=2$, është fituar grafiku i drejtëzës $y=-x-2$, d.m.th. $y=-(x+2)$.

Me translacionin e drejtëzës $y=-x$ për vektorin $-\vec{b}$, $|\vec{b}|=3$, është fituar grafiku i drejtëzës $y=-x+3$, d.m.th. $y=-(x-3)$.

Çka vëren?

A **1** Në të njëjtin sistem koordinativ vizatoi grafikonët e funksioneve:

$$f(x)=x^2,\ f(x)=(x+2)^2,\ f(x)=(x-3)^2.$$

Çka vëren prej vizatimit?

Vëre zgjidhjen

Funksionet e dhëna i paraqesim tabelarisht dhe gafikisht.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4

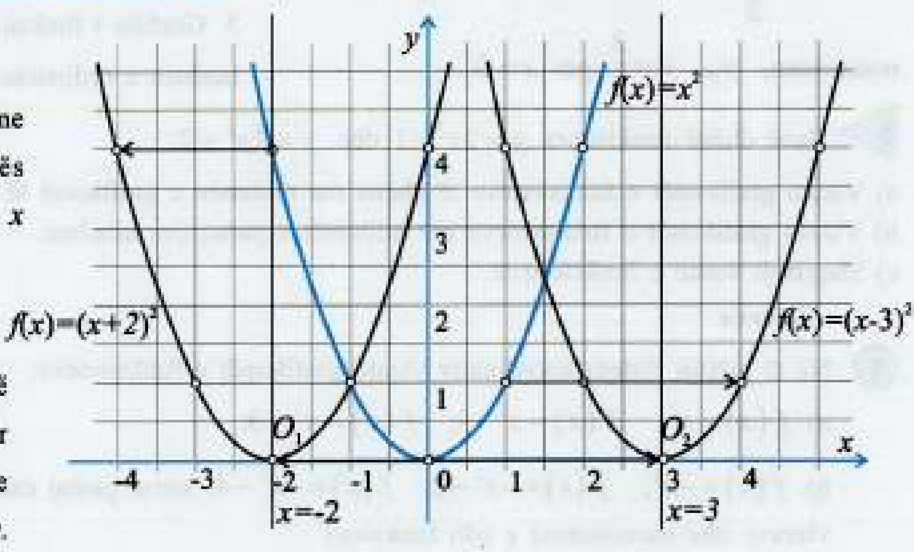
x	-4	-3	-2	-1	0
$(x+2)^2$	4	1	0	1	4

x	1	2	3	4	5
$(x-3)^2$	4	1	0	1	4

Vëre, grafiku i funksionit $y=(x+2)^2$ është fituar me translacionin e grafikut të funksionit $y=x^2$ sipas boshtit x për 2 njësi majtas.

Grafiku i funksionit $y=(x-3)^2$ është fituar me translacionin e parabollës $y=x^2$ sipas boshtit x djathtas për 3 njësi.

Boshti i simetrisë është drejtëz që kalon nëpër kulmin e parabollës dhe është paralele me boshtin y.



Mbaj mend!

Grafiku i funksionit $f(x)=a(x-\alpha)^2$ është parabollë me kulm në pikën $T(\alpha,0)$, e fituar me translacionin e parabollës $f(x)=ax^2$ sipas boshti x për $|\alpha|$ njësi majtas nëse $\alpha>0$, kurse djathtas nëse $\alpha<0$.

Boshti i simetrisë së parabollës $f(x)=a(x-\alpha)^2$ është drejtëza $x=\alpha$, kurse ajo kalon nëpër kulmin e parabollës dhe është paralele me boshtin e ordinatës.

2 Vizato grafikonët e funksioneve $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ dhe $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$.

3 Vizato grafikun e funksionit $y=-2x^2+4x-2$ dhe shqyrto vetitë e atij funksioni.

Vëre zgjidhjen:

- Është dhënë funksioni në këtë mënyrë:

$y=-2x^2+4x-2=-2(x^2-2x+1)=-2(x-1)^2$. Domethënë, funksioni është i llojit $y=a(x-\alpha)^2$, ku $a=-2$ dhe $\alpha=1$.

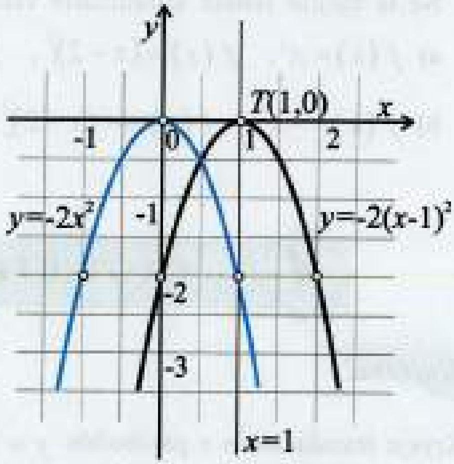
- E vizatojmë grafikun e funksionit $y=-2x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$-2x^2$	-8	-2	0	-2	8

- Grafikun e funksionit $y=-2(x-1)^2$ do ta fitojmë me translacionin e parabollës $y=-2x^2$ sipas boshtit x në të djathtë për vlerën $\alpha=1$.

- Vëre vetitë e funksionit:

1. $D_f=\mathbb{R}$. 2. $T(1,0)$.
3. $a=-2<0$, funksioni ka maksimum $y_{max}=0$ për $x=1$.
4. $V_f=(-\infty,0]$.
5. Pasi funksioni ka maksimum për $x=1$, domethënë, për $x\in(-\infty,1)$ funksioni monotonisht rritet, kurse për $x\in(1,\infty)$ funksioni monotonisht zvogëlohet
6. Boshti i simetrisë së parabollës është drejtëza $x=1$.



Mbaj mend!

Nëse $a>0$, funksioni në kulm kalon prej zvogëlimit në rritje.
Nëse $a<0$, funksioni në kulm kalon prej rritjes në zvogëlim.

4 Paraqite grafikisht funksionin $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2$.

Vëre zgjidhjen:

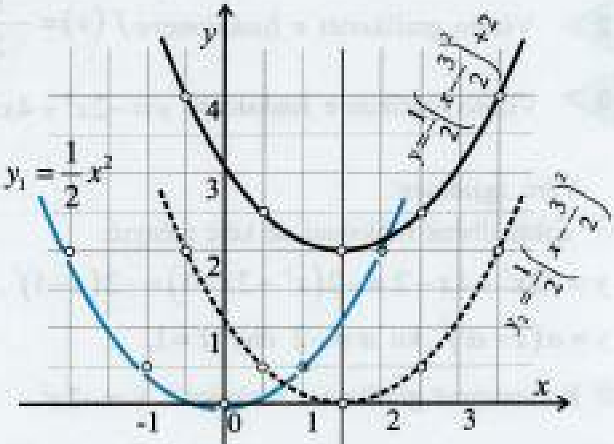
I bëjmë me radhë grafikonët e funksioneve:

1. $y_1=\frac{1}{2}x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$\frac{1}{2}x^2$	2	½	0	½	2

2. $y_2=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$, me translacionin e parabollës $y_1=\frac{1}{2}x^2$ sipas boshtit x në të djathtë për $\frac{3}{2}$ njësi.

3. $y=y_2+2$, me zhverndosjen e parabollës y_2 për dy njësi me kahe pozitive të boshtit y.



Vëre, se grafiku i funksionit të dhënë është parabolla kulmi i së cilës është në pikën $T\left(\frac{3}{2},2\right)$, kurse është kthyer në kahen pozitive të boshtit y pasi $a=\frac{1}{2}>0$.

Detyra:

(1) Në të njëjtin sistem koordinativ vizato grafikonët e funksioneve:

a) $f(x)=x^2$, $f(x)=(x-2)^2$, $f(x)=(x+3)^2$;

b) $f(x)=-x^2$, $f(x)=-(x-2)^2$, $f(x)=-(x+3)^2$.

4 GRAFIKU I FUNKSIONIT $f(x)=ax^2+bx+c$

Kujtohu!

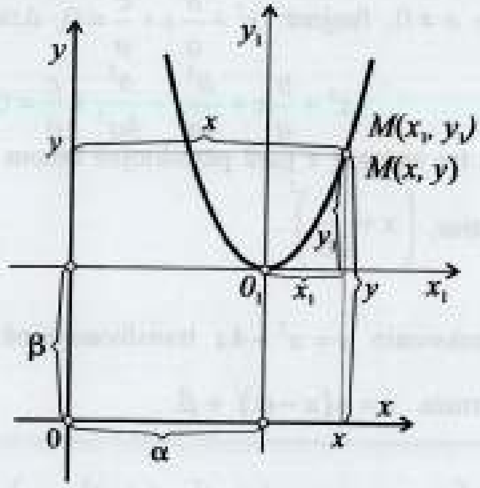
- Kryeje translacionin e parabollës $y=x^2$ për dy njësi në kahen pozitive të boshtit të abshisës, kurse parabollën e fituar zhvendose për tre njësi në kahen pozitive të boshtit të ordinatës.
- Cakto koordinatat e kulmit të parabollës të fituar sipas të dy translacioneve.

A **1** Shkruaje funksionin katror në atë formë, prej të cilës mundet drejtpërdrejt t'i caktosh koordinatat e kulmit të parabollës.

Vëre zgjidhjen:

- Te sistemi koordinativ xOy zgjedhim pika $T(\alpha,\beta)$ dhe $M(x,y)$. Supozojmë se pika T është kulmi i parabollës që kalon nëpër pikën M.

- Në pikën $T(\alpha,\beta)$ vendosim sistem të ri koordinativ $x_1O_1y_1$, sikurse në vizatim. Pika M në lidhje me sistemin e ri koordinativ le të jetë me koordinata $M(x_1,y_1)$.



- Sigurisht vëren se në sistemin koordinativ $x_1O_1y_1$ $(T\equiv O_1)$ parabolla e dhënë ka barazim $y_1=ax_1^2$. Nëse i krahasojmë koordinatat e pikës M në lidhje me të dy sistemet koordinative, kemi:

$y_1=y-\beta$ dhe $x_1=x-\alpha$, pra pas zëvëndësimit fitojmë:

$y-\beta=a(x-\alpha)^2$, т.е. $y=a(x-\alpha)^2+\beta$.

Mbaj mend!

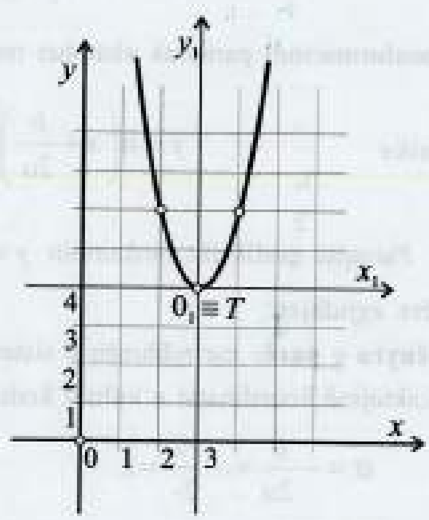
Shënimi $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ quhet forma kanonike e barazimit katror $f(x)=ax^2+bx+c$. Kulmi i parabollës është pika $T(\alpha,\beta)$.

2 Vizato grafikun e funksionit $y=2(x-3)^2+4$.

Vëre zgjidhjen:

- Prej $y-4=2(x-3)^2$ vijon se kulmi është $T(3,4)$.
- Funksionin $y_1=2x_1^2$ e paraqesim tabelarisht dhe grafikisht në sistemin koordinativ $x_1O_1y_1$ $(O_1\equiv T)$.

x	-2	-1	0	1	2
$2x^2$	8	2	0	2	8



- Grafiku në sistemin koordinativ $x_1O_1y_1$ është parabolla $y_1=2x_1^2$, kurse i njëjti grafik në sistemin koordinativ xOy është grafiku i funksionit $y=2(x-3)^2+4$.

Kujtohu!

Nëse barazimin $ax^2+bx+c=0$ e pjesëtojmë me $a\neq 0$, fitojmë: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, d.m.th.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0,$$

ku tre anëtarët e parë përcaktojnë binom në katror, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

Funksionin $y=x^2-4x$ transformoje në formën $y=a(x-\alpha)^2+\beta$.

B 3 Transformoje në formën kanonike funksionin dhe cakto koordinatat e kulmit të parabollës $y=ax^2+bx+c$

Vëre zgjidhjen:

Anëtarin linear te funksioni $y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ do ta llogarisim si prodhim të dyfishtë, d.m.th. $\frac{b}{a}x=2\cdot\frac{b}{2a}x$. Duke shtuar dhe zvogëluar shprehjen $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ kemi:

$$y=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right),\ \text{т.е.}\ y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Pas krahasimit të funksionit $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ kemi: $\alpha=-\frac{b}{2a}$, $\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Vëre!

1) Koordinatat e kulmit të parabollës varen prej vlerave të a, b dhe c, d.m.th.

$$T\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

2. Transformacioni paraprak zbatohet me sjelljen e funksioinit katror $y=ax^2+bx+c$ në formën kanonike

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},\ \text{d.m.th. } y=a(x-\alpha)^2+\beta.$$

4 Paraqite grafikisht funksionin $y=x^2-2x-3$.

Vëre zgjidhjen:

Mënyra e parë: me ndihmën e sistemit koordinativ

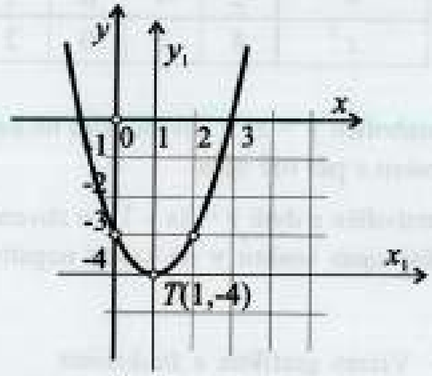
I caktojmë koordinatat e kulmit kemi:

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\cdot}=1,$$

$$\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot(-3)-(-2)^2}{4\cdot 1}=\frac{-12-4}{4}=-4,\ \text{d.m.th. } T(1,-4).$$

x	-2	-1	0	1	2
x_1^2	4	2	0	2	4

- Tabelarisht e paraqesim funksionin $y_1 = ax_1^2$, d.m.th. $y_1 = x_1^2$, pasi $a = 1$.
- Në sistemin koordinativ xOy e paraqesim pikën $T(1,-4)$.
- Vendosim sistem të ri koordinativ x_1Ty_1.
- Te sistemi i ri koordinativ e vizatojmë grafikun e funksionit $y_1 = x_1^2$.
- Grafiku i vizatuar në lidhje me sistemin koordinativ xOy është grafiku funksionit $y = x^2 - 2x - 3$.



Mënyra e dytë: me përcaktimin e pikave karakteristike prej grafikonit.

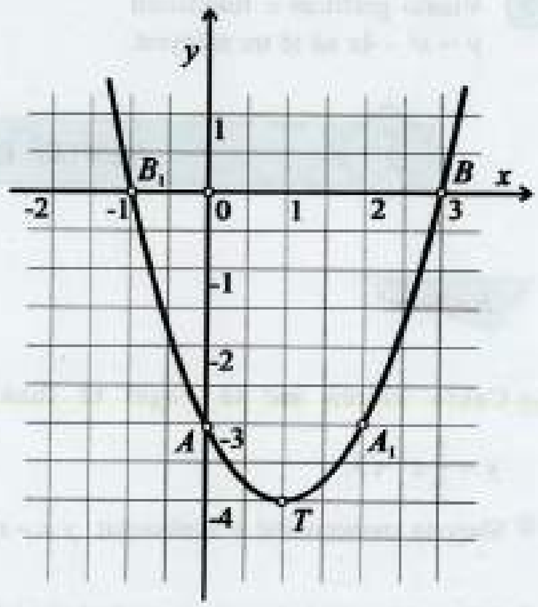
- E përcaktojmë kulmin $T(1,-4)$. Parabolla është simetrike në lidhje me drejtëzën $x = 1$.
- E caktojmë pikëprerjen e parabollës me boshtin e ordinatës, pra për $x = 0$ kemi: $y = 0^2 - 2\cdot 0 - 3 = -3$, $A(0,-3)$.
- Grafikisht e caktojmë pikën A_1 që është simetrike me A në lidhje me boshtin e parabollës.

- I caktojmë pikëprerjet e parabollës me boshtin x, pra për $y = 0$ kemi:

$$x^2 - 2x - 3 = 0,\ x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}, \text{ d.m.th.}$$

$x_1 = 3$ ose $x_2 = -1$, përkatësisht $B(3, 0)$, $B_1(-1, 0)$.

- Grafiku është paraqitur në vizatim.



Vëre!

Për vizatimin e grafikut duhet të caktohet më së paku pesë pika të tij.

Nëse barazimi $ax^2 + bx + c = 0$ nuk ka zero reale, domethënë grafiku nuk e pret boshtin e abshisës, atëherë caktojmë edhe disa pika tjera me zgjedhje të veçantë për argumentin.

Mënyra e tretë: me translacionin e grafikut të funksionit themelor $y = x^2$

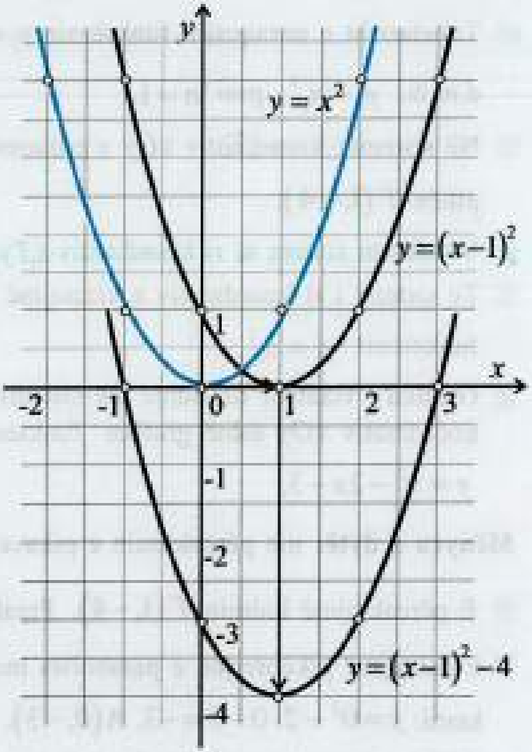
- Funksionin e dhënë e transformojmë në formën kanonike dhe fitojmë $y = (x - 1)^2 - 4$.

■ Funksionin $y = x^2$ e paraqesim tabelarisht:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	2	0	2	4

■ Parabollën $y = x^2$ e zhvendosim në kahen pozitive të boshtit x për një njësi.

■ Parabollën e dytë $y = (x - 1)^2$ e zhvendosim për katër njësi sipas boshtit y në kahen negative.



5 Vizato grafikun e funksionit
$y = -x^2 + 2x + 3$.

Detyra:

1 Transformoje në formën kanonike funksionin
$y = -3x^2 + 6x + 2$.

2 Vizato grafikun e funksionit
$y = x^2 - 4x$ në të tre mënyrat.

5 VETITË E FUNKSIONIT KATROR

Kujtohu!

- Cakto vlerën më të vogël të funksionit $y=\frac{1}{2}x^2-3$.
- Shqyrto monotoninë e funksionit $y=-x^2+3$.
- Edhe cilët veti i shqyrtuam te funksioni katror $y = ax^2 + c$?

A **1** Shqyrtoji vetitë e funksionit katror
$y = ax^2 + bx + c$.

1. *Fusha e përkufizimit*

Funksioni katror është përkufizuar për të gjithë numrat real, d.m.th. $D_f = \mathbb{R}$.

2. *Kulmi i parabollës*

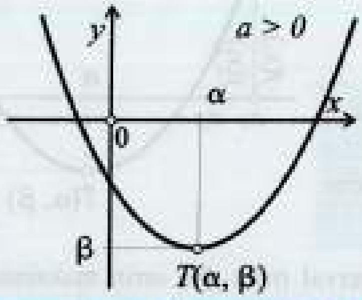
Funksionin e sjellim në formën kanonike $y=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$, pra kulmi i parabollës është:

$$T(\alpha,\beta);\ \alpha=-\frac{b}{2a},\ \beta=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

3. *Vlerat ekstreme të funksionit*

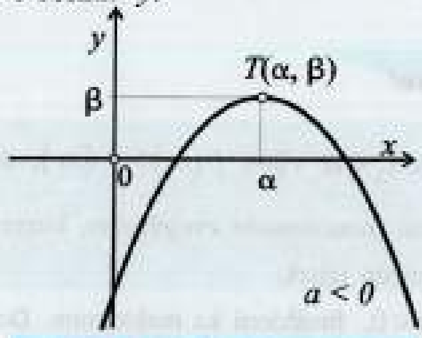
Te kulmi funksioni e arrin vlerën më të madhe ose më të vogël varësisht prej shenjës së koeficientit a.

Për $a>0$ parabolla është e hapur nga kahja pozitive e boshtit y.



$$y_{min}=\frac{4ac-b^2}{4a} \text{ për } x=-\frac{b}{2a}.$$

Për $a<0$ parabolla është e hapur nga kahja negative e boshtit y.



$$y_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a} \text{ për } x=-\frac{b}{2a}.$$

2 Cakto vlerën ekstreme të funksionit $y = -2x^2 - 4x - 5$.

■ Pasi $a=-2<0$, parabolla është me hapje nga kahja negative e boshtit y pra funksioni ka maksimum $y_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$ për $x=-\frac{b}{2a}$, d.m.t. $y_{max}=-3$ për $x=1$.

3 Për cilën vlerë të parametrit k, funksioni $y = kx^2 - 2x - 5$ ka maksimum të barabartë me -2? Vëre zgjidhjen:

■ Funksioni ka maksimum nëse $k<0$, përkatësisht $y_{max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$ ose $\frac{4k(-5)-4}{4k}=-2$ prej ku

$$-20k-4=-8, \text{ d.m.th. } k=-\frac{1}{3}.$$

4. *Bashkësia e vlerave të funksionit*

Vlera ekstreme e përcakton bashkësinë e vlerave të funksionit, të cilën e shënojmë me V_f.

$$\text{Nëse } a>0,\ V_f=[\beta,\infty), \text{ por nëse } a<0,\ V_f=[-\infty,\beta).$$

■ Te shembulli paraprak $V_f=(-\infty,-2]$.

4 Cakto vlerat ekstreme dhe bashkësinë e vlerave të funksionit katror

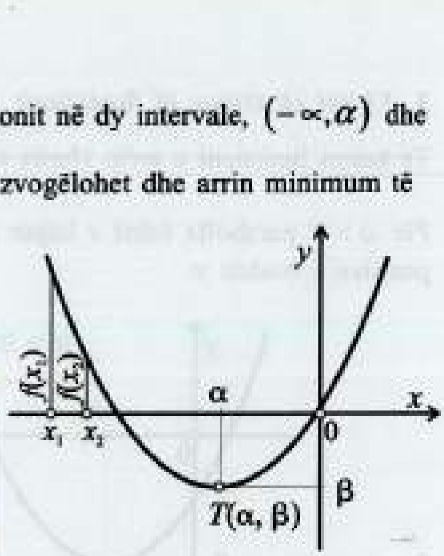
$$y=\frac{1}{2}x^2-4x.$$

5. *Monotonia e funksionit*

Të shqyrtojmë monotoninë (rritjen, zvogëlimin) e një funksioni, domethënë të konstatojmë çka ndodh me vlerat e funksionit nëse argumenti rregullisht rritet.

Nëse $a>0$, funksioni ka minimum.

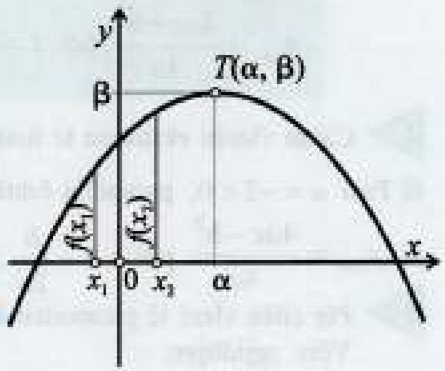
Boshti $x=-\dfrac{b}{2a}$ i parabollës e ndan fushën e përkufizimit të funksionit në dy intervale, $(-\infty,\alpha)$ dhe (α,∞). Pasi funksioni ka minimum, në intervalin e parë funksioni zvogëlohet dhe arrin minimum të caktuar, kurse pastaj te intervali i dytë rritet.



Vëre!

Për $x_1 < x_2 < \alpha$ vijon $f(x_1) > f(x_2)$, d.m.th. për $x \in (-\infty,\alpha)$ funksioni monotonisht zvogëlohet, kurse për $x \in (\alpha,\infty)$ funksioni monotonisht rritet.

Nëse $a < 0$, funksioni ka maksimum. Domethënë, në njërin interval rritet dhe arrin maksimum të caktuar, kurse në intervalin tjetër zvogëlohet..



Vëre!

Për $x_1 < x_2 < \alpha$ vijon $f(x_1) < f(x_2)$, d.m.th. për $x \in (-\infty,\alpha)$ funksioni monotonisht rritet, kurse për $x \in (\alpha,\infty)$ funksioni zvogëlohet.

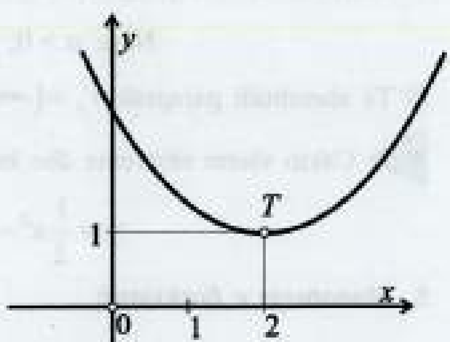
5 Caktoni intervalet e rritjes dhe zvogëlimit për funksionin $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$.

Vëre zgjidhjen:

- Prej $a=\dfrac{1}{2}>0$ vijon se funksioni ka minimum $y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}=1$ për $x=-\dfrac{b}{2a}=2$.

Intervalet te të cilët duhet të shqyrtohet monotonia e funksionit janë $(-\infty,2)$ dhe $(2,\infty)$.

- Pasi funksioni ka minimum, ai në intervalin $(-\infty,2)$ monotonisht zvogëlohet, kurse në intervalin $(2,\infty)$ monotonisht rritet.



6 Shqyrto monotoninë e funksionit:
a) $y = x^2 + 3$; b) $y = -x^2 + x$.

6. *Zerot e funksionit*

Zero të funksionit $y = ax^2 + bx + c$ janë vlerat e argumentit x për të cilët $y = 0$. Zero të funksionit janë zgjidhjet e barazimit $ax^2 + bx + c = 0$. Zerot e funksionit i caktojmë pikëprerjet e grafikut me boshtin x.

7 Cakto zerot e funksionit:

a) $y=2x^2+3x-2$; b) $y=x^2-4x+4$; c) $y=2x^2-2x+5$.

a) Prej $y=0$ vijon $2x^2+3x-2=0$,

Zgjidhjet e tij janë: $x_{1/2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2\cdot 2}$, d.m.th. $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=-2$.

Domethënë, grafikui funksionit e pret boshtin x në pikën $A\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ dhe pikën $B(-2,0)$.

Zgjidhi detyrat b) dhe c). Çka vëren?

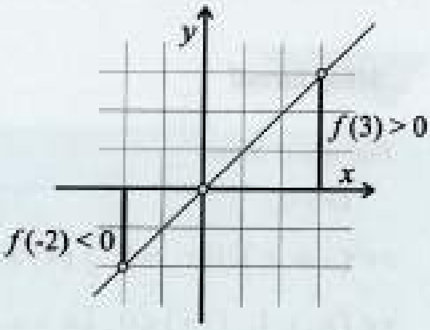
Vërejtje. Nëse barazimi $ax^2+bx+c=0$ nuk ka rrënjë reale, atëherë grafiku i funksionit $y=ax^2+bx+c$ nuk e pret boshtin x.

8 Për cilat vlera të p dhe q grafiku i funksionit katror $f(x)=x^2+px+q$ e pret boshtin e abshisës në pikat $A(1,0)$ dhe $B(3,0)$?

7. *Shenja e funksionit*

Kujtohu!

- Te grafiku i funksionit $f(x)=x$ janë paraqitur vlerat $f(-2)$ dhe $f(3)$.
- Cakto intervalin e argumentit x te i cili funksioni $f(x)=x$ ka vlera negative.



9 Cakto shenjën e funksionit grafiku i të cilit është paraqitur në vizatim.

Vëre zgjidhjen:

Lakorja e shenjës.

- Për caktimin sa më të thjeshtë të shenjës së një funksioni, do ta shfrytëzojmë këtë asociacion:

1) Boshtin e abshisës do ta llogarisim se e paraqet nivelin e ujit në det (lartësia mbidetare 0 m), pra këtu vlera e funksionit është zero.

2) Vlera e funksionit që gjendet mbi boshtin x asocojnë në pika prej lakores që gjenden mbi ujin, pra ordinatat e tyre janë pozitive.

3) Vlerat e funksionit janë nën boshtin x asocojnë në pika e lakores që gjenden nën nivelin e ujit, pra ordintat janë negative.

- Prandaj kemi:

për $x\in(-\infty,-7)\cup(0,2)\cup(5,\infty)$, $f(x)<0$;

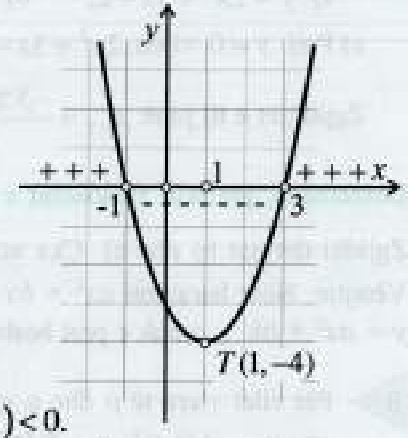
për $x\in(-7,0)\cup(2,5)$, $f(x)>0$;

për $x\in\{-7,0,2,5\}$, $f(x)=0$.

10 Cakto shenjën e funksionit katror $f(x)=x^2-2x-3$.

Vëre zgjidhjen:

- E caktojmë kulmin e parabollës, $T(1,-4)$.
- E caktojmë prerjen e parabollës me boshtin y, pra për $x=0$, $y=-3$.
- I caktojmë zerot e funksionit, pra prej $y=0$ vijon $x_1=3$, $x_2=-1$.
- E vizatojmë grafikun e funksionit.



- Vërejmë:

për $x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$, $f(x)>0$, kurse për $x\in(-1,3)$, $f(x)<0$.

Mbaj mend!

Për $a>0$ kemi:

$D>0$,

$x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$, $f(x)>0$, $(x_1<x_2)$;

$x\in(x_1,x_2)$, $f(x)<0$, $(x_1<x_2)$;

$D=0$, $x\in(-\infty,\infty)\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$, $f(x)>0$;

$D<0$, $x\in(-\infty,\infty)$, $f(x)>0$.

Për $a<0$ kemi:

$D>0$,

$x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$, $f(x)<0$, $(x_1<x_2)$;

$x\in(x_1,x_2)$, $f(x)>0$ $(x_1<x_2)$;

$D=0$, $x\in(-\infty,\infty)\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$, $f(x)<0$;

$D<0$, $x\in(-\infty,\infty)$, $f(x)<0$.

10 Cakto shenjën e funksionit: a) $f(x)=x^2+4$; b) $f(x)=-2x^2-6x$.

Detyra:

1. Është dhënë funksioni $y=x^2-4x+1$.
   a) Cakto barazimin e boshtit të grafikut të funksionit.
   b) Cakto bashkësinë e vlerave V_f të funksionit.

2. Cakto intervalet e monotonisë së funksionit $y=-x^2+2x+1$.

3. Cakto shenjën e funksionit $y=x^2-5x+6$.

6 VIJIMI DHE GRAFIKU I FUNKSIONIT KATROR

Kujtohu!

- Vlera $x=-1$ është zero e funksionit $y=x+1$.
- Për $x\in(-\infty,-1)$ funksioni $f(x)<0$; kurse për $x\in(-1,\infty)$ funksioni $f(x)>0$.
- Funksioni $y=x+1$ monotonisht rritet.
- Cakto: zeron, shenjën dhe monotoninë e funksionit $y=-x-3$.

A Në lidhje me funksionin katror shpeshherë parashtrohet kërkesa: „Vizato grafikun dhe shqyrto vijimin e funksionit katror...".

- Si do të veprosh?

Në kërkesën e parashtruar do të përgjigjesh, nëse cakton:

1) fushën e përkufizimit D_f të funksionit;
2) kulmin e parabollësa;
3) prerjet e parabollës me boshtet koordinative.

Me këto të dhëna mund ta vizatosh grafikun e funksionit, kurse pastaj cakto:

4) vlerat ekstreme të funksionit;
5) boshti i simetrisë të parabollës;
6) bashkësia e vlerave V_f të funksionit;
7) monotonia e funksionit;
8) shenja e funksionit.

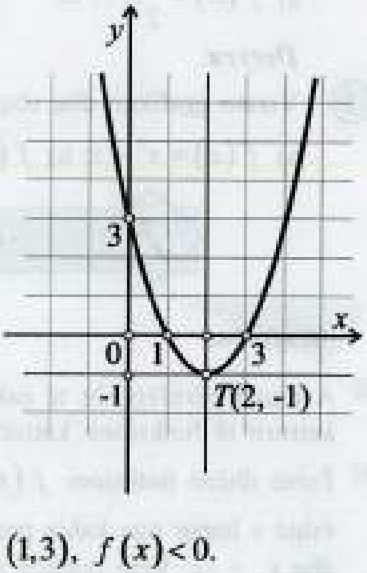
(Radhitja e të shkruarit e përgjigjeve nuk është e rëndësishme)

1 Vizato grafikun dhe shqyrto vijimin funksionit $y=x^2-4x+3$.

Vëre zgjidhjen:

- Fusha e përkufizimit është $D_f=\mathbb{R}$.
- Kulmi i parabollës shtë $T(\alpha,\beta)$ për $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=2, \beta=\dfrac{4ac-b^2}{4a}=-1$, prej ku $T(2,-1)$ a $y=(x-2)^2-1$.
- Prerjet me boshtet koordinative janë:
  - a) prerja me boshtin y, për $x=0$ vijon $y=3$;
  - b) prerja me boshtin x (zero të funksionit), për $y=0$ vijon $x^2-4x+3=0$, d.m.th. $x_1=1$, $x_2=3$.
- Grafiku i funksionit është dhënë në vizatim.

  $a=1>0$, funksioni ka minimum $y_{min}=-1$, për $x=2$.
- Boshti i simetrisë është drejtëza $x=2$.
- Vlera e funksionit është $V_f=[-1,\infty)$.
- Monotonia e funksionit: për $x\in(-\infty,2)$ funksioni monotonisht zvogëlohet, kurse për $x\in(2,\infty)$ funksioni mnotonisht rritet.



- Shenja e funksionit: për $x\in(-\infty,1)\cup(3,\infty)$, $f(x)>0$; kurse për $x\in(1,3)$, $f(x)<0$.

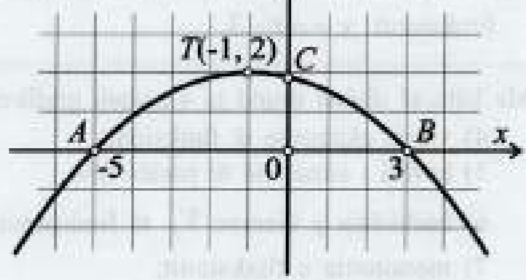
2 Vizato dhe shqyrto grafikun e funksionit $f(x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{15}{8}$.

Vëre zgjidhjen

1) $D_f=\mathbb{R}$.

2) $x_1=-5$ ose $x_2=3$ janë zero të funksionit, $A(-5,0)$ dhe $B(3,0)$ janë pikëprerjet e grafikut me boshtin x, për $x=0$ vijon $y=\frac{15}{8}$, pra $C\left(0,\frac{15}{8}\right)$ është pikëprerja me boshtin y.

3) $\alpha=-1$, $\beta=2$, $T(-1,2)$, $y=-\frac{1}{8}(x+1)^2+2$.



■ Grafiku është paraqitur në vizatim.

4) Pasi $a=-\frac{1}{8}<0$, funksioni ka maksimum

$y_{max}=2$ për $x=-1$.

5) Boshti i simetrisë është drejtëza $x=-1$.

6) $V_f=(-\infty,2]$.

7) Për $x\in(-\infty,-1)$ funksioni është monotono rritës, kurse për $x\in(-1,\infty)$ funksioni zvogëlohet.

8) Për $x\in(-\infty,-5)\cup(3,\infty)$, $f(x)<0$; për $x\in(-5,3)$, $f(x)>0$.

3 Vizato grafikun dhe shqyrto vijimin e funksionit:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$; b) $f(x)=-x^2+4x$.

Detyra:

1 Vizato grafikun dhe shqyrto vijimin e çdonjërit prej funksioneve:

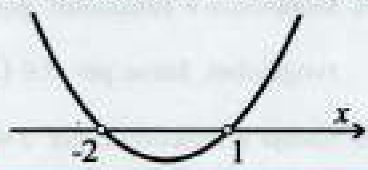
a) $f(x)=x^2-x$; b) $f(x)=x^2+4$.

7 SHENJA E KATRORIT TË TRINOMIT

Kujtohu!

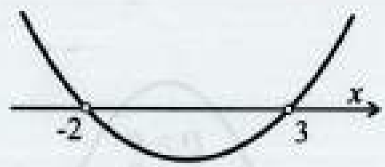
● A mund përafërsisht të caktohet pozita e parabollës, nëse dihen zerot dhe koeficienti i anëtarit të katrorit të funksionit katror?

■ Është dhënë funksioni $f(x)=x^2+x-2$. Pasi $a=1>0$, parabolla është e hapur nga kahja pozitive e ordinatës, kurse zerot janë $x_2=1$ dhe $x_1=-2$. Vëre pozitën e parabollës.



A **1** Cakto shenjën e katrorit të trinomit x^2+x-6.

Vëre zgjidhjen:

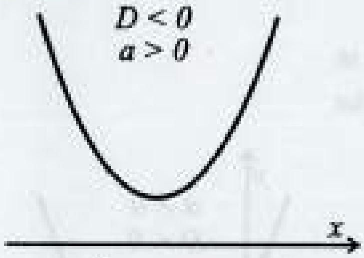


- Trinomin e shqyrtojmë si funksion katror $y=x^2+x-6$. Zerot janë $x_1=-2$ ose $x_2=3$.
- E skicojmë grafikun e funksionit, për $a>0$.
- Cakto shenjën e funksionit katror.
- Trinomi x^2+x-6 e ndryshon shenjën sipas shenjës së funksionit $y=x^2+x-6$, d.m.th. për $x\in(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$, $x^2+x-6>0$, kurse për $x\in(-2,3)$, $x^2<0$.

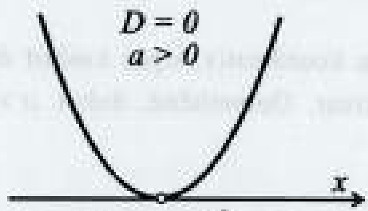
Vëren, për të caktuar shenjën e katrorit të trinomit ax^2+bx+c, duhet të dihet koeficienti a dhe zerot e trinomit.

- Koeficienti a mundet gjithmonë të caktohet.
- Natyra e zeros të trinomit varet prej diskriminantës, prandaj për këtë qëllim:

Duhet të dish!



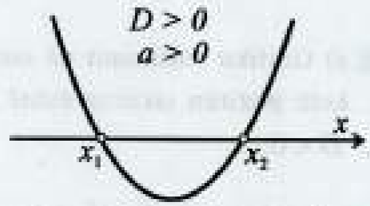
$ax^2+bx+c>0$
për çdo $x\in\mathbb{R}$



$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

$ax^2+bx+c>0$

për çdo $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$



$ax^2+bx+c<0$ për $x\in(x_1,x_2)$

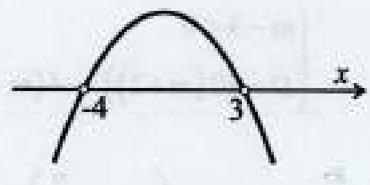
$ax^2+bx+c>0$

për $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$,

2 Cakto shenjën e katrorit të trinomit $-x^2-x+12$.

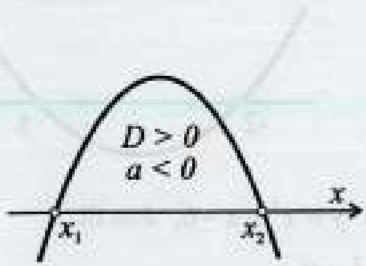
Vëre zgjidhjen:

- $a=-1<0$, parabolla është e hapur nga kahja negative e boshtit y.



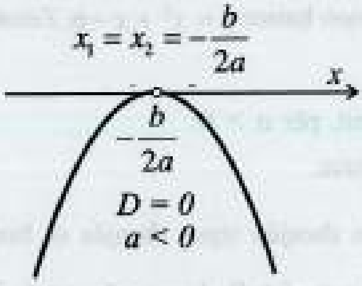
- $D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot12\cdot(-1)=49$. Pasi $D>0$, trinomi ka zero të ndryshme reale, $x_1=-4$ ose $x_2=3$.
- Shenja: për $x\in(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$, $-x^2-x+12<0$, kurse për $x\in(-4,3)$, $-x^2-x+12>0$.

Duhet të dish!



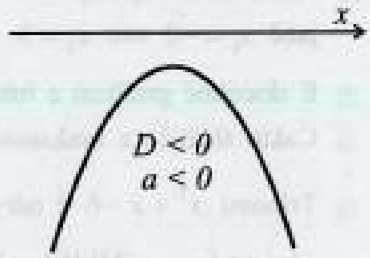
$ax^2+bx+c>0$ për $x\in(x_1,x_2)$,

$ax^2+bx+c<0$ për $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$



$ax^2+bx+c<0$

për çdo $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$



$ax^2+bx+c<0$

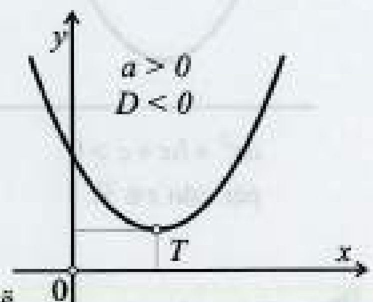
për çdo $x\in\mathbb{R}$

3 Cakto vlerën e parametrit m, ashtu që:

a) katrori i trinomit $2x^2-3x+2m$ të jetë pozitiv për çdo numër real;

b) katrori i trinomit $(m-3)x^2-2(m+1)x+m+2$ të jetë negativ për çdo numër real.

a) Grafiku i trinomit në sistemin koordinativ, sipas kushtit duhet të ketë pozitën sikurse është vizatuar. Domethënë, duhet $a>0$ dhe $D<0$.

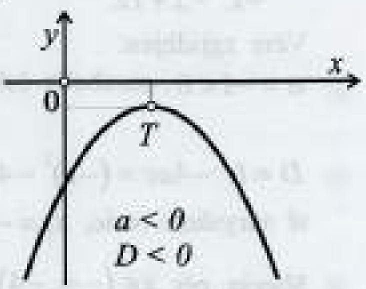


$a=2>0$; $D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 2m=9-16m$. Prej kushtit $D<0$ vijon

$9-16m<0$ ose $-16m<-9$, përkatësisht $m>\frac{9}{16}$, d.m.th. $m\in\left(\frac{9}{16},\infty\right)$.

b) Grafiku i trinomit në sistemin koordinativ, sipas kushtit duhet ta ketë pozitën sikurse është vizatuar. Domethënë, duhet $a<0$ dhe $D<0$, pra sistemi është

$$\begin{cases} m-3<0 \\ D=\left(2(m+1)\right)^2-4(m-3)(m+2)<0, \end{cases} \quad \begin{cases} m<3 \\ m<-\frac{7}{3} \end{cases}$$



d.m.th. $m\in\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right)$.

Detyra:

1. Cakto shenjën e katrorit të trinomit:

   a) $x^2+2x-24$; b) $-x^2-3x+4$.

2. Për cilat vlera të x katrori i trinomit fiton vlera pozitive:

   a) $-ax^2-3x+2$; b) x^2-3x+4; c) $-2+x-x^2$.

3. Cakto shenjën e funksionit katror:

   a) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x$; b) $y=-x^2+2x-3$.

4. Për cilat vlera të parametrit k funksioni $y=kx^2-2(k-1)x^2+k+2$ fiton vlera pozitive për çdo numër real?

5. Cakto parametrin k ashtu që funksioni $y=(k-1)x^2+(k-2)x-k-1$ të arrin vlerën më të vogël për $x=1$. Për vlerën e caktuar të k cakto shenjën e funksionit.

6. Cakto vlerën më të vogël të thyesës $\dfrac{2}{-\frac{1}{3}x^2-4x+1}$.

8 JOBARAZIMET KATRORE

Kujtohu!

- Për çdo vlerë të $x\in\{-1,3,5,0\}$ jobarazimi $x^2+x-1>0$ kalon në gjykim të saktë?
- Kur prodhimi $a\cdot b$ është pozitiv?

A

1 Zgjidhe jobarazimin katror

$$x^2-3x-10<0.$$

Vëre zgjidhjen

Detyrën do ta zgjidhim në disa mënyra.

- **Mënyra e parë.** Katrorin e trinomit të jobarazimit e transformojmë në prodhim. Për këtë qëllim kemi:

$$x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(-10)}}{2},\ x_1=5 \text{ ose } x_2=-2.$$

- Sipas formulës $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ fitojmë: $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$, d.m.th.

$$(x+2)(x-5)<0.$$

- Ky prodhim është ekuivalent me $\begin{cases}x+2>0\\x-5<0\end{cases} \vee \begin{cases}x+2<0\\x-5>0.\end{cases}$

Zgjidhja është $M=(-2,5)\cup\varnothing=(-2,5)$.

- **Mënyra e dytë.** Me metodën e intervaleve, kemi:

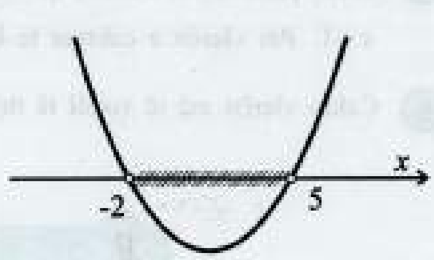
	$-\infty$	-2		5	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)(x-5)$	$+$		$-$		$+$

- Vëre, prodhimi është negativ në intervalin $(-2,5)$, t.e. $M=(-2,5)$.

Mënyra e tretë. Duke e shfrytëzuar lakoren e shenjës (vëre vetin 7, shenjën e katrorit të trinomit).

- Zero të trinomit $x^2-3x-10$ janë $x_1=5$ ose $x_2=-2$.
- Bashkësia e numrave real është ndarja në tre intervale të hapura $(-\infty,-2),(-2,5),(5,\infty)$, që shihet prej paraqitjes grafike.

- Me provë e caktojmë shenjën e trinomit te çfarëdo interval. Për shembull për $x=0$ kemi $0^2-3\cdot 0-10=-10<0$. Domethënë, për çdo $x\in(-2,5)$ trinomi është negativ, pra lakorja e shenjës në atë interval është nën boshtin x. Më tutje shenja e lakores ndryshon në mënyrë alternative në intervalet tjera. Sipas, $x^2-3x-10<0$ për $x\in(-2,5)$.
- **Mënyra e katërtë.** Me shenjën e katrorit të trinomit:
- Zerot janë: $x+2=0 \vee x-5=0,\ x=-2 \vee x=5$.
- Koeficienti i anëtarit të katrorit është pozitiv, pra parabolla është e hapur nga kahja pozitive e boshtit y.



- E lexojmë vlerën që është negative, d.m.th. $x^2-3x-10<0$ për $x\in(-2,5)$.

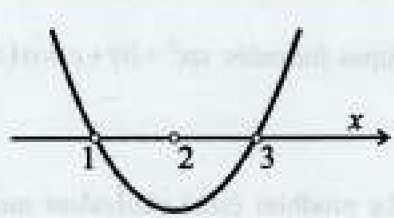
Mbaj mend!

Jobarazimi $ax^2+bx+c>(\geq,<,\leq)0$, ku $a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0$ quhet jobarazim katror.

2 Cakto zgjidhjet e plota të jobarazimit $\dfrac{(x-1)^2}{4}\leq 1-\dfrac{3-x}{2}$.

Vëre zgjidhjen:

- Pas rregullimit e fitojmë $x^2-4x+3\leq 0$.
  Për $a=1>0, D=4>0, x_1=1$ ose $x_2=3$.
- Pozita e parabollës është paraqitur në vizatim.

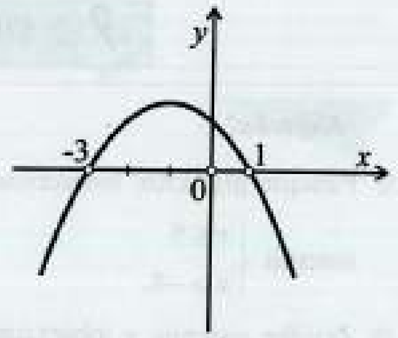


- Prandaj, zgjidhja është $M\in\{1,2,3\}$.

3 Zgjidhi jobarazimet: a) $x^2-6x+9>0$; b) $x^2-6x+9\leq 0$;

c) $x^2+2x^2+5<0$; ç) $-x^2+2x^2+5<0$.

4 Cakto fushën e përkufizimit të funksionit $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$.



Vëre zgjidhjen:

- $3-2x-x^2 \geq 0$.
- $a=-1<0,\ D=4-4\cdot 3\cdot(-1)=16>0,\ x_1=1$ ose $x_2=-3$.
- $3-2x-x^2 \geq 0$ për $x \in [-3,1],\ D_f=[-3,1]$.

5 Cakto fushën e përkufizimit për këto funksione:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$; b) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+7}$.

6 Cakto vlerën e parametrit k, ashtu që katrori i trinomit $x^2-(k-2)x+k-2$ të ketë zero reale.

Vëre zgjidhjen:

- Katrori i trinomit ka zero reale nëse $D \geq 0$, d.m.th. $b^2-4ac \geq 0$.
- Me zëvëndësim fitojmë $k^2-8k+12 \geq 0$, d.m.th.

$k_1=2$ ose $k_2=6$. Për $k=3$ kemi:

$3^2-8\cdot 3+12<0$, domethënë për $k \in (2,6)$ lakorja e shenjës është nën boshtin x. Në dy intervalet tjera është mbi boshtin, d.m.th. $k^2-8k+12 \geq 0$ për $k \in (-\infty,-2] \cup [6,\infty)$.

Prandaj trinomi ka zero reale nëse $k \in (-\infty, -2] \cup [6, \infty)$

7 Cakto parametrin k, ashtu që katrori i trinomit $(3k-2)x^2+kx+k$ të mos ketë zero reale. (Udhëzim: $3k-2 \neq 0,\ D<0$.)

Detyra:

1. Zgjidhe jobarazimin $x(2-x)+3>x^2-3x$.
2. Cakto fushën e përkufizimit të funksionit $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.
3. Zgjidhe barazimin $\dfrac{x-2}{3-2x} \geq 0$ me sjelljen në jobrazim katror.

9 SISTEMI I JOBARAZIMEVE KATRORE

Kujtohu!

- Paraqite grafikisht bashkësinë e zgjidhjeve të sistemit $\begin{cases} x \le 5 \\ x > -4. \end{cases}$
- Zgjidhe sistemin e jobarazimeve

$$\begin{cases} 2x-3 \ge 5 \\ 4-2x \ge -1. \end{cases}$$

A **1** Është dhënë sistemi prej një jobarazimi lineare dhe një jobarazimi katror

$$\begin{cases} 2x-3 \le -1 \\ x^2+x-20 < 0. \end{cases}$$

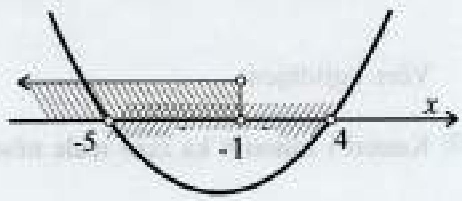
Cakto zgjidhjen e sistemit të dhënë

Vëre zgjidhjen

- Zgjidhja e jobarazimit linear është: $2x \le 3-1,\ x \le 1,\ M_1 = (-\infty, 1]$.
- Zerot e katrorit të trinomit janë: $x_1 = -5$ ose $x_2 = 4$, kurse zgjidhje e jobarazimit është $M_2 = (-5, 4)$.

Zgjidhja e sistemit është:

$M = M_1 \cap M_2 = (-\infty, 1] \cap (-5, 4) = (-5, 1]$.



- Zgjidhja e sistemit mund të caktohet grafikisht.

2 Zgjidhe sistemin e jobarazimeve: a) $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x^2-x-6 \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x+1) \ge 0 \\ x+3 > 0 \\ x^2-1 \ge 0. \end{cases}$

Kujtohu!

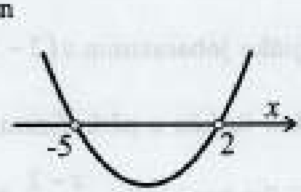
Cakto prerjen e bashkësive $M_1 = (-\infty, -3) \cup (10, \infty)$ dhe $M_2 = [-7, 15)$.

Për cilat vlera të a dhe b shprehja $\dfrac{a}{b}$ ëhtë negative?

B **3** Zgjidhe sistemin

$$\begin{cases} x^2+3x-10 \le 0 \\ x^2-4x-21 < 0. \end{cases}$$

Vëre zgjidhjen



- Zgjidhja e jobarazimit $x^2+3x-10 \le 0$ është:

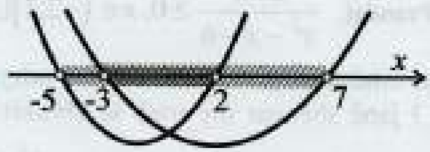
Zero janë $x_1 = -5 \vee x_2 = 2$, pra $M_1 = [-5, 2]$.

■ Zgjidhja e jobarazimeve $x^2-4x-21<0$ është:

Zero janë: $x_1=7 \vee x_2=-3$, pra $M_2=(-3,7)$.

■ Zgjidhja e sistemit është $M=(-3,\ 2)$.

■ Zgjidhjen mund ta caktojmë me paraqitjen grafike.



4 Zgjidhe sistemin $\begin{cases}(x-3)(x+4)\geq 0\\(x-4)(x+3)<0.\end{cases}$

5 Zgjidhe jobarazimin $\dfrac{x-1}{x^2-x-6}\geq 0.$

Vëre zgjidhjen:

Mënyra e parë: Jobarazimin do ta shqyrtojmë si jobarazim herës.

■ Jobarazimi është ekuivalent me disjunksionin e sistemeve:

■ $\begin{cases}x-1\geq 0\\x^2-x-6>0\end{cases}$ ose $\begin{cases}x-1\leq 0\\x^2-x-6<0\end{cases}$

Prej $x^2-x-6=0$

$\begin{cases}x\geq 1\\(x-3)(x+2)>0\end{cases}$ ose $\begin{cases}x\leq 1\\(x-3)(x+2)<0\end{cases}$

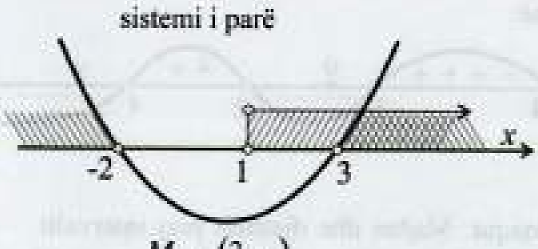
vijon $x_{1/2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}$,

d.m.th. $x_1=3$ ose $x_2=-2$.

$\begin{cases}x\geq 1\\x\in(-\infty,-2)\cup(3,\infty)\end{cases}$ ose $\begin{cases}x\leq 1\\x\in(-2,3).\end{cases}$

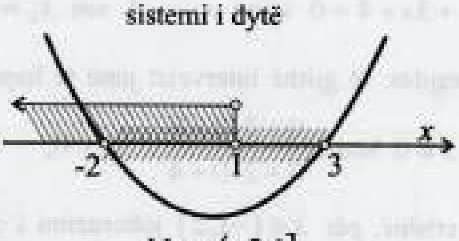
■ Zgjidhjen do ta caktojmë me paraqitjen grafike:

sistemi i parë



$M_1=(3,\infty)$

sistemi i dytë



$M_2=(-2,1]$

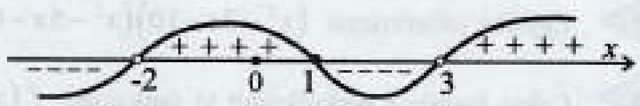
$$M=M_2\cup M_1=(-2,1]\cup(3,\infty).$$

Mënyra e dytë: Me lakoren e shenjës.

■ I caktojmë zerot dhe kemi:

$x-1=0$ për $x=1$;

$x^2-x-6=0$ për $x_1=-2$ ose $x_2=3$.



Për $x=0$ kemi $\frac{0-1}{0^2-0-6}=\frac{1}{6}>0$, që do të thotë për çdo $x\in(-2,1)$ shprehja është pozitive, pra lakorja e shenjës është nën boshtin x.

Në intervalet tjera shprehja në mënyrë alternative ndryshon.

Prandaj, $\frac{x-1}{x^2-x-6}\geq 0, x\in(-2,1]\cup(3,\infty)$.

Vëre, emëruesi gjithmonë është i ndryshueshëm prej zeros, prandaj pikat që u përgjigjen numrave - 2 dhe 3 janë shënuar me rrath të zbrazët.

6 Zgjidhe jobarazimin herës $\frac{x^2+2x-8}{-x^2+3x+4}<0$.

Vëre zgjidhjen:

Mënyra e parë:

Jobarazimi është ekuivalent me disjunksionin e sistemeve:

$$\begin{cases} x^2+2x-8>0 \\ -x^2+3x+4<0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2+2x-8<0 \\ -x^2+3x+4>0. \end{cases}$$

Zgjidhja e sistemit të parë është $M_1=(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$.

Zgjidhja e sistemit të dytë është $M_2=(-1,2)$, kurse zgjidhja e jobarazimit është

$$M=M_1\cup M_2, \text{ d.m.th. } M=(-\infty,-4)\cup(-1,2)\cup(4,\infty).$$

Zgjidhjen e jobarazimit caktoje grafikisht.

Mënyra e dytë: Me lakoren e shenjës.

Prej $x^2+2x-8=0$ vijon $x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-8)}}{2}$, d.m.th. $x_1=2$ ose $x_2=-4$. Ngjashëm, prej $-x^2+3x+4=0$ vijon $x_3=-1$ ose $x_4=4$. Intervalet janë:

Ke kujdes, të gjithë intervalet janë të hapur.

Për $x=0$ kemi $\frac{0+2\cdot 0-8}{0+2\cdot 0+4}=-2<0$,

domethënë, për $x\in(-1,2)$ jobarazimi i dhënë është i kënaqur. Majtas dhe djathtas prej intervalit $(-1,2)$ shenja e lakores ndryshon në mënyrë alternative. Prandaj, zgjidhje e jobarazimit është $M=(-\infty,-4)\cup(-1,2)\cup(4,\infty)$.

7 Zgjidhe jobarazimin $(x^2-3x-10)(x^2-5x-6)\leq 0$.

8 Cakto fushën e përkufizimit të funksionit $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-25}{x^2+x-6}}$.

9 Zgjidhe jobarazimin $\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}<-1.$

Vëre zgjidhjen

- Anëtarin - 1 e bartim në anën e majtë të jobarazimit, pra pas rregullimit e fitojmë jobarazimin herës

$$\frac{x^2+x-6}{2x^2-x-1}<0.$$

- Duke zbatuar ekuivalencën me disjunksionin e sistemit e fitojmë zgjidhjen e jobarazimit, d.m.th.

$$M=\left(-3,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,2).$$

- Duke e zbatuar lakoren e shenjës kemi: $x^2+x-6=0, x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$, $x_1=2$ ose $x_2=-3$.

Në mënyrë analoge, $2x^2-x-1=0, x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2\cdot 2}, x_3=1$ ose $x_4=-\frac{1}{2}$.

- Lakorja e shenjës është

Për $x=-4$ kemi:

$$\frac{(-4)^2+(-4)-6}{2\cdot(-4)^2-(-4)-1}=\frac{6}{35}>0.$$ Zgjidhja është $M=\left(-3,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,2).$

Kjo metodë mund të zbatohet për zgjidhjen e çfarëdo jobarazimi. Veçanërisht është e përshtatshme për zgjidhjen e jobarazimeve te të cilët ka më shumë shumëzues ose pjesëtues.

10 Zgjidhe jobarazimin $\frac{(x^2+4x-5)(x^2+x+1)}{(x^2-9)(x^2-9x+14)}\le 0.$

Vëre zgjidhjen:

- $x^2+x+1=0$ nuk ka zero reale.

$x^2+4x-5=0,\ x_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-5)}}{2}, x_1=1\vee x_2=-5;\quad x^2-9=0, x_3=3\vee x_4=-3;$

$x^2-9x+14=0,\ x_{5/6}=\frac{9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 14}}{2}, x_5=7\vee x_6=2;$

Ke kujdes, asnjëri prej shumëzuesëve te emëruesi nuk mund të jetë i barabartë me zero.

Intervalet janë paraqitur në vizatim

Caktimi i shenjës të jobarazimit mund të jetë në çfarëdo interval,

pra, kështu për $x=0$, me zëvendësimin te jobarazimi i dhënë kemi: $\frac{(-5)\cdot 1}{(-9)\cdot 14}=\frac{-5}{-126}>0.$

Prandaj, për $x\in(-3,1)$, $\frac{(x^2+4x-5)(x^2+x+1)}{(x^2-9)(x^2-9x+14)}>0$, d.m.th. lakorja e shenjës është mbi boshtin x. Në intervalet , shenja e lakores ndryshon në mënyrë alternative. Prandaj zgjidhja e jobarazimit është

$$M=[-5,-3)\cup[1,2)\cup(3,7).$$

11 Zgjidhe jobarazimin $\frac{(x^2+4x+7)(x^2-2x-3)}{(x^2+x+2)(x^2-4)} \geq 0.$

12 Për cilat vlera të parametrit a, jobarazimi $\frac{ax}{x^2+4} < \frac{3}{2}$ është i saktë për çdo numër real x?

Vëre zgjidhjen:

- Jobarazimin e transformojmë në formën $\frac{-3x^2+2ax-12}{2(x^2+4)} < 0.$
- Emëruesin $2(x^2+4) > 0$ për çdo numër real. Domethënë, shenja e thyesës varet prej numëruesit .

  Prej këtu vijon $-3x^2+2ax-12<0$ për çdo numër real.
- Pasi $a=-3<0$, domethënë $D=(2a)^2-4\cdot(-3)\cdot(-12)$ duhet të jetë negativ, d.m.th.

  $4a^2-144<0,\ a^2-36<0$. Zgjidhja është $M=(-6,6)$.

Detyra:

1. Cakto zgjidhjen e sistemit $\begin{cases} x+1<0 \\ x^2-x-6<0. \end{cases}$
2. Zgjidhe jobarazimin $(x^2-4)(x^2-2x-15) \leq 0.$
3. Zgjidhe jobarazimin katror $\frac{x^2+2x-63}{x^2-8x+7} > 7.$
4. Për cilën vlerë të k, jobarazimi $\frac{2x^2+kx-4}{x^2-x-4} < 4$ është i saktë për çdo numër real x?

Ushtrim kontrollues tematik

1. Cakto $a,b,c \in \mathbb{R}$ te funksioni $f(x)=ax^2+bx+c$, nëse $f(1)=0, f(2)=4, f(-1)=10.$
2. Në të njëjtin sistem koordinativ dhe me ndihmën e funksionit $y=x^2$ vizato grafikonët e funksioneve: a) $f(x)=x^2-4,\ f(x)=x^2+2;$ b) $f(x)=(x-1)^2,\ f(x)=(x+2)^2.$
3. Transformoje në formën kanonike funksionin $f(x)=2x^2-4x+6.$
4. Cakto shenjën dhe monotoninë e funksionit $f(x)=6x^2+x-2.$
5. Vizato grafikun dhe shqyrto vijimin e funksionit $f(x)=-x^2+2x+3.$
6. Cakto shenjën e katrorit të trinomit: a) $2x^2+7x-4;$ b) $-3x^2+x+2.$
7. Cakto fushën e përkufizimit të funksionit $f(x)=\sqrt{2x^2-5x-12}.$
8. Zgjidhe sistemin e jobarazimeve $\begin{cases} x^2-x-30 \leq 0 \\ x^2-4x-32>0. \end{cases}$

TEMA 5

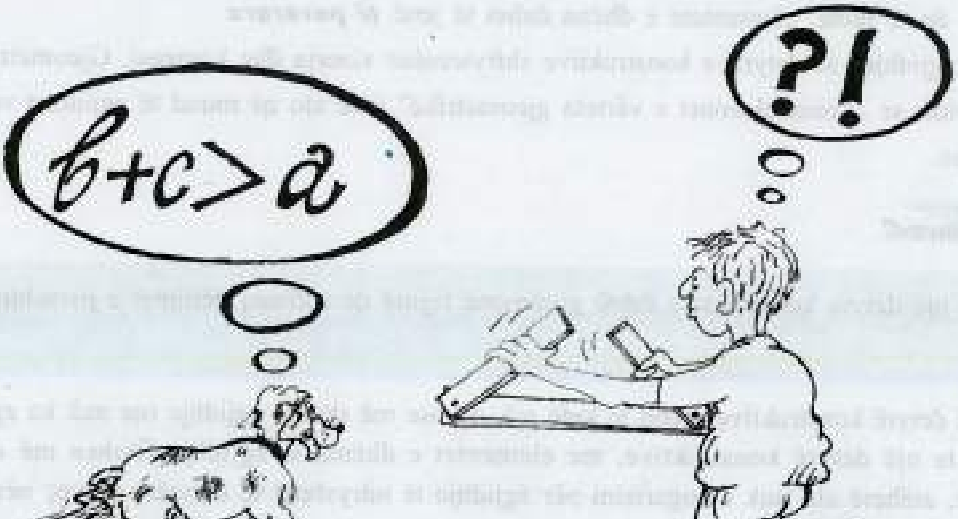
KONSTRUKSIONI I TREKËNDËSHIT DHE KATËRKËNDËSHIT

Në kopshtin e madh të gjeometrisë çdonjëri mund të bën buqet sipas shijes së vet.

D. Hilbert (1862-1943)

Në këtë temë do të mësosh për:

- si zgjidhet detyra konstruktive;
- hapat për zgjidhjen e detyrave konstruktive;
- metodat për zgjidhjen e detyrave konstruktive;
- konstruksioni i vendeve gjeometrike të pikave;
- konstruksioni i trekëndëshit;
- kontsruksioni i katërkëndëshit.



1 KONCEPTI PËR DETYRA KONSTRUKTIVE

A Interesi për kontsruksionet gjeometrike ka fillet qysh para erës sonë. Sipas shënimeve historike, kërkesa për zgjidhjen e detyrave konstruktive vetëm me ndihmën e kompasit dhe vizores për herë të parë e ka përdor Platoni (429 - 374). Prej atëherë, zhvillimi i gjeometrisë dhe disa disiplinave tjera të matematkës janë lidhur ngushtë me zhvillimin e konstruksioneve gjeometrike në rrafsh.

Sot, teoria e konstruksioneve gjeometrike paraqet fushë matematike të zhvilluar, të pasur e cila ka zbatim të gjerë praktik.

Detyrat konstruktive kanë vend të veçant në gjeometri. Zgjidhja e tyre kërkon pjesëmarrje në aktivitetet e të menduarit të ndërlikuar dhe ndoshta asnjë fushë tjetër matematike nuk e zhvillon në nivel të atillë të menduarit logjik, sikurse atë që e bën gjeometria, por veçanërisht detyrat konstruktive.

Detyra e cila zgjidhet me ndihmën e figurave të dhëna gjeometrike dhe saktësisht me instrumentet të caktuara, ku fitohet figurë gjeometrike që kënaq disa kushte të dhëna prej më parë, paraqet detyrë konstruktive.

Gjatë zgjedhjes së të dhënave në detyrë duhet pasur kujdes ato prej më parë ta përjashtojnë mundësinë për zgjidhje. Për shembull, me të dhëna: ***brinja*** AC, ***këndi*** α dhe ***lartësia*** h_c trekëndëshi nuk mund të konstruktohet, pasi njëri prej elementeve të dhënë (brinja, këndi ose lartësia) varet prej dy të tjerëve, pra trekëndësh kënddrejt me hipotenuzë, katetë dhe kënd të ngushtë të dhënë ka tepricë të elementeve të dhënë. Kjo do të thotë, elementete e dhëna duhet të jenë ***të pavarura***.

Gjatë zgjidhjes së detyrave konstruktive shfrytëzohet vizorja dhe kompasi. Gjeometrat e vjetër grek kanë llogaritur se „konstruksionet e vërteta gjeometrike" janë ato që mund të zgjidhen vetëm me vizore dhe kompas.

Mbaj mend!

Zgjidhja e një detyre konstruktive është gjithmonë figurë që i kënaq qëllimet e parashtruara të detyrës.

Një detyrë konstruktive mund të ketë një, dy ose më shumë zgjidhje ose nuk ka zgjidhje.

Nëse te një detyrë konstruktive, me elementet e dhëna, si zgjidhje fitohen më shumë figura të puthitshme, atëherë ato nuk i llogarisim për zgjidhje të ndryshme të detyrës, përveç nëse te detyra nuk kërkohet pozitë e ndryshme e figurës.

B Zgjidhja e një detyre konstruktive kalon nëpër këto etapa: ***analiza, konstruksioni, vërtetimi dhe diskutimi.***

Analiza. Analiza e detyrës është etapa përgatitore me të cilën kërkohet mënyra për zgjidhjen e konstruksionit. Duhet të vërehet lidhja ndërmjet elementeve të dhëna dhe figura e kërkuar.

Analiza bëhet te figura për të cilën supozohet se është zgjidhje e detyrës. Figura e vizatuar duhet të jetë afër figurës së kërkuar, kurse në të shënohen elementet e dhëna. Analiza zakonisht fillon me fjalët: „Supozojmë se detyra është zgjidhur", kurse pastaj e kërkojmë lidhjen ndërmjet elementeve të dhëna dhe figurës së kërkuar. Analiza është komplete, nëse çdo hap te mënyra sqarohet.

Konstruksioni. Konstruksioni vijon pas analizës dhe përfshin bashkësi prej konstruksioneve themelore të bëra sipas radhitjes së konstatuar, me qëllim të fitohet figura e kërkuar.

Vërtetimi. Në këtë pjesë bindemi se figura e konstruktuar i kënaq kushtet e detyrës. Shpeshherë vërtetimi për disa gjykime vijon prej konstruksionit.

Diskutimi. Te analiza e përcaktojmë mënyrën për konstruksionin e figurës së kërkuar sipas elementeve të dhëna. Gjatë konstruksionit mund të ndodh me elementet e dhëna të fitohet një, ose më shumë zgjidhje, ose të mos ketë zgjidhje. Për këtë shkak, diskutimi duhet të jetë përgjigje e pyetjeve:

a) A mundet konstruksioni të bëhet me çfarëdo zgjedhje të elementeve të dhëna?

b) Sa zgjidhje ka detyra për çdo zgjedhje të mundshme të elementeve të dhëna?

Të gjitha etapat e përmendura nuk janë gjithmonë rigoroze të diferencuara, por zbatimi i tyre çon nga zgjidhjet e plota dhe të sakta të detyrave konstruktive.

Gjatë zgjidhjes së detyrave konstruktive shfrytëzohen metoda të ndryshme, shpeshherë këto:

1) metoda e vendeve gjeometrike të pikave;
2) metoda e figurave ndihmëse;
3) metoda e analizës algjebrike;
4) metoda e transformacioneve gjeometrike.

Gjatë zgjidhjes të disa detyrave konstruktive shpeshherë shfrytëzohen më shumë metoda.

C

■ Zgjidhja e një detyre konstruktive qëndron në konstruksionin e numrit të fundshëm të konstruksioneve ***themelore*** .

Zakonisht, pesë konstruksionet që vijojnë llogariten si themelore:

1) Konstruksioni i drejtëzës të përcaktuar me dy pika të përbashkëta.
2) Përcaktimi i pikëprerjes të dy drejtëzave.
3) Konstruksioni i vijës rrethore me qendër dhe rreze të dhënë..
4) Konstruksioni i pikëprerjes të drejtëzës dhe vijës rrethore.
5) Konstruksioni i pikëprerjes të dy vijave rrethore.

Vëre zgjidhjet e disa detyrave konstruktive, duke shfrytëzuar konstruksionet themelore.

1 Konstruksioni i simetrales së segmentit AB.

■ Vëre fazën e konstruksionit (fig. 1),

■ $k_1(A,r)\cap k_2(B,r)=\{C,D\}$, $r>\frac{\overline{AB}}{2}$, çka do të thotë drejtëza CD është simetrale e segmentit AB.

■ $k_1(A,r)$ domethënë, vizatojmë vijë rrethore me qendër në pikën A dhe rreze r.

■ $k_2(B,r)$ vizatojmë vijë rrethore në pikën B dhe rreze r, kurse

$k_1(A,r)\cap k_2(B,r)=\{C,D\}$ domethënë, të dy vijat rrethore priten në pikat C dhe D.

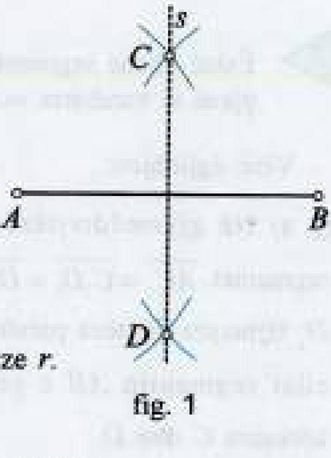


fig. 1

2 Konstrukto simetralen e këndit α (fig. 2).

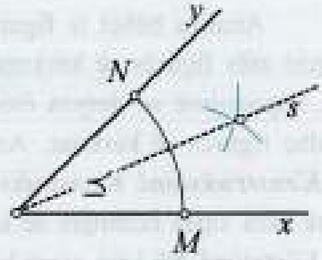


fig. 2

3 Vizato segmentin AB dhe barte në drejtëzën e dhënë p.

4 Është dhënë këndi α. Konstrukto kënd që është i barabartë me këndin e dhënë.

5 Është dhënë drejtëza a dhe pika A që nuk shtrihet në drejtëzën e dhënë. Konstrukto drejtëz që kalon nëpër pikën A dhe është paralele me drejtëzën e dhënë.

Vëre zgjidhjen

Konstruktojmë:

$k(A,r)\cap a=\{P,Q\}$; $k_1(Q,\overline{AP})\cap k_2(A,\overline{PQ})=\{M\}$.

Pasi $\overline{AP}=\overline{MQ}$, $\overline{PQ}=\overline{AM}$, katërkëndëshi $PQMA$ është paralelogram, pra $PQ \parallel AM$ (fig. 3). Domethënë, pikat A dhe M e përcaktojnë drejtëzën e kërkuar.

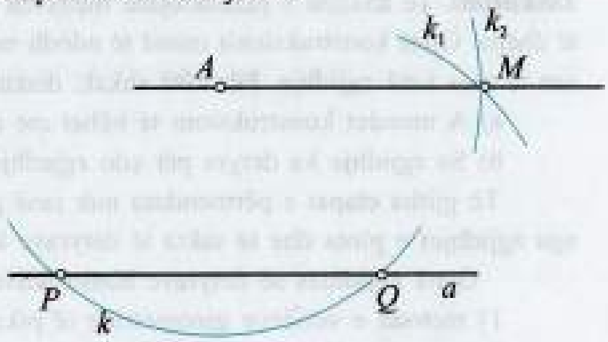


fig. 3

6 Konstrukto drejtëz që është normale me drejtëzën e dhënë dhe kalon nëpër pikën e dhënë.

Vëre zgjidhjen

a) Nëse $A \notin a$, atëherë kemi (fig. 4):

$$k(A,r)\cap a=\{P,Q\};\ k_1(P,r_1)\cap k_2(Q,r_1)=\{B\};\ \left(r_1>\frac{\overline{PQ}}{2}\right).$$

Drejtëza AB është drejtëza e kërkuar.

b) Bëne konstruksionin nëse $A \in a$.

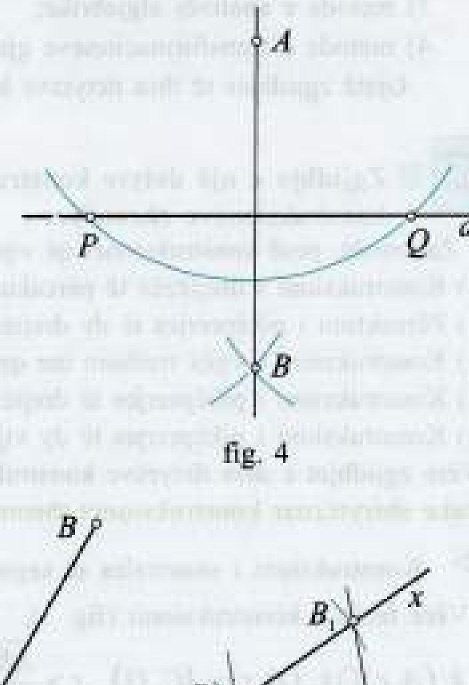


fig. 4

7 Është dhënë segmenti $\overline{AB}=a$ të ndahet në pjesë të barabarta ose në raport të dhënë.

Vëre zgjidhjen:

a) Në gjysmëdrejtëzën A_x (fig. 5) i bartim segmentet $\overline{AC_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{D_1B_1}$. Nëpër pikat C_1 dhe D_1 tërheqim drejtëza paralele me drejtëzën BB_1, të cilat segmentin AB e prejnë në pikëndarjet e kërkuara C dhe D.

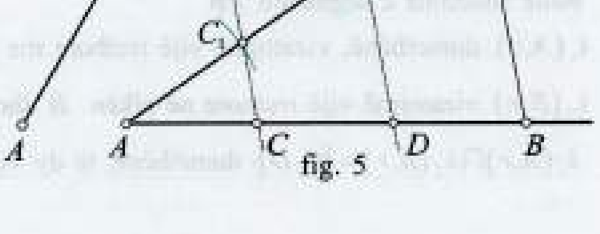


fig. 5

b) Nëse segmenti AB duhet të ndahet, për shembull në raport $3:2$ (fig. 6.) atëherë në gjysmëdrejtëzën A_x bartim 5 (3+2) pjesë të barabarta, kurse pastaj prej pikës $C\left(\overline{AC}=3\right)$ tërheqim drejtëz paralele me BB_1 e cila e pret segmentin AB te pika e kërkuar D, d.m.th. $\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$.

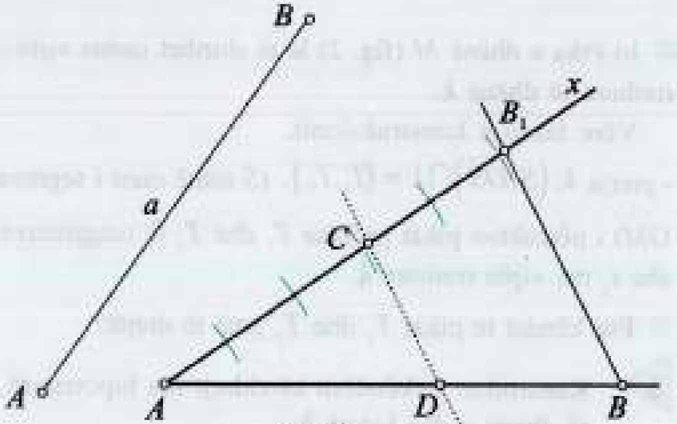


fig. 6

Detyra:

(1) Cakto qendrën e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit.

(2) Cakto qendrën e vijës rrethore të brendashkrur në trekëndësh.

(3) Cakto ortoqendrën e trekëndëshit.

(4) Segmentin $\overline{AB}=10cm$, ndaje në tre pjesë të barabarta.

(5) Segmentin $\overline{AB}=a$, ndaje në raport $3:4$.

2 DETYRAT THEMELORE KONSTRUKTIVE

Kujtohu!

- Çfarëdo brinjë e trekëndëshit është më e vogël se shuma e dy brinjëve tjera, kurse është më e madhe se ndryshimi i tyre $|a-b|<c<a+b$.
- Shuma e këndeve të brendshme në trekëndësh është 180^0.

A Për konstruksionet themelore të trekëndëshit do t'i llogarisim këto tre detyra:

1 Konstrukto trekëndësh nëse janë dhënë dy brinjë dhe këndi ndërmjet tyre.

2 Konstrukto trekëndësh nëse është dhënë një brinjë dhe këndet që shtrihen në të.

3 Konstrukto trekëndësh nëse janë dhënë të tre brinjët.

4 Nëpër pikën M të konstruktohet tangjenta e vijës rrethore të dhënë $k(O,r)$.

Vëre zgjidhjen:

a) Nëse pika e dhënë M i takon vijës rrethore k (fig. 1), tangjenta e kërkuar është simetrale e segmentit $\overline{ON}=2r$. (shihe detyrën 1 nga mësimi i kaluar)

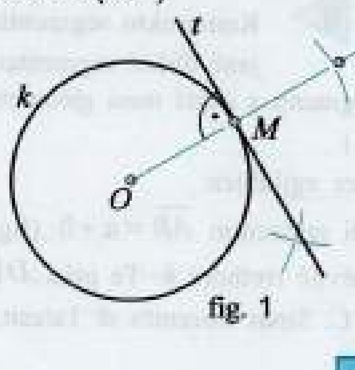


fig. 1

b) Pika e dhënë M (fig. 2) le të shtrihet jashta vijës rrethore të dhënë k.

Vëre fazën e konstruksionit.

- prerja $k_1\left(S,\overline{OS}\right)\cap k=\{T_1,T_2\}$, ($S$ është mesi i segmentit OM) i përcakton pikat prekëse T_1 dhe T_2 të tangjentave t_1 dhe t_2 me vijën rrethore k.

Pse këndet te pikat T_1 dhe T_2 janë të drejtë?

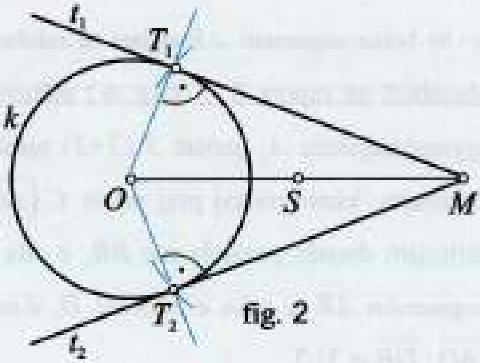


fig. 2

5 Konstrukto trekëndësh kënddrejt me hipotenuzë të dhënë c dhe katetë b.

Vëre zgjidhjen

Te pika C e drejtëzës p konstrukto normalen n, te e cila e bartim segmentin $\overline{CA}=b$ (fig. 3), pra $k\left(A,c\right)\cap p=\{B\}$. Ku është konstruktuar trekëndëshi kënddrejt ACB?

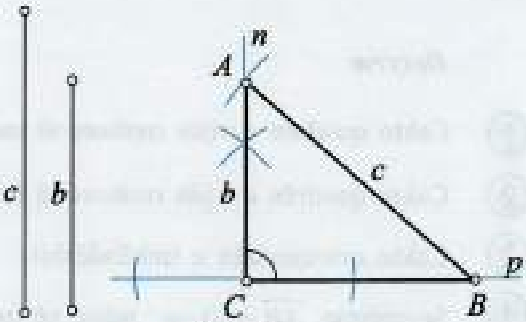


fig. 3

6 Konstrukto trekëndësh kënddrejt, nëse janë dhënë:

a) hipotenuza c dhe kateta a; b) të dy katetet;

c) këndi α dhe një katete.

7 Konstrukto tangjentën e vijës së dhënë rrethore, paralele me drejtëzën e dhënë.

Vëre zgjidhjen:

Prej pikës O konstruktojmë normalen në drejtëzën p (fig. 4). Në prerjen e asaj normale dhe vijës rrethore i fitojmë pikat T_1 dhe T_2 te të cilat janë konstruktuar tangjentat e kërkuara t_1 dhe t_2.

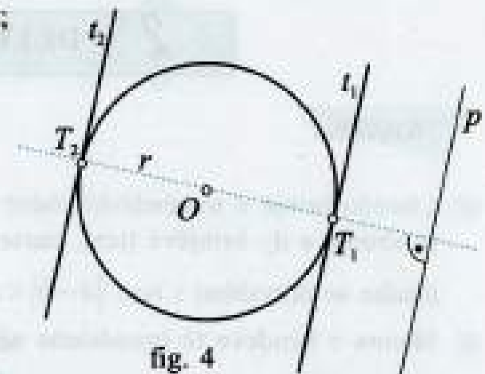


fig. 4

8 Konstrukto tangjentën e vijës rrethore, e cila është normale në drejtëzën e dhënë.

B **9** Konstrukto segmentin $x=\sqrt{a\cdot b}$, nëse janë dhënë segmentet a dhe b.

(Segmenti x është mesi gjeometrik i segmentëve a dhe b.)

Vëre zgjidhjen:

fig. 5

Mbi segmentin $\overline{AB}=a+b$ (fig. 5) jashtashkruajmë gjysmëvijë rrethore k. Te pika $D\left(\overline{AD}=a\right)$ tërheqim normale e cila e pret gjysmëvijën rrethore k në pikën C. Sipas teoremës së Talesit, ΔABC është kënddrejt.

Prej ngjashmërisë së trekëndëshave ADC dhe BDC $(\measuredangle BCD=\alpha,\ \measuredangle ACD=\beta)$ vijon se $a:x=x:b$, d.m.th. $x=\sqrt{a\cdot b}$, që do të thotë $\overline{DC}=x=\sqrt{a\cdot b}$.

10 Nëse janë dhënë segmentet a, b dhe c, konstrukto segmentin x, ashtu që $a:b=c:x$ (e njohur si proporcionalja e katërtë gjeometrike).

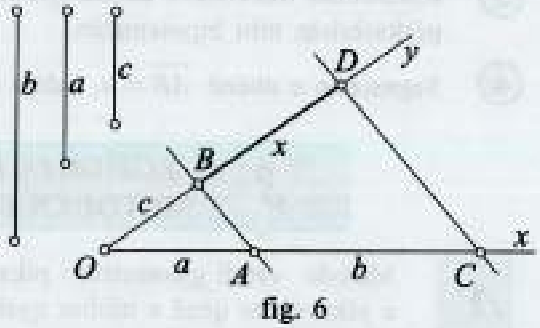


fig. 6

Vëre zgjidhjen:

■ Te krahu O_x prej këndit xOy (fig. 6) i bartim segmentet $\overline{OA}=a$ dhe $\overline{AC}=b$, ndërsa te krahu Oy e bartim segmentin $\overline{OB}=c$. Nëpër pikën C tërheqim drejtëz paralele me AB, cila krahun O_y e pret në pikën D. Sipas teoremës së Talesit vijon se segmentet e fituar janë proporcionale, d.m.th. $a:b=c:x$. Me këtë është përcaktuar gjatësia e segmentit $\overline{BD}=x$.

11 Konstrukto segmentin $x=a\cdot b$, nëse a dhe b janë segmentet e dhënë.

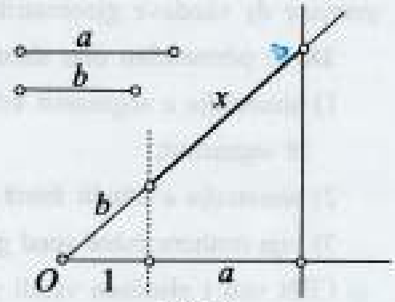


fig. 7

Vëre zgjidhjen:

■ Prej bàrasisë $1\cdot x=a\cdot b$, e fitojmë proporcionin $1:a=b:x$, ku 1 është gjatësia e segmentit njësi, prej madhësisë së cilës nuk varet madhësia e segmentit x (fig. 7).

12 Konstrukto segmentin $x=\dfrac{a\cdot b}{c}$, nëse a, b dhe c janë segmentet e dhëna.

13 Nëse janë dhënë segmentet a dhe b, konstrukto segmentet $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

Vëre zgjidhjen:

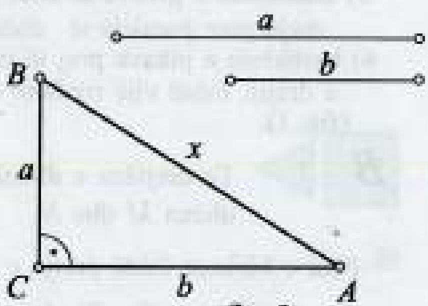


fig. 8

Prej barasisë $x=\sqrt{a^2+b^2}$, qartazi vijon se $x^2=a^2+b^2$. Çka do të thotë, segmenti x është hipotenuza e trekëndëshit kënddrejt, katetet e të cilit janë segmentet a dhe b (fig. 8).

14 Nëse janë dhënë segmentet a dhe b, konstrukto segmentin $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

Detyra:

(1) Te trekëndëshi ABC, konstrukto lartësinë h_c.

(2) Konstrukto trekëndëshin kënddrejt me hipotenuzën c dhe këndin α.

(3) Konstrukto trekëndësh kënddrejt, nëse janë dhënë proeksionet a_1 dhe b_1 të kateteve a dhe b përkatësisht mbi hipotenuzën.

(4) Segmentin e dhënë $\overline{AB} = a$, ndaje në raport $3:4$.

3 ZGJIDHJA E DETYRAVE KONSTRUKTIVE ME METODËN E VENDIT GJEOMETRIK TË PIKAVE

A Metoda vendi gjeometrik i pikave (më tutje shkurtimisht do ta shkruajmë v.gj.p ose bashkësia e pikave) ka qenë e njohur qysh në kohën antike, kurse për herë të parë e ka përdor filozofi grek Aristoteli (384-322). Ai ka menduar se vija nuk përbëhet prej pikave, por është vend ku mund të radhiten pikat.

Dihet se v.gj.p është çdo bashkësi e zbrazët e pikave të cilat posedojnë një veti të përbashkët. Shpeshherë, prerja e dy vendeve gjeometrike të pikave çon nga fitimi i figurës së kërkuar të detyrës konstruktive.

Do të përmendim disa shembulla, të cilët paraqesin v.gj.p. në rrafsh:

1) simetralja e segmentit është vernd gjeometrik i pikave, një lloj të larguara prej pikave të skajshme të segmentit;

2) simetralja e këndit është vend gjeometrik i pikave, një lloj të larguara prej krahëve të këndit;

3) vija rrethore është vend gjeometrik i pikave në atë rrafsh, një lloj të largaura prej një pike në rrafsh.

- Cilët veti i plotëson vendi gjeometrik i pikave të përmendura?

4) bashkësia e pikave të qendrave të të gjitha vijave rrethore të cilat e takojnë drejtëzën e dhënë në pikën e dhënë është drejtëz që është normale në drejtëzën e dhënë dhe në pikën e dhënë;

5) Bashkësia e pikave të cilat janë një lloj të larguara prej dy drejtëzave paralele të dhëna dhe një lloj të larguara prej tyre;

6) bashkësia e pikave prej të cilave segmenti i dhënë shihet nën këndin e drejtë, është vijë rrethore diametri i së cilës është segmenti i dhënë (fig. 1).

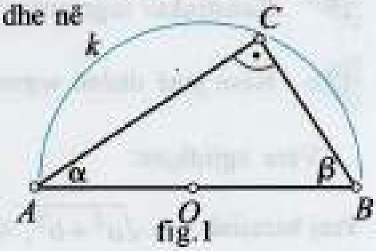


fig. 1

B 1 Te drejtëza e dhënë p konstrukto pikë A që, është në largësi të njëjtë prej dy pikave të dhëna M dhe N.

Pika e kërkuar është prerje e v.gj.p.-simetralja s e segmentit MN dhe drejtëzës p (fig. 2), d.m.th. $s \cap p = \{A\}$.

fig. 2

2 Është dhënë drejtëza p dhe drejtëzat q dhe r që priten. Në drejtëzën p cakto pikë S që është në largësi të njëjtë prej drejtëzace q dhe r.

Udhëzim: Prerja e drejtëzave p dhe simetralja e këndit të formuar prej drejtëzave q dhe r, është pika e kërkuar S.

3 Konstrukto v.gj.p. i cili i takon krahët e këndit të dhënë α dhe poashtu njëri krah në pikën e dhënë M.

Udhëzim: V.gj.p i kërkuar është vijë rrethore (fig. 3), qendra e të cilës është në prerjen e dy v.gj.p dhe atë simetralja s e këndit α dhe normalja n është tërhequr në pikën M të krahut Ox, d.m.th. $n \cap s = \{P\}$. Rrezja e vijës rrethore të kërkuar është segmenti MP.

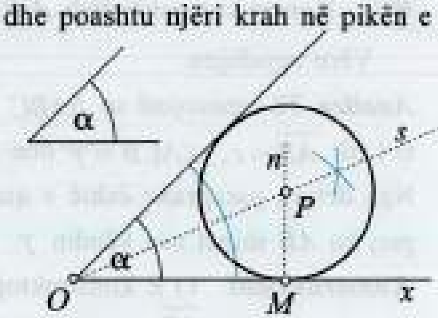


fig. 3

4 Është dhënë këndi α dhe pika M në brendësinë e tij. Cakto pikën S që është në largësi të caktuar d prej pikëa M dhe e cila është një lloj e larguar prej krahëve të këndit α.

5 Konstrukto v.gj.p. prej ku segmenti i dhënë AB shihet nën këndin e dhënë φ.

Vëre zgjidhjen:

Detyrën do ta zgjidhim në dy mënyra:

Mënyra e dytë:

Analiza. Vëre, ΔABO (fig. 4) është barakrahas me bazë AB dhe $\measuredangle AOB = 2\varphi$. Prej këtu vijon se $\measuredangle BAO = \measuredangle ABO = 90 - \varphi$. Prandaj qendra e vijës rrethore që është vendi gjeometrik i pikave të kërkuara në majën e trekëndëshit barakrahas ΔABO.

Konstruksioni. 1. Konstruktojmë ΔABO barakrahas, me bazë AB dhe $\measuredangle ABO = \measuredangle BAO = 90 - \varphi$.

2.Konstruktojmë vijë rrethore $k\left(O, r = \overline{OA}\right)$(fig. 5).

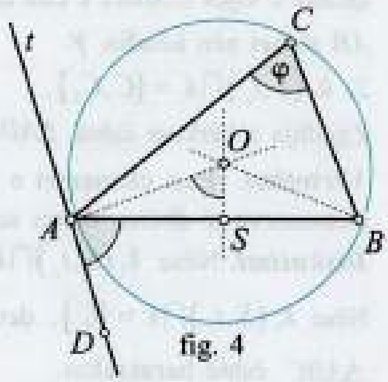


fig. 4

Vërtetimi. Vërtetimi është i qartë, pasi

$$\measuredangle AOB = 180^0 - 2\left(90^0 - \varphi\right) = 2\varphi.$$

Domethënë, $\measuredangle AXB = \varphi$ si kënd periferik mbi kordën AB.

Diskutimi. Konstruksioni është i mundshëm për çdo segment $\overline{AB} \neq 0$ dhe $0^0 < \varphi < 180^0$.

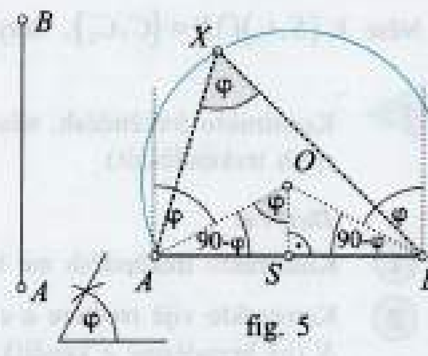


fig. 5

Mënyra e dytë:

Analiza. Të supozojmë se pika C (fig. 4) është pikë e kërkuar e cila e paraqet v.gj.p prej të cilës segmenti AB shihet nën këndin φ. Pasi pika O është qendra e vijës rrethore të jashtashkruar, domethënë ΔABO është barakrahas, pra $\measuredangle AOB = 2\varphi$. Prej $OA \perp AD$ dhe $OS \perp AB$ vijon $\measuredangle DAB = 0{,}5 \cdot \measuredangle AOB = \varphi$.

Konstruksioni. E viztojmë segmentin AB dhe $\measuredangle DAB = \varphi$ (fig.6). Në pikën A konstruktojmë normale të AD e cila është simetrale e segmentit AB në pikën O. Pika O është qendër e vijës rrethore e cila është vendi gjeometrik i pikave të kërkuara.

Vërtetimi. Pasi $\measuredangle DAB = \varphi$ dhe $n \perp AD$ vijon se $\measuredangle SAO = 90^0 - \varphi$, pra $\measuredangle AOS = \varphi$, kurse $\measuredangle AOB = 2\varphi$. Prandaj për çdo pikë X nga vija rrethore këndi periferik $AXB = \varphi$, si kënd periferik mbi harkun AB të cilit i përgjigjet këndi qëndror prej 2φ.

Diskutimi. Konstruksioni është i mundshëm për çdo segment $\overline{AB} \neq 0$ dhe $0^0 < \varphi < 180^0$. Nëse $\varphi = 90^0$, atëherë v.gj.p. është vijë rrethore diametri i së cilës është segmenti AB.

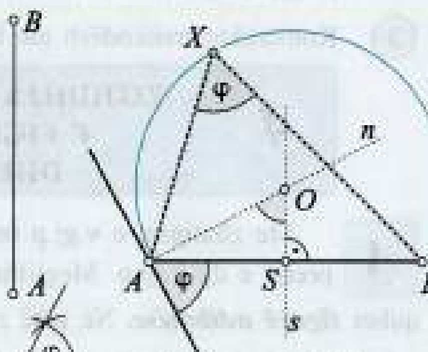


fig. 6

6 Konstrukto trekëndësh ABC me brinjë c, kënd γ dhe vijë të rëndimit t_c.

Vëre zgjidhjen:

Analiza. Të supozojmë se ΔABC (fig. 6) është trekëndëshi i kërkuar te i cili $\overline{AB}=c$, $\measuredangle ACB=\gamma$ dhe $\overline{SC}=t_c$.

Nga detyra paraprake është e qartë se kulmi C shtrihet në v.gj.p. prej ku AB shihet nën këndin γ.

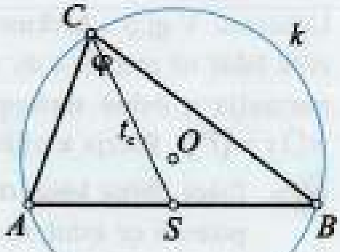


fig. 6

Konstruksioni. 1) E konstruktojmë trekëndëshin barakrahas ABO (fig. 7) me bazë $\overline{AB}=c$ dhe këndet e bazës $\measuredangle SAO=\measuredangle SBO=90^0-\gamma$. Maja O e trekëndëshit barakrahas është qendra e vijës rrethore e cila është v.gj.p të kërkuar prej ku segmenti AB shihet nën këndin γ.

2) $k_1(S,t_c)\cap k=\{C,C_1\}$.

Zgjidhja e kërkuar është ΔABC ose ΔABC_1.

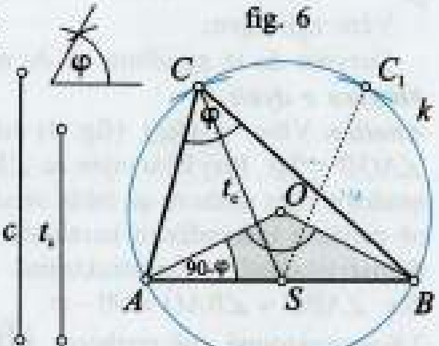


fig. 7

Vërtetimi. Pasi elementet e figurës së kërkuar u përgjigjen elementeve të dhëna, themi se konstruksioni është i plotë.

Diskutimi. Nëse $k_1(S,t_c)\cap k=\varnothing$, detyra nuk ka zgjidhje.

Nëse $k_1(S,t_c)\cap k=\{C\}$, detyra ka një zgjidhje dhe ΔABC është barakrahas.

Nëse $k_1(S,t_c)\cap k=\{C,C_1\}$, detyra ka dy zgjidhje, sikurse në këtë rast.

7 Konstrukto trekëndësh, nëse është dhënë a, t_a dhe R (R - rrezja e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit).

Detyra:

1. Konstrukto trekëndësh me brinjë a dhe lartësi h_b dhe h_c.
2. Konstrukto vijë rrethore e cila i prek krahët e këndit të dhënë α dhe kalon nëpër dy pika M dhe N (në brendësinë e këndit).
3. Konstrukto trekëndësh me brinjë b, kënd β dhe lartësi h_b.

4 ZGJIDHJA E DETYRAVE KONSTRUKTIVE ME METODËN E FIGURËS NDIHMËSE, ANALIZA ALGJEBRIKE DHE TRANSFORMACIONET GJEOMETRIKE

A Me zbatimin e v.gj.p mund të konstatohet se pikë e nevojshme ose e kërkuar përcaktohet si prerje e dy v.gj.p. Megjithatë, shpeshherë konstruktohet sëpari pjesa e parë e figurës së kërkuar, quhet ***figurë ndihmëse.*** Në këtë rast themi se shfrytëzohet metoda e figurave ndihmëse , që në realitet nuk dallohet prej metodës së v.gj.p, pasi dhe plotësimi i figurës ndihmëse deri te figura e kërkuar kryhet me ndihmën e konstruksionit të v.gj.p.

Qe një shembull nga zbatimi i kësaj metode:

1 Konstrukto trekëndëshin ABC, nëse janë dhënë brinja c, lartësia h_c dhe vija e rëndimit t_c.

Vëre zgjidhjen:

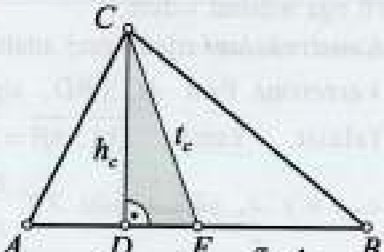


fig.1

Analiza. Detyra le të jetë e zgjidhur dhe trekëndëshi ABC (fig. 1) le të jetë trekëndëshi i kërkuar. Është e qartë se ΔDFC është kënddrejt (figurë ndihmëse) mund të konstruktohet pasi dihet kateta h_c dhe hipotenuza t_c, kurse me të do të caktohet kulmi C i ΔABC. Kulmet A dhe B shtrihen në drejtëzën DF në largësi $\frac{1}{2}\overline{AB}$ prej pikës F. (Pse?)

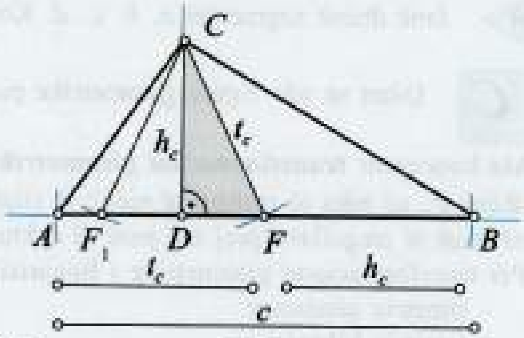


fig.2

Konstruksioni. E konstruktojmë trekëndëshin kënddrejt DFC (fig. 2) me kateta h_c dhe hipotenuzë t_c. Vija rrethore $k\left(F, \frac{c}{2}\right)$, e pret drejtëzën DF te pikat e kërkuara A dhe B, d.m.th.. $\overline{FA} = \overline{FB} = \frac{c}{2}$.

Vërtetimi. Me konstruktimin e ΔDFC, kënddrejt, gjatësia e segmenteve h_c dhe t_c është e saktë sipas konstruksionit.
Mesi F i gjatësisë së segmentit AB, gjithashtu, vijon prej konstruksionit.

Diskutimi. Konstruksioni i trekëndëshi kënddrejt DFC është i mundshëm nëse $h_c \le t_c$. Që do të thotë:
a) nëse $h_c < t_c$, vija rrethore $k(C, t_c)$ do ta pret drejtëzën DE në dy pika F dhe F_1, kurse me të detyra ka dy zgjidhje, prej të cilëve njëra është dhënë në vizatim. Si janë ato zgjidhje ndërmjet vedi;
b) nëse $h_c = t_c$, detyra ka një zgjidhje dhe atëherë ΔABC do të jetë trekëndësh barakrahas;
c) nëse $h_c > t_c$, detyra nuk ka zgjidhje?

2 Konstrukto trekëndësh me vijat e rëndimit t_a dhe t_b dhe këndi ndërmjet tyre ω.

B Te disa detyra konstruktive janë përfshirë varësi metrike ndërmjet elementeve të dhënë, d.m.th.. lidhja ndërmjet atyre elementeve është shprehur ***algjebrikisht.*** Në rastin e këtillë zgjidhja e detyrave konstruktive, në pjesën e analizës formohen barazime, te të cilat konstruktivisht duhet të caktohet e panjohura.

Qe një shembull prej zbatimit të kësaj metode:

3 Janë dhënë segmentet a, b dhe c. Konstrukto segmentin $x = \frac{a^2 + b^2}{c}$.

Vëre zgjidhjen:
Analiza. Le të jetë $a^2 + b^2 = y^2$, prej ku është e qartë se y - është hipotenuzë për trekëndëshin kënddrejt (fig. 3) me kateta a dhe b.

Më tutje për caktimin e segmentit $x=\frac{y^2}{c}$, kemi $c\cdot x=y\cdot y$, d.m.th. $c:y=y:x$, për konstruksionin e të cilit shfrytëzohet detyra 10 nga mësimi i dytë.

Konstruksioni rrjedh prej analizës të detyrës.

Vërtetimi. Pasi $AC \parallel BD$, sipas teoremës së Talesit, kemi $\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{OC}:\overline{CD}$ ose $c:y=y:x$, përkatësisht $x=\frac{y^2}{c}=\frac{a^2+b^2}{c}$.

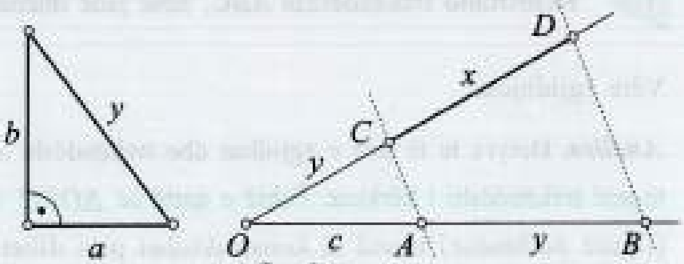


fig. 3

Diskutimi. Detyra gjithmonë ka zgjidhje të vetme.

4 Janë dhënë segmentet a, b, c, d. Konstrukto segmentin $x=\frac{(a+b)\cdot c}{d}$.

C Dihet se çdo figurë gjeometrike paraqet bashkësi jo të zbrazët të pikave në rrafsh.

Me konceptin ***transformacion gjeometrik*** nënkuptojmë zhvendosje (pasqyrim) të pikave të figurës së dhënë F, në pika të rrafshit të njëjtë të cilat formojnë figurë F_1 të puthitshme me figurën e dhënë, kurse në bazë të rregullave prej më parë të caktuara.

Për transformacione gjeometrike i llogarisim, këto:
- simetria qëndrore;
- simetria bshtore;
- rrotacioni;
- translacioni;
- homotetia.

5 Konstrukto trekëndësh barabrinjës ABC, ashtu që kulmet e tij të shtrihen në tre drejtëza paralele.

Udhëzim. Le të jenë dhënë drejtëzat paralele l, p dhe q (fig. 4). Kulmi A le të shtrihet në drejtëzën p. Me rrotacion të drejtëzës q me qendër në pikën A për këndin prej 60^0 fitohet drejtëza q_1. Në prerjen e drejtëzave ℓ dhe q_1 është kulmi C i trekëndëshit të kërkuar. Vija rrethore $k(A,AB)$ e pret drejtëzën q në pikën B, e cila është kulmi i tretë i trekëndëshit të kërkuar.

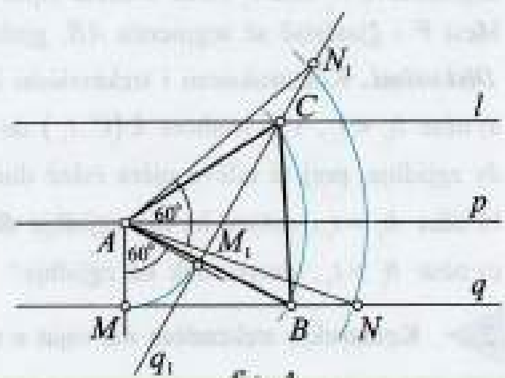


fig. 4

6 Janë dhënë tre vija rrethore koncentrike k_1, k_2 dhe k_3. Konstrukto trekëndësh barabrinjës ABC ashtu që çdo kulm të shtrihet në vijat rrethore të ndryshme.

Detyra:

1. Konstrukto trekëndëshin me brinjën c, lartësin h_c dhe këndin α.

2. Konstrukto trekëndëshin nëse janë dhënë b, α, t_c.

3. Konstrukto trekëndëshin nëse janë dhënë këndet α dhe β dhe lartësia h_c.

5 KONSTRUKSIONI I TREKËNDËSHIT

Kujtohu!

- Si konstruktohet normalja e drejtëzës në pikën që shtrihet te drejtëza?
- Si konstruktohet normalja e drejtëzës prej pikës që nuk shtrihet në drejtëz?
- Si konstruktohet drejtëza paralele me drejtëzën e dhënë, e cila kalon nëpër pikën që nuk shtrihet në drejtëzën e dhënë?
- Për vijën e mesme të trekëndëshit.

A

1 Konstrukto trekëndësh ABC, nëse janë dhënë brinjët b dhe c dhe vija e rëndimit t_a.

Vëre zgjidhjen:

Analiza. Të supozojmë se trekëndëshi ABC (fig. 1) është konstruktuar, me brinjë b, c dhe vija e rëndimit t_a. Vëren se $\overline{A_1C_1}=\frac{b}{2}$. (Pse?) (Pika C_1 është mesi i AB.)

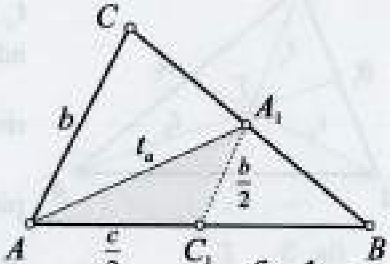


fig. 1

Konstruksioni. E konstruktojmë figurën ndihmëse ΔAC_1A_1, me brinjë $\overline{AC_1}=\frac{c}{2}$, $\overline{AA_1}=t_a$ dhe $\overline{A_1C_1}=\frac{b}{2}$.

- Si do t'i caktosh kulmet B dhe C?

Vërtetimi. Elementet e dhëna e kënaqin konstruksionin.

Diskutimi. Gjatë çfarëdo zgjedhje të elementeve mund të ketë një zgjidhje: $\left(\left|\frac{c}{2}-\frac{b}{2}\right|<t_a<\frac{c}{2}+\frac{b}{2}\right)$ ose të mos ketë zgjidhje.

2 Konstrukto trekëndësh barakrahas me bazë a dhe lartësi h_c.

3 Konstrukto trekëndësh barakrahas me bazë a dhe lartësi h_b.

Udhëzim. Në prerjen e vijave rrethore $k_1\left(D,\frac{\overline{AB}}{2}\right)$ dhe $k_2(A,h_b)$ fitojmë pikën A_1. Trekëndëshi AA_1B është kënddrejt. (Pse?). Te kulmi A e konstruktojmë këndin $\alpha=\measuredangle B$ krahu i të cilit pritet me gjysmëdrejtëzën BA_1 te kulmi i kërkuar C. (fig. 3)

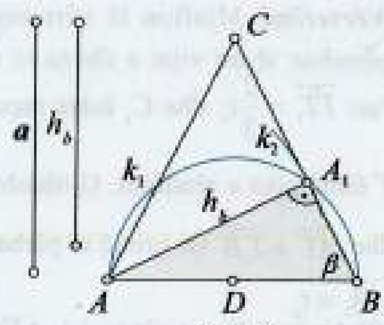


fig.. 3

4 Konstrukto trekëndëshin ABC, me brinjën c, lartësin h_a dhe këndin α.

5 Konstrukto trekëndëshin me brinjën c, këndin β dhe vijën e rëndimit t_a.

6 Konstrukto trekëndëshin me brinjën c, kënd γ dhe lartësin h_c.

Vëre zgjidhjen:

1) Konstrukto vijën rrethore k, prej ku segmenti AB shihet nën këndin γ, për të cilin e shfrytëzojmë trekëndëshin barakrahas ABO me brinjë $\overline{AB}=c$ dhe këndet te ai $90^0-\gamma$. (fig. 4)

2) Në largësi h_c prej drejtëzës AB tërheqim drejtëz p, paralele me AB, e cila e pret vijën rrethore k në pikën e kërkuar C, përkatësisht C_1.

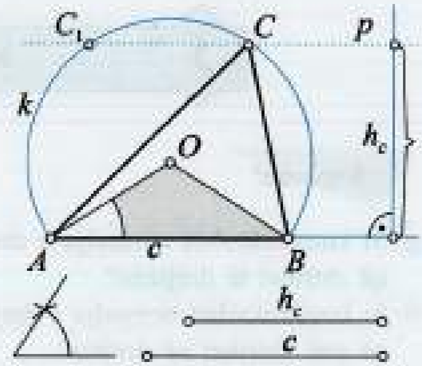


fig. 4

7 Konstrukto trekëndësh nëse janë dhënë vjat e rëndimit.

Vëre zgjidhjen:

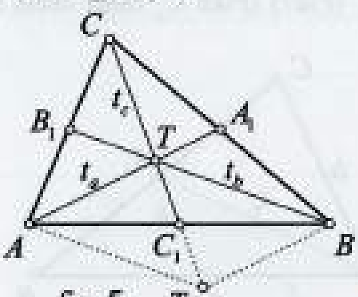


fig. 5

Analiza. Trekëndëshi i kërkuar le të jetë ABC (fig. 5) me vijat e rëndimit t_a, t_b, t_c dhe pikën prerja e tyre T. Dihet se vijat e rëndimit te trekëndshi ndahen në raport $2:1$ (prej kulmit nga brinja). Nëse e vazhdojmë vijën e rëndimit t_c nëpërmjet pikës C_1 për $\frac{1}{2}t_c$, do të fitohet pika T_1. Duke i lidhur pikat A dhe B me T_1 do të fitohet paralelogrami AT_1BT.

Cilën veti e kanë diagonalet e paralelogramit?

Konstruksioni. E konstruktojmë ΔTT_1A (fig. 6) me brinjë $\overline{AT}=\frac{2}{3}t_a$, $\overline{TT_1}=\frac{2}{3}t_c$ dhe $\overline{AT_1}=\frac{2}{3}t_b$.

Si do t'i caktojmë kulmet B dhe C?

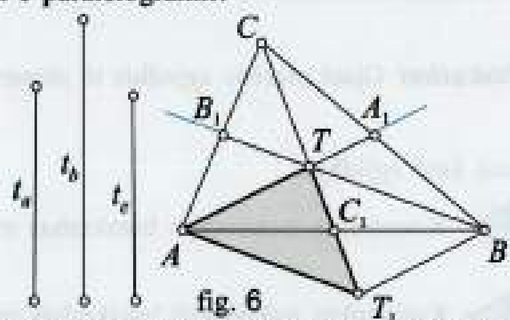


fig. 6

Vërtetimi. Mjafton të vërtetojmë se trekëndëshi ABC i përmban të tre vijat e dhëna të rëndimit.

Pasi $\overline{TT_1}=\frac{2}{3}t_c$ dhe C_1 është mesi i TT_1, vijon se pika T e ndan segmentin C_1C në raport $1:2$, përkatësisht T është pika e rëndimit. Gjithashtu, BB_1 dhe AA_1 janë vijat e rëndimit të këtij trekëndëshi. Prej $\overline{BT}=\overline{T_1A}$ dhe $\overline{AT}=\overline{T_1B}$ (si brinjë të përballta të paralelogramit) dhe T është pika e rëndimit. Vijon se $\overline{BB_1}=t_b$ dhe $\overline{AA_1}=t_a$.

Diskutimi. Konstruksioni i ΔTT_1A është njëvlerësisht i përcaktuar, nëse vlen jobarasia

$$|t_b-t_a|<t_a<t_b+t_c.$$

10 Konstrukto trekëndëshin nëse janë dhënë dy vijat e rëndimit dhe këndi ndërmjet tyre.

Detyra:

1. Konstrukto trekëndëshin barakrahas me bazën a dhe këndin γ.

2. Konstrukto trekëndëshin me brinjën c, këndin α dhe vija e rëndimit t_b.

6 KONSTRUKSIONI I TREKËNDËSHIT ME ZBATIMIN E ANALIZËS ALGJEBRIKE

Kujtohu!

- Për simetralen e segmentit
- Për simetralen e bazës së trekëndëshit barakrahas.

A

1 Konstrukto trekëndësh nëse është dhënë shuma e brinjëve a dhe b, brinja c dhe këndi α.

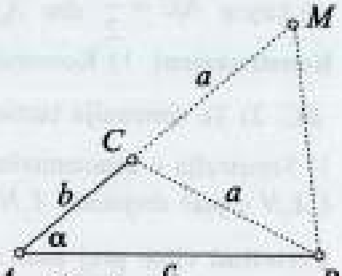


fig. 1

Vëre zgjidhjen:

Analiza. Le të jetë ΔABC (fig. 1) zgjidhje e detyrës. Nëse brinjën AC e vazhdojmë për gjtësinë e brinjës $\overline{BC}=a$ e fitojmë segmentin $a+b=\overline{AM}$. Trekëndëshi ABM është njëvlerësisht i përcaktuar.

Pasi ΔBCM është barakrahas, përfundojmë se kulmi C shtrihet në simetralen e segmentit BM.

Konstruksioni. E konstruktojmë ΔABM (fig. 2) me brinjë $\overline{AB}=c$, $\overline{AM}=a+b$ dhe këndi ndërmjt tyre α. Kulmin C e fitojmë te prerja e simetraleve të brinjës BM dhe brinjës AM.

Vërtetimi. Prej konstruksionit është e qartë se brinja c dhe këndi α i takon ΔABC. Prej asaj që s është simetrale e brinjës BM, përfundojmë se ΔBCM është trekëndësh barakrahas, ku $\overline{MC}=\overline{CB}$.

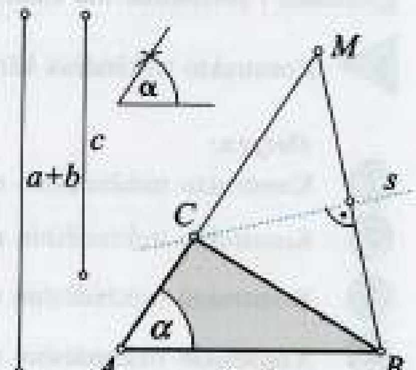


fig. 2

Diskutimi. Që të ekziston trekëndësh, është e nevojshme të kemi parasysh jobarasinë për trekëndëshin $(|a-b|<c<a+b)$ dhe $0^0<\alpha<180^0$. Në këto kushte, si prerje e simetrales s dhe AM fitohet vetëm një pikë C. Prandaj, ekziston zgjidhje e vetme e detyrës.

2 Konstrukto trekëndësh nëse janë dhënë shuma e brinjëve a dhe b dhe këndet α dhe γ.

Udhëzim. E konstruktojmë trekëndëshin ndihmës ADB (fig. 3) me brinjë $\overline{AD}=a+b$ dhe këndet në të α dhe $\frac{\gamma}{2}$.

- Pse këndi te kulmi D është i barabartë me $\frac{\gamma}{2}$?
- Si do ta caktojmë kulmin C?

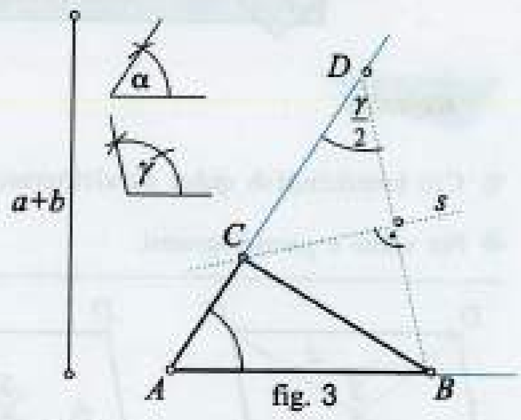


fig. 3

3 Konstrukto trekëndësh kënddrejt nëse janë dhënë një katetë dhe shuma e hipotenuzës dhe katetës tjetër.

4 Konstrukto trekëndësh barakrahas, nëse janë dhënë baza a dhe ndryshimi $b-h_a$.

Analiza. Trekëndëshi ABC le të jetë zgjidhje e detyrës (fig. 4).

Le të jetë $\overline{A_1N}=b-h_a$, atëherë $\overline{AN}=b$, pra ΔANC është barakrahas, kurse ΔCA_1N është kënddrejt me katete $\overline{A_1C}=\dfrac{a}{2}$ dhe $\overline{A_1N}=b-h_a$.

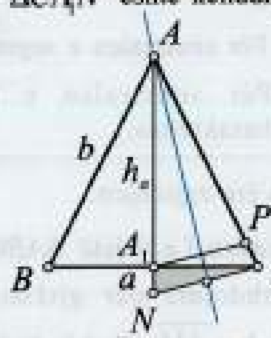


fig. 4

Konstruksioni. 1) Konstruktojmë simetrale të bazës BC. 2) Te simetralja bartim segmentin $\overline{A_1N}=b-h_a$.

3) Simetralja e hipotenuzës NC e trekëndëshit kënddrejt CA_1N e pret drejtëzën A_1N në pikën A.

Vërtetimi vijon prej analizës.

Diskutimi. Detyra ka zgjidhje të vetme, pasi trekëndëshi kënddrejt CA_1N është gjithmonë i përcaktuar me katete $\dfrac{a}{2}$ dhe $b-h_a$.

5 Konstrukto trekëndësh kënddrejt ABC $\left(\measuredangle c=90^0\right)$, nëse është dhënë: a) t_c, h_c; b) a, R.

Detyra:

1. Konstrukto trekëndëshin nëse është dhënë c, h_c, b.
2. Konstrukto trekëndëshin nëse është dhënë a, c, t_a.
3. Konstrukto trekëndëshin nëse është dhënë: shuma $a+c$, brinja b dhe këndi α.
4. Konstrukto trekëndëshin me brinjën c, vijën e rëndimit t_c dhe këndin γ.
5. Konstrukto trekëndëshin me brinjën c, rrezen R e vijës rrethore të jashtashkruar dhe vija e rëndimit t_b.

7 KONSTRUKSIONI I PARALELOGRAMIT

Kujtohu!

- Cili katërkëndësh quhet paralelogram?
- Për vetitë e paralelogramit.

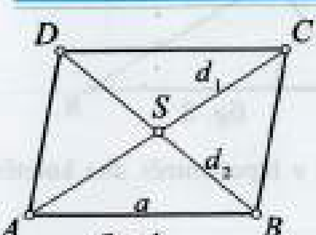


fig. 1

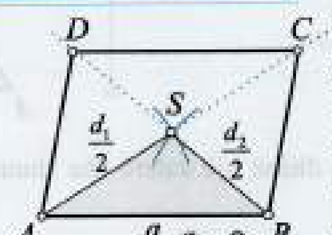


fig. 2

A

1 Konstrukto paralelogram me brinjë a dhe diagonalet d_1 dhe d_2.

Vëre zgjidhjen:

Analiza. Paralelogrami $ABCD$ (fig. 1) le të jetë paralelogrami i kërkuar. Pasi diagonalet e paralelogramit përgjysmohen, ΔABS është plotësisht i përcaktuar, me brinjë $\overline{AB}=a$, $\overline{AS}=\dfrac{d_1}{2}$, $\overline{BS}=\dfrac{d_2}{2}$.

Konstruksioni. E konstruktojmë trekëndëshin ndihmës ΔABS (fig. 2) .

- Si caktohen kulmet C dhe D?

Vërtetimi. Konstruksioni u përgjigjet kushteve të parashtruara, përkatësisht i kënaqin vetitë e paralelogramit

Diskutimi. Detyra ka një zgjidhje për $\left|\frac{d_1}{2}-\frac{d_2}{2}\right|<a<\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}$.

2 Konstrukto paralelogramin nëse janë dhënë diagonalet d_1 dhe d_2 dhe këndi ndërmjet tyre ω.

3 Konstrukto paralelogramin me brinjën $\overline{AB}=a$, diagonalet $\overline{AC}=d_1$ dhe këndin ndërmjet diagonaleve ω.

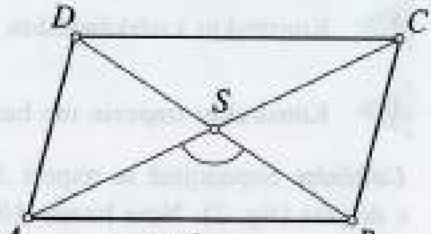


fig. 3

Udhëzim. Konstruktojmë vijën rrethore k që është v.gj.p prej ku segmenti $\overline{AB}=a$ shihet nën këndin ω. (fig. 3) Te prerja e vijës rrethore $k_1\left(A,\frac{d_1}{2}\right)$ me k e fitojmë pikën S, e cila është prerje e diagonaleve të paralelogramit.

- Si do t'i caktojmë kulmet C dhe D?

4 Konstrukto rombin me brinjën a dhe diagonalen d_1.

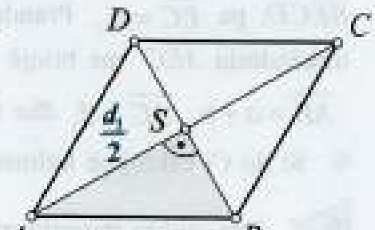


fig. 4

Udhëzim.

- Dihet se diagonalet te rombi janë reciprokisht normale. E konstruktojmë trekëndëshin kënddrejt ndihmës ASB (fig. 4), me hipotenuzën $\overline{AB}=a$ dhe katetën $\overline{AS}=\frac{d_1}{2}$ (S është pika ku priten diagonalet)

- Cakto kulmet C dhe D.

5 Konstrukto paralelogramin nëse janë dhënë diagonalet dhe këndi α.

Detyra:

1. Konstrukto rombin me brinjën a dhe lartësin h.
2. Konstrukto paralelogramin me brinjën a dhe b dhe lartësin h_a.
3. Konstrukto rombin nëse janë dhënë diagonalja e vogël d_1 dhe këndi i ngushtë α.

8 KONSTRUKSIONI I KATËRKËNDËSHIT

Kujtohu!

- Cili katërkëndësh quhet trapez, kurse cili trapezoid?
- Përmendi vetitë e trapezit barakrahas.

A

1 Konstrukto trapez barakrahas nëse është dhënë: baza a, këndi α dhe diagonalja d.

Vëre udhëzimin.

Udhëzim. Le të jetë $ABCD$ trapezi i kërkuar te i cili $\overline{AB}=a$, $\measuredangle BAD=\alpha$ dhe $\overline{BD}=d$. kulmi D është në prerjen e vijës rrethore $k(B,d)$ dhe krahu Ax i këndit α. caktimi i kulmit C është i qartë (fig. 1).

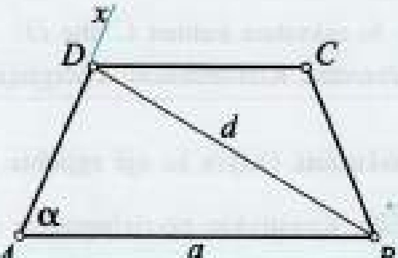


fig. 1

2 Konstrukto trapezin barakrahas, nëse janë dhënë a, α, h.

3 Konstrukto katërkëndëshin nëse janë dhënë brinjët a, b, c, d dhe këndi α.

4 Konstrukto trapezin me baza a dhe b dhe diagonalja d_1 dhe d_2.

Udhëzim. Supozojmë se trapezi $ABCD$ është zgjidhje e detyrës (fig. 2). Nëse bazën AB e vazhdojmë nëpër pikën B për $\overline{BE}=b$, atëherë e fitojmë paralelogramin $BECD$, pa $\overline{EC}=d_2$. Prandaj, figurë ndihmëse është trekëndëshi AEC me brinjë $\overline{AE}=a+b$, $\overline{AC}=d_1$ dhe $\overline{CE}=d_2$.

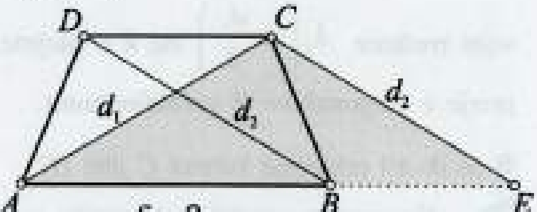


fig. 2

- Si do t'i caktojmë kulmet B dhe D?

5 Konstrukto trapezin me bazat a dhe b dhe kënde të bazës α dhe β.

6 Konstrukto trapezin me baza a dhe b, diagonale d_1 dhe lartësi h.

7 Konstrukto trapezin me bazën a, krahët c dhe d dhe një diagonale d_1.

B

8 Konstrukto katrorin nëse është dhënë shuma e brinjës dhe diagonales $a+d$.

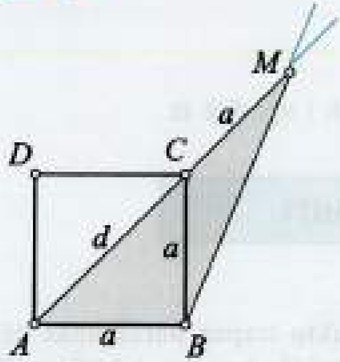


fig. 3

Udhëzim. E vazhdojmë diagonalen AC nëpër pikën C për $\overline{CM}=\overline{CB}=a$ (fig. 3). Pasi $\overline{AM}=d+a$, $\measuredangle BAM=45^0$ dhe $\measuredangle AMB=\frac{45^0}{2}$. (Pse?) Mund të konstruktojmë trekëndëshin ABM. Simetralja e BM e pret AM në pikën C. (Pse?)

- Si do ta caktosh kulmin D?

9 Konstrukto katrorin nëse është dhënë ndryshimi i diagonales dhe brinjës, d - a.

10 Konstrukto drejtkëndësh nëse është dhënë shuma e brinjëve $a + b$ dhe diagonalja d.

Udhëzim. E konstruktojmë trekëndëshin ndihmës AEC (fig. 4) me brinjë $\overline{AE} = a+b$, $\overline{AC} = d$ dhe $\measuredangle AEC = 45^0$. Simetralja e EC e pret AE në pikën B.

- Cakto pikën D.

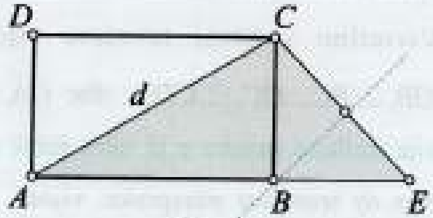


fig. 2

11 Konstrukto drejtkëndëshin $ABCD$, nëse është dhënë ndryshimi i brinjëve $a-b$ dhe diagonalja d.

Detyra:

1. Konstrukto rombin nëse është dhënë a, d_2.
2. Konstrukto trapezin barakrahas nëse është dhënë a, b $(a \parallel b)$, a dhe h.
3. Konstrukto katërkëndëshin nëse është dhënë a, b, c, d, b.

9 KONSTRUKSIONI I SHUMËKËNDËSHIT TË RREGULLTË

Kujtohu!

- Cili shumëkëndësh është i rregulltë?
- Katrori dhe trekëndëshi barabrinjës a është shumëkëndësh i rregulltë?
- Te çdo shumëkëndësh i rregulltë mund të brendashkruhet vija rrethore.
- Rreth çdo shumëkëndëshi të rregulltë mund të jashtashkruhet vija rrethore.
- Në çfarë figura është ndarë shumëkëndëshi i rregulltë, nëse çdo kulm i tij është lidhur me qendrën e shumëkëndëshit?

A

Për shumëkëndëshin e rregulltë vlejnë këto teorema:

Teorema 1. Rreth çdo shumëkëndëshi të rregulltë mund të jashtashkruhet vija rrethore.

Vëre vërtetimin:

- Kulmet e shumëkëndëshit të rregulltë $ABCD...N$ janë lidhur me qendrën e vijës rrethore të jashtashkruar (fig. 3). Trekëndëshat e fituar AOB, BOC, COD,...NOA janë të puthitshëm. $(\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} ... = \overline{ON} = R;\ \overline{AB} = \overline{BC} = ... = \overline{NA})$.

  Prej puthitshmërisë së trekëndëshave vijon barabarshmëria e lartësive të tyre, d.m.th.

  $\overline{OA_1} = \overline{OB_1} = \overline{OC_1} ... = \overline{ON_1}$.

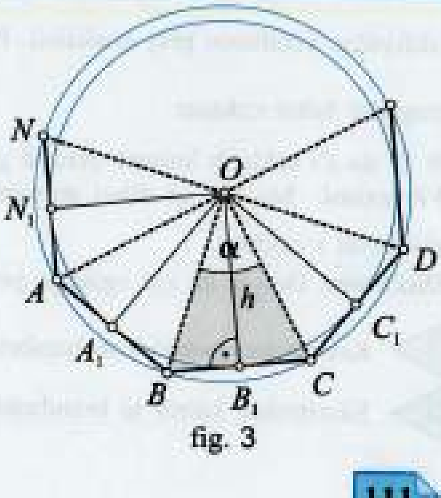


fig. 3

Teorema 2. Te çdo shumëkëndësh i rregulltë mund të brendashkruhet vija rrethore.

Vëre vërtetimin:

Vërtetimi i kësaj teoreme vijon prej vërtetimit të teoremës paraprake. Pasi $OA_1 \perp AB$, $OB_1 \perp BC$, $OC_1 \perp CD$... dhe $\overline{OA_1} = \overline{OB_1} = \overline{OC_1} = ... = h$, domethënë se pikat A_1, B_1, C_1 ... shtrihen te vija rrethore qendra e të cilës është në kulmin O, kurse $r = h$.

Nga dy teoremat paraprake, vijon:

- 1) Qendra vijës rrethore të brendashkruar dhe qendra e vijës rrethore të jashtashkruar te shumëkëndëshi i rregulltë puthiten dhe ajo pikë quhet ***qendra e shumëkëndëshit të rregulltë.***
- 2) Njëri prej trekëndëshave ABO, BCO,... quhet trekëndësh karakteristik.
- 3) Këndi α pranë majës te trekëndëshi karakteristik quhet kënd qëndror (fig. 3) i shumëkëndëshit të rregulltë.
- 4) Këndi qëndror i trekëndëshit karakteristik është i barabartë me $360:n$, d.m.th.

$$\alpha_n = \frac{360^0}{n}.$$

- 5) Lartësia e trkëndëshit karakteristik quhet ***apotemë*** e shumëkëndëshit të rregulltë.

B Për ***konstruksionin*** e shumëkëndëshit të rregulltë ***të brendashkruar*** te vija rrethore e dhënë mjafton të dihet këndi qëndror.

1 Konstrukto gjashtëkëndëshin e rregulltë te i cili është brendashkruar vija rrethore me rreze r.

Vëre zgjidhjen:

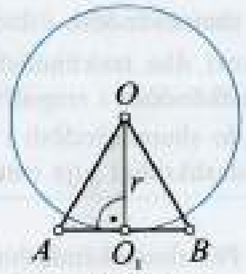


fig. 4

Analiza. Vëren se rrezja r është apotemë e trekëndëshit karakteristik (fig. 4) ABO me kënd pranë majës prej 60^0.

- Si është trekëndëshi ΔABO?

Konstruksioni. E konstruktojmë trekëndëshin kënddrejt AO_1O me kateta $\overline{OO_1} = r$ dhe $\measuredangle AOO_1 = 30^0$ (shfrytëzo vizatimin prej analizës). Pasi $\overline{AO_1} = \frac{\overline{AB}}{2}$, d.m.th. $\overline{AB} = 2\overline{AO_1}$, brinja e gjashtëkëndëshit të rregulltë është caktuar.

- Si do t'i caktosh kulmet tjera të gjashtëkëndëshit të rregulltë?

Vërtetimi. Me atë që dihet apotema $(h = r)$ e trekëndëshit barabrinjës ABO, konstruksioni është plotësisht i caktuar.

Diskutimi. Detyra ka një zgjidhje për çfarëdo r.

2 Konstrukto trekëndësh barabrinjës të brendashkruar në vijën rrethore me rreze r.

3 Konstrukto katror të brendashkruar në vijën rrethore me rreze r.

4 Konstrukto tetëkëndësh të rregullltë të brendashkruar në vijën rrethore me rreze r.

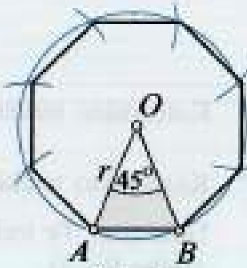


fig. 5

Vëre zgjidhjen:

Këndi qëndror është $\alpha_8 = \dfrac{360^0}{8} = 45^0$. Duke caktuar këndin qëndror $\alpha = 45^0$, e caktojmë brinjën AB të tetëkëndëshit të rregullltë. Më tutje konstruksioni është i qartë (fig. 5).

5 Të konstruktohet pesëkëndëshi i rregullltë i brendashkruar në vijën rrethore me rreze r.

Vëre zgjidhjen:

Konstruksionin e kryejmë sipas kësaj mënyre:

1) Vizatojmë vijë rrethore $k(O,r)$, (fig. 6).

2) Te vija rrethore k vizatojmë diametër MN.

3) Konstruktojmë rrezen OD, normale në MN.

4) Konstruktojmë simetralen s në rrezen MO, $s \cap OM = \{S\}$.

5) Konstruktojmë vijën rrethre k_1 me qendër S dhe rreze SD, $k_1 \cap MN = \{T\}$.

6) E tërheqim segmentin $DT = a_5$.

7) E bartim DT nëpër vijën rrethore duke fillur prej pikës D dhe kështu fitohet pesëkëndëshi i rregullltë $ABCDE$ (fig. 6). Segmenti OT është i barabartë me brinjën e dhjetëkëndëshit të rregullltë, të brendashkruar në të njëjtën vijë rrethore.

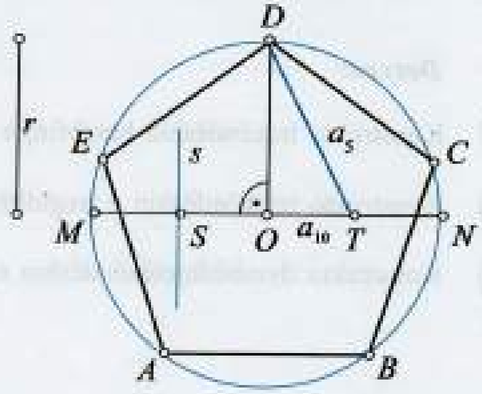


fig. 6

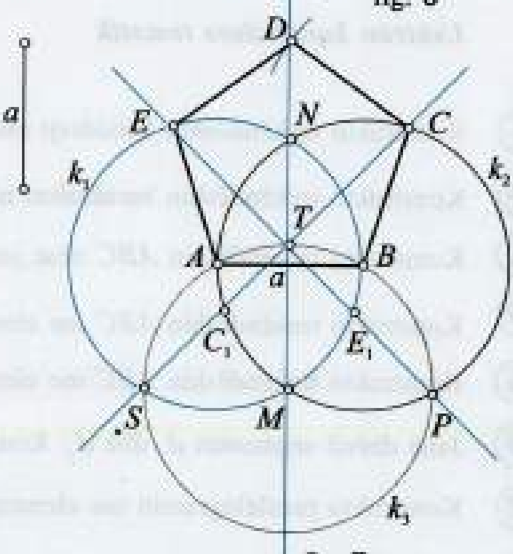


fig. 7

6 Konstrukto pesëkëndësh të rregullltë me brinjën e dhënë a.

Vëre zgjidhjen:

Konstruksionin e bëjmë sipas kësaj mënyre:

1) Vizatojm segment $\overline{AB} = a$, 2) Konstruktojmë prerjen e vijave rrethore $k_1(A,AB) \cap k_2(B,AB) = \{M,N\}$. 3) E tërheqim drejtëzën MN. 4) Konstruktojmë vijën rrethore $k_3(M,\overline{AB})$, $k_3 \cap MN = \{T,T_1\}$, $k_3 \cap k_2 = \{A,P\}$ dhe $k_3 \cap k_1 = \{B,S\}$. 5) I tërheqim drejtëzat PT dhe ST, $ST \cap k_2 = \{C,C_1\}$ dhe $PT \cap k_1 = \{E,E_1\}$. 6) Konstruktojmë harkun rrethor $k_4(C,AB)$, $k_4 \cap MN = \{D,D_1\}$. 7) Duke i lidhur pikat A, B, C, D, E, e fitojmë pesëkëndëshin e rregullltë të kërkuar.

7 Konstrukto trekëndëshin barabrinjës të brendashkruar në vijën rrethore me rreze të dhënë r.

8 Konstrukto tetëkëndëshin e rregulltë të jashtashkruar rreth vijës rrethore me rreze r.

Udhëzim: Te trekëndëshi karakteristik e konstruktojmë trekëndëshin kënddrejt AB_1O (shihe fig. 3).

9 Konstrukto dymbëdhjetëkëndëshin e rregulltë, të jashtashkruar rreth vijës rrethore me rreze r.

Detyra:

1. Konstrukto trekëndëshin barabrinjës të jashtashkruar rreth vijës rrethore me rreze r.
2. Konstrukto tetëkëndëshin e rregulltë të brendashkruar te vija rrethore me rreze r.
3. Konstrukto dymbëdhjetëkëndëshin e rregulltë, të brendashkruar te vija rrethore me rreze r.

Ushtrim kontrollues tematik

1. Konstrukto trekëndëshin kënddrejt me katetën e dhënë a dhe kënd α.
2. Konstrukto trekëndëshin barakrahas nëse janë dhënë baza a dhe këndi në maje γ.
3. Konstrukto trekëndëshin ABC nëse janë dhënë brinja c dhe lartësitë h_a dhe h_b.
4. Konstrukto trekëndëshin ABC me elementet e dhëna: c, R dhe α.
5. Konstrukto trekëndëshin ABC me elementet e dhëna: c, R dhe h_c.
6. Janë dhënë segmentet d_1 dhe d_2. Konstrukto rombin diagonalet e të cilit janë segmentet e dhëna.
7. Konstrukto paralelogramin me elementet e dhëna: brinja a, këndi α diagonalja më e vogël d_2.
8. Konstrukto trapezin $ABCD$ me elementet e dhëna: baza a dhe b, krahu c dhe këndi β.
9. Konstrukto trapezin barakrahas $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ nëse janë dhënë: $\overline{AB}+\overline{AD}$, diagonalet d dhe këndi α.
10. Konstrukto dymbëdhjetëkëndëshin e rregulltë të brendashkruar me rreze të dhënë r.

TEMA 6

SYPRINA E FIGURAVE TË RRAFSHTA

Fama e gjeometrisë qëndron në atë që prej aq pak parimeve, të marruna nga jashtë, ajo mund të bëjë shumë.

Isak Njutni 1642-1727

Në këtë temë do të mësosh për:

- syprinën e katrorit dhe drejtkëndëshit;
- syprinën e rombit dhe romboidit;
- syprinën e trekëndëshit me formula të ndryshme;
- syprina e llojeve të ndryshme të katërkëndëshave;
- perimetri dhe syprina e shumëkëndëshave të rregulltë;
- perimetri dhe syprina e rrethit;
- gjatësia e harkut rrethor;
- syprina e pjesëve të rrethit.

1 SYPRINA E PARALELOGRAMIT

A Nevoja për caktimin e syprinës të figurave të ndryshme është paraqitur shumë herët, qysh në civilizimet e vjetra në Mesopotami dhe në Egjypt. Faraoni Sezootris e ka ndarë tokën e punueshme të Egjyptasve, të cilët kanë paguar tatim sipas madhësisë së tokës së caktuar. Ka ndodhur që lumi Nil të vërshoj shtratin e tij dhe të zhdukë një pjesë të parcela të tokës. Me kërkesë të pronarëve të parcelave të dëmtuara, faraoni ka dërguar tokëmatës që të konstatojnë sa pjesë e parcelës është dëmtuar. Kështu kanë lindur fillet e para të gjeometrisë në Egjypt, prej ku ka kaluar në Greqi (Sipas Herodotit, shekulli V p.e.s.). Prej këtu rrjedh emri gjeometri, që do të thotë matja e tokës. (E përbërë prej fjalëve gea-toka dhe metro-matje). Me zhvillimin e civilizimit, në jetën e përditshme imponohet problemi për caktimin e syprinës të objekteve të ndryshme që janë në formën e shumëkëndëshit dhe rrethit.

Në vitin e parë mësove konceptet: pika, drejtëza, rrafshi, bashkësia, për të cilat përmendëm se janë koncepte themelore. Konceptet themelore nuk përkufizohen. Ato paramendohen nëpërmjet disa vetive të tyre që thjeshta i përvetësojmë si të atilla.

Koncepti syprinë, gjithashtu, është koncept themelor.

Për syprinën e shumëkëndëshit përvetësohen këto veti, d.m.th. aksioma:

1. Syprina S e një shumëkëndëshi është gjithmonë numër real pozitiv, d.m.th. $S>0$.
2. Syprina e një shumëkëndëshi nuk varet prej vendpozitës së saj, d.m.th. figurat e puthitshme kanë syprina të barabarta.
3. Nëse shumëkëndëshi përbëhet prej dy ose më shumë shumëkëndëshave që nuk puthiten, atëherë syprina e tij është e barabartë me syprinën e atyre pjesëve të përbëra.
4. Katrori me brinjë a e ka syprinën a^2.

Vetia e fundit e konstaton edhe ***njësinë matëse*** për syprinën, sipas SI (sistemit botëror për matje) ajo është katrori me brinjë $1m$, kurse quhet ***metër katror*** dhe shënohet me $1m^2$. Prandaj caktimi i perimetrit dhe syprinës të shumëkëndëshit ose figure tjetër paraqet një lloj i pasqyrimit të asaj figure në bashkësinë e numrave real pozitiv.

Për caktimin e syprinës së figurës së caktuar maten gjatësitë e nevojshme, pra syprina njehsohet sipas rregullave të konstatuara.

Rregullat sipas të cilave njehsohet syprina e shumëkëndëshit quhen ***formula për njehsimin e syprinës.***

Kujtohu!

- Njësia matëse për syprinën është $1m^2$.

- Cilat njësi matëse për syprinën janë më të mëdhaja se $1m^2$?

- Katrori me brinjë a e ka syprinëm

$$S = a^2$$

B 1 Njehso syprinën e katrorit me brinjë $a=35cm$.

- Sipas aksiomës kemi:

$S = a^2$ ose $S = 35^2$, d.m.th.

$S = 1225cm^2 = 12{,}25dm^2$

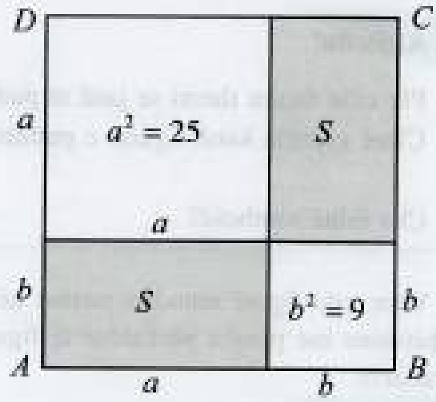
2 Njehso syprinën e katrorit te i cili është brendashkruar vija rrethore me rreze $r=2cm$.

3 Njehso syprinën e katrorit diagonalja e të cilit është $d=4cm$.

4 Njehso syprinën e drejtkëndëshit me brinjë $a=5cm$ dhe $b=3cm$.

Vëre zgjidhjen.

- Konstruktojmë katror $ABCD$ me brinjë $a + b$.
- Katrorin $ABCD$ e ndajmë në dy drejtkëndësha brinjët e të cilëve janë a dhe b dhe dy katror, njëri me brinjë a dhe tjetri me brinjë b.
- Të dy drejtkëndëshat janë të puthitshëm, pra sipas aksiomës ato kanë syprinë të barabartë S.
-



$S_{ABCD} = 2S + a^2 + b^2$ ose

$(a + b)^2 = 2S + a^2 + b^2$ përkatësisht

$a^2 + 2ab + b^2 = 2S + a^2 + b^2$, d.m.th.

$$S = ab$$

Domethënë, syprina e drejtkëndëshit është $S = 5 \cdot 3 = 15cm^2$

Mbaj mend!

Syprina e drejtkëndëshit me dimenzione a dhe b njehsohet me formulën

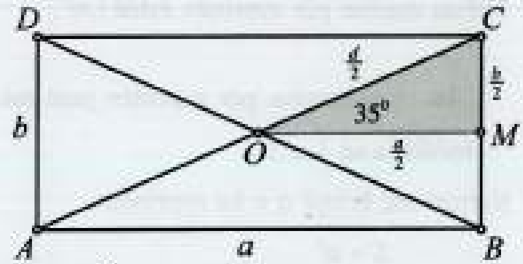
$$S = a \cdot b.$$

5 Njehso syprinën e drejtkëndëshit me brinjë $a=5cm$ dhe diagonale $d=13cm$.

6 Të njehsohet syprina e drejtkëndëshit nëse diagonalja është $10cm$, kurse këndi ndërmjet diagonaleve është 70^0.

Vëre zgjidhjen:

- Këndi i dhënë ndërmjet diagonaleve shtrihet përballë brinjës më të vogël të drejtkëndëshit.
- Trekëndëshi OMC është kënddrejt me brinjë:



$\overline{OM}=\frac{a}{2}$, $\overline{MC}=\frac{b}{2}$, $\overline{OC}=\frac{d}{2}$ dhe $\measuredangle MOC=35^0$.

- Sipas përkufizimit të funksioneve trigonometrike te trekëndëshi kënddrejt kemi:

$$\sin 35^0=\frac{\overline{CM}}{\overline{OC}}=0{,}57=\frac{\frac{b}{2}}{5}, \text{pra } b=5{,}7\ cm \text{ dhe } \cos 35^0=\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}=\frac{\frac{a}{2}}{5}=0{,}82=\frac{a}{10}, \text{d.m.th. } a=8{,}2\ cm.$$

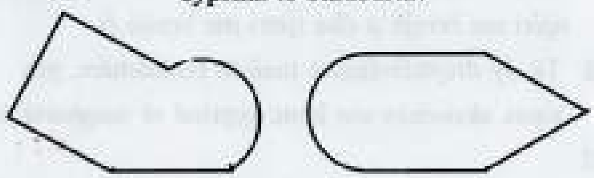
Prandaj $S=a\cdot b=5{,}7\cdot 8{,}2=46{,}74cm^2$.

7 Njehso syprinën e drejtkëndëshit, nëse njëra brinjë është $20\,cm$, kurse këndi ndërmjet diagonaleve është 50^0. (Gjatë njehsimit shfrytëzo kalkulator)

Kujtohu!

- Për cilat figura themi se janë të puthitshme?
- Çfarë syprina kanë figurat e puthitshme?
- Çka është romboid?

C **8** Figurat e dhëna në vizatim a kanë syprina të barabarta?



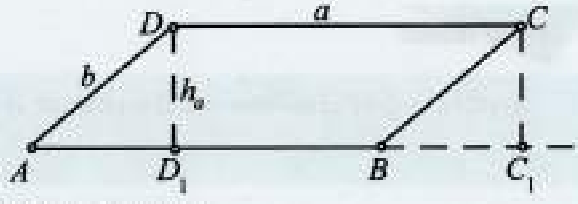
- Vëre: çdo figurë mund të ndahet në tre pjesë, ashtu që çdo pjesë prej njërës figurë të jetë e puthitshme me pjesën përkatëse të figurës tjetër. Domethënë, figurat e dhëna kanë syprina të barabarta.

Mbaj mend!

Figurat mund të kenë syprina të barabarta edhe pse nuk janë të puthitshme.

9 Njehso syprinën e romboidit me brinjë a dhe b. (Me konceptin brinjë a dhe b të ndonjë figure do t'i nënkuptojmë numrat matës të gjatësive të atyre brinjëve.)

Vëre zgjidhjen:



- Konstruktojmë $DD_1\perp AB$ dhe $CC_1\perp AB$.
- $\Delta AD_1D\cong\Delta BC_1C$, për shkak të $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\measuredangle DAD_1=\measuredangle CBC_1$ dhe $\measuredangle DD_1A=\measuredangle CC_1B=90^0$.
- Çfarë syprina kanë romboidi $ABCD$ dhe drejtkëndëshi D_1C_1CD?

Pasi $\overline{AD_1}=\overline{BC_1}$, brinjët e drejtkëndëshit D_1C_1CD janë $\overline{D_1C_1}=a$ dhe $\overline{DD_1}=h_a$, pra

$$S_{ABCD}=S_{D_1C_1CD}=a\cdot h_a.$$

Deri te i njëjti përfundim mund të arrijmë edhe pse prej pikave C dhe D tërhiqen normale nga brinja b e romboidit.

Mbaj mend!

Syprina e paralelogramit me brinjë a dhe b dhe lartësitë përkatëse h_a dhe h_b njehsohet sipas formulës:

$$S=a\cdot h_a \text{ ose } S=b\cdot h_b$$

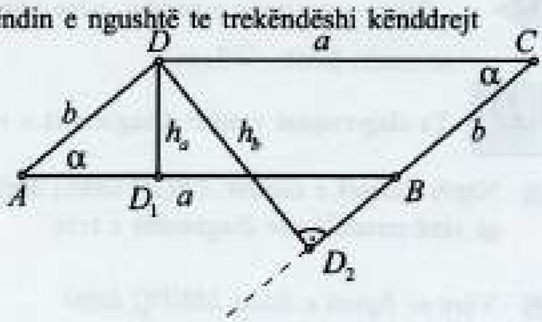
10 Njehso lartësinë h_a të romboidit me brinjë $a=8cm$, $b=12cm$ dhe lartësin $h_b=6cm$.

- Prej $S=a\cdot h_a$ dhe $S=b\cdot h_b$ kemi: $a\cdot h_a=b\cdot h_b$, përkatësisht $8\cdot h_a=12\cdot 6$, d.m.th. $h_a=72:8=9cm$.

11 Brinjët e një paralelogrami janë $a=120cm$ dhe $b=50cm$, kurse këndi ndërmjet tyre është $\alpha=40^0$, njehso syprinën e paralelogramit.

Vëre zgjidhjen

- Sipas përkufizimit për funksionet trigonometrike për këndin e ngushtë te trekëndëshi kënddrejt kemi:



- Prej ΔAD_1D vijon: $\sin\alpha=\frac{\overline{DD_1}}{\overline{AD}}=\frac{h_a}{b}$; $h_a=b\cdot\sin\alpha$.
- Prej ΔDD_2C vijon: $\sin\alpha=\frac{\overline{DD_2}}{\overline{DC}}=\frac{h_b}{a}$; $h_b=a\cdot\sin\alpha$.
- Prej $S=a\cdot h_a=b\cdot h_b$ vijon: $S=a\cdot b\cdot sin\alpha.=b\cdot a\cdot sin\alpha.$.

Vëre!

Syprina e paralelogramit mund të njehsohet edhe me formulën
$$S=a\cdot b\cdot sin\alpha.$$

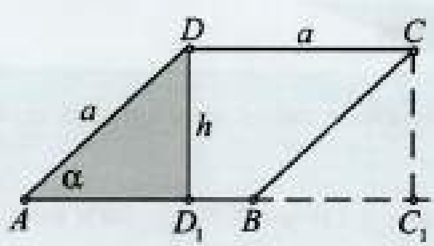
Prandaj, $S=120\cdot 50\cdot sin40^0$, d.m.th. $S=3856,72cm^2=38,5672dm^2$.

Kujtohu!

- Çka është romb?
- Nën çfarë këndi priten diagonalet e rombit?
- Sa është rrezja e vijës rrethore të brendashkruar te rombi?

Ç

12 Cakto syprinën e rombit me brinjë a dhe lartësi h.



Vëre zgjidhjen:

- Vërteto se rombi $ABCD$ dhe drejtkëndëshi DD_1C_1C janë me syprina të barabarta.
- Syprina e rombit është $S=a\cdot h$.

Prej ΔAD_1D kemi $\sin\alpha=\dfrac{h}{a}$, përkatësisht $h=a\cdot\sin\alpha$, pra $S=a\cdot a\sin\alpha=a^2\sin\alpha$.

Mbaj mend!

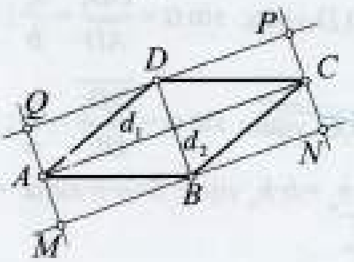
Syprina e rombit njehsohet sipas formulës
$S=a\cdot h$ ose $S=a^2\sin\alpha$.

13 Njehso lartësinë e rombit, nëse brinja $a=12,5\,cm$, kurse syprina e tij është $80\,cm^2$.

- Prej $S=a\cdot h$ vijon $80=12,5\cdot h$, pra prej këtu $h=80:12,5=6,4\,cm$.

14 Njehso syprinën e rombit, nëse brinja $a=15\,cm$, kurse rrezja e vijës rrethore të brendashkruar te rombi është $r=3\,cm$.

D Ta shqyrtojmë vetinë: Diagonalet e rombit priten nën këndin e drejtë.



- Nëpër kulmet e rombit $ABCD$ tërhiq drejtëza që janë paralele me diagonalet e tyre.
- Vëre se figura e fituar $MNPQ$ është drejtkëndësh brinjët e të cilit janë $\overline{MN}=d_1$ dhe $\overline{NP}=d_2$, pra $S_{MNPQ}=d_1\cdot d_2$.
- Çfarë syprine kanë trekëndëshat të fituar sipas konstruksionit?
- Syprina e rombit është dy herë më e vogël se syprina e drejtkëndëshit, d.m.th.

$$S_{ABCD}=\frac{d_1\cdot d_2}{2}.$$

- Diagonalet e katrorit janë të barabarta ndërmjet vedi, d.m.th. $d_1=d_2=d$, pra syprina e tij është

$$S=\frac{d\cdot d}{2}=\frac{d^2}{2}.$$

Vëre!

Syprina e rombit me diagonalet d_1 dhe d_2 njehsohet sipas formulës $S=\dfrac{d_1\cdot d_2}{2}$,

kurse e katrorit $S=\dfrac{d^2}{2}$, ku d është diagonalja e katrorit.

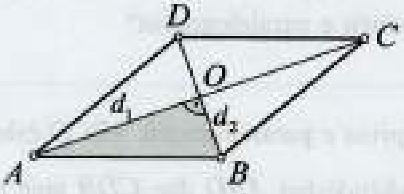
15 Rreth katrorit është jashtashkruar vija rrethore me rreze 4,5 cm. Njehso syprinën e katrorit.

16 Njehso syprinën e rombit, nëse diagonalja më e vogël është $d_2=10cm$ dhe brinja është $a=13cm$.

Vëre zgjidhjen.

Trekëndëshi ABO është kënddrejt, pra sipas teoremës së Pitagorës kemi:

$$a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \text{ ose } \left(\frac{d_1}{2}\right)^2=a^2-\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=13^2-5^2,$$



përkatësisht $\left(\frac{d_1}{2}\right)=\sqrt{144}=12$, d.m.th. $d_1=24cm.$

Vijimisht, $S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{24\cdot 10}{2}=120cm^2.$

Mbaj mend!

Për brinjën a dhe diagonalet d_1 dhe d_2 të rombit vlen: $a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2.$

17 Cakto syprinën e rombit, lartësia e të cilit është 12 cm, kurse diagonalja më e vogël është13 cm.

Detyra:

1 Cakto brinjët e drejtkëndëshit nëse:
a) ato qëndrojnë si $4:9$, kurse $S=144m^2$
b) perimetri është $74\,dm$, kurse $S=3m^2$

2 Njehso syprinën e paralelogramit lartësitë e të cilit janë $h_a=3cm, h_b=2\sqrt{3}\,cm$, kurse këndi ndërmjet tyre është 60^0.

3 Lartësitë e një paralelogrami qëndrojnë si $2:3$, perimetri i tij është 40 cm, kurse këndi i ngushtë është 30^0. Njehso syprinën e atij paralelogrami.

4 Cakto lartësitë dhe perimetrin e rombit me syprinë $S=6dm^2$ dhe diagonalen $d_1=4\,dm$.

5 Në një trekëndësh me brinjë 30 cm dhe lartësia përkatëse 10 cm është brendashkruar drejtkëndëshi, ashtu që njëra brinjë e drejtkëndëshit shtrihet në brinjën e dhënë të trekëndëshit. Cakto brinjët e drejtkëndëshit nëse syprina e tij është $63cm^2$.

2 SYPRINA E TREKËNDËSHIT

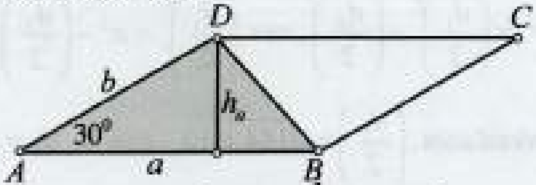
Kujtohu!

- Çka është trekëndësh?
- Çfarë lloje të trekëndëshave ka sipas brinjëve, kurse çfarë sipas këndeve?
- Diagonalja e ndan paralelogramin në trekëndësha të puthitshëm.
- Sa është syprina e trekëndëshit në lidhje me syprinën e paralelogramit?

A

1 Brinjët e paralelogramit $ABCD$ janë $a=12\,cm$ dhe $b=9\,cm$, kurse këndi ndërmjet tyre është 30^0. Njehso syprinën e trekëndëshit ABD.

Vëre zgjidhjen.



- Syprina e paralelogramit $ABCD$ është $S=a\cdot b\cdot\sin\alpha=12\cdot 9\cdot\sin 30^0=12\cdot 9\cdot\frac{1}{2}=54\,cm^2$.
- Trekëndëshat ABD dhe CDB janë të puthitshëm (Pse?), pra kanë syprina të barabarta. Pra kemi:

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=27\,cm^2.$$

- Vëren se lartësia h_a e paralelogramit është, gjithashtu, edhe lartësia e trekëndëshit ABD. Deri te i njëjti përfundim arrihet nëse tërhiqet lartësia h_b nga brinja b.

Mbaj mend!

Syprina e trekëndëshit me brinjë a, b dhe c dhe lartësitë përkatëse h_a, h_b dhe h_c njehsohet sipas formulës $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$.

2 Shprehe me fjalë formulën për njehsimin e syprinës të trekëndëshit.

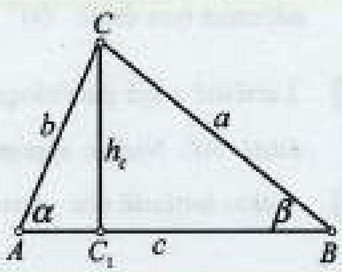
3 Njehso syprinën e trekëndëshit barakrahas me bazën 20 cm dhe krahun 26 cm.

4 Njehso syprinën e trekëndëshit ABC, nëse janë dhënë brinjët dhe këndet e tij.

Prej trekëndëshit AC_1C kemi: $\sin\alpha=\frac{h_c}{b}$, d.m.th. $h_c=b\cdot\sin\alpha$; kurse prej trekëndëshit CC_1B vijon $\sin\beta=\frac{h_c}{a}$, d.m.th. $h_c=a\cdot\sin\beta$. Од $S=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ fitojmë

$S=\frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$ ose $S=\frac{1}{2}c\cdot a\cdot\sin\beta$.

Në mënyrë të ngjashme kemi $S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$.



Mbaj mend!

Syprina e trekëndëshit mund të njehsohet me zbatimin e formulës

$$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha.$$

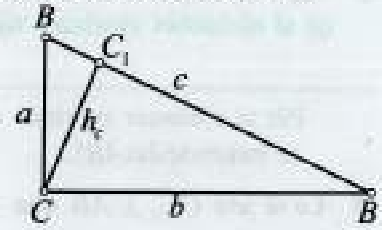
5 Njehso syprinën e ΔABC, nëse dihen $b=8cm$, $c=12cm$ dhe $\alpha=36^0 45'$.

Vëre zgjidhjen

■ Këndi α është ndërmjet brinjëve b dhe c, pra sipas formulës kemi:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot \sin 36^0 45' = 48\cdot \sin\left(36^0+45'\right)=48\cdot \sin 36,75^0 = 48\cdot 0,598 = 28,72\,cm^2.$$

■ Te trekëndëshi barabrinjës këndet janë nga 60^0, pra nëse a është brinja e tij, atëherë syprina, $S=\frac{1}{2}a\cdot a\cdot \sin 60^0$, përkatësisht $S=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.



■ Te trekëndëshi kënddrejt katetat janë reciprokisht normale

pra $h_a=b$, $h_b=a$ dhe $S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{a\cdot b}{2}$, ose $S=\frac{c\cdot h_c}{2}$.

Mbaj mend!

Syprina e trekëndëshit barabrinjës me brinjë a është $S=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

Syprina e trekëndëshit kënddrejt me katete a dhe b është $S=\frac{1}{2}a\cdot b$.

6 Cakto lartësinë mbi hipotenuzën h_c të trekëndëshit kënddrejt katetet e të cilit janë $a=12cm$ dhe $b=16cm$.

7 Katetet e trekëndëshit kënddrejt qëndrojnë si $5:12$, kurse syprina e tij është $480cm^2$. Njehso perimetrin e trekëndëshit.

Vëre zgjidhjen:

■ Prej $a:b=5:12$, vijon $\frac{a}{5}=\frac{b}{12}=k$, d.m.th. $a=5k$, $b=12k$.

Prej $S=\frac{1}{2}ab$, vijon $480=\frac{5k\cdot 12k}{2}$, dm.th. $k=4$, pra $a=20cm$, $b=48cm$ dhe $c=\sqrt{a^2+b^2}=52cm$.

Prandaj, $P=a+b+c$, përkatësisht $P=120cm$.

Detyra:

1. Dy brinjë të një trekëndëshi janë 3 cm dhe 8 cm. Syprina e tij a mund të jetë:
a) $10cm^2$; b) $15cm^2$; c) $12cm^2$?

2. Dy brinjë të trekëndëshit janë $10cm$ dhe $14cm$, kurse këndi përballë brinjës më të vogël prej tyre është 45^0 Njehso syprinën e trekëndëshit.

3. Shuma e dy brinjëve të trekëndëshit ABC është 15 cm, kurse lartësitë ndaj tyre përkatëse janë 4 cm dhe 6 cm. Cakto syprinën e trekëndëshit.

4. Perimetri i trekëndëshit barakrahas është 64 cm, kurse ndryshimi i krahut dhe bazës është 11 cm. Njehso syprinën e trekëndëshit.

5. Prej mesit të një trekëndëshi janë tërhequr drejtëza paralele të trekëndëshit. Vërteto se syprina e paralelogramit të fituar është dy herë më e vogël se syprina e trekëndëshit.

6. Cakto syprinën e trekëndëshit kënddrejt, nëse lartësia e tij e ndan hipotenuzën në segmenta prej 32 cm dhe18 cm.

3 FORMULA TJERA PËR NJEHSIMIN E SYPRINËS SË TREKËNDËSHIT

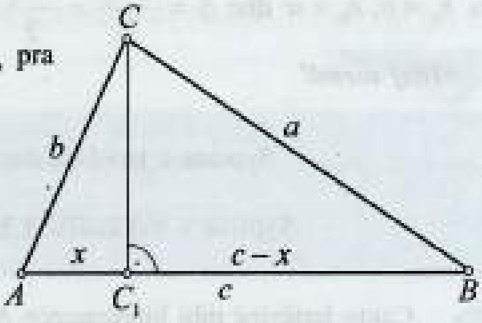
Kujtohu!

- Cilët elemente të trekëndëshit duhet të dihen që të njehsohet syprina e tij?

A 5 Njehso syprinën e trekëndëshit, nëse brinjët e tij janë $a = 20cm$, $b = 13cm$ dhe $c = 21cm$.

Vëre zgjidhjen.

Për të njehsuar syprinën e kërkuar duhet në një far mënyre të caktohet të paktën njëra prej lartësive të trekëndëshitABC.



- Le të jetë $CC_1 \perp AB$ dhe $\overline{AC_1} = x$. Atëherë $\overline{C_1B} = c - x$, pra prej trekëndëshit AC_1C vijon:

$h_c^2 = b^2 - x^2$, përkatësisht $h_c^2 = 13^2 - x^2$.

- Ngjashëm, prej trekëndëshit CC_1B kemi:

$h_c^2 = a^2 - (c-x)^2$, d.m.th. $h_c^2 = 20^2 - (21-x)^2$.

- Prej dy barasive paraprake fitojmë:

$13^2 - x^2 = 20^2 - (21-x)^2$, ose $169 - x^2 = 400 - (441 - 42x + x^2)$, ose $42x = 210$, përkatësisht $x = 5$, pa $h_c^2 = 13^2 - 5^2$, d.m.th. $h_c = 12cm$. Domethënë, $S = \frac{1}{2}\cdot 21 \cdot 12 = 126cm^2$.

- Në shkollimin fillor ke zgjidhur detyra të këtilla por ndryshe, e ke zbatuar formulën e Heronit (Heroni është matematikan grek nga Aleksandria, shekulli I p.e.s) e cila thotë:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ ku } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Njehso syprinën e trekëndëshit të dhënë duke zbatuar formulën e Heronit.

Vëre nxjerrjen e formulë së Heronit:

- Prej barasive $h_c^2 = b^2 - x^2$ dhe $h_c^2 = a^2 - (c-x)^2$, vijon $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$, prej ku

$$x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}, \text{ pra } h_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2.$$

- Me zbatimin e formulës $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, kemi:

$$h_c^2 = \left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right); \quad h_c^2 = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2c}\cdot\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2c};$$

$$h_c^2 = \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2c}\cdot\frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2c}; \quad h_c^2 = \frac{a^2-(b-c)^2}{2c}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2c}, \text{ d.m.th.}$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a).$$

Duke e shfrytëzuar formulën $s=\frac{a+b+c}{2}$ (s është gjysma e perimetrit ΔABC),d.m.th. $2s=a+b+c$, përcaktojmë:

$$a-b+c=a+b+c-2b=2s-2b=2(s-b),$$

$$a+b-c=a+b+c-2c=2s-2c=2(s-c) \text{ dhe}$$

$$b+c-a=a+b+c-2a=2s-2a=2(s-a), \text{ pra}$$

$$h_c^{\,2}=\frac{1}{4c^2}\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-a)\cdot 2s;$$

$$h_c^{\,2}=\frac{1}{c^2}\cdot 4(s-b)(s-c)(s-a)\cdot s;$$

$$h_c=\frac{2}{c}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ dhe}$$

$$S=\frac{1}{2}c\cdot h_c=\frac{1}{2}c\cdot\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ d.m.th..}$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

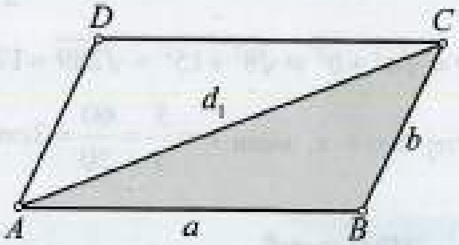
2 Njehso syprinën e paralelogramit brinjët e të cilit janë $a=13cm$, $b=14cm$ dhe një diagonalja $d_1=15cm$.

Vëre zgjidhjen.

■ Diagonalja AC e ndan paralelogramin $ABCD$ në dy trekëndësha të puthitshëm.

Pasi janë dhënë të tre brinjët e trekëndëshit ABC, gjysmëperimetri i tij është

$s=\frac{a+b+d_1}{2}=\frac{13+14+15}{2}=21$, pra sipas formulës së Heronit kemi:



$S_{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d_1)}$, përkatësisht

$S_{ABC}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$, d.m.th.

$S_{ABC}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\sqrt{3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3}=\sqrt{3^2\cdot 7^2\cdot 2^4}=84cm^2$,

pra syprina e paralelogramit është $S=2\cdot 84=168cm^2$.

Mbaj mend!

Syprina e trekëndëshit nëse janë dhënë brinjët e tij njehsohet me formulën e Heronit $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s=\frac{a+b+c}{2}$.

3 Cakto lartësinë më të vogël të trekëndëshit brinjët e të cilit janë $50\,cm, 58\,cm$ dhe $72\ cm$.

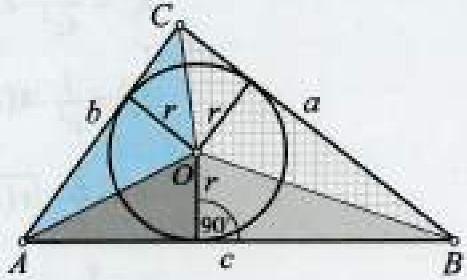
4 Duke e shfrytëzuar formulën e Heronit, nxirre vërtetimin e formulës për syprinën e trekëndëshit barabrinjës.

Kujtohu!

- Ku gjendet qendra e vijës rrethore të brendashkruar në trekëndësh?
- Çfarë këndi formojnë brinja e trekëndëshit dhe rrezja e vijës rrethore të brendashkruar e tërhequr te pikat prekëse?
- Ku gjendet qendra e vijës rrethore të jashtashkruar në trekëndësh?
- Ku shtrihet qendra e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit kënddrejt?

B

5 Le të jetë r rrezja e vijës rrethore të brendashkruar te trekëndëshi ABC me brinjë a, b dhe c. Cakto syprinën e trekëndëshit të shprehur nëpërmjet elementeve të përmendur.



Vëre zgjidhjen

- Vëre, rrezja r është lartësia e çdonjërit prej trekëndëshave ABO, BOC dhe AOC.
- Sipas aksiomës për syprinën e shumëkëndëshit kemi:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BCO} + S_{\triangle CAO}$$

$$S = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2}$$

$$S = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s, \text{ pasi } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

6 Njehso rrezen e vijës rrethore të brendashkruar te trekëndëshi kënddrejt katetet e të cilit janë $8\ cm$ dhe $15\ cm$.

- Për zgjidhjen kemi: $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{8 \cdot 15}{2} = 60\,cm^2$;

$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{8^2+15^2} = \sqrt{289} = 17\,cm$; $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{8+15+17}{2} = 20\,cm$;

Prej $S = r \cdot s$, vijon $r = \frac{S}{s} = \frac{60}{20} = 3\,cm$.

Mbaj mend!

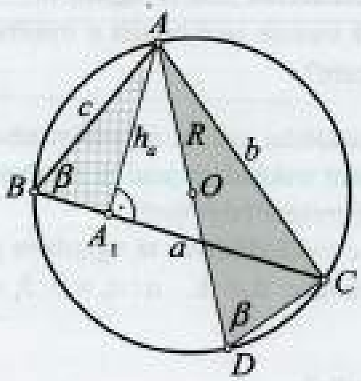
Nëse r është rreze e vijës rrethore të bredashkruar në trekëndësh me brinjë a, b dhe c, atëherë

$S = r \cdot s$, kurse $r = \frac{S}{s}$. ku $s = \frac{a+b+c}{2}$. Nëse ΔABC është barabrinjës, atëherë $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

7 Njehso rrezen r e vijës rrethore të brendashkruar në trekëndëshin ABC, brinjët e të cilit janë $a = 12\,cm$, $b = 15\,cm$, $c = 17\,cm$.

8 Cakto rrezen e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit ABC, brinjët e të cilit janë a, b dhe c.

Vëre zgjidhjen.



- Le të jetë $AA_1 \perp BC, \overline{AA_1} = h_a$, dhe $\overline{AD} = 2R$.
- Trekëndëshi ADC është kënddrejt (pse?);

$\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = \beta$, si kënde periferike mbi harkun e njëjtë rrethor.

- Prej $\Delta\ ABA_1$ kemi $\sin\beta = \frac{h_a}{c}$,

kurse prej ΔADC kemi: $\sin\beta = \frac{b}{AD} = \frac{b}{2R}$, pra $\frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R}$, d.m.th. $2R \cdot h_a = b \cdot c$. Nëse të dy brinjët e barasisë së fundit i shumëzojmë me a, fitojmë: $2R \cdot ah_a = abc$, d.m.th. $4RS_\Delta = abc$. Prej këtu vijon:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}, \text{ kurse } R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}.$$

9 Njehso rrezen e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit brinjët e të cilit janë 37 cm, 15 cm dhe 44 cm.

Vëre zgjidhjen:

Gjysmëperimetri i trekëndëshit është $s = \frac{37+15+44}{2} = 48\,cm$, pra sipas formulës së Heronit

$$S = \sqrt{48 \cdot (48-37)(48-15)(48-44)} = 4 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 2 = 264\,cm^2.$$

Për rrezen e vijës rrethore fitojmë $R = \frac{37 \cdot 15 \cdot 44}{4 \cdot 264} = \frac{185}{8} = 23\frac{1}{8}\,cm.$

Mbaj mend!

Nëse R është rreze e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit ABC me brinjë a, b dhe c, atëherë $S = \frac{abc}{4R}$, kurse $R = \frac{abc}{4S}$.

Nëse trekëndëshi është barabrinjës, atëherë $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

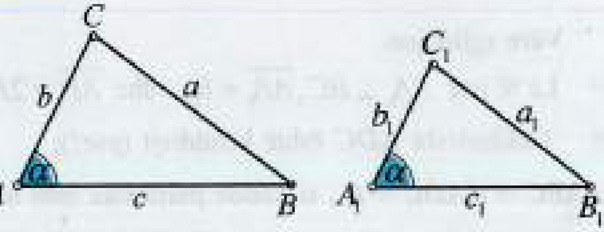
10 Baza e trekëndëshit barakrahas është $a = 24\,cm$, kurse krahu $b = 20\,cm$. Cakto rrezen e vijës rrethore të brendashkruar dhe jashtashkruar te ai trekëndësh.

Kujtohu!

- Cilët trekëndësha janë të ngjashëm?
- Në çfarë varësie janë brinjët e trekëndëshave të ngjashëm?

C

11 Cakto raportin e syprinave të dy trekëndëshave të ngjashëm..



- Dy trekëndësha janë të ngjashëm nëse dy kënde të njërit trekëndësh janë të barabartë me dy kënde të trekëndëshit tjetër.
- Brinjët e trekëndëshave të ngjashëm janë proporcionale, d.m.th. $a:a_1=b:b_1=c:c_1$. Prej $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ dhe $S=\frac{1}{2}b_1c_1\sin\alpha$, vijon

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}bc\sin\alpha}{\frac{1}{2}b_1c_1\sin\alpha}=\frac{b\cdot c}{b_1\cdot c_1}.$$ Prej $b:b_1=c:c_1$ vijon $b=\frac{c\cdot b_1}{c_1}$, pra $$\frac{S}{S_1}=\frac{\frac{cb_1}{c_1}\cdot c}{b_1c_1}=\frac{c^2}{c_1^{\ 2}}.$$

Në mënyrë të ngjashme vërtetojmë se $\frac{S}{S_1}=\frac{a^2}{a_1^{\ 2}}$ dhe $\frac{S}{S_1}=\frac{b^2}{b_1^{\ 2}}$.

Mbaj mend!

Syprinat e trekëndëshave të ngjashëm qëndrojnë si katrorët e brinjëve përkatëse, d.m.th.

$$S:S_1=a^2:a_1^{\ 2}=b^2:b_1^{\ 2}=c^2:c_1^{\ 2}.$$

- Gjykimi i njëjtë vlen edhe për shumëkëndëshat e ngjashëm.

12 Syprina e dy trekëndëshave të ngjashëm janë $49\,cm^2$ dhe $64\,cm^2$, kurse njëra brinjë e trekëndëshit të vogël është 7 *cm*. Cakto brinjën përkatëse të trekëndëshit më të madh.

Vëre zgjidhjen:

Prej $S:S_1=a^2:a_1^{\ 2}$ vijon $49:64=7^2:a_1^{\ 2}$, ose $a_1^{\ 2}=64$, d.m.th. $a_1=8\,cm$.

13 Syprinat e dy trekëndëshave të ngjashëm janë $81\,cm^2$ dhe $25\,cm^2$, kurse njëra brinjë e trekëndëshit më të madh është 9 *cm*. Cakto brinjën përkatëse të trekëndëshit më të vogël dhe lartësia që i përgjigjet asaj brinje.

Detyra:

1. Rrezet e dy vijave rrethore janë 39 *cm* dhe 17 *cm*, kurse largësia qëndrore është 44 *cm*. Cakto gjatësinë e kordës së tyre të përbashkët.
2. Cakto syprinën e trekëndëshit nëse dy brinjë janë 27 *cm* dhe 29 *cm*, kurse vija e rëndimit nga brinja e tretë është 26 *cm*.
3. Cakto brinjët e trekëndëshit nëse ato qëndrojnë si $9:10:17$, kurse syprina e tij është $144\,cm^2$.
4. Trekëndëshi kënddrejt ABC me hipotenuzë 20 *cm* dhe katetë 12 *cm* është i ngjashëm me trekëndëshin $A_1B_1C_1$, perimetri i të cilit është 60 *cm*. Cakto syprinën e trekëndëshit $A_1B_1C_1$.
5. Brinjët më të mëdhaja të dy shumëndëshave të ngjashëm janë 35 *m* dhe 14 *m*, kurse ndryshimi i syprinave të tyre është $105\,m^2$. Cakto syprinat e atyre shumëkëndëshave

4 SYPRINA E TRAPEZIT DHE TRAPEZOIDIT

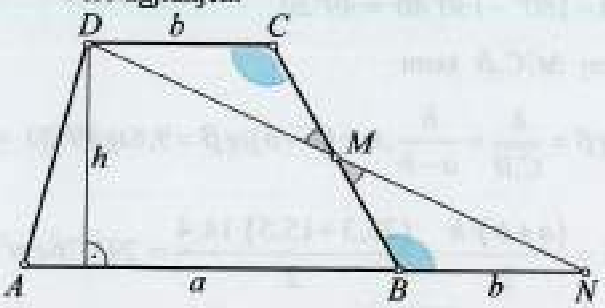
Kujtohu!

- Çka është trapez?
- Me çka është e barabartë vija e mesme e trapezit?
- Si transformohet trapezi në trekëndësh me syprina të barabarta?
- Çka është trapezoid?

A

1 Njehso syprinën e trapezit nëse janë dhënë bazat a dhe b dhe lartësia h.

Vëre zgjidhjen:



Pika M le të jetë mesi i krahut BC.

■ Për këtë shkak $\overline{MB}=\overline{MC}$, $\measuredangle BMN=\measuredangle CMD$ (kënde kryqëzore) dhe $\measuredangle NBM=\measuredangle DCM$ (kënde alternativ), sipas indicit KBK përfundojmë se $\Delta BNM\cong\Delta CDM$. Prej këtu vijon $\overline{BN}=\overline{CD}=b$.

■ Trekëndëshi AND dhe trapezi $ABCD$ kanë syprina të barabarta. (Pse?) Domethënë,

$$S_{AND}=S_{ABCD}=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h=m\cdot h,$$ ku $m=\frac{1}{2}(a+b)$ është vija e mesme e trapezit.

2 Njehso syprinën e trapezit me baza 15 cm dhe 8 cm, kurse lartësia 10 cm.

Vëre zgjidhjen:

■ Me zbatimin e formulës kemi: $S=\dfrac{(a+b)\cdot h}{2}=\dfrac{(15+8)\cdot 10}{2}=115cm^2$.

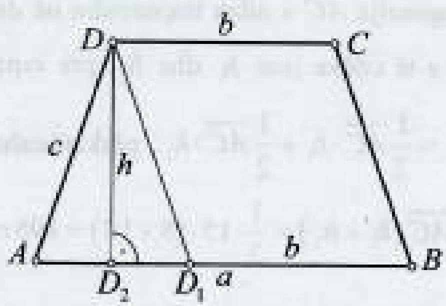
Mbaj mend!

Nëse a dhe b janë bazat e trapezit, kurse h është lartësia e tij, atëherë syprina e trapezit njehsohet me formulën $S=\dfrac{(a+b)\cdot h}{2}$.

3 Njehso syprinën e trapezit barakrahas me baza 14 cm, 6 cm dhe krah 5 cm.

Vëre zgjidhjen:

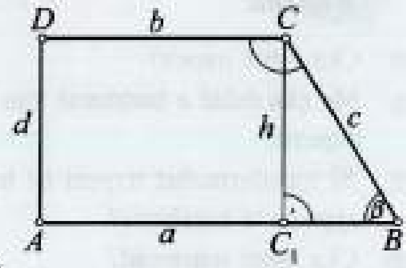
■ Me tërheqjen e $DD_1\parallel BC$, trapezi është ndarë në paralelogram dhe trekëndësh barakrahas me baza $\overline{AD_1}=a-b$. Prej ΔAD_2D, fitojmë: $h^2=\overline{AD}^2-\overline{AD_2}^2$, ose



$$h^2=c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=5^2-\left(\frac{14-6}{2}\right)^2=9,$$ d.m.th. $h=3cm$, pra $S=\dfrac{(a+b)\cdot h}{2}=\dfrac{(14+6)\cdot 3}{2}=30cm^2$.

4 Njehso syprinën dhe perimetrin e trapezit kënddrejt $ABCD, AD \perp AB$, me baza $a = 25,3$; $b = 15,5$ dhe këndin ndërmjet krahut dhe bazës $130^0 40'$.

Vëre zgjidhjen.



■ Këndet që shtrihen te krahu janë suplementar (Pse?), d.m.th.

$\beta = 180^0 - 130^0 40' = 49^0 20'$.

Prej ΔCC_1B kemi

$$tg\,\beta = \frac{h}{\overline{C_1B}} = \frac{h}{a-b}, h = (a-b)tg\,\beta = 9,8\,tg\,49^0 20' = 9,8 \cdot 1,164 = 14,4\,cm.$$

$$S = \frac{(a+b)\cdot h}{2} = \frac{(25,3+15,5)\cdot 14,4}{2} = 293,76\,cm^2.$$

Prej $\cos\beta = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{BC}} = \frac{a-b}{c}$, vijon $c = \frac{9,8}{\cos 49^0 20'} = 15,04\,cm$; por pasi $d = h$, atëherë

$$P = a+b+c+d = 25,3+15,5+15,04+14,40 = 70,24\,cm.$$

5 Bazat e një trapezi janë $23\,dm$ dhe $170\,cm$, kurse syprina është $2\,m^2$. Cakto lartësinë e atij trapezi.

B

■ Trapezoidi është katërkëndëshi i cili nuk ka brinjë paralele.

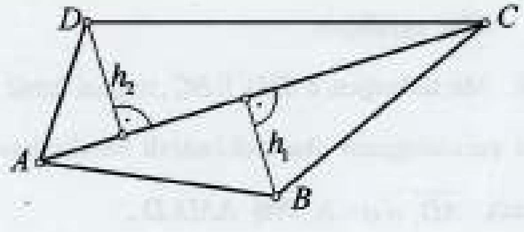
Caktimi i syprinës së trapezoidit mund të kryhet në mënyra të ndryshme varësisht prej elementeve të dhëna.

6 Njehso syprinën e katërkëndëshit $ABCD$, nëse diagonalja $\overline{AC} = 15\,cm$, kurse kulmet B dhe D janë të larguara prej diagonales së dhënë $8\ cm$ dhe $18\ cm$.

Vëre zgjidhjen:

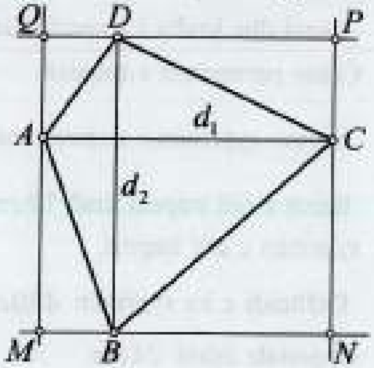
■ Diagonalja AC e ndan trapezoidin në dy trekëndësha, lartësitë e të cilëve janë h_1 dhe h_2, pra syprina e kërkuar është $S = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot h_1 + \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot h_2$, përkatësisht

$$S = \frac{1}{2}\overline{AC}(h_1+h_2) = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot(8+18) = 195\,cm^2.$$



7 Njehso syprinën e katërkëndëshit $ABCD$, nëse $\overline{AB} = 20\,cm$, $\overline{BC} = 7\,cm$, $\overline{CD} = 13\,cm$, $\overline{AD} = 4\,cm$ dhe $\overline{AC} = 15\,cm$.

8 Te katërkëndëshi $ABCD$ diagonalet d_1 dhe d_2 janë reciprokisht normale. Njehso syprinën e tij, nëse $d_1 = 12\,cm$ dhe $d_2 = 17\,cm$.



Vëre zgjidhjen:

- Nëse nëpër kulmet e katërkëndëshit të dhënë tërheqim drejtëza paralele me diagonalet, fitohet drejtkëndëshi $MNPQ$, me brinjë $\overline{MN} = d_1$ dhe $\overline{MQ} = d_2$.

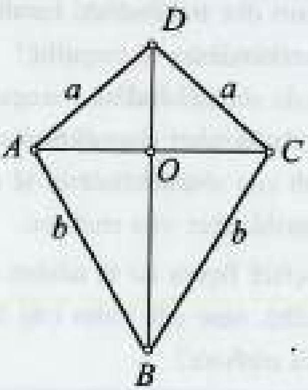
Prej tetë trekëndëshave kënddrejt të fituar, dy nga dy janë të puthitshëm, pra kanë syprina të barabarta. Prandaj, syprina e kërkuar është dy herë më e vogël se syprina e drejtkëndëshit $MNPQ$, $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} = \dfrac{12 \cdot 17}{2} = 102\,cm^2$.

Sigurisht vëreve se në të njëjtën mënyrë njehsonjim syprinën e rombit dhe katrorit.

Mbaj mend!

Syprina e katërkëndëshit me diagonale reciprokisht normale d_1 dhe d_2 njehsohet me formulata $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

9 Brinjët e delltoidit janë 10 cm dhe 17 cm, kurse diagonalja që nuk është boshti i simetrisë është 16 cm. Njehso syprinën e delltoidit.



- Katërkëndëshi ku dy nga dy brinjët fqinje janë të barabarta quhet delltoid.
- Diagonalja BD është simetrale e diagonales AC dhe është boshti i simetrisë së delltoidit.
- Prej trekëndëshit DOC vijon

$$\overline{DO}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{OC}^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 36, \quad \text{d.m.th. } \overline{DO} = 6\,cm.$$

- Prej trekëndëshit OBC vijon:

$$\overline{OB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 17^2 - 8^2 = 225,$$

$$\overline{OB} = 15\,cm; \ \overline{DB} = \overline{DO} + \overline{OB} = 6 + 15 = 21\,cm. \quad S = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{DB} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 21 = 168\,cm^2.$$

Njehso syprinën e delltoidit me zbatimin e formulës së Heronit.

10 Njehso syprinëb e delltoidit me brinjë 8 cm, 15 cm dhe këndi ndërmjet tyre 150^0.

Detyra:

1. Bazat dhe krahu i trapezit barakrahas qëndrojnë se $10:4:5$, kurse syprina e tij është $112 cm^2$. Cakto perimetrin e trapezit.

2. Njehso syprinën e trapezit me baza $24 cm$ dhe $10 cm$, kurse krahët $13 cm$ dhe $15 cm$.

3. Bazat e një trapezi janë $19 cm$ dhe $2 cm$, kurse diagonalet janë $17 cm$ dhe $10 cm$. Njehso syprinën e atij trapezi.

4. Delltoidi e ka syprinën $480 cm^2$. Cakto perimetrin e tij nëse njëra brinjë është $13 cm$ dhe njëra diagonale është $24 cm$.

5. Një dhomë (në formë të drejtkëndëshit) me dimenzione 5,6 *m* dhe 4,5 *m* është lidhur me ballkonin që është gjysma e gjashtëkëndëshit të rregulltë me brinjë 1,6 *m*. Cakto syprinën e dyshemesë për të dy hapësirat..

5 PERIMETRI DHE SYPRINA E SHUMËKËNDËSHIT TË RREGULLTË

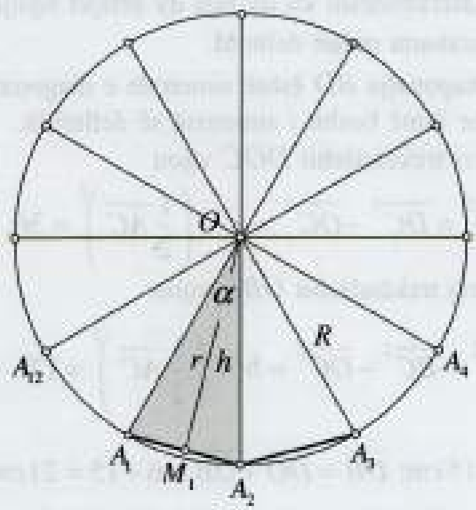
Kujtohu!

- Cili shumëkndësh quhet shumëkëndësh i rregulltë?
- Katrori dhe trekëndëshi barabrinjës a janë shumëkëndësha të rregulltë?
- Te çdo shumëkëndësh i rregulltë mund të brendashkruhet shumëkëndëshi i rregulltë.
- Rreth çdo shumëkëndëshi të rregulltë mund të jashtashkruhet vija rrethore.
- Në çfarë figura do të ndahet shumëkëndshi i rregulltë, nëse çdo kulm i tij lidhet me qendrën e vijës rrethore?

- Vizato vijë rrethore me rreze $R = 6 cm$.
- Pikat $A_1, A_3, A_5, \dots, A_{11}$ janë kulmet e gjashtëkëndëshit të rregulltë.
- Si do ta konstruktosh dymbëdhjetëkëndëshine rregulltë?

A 1 Rreth dymbëdhjetëkëndëshit të rregulltë është jashtashkruar vija rrethore me rreze $R = 6 cm$. Njehso syprinën dhe perimetrin e shumëkëndëshit.

Vëre zgjidhjen.



Brinjë e dymbëdhjetëkëndëshit të rregulltë është segmenti $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots = \overline{A_{11}A_{12}} = a$.

Segmenti $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = ... = R$ është rreze e vijës rrethore të jashtashkruar, kurse $\overline{OM_1} = r = h$ është rreze e vijës rrethore të brendashkruar te dymbëdhjetkëndëshi i rregulltë.

Me bashkimin e qendrës O me çdo kulm, shumëkëndëshi është ndarë në 12 trekëndësha brakrahas të puthitshëm. Çdonjëri prej tyre quhet ***trekëndësh karakteristik*** i shumëkëndëshit të rregulltë. Këndi pranë majës (këndi qëndror) te trekëndëshi karakteristik A_1A_2O është $\alpha = 360^0 : 12 = 30^0$. Segmenti $\overline{OM_1} = h$ është lartësia e ΔA_1A_2O dhe quhet ***apotemë*** e trekëndëshit karakteristik.

Pra, syprina e kërkuar është $S = 12 \cdot S_{\Delta A_1A_2O}$, kurse për syprinën trekëndëshit karakteristik kemi:

$$S_{\Delta A_1A_2O} = \frac{1}{2}\overline{OA_1} \cdot \overline{OA_2} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin 30^0 = 9\,cm^2.$$

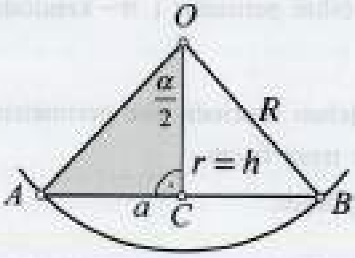
Domethënë, $S = 12 \cdot 9 = 108\,cm^2$.

Syprinën e trekëndëshit A_1A_2O mundesh ta njehsosh edhe me formulën $S = \frac{1}{2}ah$, ashtu që a dhe h do t'i caktosh prej trekëndëshit A_1M_1O, duke shfrytëzuar $\measuredangle A_1OM_1 = \frac{\alpha}{2}$.

Prej trekëndëshit A_1M_1O kemi: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{1}{2}a}{R} = \frac{a}{2R}$, pra

$a = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 6 \cdot \sin 15^0 = 3{,}106$. Pra, $P=12 \cdot a=12 \cdot 3{,}106=37{,}27cm$.

2 Njehso syprinën dhe perimetrin e çfarëdo shumëkëndëshi të rregulltë nëse është dhënë:
a) a; b) R; c) r.
Vëre zgjidhjen



Këndi qëndror është $\alpha = 360^0 : n$.

Si do ta vizatosh $n-$këndëshin e rregulltë?
Elementet e shumëkëndëshit të rregulltë janë: brinja a, rrezet e vijës rrethore të jashtashkruar dhe brendashkruar R dhe r.

Trekëndëshi ABO është trekëndësh karakteristik, pra $S=n \cdot S_{\Delta ABO}$, $P=n \cdot a$.

a) Pasi është dhënë brinja $a = \overline{AB}$, atëherë prej trekëndëshit ACO kemi:

$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$, d.m.th. $h = \frac{1}{2}a\,ctg\frac{\alpha}{2}$. $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}a^2 \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

Prandaj, $\boxed{S = \frac{1}{4}n \cdot a^2 \cdot ctg\frac{\alpha}{2} \text{ dhe } P=n \cdot a.}$

b) Nëse është dhënë rrezja R e vijës rrethore të jashtashkruar, me zbatimin e formulës

$S_{\Delta}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, kemi: $S_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha$, kurse $S=\frac{1}{2}nR^2\sin\alpha$.

Prej trekëndëshit ACO kemi: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{R}$, ose $a=2R\sin\frac{\alpha}{2}$, pra $P=2nR\sin\frac{\alpha}{2}$. Domethënë,

$$S=\frac{1}{2}nR^2\sin\alpha,\ \text{kurse}\ \ P=2nR\sin\frac{\alpha}{2}.$$

c) Për të dhënat $r=h$, prej trekëndëshit ACO kemi: $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{AC}}{\overline{OC}}=\frac{\frac{1}{2}a}{r}=\frac{a}{2r}$, përkatësisht

$a=2r\,tg\frac{\alpha}{2}$, kurse $S_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}r\cdot a=\frac{1}{2}r\cdot 2r\,tg\frac{\alpha}{2}=r^2\,tg\frac{\alpha}{2}$. Vijon,

$$S=n\cdot r^2\,tg\frac{\alpha}{2},\ \ P=2nr\,tg\frac{\alpha}{2}.$$

Për shembull, le të jetë $a=7\,cm$ është brinjë e tetëkëndëshit të rregulltë. Atëherë $\alpha=360^0:8=45^0$,

$S=\frac{1}{4}\cdot 8\cdot 7^2\cdot ctg\frac{45^0}{2}=98\cdot ctg\,22^0 30'=236{,}66\,cm^2$.

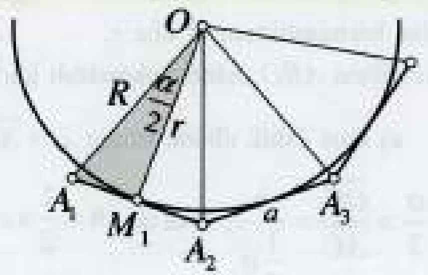
Formulat paraprake nuk është e thënë të mbahen mend. Syprina e shumëkëndëshit të rregulltë mund të njehsohet edhe nëpërmjet syprinës të trekëndëshit karakteristik, d.m.th.

$S=n\cdot S_{\Delta ABO}=n\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}na\cdot h=\frac{1}{2}L\cdot h$,

ku $P=n\cdot a$ është perimetri i $n-$këndëshit të rregulltë, kurse h është lartësia e trekëndëshit karakteristik.

3 Njehso syprinën dhe perimetrin e nëntëkëndëshit të rregulltë që është jashtashkruar rreth vijës rrethore me rreze 6 cm.

Vëre zgjidhjen:



Prej ΔA_1M_1O kemi: $\alpha=360^0:9=40^0$, $\overline{A_1M_1}=\frac{1}{2}a$,

$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{OM_1}}$, përkatësisht $tg\,20^0=\frac{\frac{1}{2}a}{r}=\frac{a}{2r}$,

d.m.th. $a=2r\,tg\,20^0=4{,}367\,cm$.

Prandaj, $P=n\cdot a=9\cdot 4{,}367=39{,}303\,cm$ dhe $S=\frac{1}{2}P\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 39{,}303\cdot 6=117{,}9\,cm^2$.

4 Cakto syprinën e gjashtëkëndëshit të rregulltë me brinjë a.

Këndi qëndror është $\alpha = 360^0 : 6 = 60^0$. Pasi $R = a$, sipas formulave paraprake fitojmë:

$$S = \frac{1}{4}\cdot 6\cdot ctg\frac{60^0}{2} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} \text{ ose } S = \frac{1}{2}\cdot 6a^2\sin 60^0 = 3a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Mbaj me mend!

Syprina e gjashtëkëndëshit të rregulltë me brinjë a njehsohet me formulën

$$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

5 Njehso syprinën dhe perimetrin e trekëndëshit të rregulltë që është:

a) brendashkruar në vijën rrethore me rreze $20\ cm$;

b) jashtashkruar në vijën rrethore me rreze $20\ cm$.

Detyra:

1. Një hapësirë duhet të pllakëzohet me pllaka në formë të gjashtëkëndëshit të rregulltë me brinjë $12\ cm$. Sa pllaka të atilla do të përdoren nëse hapësira e ka formën e drejtkëndëshit me dimenzione $7{,}48m$ dhe $3{,}25\ m$?

2. Rreth një vije rrethore është jashtashkruar shumëkëndëshi i rregulltë me perimetër $60cm$ dhe syprinë $240cm^2$. Cakto rrezen e asaj vije rrethore.

3. Te vija rrethore me rreze $r = 6\,cm$ një pas një janë dhënë pikat A, B, C, D dhe E, ashtu që $\measuredangle AOB = 30^0, \measuredangle BOC = 60^0, \measuredangle COD = 90^0, \measuredangle DOE = 120^0$. Njehso syprinën e atij shumëkëndëshi $ABCDE$.

4. Trekëndëshi barabrinjës është gjashtëkëndësh i rregulltë me syprina të barabarta. Cakto raportin e perimetrave të tyre..

5. Apotemat e dy gjashtëkëndëshave të rregulltë qëndrojnë si $2:3$, kurse ndryshimi i syprinave të tyre është $160\sqrt{3}$. Cakto syprinat e atyre gjashtëkëndëshave.

6 PERIMETRI SHE SYPRINA E RRETHIT

Kujtohu!

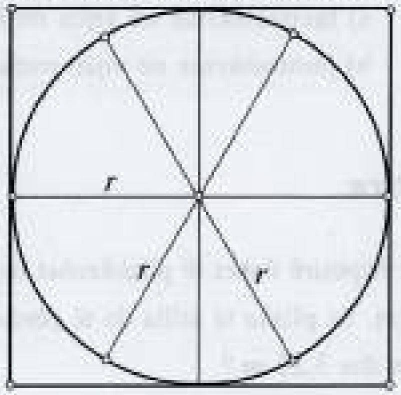
- Çka është vijë rrethore
- Çka nënkupton me konceptin perimetër të shumëkëndëshit?
- Në shkollimin fillor ke njehsuar perimetrin e rrethit me formulën $P=2r\pi$.
- Si arritët në shkollën fillore deri te vlera e numrit $\pi=3,1415...$?
- Çfarëdo dy vija rrethore a janë figura të ngjashme?

A Në shkollën fillore numrin π e ke njehsuar si herës të perimetrit dhe diametrit të tij, d.m.th.

$$\frac{P}{d}=\pi,$$

kurse shenja është marrë si shkronjë e parë e fjalës greke „*periferia*", që do të thotë perimetër.

Me caktimin e numrit π është marrë matemtikani grek Arhimedi (ka jetuar në shekullin III p.e.r). Ai te vija rrethore me rreze r ka brendashkruar gjashtëkëndëshin e rregulltë, por ka jashtashkruar edhe katror, dhe ka arritur deri te përfundimi $3<\frac{P}{d}<4$.



Me zmadhimin e numrit të brinjëve të shumëkëndëshit të brendashkruar dhe jashtashkruar dhe me krahasimin e perimetrave të tyre, ka njehsuar se $\frac{P}{d}=\pi$ gjendet ndërmjet $3\frac{10}{71}$ dhe $3\frac{10}{70}$.

Shumë matematikan e kanë njehsuar numrin π.

Matematikani holandez Ludolf (1539-1610) e ka njehsuar numrin π në 20 djetore te poligoni i rregulltë me 32212254720 brinjë, kurse më vonë edhe me 35 dhjetore, pra quhet edhe ***numri i Ludolfit***.

- Dy vija rrethore janë të ngjashme ndërmjet vedi, kurse koeficienti i ngjashmërisë caktohet me raportin e diametrave të tyre.

Nëse P_1 dhe P_2 janë gjatësistë e dy vijave rrethore, kurse d_1 dhe d_2 diametrat e tyre, atëherë:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{d_1}{d_2}, \text{ d.m.th. } \frac{P_1}{d_1}=\frac{P_2}{d_2}$$ është numër konstant dhe shënohet me π.

Prej këtu vijon se $\frac{P}{d}=\pi$, d.m.th. $P=d\cdot\pi$ ose $P=2r\pi$, pasi $d=2r$. Numri π është njehsuar me shumë dhjetore, $\pi=3,14159265...$, megjithatë shpeshherë meret vlera e përafërtë, d.m.th. $\pi=3,14$. Për shembull, nëse $r=5cm$, atëherë $P=2r\pi=2\cdot5\cdot3,14=31,4cm$.

Nëse gjatë njehsimit të perimetrit dhe syprinës së rrethit numri π nuk zëvëndësohet, atëherë vlera e madhësisë së njehsuar është absolutisht e saktë. Nëse, tani, numri π zëvëndësohet me 3,14, fitohet vlera e përafërtë e rezulltatit.

1 Cakto rrezen e rrethit perimetri i të cilit është $150,72\,m$.

Vëre rezulltatin:

Prej $P=2r\pi$ përkatësisht $2r\pi=P$ vijon $r=\dfrac{P}{2\pi}=\dfrac{150,72}{2\cdot 3,14}=24\,m.$

2 Sa është gjatësia e vijës rrethore me diametër $d=22\,dm$?

3 Si do të ndryshon perimetri i rrethit të dhënë, nëse rrezja e tij zmadhohet: 2herë, 3 herë, 4 hrë, . . . , n herë ?

Vëre zgjidhjen.

Le të jetë r rreze e rrethit të dhënë. Atëherë perimetri i tij është $P=2r\pi$.

Nëse $r_1=2r$, atëherë $P_1=2\pi\cdot r_1=2\pi\cdot 2r=2\cdot(2\pi r)=2\cdot P$.

Nëse $r_2=3r$, atëherë $P_2=2\pi\cdot r_2=2\pi\cdot 3r=3\cdot(2\pi r)=3\cdot P$.

Nëse $r_3=4r$, atëherë $P_3=2\pi\cdot r_3=2\pi\cdot 4r=4\cdot(2\pi r)=4\cdot P$ etj.

Domethënë, perimetri i rrethit do të zmadhohet përkatësisht: 2 herë, 3 herë, . . . , n herë.

Kujtohu!

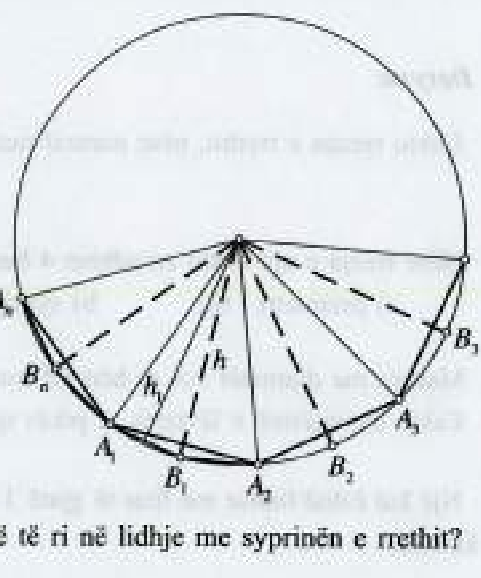
- Çka është rrethi?
- E din se syprinën e rrethit njehsohet me formulën $S=r^2\pi$.

B **4** trego se syprina e rrethit me rreze r njehsohet me formulën

$$S=r^2\pi$$

Në vijën rrethore të dhënë le të jetë brendashkruar n – këndëshi i rregulltë $A_1A_2A_3...A_n$. Atëherë syprina e tij njehsohet me formulën:

$$S=\frac{1}{2}P\cdot h.$$



- Si është ajo syprinë në krahasim me syprinën e rrethit?

Te e njëjta vijë rrethore brendashkruaj shumëkëndësh të rregulltë me brinjë dy herë më shumë, d.m.th. shumëkëndëshi $A_1B_1A_2B_2...A_nB_n$.

- Çka vëren? Si është syprina e shumëkëndëshit të rregulltë të ri në lidhje me syprinën e rrethit?

Nëse S është syprina e rrethit, sigurisht vërejte se ndryshimi S-S_n zvogëlohet, nëse zmadhohet numri i brinjëve të n – këndëshit të rregulltë.

● Nëse numri i brinjëve të n – këndëshit të rregulltë zmadhohet deri në pakufi, atëherë çka do të ndodh me ndryshimin: S-S_n; P-P_n; r-h?

■ Sigurisht vërejte se çdonjëri prej ndryshimeve aq më shumë zvogëlohet, d.m.th. do të tenton nga zero, kurse atë e shënojmë::

$$\text{Nëse } n \to \infty, \text{ atëherë } S - S_n \to 0, P - P_n \to 0 \text{ dhe } r - h \to 0.$$

Domethënë, me zmadhimin e numrit të brinjëve të n – këndëshit të rregulltë në pakufi, ai tenton ta mbulon rrethin, pra ndryshimi S-S_n do të jetë aq i vogël, që mund të mos përfillet, d.m.th. S-S_n=0. Në mënyrë analoge, P-P_n=0 ose P=P_n dhe $r - h = 0$ ose $r = h$. Prej këtu kemi:

$S = S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot h$, por pasi P_n=P=$2r\pi$ dhe $h = r$, vijon:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot r = \pi r^2.$$

Për shembull, nëse rrezja e rrethit është $r = 10cm$, atëherë syprina e tij është $S = \pi \cdot 10^2$, d.m.th. S=$314cm^2$. Syprina është njehsuar me saktësi absolute nëse shkruajmë S=$100\pi cm^2$.

Mbaj mend!

Perimetri i rrethit me rreze r njehsohet me formulën $\boldsymbol{P=2r\pi}$, kurse syprina e tij me formulën $\boldsymbol{S=r^2\pi}$.

5 Perimetri i një rrethi është $32\pi\ cm$. Cakto syprinën e rrethit.

Detyra:

1. Cakto rrezen e rrethit, nëse numrat matës të syprinës dhe perimetrit të tij janë të barabartë.

2. Nëse rrezja e një rrethi zmadhhet 4 herë, atëherë si do të ndryshon:
   a) perimetri i tij; b) syprina e tij?

3. Makara me diametër 1,4 m bën 80 rrotullime rreth boshtit të saj për një minutë. Cakto shpejtësinë e lëvizjes së pikës që shtrihet në vijën rrethore të makares.

4. Një kal është lidhur me litar të gjatë 10,5 m. Cakto syprinën e pjesës së livadhit ku kali mund të kullotë.

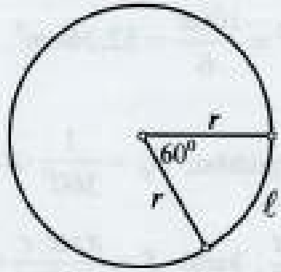
5. Në një vijë rrethore janë dhënë dy korda paralele ku largesa ndërmjet tyre është 39 dm. Kordat janë të gjata 14 dm dhe 40 dm. Cakto syprinën e rrethit.

7 GJATËSIA E HARKUT RRETHOR, SYPRINA E PJESËVE TË RRETHIT

Kujtohu!

- Për cilin kënd themi se është kënd qëndror?
- Çka është hark rrethor?
- Si njehsohet gjatësia e vijës rrethore?
- Gjatësia e një vije rrethore është $72\,dm$. Sa është gjatësia e harkut rrethor këndi qëndror i të cilit është 1^0?

A **1** Njehso gjatësinë e harkut rrethor këndi qëndror i të cilit është 60^0, kurse $r = 10\,cm$.



Këndi prej 60^0 është $\frac{1}{6}$ e këndit të plotë, pra gjatësia ℓ e harkut rrethor është $\frac{1}{6}$ prej perimetrit të rrethit, d.m.th. $\ell = \frac{1}{6}\cdot 2r\pi = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 10\pi = \frac{10\pi}{3} = 10,46\,cm.$

Në përgjithësi: $\ell_{1^0} = \frac{1}{360^0}\cdot 2r\pi = \frac{\pi r}{180^0}$; $\ell_{2^0} = \frac{\pi r}{180^0}\cdot 2$; $\ell_{3^0} = \frac{\pi r}{180^0}\cdot 3$;...; $\ell_{\alpha} = \frac{\pi r}{180^0}\cdot \alpha.$

Mbaj mend!

Gjatësia e harkut rrethor njehsohet me formulën $\ell = \frac{\pi r \alpha}{180^0}$, ku r është rreze e vijës rrethore, kurse α është kënd qëndror që i përgjigjet harkut.

2 Njehso gjatësinë e harkut rrethor, nëse këndi qëndror është $\alpha = 50^0 46'$ dhe $r = 2,5\,m$.

Këndin do ta shndërrojmë në shkallë dhe kemi: $\alpha = 50^0 46' = 50^0 + \left(\frac{46}{60}\right)^0 = 50,76^0$, pra

$$\ell = \frac{\pi\cdot 2,5\cdot 50,76^0}{180^0} = 2,215\,m.$$

3 Cakto këndin qëndror α nëse gjatësia e harkut rrethor është $\ell = 2\,m$, kurse $r = 3\,m$.

Mbaj mend!

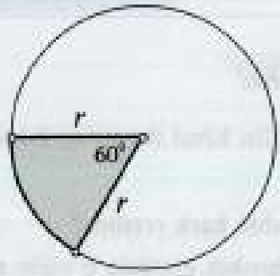
- Çka është sektori rrethor?
- Me cilën formulë njehsohet syprina e rrethit?
- Cila pjesë e rrethit është sektori rrethor ku këndi qëndror i të cilit është 1^0?

B **4** Njehso syprinën e sektorit rrethor ku këndi qëndror është 60^0, kurse $r = 10\,cm$.

Vëre zgjidhjen.

Pjesa e rrethit që është kufizuar me një kënd qëndror të tij quhet ***sektor rrethor.***

Këndi qëndror $\alpha = 60^0$ është $\frac{1}{6}$ prej 360^0, pra syprina



e sektorit rrethor është $\frac{1}{6}$ e syprinës së rrethit, d.m.th.

$$S = \frac{1}{6}\pi \cdot 10^2 = \frac{100\pi}{6} = 52,36\,cm^2.$$

Në përgjithësi: $S_{1^0} = \frac{1}{360^0}\cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^2}{360^0};\ S_{2^0} = \frac{\pi r^2}{360^0}\cdot 2^0;\ S_{3^0} = \frac{\pi r^2}{360^0}\cdot 3^0;\dots;\ S_\alpha = \frac{\pi r^2}{360^0}\cdot \alpha = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^0}.$

Pasi $\ell = \frac{\pi r \alpha}{180^0}$, kemi $S = \frac{\pi r \alpha \cdot r}{180^0 \cdot 2} = \frac{\ell r}{2}.$

Mbaj mend!

Syprina e sektorit rrethor njehsohet me formulën $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^0}$ ose $S = \frac{\ell r}{2}$, ku r është rreze e rrethit, α është kënd qëndror dhe ℓ është gjatësia e harkut rrethor të këndit qëndror përkatës.

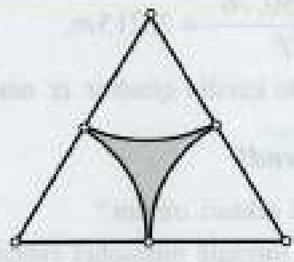
5 Njehso gjatësinë e sektorit rrethor dhe syprinën e sektorit rrethor që i përgjigjet brinjës së pesëkëndëshit të rregulltë të brendashkruar në vijën rrethore me rreze $r = 6\,cm$.

Vëre zgjidhjen.

Këndi qëndror është $\alpha = 360^0 : 5 = 72^0$, pra $\ell = \frac{\pi r \alpha}{180^0} = \frac{3,14\cdot 6\cdot 72}{180} = 7,53\,cm$ dhe

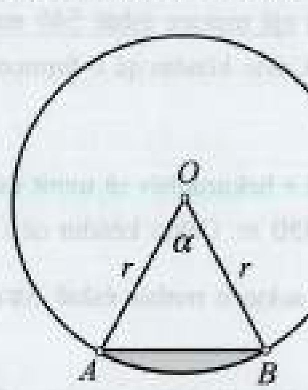
$$S = \frac{\ell r}{2} = \frac{7,53\cdot 6}{2} = 22,62\,cm^2.$$

6 Në vizatim është dhënë trekëndëshi barabrinjës me brinjë $a = 6\,dm$. Njehso syprinën dhe perimetrin e pjesës së hijezuart të trekëndëshit.



Pjesa e rrethit e kufizuar me një hark rrethor dhe kordën përkatëse quhet segment rrethor.

7 Njehso syprinën e segmentit rrethor me kënd qëndror prej 60^0 dhe $r=12\,cm$.



Vëre zgjidhjen.

Le të jetë S_1 syprina e trekëndëshit ABO, kurse S_2 syprina e sektorit rrethor. Atëherë, syprina e segmentit rrethor është:

$$S=S_2-S_1 \text{ ose}$$

$$S=\frac{\pi r^2\alpha}{360^0}-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}, \text{ përkatësisht}$$

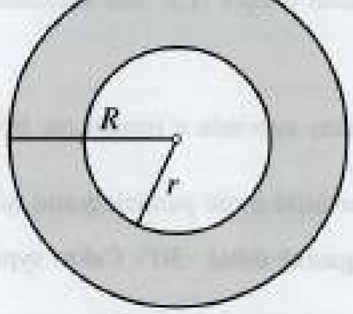
$$S=\frac{\pi 12^2 60^0}{360^0}-\frac{12^2\sqrt{3}}{4}, \text{ d.m.th.. } S=24\pi-36\sqrt{3}=12\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)cm^2.$$

Mbaj mend!

Syprina e segmentit rrethor është i barabartë me ndryshimin e syprinës të sektorit rrethor dhe syprinës së trekëndëshit të brendashkruar në të.

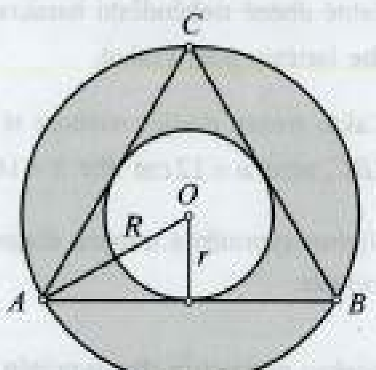
8 Njehso syprinën e segmentit rrethor nëse janë dhënë $\alpha=56^0$, $r=4{,}5\,cm$.

- Pjesa e rrafshit e kufizuar me dy vija rrethore koncentrike quhet ***unazë rrethore***.



Nëse R dhe r janë rreze të vijave rrethore, atëherë $S=(R^2-r^2)\pi$.

9 Njehso syprinën e unazës rrethore të formuar me vijën rrethore të brendashkruar dhe jashtashkruar te trekëndëshi me brinjë $a=2\,dm$.



Kujtohu: $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$S=\pi\left(\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\right)=\pi\left(\frac{3a^2}{9}-\frac{3a^2}{36}\right), \text{ d.m.th..}$$

$$S=\pi\cdot\frac{4a^2-a^2}{12}=\pi\cdot\frac{a^2}{4}=\pi\cdot\frac{2^2}{4}=\pi\,cm^2.$$

10 Njehso syprinën e pjesës së zbrazët prej prerjes tërthore të gypit të ujit, nëse diametri i rrethit të jashtëm është 10 cm, kurse trashësia e gypit është 2 mm.

Detyra:

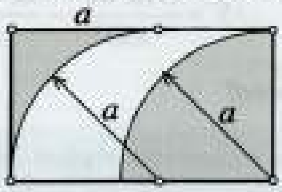
1. Perimetri i një makare është 540 mm. Litari (rrypi) e takon makaren në harkun me gjatësi prej 200 mm. Cakto këndin që e formon makara me pjesën prekëse të litarit (rrypit).

2. Një lakesë e hekurudhës së trenit është pjesë e vijës rrethore me rreze prej 1200 m dhe e ka gjatësinë 450 m. Cakto këndin që i përgjigjet harkut të hekurudhës.

3. Syprina e sektorit rrethor është $3\pi\, cm^2$, kurse këndi përkatës është 30^0. Njehso syprinën e rrethit.

4. Dy rrathë të puthitshëm me rreze 4 cm priten dhe kanë kordë të përbashkët të gjatë 4 cm. Njehso syprinën e prerjes.

5. Njehso syprinën e pjesës së hijezuar në vizatim.



Ushtrim kontrollues tematik

1. Cakto brinjët a, b dhe diagonalen d të drejtkëndëshit me syprinë $36m^2$, nëse $a:b=9:4$.

2. Cakto syprinën e rombit me brinjë 12 cm dhe këndin prej 45^0.

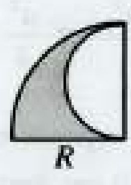
3. Lartësitë e një paralelogrami qëndrojnë si $2:3$, perimetri i tij është 40 cm, kurse këndi i ngushtë është 30^0. Cakto syprinën e paralelogramit.

4. Është dhënë trekëndëshi barakrahas me bazën $20cm$ dhe krahun $26cm$. Cakto syprinën e tij dhe lartësin ndaj krahut.

5. Cakto rrezen e vijës rrethore të brendashkruar dhe jashtashkruar te trekëndëshi kënddrejt ABC, nëse $a=12cm$ dhe $b=16cm$.

6. Njehso syprinën e trapezit diagonalet e të cilit $d_1=12cm$ dhe $d_2=8cm$ janë reciprokisht normale.

7. Njehso perimetrin dhe syprinën e pjesës së hijezuar në vizatim, nëse $R=10cm$.



TEMA 7 ELEMENTET E STEREOMETRISË

Asnjëri që nuk është i shkathtë në gjeometri
le të mos e kalon pragun tim.

Platon 427-347 p.e.s.

- prerje të prizmit me rrafshin;
- syprina dhe vëllimi i prizmit;
- prerja e piramidës me rrafshin;
- syprina dhe vëllimi i piramidës;
- syprina dhe vëllimi i piramidës së cunguar;
- prerjet e cilindrit me rrafshin;
- syprina dhe vëllimi cilindrit;
- prerjet e konit me rrafshin;
- syprina dhe vëllimi i konit;
- syprina dhe vëllimi i konit të cunguar;
- syprina e sferës dhe pjesëve të sferës;
- vëllimi i topit dhe pjesëve të topit..

1 PRIZMI. PRERJET E PRIZMIT ME RRAFSHIN

Kujtohu!

- Në fig. 1 është paraqitur prizmi i drejtë katërkëndor.

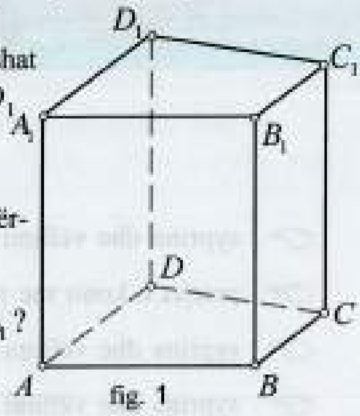


fig. 1

- Si quhen katërkëndëshat $ABCD$ dhe $A_1B_1C_1D_1$ te prizmi?
- Çfarë figura janë katërkëndëshat $ABCC_1B_1$, CDD_1C_1 dhe ADD_1A_1?
- Si quhen segmentet $AB, BC, A_1B_1, B_1C_1, \ldots$, kurse segmentet $AA_1, BB_1, CC_1 \ldots$?

A Për kubin, kuadrin dhe në përgjithësi për prizmin themi se janë *trupa gjeometrik.*

Mbaj mend!

Me konceptin trup gjeometrik nënkuptojmë pjesë të kufizuar të mbyllur nga hapësira.

Nëse sipërfaqja me të cilën është rrethuar një trup përbëhet vetëm prej shumëkëndëshave, atëherë ai trup quhet ***trup tehor*** ose ***poliedër***.

Në fig. 2 janë dhënë disa lloje të poliedrave.

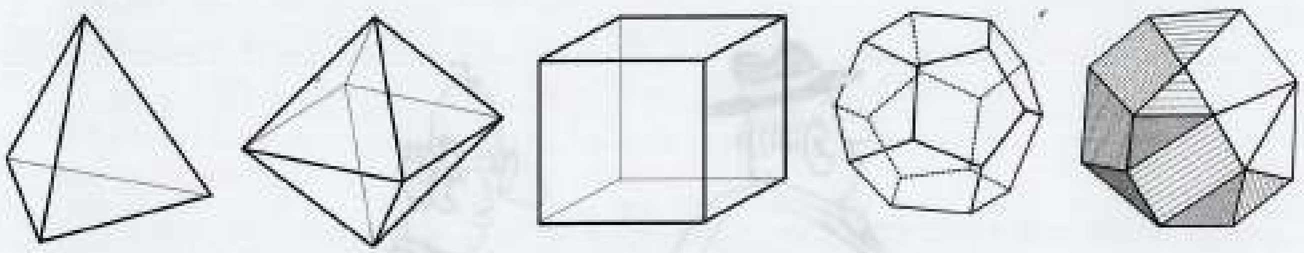


fig. 2

Shumëkëndëshat që e formojnë kufirin e poliedrit quhen ***faqe***, kurse brinjët e tij-*tehe* të poliedrit. Kulmet e shumëkëndëshave janë edhe kulme të poliedrit. Çdo kulm i poliedrit është pikë e përbashkët të paktën e tre teheve të tij.

- Poliedri që gjendet në të njëjtën anë të rrafshit të përcaktuar me cilindo faqe të tij quhet poliedër ***konveks***.
- Çfarë trup gjeometrik është prizmi?

Mbaj mend!

Prizmi është poliedër i kufizuar me dy shumëkëndësha të puthitshëm që shtrihen në dy rrafshe paralele, kurse faqet tjera janë paralelograme të cilët kanë nga një brinjë të përbashkët me çdonjërin prej shumëkëndëshave.

Është dhënë prizmi pesëkëndor (fig. 3).

- Shumëkëndëshat $ABCDE$ dhe $A_1B_1C_1D_1E_1$ shtrihen në rrafshe paralele Σ dhe Σ_1 dhe quhen ***baza të prizmit***.

- Paralelogramet $ABB_1A_1, BCC_1B_1, ...$ quhen ***faqe anësore***; ato e formojnë sipërfaqen anësore ose mbështjellësin e prizmit.

- Segmentet AB, BC, CD, ..., $A_1B_1, B_1C_1, ...$janë ***tehet e bazës*** së prizmit, kurse segmentet $AA_1, BB_1, CC_1, ...$janë ***tehe anësore*** të prizmit.

- Prizmi tehet anësore të të cilit janë normale quhet ***prizmi i drejtë***.

- Si quhet prizmi tehet anësore të të cilit nuk janë normale me bazat?

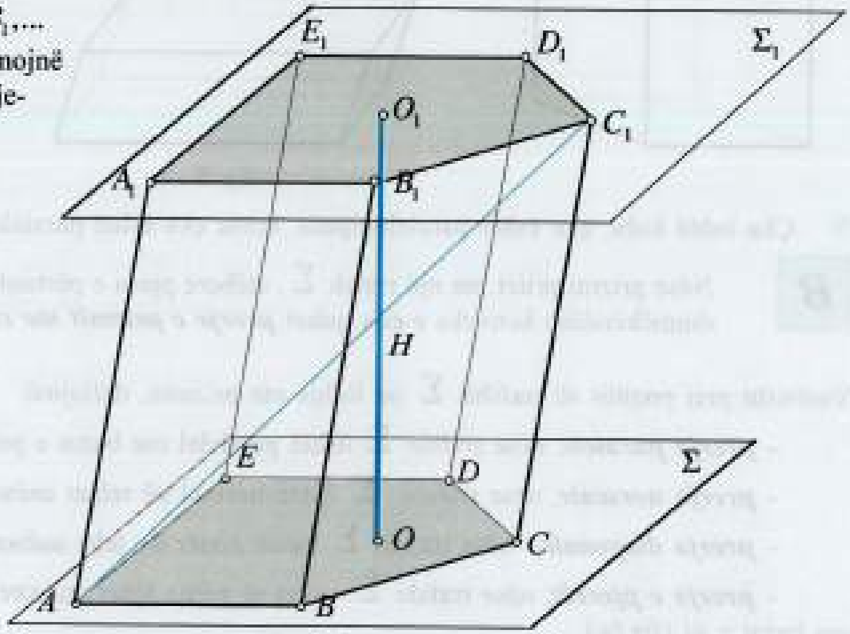


fig. 3

- Prizmi i drejtë baza e të cilit është shumëkëndësh i rregulltë quhet ***prizmi i drejtë***.

Largësia ndërmjet bazave të prizmit quhet lartësi e prizmit dhe zakonisht shënohet me H, ku $H = \overline{OO_1}$ (fig. 3).

- Si janë ndërmjet vedi tehet anësore dhe lartësia e prizmit të drejtë?

- Segmenti pikat e skajshme të të cilit janë dy kulme të prizmit që nuk shtrihen në faqen e njëjtë, quhet ***diagonale hapësinore*** ose vetëm ***diagonale*** e prizmit.

Në fig. 3 ato janë segmentet AC_1, AD_1, BD_1 etj.

- Sipas llojit të bazës, prizmi mund të jetë: trekëndor, katërkëndor, pesëkëndor, gjashtëkëndor etj. (fig. 4).

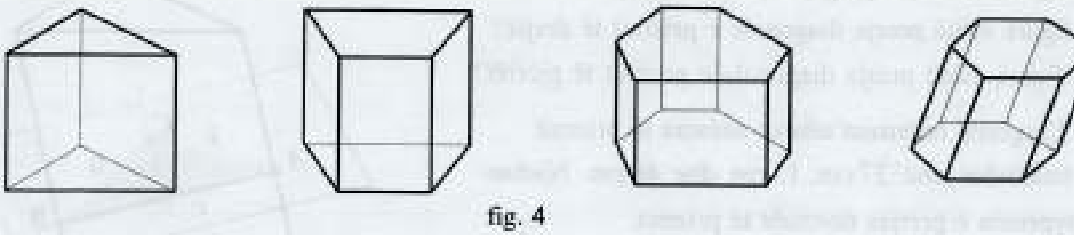


fig. 4

- Sa tehe gjithsej ka: prizmi trekëndor, katërkëndor, $n-$këndor?
- Një prizëm gjithsej ka 24 tehe. Cili është ai prizëm?
- A ekziston prizëm i cili ka gjithsej 14 tehe?

■ Në fig. 5 janë dhënë disa lloje të prizmit katërkëndor.

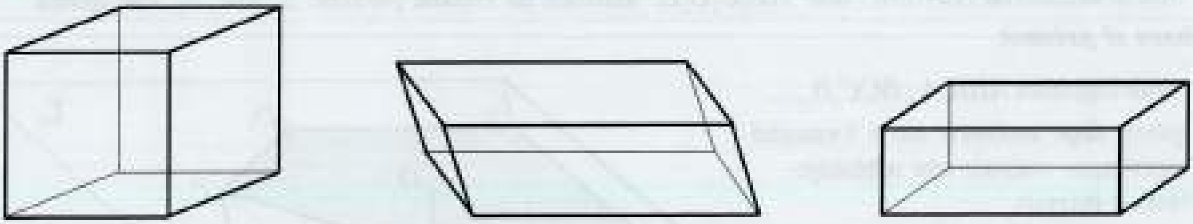


fig. 5

- Çka është kubi, çka është paralelopipedi, kurse çka është paralelopipedi kënddrejt (kuadri)?

B Nëse prizmi pritet me një rrafsh Σ, atëherë pjesa e përbashkët e prizmit dhe rrafshit është një shumëkëndësh konveks e cila quhet ***prerje e prizmit me rrafsh.***

Varësisht prej pozitës së rrafshit Σ në lidhje me prizmin, dallojmë:

- ***prerja paralele***, nëse rrafshi Σ është paralelel me bazat e prizmit (fi.g 6a);
- ***prerja normale***, nëse rrafshi Σ është normal në tehun anësor të prizmit (fig., 6b);
- ***prerja diagonale,*** nëse rrafshi Σ kalon nëpër dy tehe anësore jofqinje të prizmit (fig. 6c);
- ***prerja e pjerrët***, nëse rrafshi Σ i pret të gjitha tehet anësore të prizmit, por nuk është paralel me bazat e tij (fig.6ç).

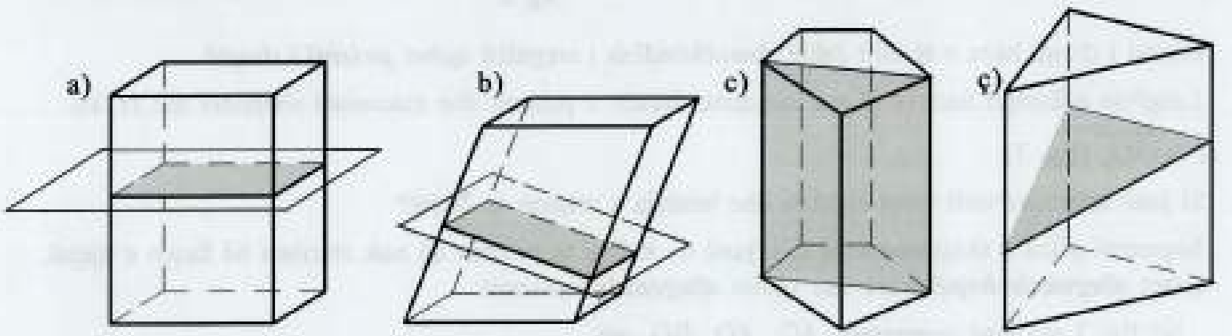


fig. 6

- Te cili prizëm nuk mund të konstruktohet prerja diagonale dhe pse?
- Cila figurë është prerje paralele e prizmit?
- Cia figurë është prerje diagonale e prizmit të drejtë?
- Cila figurë është prerja diagonale e prizmit të pjerrët?

5 Largësitë ndërmjet teheve anësore të prizmit trekëndor janë $37\,cm$, $13\,cm$ dhe $40\,cm$. Njehso syprinën e prerjes normale të prizmit.

Vëre zgjidhjen.

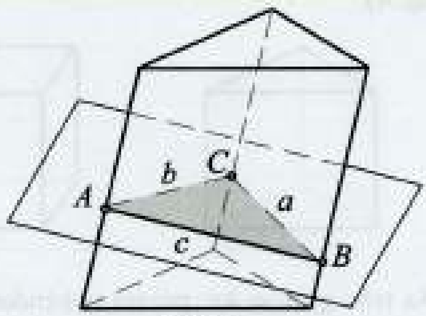


fig. 7

■ Faqet anësore të prizmit janë paralelograme.

Largësitë e dhëna janë, në realitet, lartësitë e paralelogramëve, pra ΔABC (fig. 7) është një prerje normale e prizmit.

Syprinën e trekëndëshit ABC e njehsojmë sipas formulës së Heronit dhe kemi:

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ për } s=\frac{37+13+40}{2}=45, \text{ d.m.th. } S=\sqrt{45\cdot 8\cdot 32\cdot 5}=240cm^2.$$

2 Njehso syprinën e prerjes paralele të prizmit të pjerrët trekëndor, me tehe të bazës 10 cm, 17 cm dhe 21 cm.

3 Cakto gjatësinë e diagonales së paralelopipedit kënndrejt me dimenzione: 2 m, 3m dhe 6 m.

Vëre zgjidhjen:

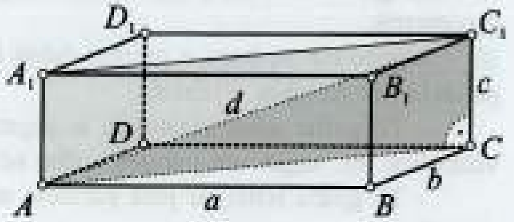


fig.7

■ Diagonlja e kuadrit është edhe diagonalja e prerjes diagonale të kuadrit, d.m.th. $d=\overline{AC_1}$ (fig. 7).

Prej ΔACC_1 vijon $d^2=\overline{AC}^2+\overline{CC_1}^2$, kurse prej ΔABC vijon $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=a^2+b^2$, pra

$d^2=a^2+b^2+c^2$, d.m.th. $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Domethënë, $d=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7\,m$.

● Sa prerje diagonale ka kuadri dhe si janë ato ndërmjet vedi?

4 Cakto diagonalen e kubit me tehun $a=7$ cm.

5 Lartësia e prizmit të drejtë është 2 dm, kurse baza e tij është romb. Cakto tehun e bazës të prizmit nëse diagonalet janë 5 dm dhe 8 dm.

Vëre zgjidhjen:

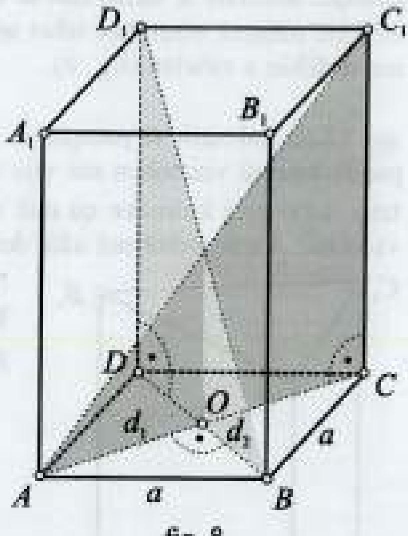


fig. 8

■ Pasi prizmi është i drejtë, tehet anësore janë normale në bazat, pra trekëndëshat ACC_1 dhe BDD_1 janë drejtkëndësha (fig. 8).

Diagonalet e rombit janë të ndryshme, domethënë prerjet diagonale ACC_1A_1 dhe BDD_1B_1 janë të ndryshëm, pra

$$\overline{AC_1}=8\,cm,\ \overline{BD_1}=5\,cm.$$

Prej ΔACC_1 vijon $\overline{AC}^2=\overline{AC_1}^2-\overline{CC_1}^2=8^2-2^2=60.$

Prej ΔBDD_1 vijon $\overline{BD}^2=\overline{BD_1}^2-\overline{DD_1}^2=5^2-2^2=21.$

Prej ΔABO vijon:

$$\overline{AB}^2=\left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2+\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2=\frac{81}{4}, \text{ d.m.th. } a=\overline{AB}=\sqrt{\frac{81}{4}}=4{,}5cm.$$

Mbaj mend!

Drejtëza e cila është normale në rrafsh, normale është në të gjitha drejtëzat që shtrihen në rrafsh dhe kalojnë nëpër pikën e depërtimit.

C Shqyrtimi i figurave paraprake japin mundësi të fitosh parafytyrim hapësinor për trupin gjeometrik të vizatuar në rrafshin e fletës së fletores. Në detyrën që vijon do të ndihmojnë të vizatosh trup gjeometrik.

6 Vizato prizëm të drejtë katërkëndor me lartësi 5 *cm*, kurse baza e tij është drejtkëndësh me dimenzione $a = 4$ *cm* dhe $b = 3$ *cm*.

Vëreji kahët:

- Trupin gjeometrik e vështrojmë në lidhje me dy rrafshe: horizontale, që e identifikojmë me bangën te e cila gjendet fletorja, dhe vertikale, që e identifikojmë me tabelën në të cilën vizatohet trupi gjeometrik.
- Supozojmë se baza e prizmit është horizontale, kurse një faqe e tij anësore është vertikale, d.m.th. paralele me rrafshin e tabelës.

- Të gjitha tehet vizatohen si segmente dhe poashtu, tehet që janë paralele ndërmjet vedi te trupi, vizatohen me segmente paralele edhe në vizatim.

- Të gjitha tehet që janë paralele me rrafshin e tabelës vizatohen paralele me të dhe në madhësi të vërtetë.

- Tehet horizontale që janë normale ndaj rrafshit të tabelës vizatohen nën këndin në krahasim me tehet që janë paralele me tabelën, të zvogëluara në krahasim me tehet e vërteta. Këndi dhe koeficienti i zvogëlimit meren çfarëdo,megjithatë vizatimi i mirë fitohet nëse këndi është 30^0, kurse koeficienti i zvogëlimit është 0,5. Shpeshherë meret këndi prej 45^0 ose 60^0, kurse koeficienti 1 : 3, 2 : 3.

- Prej pikave A, B, C dhe D, që janë kulme të bazës, tërhiqen normale të bazës dhe te ato bartet lartësia e prizmit. Në këtë mënyrë vizatohen tehet anësore dhe ato janë paralele me rrafshin e tabelës (fig. 9).

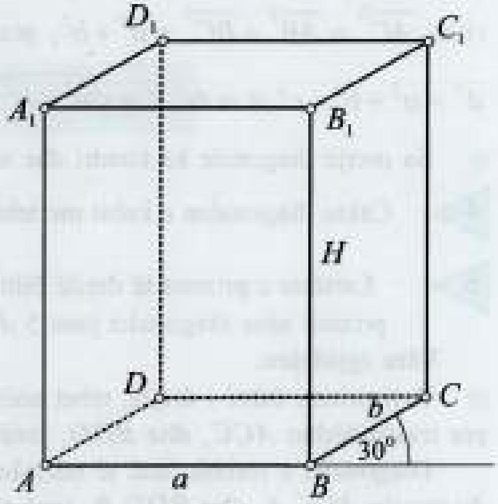


fig. 9

- Gjatë caktimit të pamjes së teheve, praktikohet tehet e padukshme të vizatohen me vija të ndërprera, kurse të atilla tehe dalin prej kulmeve që nuk shihen. Për të padukshmet llogaritet pikë që nuk shtrihet në konturën e vizatimit, kurse është më afër deri te rrafshi i vizatimit.

Në rastin tonë kontura është vija e thyer $ABCC_1D_1A_1$.

Kontura është gjithmonë e padukshme. Në figurat 10 dhe 11 është paraqitur prizmi i rregulltë i drejtë me tehe të bazës 3 *cm* dhe lartësi 5 *cm*.

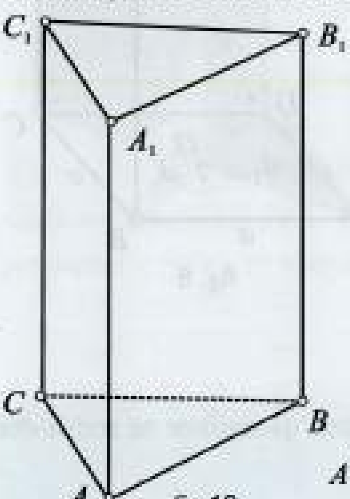


fig.10

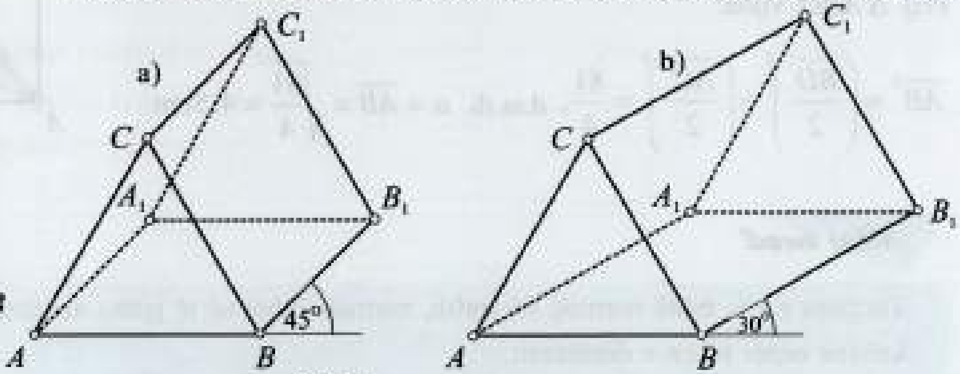


fig.11

- Në lidhje me fig. 10 dhe fig. 11 vëre cila faqe është horizontale, kurse cila faqe është paralele me rrafshin e vizatimit.

8 Bëne skicën e prizmit të drejtë gjashtëkëndor me teh të bazës 3 cm dhe lartësin 5 cm.

Detyra:

(1) Baza e prizmit të drejtë është romb me diagonale 10 cm dhe 24 cm. Njehso perimetrin dhe syprinën e një prerje paralele të prizmit.

(2) Është dhënë prizmi trekëndor me tehe të barabarta (tehu i bazës dhe tehu anësor janë të barabartë) me teh $a = 4\ cm$. Njehso syprinën e prerjes që kalon nëpër boshtin e një tehu anësor të prizmit.

(3) Tehu anësor i një prizmi të pjerrët është 15 cm dhe me rrafshin e bazës formon kënd $\alpha = 30^0$. Cakto lartësinë e prizmit.

(4) Skicco prizmin e drejtë gjashtëkëndor me teh të bazës $a = 2\ cm$ dhe lartësin $H = 6\ cm$, ashtu që një faqe anësore është horizontale, kurse bazat janë paralele në vizatim.

2 SYPRINA DHE VËLLIMI I PRIZMIT

Kujtohu!

- Me çfarë figura kufizohet prizmi?
- Si njehsohet syprina e paralelogramit?
- Si njehsohet syprina e trekëndëshit?

1 Njehso syprinën e prizmit të drejtë baza e të cilit është drejtkëndësh me dimenzione $a = 6\ cm$ dhe $b = 8\ cm$, kurse lartësia e prizmit është e barabartë me diagonalen e bazës, d.m.th. $H = d$..

Vëre zgjidhjen:

■ Syprina e prizmit është e barabartë me shumën e syprinave të bazave të faqeve anësore.

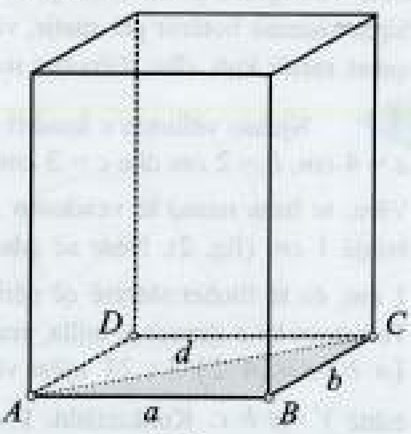


fig.1

Nëse me B e shënojmë syprinën e njërës bazë, atëherë $B = a \cdot b$, d.m.th. $B = 48 cm^2$.

- Çfarë figura janë faqet anësore dhe si janë ato ndërmjet vedi?

Është e qartë, $M = 2a \cdot H + 2b \cdot H$, kurse prej kushtit vijon

$H = d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 cm$.

Domethënë, $M = 2 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 10 = 280 cm^2$. Pra, syprina e prizmit është $S = 2B + M = 2 \cdot 48 + 280 = 376 cm^2$.

Mbaj mend!

Syprina e prizmit njehsohet me formulën $S = 2B + M$, ku B është syprina e bazës, kurse M është syprina e sipërfaqes anësore.

2 Njehso syprinën e prizmit të rregulltë trekëndor me tehe të bazës 51 cm, 30 cm dhe 27 cm, dhe tehun anësor 40 cm.

3 Trego se syprina e kuadrit me dimenzione a, b dhe c njehsohet me formulën $S = 2(ab + ac + bc)$, kurse e kubit me tehun a njehsohet me formulën $S = 6a^2$.

Faqet anësore të prizmit të drejtë janë drejtkëndësha, pra

$$M = aH + bH + cH + ...,$$
$$M = (a+b+c+...)\cdot H,$$
$$M = P \cdot H,$$

ku P është perimetri i bazës, kurse H lartësia e prizmit..

Faqet anësore të prizmit të pjerrët janë paralelogram, pra

$$M = a_1 \cdot s + b_1 \cdot s + c_1 \cdot s + ...,$$
$$M = (a_1 + b_1 + c_1 + ...)\cdot s,$$
$$M = P_1 \cdot s,$$

ku P_1 është perimetri i një prerje normale, kurse s është gjatësia e tehut anësor.

Kujtohu!

- Cila është njësia themelore për vëllimin, cilët janë më të voglat, kurse cilat më të mëdhaja?
- Çka është trup gjeometrik?

Në shkollën fillore vëllimin e prizmit e njehsove me formulën $V = B \cdot H$, B është syprina e bazës, kurse H është lartësia e prizmit.

A Pjesa e kufizuar dhe e mbyllur nga hapësira quhet trup gjeometrik.

Madhësia e pjesës së kufizuar paraqet vëllimin e trupit gjeometrik.

Domethënë, çdo trupi gjeometrik mund t,i shoqërohet numër real pozitiv V, ashtu që:

1) $V > 0$, për çdo trup gjeometrik;

2) trupat e puthitshëm kanë vëllime të barabarta;

3) nëse trupi përbëhet prej dy ose më shumë pjesë përbërëse të cilat nuk kanë pika të brendshme të përbashkëta, atëherë vëllimi i trupit është i barabartë me shumën e vëllimeve të atyre pjesëve;

4) kubi me teh1 m e ka vëllimin 1 m^3.

Këto veti njihen si ***aksioma për vëllimin***.

Sipas sistemit botëror për matje, vëllimi i kubit me teh 1 m meret si njësi themelore matëse për vëllim dhe quhet metër kub, dhe shënohet me 1 m^3.

4 Njehso vëllimin e kuadrit me dimenzione: $a = 4\ cm$, $b = 2\ cm$ dhe $c = 3\ cm$.

Vëre, te baza mund të vendosen $a \cdot b = 4 \cdot 2 = 8$ katrorë me brinjë 1 cm (fig. 2). Nëse në çdo katror vendosen kube me teh 1 cm, do të fitohet shtresë që përmban $a \cdot b = 8$ njësi vëllimore. Te katrori ka c shtresa të atilla, prandaj mund të vendosen gjithsej $(a \cdot b)\cdot c = (4 \cdot 2)\cdot 3 = 24$ njësi vëllimore. Pra vëllimi i kuadrit është $V = a \cdot b \cdot c$. Konkretisht, $V = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24 cm^3$.

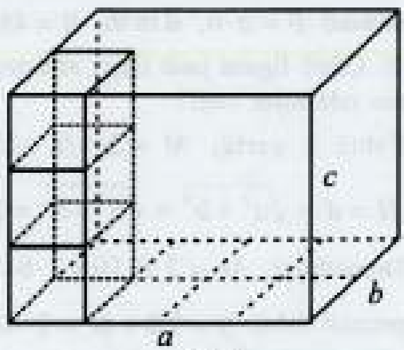


fig.2

Formula $V = a \cdot b \cdot c$ është e saktë edhe në rastin kur a, b dhe c janë çfarëdo numra real pozitiv, kurse saktënë e këtij gjykimi nuk do ta vërtetojmë.

5 Vërteto se vëllimi i kubit me teh a njehsohet me formulën $V = a^3$.

Pasi syprina e bazës së kuadrit është $B = a \cdot b$, kurse lartësia është e barabartë me tehun e tretë, d.m.th. $c = H$, vijon se formula për njehsimin e vëllimit të kuadrit është $V = B \cdot H$.

Mbaj mend!

Vëllimi i prizmit njehsohet me formulën $V = B \cdot H$, ku B është syprina e bazës, kurse H është lartësia e prizmit.

Saktësia e këtij gjykimi vijon prej gjykimit të matematikanit italjan Bonaventura Kavalijeri (1599-1647), prandaj edhe sot e mban emrin e tij.

Principi i Kavaliotit thotë: *Nëse dy trupa G_1 dhe G_2 mund të vendosen në pozitë të atillë, ashtu që prerjet e të dy trupave me çfarëdo rrafsh që është paralel me rrafshin e dhënë janë figura të cilat kanë syprina të barabarta, atëherë vëllimet e të dy trupave G_1 dhe G_2 janë të barabarta* (fig. 3). Saktësin e këtij gjykimi nuk e vërtetojmë.

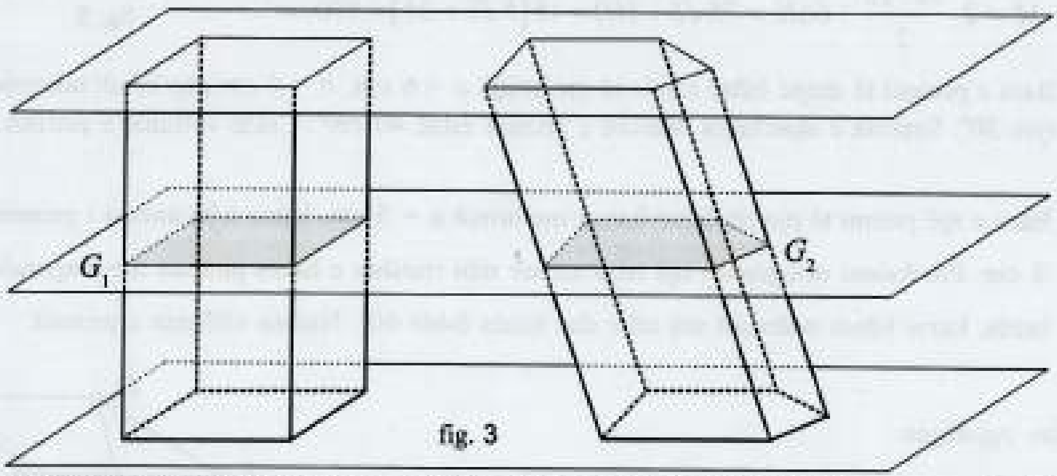


fig. 3

Pasi ekzistojnë figura që kanë syprina të barabarta edhe pse nuk janë të puthitshme, pra, për çdo prizëm ekziston kuadër përkatës që e kënaq principin e Kavalitotit. Prej këtu vijon saktësia e gjykimit për njehsimin e vëllimit të prizmit.

6 Prerja diagonale e kuadrit është katror, kurse tehet e bazës janë 15 cm dhe 8 cm. Njehso vëllimin e kuadrit.

Vëre zgjidhjen:

Prej kushtit të detyrës vijon se $d = H$ (fig. 4).

Prej ΔABC vijon $d^2 = a^2 + b^2$, d.m.th.

$d = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17\,cm$, pra $V = a \cdot b \cdot H$, përkatësisht

$$V = 15 \cdot 8 \cdot 17 = 2040\,cm^3.$$

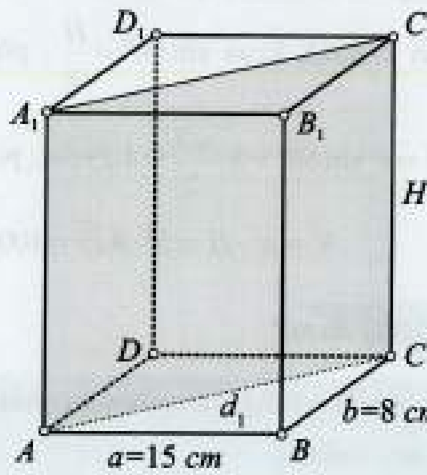


fig.4

7 Tre kube prej mesingu me tehe 3 cm, 4 cm dhe 5 cm janë shkrirë në një kub. Cakto tehun e atij kubi.

8 Tehu i bazës të prizmit të rregulltë gjashtëkëndor është 5 cm, kurse diagonalja e faqes anësore është 13 cm. Njehso vëllimin dhe syprinën e prizmit.

Vëre zgjidhjen:

- Vëllimi i prizmës është $V = B \cdot H$.

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{2}\sqrt{3}\,cm^2.$$

- Faqet anësore të prizmit janë drejtkëndësha, pra prej trekëndëshit CDD_1 (fig. 5) vijon:

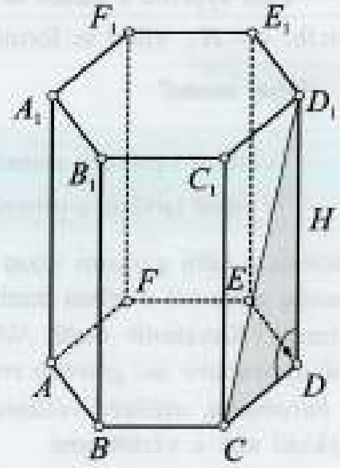


fig. 5

$$H = \overline{DD_1} = \sqrt{\overline{CD_1}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,cm.$$ Prandaj,

$$V = B \cdot H = \frac{75}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 12 = 450\sqrt{3}\,cm^3.$$

$$S = 2B + M = 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6aH = 75\sqrt{3} + 360 = 15\left(5\sqrt{3} + 24\right) \approx 490\,cm^2.$$

9 Baza e prizmit të drejtë është romboid me brinjë $a = 6$ cm, $b = 4$ cm dhe këndi ndërmjet tyre 30^0. Syprina e sipërfaqes anësore e prizmit është 40 cm^2. Cakto vëllimin e prizmit.

10 Baza e një prizmi të pjerrët është katror me brinjë $a = 5$ cm, kurse tehu anësor i prizmit është 8 cm. Proeksioni ortogonal i një tehu anësor mbi rrafshin e bazës puthitet me diagonalen e bazës, kurse këndi ndërmjet atij tehu dhe bazës është 60^0. Njehso vëllimin e prizmit.

Vëre zgjidhjen:

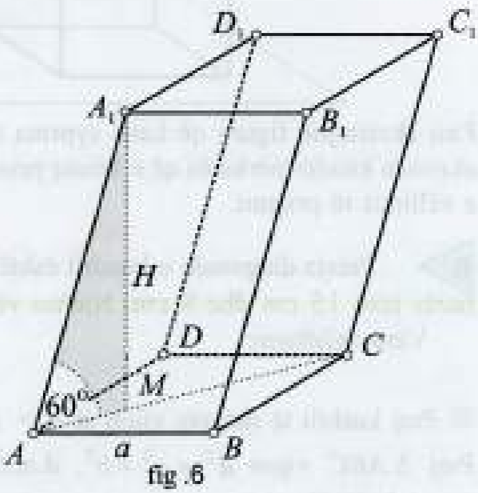


fig .6

- Që ta njehsojmë vëllimin $V = B \cdot H$, duhet ta caktojmë lartësinë H të prizmit. Segmenti AM le të jetë proeksioni ortogonal i tehut AA_1 (fig. 6).

Prej ΔAMA_1 kemi $\sin 60^0 = \frac{H}{s}$, përkatësishtr

$$H = s \cdot \sin 60^0 = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,cm.$$ Prandaj,

$$V = a^2 \cdot H = 5^2 \cdot 4\sqrt{3} = 100\sqrt{3}\,cm^3.$$

Mbaj mend!

Këndi ndërmjet drejtëzës dhe rrafshit është këndi që drejtëza e formon me proeksionin ortogonal mbi rrafshin.

Detyra:

1. Cakto vëllimin e kubit nëse:

a) syprina e kubit është $24\,m^2$;

b) prerja diagonale e kubit e ka syprinën $16\sqrt{2}\,m^2$;

c) diagonalja e një faqe anësore është $6\,m$.

2. Dimenzionet e një kuadri qëndrojnë si $3:4:7$, kurse syprina e tij është $1098\,m^2$. Cakto vëllimin e kuadrit.

3. Baza e një prizmi katërkëndor të pjerrët është trapez barakrahas me tehe të bazave 44 *cm*, 28 *cm* dhe krahun 17 *cm*. Një prerje diagonale e prizmit është romb me këndin e ngushtë prej 45^0 dhe ai është normal në bazën. Cakto syprinën e prizmit.

4. Largësitë ndërmjet teheve të prizmit trekëndor të pjerrët janë 37 *cm*, 15 *cm* dhe 26 *cm*. Syprina e sipërfaqes anësore është e barabartë me syprinën e prerjes normale. Cakto vëllimin e prizmit.

5. Cakto syprinën dhe vëllimin e prizmit katërkëndor të rregulltë diagonalja e të cilit është 7 *cm*, kurse diagonalja e një faqe anësore është 5 *cm*.

3 PIRAMIDA. PRERJET E PIRAMIDËS ME RRAFSHIN

Kujtohu!

- Në fig. 1 është paraqitur piramida pesëkëndore.
- Cila figurë është baza e piramidës?
- Cilat figura janë faqet anësore të piramidës?
- Si quhen segmentet *AB, BC, CD, ...*, kurse si segmentet *SA, SB, SC, ...*?
- Ku gjendet qendra e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit?

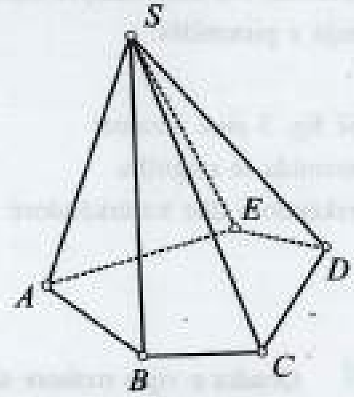


fig.1

A Vëren se piramida është trup gjeometri tehor, d.m.th. poliedër.

Mbaj mend!

Piramida është poliedër i kufizuar me një shumëkëndësh konveks, kurse faqet tjera janë trekëndësha që kanë kulm të përbashkët dhe nga një brinjë të përbashkët me shumëkëndëshin.

Në fig. 2 është dhënë piramida katërkëndore.

- Katërkëndëshi *ABCD* quhet ***baza e piramidës***.
- Trekëndëshat *ABS, BCS* ,... quhen ***faqe anësore*** dhe ato e përbëjnë ***mbështjellësin*** e piramidës. Pika e tyre e përbashkët S quhet ***maja e piramidës***.

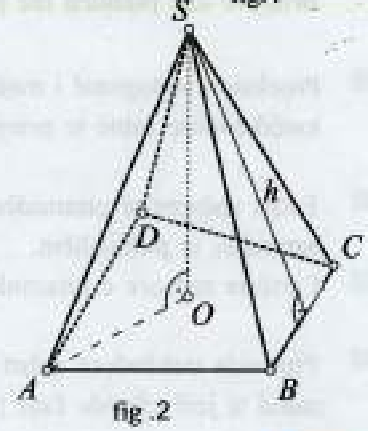


fig .2

- Largesa prej majës të piramidës deri te baza e saj quhet ***lartësia e piramidës*** dhe shënohet me H. Domethënë, $\overline{SO} = H$.
- Largësia prej majës të piramidës deri te tehu i bazës (lartësia e faqes anësore) quhet ***lartësia anësore***.
- Sipas formës së bazës, piramida mund të jetë: trekëndore, katërkëndore, pesëkëndore etj.

Mbaj mend!

Piramida baza e së cilës është shumëkëndësh i rregulltë, kurse tehet anësore janë të barabarta ndërmjet vedi quhet ***piramidë e rregulltë***.

B Gjatë të vizatuarit e piramidës veprojmë në mënyrë të ngjashme sikurse te vizatimi i prizmit.

- Bazën e piramidës e vendosim në pozitë horizontale, kurse lartësinë e vizatojmë normal në bazën, d.m.th. paralel me rrafshin e vizatimit.

- Prej pikës rënzë të lartësisë (proeksioni ortogonal i majës) tërhiqet normale në bazën dhe në të bartim lartësinë. Në këtë mënyrë është caktuar maja e piramidës.

Në fig. 3 janë vizatuar piramida të rregullta trekëndore dhe katërkëndore.

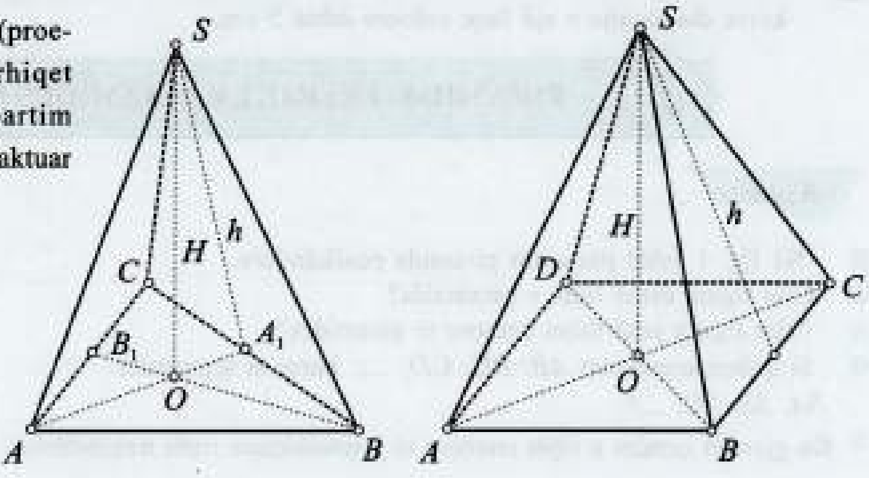


fig .3

- Qendra e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit barabrinjës është te prerja e simetraleve të brinjëve dhe puthiten me pikën e rëndimit të trekëndëshit. Domethënë, rënza e lartësisë është te baza.

- Proeksioni ortogonal i majës te piramida e rregulltë katërkëndore është te prerja e diagonaleve të bazës.

- Faqet anësore të piramidës së rregulltë janë trekëndësha bararahas të puthitshëm.
- Lartësia anësore e piramidës quhet apotemë.

- Piramida trekëndore quhet edhe ***tetraedër***, kurse baza e tij mund të jetë çfarëdo faqe (fig. 4).

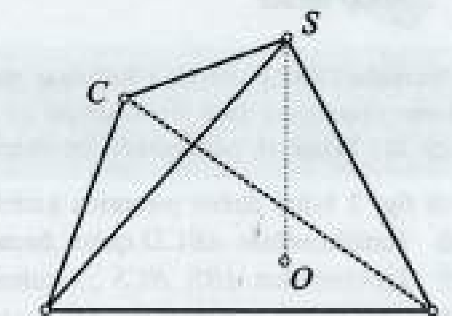


fig .4

Mbaj mend!

Tetraedri faqet e të cilit janë trekëndësha barabrinjës quhet ***tetraedër i rregullt***.

- Çka është ndryshimi ndërmjet piramidës së rregulltë trekëndore dhe tetraedrit të rregulltë?

C Nëse piramida pritet me rrafshin Σ, atëherë pjesa e tyre e përbashkët është shumëkëndësh dhe quhet prerja e piramidës.

Prerja mund të jetë:

- paralele, nëse rrafshi Σ është paralel me bazën e piramidës;
- dijagonale, nëse rrafshi Σ kalon nëpër dy tehe të tij jofqinje.

Prerja dijagonale e çdo piramide është trekëndësh.

Për prerjen diagonale të piramidës me rrafsh vlen kjo:

Teoremë: Nëse piramida pritet me rrafsh që është paralel me bazën, atëherë:
1) tehet anësore dhe lartësia me prerjen janë ndarë në segmenta proporcional;
2) baza dhe prerja janë shumëkëndësha të ngjashëm;
3) syprina e prerjes dhe syprinës të bazës qëndrojnë si katrorët e largesave të tyre deri te maja e piramiddës.

Vërtetimi. Shumëkëndëshi $A_1B_1C_1D_1E_1$ le të jetë një prerje paralele e piramidës (fig. 5).

1) Prej kushtit për paralelizëm të rrafshit Σ dhe baza e piramidës vijon:

$A_1O_1 \parallel AO$, $B_1O_1 \parallel BO$,..., pra $\Delta SA_1O_1 \sim \Delta SAO$,

$\Delta SB_1O_1 \sim \Delta SBO$,...Prej këtu kemi:

$\dfrac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}} = \dfrac{\overline{SO_1}}{\overline{SO}}$; $\dfrac{\overline{SB_1}}{\overline{SB}} = \dfrac{\overline{SO_1}}{\overline{SO}}$; $\dfrac{\overline{SC_1}}{\overline{SC}} = \dfrac{\overline{SO_1}}{\overline{SO}}$;..., d.m.th.

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC}} = \dots = \frac{\overline{SO_1}}{\overline{SO}}.$$

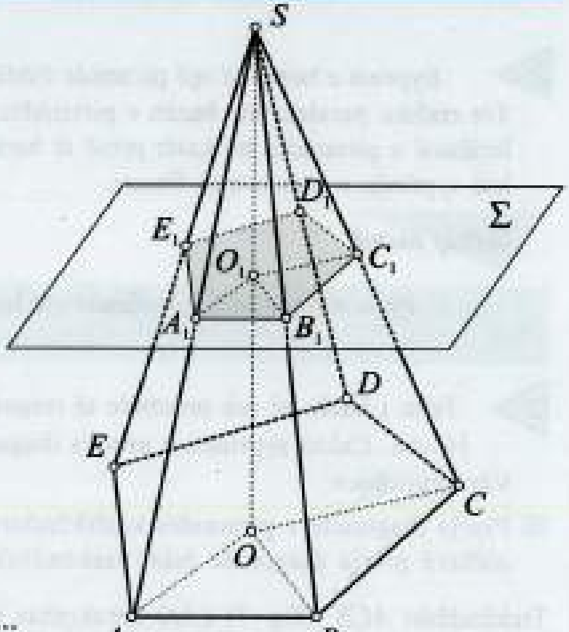


fig.5

2) Prej kushtit për paralelizëm vijon:

$A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$,..., pra

$\Delta SA_1B_1 \sim \Delta SAB$, $\Delta SB_1C_1 \sim \Delta SBC$, $\Delta SC_1D_1 \sim \Delta SCD$,...

Prej këtu vijon $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{SB_1}}{\overline{SB}}$; $\dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{SB_1}}{\overline{SB}} = \dots$ d.m.th. $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}} = \dots$ Poashtu,

$\measuredangle A_1B_1C_1 = \measuredangle ABC$, $\measuredangle B_1C_1D_1 = \measuredangle BCD$, $\measuredangle C_1D_1E_1 = \measuredangle CDE$, si kënde me rah reciprokisht paralel.

Prandaj, shumëkëndëshat $ABCDE$ dhe $A_1B_1C_1D_1E_1$ kanë brinjë proporcionale dhe kënde të barabarta. Për këtë shkak vijon se ato janë të ngjashëm.

3) Është e njohur vetia: syprinat e shumëkëndëshave të ngjashëm qëndrojnë si katrorët e brinjëve përkatëse. Prandaj kemi:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A_1B_1}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B_1C_1}^2}=\dots,\ \text{por pasi}\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{SA_1}}=\frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}},\ \text{vijon}\ \frac{S}{S_1}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2},$$ ku S është syprina bazës, kurse S_1 është syprina e prerjes paralele.

1 Lartësia e një piramide është 16 cm, kurse syprina e bazës së tij është 512 cm^2. Në çfarë largësie prej bazës gjendet prerja paralele syprina e së cilës është 50 cm^2?

Vëre zgjidhjen:

Pasi lloji i piramidës këtu nuk ka rëndësi, prandaj sipas teoremës kemi (fig. 6):

Për $S = 512cm^2$, $S_1 = 50cm^2$ dhe $H = 16\,cm$, kemi:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}\ \text{ose}\ \frac{512}{50}=\frac{16^2}{\overline{SO_1}^2},\ \text{përkatësisht}\ \overline{SO_1}^2=\frac{16^2\cdot 50}{512},$$

d.m.th. $\overline{SO_1}=\sqrt{\dfrac{16^2\cdot 25}{256}}=5\,cm.$ Vijon, $\overline{OO_1}=16-5=11\,cm.$

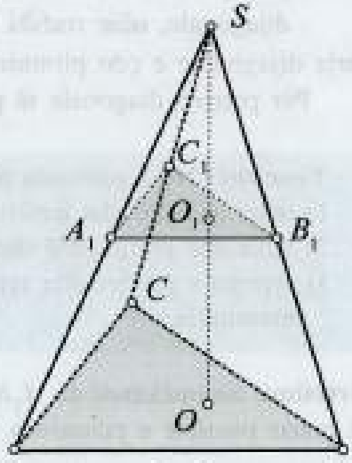


fig.6

2 Syprina e bazës së një piramide është 144 cm^2. Tre rrafshe paralele me bazën e piramidës, e ndajnë lartësinë e piramidës në katër pjesë të barabarta. Njehso syprinën e prerjeve të fituara.

Mbaj mend!

Pjesa e piramidës e kufizuar me bazën dhe një prerje paralele quhet ***piramidë e cunguar***.

3 Tehu i bazës së një piramide të rregulltë katërkëndore është 14 cm, kurse tehu i bazës është 10 cm. Cakto syprinën e prerjes diagonale dhe lartësisë anësore të piramidës.

Vëre zgjidhjen:

Prerja diagonale e piramidës katërkëndore është e rregulltë, atëherë prerja diagonale është trekëndësh barakrahas.

Trekëndëshi ACS (fig. 7) është barakrahas me bazë $d=\overline{AC}$.

Prej ΔABC vijon $\overline{AC}^2=a^2+a^2$, pra

$d=a\sqrt{2}=14\sqrt{2}\,cm.$

Prej ΔAOS kemi:

$$H^2=s^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2,\ \text{т.е.}\ H=\sqrt{10^2-\left(7\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}\,cm.$$

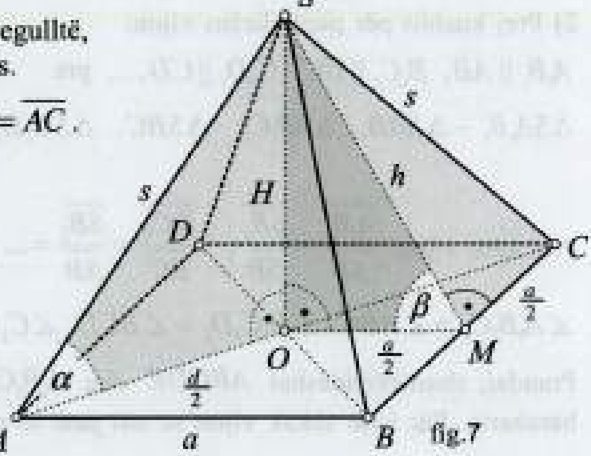


fig.7

Pra, $S=\frac{1}{2}d\cdot H=\frac{1}{2}\cdot 14\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=14\,cm^2$.

Prej trekëndëshit SMC kemi: $h^2=s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$, d.m.th. $h=\sqrt{10^2-7^2}=\sqrt{51}\,cm$.

Vëre relacionet ndërmjet elementeve të piramidës së rregulltë katërkëndore (fig. 7):

$$\text{Prej } \Delta AOS: s^2=H^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2; \text{ prej } \Delta SMC: s^2=h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2; \text{ prej } \Delta SOM: h^2=H^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Këndi α është këndi që e formon tehu anësor me bazën e piramidës, kurse këndi β është këndi që e formon faqeja anësore me bazën e piramidës.

4 Njehso lartësinë dhe apotemën e piramidës së rregulltë trekëndore me tehun e bazës $a=12\,cm$ dhe tehun anësor $s=10\,cm$.

Në përgjithësi, që të caktohen disa elemente të çfarëdo piramide, duhet të vendoset ndonjë prerje të piramidës që i përmban elementet e kërkuara.
Në rastin e përgjithshëm, do ta shfrytëzojmë prerjen e piramidës me rrafsh që kalon nëpër një teh anësor dhe lartësin e tij (fig. 8).

Pika O është qendër e vijës rrethore të brendashkruar dhe jashtashkruar në bazën e piramidës, pra

$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\,cm$ dhe $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{12\sqrt{3}}{6}=2\sqrt{3}\,cm$.

Prej ΔAOS kemi: $H^2=s^2-R^2$, d.m.th.

$H=\sqrt{10^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{52}\,cm$. Prej ΔBSM vijon:

$h^2=s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$, d.m.th. $h=\sqrt{10^2-6^2}=8\,cm$.

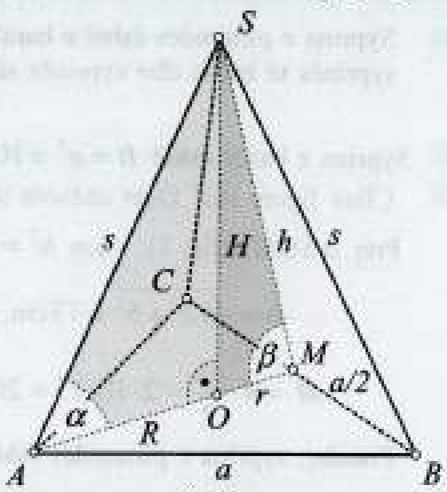


fig.8

Vëreji relacionet ndërmjet elementeve të piramidës së rregulltë trekëndore (fig. 8):

$$\text{Prej } \Delta SAO: s^2=H^2+R^2; \text{ prej } \Delta SBO: s^2=h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2; \text{ prej } \Delta SOM: h^2=H^2+r^2.$$

Detyra:

1. Vizato skicën e piramidës së rregulltë gjashtëkëndore me tehun e bazës 2 cm dhe lartësi 5 cm.
2. Syprina e një piramide është 150 cm^2, syprina e një prerje paralele është 54 cm^2, kurse largësia ndërmjet tyre është 14 cm. Cakto lartësinë e piramidës.
3. Tehu i bazës të piramidës së rregulltë katërkëndore është 16 cm, kurse lartësia është 12 cm. Një prerje paralele e piramidës e ka syprinën 120 cm^2. Cakto pjesën e tehut anësor të kufizuar ndërmjet prerjes dhe majës së piramidës.

4 Tehu anësor i piramidës së rregulltë gjashtëfaqësore me rrafshin e bazës formon kënd prej 60^0. Njehso syprinën e prerjes më të madhe diagonale të piramidës, nëse tehu i bazës është 6 cm.

5 Cakto lartësinë e piramidës baza e së cilës është drejtkëndësh me brinjë 8 cm dhe 6 cm, kurse çdo teh anësor është 13 cm.

4 SYPRINA DHE VËLLIMI I PIRAMIDËS

Kujtohu!

- Si njehsohet syprina e prizmit?
- Cilat figura janë kufi të piramidës?
- Si njehsohet syprina e trekëndëshit, kurse si e paralelogramit?

A **1** Është dhënë piramida e rregulltë katërkëndore me tehun e bazës $a = 10cm$ dhe lartësin $H = 12cm$. Njehso syprinën e piramidës.

Vëre zgjidhjen:

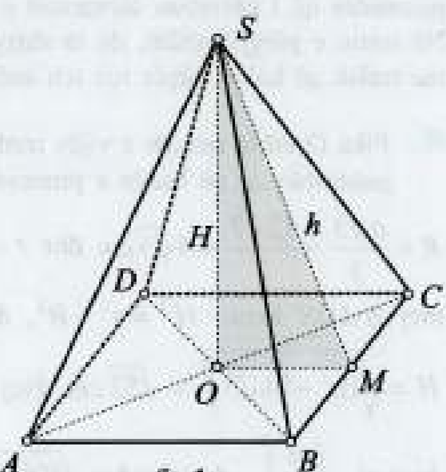


fig.1

- Syprina e piramidës është e barabartë me shumën e syprinës të bazës dhe syprinës së faqeve anësore.

- Syprina e bazës është $B = a^2 = 10^2 = 100cm^2$.
- Çfarë figure janë faqet anësore të piramidës?

Prej ΔSOM (fig. 1) vijon $h^2 = \overline{SO}^2 + \overline{OM}^2$, d.m.th.

$$h = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13cm, \text{ pra}$$

$$M = 4 \cdot \frac{ah}{2} = 2 \cdot 10 \cdot 13 = 260cm^2.$$

Prandaj, syprina e piramidës është

$$S = B + M = 100 + 260 = 360cm^2.$$

Mbaj mend!

Syprina e piramidës njehsohet me formulën $S = B + M$, ku B është syprina e bazës, kurse M është syprina e mbështjellësit të piramidës.

5 Tehet e bazës të piramidës trekëndore janë 13 cm, 14 cm dhe 15 cm, kurse lartësia është 3 cm. cakto syprinën e piramidës nëse rënza e lartësisë është në qendrën O të vijës rrethore të brendashkruar te baza.

- Udhëzim: Prej $S_\Delta = rs$ cakto rrezen r.

Le të jenë M, N dhe P pikat e rënzave të lartësive anësore të piramidës. Vërteto se trekëndëshat SOM, SON dhe SOP janë të puthitshëm etj.

Kujtohu!

- Si njehsohet vëllimi i prizmit?
- A mund të konstruktohet prerja diagonale e prizmit trekëndor?
- Si thotë principi i Kavaliotit?
- Në shkollën fillore ke njehsuar vëllimin e piramidës me formulën

$V=\frac{1}{3}B\cdot H$, ku B është syprina e bazës, kurse H është lartësia e piramidës.

- A mundet pjesa tjetër e prizmit të ndahet në dy pjesë?
- Çfarë vëllime kanë pjesët e fituara të piramidës?
- Pjesa tjetër është piramidë katërkëndore me bazë njehsohet syprina e prizmit ACC_1A_1 dhe majë B_1. Kjo piramidë mund të ndahet në dy pjesë me rrafshin që kalon nëpër kulmet A_1, C dhe B_1. Pjesët e fituara janë piramida me majë të përbashkët B_1, njëra për bazë e ka trekëndëshin ACA_1, kurse tjetra trekëndëshinCC_1A_1.

B Prizmi trekëndor në fig. 2 është prerë me rrafsh që kalon nëpër kulmet A, C dhe B_1. Në këtë mënyrë një pjesë e prizmit është piramida trekëndore me bazë ABC dhe majë B_1 (fig. 2).

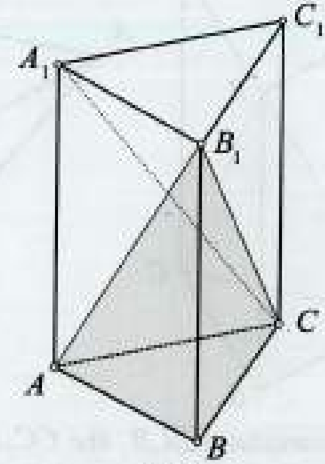


fig.2

Domethënë, prizmi trekëndor mund të ndahet në tre piramida trekëndore. Që të japim përgjigje në pyetjen e dytë, së pari do ta vërtetojmë këtë:

Teoremë: Nëse dy piramida kanë lartësi të barabarta dhe syprina të barabarta të bazave, atëherë prerjet e tyre paralele që janë në largësi të barabartë prej majës kanë syprina të barbarta.

Vërtetimi: Le të jetë $S_{ABCD}=S_{MNP}=B$, H është lartësia e piramidës, h është largësia prej majës deri te prerjet, dhe le të jenë B_1 dhe B_2 syprinat e prerjes paralele.

Sipas teoremës kemi:

$\frac{B}{B_1}=\frac{H^2}{h^2}$ i $\frac{B}{B_2}=\frac{H^2}{h^2}$, pra prej këtu vijon:

$$\frac{B}{B_1}=\frac{B}{B_2},\ \text{d.m.th. } B_1=B_2.$$

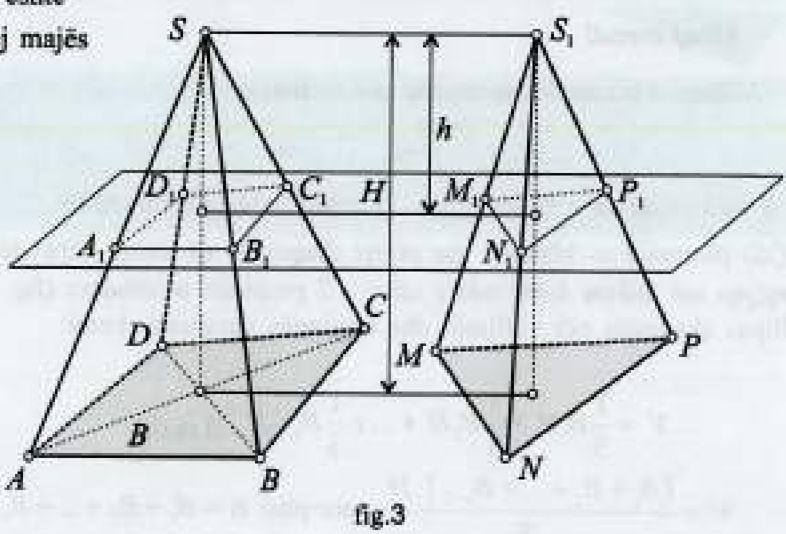


fig.3

Sipas parimit të Kavaliotit:

Dy piramida që kanë lartësi të barabarta dhe syprina të barabarta të bazave, kanë vëllime të barabarta.

T'i shqyrtojmë pjesët e prizmave të fituar në fig. 2, të paraqitura në fig. 4.

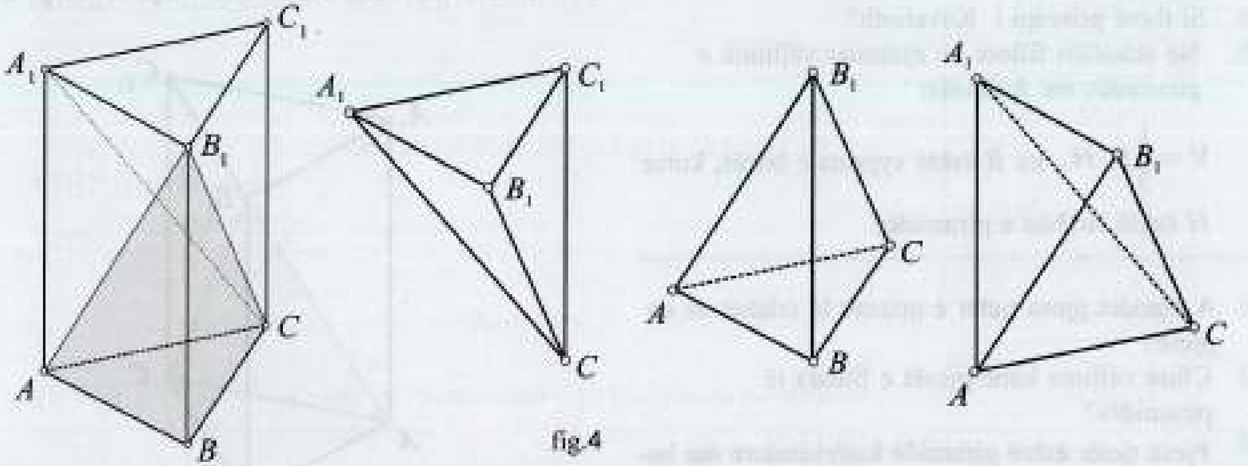


fig.4

Në fig. 2, piramidat ACA_1B_1 dhe $CC_1A_1B_1$ kanë majë të përbashkët B_1, domethënë lartësitë e tyre janë të barabarta, kurse bazat e tyre kanë syprina të barabarta, pasi $\Delta ACA_1 \cong \Delta CC_1A_1$.
Pra, $V_{ACA_1B_1} = V_{CC_1A_1B_1}$. Ngjashëm, piramidat $ABCB_1$ dhe $A_1B_1C_1C$ kanë lartësi të barabarta, kurse bazat e tyre janë të puthitshme, pasi ato janë bazat e prizmit, pra $V_{ABCB_1} = V_{A_1B_1C_1C}$.

Domethënë, ***piramidat e fituara trekëndore kanë vëllime të barabarta.***

Pasi vëllimi i prizmit është $V = B \cdot H$, vijon se vëllimi i çdo piramide të fituar trekëndore është një e treta e vëllimt të prizmit trekëndor.
Me këtë e vërtetuam këtë

Teoremë: Vëllimi i piramidës trekëndore është i barabartë me një të tretën e vëllimit të prodhimit të syprinës së bazës dhe gjatësisë së lartësisë së saj.

- Si do të njehsohet vëllimi i çfarëdo piramide?

Mbaj mend!

Vëllimi i piramidës njehsohet me formulën

$$V = \frac{B \cdot H}{3},$$

B është syprina e bazës, kurse H është lartësia e piramidës.

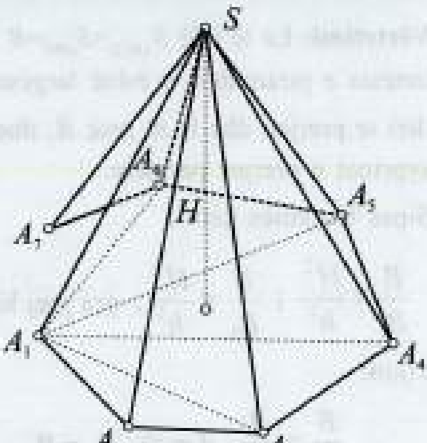


fig.5

Çdo piramidë n- këndore me prerje diagonale që kalon nëpër të njëjtin teh anësor është ndarë në n - 2 piramida trekëndore (fig. 5). Sipas aksiomës për vëllimin dhe teoremës paraprake kemi:

$$V = \frac{1}{3}B_1H + \frac{1}{3}B_2H + \ldots + \frac{1}{3}B_{n-2}H, \text{ d.m.th.}$$

$$V = \frac{(B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-2}) \cdot H}{3}, \text{ por pasi } B = B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-2} \text{ vijon } V = \frac{B \cdot H}{3}.$$

2 Tehet anësore të një piramide trekëndore kanë gjatësi të barabarta 14,5 cm, kurse baza e piramidës është trekëndësh kënddrejt me kateta12 cm dhe 16 cm. Cakto vëllimin e piramidës.

Vëre zgjidhjen:

Prej kushtit $\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}$ vijon se rënza e lartësisë së piramidës është në qendrën e vijës rrethore të jashtashkruar te baza (fig. 6). Pasi baza është trekëndësh kënddrejt, mesi O i hipotenuzës AB është qendra e vijës rrethore të jashtashkruar rreth bazës, pra $H=\overline{SO}$.

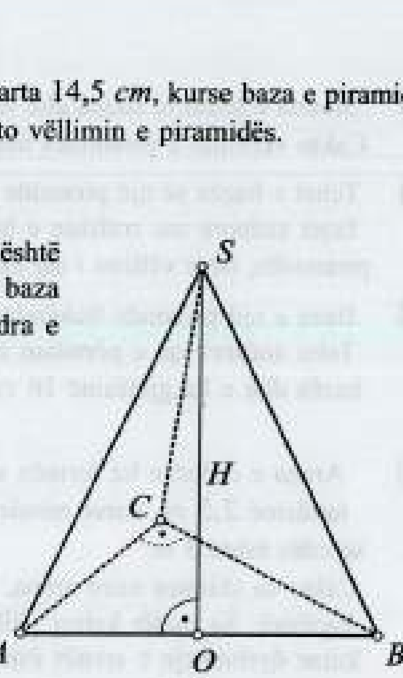


fig.6

Prej ΔABC kemi:

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20\,cm.$$

Prej ΔAOS vijon $\overline{SO}^2=\overline{SA}^2-\overline{AO}^2$, d.m.th.

$H=\sqrt{14,5^2-10^2}=10,5\,cm$, pra

$$V=\frac{1}{3}\cdot BH=\frac{1}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot H=\frac{12\cdot 16}{6}\cdot 10,5=336cm^3.$$

3 Cakto vëllimin dhe syprinën e piramidës së rregulltë trekëndore me tehun e bazës të gjatë 6 cm, kurse tehu anësor me rrafshin e bazës formon kënd prej 45^0.

Vëre zgjidhjen (fig. 7):

Segmenti AO është proeksioni ortogonal i tehut anësor AS mbi rrafshin e bazës. Pasi ΔABC është barabrinjës, vijon

$$\overline{AO}=R=\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}\,cm.$$

Prej trekëndëshit AOS vijon se $H=R=2\sqrt{3}$, pra

$$V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{3}=18cm^3.$$

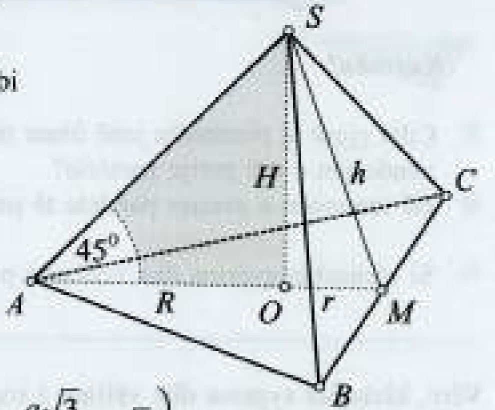


fig.7

Prej ΔSOM kemi: $h^2=\overline{SO}^2+\overline{OM}^2$, $\left(\overline{SO}=R=2\sqrt{3},\overline{OM}=r=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}\right)$,

përkatësisht $h=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{15}\,cm.$

$$S=B+M=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{ah}{2}=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{6\sqrt{15}}{2}=9\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)\approx 50,43cm^2.$$

***Detyra*:**

1. Njehso vëllimin e piramidës së rregulltë katërkëndore nëse dihet se:
   a) tehu i bazës është 2 cm, kurse lartësia është 3 cm;
   b) tehu i bazës dhe tehu anësor janë të barabartë me 12 cm;
   c) tehu i bazës është 24 cm, kurse prerja diagonale e ka syprinën 36 cm^2.

(2) Shuma e tehut të bazës dhe tehut anësor të një piramide të rregulltë katërkëndore është 5 dm. Cakto vëllimin e piramidës nëse syprina e saj është 16 dm^2.

(3) Tehet e bazës së një piramide trekëndore janë 26 cm, 51 cm dhe 55 cm. Këndet që i formojnë faqet anësore me rrafshin e bazës janë të barabartë ndërmjet vedi. Njehso syprinën anësore të piramidës, nëse vëllimi i saj është 2640 cm^3.

(4) Baza e një piramide trekëndore është trekëndësh barakrahas me bazë 70 cm dhe krah 37 cm. Tehu anësore që e përmban majën e bazës së trekëndëshit barakrahas është normal në rrafshin e bazës dhe e ka gjatësinë 16 cm. Cakto vëllimin dhe syprinën e piramidës.

(5) Arena e cirkut e ka formën e prizmës së rregulltë gjashtëkëndore me tehun e bazës 6 m dhe lartësinë 2,5 m, kurse mbulesa e arenës është mbështjellësi i piramidës gjashtëkëndore lartësia e së cilës është 3 m.
Cakto sa shiques nxen arena, nëse për çdo shiques duhet të sigurohet më së paku 3,5 m^3 hapësirë. Sa metër katror pëlhurë duhet për arenën, nëse 10% e përlhurës së përdorur hudhet, kurse dyshemeja e arenës është bërë prej tjetër materijali.

5 SYPRINA DHE VËLLIMI I PIRAMIDËS SË CUNGUAR

Kujtohu!

- Cilat pjesë të piramidës janë fituar me vendosjen e një prerje paralele?
- Në teoremën e prerjes paralele të piramidës.
- Si njehsohet syprina dhe vëllimi i piramidës?

A 1 Piramida e rregulltë katërkëndore me tehun e bazës 20 cm dhe lartësi 24 cm është prerë me rrafsh që është paralel me bazën. Prerja e ndan lartësinë e piramidës në dy pjesë të bara-barta. Njehso syprinën dhe vëllimin e pjesës së piramidës që është formuar ndërmjet bazës dhe prerjes paralele..

Vëre, kërkohet syprina dhe vëllimi i trupit gjeometrik $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 1).

Mbaj mend!

Një pjesë e piramidës që është formuar me bazën dhe me ndonjë prerje paralele quhet piramida e cunguar.

Le të jetë B syprina e bazës $ABCD$, B_1 është syprina e prerjes $A_1B_1C_1D_1$, kurse M është syprina e mbështjellësit. Atëherë syprina e piramidës së cunguar. është $S = B + B_1 + M$.

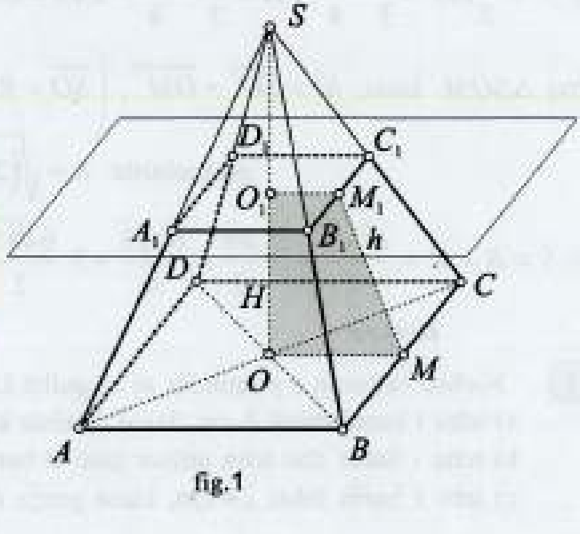


fig.1

Sipas teoremës për prerje paralele të piramidës kemi $B:B_1=\overline{SO}^2:\overline{SO_1}^2$.

Pasi $B=a^2=20^2=400\,cm^2$, fitojmë: $400:B_1=\overline{SO}^2:\left(\frac{1}{2}\overline{SO}\right)^2$, d.m.th.

$B_1=\dfrac{400\cdot\frac{1}{4}\overline{SO}^2}{\overline{SO}^2}=100\,cm^2$. Prej $B_1=a_1^{\,2}=100$, vijon se tehu i bazës më të vogël (të sipërme) të piramidës së cunguar është $a_1=10\,cm$, pra prej trapezit kënddrejt O_1OMM_1 (fig. 2) kemi: $\overline{OM}=\dfrac{a}{2}$, $\overline{O_1M_1}=\dfrac{a_1}{2}$, $\overline{NM}=\dfrac{a-a_1}{2}$ dhe $\overline{OO_1}=H=12\,cm$, ku H është lartësi e piramidës së cunguar.

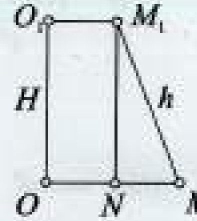


fig.2

Sipas teoremës për prerjen paralele, vijon se faqet anësore të piramidës së cunguar janë trapeza barakrahas, lartësia e të cilës është $h=\sqrt{H^2+\left(\dfrac{a-a_1}{2}\right)^2}=\sqrt{12^2-\left(\dfrac{20-10}{2}\right)^2}=13\,cm.$

Domethënë, $M=4\cdot\dfrac{(a+a_1)\cdot h}{2}=4\cdot\dfrac{(20+10)\cdot 13}{2}=780\,cm^2$, pra

$$S=B+B_1+M=400+100+780=1280cm^2=12{,}8dm^2$$

Vëllimi i piramidës së cunguar është i barabartë me ndryshimin e vëllimeve të gjithë piramidës dhe vëllimit të pjesës së prerë, d.m.th.

$$V=\frac{1}{3}B\cdot\overline{SO}-\frac{1}{3}B_1\cdot\overline{SO_1}=\frac{1}{3}(400\cdot 24-100\cdot 12)=2800\,cm^3=2{,}8\,dm^3.$$

- Vëre, piramida e cunguar është e rregulltë, nëse është pjesë e piramidës së rregulltë.
- Faqet anësore të piramidës së cunguar janë trapeza barakrahas, të puthitshëm ndëmjet vedi, pra

$M=n\cdot\dfrac{(a+a_1)\cdot h}{2}=\dfrac{(na+na_1)\cdot h}{2}=\dfrac{(P+P_1)\cdot h}{2}$, ku P është perimetri i bazës, P_1 është perimetri i bazës së sipërme, kurse h lartësia anësore (apotema).

Mbaj mend!

Syprina e piramidës së cunguar njehsohet me formulën $S=B+B_1+M$, ku B dhe B_1 janë syprinat e bazave, kurse M është syprina e faqeve anësore.

5 Lartësia e piramidës së rregulltë të cunguar gjashtëkëndore është 15 *cm*, tehu i bazës së vogël është 1 *cm*, kurse tehu anësor është 17 *cm*. Njehso syprinën e mbështjellësit të piramidës së cunguar.

B Le të jetë H lartësia e piramidës së cunguar dhe x le të jetë lartësia e pjesës së prerë e piramidës, atëherë

$$V=\frac{1}{3}B(H+x)-\frac{1}{3}B_1\cdot x,\text{ те. } V=\frac{1}{3}BH+\frac{1}{3}(B-B_1)x.$$

Prej teoremës për prerje paralele kemi:

$$\frac{B}{B_1}=\frac{(H+x)^2}{x^2},\text{ ose }\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}}=\frac{H+x}{x},\text{ d.m.th. } x=\frac{H\cdot\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}}=\frac{H\cdot\sqrt{B_1}\cdot\left(\sqrt{B}+\sqrt{B_1}\right)}{B-B_1},\text{ pra}$$

$$V=\frac{1}{3}\left(B+\sqrt{BB_1}+B_1\right)\cdot H.$$

Mbaj mend!

Vëllimi i piramidës së cunguar njehsohet me formulën

$$V=\frac{1}{3}\left(B+\sqrt{BB_1}+B_1\right)\cdot H,$$

ku B dhe B_1 janë syprinat e bazave, kurse H është lartësia e piramidës së cunguar.

3 Syprinat e bazave të një piramide të cunguar janë 245 dm^2 dhe 80 dm^2, kurse lartësia e gjithë piramidës (sëbashku me pjesën e prerë) është 35 dm. Cakto vëllimin e piramidës së cunguar.

Vëre zgjidhjen:

Prej $\dfrac{B}{B_1}=\dfrac{(x+H)^2}{x^2}$ kemi $\dfrac{245}{80}=\dfrac{35^2}{x^2}$, d.m.th. $x=20$, $H=35-20=15\,dm$, pra

$$V=\frac{1}{3}\left(245+\sqrt{245\cdot 80}+80\right)\cdot 15=2325\,dm^3.$$

Detyra.

1. Sa masë ka figura e bërë prej druri që e ka formën e piramidës së rregulltë gjashtëkëndore të cunguar me tehet e bazave 8 dm dhe 5 dm dhe tehun anësor 5 dm, nëse dendësia specifike e drurit është 0,075?

2. Njehso syprinën dhe vëllimin e piramidës së rregulltë katërkëndore të cunguar nëse apotema është 12 cm, tehu anësor 15 cm, kurse syprina e sipërfaqes anësore është 1008 cm^2.

3. Cakto vëllimin e piramidës së rregulltë trekëndore të cunguar, nëse tehet e bazave janë 30 dm dhe 20 dm, kurse syprina anësore është e barabartë me shumën e syprinave të bazave.

4. Lartësia e piramidës trekëndore të cunguar është 10 cm. Tehet e njërës bazë janë 27 cm, 29 cm dhe 52 cm, kurse perimetri i bazës tjetër është 72 cm. Cakto vëllimin e piramidës së cunguar.

5. Bazat e piramidës trekëndore të cunguar janë trekëndësha barabrinjës brinjët e të cilëve janë $a = 7\ cm$ dhe $a_1 = 3\ cm$. Një teh anësor është i gjatë 2 cm dhe është normal në bazat . Cakto vëllimin dhe syprinën e piramidës së cunguar.

6 CILINDRI. PRERJET E CILINDRIT ME RRAFSHIN

Kujtohu!

- Në fig. 1 është paraqitur cilindri i drejtë.
- Si quhet segmenti OO_1?
- Për cilin cilindër themi se se është i drejtë?
- A ka cilindër i cili nuk është i drejtë dhe si quhet?

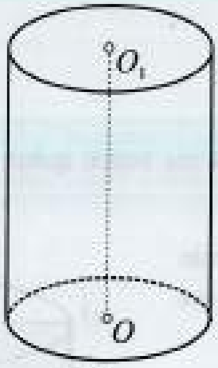


fig.1

- Drejtëza p quhet ***gjeneratrisë*** ose ***përftuese***, kurse vija rrethore nëpër të cilën rrëshqet drejtëza p, quhet ***direktrisë*** ose ***drejtuese***.
- Nëse gjeneratrisa është normale në rrafshin e e vijës rrethore, atëherë fitohet ***sipërfaqe cilindrike rrethore e drejtë*** (fig. 2).Përkundrazi fitohet ***sipërfaqe cilindrike e pjerrët*** (fig. 3).
- Pjesa e hapësirës e kufizuar me pjesën e sipërfaqes cilindrike dhe rrathëve që ajo i pret prej dy rrafsheve të cilat janë paralel me rrafshin e direktrisës është trup gjeometrik i cili quhet ***cilindër rrethor***.

A

Le të jenë dhënë vija rrethore $k(O, r)$ dhe drejtëza p që nuk shtrihet në rrafshin e vijës rrethore, kurse me të ka një pikë të përbashkët.

- Drejtëza p që rrëshqet nëpër vijën rrethore, ashtu që ngel paralel me pozitën e saj fillestare, përshkruan një sipërfaqe të lakuar e cila quhet ***sipërfaqe cilindrike***.

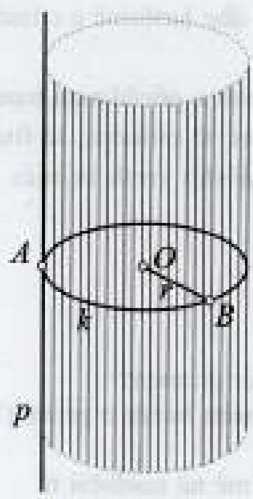


fig.2

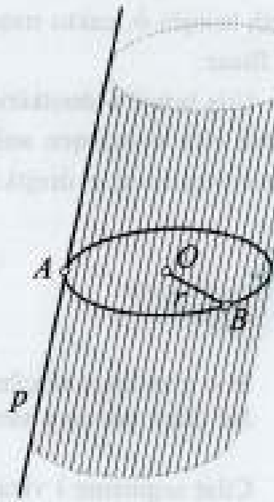


fig.3

Prej cilës sipërfaqe cilindrike fitohet ***cilindri rrethor i drejtë*** (fig. 4a), kurse prej cilës ***cilindër rrethor i pjerrët*** (fig. 4b)?

Më tutje, në vend të cilindrit rrethor do të përdorim terminin cilindër.

Rrathët që fitohen si prerje të sipërfaqes cilindrike me dy rrafshe quhen ***baza***, kurse pjesa e sipërfaqes cilindrike ndërmjet bazave quhet ***sipërfaqja anësore e cilindrit***.

Segmenti pikat e sakjshme të të cilit janë qendrat e bazave të cilindrit quhet ***bosht i cilindrit***.

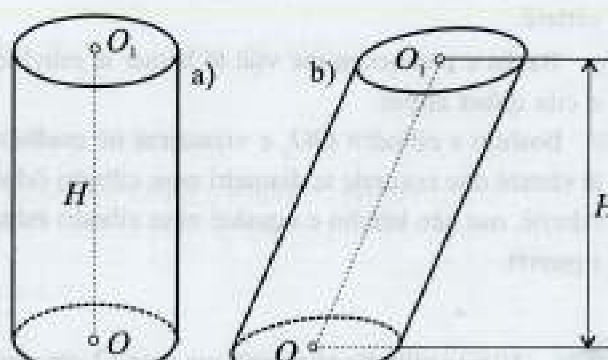


fig.4

■ Largësia ndërmjet bazave të cilindrit quhet ***lartësia e cilindrit.***

● Krahasoe gjatësinë e lartësisë me gjatësinë e boshtit të cilindrit të drejtë dhe të pjerrët. Çka përfundon prej krahasimit?

Mbaj mend!

Cilindri te i cili gjeneratrisa është normale me bazën quhet ***cilindër i drejtë.***

Cilindri i drejtë mund të fitohet me rrotullimin e drejtkëndëshit rreth një brinje të tij (fig. 5a) ose rreth njërit bosht të simetrisë (fig. 5b).

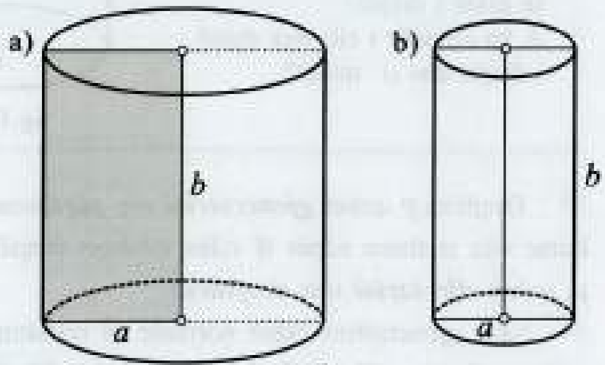


fig.5

● Nëse drejtkëndëshi me brinjë a dhe b rrotullohet rreth brinjës b, cakto rrezen dhe lartësinë e cilindrit të fituar.

● Cila brinjë e drejtkëndëshit e përshkruan bazën, kurse cila sipërfaqen anësore të cilindrit, të fituar me rrotullimin e drejtkëndëshit rreth brinjës a?

Kujtohu!

● Si e vizatojmë skicën për prizmin?

● Në çfarë pozite e vendosim bazën e prizmit?

● Cilat segmente i vizatojmë në madhësi të vërtetë?

B 1 Vizato cilindër të drejtë me rreze 1,5 *cm* dhe lartësi 4 *cm*.

Vëre mënyrën

■ Bazën e cilindrit e vendosim në rrafshin horizontal (fig. 6).

■ Një diametër i bazës është paralel me rrafshin e tabelës dhe atë e vizatojmë në madhësi të vërtetë.

■ Bazën e paraqesim me vijë të lakuar të mbyllur e cila quhet elipsë.

■ Boshtin e cilindrit OO_1 e vizatojmë në madhësi të vërtetë dhe normale te diametri nëse cilindri është i drejtë, ose nën këndin e ngushtë nëse cilindri është i pjerrët.

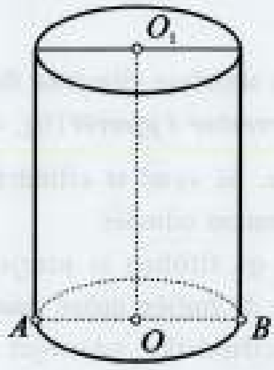


fig.6

2 Vizato cilindër të pjerrët me rreze 2 *cm* dhe bosht 5 *cm*.

Kujtohu!

- Çfarë figura janë baza dhe çfarëdo prerje paralele e prizmit dhe rrafshit?
- Cili segment është prerja e prerjes diagonale e prizmit të rregullt katërkëndor?

C 3 Vizato prerjen e cilindrit me rrafshin që është paralel me bazën dhe rrafshit që kalon nëpër boshtin e cilindrit të drejtë?

Vëre zgjidhjen:

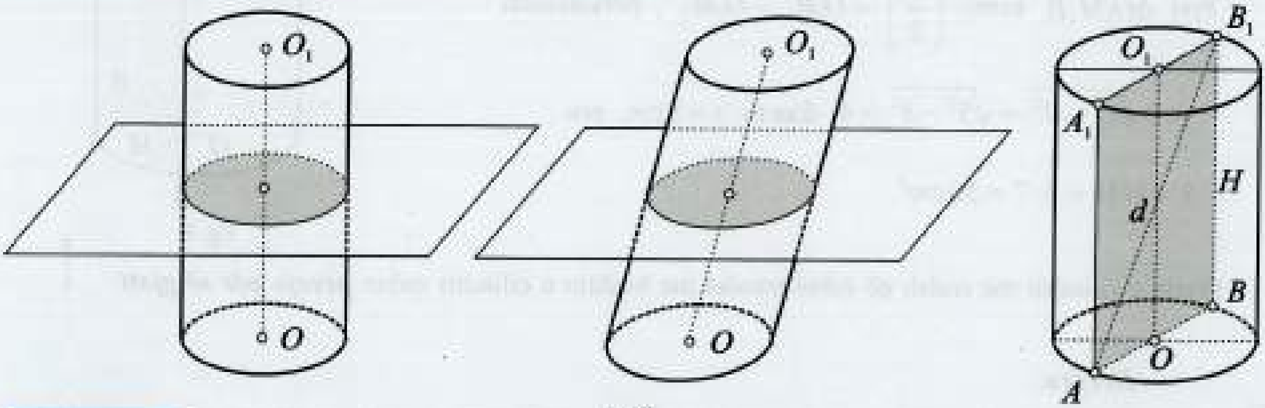


fig.7

Vëre!

Prerja paralele e cilindrit është rreth i puthitshëm me bazën e cilindrit.
Prerja boshtore e cilindrit të drejtë është drejtkëndësh, brinjët e të cilit janë diametri dhe boshti (lartësia) i cilindrit.

- Cili lloj i shumëkëndëshit është prerja boshtore e cilindrit të pjerrët?

4 Cakto lartësinë e cilindrit të drejtë me rreze të bazës 4,5 *cm* dhe diagonalja e prerjes boshtore 15 *cm*.

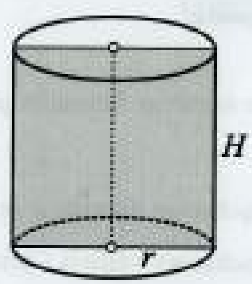
Vëre zgjidhjen:

- Lartësia e cilindrit të drejtë është e barabartë me përftuesen, pra prej ΔABB_1 vijon:

$H^2 = \overline{AB_1}^2 - \overline{AB}^2$, d.m.th. $H = \sqrt{d^2 - (2r)^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\,cm$.

5 Prerja boshtore e një cilindri është katror me syprinë $36\ cm^2$. Cakto rrezen dhe lartësinë e cilindrit.

- Vëre, diametri i bazës është i barabartë me lartësinë, d.m.th. $H = 2r$.
Prej $S = H^2$ vijon $36 = H^2$, d.m.th. $H = 6\ cm$ dhe $r = 3\ cm$.



Mbaj mend!

Cilindri, prerja boshtore e të cilit është katror, d.m.th. $H = 2r$, quhet ***cilindër barabrinjës***.

6 Lartësia e një cilindri është 7 *cm*, kurse rrezja e bazës është 5 *cm*. Njehso syprinën e prerjes për së gjati që është një largësi 3 *cm* prej boshtit të cilindrit.

Vëre zgjidhjen:

- Cila është figura gjeometrike e prerjes për së gjati (fig. 8)?
- Një brinjë e prerjes për së gjati është korda AB, largësia qëndrore e së cilës është $d = 3\ cm$.

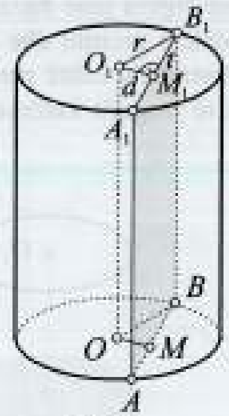


fig. 8

Prej $\Delta O_1M_1B_1$ kemi: $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \overline{O_1B_1}^2 - \overline{O_1M_1}^2$, përkatësisht

$$\frac{t}{2} = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4, \text{ d.m.th. } t = 8\,cm, \text{ pra}$$

$$S = t \cdot H = 8 \cdot 7 = 56\,cm^2.$$

- Prerja e cilindrit me rrafsh që është paralel me boshtin e cilindrit quhet ***prerje për së gjati***.

Detyra:

1. Cakto rrezen dhe lartësinë e cilindrit që fitohet me rrotullimin e drejtkëndëshit me brinjë $a = 10\ cm$ dhe $b = 15\ cm$: a) rreth brinjës a; b) rreth brinjës b; c) rreth simetrales së brinjës b.

2. Syprina e prerjes boshtore të një cilindri është 156 cm², kurse lartësia 12 *cm*. Cakto rrezen e bazës.

3. Lartësia e një cilindri është 16 *cm*, kurse rrezja e bazës 17 *cm*. Në çfarë largësie prej boshtit duhet të vendoset rrafshi, paralel me boshtin, ashtu që prerja e fituar për së gjati është katror?

4. Një prerje për së gjati është në largësi 4 *cm* prej boshtit të cilindrit dhe pret në bazën hark rrethor këndi qëndror i të cilit është 120^0. Njehso syprinën e prerjes, nëse lartësia e cilindrit është $5\sqrt{3}\,cm$.

7 SYPRINA E CILINDRIT. VËLLIMI I CILINDRIT

Kujtohu!

- Si e nxorrëm formulën për njehsimin e rrethit?
- Si njehsohet syprina e prizmit?
- Si njehsohet vëllimi i prizmit?

A

- Për një prizëm themi se është brendashkruar në cilindër nëse bazat e prizmit janë brendashkruar në cilindër.

Te cilindri i drejtë, fig. 1, është brendashkruar prizëm e rregulltë gjashtëkëndore.

Vëre se syprina e bazës së cilindrit është më e madhe se syprina e bazës së prizmit. Gjithashtu, syprina anësore e cilindrit është më e madhe se syprina anësore e prizmit.

Nëse numri i brinjëve të bazës së prizmit zmadhohet dy herë, numri i ri, pra, dyfishohet, etj., shumëkëndëshi që është bazë e prizmit tenton të kalon në rreth, d.m.th. perimetri i bazës së prizmit tenton nga perimetri i rrethit.

Domethënë, me zmadhimin e numrit të brinjëve të bazës së prizmit, ndryshimi ndërmjet syprinave anësore të cilindrit dhe prizmit do të jetë aq e vogël, ashtu që mundet të mos përfillet.

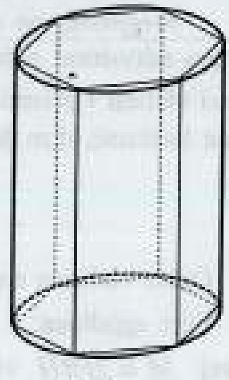


fig. 1

Pasi syprina anësore e prizmit është $M=P \cdot H$, vijon se syprina anësore e cilindrit është e barabartë me prodhimin e lartësisë së tij dhe perimetrit të bazës, d.m.th.

$$M = 2r\pi \cdot H.$$

Syprina e cilindrit është e barabartë me shumën e syprinave të bazave dhe syprinës anësore, d.m.th.

$$S = 2B + M.$$

Pasi $B = r^2\pi$, kurse $M = 2r\pi H$ kemi:

$$S = 2r^2\pi + 2r\pi H, \text{ d.m.th. } S = 2r\pi(r+H)$$

1 Rrezja e bazës së një cilindri është 7 cm, kurse syprina e prerje së tij boshtore është 84 cm^2. Cakto syprinën e cilindrit.

Vëre zgjidhjen:

Prerja boshtore është drejtkëndësh, pra prej $S = 2rH$ vijon $84 = 2r \cdot H$, d.m.th. $H = 6\ cm$. Syprina e cilindrit është

$$S = 2r\pi(r+H), \quad S=2\cdot 7\pi(7+6)=182\pi cm^2.$$

2 Shuli cilindrik i gjatë 2,6 m dhe me rreze 1,2 m është rrotulluar nëpër rrugë 300 herë. Sa sipërfaqe të rrugës ka shkelur shuli?

3 Është dhënë cilindri me rreze të bazës 1,5 cm dhe lartësi 2 cm. Vizato rrjetën e cilindrit dhe cakto syprinën e tij.

Nëse cilindri pritet nëpër njërën përftuese dhe nëpër vijat rrethore të bazave, fitohet rrjeti i cilindrit (fig. 2).

Prej çka përbëhet rrjeti i cilindrit?

Vëre:

$S = 2B + M$, $B = r^2\pi$, $M = 2r\pi H$, pra

$S= 2r\pi\ (r + H)$, d.m.th.

$S=2\cdot 1,5\pi(1,5+2)=10,5\pi cm^2$.

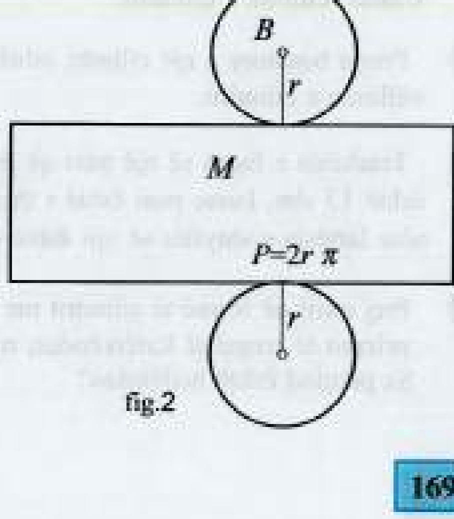


fig.2

B Vëreve se cilindri ka vëllim më të madh se prizmi që është brendashkruar në të (fig. 1). Megjitatë, me zmadhimin e numrit të brinjëve të bazës së prizmit, prizmi afrohet deri te cilindri, pra ndryshimi ndërmjet vëllimeve të tyre do të jetë aq më i vogël, sa të mund të mos përfillet.

Pasi vëllimi i prizmit është $V = B \cdot H$ vijon se vëllimi i cilindrit është i barabartë me prodhimin e bazës dhe lartësisë, d.m.th.

$$V = B \cdot H = r^2 \pi H.$$

4 Cakto vëllimin e cilindrit me rreze 5 cm dhe syprina e mbështjellësit $70\pi\, cm^2$.

Vëre zgjidhjen:

Prej $M = 2r\pi H$ vijon $70\pi = 2 \cdot 5\pi H$, d.m.th. $H = 7\,cm$, pra

$V = r^2 \pi H = 5^2 \pi \cdot 7 = 175\pi\, cm^3$.

Mbaj mend!

Syprina e cilindrit njehsohet me formulën $S = 2r\pi(r+H)$,

vëllimi me formulën $V = r^2\pi H$.

r - rrezja e bazës së cilindrit, kurse

H - lartësia e cilindrit.

5 Trashësia e murit të një gypi të plumbit është 4 mm, kurse diametri i brendshëm është 40 mm. Cakto masën e gypit nëse ai është i gjatë 5 m, kurse pesha specifike e plumbit është 11,4.

Detyra:

1. Drejtkëndëshi me dimenzione 60 cm dhe 40 cm rrotullohet rreth njërës brinjë, kurse pastaj rreth brinjës tjetër. Cakto raportin e syprinave dhe raportin e vëllimeve të cilindrave të fituar.

2. Syprina e cilindrit është $80\pi\, cm^2$, kurse ndryshimi ndërmjet lartësisë dhe rrezes është 2 cm. Cakto vëllimin e cilindrit.

3. Prerja boshtore e një cilindri është romb me brinjë 10 cm dhe kënd të ngushtë prej 30^0. Njehso vëllimin e cilindrit.

4. Trashësia e faqes së një pusi që është në formë të cilindrit është 40 cm, diamteri i brendshëm është 13 dm, kurse pusi është i thellë 12 m. Sa metër kub dhe është nxjerrë dhe sa ujë ka pusi nëse lartësia e shtyllës së ujit është 4,5 m?

5. Prej trarit në formë të cilindrit me diametër 60 cm dhe gjatësi 5 m duhet të bëhet tra në formë të prizmit të rregulltë katërkëndor, me hedhurinë më të vogël.
Sa përqind është hedhurina?

8 KONI. PRERJA E KONIT ME RRAFSHIN

Kujtohu!

- Si fitohet sipërfaqja cilindrike?
- Si fitohet cilindri i drejtë?
- Çka është prerja paralele, çka është prerja boshtore e cilindrit me rrafshin?
- Në shkollën fillore mësove për konin. Në fig. 1 është paraqitur koni i drejtë.
- Si quhet pika S?
- Si quhet segmenti SO, kurse si quhet segmenti SM?

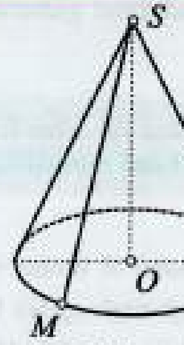


fig.1

A Le të jetë S pikë e fiksuar që shtrihet jashta rrafshit të vijës rrethore $k(O, r)$, dhe gjysmëdrejtëza SM le ta prek vijën rrethore në pikën M (fig. 2).

- Gjysmëdrejtëza SM e cila rrëshqet nëpër vijën rrethore k përshkruan një sipërfaqe të lakuar e cila quhet ***sipërfaqe rrethore konike*** ose vetëm ***sipërfaqe konike.***
- Si quhet gjysmëdrejtëza SM, kurse si vija rrethore k ?
- Pika S quhet ***maja*** e sipërfaqes konike, kurse drejtëza SO quhet ***boshti*** i sipërfaqes konike.
- Nëse boshti SO është normal në rrafshin e vijës rrethore k, atëherë fitohet ***sipërfaqja rrethore e drejtë konike,*** përkundrazi ***sipërfaqja rrethore e pjerrët konike***.

Pjesa e hapësirës që kufizohet me sipërfaqe konike dhe rrethit që ajo e pret prej rrafshit e cila është paralele me rrafshin e direktrisës është trup gjeometrik i cili quhet ***kon rrethor.***

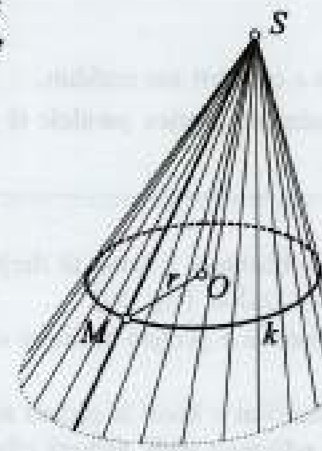


fig.2

- Prej cilës sipërfaqe konike fitohet koni rrethor (fig. 3a), kurse prej cilës koni rrethor i pjerrët në (fig. 3b)?

Më tutje, në vend të konit rrethor do ta përdorimi terminin kon.

- Rrethi i cili është prerje e sipërfaqes konike me rrafshin quhet ***baza*** e konit, kurse pjesa e sipërfaqes konike quhet ***sipërfaqe anësore*** e konit.
- Segmenti SO (pikat e skajshme janë maja dhe qendra e bazës) quhet ***boshti*** i konit.
- Largësia ndërmjet konit dhe bazës së tij quhet ***lartësia*** e konit.

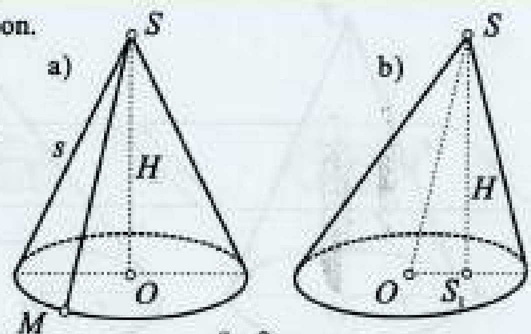


fig. 3

- Segmenti pikat e skajshme të të cilit janë maja e konit dhe çfarëdo pikë e vijës rrethore të bazës quhet ***gjeneratrisa - përftuese*** e konit.

- Krahasoji lartësitë dhe boshtin te koni i pjerrët. Çka përfundon prej krahasimit?
- Si janë sipas madhësisë gjeneratrisa e konit të drejtë, kurse si janë te koni i pjerrët?

Mbaj mend!

Trupi gjeometrik që është formuar prej një sipërfaqe të drejtë konike dhe prerjes së saj me rrafshin i cili është normal në boshtin quhet kon i drejtë (ose kon).

Koni i drejtë mund të fitohet me rrotullimin e trekëndëshit kënddrejt rreth njërës katetë të tij (fig. 4a) ose me rrotullimin e trekëndëshit barakrahas rreth boshtit të tij të simetrisë (fig. 4b).

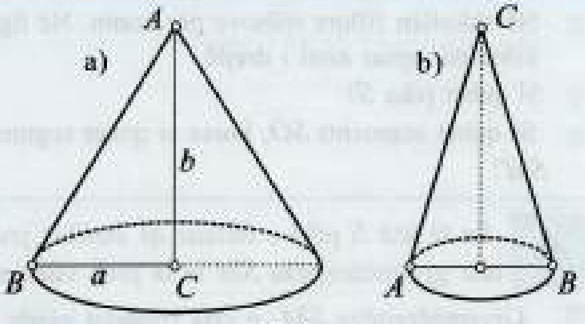


fig.4

Kujtohu!

- Për prerjet e cilindrit me rrafshin.
- Në teoremën për prerjen paralele të piramidës me rrafsh.

B 1 Vizato prerjen e konit me rrafsh që:
a) kalon nëpër boshtin e konit;
b) është paralel me boshtin e konit.
Vëre zgjidhjen.

Vëren se prerja boshtore e konit të drejtë është trekëndëshi barakrahas (fig. 5a).

- Cakto elementet e prerjes boshtore të konit të drejtë.
- Pasi gjeneratrisat e konit të pjerrët nuk janë të barabarta ndërmjet vedi, atëherë cila figurë është prerja e tij boshtore (fig. 5b)?
- Ndonjë prerje boshtore përveç konit të pjerrë a mund të jetë trekëndsh barakrahas?

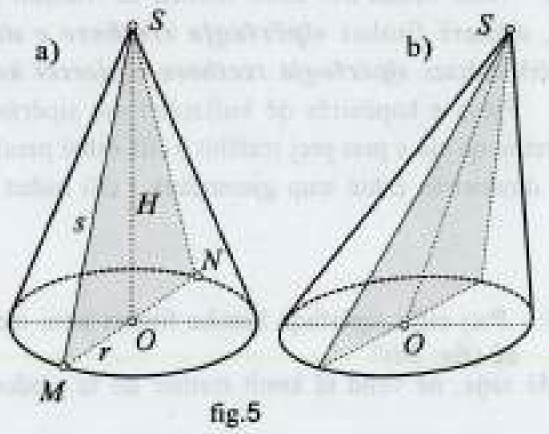


fig.5

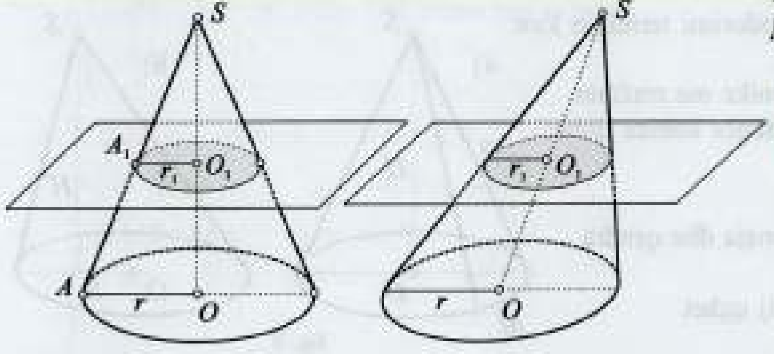


fig.6

Prerja e konit me rrafsh që është paralel me bazën është rreth.
Ta shqyrtojmë prerjen boshtore në fig. 6.
Pasi $AO \parallel A_1O_1$, vijon se
$\Delta AOS \sim \Delta A_1O_1S$, pra
$\overline{AO}:\overline{A_1O_1}=\overline{SO}:\overline{SO_1}=\overline{SA}:\overline{SA_1}$.

Prej $\frac{r}{r_1} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}}$ vijon $\frac{r^2}{r_1^2} = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}$, d.m.th. $\frac{B}{B_1} = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}$, ku B është syprina e bazës së konit, kurse B_1 është syprina e prerjes boshtore.

Me këtë e vërttuam këtë

Teoremë: Nëse koni pritet me rrafsh që është paralel me bazën e konit, atëherë:

1. Gjeneratrisa dhe lartësia e konit janë ndarë me prerjen në të njëjtin raport.
2. Syprinat e bazës dhe prerjes paralele qëndrojnë si katrorët e largësive të tyre deri te maja e konit.

2 Njehso syprinën e prerjes boshtore të konit të drejtë me lartësin $H = 8\ cm$ dhe gjeneratrisën (përftuese) $s = 10\ cm$.

Vëre zgjidhjen:

Prej ΔSMO (fig. 5a) kemi: $\overline{MO}^2 = \overline{SM}^2 - \overline{SO}^2$, përkatësisht $r^2 = s^2 - H^2$, d.m.th.

$r = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\,cm$. Syprina e prerjes boshtore është $S = \frac{1}{2}\overline{MN} \cdot \overline{SO} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48\,cm^2$.

3 Prerja boshtore e një koni të drejtë është trekëndësh barabrinjës perimetri i të cilit është 12 cm. Njehso syprinën e asaj prerje.

Vëre zgjidhjen:

Prej $P = 12\ cm$ vijon $s = 2r = 4\ cm$, pra $S = \frac{s^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\,cm^2$.

Mbaj mend!

Koni prerja boshtore e të cilit është trekëndësh barabrinjës, d.m.th. $s = 2r$ quhet kon barabrinjës.

4 Syprina e bazës së konit është $175\pi\,cm^2$, kurse syprina e një prerje të tij paralele është $7\pi\,cm^2$. Cakto lartësinë e konit, nëse largësia ndërmjet bazës dhe prerjes paralele është 12 cm.

Vëre zgjidhjen:

Le të jetë $\overline{OO_1} = 12\,cm$, kurse $\overline{SO_1} = x$ (fig. 7). Atëherë prej $\frac{B}{B_1} = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}$

vijon $\frac{175\pi}{7\pi} = \frac{(12+x)^2}{x^2}$ ose $25 = \left(\frac{12+x}{x}\right)^2$ ose $\frac{12+x}{x} = 5$,

përkatësisht $12 = 4x$, d.m.th. $x = 3$, pra lartësia është $\overline{SO} = 12 + 3 = 15\,cm$.

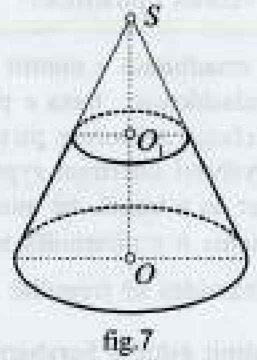


fig.7

Mbaj mend!

Pjesa e konit e kufizuar me bazën dhe një prerje paralele quhet kon i cunguar.

Sigurisht vëreve se gjatë të vizatuarit e konit do të veprojmë në të njëjtën mënyrë si edhe gjatë të vizatuarit e cilindrit. Përkatësisht, bazën e konit e vendosim horizontalisht, kurse boshti i konit dhe prerja boshtore që është paralele me rrafshin e vizatimit i vizatojmë në madhësi të vërtetë.

Detyra:

1. Njehso syprinën e prerjes boshtore të konit të drejtë me rreze të bazës 6 cm, nëse përftuesja formon kënd prej 60^0 me rrafshin e bazës.

2. Përftuesja më e madhe dhe më e vogël e konit të pjerrët janë 20 cm dhe 12 cm, kurse rrezja e bazës është 8 cm. Njehso syprinën e prerjes boshtore të konit.

3. Trekëndëshi barakrahas me bazë 16 cm dhe krah 17 cm rrotullohet rreth simetrales të bazës. Cakto syprinën e prerjes boshtore të trupit të fituar rrotullues.

4. Rrezja e bazës të konit të pjerrët është 7 cm, kurse një prerje paralele e konit e ndan boshtin në pjesë 4 cm dhe 10 cm. Cakto rrezen e prerjes paralele.

5. Nëpër majën e konit, nën këndin prej 45^0 ndaj bazës, është vendosur rrafsh, i cili e pret një të katërtën e vijës rrethore të bazës. Cakto syprinën e prerjes nëse lartësia e konit është 6 cm.

9 SYPRINA E KONIT. VËLLIMI I KONIT

Kujtohu!

- Si arritëm deri te formula për njehsimin e syprinës të cilindrit?
- Si arritëm deri te formula për njehsimin e vëllimit të cilindrit?
- Me cilën formulë të përgjithshme njehsohet syprina e piramidës?
- Me cilën formulë të përgjithshme njehsohet vëllimi i piramidës?

A Për një piramidë themi se është brendashkruar në kon nëse baza e piramidës është brendashkruar në bazën e konit, kurse majat u puthiten.

Te koni në fig. 1 është brendashkruar piramida e rregulltë katërkëndore.

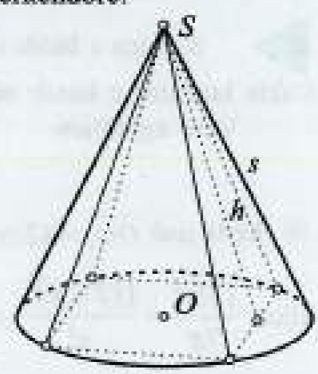


fig. 1

Me zmadhimin e numrit të teheve të bazës të piramidës së brendashkruar, baza e piramidës afrohet deri te rrethi, kurse sipërfaqja anësore e piramidës i afrohet sipërfaqes konike. Ndryshimi ndërmjet syprinave anësore të konit dhe piramidës bëhet aq e vogël, që mund të mos përfillet. Në këtë rast, apotema h e piramidës tenton nga përftuesja s e konit. Pasi syprina e piramidës së rregulltë është $M=\frac{P\cdot h}{2}$, domethënë syprina anësore e konit është e barabartë me gjysmëprodhimin e perimetrit të bazës dhe përftueses, d.m.th.

$$M=\frac{2r\pi\cdot s}{2}=r\pi s.$$

Syprina e konit është e barabartë me shumën e syprinës së bazës dhe syprinës së sipërfaqes anësore, d.m.th. $S = B + M$.

Pasi $B = r^2\pi$, kurse $M = r\pi s$ kemi:

$$S = r^2\pi + r\pi s \quad \text{ose} \quad \boxed{S = r\pi(r+s).}$$

1 Lartësia e një koni është $5\ cm$, kurse perimetri i bazës së tij është $24\pi\ cm$. Njehso syprinën e konit.

Vëre zgjidhjen:

Prej kushtit $P = 2r\pi$ vijon $2r\pi = 24\pi$, d.m.th. $r = 12\,cm$.

Prej trekëndëshit kënddrejt AOS (fig. 2) kemi:

$\overline{AS}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OS}^2$ ose $s = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,cm$, pra

$S = \pi r(r+s) = 12\pi(12+5) = 204\pi cm^2$.

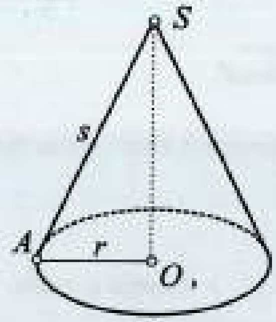


fig.2

2 Është dhënë koni i drejtë me rreze të bazës $1{,}5\ cm$ dhe përftuese $4\ cm$. Vizato rrjetin e konit dhe njehso syprinën e konit.

Nëse koni i dhënë pritet nëpër një përftuese dhe nëpër vijën rrethore të bazës, atëherë mund të vërehet se rrjeti i tij përbëhet prej një rrethi (baza) dhe një sektori rrethor (sipërfaqja anësore), fig. 3.

Syprina e konit është e barabartë me rsyprinën e rrjetit, d.m.th. $S = B + M$. Pasi $B = r^2\pi$, syprina e sektorit rrethor është

$$M = \frac{1}{2}P \cdot s = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot s = r\pi s.$$ Pra

$S = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r+s)$. Domethënë,

$S = 1{,}5\pi(1{,}5+4) = 8{,}25\pi cm^2$.

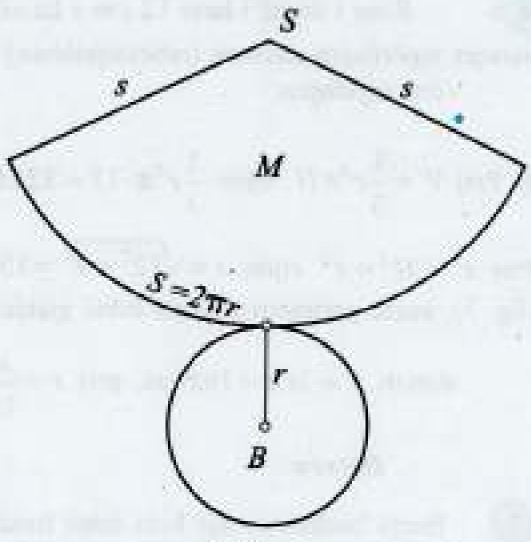


fig.3

B

Tani më përmendëm se me zmadhimin e numrit të teheve të bazave, piramida e brendashkruar te koni afrohet deri te koni. Pra, ndryshimi ndërmjet vëllimit të konit dhe vëllimit të piramidës tenton nga zero dhe mund të mos përfillet.

Pasi vëllimi i piramidës është $V = \frac{1}{3}BH$, vijon se vëllimi i konit është i barabartë me një të tretën e prodhimit të syprinës së bazës dhe lartësisë së konit, d.m.th.

$$\boxed{V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi H.}$$

3 Njehso syprinën dhe vëllimin e konit me rrezen e bazës $5\ cm$ dhe syprina është $65\pi\ cm^2$.

Vëre zgjidhjen

Prej $M = r\pi s$ vijon $5\pi s = 65\pi$, d.m.th. $s = 13cm$, kurse prej $s^2 = H^2 + r^2$ vijon $H^2 = 13^2 - 5^2$, d.m.th. $H = \sqrt{144} = 12cm$.

Pra, $S = \pi r(r+s) = 5\pi(5+13) = 90\pi cm^2$ dhe

$$V = \frac{r^2\pi H}{3} = \frac{5^2\pi\cdot 12}{3} = 100\pi\, cm^3.$$

Mbaj mend!

Syprina e konit njehsobet me formulën $S = \pi r(r+s)$, kurse vëllimi me formulë

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H,$$

r - rrezja e bazës, H - lartësia, kurse s - përftuesja e konit.

4 Koni i drejtë i lartë 12 cm e ka vëllimin $324\pi\, cm^3$. Cakto këndin qëndror të sektorit rrethor që paraqet sipërfaqen anësore (mbështjellësin) të konit.

Vëre zgjidhjen:

Prej $V = \frac{1}{3}r^2\pi H$ vijon $\frac{1}{3}r^2\pi\cdot 12 = 324\pi$, d.m.th. $r = 9\ cm$.

Prej $s^2 = H^2 + r^2$ vijon $s = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15cm$. Pasi përftuesja e konit paraqet rreze të sektorit rrethor (fig. 3), kurse perimetri i bazës është gjatësia e harkut rrethor,

d.m.th. $\ell = 2r\pi = 18\pi\, cm$, prej $\ell = \frac{s\pi\alpha}{180^0}$ vijon $18\pi = \frac{s\pi\alpha}{180^0} = \frac{15\pi\alpha}{180^0}$, pra $\alpha = 18\cdot 12^0 = 216^0$.

Detyra:

1. Prerja boshtore e një koni është trekëndësh barakrahas kënddrejt me syprinë 36 cm^2. Cakto syprinën dhe vëllimin e konit.

2. Rezja dhe përftuesja e një koni të drejtë qëndrojnë si 8 : 17, kurse syprina e tij anësore është $4896\pi\, cm^2$. Njehso vëllimin e konit.

3. Gjeneratrisa më e madhe dhe më e vogël e një koni janë 20 cm dhe 13 cm, kurse perimetri i bazës është $21\pi\, cm$. Njehso vëllimin e konit.

4. Prej teneqeje në formë të sektorit rrethor me rreze 5 dm dhe kënd qëndror prej 288^0, është bërë hinkë në formë të konit. Njehso vëllimin e hinkës.

5. Bari i radhitur në grumbull në formë të cilindrit, kurse mbi të mbaron me majë konike. Kjo është e lartë 4 m, pjesa cilindrike është e lartë 2,2 m, kurse rrezja e bazës është 2,5 m. Cakto masën e barit nëse pesha specifike e tij është 0,03.

10 SYPRINA DHE VËLLIMI I KONIT TË CUNGUAR

Kujtohu!

- Në teoremën për prerjen paralele të konit.
- Si njehsohet syprina e piramidës së cunguar?
- Si njehsohet vëllimi i piramidës së cunguar?
- Një pjesë e konit e kufizuar me bazën dhe një prerje pralale (ose me dy prerje paralele) quhet ***kon i cunguar***.

A

1 Njehso syprinën e prerjes boshtore të konit nëse rrezet e bazave janë 6 *cm* dhe 2 *cm*, kurse lartësia e gjithë konit është 6 *cm*.

Vëre zgjidhjen:

- Cila figurë është prerja boshtore e konit të drejtë?

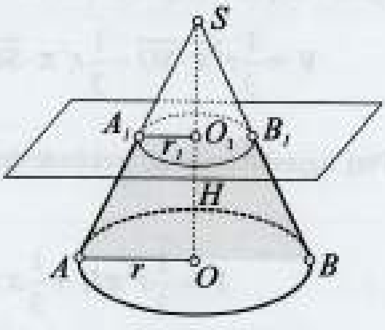


fig.1

- Prej ngjashmërisë së trekëndëshave SAO dhe SA_1O_1 kemi:

$$\frac{r}{r_1}=\frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}} \text{ ose } \frac{6}{2}=\frac{6}{6-H}, \text{ d.m.th. } H=4cm.$$

Prerja boshtore e trapezit barakrahas, pra

$$S=\frac{(2r+2r_1)\cdot H}{2}=\frac{(2\cdot 6+2\cdot 2)\cdot 4}{2}=32\,cm^2.$$

- Koni i drejtë i cunguar (më tutje do të përdorim vetëm terminin koni i cunguar) është trup rrotullues dhe fitohet me rrotullimin e trapezit kënddrejt rreth krahut më të vogël ose me rrotullimin e trapezit barakrahas rreth boshtit të simetrisë.

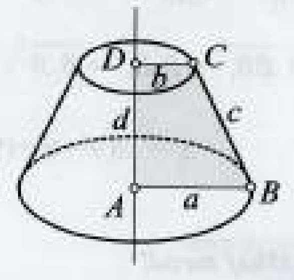


fig.2

- Cilët segmente gjatë rrotullimit i formojnë bazat, kurse cili segment e formon sipërfaqen anësore të konit të cunguar (fig. 2)?

2 Njehso syprinën dhe vëllimin e konit të cunguar nëse rrezet e bazave janë 9 *cm* dhe 6 *cm*, kurse lartësia e konit që e plotëson konin e cunguar deri te koni i plotë është 8 *cm*.

Vëre zgjidhjen:

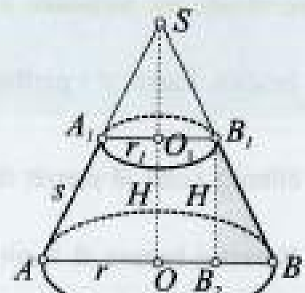


fig.3

- Syprina e konit të cunguar është e barabartë me shumën e syprinave të bazave dhe syprinën anësore, d.m.th. $S = B + B_1 + M$.

$$B=r^2\pi,\ B_1=r_1^2\pi, \text{ a}$$

$$M=r\pi\cdot\overline{SA}-r_1\pi\cdot\overline{SA_1}=r\pi\left(s+\overline{SA_1}\right)-r_1\pi\overline{SA_1} \text{ ose}$$

$$M=r\pi s+r\pi\cdot\overline{SA_1}-r_1\pi\cdot\overline{SA_1}, \text{ d.m.th.}$$

$$M=r\pi s+\pi\left(r-r_1\right)\cdot\overline{SA_1}.$$

Prej ngjashmërisë së trekëndëshave SAO dhe SA_1O_1 (fig. 3) kemi:

$\frac{r}{r_1}=\frac{\overline{SA_1}+s}{\overline{SA_1}}$, d.m.th. $\overline{SA_1}=\frac{s\cdot r_1}{r-r_1}$, pra vijon $M=r\pi s+\pi\cdot(r-r_1)\cdot\frac{s\cdot r_1}{r-r_1}$, d.m.th. $M=\pi(r+r_1)\cdot s$.

Pra, $S=r^2\pi+r_1^2\pi+\pi(r+r_1)\cdot s$,d.m.th. $S=\pi\left(r^2+r_1^2+(r+r_1)\cdot s\right)$.

Vëllimi i konit të cunguar është i barabartë me ndryshimin e vëllimeve të gjithë konit dhe vëllimit të pjesës së prerë (fig. 3), d.m.th.

$$V=\frac{1}{3}r^2\pi\cdot\overline{SO}-\frac{1}{3}r_1^2\pi\cdot\overline{SO_1}=\frac{1}{3}r^2\pi\left(H+\overline{SO_1}\right)-\frac{1}{3}r_1^2\pi\cdot\overline{SO_1}=\frac{1}{3}r^2\pi H+\frac{1}{3}\pi\left(r^2-r_1^2\right)\cdot\overline{SO_1}.$$

Prej ngjashmërisë së trekëndëshave SAO dhe SA_1O_1 kemi: $\frac{r}{r_1}=\frac{\overline{SO_1}+H}{\overline{SO_1}}$ ose $\overline{SO_1}=\frac{r_1\cdot H}{r-r_1}$, pra

$$V=\frac{1}{3}r^2\pi H+\frac{1}{3}\pi(r-r_1)(r+r_1)\cdot\frac{r_1\cdot H}{r-r_1}, \text{ d.m.th. } V=\frac{H\pi}{3}\left(r^2+r_1^2+r\cdot r_1\right).$$

Prej $\frac{r}{r_1}=\frac{\overline{SO_1}+H}{\overline{SO_1}}$ ose $\frac{9}{6}=\frac{8+H}{8}$ fitojmë H = 4 cm, kurse prej trekëndëshit kënddrejt BB_1B_2 vijon $\overline{BB_1}^2=\overline{B_1B_2}^2+\overline{B_2B}^2$, d.m.th. $s=\sqrt{H^2+(r-r_1)^2}=\sqrt{4^2+(9-6)^2}=5cm$, pra

$$S=\pi(9^2+6^2+(9+6)5)=192\pi cm^2 \text{ dhe } V=\frac{4\cdot\pi}{3}\left(9^2+6^2+9\cdot 6\right)=228\pi\, cm^3.$$

Mbaj mend!

Syprina e konit të cunguar njehsohet me formulën $S=\pi\left(r^2+r_1^2+(r+r_1)\cdot s\right)$, kurse vëllimi me formulën $V=\frac{H\pi}{3}\left(r^2+r_1^2+r\cdot r_1\right)$, **ku r dhe r_1 janë rrezet e bazave,** H - lartësia, kurse s - përftuesja e konit të cunguar.

- Vëllimi i konit të pjerrët të cunguar njehsohet me formulën e njëjtë të përmendur.

3 Rrezet e bazave të konit të cunguar janë 5 cm dhe 3 cm, kurse syprina e sipërfaqes anësore është $40\pi\, cm^2$. Njehso vëllimin e konit të cunguar nëse përftuesja me rrafshin e bazës më të madhe formon kënd prej 45^0.

Vëre zgjidhjen:

Pasi sipas kushtit $\measuredangle A_1AA_2 = 45^0$, vijon se trekëndëshi A_1AA_2 barakrahas kënddrejt (fig. 4), pra $\overline{AA_2} = \overline{A_2A_1} = H = s\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\,cm.$

Prej $M = \pi(r + r_1)\cdot s$ vijon $40\pi = \pi(5+3)\cdot s$, d.m.th. $s = 5\,cm.$

Prandaj, $V = \frac{H\pi}{3}\left(r^2 + r_1^2 + r\cdot r_1\right),$

$$V = \frac{5\sqrt{2}\pi}{3}\left(5^2 + 3^2 + 5\cdot 3\right),$$

$$V = \frac{245\sqrt{2}\,\pi}{3} \approx 362,65\,cm^3.$$

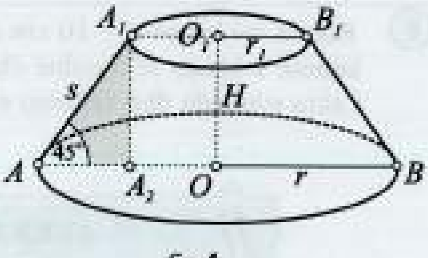


fig.4

4 Një kovë është bërë prej teneqe dhe e ka formën e konit të drejtë të cunguar me diametrat e bazave 24 *cm* dhe 40 *cm* dhe lartësia 35 *cm*.

Sa litra ujë nxen kova?

Sa metër katror teneqe është shpenzuar për përpunimin e 100 kovave të këtilla, nëse dihet se 15% prej teneqes së përdorur është hedhur?

Vëre zgjidhjen:

- Vëllimi i kovës është

$$V = \frac{H\pi}{3}\left(r^2 + r_1^2 + r\cdot r_1\right) = \frac{35\pi}{3}\left(12^2 + 20^2 + 12\cdot 20\right) = 28720,5\,cm^3 \approx 28,7\,dm^3.$$

Pra, kova nxen 28,7 litra ujë.

- Prej $s^2 = H^2 + (r - r_1)^2$ vijon $s = \sqrt{35^2 + (20-12)^2} = 35,9\,cm.$

Pasi kova shpeshherë është e hapur te baza më të madhe, për përpunimin e një kove të përdorura janë:

$$S = B_1 + M = r_1^2\pi + \pi(r + r_1)\cdot s = 12^2\pi + \pi(20+12)\cdot 35,9 = 4060\,cm^2 \approx 40,60\,dm^2 \text{ teneqe.}$$

Domethënë, për 100 kova janë përdor $40,60\cdot 100 = 4060\,dm^2 = 40,60\,m^2$ teneqe.

Hedhurina është 15% prej teneqes së përdorur, d.m.th. $40,65\cdot\frac{15}{100} = 6,10\,m^2$, që do të thotë se është shpenzuar gjithsej $40,60 + 6,10 = 46,7\ m^2$ teneqe.

Detyra:

1. Përftuesja e konit të cunguar është 17 *cm*, kurse rrezet e bazave janë 19 *cm* dhe 11 *cm*. Cakto rrezen e bazës së cilindrit që ka lartësi të njëjtë dhe syprinë anësore të njëjtë me konin e cunguar.

2. Trapezi kënddrejt me baza 10 *cm* dhe 6 *cm* dhe syprinë 24 cm^2 rrotullohet rreth krahut më të vogël. Cakto syprinën dhe vëllimin e trupit rrotullues të fituar.

3. Syprina e një koni të cunguar është $506\pi\,cm^2$, kurse rrezet e bazave ndryshojnë për 5 *cm*. Cakto vëllimin e atij koni nëse përftuesja është 13 *cm*.

4. Prerja boshtore e një koni të cunguar është trapez me baza 24 cm, 10 cm dhe krah 13 cm, 15 cm. Cakto vëllimin e konit të cunguar.

5. Rombi me brinjë $a = 10$ cm dhe këndin e ngushtë prej 60^0 rrotullohet rreth drejtëzës që kalon nëpër kulmin e këndit të ngushtë dhe është normale në njërën brinjë.
Cakto syprinën dhe vëllimin e trupit rrotullues të fituar.

11 SFERA. SYPRINA E SFERËS DHE PJESËVE TË SAJA

Kujtohu!

- Bashkësia e të gjitha pikave në rrafsh që janë në largësi të dhënë r prej një pike O quhet vijë rrethore dhe shënohet $k(O, r)$.

- Çka është rrethi?
- Cilat trupa gjeometrik janë rrotullues?

A Bashkësia e të gjitha pikave në hapësirë që janë në largësi të dhënë R prej një pike të dhënë O quhet ***sferë*** dhe shënohet $S(O, R)$.

Pika O quhet qendra e sferës.

- Segmenti pikat e skajshme të të cilit janë qendra e sferës dhe cilësdo pikë të sferës quhet ***rreze*** e sferës. Rrezja është largësi e dhënë R.
- Segmenti pikat e skajshme të të cilit janë çfarëdo dy pika të sferës quhet ***kordë***.
- ***Diametër*** i sferës është korda që kalon nëpër qendrën e sferës..
- Sfera është sipërfaqe rrotulluese, kurse fitohet me rrotullimin e gjysmëvijës rrethore rreth diametrit.
Skica e sferës është paraqitur në fig. 1.

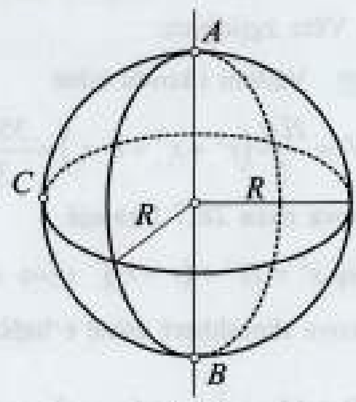


fig.1

- Largësia d, prej pikës O të sferës deri te rrafshi Σ quhet ***largësia qëndrore*** e rrafshit dhe sferës.

- Nëse $d > R$, atëherë sfera dhe rrafshi nuk kanë pika të përbashkëta, d.m.th. $\Sigma \cap S(O,R) = \varnothing$.
- Nëse $d = R$, atëherë sfera dhe rrafshi kanë një pikë të përbashkët, pra rrafshi e takon sferën dhe quhet ***rrafshi i tangjentës***.

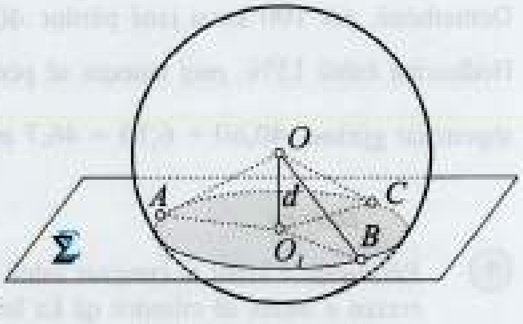


fig.2

B - Nëse $d < R$, atëherë rrafshi e pret sferën, kurse prerja është vijë rrethore (fig. 2).

Të supozojmë se pikat A, B, C, ... shtrihen te prerja. Segmenti $\overline{OO_1} = d$ është normal në rrafsh Σ, pra trekëndëshat OAO_1, OBO_1, OCO_1, ... janë kënddrejt. Pse?

Pikat $A, B, C, \dots$ shtrihen te sfera, pra $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \dots = R$.

Pasi segmenti OO_1 është brinjë e përbashkët e atyre trekëndëshave, vijon se $\Delta OAO_1 \equiv \Delta OBO_1 \equiv \Delta OCO_1 \equiv \dots$ Prej këtu vijon $\overline{O_1A} = \overline{O_1B} = \overline{O_1C} = \dots$, d.m.th. pikat $A, B, C, \dots$ shtrihen në një vijë rrethore. Me këtë e vërtetuam këtë teoeremë

Teoremë: Prerja e sfrerës me rrafsh është vijë rrethore.

- Nëse rrafshi kalon nëpër qendrën e sferës, atëherë prerja është vija rrethore më e madhe, kurse sfera është ndarë në dy gjysmë sfera.
- Sfera në fig. 1 është paraqitur me tre vija rrethore më të mëdhaja që shtrihen në tre rrafshe reciprokisht normale.
- Në çfarë pozite janë ato rrafshe në lidhje me rrafshin e tabelës për vizatim.
- Nëse rrafshi Σ e pret sferën dhe nuk kalon nëpër qendrën, atëherë sfera është ndarë në dy pjesë jo të barabarta, kurse çdonjëra prej tyre quhet ***kalotë***. Nëse ndryshe nuk është thënë, për kalotën do të llogaritet pjesa më e vogël e sferës. Vëre, kalota ka ***lartësinë*** e vet h (fig. 3).

1 Një sferë është prerë me rrafsh në largësi $d = 10\ cm$ prej qendrës. Perimetri i prerjes është $48\pi\ cm$. Cakto lartësinë e kalotës.

Vëre zgjidhjen:

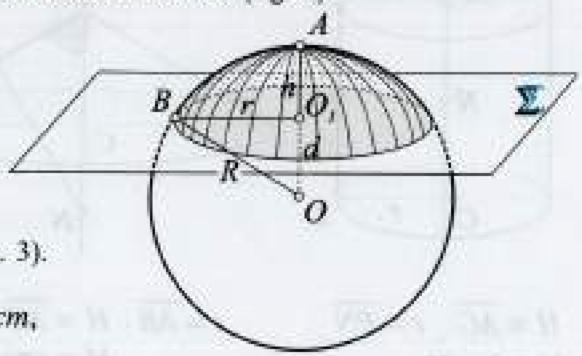


fig.3

- Le të jetë $\overline{OO_1} = d$ dhe $\overline{O_1B} = r$, rrezja e prerjes (fig. 3).

  Atëherë $R^2 = d^2 + r^2$, d.m.th. $R = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26\,cm$,

  pra $h = R - d = 26 - 10 = 16\,cm$.

- Pjesa e sferës që është kufizuar me dy prerje paralele quhet ***brez*** ose ***zonë*** (fig. 4).
- Largësia ndërmjet dy prerjeve paralele është ***lartësia*** e brezit. Në fig. 4, lartësa e brezit është segmenti $\overline{O_1O_2} = h$.

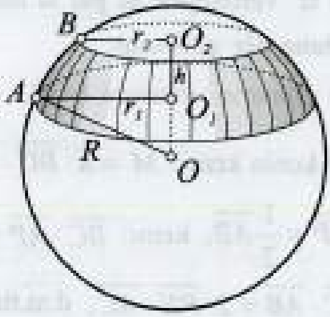


fig. 4

Nëse $d_1 = \overline{OO_1}$ dh $d_2 = \overline{OO_2}$ janë largësi qëndrore të prerjeve, atëherë $h = |d_2 - d_1|$ nëse prerjet janë nga ana e njëjtë në lidhje me qendrën, kurse $h = d_1 + d_2$ nëse prerjet janë në anë të ndryshme të qendrës..

1 Cakto lartësinë e zonës nëse rrezja e sferës është 25 cm, kurse largësitë qëndrore të prerjeve janë 20 cm dhe 15 cm.

Prej ΔOO_1A vijon $d_1 = \overline{OO_1} = \sqrt{R^2 - r_1^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15\,cm$, kurse prej ΔOO_2B vijon $d_2 = \overline{OO_2} = \sqrt{R^2 - r_2^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\,cm$. Pasi nuk është përcaktuar pozita e prerjeve në lidhje me qendrën, kemi: $h = d_2 - d_1 = 20 - 15 = 5\,cm$ ose $h = d_2 + d_1 = 20 + 15 = 35\,cm$.

Kujtohu!

- Drejtëza që rrotullohet rreth boshtit të sipërfaqes rrotulluese, por edhe segmenti që rrotullohet përshkruan sipërfaqe rrotulluese.

- Çfarë pozite reciproke kanë segmenti dhe boshti i rrotullimit, nëse sipërfaqja anësore e përshkruar është pjesë e:
  a) cilindrit; b) konit; c) konit të cunguar?
- Në formulat për njehsimin e syprinës të: cilindrit, konit dhe konit të cunguar.

C

Do të vërtetojmë se për njehsimin e syprinës të sipërfaqes anësore të: cilindrit, konit dhe konit të cunguar vlen rregulla e përbashkët:

Syprina anësore e cilindrit, konit dhe konit të cunguar është e barabartë me prodhimin e lartësisë së trupit dhe perimetrit të vijës rrethore rrezja e të cilit është e barabartë me gjatësinë e normales të tërhequr prej mesit të gjeneratrisës deri te prerja me boshtin e rrotullimit.

Vëre zgjidhjen

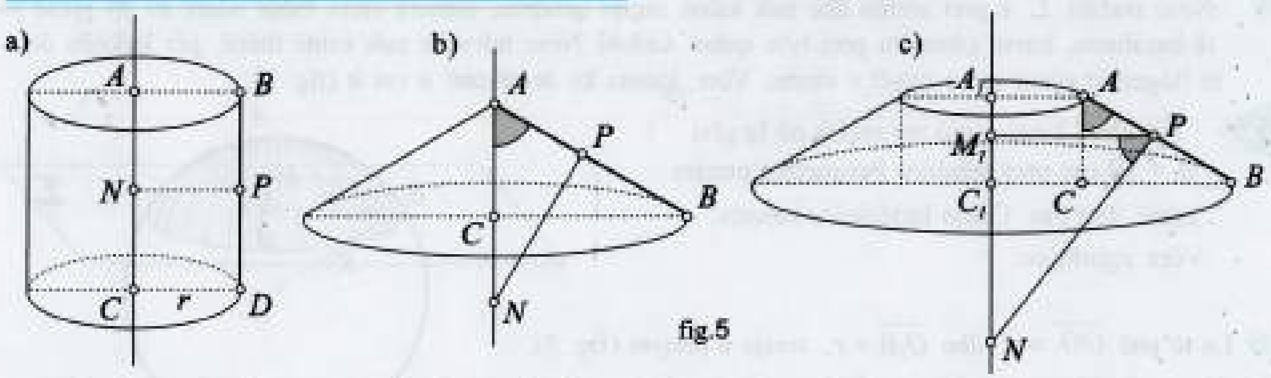


fig.5

$H=\overline{AC}$, $r=\overline{PN}$, $M=2r\pi H$

$s=\overline{AB}$, $H=\overline{AC}$, $r=\overline{BC}$, $M=r\pi s$

$s=\overline{AB}$, $r=\overline{BC_1}$, $r_1=\overline{AA_1}$, $H=\overline{AC}$, $M=\pi(r+r_1)\cdot s$

Duhet të vërtetojmë se për të tre trupat vlen $M=2\pi\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, ku PN dhe AC janë me gjatësi të ndryshme për çdo trup.

a) Për cilindrin vërtetimi është i qartë, pasi $r=\overline{PN}$, $H=\overline{AC}$, $M=2r\pi H=2\pi\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}$.

b) Për konin kemi: $M=\pi\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AB}$. Od $\Delta ACB\sim\Delta ANP$ vijon $\overline{BC}:\overline{PN}=\overline{AC}:\overline{AP}$, por pasi

$\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, kemi: $\overline{BC}\cdot\overline{AP}=\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, ose $\overline{BC}\cdot\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, përkatësisht

$\overline{BC}\cdot\overline{AB}=2\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, d.m.th.. $M=\pi\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AB}=\pi\cdot 2\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}=2\pi\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}$.

c) Për konin e cunguar kemi: $M=\pi\left(\overline{BC_1}+\overline{AA_1}\right)\cdot\overline{AB}$.

Prej trapezit A_1C_1BA vijon $\overline{PM_1}=\frac{1}{2}\left(\overline{BC_1}+\overline{AA_1}\right)$, d.m.th. $\overline{BC_1}+\overline{AA_1}=2\cdot\overline{PM_1}$, pra

$M=2\pi\cdot\overline{PM_1}\cdot\overline{AB}$. Pasi $\Delta ACB\sim\Delta PM_1N$, ($\measuredangle BAC=\measuredangle NPM_1$, kënde me krah normal,

kemi $\overline{AC}:\overline{PM_1}=\overline{AB}:\overline{PN}$ ose $\overline{PM_1}\cdot\overline{AB}=\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, pra $M=2\pi\cdot\overline{PM_1}\cdot\overline{AB}=2\pi\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, që duheshte të vërtetohet.

- Me rrotullimin e cilës figurë fitohet sfera?

Te gjysmëvija rrethore me diametër AF le të jetë brendashkruar vija e thyer e rregulltë $ABCDE$... brinjët e të cilës janë në largësi a prej qendrës O (fig. 6).

Nëse vija e thyer rrotullohet rreth diametrit të gjysmëvijës rrethore, atëherë çdo brinjë e vijës së thyer përshkruan sipërfaqe anësore të cilindrit, konit ose konit të cunguar, varësisht prej pozitës së saj në lidhje me diametrin AF. Syprinat e atyre sipërfaqeve le të jenë M_1, M_2, M_3, ... Atëherë, sipas vërtetimit paraprak kemi:

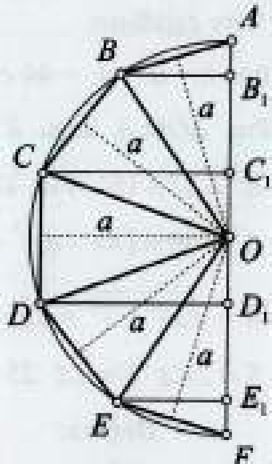


fig.6

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5,$$
$$M = \overline{AB_1} \cdot 2\pi a + \overline{B_1C_1} \cdot 2\pi a + \overline{C_1D_1} \cdot 2\pi a + \overline{D_1E_1} \cdot 2\pi a + \overline{E_1F} \cdot 2\pi a,$$
$$M = 2\pi a\left(\overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{D_1E_1} + \overline{E_1F}\right),$$
$$M = 2\pi a \cdot \overline{AF} = 2\pi a \cdot 2R.$$

Nëse numri i brinjëve të vijës së thyer rregullisht zmadhohet, atëherë afrohet deri te gjysmëvija rrethore, kurse sipërfaqja rrotulluese afrohet deri te sfera. Në këtë rast largësia a tenton nga rrezja R e gjysmëvijës rrethore, përkatësisht sferës.

Prandaj, syprina e sferës është

$$S = 2\pi a \cdot 2R = 2\pi R \cdot 2R = 4R^2\pi.$$

Në mënyrë të ngjashme, nëse e shqyrtojmë rrotullimin e vijës së thyer të brendashkruar në harkun AB, e nxjerrim formulën për syprinën e kalotës dhe kemi:

$$S = 2\pi a \cdot \overline{AB_1} = 2\pi R \cdot h.$$

Analogjikisht, syprina e brezit është

$$S = 2\pi R \cdot h.$$

Mbaj mend!

Syprina e sferës njehsohet me formulën $S = 4R^2\pi$, kurse e kalotës dhe brezit me formulën $S = 2R\pi h$, ku R është rrezja e sferës, kurse h është lartësia e kalotës ose brezit.

3 Te sfrea $S(O,\ 13\ cm)$ shtrihen pikat A, B dhe C. Largësitë ndërmjet tyre janë:: $6\ cm$, $8\ cm$ dhe $10\ cm$. Cakto syprinën e kalotës që rrafshi i trekëndëshit ABC e pret sferën (fig. 7).

Vëre zgjidhjen:

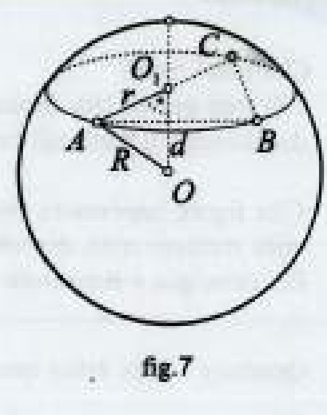


fig.7

- Trekëndëshi ABC është kënddrejt, pra rrezja e prerjes është $r = 5\ cm$. Prej ΔOO_1A vijon $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, pra lartësia e kalotës është $h = 13 - 12 = 1\ cm$. Prandaj,

$$S = 2R\pi h = 2\pi \cdot 13 \cdot 1 = 26\pi\, cm^2.$$

5 Nga anë të ndryshme në lidhje me qendrën e një sfere janë konstruktuar dy prerje paralele me rreze 7 cm dhe 15 cm (fig. 8). Njehso syprinën e brezit të sferës, nëse largësia ndërmjet prerjeve është 44 cm.

Vëre zgjidhjen:

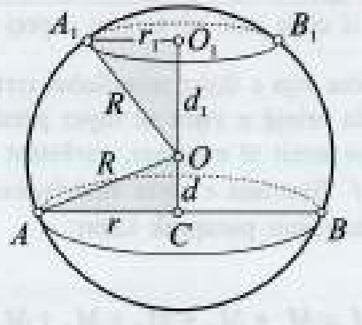


fig..8

- Prej $h = d + d_1 = 44\ cm$ vijon $d = 44 - d_1$.

Prej ΔOO_1A_1 kemi $R^2 = d_1^2 + 7^2$, kurse prej ΔOAC vijon

$R^2 = d^2 + 15^2$. Prej këtu vijon barazimi

$d_1^2 + 49 = (44 - d_1)^2 + 225$, prej këtu $d_1 = 24\ cm$, pra

$R = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25 cm$. Pra,

$S = 2R\pi \cdot h = 2\pi \cdot 25 \cdot 24 = 1200\pi\ cm^2 = 12\pi\ dm^2$.

Detyra:

1. Më së shumti sa pika mund të kenë drejtëza dhe sfera?

2. Nëpër mesin e një rreze të sferës së dhënë është vendosur rrafsh normal në të. Në çfarë raporti e ndan syprinën e sferës?

3. Lartësia e një kalote është 9 cm, kurse rrezja e bazës së saj është 15 cm. Cakto largësinë e prerjes prej qendrës së sferës.

4. Rrezet e dy sferave janë 25 cm dhe 29 cm, kurse largësia ndërmjet qendrave të tyre është 36 cm. Cakto gjatësinë e prerjes së sferave.

5. Sa është syprina e Tokës shiquar prej pikës të larguar 140 m nga sipërfaqja e saj? (rrezja e Tokës është 6370 m.)

12 TOPI. VËLLIMI I TOPIT DHE PJESËVE TË TIJ

Kujtohu!

- Çka është rreth?
- Cili trup gjeometrik fitohet me rrotullimin e drejtkëndëshit rreth një brinje të tij?
- Cila figurë hapësinore fitohet me rrotullimin e vijës rrethore rreth diametrit?
- Për principin e Kavaliotit.

A E ke të njohur se sfera fitohet me rrotullimin e gjysmëvijës rrethore rreth diametrit të saj.

Mbaj mend!

Pjesa e hapësirës që është kufizuar me një sferë quhet ***top***.

- Qendra e sferës është qendra e topit, kurse rrezja e sferës është rrezja e topit.

Mbaj mend!

Prerja e topit me rrafsh është rreth.

Vërtetimi i këtij gjykimi është identik me vërtetimin për prerjen e sferës me rrafsh.

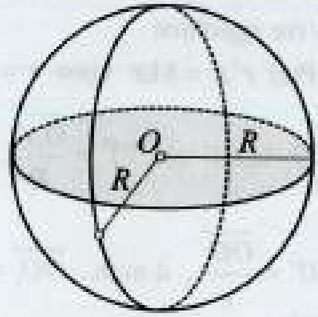


fig.1

- Nëse rrafshi kalon nëpër qendrën e topit, atëherë topi është ndarë në dy pjesë të puthitshme - ***gjysmëtopa***, kurse prerja quhet ***rrethi kryesor - rrethi i madh*** i topit.

Në fig. 1 është paraqitur skica e topit me tre rrathë kryesor, të cilët shtrihen në tre rrafshe reciprokisht normal.

- Topi është trup rrotullues dhe fitohet me rrotullimin e rrethit rreth diametrit të tij.

1 Një top është prerë me dy rrafshe paralele. Diametrat e prerjeve janë 24 *dm* dhe 18 *dm*, kurse largësia ndërmjet tyre është 21 *dm*. Cakto syprinën e rrethit kryesor.

Vëre zgjidhjen

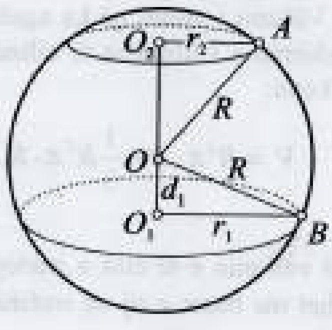


fig.2

- Rrezja e rrethit kryesor është rrezja e topit (fig. 2). Le të jetë.

$\overline{O_1B}=r_1=12\,dm,\ \overline{O_2A}=r_2=9\,dm,\ \overline{OO_1}=d_1,\ \overline{OO_2}=21-d_1.$

Prej ΔOO_1B vijon $R^2=d_1^{\,2}+12^2$, kurse prej ΔOO_2A kemi

$R^2=(21-d_1)^2+9^2$. Prej barazimit $d_1^{\,2}+144=441-42d_1+d_1^{\,2}+81$

vijon $d_1=9\ cm$, pra $R=\sqrt{9^2+144}=15\,cm$ dhe

$S=R^2\pi=225\pi\ cm^2$.

B Rrafshi që nuk kalon nëpër qendrën e topit e ndan topin në dy pjesë jo të barabarta dhe çdonjëri quhet ***segment*** ose ***segmenti i topit***.

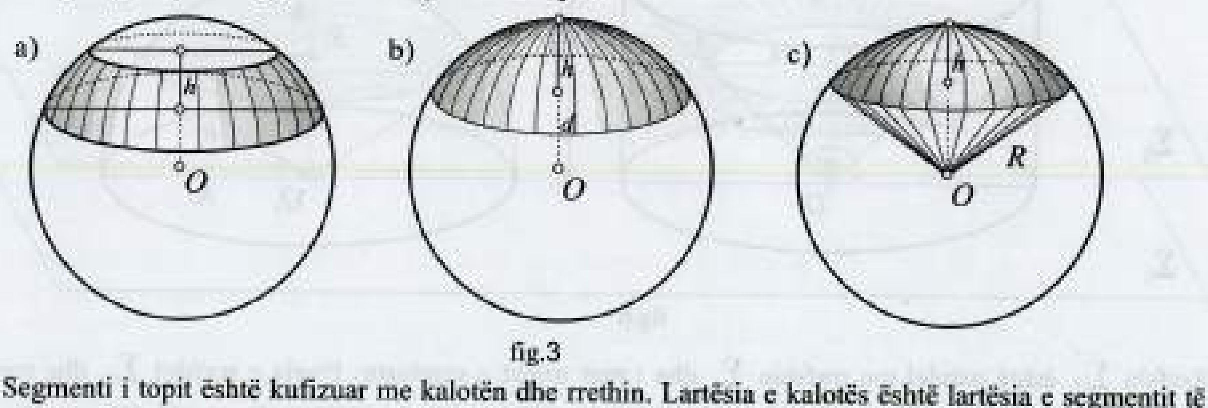


fig.3

- Segmenti i topit është kufizuar me kalotën dhe rrethin. Lartësia e kalotës është lartësia e segmentit të topit (fig. 3a).
- Pjesa e topit që përbëhet prej segmentit të topit dhe konit baza e të cilit është baza e segmentit të topit, kurse maja është qendra e topit quhet ***sektori i topit*** ose ***sektor*** (fig. 3b).
- Pjesa e topit e kufizuar ndërmjet dy prerjeve paralele quhet ***shtresa e topit***. Kufijtë e shtresës së topit janë dy rrathë dhe brezi i sferës (fig. 3c).

2 Syprina e bazës së segmentit të topit është $81\pi\, cm^2$, kurse harku i prerjes boshtore të segmentit e ka këndin qëndror prej 120^0. Cakto rrezen e topit dhe lartësinë e segmentit.

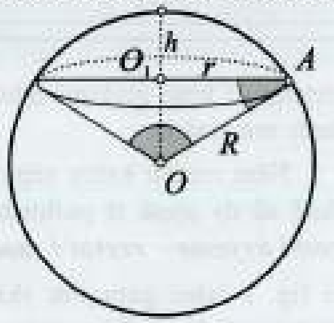


fig.4

Vëre zgjidhjen

Prej $r^2\pi = 81\pi$ vijon $r = 9\,cm$. Prej trekëndëshit kënddrejt

OAO_1 kemi: $\cos 30^0 = \dfrac{\overline{O_1A}}{R}$, d.m.th. $R = \dfrac{\overline{O_1A}}{\cos 30^0} = \dfrac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3}\,cm;$

$tg\, 30^0 = \dfrac{\overline{OO_1}}{r}$, d.m.th.. $\overline{OO_1} = 9\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}\,cm$, pra $h = R - \overline{OO_1} = 3\sqrt{3}\,cm.$

C **3** Është dhënë cilindri me rreze të bazës R dhe lartësi $H = R$. Prej cilindrit është hedhur një kon baza e të cilit puthitet me bazën e cilindrit, kurse maja është qendra e bazës tjetër të cilindrit. Cakto vëllimin e pjesës tjetër të cilindrit.

Vëre zgjidhjen:

Vëllimi i pjesës që ka ngelur prej clindrit është e barabartë me ndryshimin e vëllimeve të cilindrit dhe konit (fig. 5).
Pra, kemi:

$$V = R^2\pi\cdot R - \frac{1}{3}R^2\pi\cdot R, \text{ d.m.th. } V = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

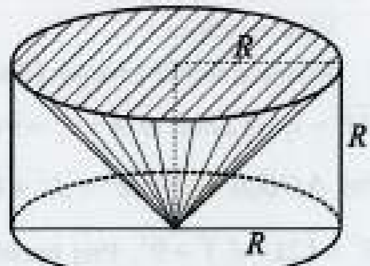


fig.5

Trupi vëllimin e të cilit e caktojmë, dhe gjysmëtopi me rreze R le të shtrihet me bazat e tij në rrafshin Σ_1 (fig. 6).

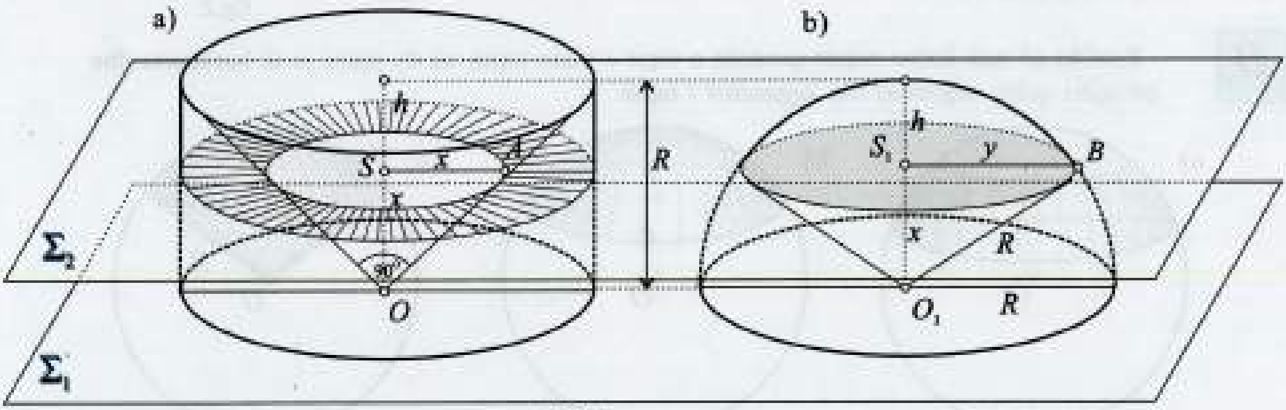


fig.6

Rrafshi Σ_2 është paralel me rrafshin Σ_1 dhe i pret trupat e vendosur. Prerja e rrafshit Σ_2 dhe trupit të parë është unazë rrethore me rreze R dhe x (fig. 6a), pra syprina e tij është $S_1 = \pi(R^2-x^2)$.
Prerja e gjysmëtopit dhe rrafshit Σ_2 është rreth me rreze y (fig. 6b),pra syprina e tij është $S_2 = \pi y^2$.

Trekëndëshi OAS (fig. 6a) është barakrahas kënddrejt, domethënë $\overline{OS} = \overline{SA} = x$.

Pasi $\overline{OS} = R - h$ dhe $\overline{O_1S_1} = R - h$, vijon $\overline{OS} = \overline{O_1S_1} = x = R - h$. Prej trekëndëshit O_1S_1B fitojmë $y^2 = R^2 - x^2$. Pasi $S_1 = \pi(R^2\text{-}x^2)=\pi y^2$ dhe $S_2=\pi y^2$, vijon $S_1=S_2$. Sipas principit të Kavaliotit, vijon se të dy trupat kanë vëllime të barabarta, pra prej këtu vijon se vëllimi i gjysmëtopit është $V = \dfrac{2}{3}R^3\pi$, kurse vëllimi i topit është

$$V = 2\cdot\frac{2}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}R^3\pi.$$

4 Prej tre topave të plumbit, me shkrirje është bërë një top. Cakto rrezen e atij topi nëse rezet e të tre topave janë 3 *cm*, 4 *cm* dhe 5 *cm*.

Vëre zgjidhjen:

■ Vëllimet e të tre topave le të jenë $V_1 = \dfrac{4}{3}R_1^3\pi = \dfrac{4}{3}\cdot 3^3\pi = 36\pi\, cm^3$, $V_2 = \dfrac{4}{3}\cdot 4^3\pi = \dfrac{256\pi}{3}cm^3$ dhe

$V_3 = \dfrac{4}{3}\cdot 5^3\pi = \dfrac{500\pi}{3}cm^3$. Vëllimi i topit të fituar është $V = V_1 + V_2 + V_3 = \dfrac{864\pi}{3}cm^3$.

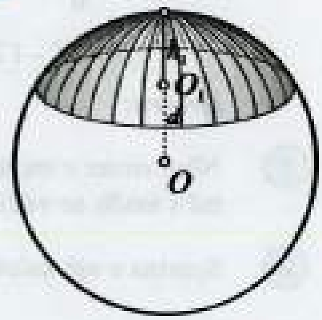
Prej $\dfrac{4}{3}R^3\pi = \dfrac{864}{3}\pi$ vijon $R^3 = 216$, d.m.th. $R = 6\,cm$.

Ç Vëllimin e segmentit të topit (fig. 6b) e shënojmë me *V*s.t. dhe është i barabartë me vëllimin e trupit që është mbi rrafshin $\sum_2$ (fig. 6a), d.m.th. ndryshimi prej vëllimeve të cilindrit (me lartësi h dhe rrezja R) dhe koni i cunguar (me lartësi h, kurse rrezet R dhe $x = R - h$).

$V_{s.t.} = \pi h\cdot R^2 - \dfrac{\pi h}{3}\left(R^2 + (R-h)^2 + R(R-h)\right)$, pra, $V_{s.t.} = \dfrac{\pi h}{3}(3R - h).$

5 Një rrafsh është normal në diametrin e topit dhe e ndan diametrin në pjesë 3 *cm* dhe 9 *cm*. Njehso vëllimin e pjesëve të fituara prej topit.

Vëre zgjidhjen:



■ Lartësia e njërit segment të topit është 3 *cm*, kurse i tjetrit 9 *cm*.

$$V_1 = \frac{3^2\pi}{3}(3\cdot 6 - 3) = 45\pi\, cm^3 \text{ dhe } V_2 = \frac{9^2\pi}{3}(3\cdot 9 - 3) = 648\pi\, cm^3.$$

■ Vëllimi i sektorit të topit (*V*sek.t), (fig. 6b) është e barabartë me shumën e vëllimeve të segmentit të topit (me lartësi h dhe rreze y) dhe koni (me lartësi $x = R - h$ dhe rreze y).

Pasi $y^2 = R^2 - x^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2$, kemi: $V_{sek.t.} = \dfrac{\pi h^2}{3}(3R - h) + \dfrac{\pi}{3}y^2(R - h)$ ose

$V_{sek.t.} = \dfrac{\pi h^2}{3}(3R - h) + \dfrac{\pi}{3}(2Rh - h^2)(R - h)$, pra, $V_{sek.t.} = \dfrac{2}{3}R^2\pi h.$

6 Cakto vëllimin e sektorit të topit nëse rrezja e bazës së tij është 60 cm, kurse rrezja e topit është 75 cm.

Vëre zgjidhjen:

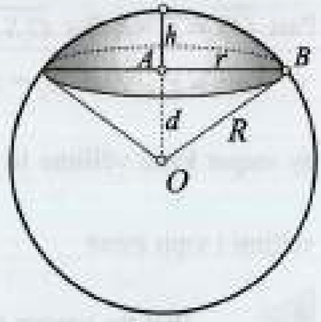


fig.7

- Prej $\Delta\ AOB$ kemi $d^2 = R^2 - r^2$, përkatësisht $d = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45\,cm$,

pra $h = 75 - 45 = 30\ cm$ (fig. 7). Pra, $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = 225\,dm^3$.

- Vëllimi i shtresës së topit (fig. 8) është i barabartë me ndryshimin e vëllimeve të dy segmenteve të topit që janë nga ana e njëjtë e qendrës së topit, d.m.th. $V = \dfrac{\pi h}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right)$.

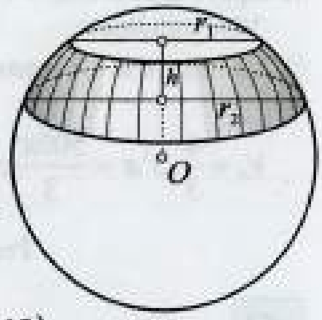


fig.8

7 Topi me rreze 35 cm është prerje me dy rrafshe paralele nga ana e njëjtë në lidhje me qendrën. Rrafshet janë në largësi 11 cm dhe 17 cm prej qendrës të topit. Njehso vëllimin e shtresës së topit.

Vëre zgjidhjen (fig. 9):

- Vëllimin do ta caktojmë si ndryshim të dy segmenteve, lartësitë e të cilëve janë $h_1 = R - \overline{OO_1} = 35 - 11 = 24\,cm$ dhe $h_2 = R - \overline{OO_2} = 35 - 17 = 18\,cm$.

$V = \dfrac{\pi h_1^2}{3}(3R - h_1) - \dfrac{\pi h_2^2}{3}(3R - h_2)$, $V = \dfrac{\pi \cdot 24^2}{3}(3 \cdot 35 - 24) - \dfrac{\pi \cdot 18^2}{3}(3 \cdot 35 - 18)$,

$V = 192\pi \cdot 81 - 108\pi \cdot 87 = 6156\pi\ cm^3$.

Vëllimin mund ta caktosh duke zbatuar formulën:

$$V = \frac{\pi h}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right),\ h = 17 - 11 = 4\ cm,$$

$$r_1^2 = R^2 - 17^2 \text{ dhe } r_2^2 = R^2 - 11^2.$$

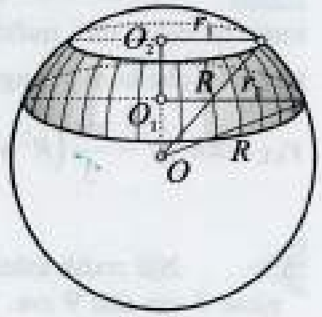


fig.9

Detyra:

1. Nëse rrezet e tre topave qëndrojnë se 1 : 2 : 3, atëherë vëllimi i topit më të madh është tre herë më i madh se vëllimet e të dy topave tjerë. Vërteto

2. Syprina e një kalote është $\dfrac{2}{5}$ e syprinës së sferës. Cakto syprinën e kalotës dhe vëllimin e segmentit të topit nëse rrezja e bazës së tyre të përbashkët është $2\sqrt{6}\ cm$.

3. Rrethi i madh i topit është baza e konit lartësia e të cilit është e barabartë me diametrin e topit. Njehso vëllimin e topit nëse rrezja e prerjes së sferës dhe sipërfaqes konike kanë rreze 12 cm.

4. Te kubi me brinjë a është brendashkruar topi, kurse rreth kubit është jashtashkruar topi. Cakto raportin e syprinave dhe raportin e vëllimeve të topave.

5. Një shtresë e topit dhe një cilindër kanë bazë të përbashkët dhe lartësi të përbashkët. Ndryshimi i vëllimeve të tyre është $36\pi\,cm^3$. Cakto lartësinë e tyre.

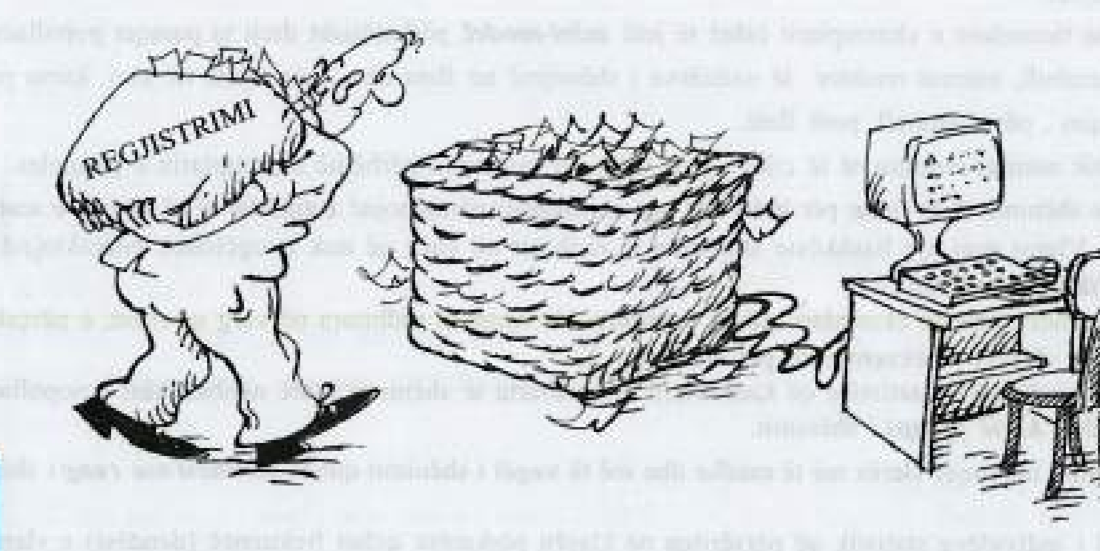
TEMA 8

PËRPUNIMI I TË DHËNAVE

Çka është e saktë në matematikë përveç saktësisë?
A nuk është ajo pasojë e ndjenjës së brendshme për vërtetësinë?

Gete 1749/1832

- masat për shpërdarjen e të dhënave, intervali, madhësia;
- masa për shpërdarjen e të dhënave dhe devijimi standard;
- standardizimi i të dhënave, krahasimi i shpërdarjes së shënimeve;
- paraqitja grafike e caktimit të intervaleve dhe madhësia e tyre.



1 POPULLACIONI, SHËNIMI, EKZEMPLARI (MOSTRA), MESI ARITMETIK, MODA, MEDIANA

Kujtohu!

- Çka nënkupton me konceptin ***statistikë***?
- Cilat faza i përmbajnë hulumtimet statistikore?

A

■ Bashkësia e objeketeve të llojit të njëjtë ose rezulltatet e ndonjë operacioni, të cilët kanë një karakteristikë të përbashkët quhet ***popullacion.***

■ Elementet e bashkësisë statistike janë ***njësitë statistike.*** Për shembull, nxënësit e një shkolle, banorët e një qyteti, fidanet e mollëve në një kopsht etj.

■ Karakteristika e përbashkët që vërehet te elementet e popullacionit e quajmë ***shënim*** (gjurmë).

Shënimet statistike i ndajmë në kualitative dhe kuantitative.
- Shënimet kualitative të shembullit paraprak janë: gjinia e nxënësve, struktura arsimore e banorëve të qytetit, sortat e mollëve etj.
- Shënimet kuantifikative shprehen me numra real. Në shembullin tonë, për nxënësit janë lartësia, masa; për banorët mund të meret struktura e tyre e vjetërsisë, për mollët mund të meret rendimenti në kilogramë për dru etj.

Në statistikën matematike llogaritet se çdo shënim X është ***ndryshore e rastit.***
Shënimet kuantifikative mund të jenë ***të ndërprera*** (diskrete) dhe ***të pandërprera.***
Shembull për shënimet e ndërprera - numri i mungesavę të nxënësit ose klasës.
Shembull për shënime të pandërprera - lartësia, vjetërsia, masa e nxënësve në një shkollë.

■ Pjesa (nënbashkësia) e popullacionit, te e cila kryhen hulumtimet e nevojshme e quajmë ***ekzemplar*** ose mostër.

Kërkesa themelore e ekzemplarit është të jetë ***mini-model,*** përkatësisht drejt ta paraqet popullacionin.

Për shembull, numrat rreshtor të nxënësve i shënojmë në fleta dhe i përziejmë në kuti, kurse pastaj tërheqim , për shembull, pesë fletë..

Nxënësit numrat rreshtor të të cilëve janë tërhequr rastësisht përbëjnë ekzemplarin e paraleles.

■ Vlera e shënimit X të fituar për individët nga ekzemplari përcaktojnë ***bashkësi të të dhënave statistike*** për X. Vlerat prej një bashkësie statistike të radhitur në varg që nuk zvogëlohet, përcaktojnë ***varg statistik*** për shënimin X.

■ Vlerat e ndryshme te ekzemlari quhen ***variante.*** Variantet të radhitura në varg që rritet, e përcaktojnë vargun e vlerave të ekzemplarit për shënimin X.

■ Numri i individëve statistike që kanë vlera të barabarta të shënimit është nënbashkësi e popullacionit dhe quhet ***klasë (grup)*** i shënimit.

■ Ndryshimi ndërmjet vlerës më të madhe dhe më të vogël i shënimit quhet ***madhësi*** ose ***rang*** i shënimit.

■ Numri i individëve statistik që përsëriten në klasën përkatëse quhet frekuencë (dendësi) e vlerave $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ të shënimit x, ndërsa $N = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n$ është numri i përgjithshëm i individëve statistik te popullacioni që vështrohet.

■ Vargu i variantave dhe vargu përkatës i frekuencave, e përcaktojnë shpërdarjen e frekuencave të ekzemplarir për shënimin X.

1 Suksesin (notat) e nxënësve në një klasë nga lënda e matematikës do ta japim me tabelë, përkatësisht me vargun statistik i cili nuk zvogëlohet:

1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	3	3	3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	5	5	5	5	5

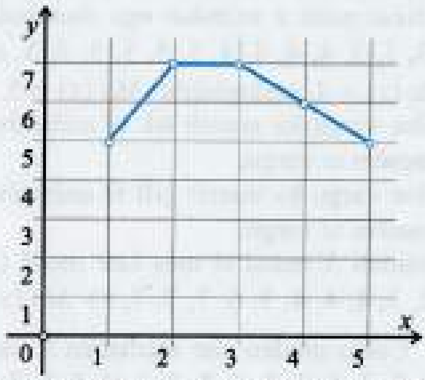
Është e qartë, numri i frekuencave është si vijon:

$f_1 = 5,\ f_2 = 7,\ f_3 = 7,\ f_4 = 6$ dhe $f_5 = 5$.

Tabela statistike shihet kështu:

Vlerae shënimit x	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=4$	$x_5=5$	
f: Numri i notave indivi statistik qëpërëriten	5	7	7	6	5	$\Sigma=30$

Nëse në rrafshin koordinativ xOy, në boshtin x i bartim vlerat e shënimit, kurse në boshtin y frekuencat, e fitojmë ***diagramin*** e frekuencës.



2 Në 24 amvisëri janë hulumtuar shpenzimet mujore të vajit, të shprehur në litra. Pas hulumtimit janë fituar këto të dhëna:

2	3	5	2	1	6	7	2
1	3	5	4	2	1	3	2
6	4	2	3	2	1	6	4

Bëne shpërdarjen e frekuencave dhe formo tabelë statistike

- ***Frekuencat kumulative (e grumbullit)*** të shënimit X_1 është f_1; të X_2 është $f_1 + f_2$; të X_3 është $f_1 + f_2 + f_3$; të shënimit X_4 është $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ etj.

B

Karakteristika e një vargu statistik është ***mesi aritmetik*** i të gjitha vlerave të shënimit statistik.

- Mesi aritmetik i ekzemplarit të realizuar x_1, x_2, ..., x_n, me madhësi n (numri i elementeve prej popullacionit) për shënimin X është numri.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n},$$ ose shkurtimisht

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

3 Një nxënës në fund të vitit shkollor, sipas lëndëve i kanë këto nota: 4, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 5, 5. Cakto suksesin mesatar të nxënësit.

Vëre zgjidhjen

- Suksesi i nxënësit është shënimi X, kurse notat sipas lëndëve janë vlerat e shënimit. Prandaj,

$$\bar{x} = \frac{4+3+4+5+3+4+5+4+5+3+5+5+5}{13} = 4{,}15.$$

Deri te zgjidhja mund të arrihet nëpërmjet grupimit, d.m.th.

x	3	4	5
f	3	4	6

prej ku $\bar{x}=\dfrac{3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 6}{3+4+6}=4{,}15$

4 Në provimin me shkrim nga matematika në një paralele është arritur ky sukses: notë 5 kanë marrë 3 nxënës, notë 4 kanë marrë 8 nxënës, notë 3 kanë marrë 6 nxënës, notë 2 kanë marrë 9 nxënës dhe notë 1 kanë marrë 6 nxënës. Cakto notën mesatare të paraleles të arritur në provimin me shkrim.

- Numri (vlera e ekzemplarit) që e ndan vargun statistik përkatës në dy pjesë të barabartë quhet ***medianë*** dhe e shënojmë me $Me\ (x)$.
- Numri (vlera e ekzemplarit) që më së shpeshti paraqitet në vargun statistik quhet ***modë*** dhe e shënojmë me $Mo\ (x)$.

Mediana dhe moda janë vlera mesatare pozicionale, kurse vlera e tyre varet prej pozitës që e arrijnë në vargun statistik.

5 Nëse notat e nxënësit nga shembulli paraprak i radhisim në varg që rritet:
3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, atëherë sipas përkufizimit për medianën, përkatësisht modën kemi $Me\ (x)=4$, përkatësisht $Mo\ (x)=5$.

- Nëse vargu ka numrë tek të anëtarëve, atëherë mediana është e barabartë me vlerën e anëtarit të mesëm te vargu.
- Nëse vargu ka numër çift të anëtarëve atëherë mediana është mesi aritmetik prej të dy anëtarëve të mesëm te vargu.
- Shënimi X mund të mos ketë modë (3, 4, 6, 8, 10), mund të ketë edhe më shumë vlera modale (2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8) $Mo\ (x)=4$ dhe $Mo\ (x)=7$.

6 Cakto modën dhe medianën te shënimi bashkësia statistike e të cilës është:
2, 3, 4, 2, 3, 5, 2, 2, 1, 4, 5, 1, 3, 3, 4, 1, 1, 3, 2,2.

Detyra:

1 Në fund të vitit shkollor, arsimtari i matematikës i ka shkruar në tabelë notat e nxënësve të asaj paralele, në këtë mënyrë:

4	3	5	1	2	3	5	4	2	1
5	2	4	3	1	2	4	3	3	2
1	1	2	4	1	5	1	3	3	3

Cakto vargun statistik dhe formo tabelë statistike.

2 Shpërdarja e frekuencave të çdo shënimi është dhënë A me tabelë:

Shënim x		4	5	8	9	11	15	20
f	3	4	3	8	4	6	2	

Cakto numrin e individëve të bashkësisë statistike vlerat e të cilave janë:
a) më të vogla ose të barabarta me 8;
b) më të vogla se 15.

3 Në një garë nga matematika kanë marrë pjesë 120 nxënës. Janë arritur këto rezulltate:

Интервал на бодови	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	80-100
Број на ученици	2	5	10	21	43	30	9

Paraqiti grafikisht shpërdarjen e frekuencave.

4 Një shënim statistik i ka këto vlera: 1, 2, 3, 5, 2, 4, 1, 3, 2, 2, 5, 5, 3, 4, 2.
Cakto mesin aritmetik, medianën dhe modën e shënimit.

2 MASA PËR SHPËRDARJEN E TË DHËNAVE (MADHËSIA, KVARTILE, SHMANGËJAI INTERKVARTILE)

Kujtohu!

- Çka është intervali?
- Çfarë intervale kemi?

A Nga mësimi i kaluar vërejtëm se sa rëndësi ka vlera mesatare. Megjithatë, vlera mesatare ndonjëherë mund të jap fotogtafi të paqartë për përshkrimin e shënimeve dhe krahasimet e tyre.

Për shembull, edhe pse dy nxënës kanë notë mesatare të njëjtë nga një lëndë mësimore, njëri mund të tregon njohuri të njëjtë të kontinuar, kurse tjetri me njohuri të ndryshueshme.

Theksuam se mesi aritmetik dhe vlerat tjera mesatare e karakterizojnë bashkjësinë e dhënë statistike si masë të vlerave prej ndonjë shënimi të tij. Por, ato nuk janë karakteristika të mjaftueshme, pasi ekzistojnë bashkësi statistike të cilët mund të kenë vlera të njëjta mesatare, por shpërdarje të ndryshme të vlerave. Për shembull, shënimet vlerat e të cilave janë 28, 30, 32, përkatësisht 2,30, 58 kanë mes të njëjtë aritmetik 30 ($\overline{x}=\frac{90}{3}=30$), por te shënimi i parë vlerat pak shmangen prej mesit aritmetik. (28 - 30 = -2, 30 - 30 = 0, 32 - 30 = 2), te shënimi i dytë shmangëjet janë më të mëdhaja dhe janë 2 - 30 = -28, 30 - 30 = 0, 58 - 30 = 28. Prandaj, mesi aritmetik $\overline{x}=30$ me saktësi të madhe e reprezanton shënimin e parë se sa të dytë.

B Ndryshimi ndërmjet vlerës më të madhe dhe më të vogël quhet ***madhësi*** ose ***rang*** i shënimit:

$$R=X_{max}-X_{min}$$

Madhësia zbatohet kur bashkësia statistike ka numër të vogël të elementeve, zakonisht deri më dhjetë dhe prandaj zbatohet gjatë kontrollës të kualitetit të prodhimit.

Për shembull, në dy bashkësitë statistike paraprake (28, 30, 32) i (2, 30, 58), vlera e rangut është R_1 = 32 - 28 = 4, R_2 = 58 - 2 = 56, që tregon se më i madh është koncentracioni i elementeve se sa mesi aritmetik në të parën se në shënimin e dytë.

1 Cakto vlerën e rangut të shënimit vlerat e të cilit janë (16, 20, 24) dhe (4, 20, 36).

2 Te bashkësitë statistike (1, 5, 10, 40, 70, 75, 79) dhe (1, 38, 39, 40, 41, 42, 79), cakto mesin aritmetik dhe rangun.

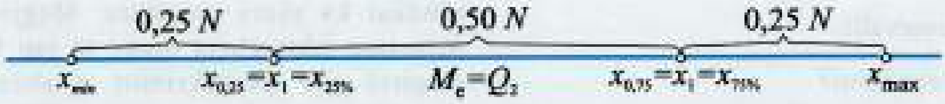
Udhëzim. Vëren se meset e tyre aritmetike $\overline{x}_1=40=\overline{x}_2$ janë të barabarta, poashtu edhe rangu $R_1=R_2=79-1=78$ është i barabartë, edhe nëse grupimi rreth mesit është më i madh te e dyta, se sa te bashkësia e parë.

Prej këtij shembulli shihet se rangu ka mungesë si masë për shpërdarjen e të dhënave, pasi nuk mbahet llogari për çdo element në bashkësinë statistike, përkatësisht për largësinë e tyre prej anëtarit të mesëm te bashkësia.

Rangu është vetëm gjatësia e intervalit të vlerave të x dhe nuk e shpreh shmangëjën e vlerave të ekzemplarit prej $\overline{x}$.

B Shpeshherë në shqyrtimin e bashkësisë statistike hyjnë disa elemente të cilët ndryshe nuk i takojnë. Zakonisht ato elemente kanë vlerë ekstreme vijuese të ndryshores së rastit në atë bashkësi, pra me përcaktimin e rangut fitojmë pasqyrë të gabueshme për bashkësisnë statistike.

Që të eleminohet ndikimi i këtyre vlerave ekstreme (fig. 1) i largojmë djathtas



prej kufirit të poshtëm x_{min} dhe majtas prej kufirit të sipërm x_{max} nga 25% të të gjitha frekuencave dhe kështu fitojmë ***shmangëje interkvortile*** $(x_{0,25}; x_{0,75})$ që përmban 50% frekuenca, ku $Q_1 = x_{0,25}$ dhe $Q_3 = x_{0,75}$ quhet ***kvartili*** i poshtëm dhe i sipërm.

Gjysmëshuma $Q = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$, quhet ***shmangëja interkvartile***.

Mediana i ndan të gjithë anëtarët e bashkësisë në dy pjesë të barabarta. Nëse njehsohet mediana për çdonjërin prej atyre dy pjesëve, fitohen kvartili i poshtëm Q_1 dhe kvartili i sipërm Q_3, ashtu që medianën mund ta shënojmë $Me=Q_2$. Në këtë mënyrë kvartilet dhe mediana e ndajnë bashkësinë statistike në katër pjesë të barabarta prej nga 25% prej të gjithë elementeve të bashkësisë statistike.

3 Te bashkësia statistike prej nëntëmbëdhjetë elemente (N=19): 1, 3, 3, 4, (4), 4, 6, 7, 9, (11), 11, 11, 13, 15, (16), 17, 17, 18, 20, cakto kvartilin e poshtëm dhe të sipërm.

Vëre zgjidhjen:

- Mediana është $Me = \dfrac{X_N + 1}{2} = X_{10} = 11$. Bashkësinë statistike e ndajmë në dy nënbashkësi prej nëntë elemente medianet e të cilave janë kvartilet e kërkuara:

$$Q_1 = x_5 = 4 \text{ dhe } Q_3 = x_{15} = 16.$$

Këto të dhëna mund t'i paraqesim në tabelë, te e cila futen frekuencat dhe frekuencat kumulative. Me shmangëjet interkvartile është krye eleminimi i elementeve ekstreme dhe të dyshimta te bashkësia e dhënë statistike.

x	f	f_k
1	1	1
3	2	3
4	3	6
6	1	7
7	1	8
9	1	9
11	3	12
13	1	13
15	1	14
16	1	15
17	2	17
18	1	18
20	1	19

4 Te bashkësia statistike prej pesëmbëdhjetë elemente (N=15) : 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 18, cakto kvartilin e poshtëm dhe të sipërm.

Detyra:

1. Cakto vlerën e rangut të shënimit vlerat e të cilave janë: (18, 15, 12) dhe (16, 15, 14).
2. Te bashkësia statistike (1, 4, 9, 39, 69, 74, 78) dhe (1, 39, 40, 41, 42, 80), cakto mesin aritmetik dhe rangun
3. Te bashkësia statistike prej 17-anëtarë (N=17): 2, 2, 3, 3, 3, 4, 6, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, cakto kvartilin e poshtëm dhe të sipërm.

3 MASAT PËR SHPËRDARJEN (DISPERZIONIN) ETË DHËNAVE (VARIANSA DHE DEVIJIMI STANDARD)

Kujtohu!

- Për medianën dhe modën.
- Për mesin aritmetik.
- Për shmangëjen kvartile..

A Përveç modës, medianës, mesit aritmetik dhe vlerave tjera mesatare e përcaktojnë në një far lloj mënyre qendrën e shpërdarjes së shënimit, është e domosdoshme të kemi informacion për ***shpërdarjen*** dhe shmangëjen e të dhënave nga mesi i zgjedhur.

Përkatësisht, shpeshherë ndodh dy shënime të kenë përafërsisht vlerë mesatare të njëjtë, kurse të pranojnë vlera prej intervaleve të ndryshme sipas pozitës dhe gjatësisë ose, kur janë caktuar në bashklësinë e njëjtë, te njëra të jenë më të shpeshta vlerat rreth mesit, kurse te tjetra ato prej skajeve.

Karakteristika numerike e ekzemplarit, e cila është masë për shmangëjen e të dhënave nga mesi i tij aritmetik është disperzioni i ekzemplarit.

Varijansa e shënimit X me vlera të pagrupuara $x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$ është përkufizuar me formulën

$$\delta^2 = \frac{\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+\left(x_N-\bar{x}\right)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$$

ku $\bar{x}$ është mesi aritmetik i shënimit X.

Varijansa e ekzemplarit për shënimin X për të cilën është bërë shpërdarja e frekuencave që është dhënë me formulën.

$$\delta^2 = \frac{\left(x_1-\bar{x}\right)^2 f_1+\left(x_2-\bar{x}\right)^2 f_2+\ldots+\left(x_n-\bar{x}\right) f_n}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 f_i \quad \text{ku } N=\sum_{i=1}^{n} f_i,\ \bar{x} \text{ është mesi}$$

aritmetik i shënimit X me vlerat $x_1, x_2, \ldots x_n$, nëse grupimi është kryе sipas madhësisë.

Përcaktimi i disperzionit në rastin kur nuk shfrytëzohet kalkulatori, zakonisht kryhet me këtë tabelë punuese.

x	f	xf	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 f$
x_1	f_1	$x_1 f_1$	$x_1-\bar{x}$	$(x_1-\bar{x})^2$	$(x_1-\bar{x})^2 f_1$
x_2	f_2	$x_2 f_2$	$x_2-\bar{x}$	$(x_2-\bar{x})^2$	$(x_2-\bar{x})^2 f_2$
x_3	f_3	$x_3 f_3$	$x_3-\bar{x}$	$(x_3-\bar{x})^2$	$(x_3-\bar{x})^2 f_3$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
x_n	f_n	$x_n f_n$	$x_n-\bar{x}$	$(x_n-\bar{x})^2$	$(x_n-\bar{x})^2 f_n$
Gjithsej:	N	$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$		$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{n}\left(xi-\bar{x}\right)^2 f_i$

Disperzioni i ekzemplarit ka zbatim të madh në hulumtimet statistike, por pasi vlera e tij është shprehur në njësi katror të matjeve me të cilët janë matur vlerat e shënimit X, si masë të disperzionit meret rrënja katrore pozitive prej variansës δ^2 dhe quhet shmangëja standarde ose ***devijimi standard*** i ekzemplarit, d.m.th.

$$\delta=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)^2},$$ nëse vlerat nuk janë grupuar, kurse $$\delta=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 f_i},$$ nëse vlerat të shënimit janë grupuar.

1 Rendimenti i grurit në një amvisëri gjatë shtatë viteve është dhënë me këtë tabelë:

39 40 45 50 53 58 65.

Cakto variansën dhe devijimin standard të redimentit të grurit.

Vëre zgjidhjen:

Caktimin do ta kryejmë sipas tabelës punuese, te e cila

								Gjithsej:
x	39	40	45	50	53	58	65	350
$x-\bar{x}$	-11	-10	-5	0	3	8	15	0
$(x-\bar{x})^2$	121	100	25	0	9	64	225	540

$$\overline{x}=\frac{350}{7}=50.$$

$$\delta^2=\frac{544}{7}=77,714, \text{ dhe } \delta=8,816.$$

2 Të caktohet variansa dhe devijimi standard për shënimin vlerat e të cilit janë:

a) 3, 4, 7, 4, 4, 5; b) 1, 2, 5, 7, 7, 8, 10, 1.

3 Për caktimin e lartësisë mesatare të nxënësve prej një shkolle është zgjedhur ekzemplari prej 20 nxënësve. Me matje të lartësive të tyre janë fituar këto të dhëna:

Të caktohet lartësia mesatare e nxënësve dhe shmangëja standarde e lartësive të nxënësve prej lartësisë mesatare.

Lartësia në m	1,53	1,54	1,57	1,69	1,70	1,71	1,73	
Numri i nxënësve	2	1	5	9	1	1	1	20

Vëre zgjidhjen:

Lartësia mesatare është mesi aritmetik:

$$\overline{x}=\frac{1}{20}(1,53\cdot 2+1,54\cdot 1+1,57\cdot 5+1,69\cdot 9+1,70\cdot 1+1,71\cdot 1+1,73\cdot 1)$$

Pas rregullimit të shprehjes në kllapa fitojmë $\overline{x}=1,64m$.

Për disperzionin statistik δ^2, fitojmë:

$$\delta^2=\frac{1}{20}\Big[2(1,53-1,64)^2+(1,54-1,64)^2+(1,57-1,64)^2\cdot 5+(1,69-1,64)^2\cdot 9+$$
$$+(1,70-1,64)^2+(1,71-1,64)^2+(1,73-1,64)^2\Big]=0,00489,$$

prej ku, pas njehsimit të rrënjës katrore, fitojmë: $\delta=0,07m$.

Vërejmë se shmangëja standarde është afër zeros, kurse kjo do të thotë se shpërdarja e lartësive të nxënësve prej lartësisë mesatare është e vogël. Numër i madh i variansave të lartësive të nxënësve gjenden ndërmjet $1,57m$ dhe $1,71m$, d.m.th. në intervalin $\left(\overline{x}-\delta,\overline{x}+\delta\right)$ me gjatësi 28.

4 Të caktohet shmangëja standarde e shënimit X ku shpërdarja e frekuencave është dhënë me këtë tabelë:

x	1	2	3	4	5	6	
f	4	10	7	6	3	5	35

Detyra:

1. Të caktohet mesi aritmetik $\overline{x}$ dhe shmangëja standarde δ për shënimin X ku shpërdarja e frekuencave është dhënë me këtë tabelë:

x	6	7	8	10	11	
f	2	3	6	4	1	23

2. Pesë monedha hudhen, njëkohësisht, 1000 herë dhe në çdo hudhje shkruhet numri i stemave. Rezulltatet e fituara janë vendosur në këtë tabelë:

Numri i stemave	0	1	2	3	4	5	
Numri i nxënësve	38	144	342	287	164	25	100

3. Redimenti i elbit në tonelata në një ekonomi prej vitit 1991 deri më 2000 ka lëvizur sikurse në tabelë:

Viti	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Elb nëton	53	26	27	30	30	27	27	31`	31	30

Të njehsohet:

4 STANDARDIZIMI (NORMIMI) I TË DHËNAVE

Kujtohu!

- Për mesin aritmetik.
- Për disperzionin (varijansën).

A Te detyrat për përfundim shpeshherë është e nevojshme të krahasohen shënimet të shprehura me madhësi të rendit të ndryshëm. Në rastin e atillë karakteristikat themelore numerike dhe shpërdarjet nuk mund të krahasohen drejtpërdrejt.

Përveç kësaj, për shfrytëzimin e tabelave për shpërdarjet e ndryshme, të dhënat shpeshherë duhet të përshtaten.

Le të jetë $x_1, x_2, \ldots, x_n$ është ekzemplar për shënimin X me mesin aritmetik $\overline{x}$ dhe disperzioni δ^2.

Transformacioni $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}}{\delta}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ quhet ***normimi ose standardizimi i të dhënave***.

Mesi aritmetik $\overline{z}$ dhe disperzioni δ_Z^2 i të dhënave të standardizuara do të jenë:

$$\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\delta}\right) = \frac{1}{n\delta}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right) = 0,$$

$$\delta_Z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \overline{z}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \frac{1}{n\delta^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right) = 1.$$

Domethënë, mesi aritmetik dhe disperzioni i të dhënave të nromuara janë, $\overline{z} = 0$ dhe $\delta_Z^2 = 1$.

4 Në një fabrikë është vështruar puna në kompleksin e elektromotorëve dhe për këtë qëllim është regjistruar numri i pjesëve rezervë dhe të përdorura për kohën e punës të 59 elektromotorëve.

x_i	n_i	$f_i x_i$
0	3	0
1	17	17
2	10	20
3	18	54
4	12	48
5	7	35
6	2	12
Σ	59	176

Të dhënat e fituara janë dhënë në tabelë.

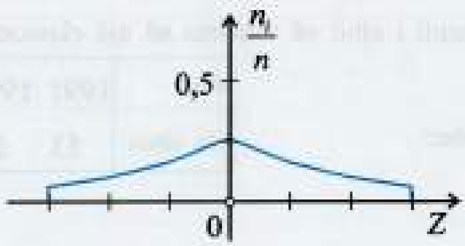
Të kryhet normimi i të dhënave.

Vëre zgjidhjen:

Mesi aritmetik është $\bar{x}=\frac{170}{59}=2,98\approx 3$, ndërsa disperzioni është $\delta=1,688$.

Pasqyra për normimin e të dhënave të dhëna në tabelë.

x_i	$x_i - x$	z_i	n_i/n
0	-3	-1,78	0,051
1	-2	-1,19	0,119
2	-1	-0,59	0,168
3	0	0,00	0,305
4	1	0,59	0,203
5	2	1,19	0,119
6	3	1,78	0,034
Σ	0	0	1,000



Ushtrim kontrollues tematik

1. Është dhënë shpërdarja e frekuncave në këtë tabelë:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	13	6	9	18	4	11	2	10	7

Formo tabelë të frekuencave kumulative.

2. Vizato poligonin e frekuencave kumulative sipas të dhënave në tabelë:

Intervali i pikëve	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
Frekuenca	2	5	10	21	43	30	9
Frekuenca kumulative	2	7	17	38	81	111	120

3. Cakto mesin aritmetik, medianën dhe modën e shënimit të dhënë me vlerat 1, 2, 2, 1, 3, 4, 4, 1, 2, 5, 4, 5, 1, 4.

4. Te bashkësia statistike:

a) (1, 3, 5, 6, 7, 9, 11); b) (2, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 17, 20);

cakto mesin aritmetik, rangun dhe kavrtilin e poshtëm dhe të sipërm.

5. Cakto variansën dhe devijimin standard për shënimet:

a) 4, 5, 8, 5, 5, 6; b) 2, 3, 6, 8, 8, 9, 11, 2.

TEMA 1

FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE TË KËNDIT TË NGUSHTË TE TREKËNDËSHI KËNDDREJT

1 ① $\alpha_1 = 21^0 35'$. ② a) 480'; b) 120'; c) 301'. ③ a) $15^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 15\, rad = \frac{\pi}{12} rad \approx 0,26\, rad$;

b) 0,78 *rad*; c) 3,66 *rad*; ç) 5,23 *rad*. ④ a) $\alpha = \frac{3}{2}\pi\, rad = \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{180^0}{\pi} = 270^0$; b) 420^0; c) 165^0.

2 ① a) (pasi $\frac{3}{4} < 1$); c); ç). ② $\sin\alpha = \frac{28}{100} = 0,28$; $\cos\alpha = \frac{96}{100} = 0,96$; $tg\,\alpha = \frac{28}{96} = 0,291(6)$;

$ctg\,\alpha = \frac{96}{28} = 3,4285...$ ③ $tg\,50^0 = \frac{H}{5}$ ose $H \approx 5,958$. ④ Udhëzim. Prej $\frac{a}{b} = \frac{8}{15}$, vijon $a = \frac{8}{15}b$ dhe

$c = \frac{17}{15}b$. $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{15}b : \frac{17}{15}b = \frac{8}{17} = 0,470$; $\cos\alpha = \frac{15}{17}$; $tg\,\alpha = \frac{8}{15}$; $ctg\,\alpha = \frac{15}{8}$.

3 ① a) $\alpha = 20^0$; b) $\alpha = 38^0 15'$; c) $\alpha = 54^0 40'$; ç) $\alpha = 89^0 37'$; d) $\alpha = 45^0$; e) $\alpha = 35^0$.

② a) Prej $\cos 20^0 = \sin 70^0$ dhe $\sin 20^0 = \cos 70^0$ kemi:

$\frac{3\sin 70^0 - 2\cos 20^0}{2\sin 20^0 + \cos 70^0} = \frac{3\sin 70^0 - 2\sin 70^0}{2\cos 70^0 + \cos 70^0} = \frac{\sin 70^0}{3\cos 70^0} = \frac{1}{3} tg\, 70^0$; б) $\frac{2}{5}$.

③ a) $2\sin\alpha$; b) $2\sin\alpha$; c) $2\sin^2\alpha$.

4 ① a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) -2. ③ a) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ *m*, b) 8 *m*; c) $8\sqrt{3}\, m$.

5 ① Udhëzim. a) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$, $tg\,\alpha = \frac{5}{12}$, $ctg\,\alpha = \frac{12}{5}$;

b) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $tg\,\alpha = \frac{24}{7}$, $ctg\,\alpha = \frac{7}{24}$. ② a) $ctg\,\alpha = \frac{12}{35}$, $\sin\alpha = \frac{35}{37}$, $\cos\alpha = \frac{12}{37}$; b) $tg\,\alpha = \frac{21}{20}$,

$\sin\alpha = \frac{20}{29}$, $\cos\alpha = \frac{21}{29}$. ③ b) $L = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$

$$= \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 1 + 2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2}{\sin\alpha} = D.$$

6 ① a) $\sin 12 < \sin 25^0 < \sin 75^0$; b) $\sin 20^0 < \sin 23^0 < \cos 35^0 < \cos 15^0$;

c) $tg\,10^0 < tg\,15^0 < ctg\,40^0 < ctg\,20^0$. ② a) negativ; b) pozitiv; c) negativ; ç) pozitiv.

7 ① Udhëzim: a) $b = a \cdot ctg\,\alpha = 5 \cdot ctg\,40^0 = 5,959$; $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin 40^0} = 7,776$; $\beta = 50^0$.

b) $b = 25 \cdot tg\,72^0 30' = 79,289$; $c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{5}{\cos 72^0 30'} = 16,(6)$; $\alpha = 17^0 30'$.

c) $b = 15cm$, $\sin\alpha = \frac{8}{17} = 0,470$, $\alpha = 28^0 2'$; $\beta = 61^0 58'$. ґ) $c = 25cm$, $tg\,\alpha = \frac{7}{24} = 0,291$, $\alpha = 16^0 15'$; $\beta = 73^0 45'$.

② Udhëzim. a) $\frac{a}{2}=b\cos\alpha$ ose $a=17,998cm$, $P=47,998cm$, b) $\frac{a}{2}=h_a\cdot tg\frac{\gamma}{2}$ ose $a=42,004cm$, $b=58,501$,$P=159,006cm$. ③ Udhëzim. $a=\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}=34cm$, $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{16}{30}$ ose $\alpha=56^0 10'$, $\beta=123^0 50'$. ④ Udhëzim. $\cos\alpha=\frac{\frac{a-b}{2}}{c}=\frac{5}{13}$ ose $\alpha=67^0 22'$, $\beta=112^0 38'$.

⑤ Udhëzim. $tg\,9^0=\frac{\ell}{150}$ ose $\ell=150\cdot tg\,9^0=23,756$.

TEMA 2

NUMRAT KOMPLEKS

1 ① a) Të gjitha bashkësitë numerike. b) Të gjitha bashkësitë numerike pa ℕ. c) Të gjitha bashkësitë numerike pa ℕ dhe ℤ. ç) Vetëm bashkësia numerike ℝ. d) Asnjë bashkësi numerike. ② a) $(x+5i)(x-5i)$; b) $\left(x+i\sqrt{13}\right)\left(x-i\sqrt{13}\right)$; c) $(x+yi)(x-yi)$. ③ a) -i; b) -1; c) -i; ç) 2; d) -i.

④ 

2 ① a) $z=-1-3i$, $-z=1+3i$, $z=-1+3i$; b) $z=0-3i$, $-z=0+3i$, $z=0+3i$; c) $z=-4+0i$, $-z=4+0i=4$, $z=-4-0i=-4$. ② $z=3+2i$; $13=9+4=(3+2i)(3-2i)$.

③ $\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\Rightarrow a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$. ④ a) $x=2$ dhe $y=-3$; b) $x=1$ dhe $y=1$.

3 ① a) $5i$; b) $\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{2}{3}i$; c) $\frac{3\sqrt{2}}{20}+\frac{3}{30}i$; ç) $2+\sqrt{2}i$. ② a) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{i}=-\overline{Z}$; b) ngjashëm si nën a); ③ a) 2-10i; b) $\frac{1}{2}-5i$. ④ a) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$; b) $-\frac{9}{10}+\frac{7}{10}i$.

4 ① a) (2,-3); b) (31,-1). ② x=-6; y=7. ③ (fig. 1) ④ (fig. 2)

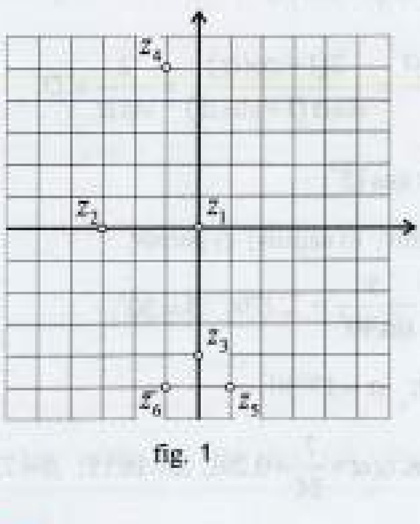


fig. 1

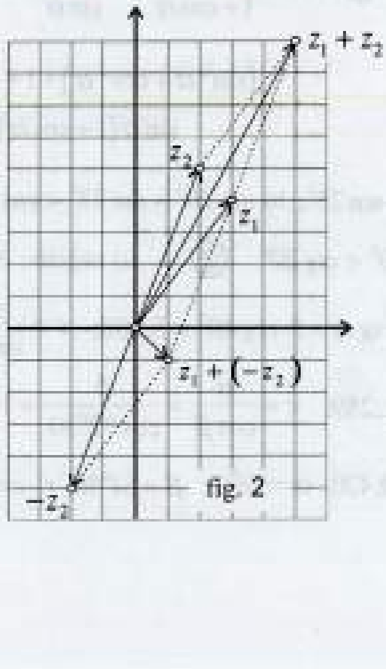


fig. 2

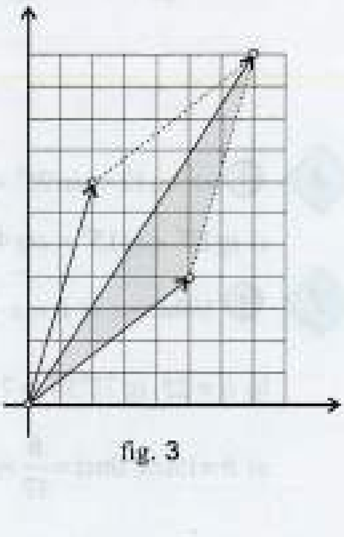


fig. 3

5 (1) a) 1; b) 3; c) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; ç) $7\sqrt{7}$. (2) a) $a+i$; b) $\sqrt{a}-i\sqrt{b}$. (3) a) $6\pm 8i$; $8\pm 6i$.

(4) Prej ΔOM_1M_2 vijon saktësia. (fig. 3)

TEMA 3

BARAZIMET KATRORE

1 (1) a) $12x^2-38x-5=0$; b) $4x^2+13x+11=0$; c) $5x^2-4x-7=0$; ç) $(3-k)x^2+(2k+1)x-2+k^2=0$.

(2) a) $k\neq-\frac{2}{3}$; b) $k=\frac{2}{5}$; c) $k=-2$. (3) a) $x_1=0,\ x_2=0$; b) $x_1=0$ dhe $x_2=0$ për $a\neq-2$, për $a=-2$, pafund shumë zgjidhje; c) $x_1=0$ dhe $x_2=0$, për $a+b\neq c$, për $a+b=c$, pafund shumë zgjidhje.

(4) a) $x_1=10,\ x_2=-10$; b) $x_1=4i,\ x_2=-4i$. (5) $M\in(-\infty,2)$;

(6) a) $x_1=4,\ x_2=-5$; b) $x_1=\frac{2k}{3},\ x_2=-\frac{3k}{4}$, për $k\in\mathbb{R}$. (7) a) $x_1=0,\ x_2=\frac{44}{9}$; b) $x_1=0,\ x_2=3$.

2 (1) a) $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{2}{3}$; b) $x_1=x_2=\frac{3}{2}$; c) $x_1=2-3i,\ x_2=2+3i$. (2) a) $x_1=\sqrt{7},\ x_2=\sqrt{5}$; b) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{a}$, për $a\neq 1$, për $a=1$, $x_1=x_2=1$.

3 (1) a) $x_1=5,\ x_2=3$; b) $-1\pm 2i$; c) $x_1=x_2=\frac{1}{2}$. (2) a) $x_1\neq x_2,\ \ x_1,x_2\in\mathbb{R}$; b) $x_1=x_2\in\mathbb{R}$; c) $x_1,x_2\in\mathbb{C}$. (3) $D=0,\ m^2=8m+12=0,\ m_1=6$ ose $m_2=2$. (4) Për $k=-\frac{1}{8}$, $x_1=x_2\in\mathbb{R}$; $k>-\frac{1}{8}, x_1\neq x_2,\ \ x_1,x_2\in\mathbb{R}$; $k<-\frac{1}{8}, x_1=\overline{x_2}\in\mathbb{C}$.

4 (1) a) $x^2-2x+\frac{5}{3}=0$; $p=-2,\ q=\frac{5}{3}$; b) $x^2-\frac{m+2}{m}x-5=0$; $p=-\frac{m+2}{m},\ q=-5$.

(2) Prej $(x_1+x_2)^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)$ vijon $x_1^3+x_2^3=$ $=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)^3=(-p)^3-3q(-p)=3pq-p^3$. (3) $x_1+x_2=-\frac{B}{A}=2,\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}=q$;

$p=-2,\ q=\frac{1}{2}$. a) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{\left(x_1^2\cdot x_1^2\right)}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1\cdot x_2)^2}=\frac{2^2-2\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=12$; b) $x_1^2x_2+x_2x_1^2=$

$=x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$; c) $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1\cdot x^2}=\frac{3pq-p^3}{q}=\frac{3(-2)\cdot\frac{1}{2}-(-2)^3}{\frac{1}{2}}=10$.

5 (1) $x^2-8x+65=0$. (2) a) $\frac{6}{25}$; b) $-\frac{162}{25}$. (3) a) $m=3$; b) $m=-12$. (4) a) $m=2$; b) $m=\pm 3$.

6 (1) $\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$. (2) Zgjidhje janë: $2a$ ose $-5a$, për $a\neq 0$; dhe $x_1=x_2=0$, për $a=0$.

(3) 12 orë.

7 (1) a) $x_{1/2/3/4}=0$; b) $x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$, $x_{3/4}\pm i\sqrt{3}$; c) $x_{1/2}=0$, $x_{3/4}=\pm 2i$. (2) a) $\left\{-\frac{5}{2},\frac{5}{2},-i,i\right\}$;
b) $\{-6,-2\sqrt{3},2\sqrt{3},6\}$; Udhëzim:shfrytëzo $(y-y_1)(y-y_2)=0$ dhe $x^2=y$. (3) Përgjigja është $x^4-2x^2-63=0$.
(4) 5,12. Udhëzim: shënoji brinjët e drejtkëndëshit me $x,\frac{60}{x}$ dhe zbato teoremën e Pitagorës.

8 (1) a) Barazimi nuk ka zgjidhje pasi $D\neq 0$; b) Barazimi është i pamundshëm, pasi ana e majtë është numër pozitiv. (2) a) 3; b) 9ose $\frac{51}{4}$. (3) a) ± 5; b) vëndo zëvëndësimin $\sqrt{x^2-3x+5}=y$;
$x_1=-1$ ose $x_2=4$. c) zëvëndëso $\sqrt[3]{x}=y$, $x\in\{1,27\}$.

9 (1) a) $\{(0,1)(-2,0)\}$; b) $\left\{(4,5)\left(-\frac{5}{9},\frac{4}{9}\right)\right\}$. (2) $\{(3a,2a),(2a,3a)\}$. (3) $\frac{2}{5}$ ose $\frac{5}{2}$.

TEMA 4 FUNKSIONI KATROR DHE JOBARAZIMI KATROR

1 (1) a, b, ç. (2) a) $V_z=\{8,3,0,-1\}$; b) $V_z=[-1,8]$. (3) $c=6,\ b=5,\ a=1,\ f_{(x)}=x^2+5x+6$.

2 (1) a) (fig. 1)

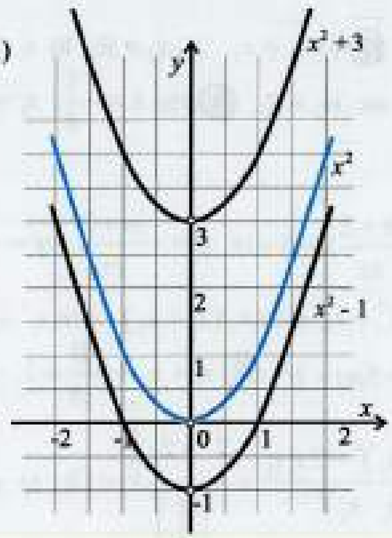


fig. 1

a) $T(0,0)$, b) $T(0,-1)$, c) $T(0,3)$;

$V_f=[0,\infty)$, $V_f=[-1\infty)$, $V_f=[3\infty)$.

për $x\in(-\infty,0)$ - zvogëlohet;

për $x\in(0,\infty)$ - rritet (fig. 1)

b) (fig. 2)

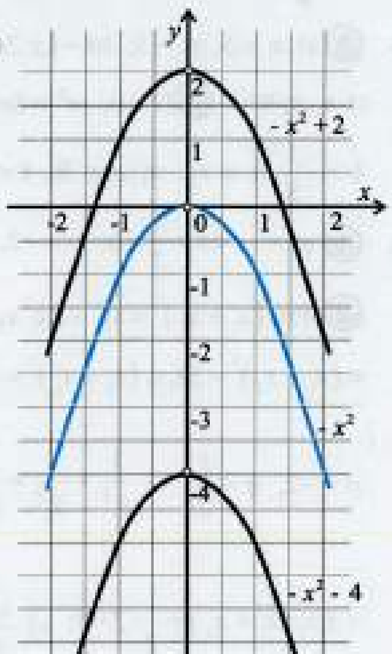


fig. 2

a) T(0,0), b) T(0,2), c) T(0,-4)

$V_f=(-\infty,0]$, $V_f=(-\infty,2]$, $V_f=(-\infty,4]$;

për $x\in(-\infty,0)$ - rritet;

për $x\in(0,\infty)$ - zvogëlohet (fig. 2)

3 ① a) $T(0,0)$, $T(2,0)$, $T(-3,0)$;

$V_f=[0,\infty)$; $x\in(-\infty,0)$ - zvogëlohet;

$x\in(-\infty,2)$ - zvogëlohet; $x\in(-\infty,-3)$ - rritet;

$x\in(0,\infty)$ - rritet; $x\in(2,\infty)$ - rritet;

$x\in(-3,\infty)$ - rritet. (fig. 3)

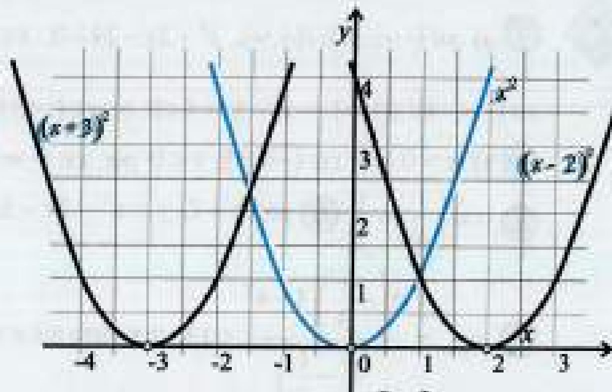


fig. 3

б) $T(-3,0)$, $T(0,0)$, $T(3,0)$;

$V_f=(-\infty,0]$; $x\in(-\infty,-3)$ - rritet;

$x\in(-\infty,0)$ - rritet; $x\in(-\infty,2)$ - rritet

$x\in(-3,\infty)$ - zvogël.; $x\in(0,\infty)$ -zvogël.

$x\in(2,\infty)$ - zvogël. (fig. 4)

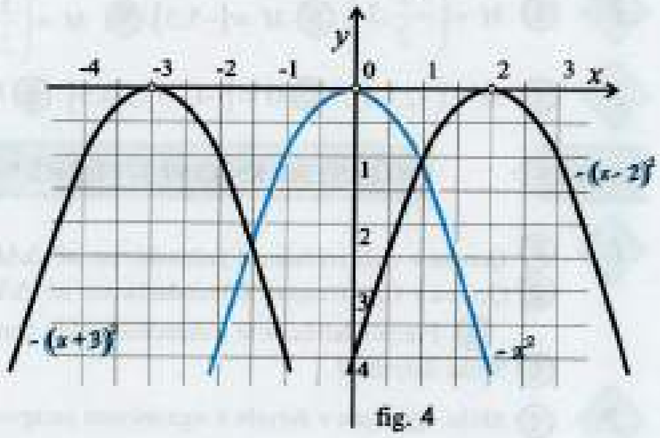


fig. 4

4 ① $y=-3(x-1)^2+5$. ② 1) $T(2,-4)$, $y_1=x_1^2$;

x_1	0	-1	1	-2	2
y_1	0	1	1	4	4

2) $T(2,-4)$, për $y=0$, $x_1=0$ ose $x_2=4$; për $x=0$, $y=0$. 3) $y=(x-2)^2-4$. Translacioni i $y=x^2$, djathtas për dy njësi dhe posht për katër njësi.

5 ① Drejtëza $x=2$; $V_f=[-3,\infty)$. ② $x\in(-\infty,1)$, $f(x)$ - rritet; $x\in(1,\infty)$, $f(x)$ - zvogël.

③ $x\in(-\infty,2)\cup(3,\infty)$, $f(x)>0$; $x\in(2,3)$, $f(x)<0$.

6 ① a) 1) $D_f=\mathbb{R}$. 2) $T\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$. 3) $(0,0),(1,0)$. 4) Për $x=\frac{1}{2}, y_{min}=-\frac{1}{4}$.

5) $x=\frac{1}{2}$. 6) $V_f=\left[-\frac{1}{4},\infty\right)$. 7) $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ - zvogël; $x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ -rritet.

8) $x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$, $f(x)>0$; $x\in(0,1)$, $f(x)<0$. (fig. 5)

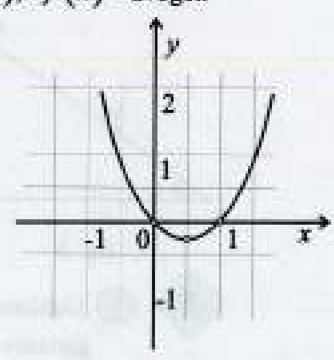


fig. 5

b) 1) $D_f=R$. 2) $T(0,4)$. 3) nuk ka zero. 4) $y_{min}=4$ për $x=0$.

5) $x=0$. 6) $V_f=[4,\infty)$. 7) $x\in(-\infty,0)$ - zvogël. $x\in(0,\infty)$ rritet. 8) $y>0$ për $x\in R$.

7 ① a) $x\in(-\infty,-6)\cup(4,\infty)$, $x^2+2x-24>0$; $x\in(-6,4)$, $x^2+2x-24<0$. b) $x\in(-4,1)$, $-x^2-3x+4<0$; $x\in(-\infty,-4)\cup(1,\infty)$, $-x^2-3x+4<0$. b) $x\in(-4,1)-x^2-3x+4>0$. ② a) $x\in\left(-2,\frac{1}{2}\right)$; b) $x\in\mathbb{R}$; c) $x\in\varnothing$.

③ a) $y>0$ për $x\in(-4,0)$; $y<0$ për $x\in(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$; b) $y>0$ për $x\in\varnothing$, $y<0$ për $x\in\mathbb{R}$.

④ $x\in\left(\frac{1}{4},\infty\right)$; ⑤ për $k=2$, $y=x^2-2x-3$. $y>0$ për $x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$; $y<0$ për $x\in(-1,3)$.

⑥ $y_{max}=\dfrac{4\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1-4^2}{4\left(-\frac{1}{3}\right)}=13$, pra vlera më e vogël e thyesës është $\dfrac{2}{y_{max}}=\dfrac{2}{13}$.

8 ① $M=\left(-\frac{1}{2},3\right)$. ② $M=[-5,5]$. ③ $M=\left(\frac{3}{2},2\right]$.

9 ① $M=(-2,-1)$. ② $M=[-4,-3]\cup[4,5]$. ③ $M=\left(1,\frac{8}{3}\right)$. ④ $k\in(-12,6)$.

TEMA 5 KONSTRUKSIONI I TREKËNDËSHIT DHE KATËRKËNDËSHIT

1 ① Qendra e vijës rrethore të jashtashkruar në ΔABC është në prerjen e simetraleve të brinjëve të tij.
② Qendra e vijës rrethore të brendashkruar në ΔABC është në prerjen e simetraleve të këndeve të tij.
③ Prerja e lartësive te trekëndëshi është ortoqendër. ④ Shihe detyrën 8.
⑤ Shihe detyrën 7.

2 ① Shihe zgjidhjen e detyrës 6 nga mësimi paraprak.

② Vija rrethore $k(A,C)\cap A_y=\{B\}$. Te B konstruktojmë $B_n\perp A_x$, $B_n\cap A_x=\{C\}$. (fig. 1)

fig. 1

③ Udhëzim. Mbi segmentin $AB=a_1+b_1$ (fig. 2) jashtashkruajmë gjysmëvijë rrethore k. Normalja e tërhequr në pikën $N\left(\overline{AN}=b_1,\ \overline{BN}=a_1\right)$ e pret gjysmëvijën rrethore k te pika e kërkuar C.

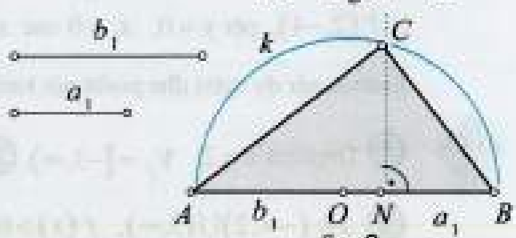


fig. 2

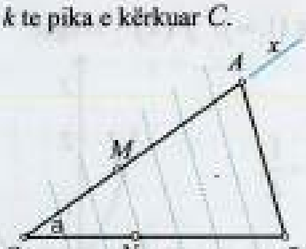


fig. 3

④ Te krahu O_x te çfarëdo kënd α bartim $7=3+4$ pjesë të barabarta, kurse më tutje konstruksioni është i qartë, d.m.th. $\overline{ON}:\overline{MB}=3:4$.

3 ① Udhëzim. Mbi $\overline{BC}=a$ Si diametër konstruktojmë gjysmëvijë rrethore k. (fig. 4)

Në prerjen e vijave rrethore $k_1(B,h_b)$ dhe $k_2(C,h_c)$ me k i fitojmë pikat B_1 dhe C_1 përkatësisht. Pse $\measuredangle B_1=\measuredangle C_1=90^0$? Si do ta caktosh pikën A?

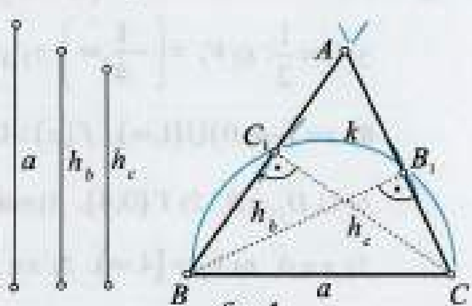


fig. 4

② Udhëzim. Qendra e vijës rrethore të kërkuar është në prerjen e simetraleve të këndit α dhe simetrales së segmentit MN. (Bëne vizatimin). ③ Udhëzim. Konstrukto vijë rrethore k prej ku segmenti AC shihet nën këndin β. Prerja e drejtëzës paralele me AC që është në largësi h_b, e pret vijën rrethore k në pikën e kërkuar A, përkatësisht A_1. Nëse drejtëza nuk e pret vijën rrethore, atëherë detyra nuk ka zgjidhje.

4 ① Udhëzim. Konstrukto trekëndësh kënddrejt AC_1C me $\overline{CC_1} = h_c$ dhe $\measuredangle ACC_1 = 90^0 - \alpha$ (fig. 5).

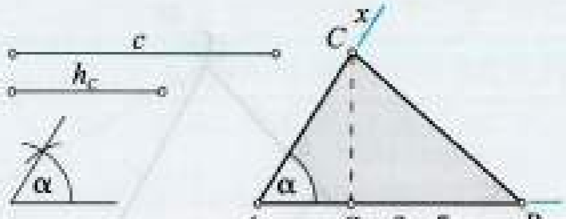


fig. 5

② Udhëzim. Me elementet e dhëna α, $\overline{AC} = b$ dhe $\overline{CC_1} = t_c$ konstrukto trekëndëshin AC_1C (fig. 6). Sa zgjidhje ka detyra varet prej asaj në sa pika vija rrethore $k(C, t_c)$ e pret krahun Ax e këndit α.

fig. 6

③ Udhëzim. Konstrukto trekëndësh kënddrejt AC_1C me elemente $\overline{CC_1} = h_c$ dhe $\measuredangle C_1AC = 90^0 - \alpha$, kurse pastaj konstrukto $\measuredangle C_1Cx = 90^0 - \beta$, ashtu që nuk ka zonë të brendshme të përbashkët me këndin C_1CA.

$AC_1 \cap Cx = \{B\}$ (fig. 7).

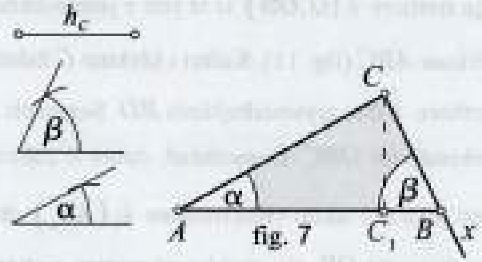


fig. 7

5 ① Udhëzim. Këndi i bazës është $\alpha = \frac{1}{2}(180^0 - \gamma)$. ② Udhëzim. Konstrukto ΔABB_1 me elemente α, c dhe t_b. Detyra ka një, dy ose nuk ka zgjidhje, varësisht prej asaj sa pikëprerje ka vija rrethore $k(B, t_b)$ me krahun Ax e këndit α.

6 ① Udhëzim. Konstrukto trekëndësh kënddrejt me elemente $\overline{CC_1} = h_c$, $\measuredangle C_1CB = 90^0 - \beta$.

② Udhëzim. E konstruktojmë trekëndëshin ndihmës ABA_1 me brinjë $\overline{AB} = c$, $\overline{BA_1} = \frac{a}{2}$ dhe $\overline{AA_1} = t_a$. (fig. 8) Konstruksioni i mëtutjeshëm është i qartë

③ Udhëzim. E konstruktojmë trekëndëshin ndihmës ADC me brinjë $\overline{AD} = c + a$, $\overline{AC} = b$ dhe këndin ndërmjet tyre α (fig. 9).
Simetralja e DC e pret brinjën AD në pikën e kërkuar B.

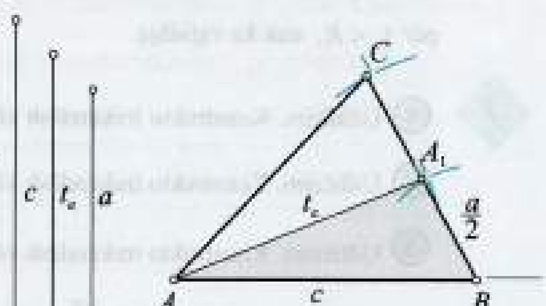


fig. 8

④ Udhëzim. E konstruktojmë vijën rrethore k, që është v.gj.p prej ku segmenti AB shihet nën këndin γ. $k_1(D,t_c)\cap k=\{C_1,C_2\}$. Detyra mund të ketë një zgjidhje, dy ose të mos ketë zgjidhje (fig. 10).

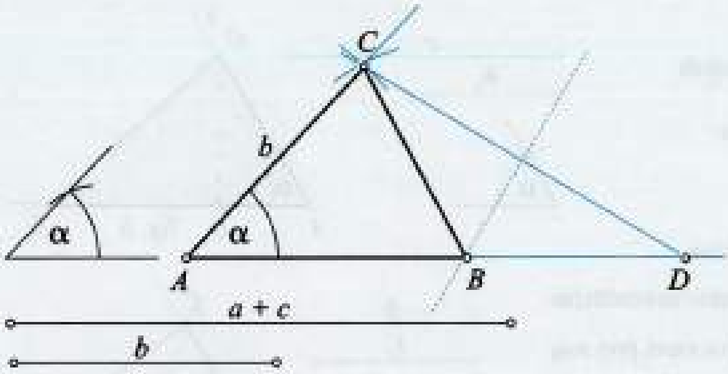


fig. 9

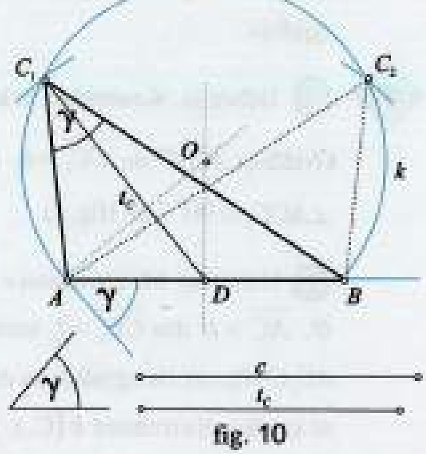


fig. 10

⑤ Vëre zgjidhjen. *Analiza.* Të supozojmë se detyra është e zgjidhur dhe vija rrethore $k(O,OB)$ le të jetë e jashtashkruar rreth trekëndëshit të kërkuar ABC (fig. 11). Kulmi i kërkuar C është në prerjen e vijës rrethore k dhe gjysmëdrejtëzës BD. Segmenti SD është vija e mesme e trekëndëshit OBC. Domethënë, duhet të caktohet pika D.

Pasi pika D i takon vijës rrethore $k_1(A,t_a)$ dhe vijës rrethore me diametër OB, ajo gjendet në prerjen e atyre dy vendeve gjeometrike të pikave. *Konstruksioni.* Konstruktojmë vijë rrethore

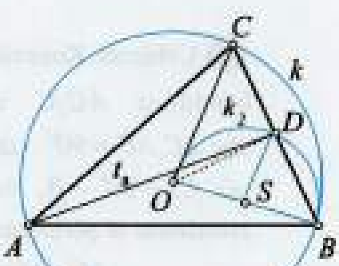


fig. 11

$k(O,\overline{OB}=R)$ dhe kordë $\overline{AB}=c$. Pastaj kemi: $k_1(A,t_a)\cap k_2\left(S,\frac{R}{2}\right)=\{D\}$,

kurse pastaj $BD\cap k=\{C\}$, fig. 11. *Vërtetimi*: Pasi $D\in k_1$, $D\in k_2$ dhe $\overline{CO}=\overline{OB}$, vijon se $\overline{DC}=\overline{DB}$, kurse $\overline{AD}=t_a$. *Diskutimi*: Për $R<C<2R$ dhe $t_a>R$, detyra ka dy zgjidhje. Nëse $t_a=R$, detyra ka një zgjidhje dhe për $t_a<R$, nuk ka zgjidhje.

7

① Udhëzim. Konstrukto trekëndësh kënddrejt AD_1D me brinjë $\overline{AD}=a$ dhe lartësi $\overline{DD_1}=h$.

② Udhëzim. Konstrukto trekëndësh kënddrejt AD_1D me brinjë $\overline{AD}=b$ dhe lartësi $\overline{DD_1}=h$.

③ Udhëzim. Konstrukto trekëndësh kënddrejt ABD me brinjë $\overline{BD}=d_1$ dhe

$$\measuredangle ABD=\measuredangle ADB=90^0-\frac{\alpha}{2}.$$

8

(1) Udhëzim. konstrukto trekëndësh barakrahas. ABC me brinjë $\overline{AC} = d_2$ dhe $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ (fig. 12)

(2) Konstrrukto trekëndësh kënddrejt AD_1D me brinjë $\overline{AD_1} = \dfrac{a-b}{2}$ dhe $\overline{DD_1} = h$.

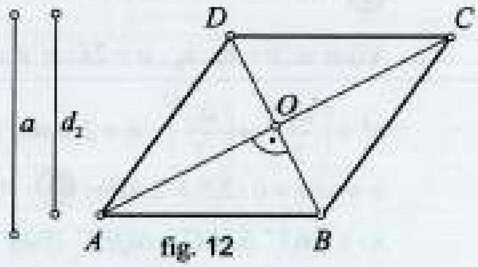


fig. 12

9

(1) Udhëzim. Konstrukto trekëndësh kënddrejt AC_1O me elemente $\overline{C_1O} = r$ dhe $\measuredangle C_1OA = 60^0$.

(2) Udhëzim. Konstrukto trekëndësh barakrahas ABO me krah $\overline{AO} = \overline{BO} = r$ dhe $\measuredangle AOB = 45^0$ (fig.13).

(3) Udhëzim. Konstrukto vijë rrethore me rreze r, kurse pastaj konstrukto trekëndësh karakteristik me kënd pranë majës të barabartë $360^0 : 12 = 30^0 = \alpha$ (fig. 14).

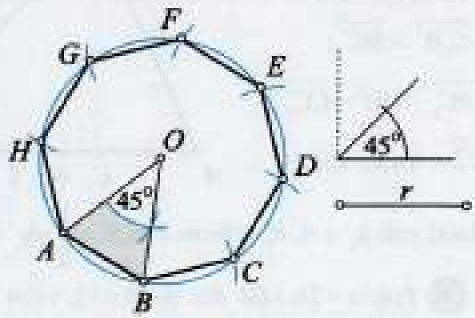


fig. 13

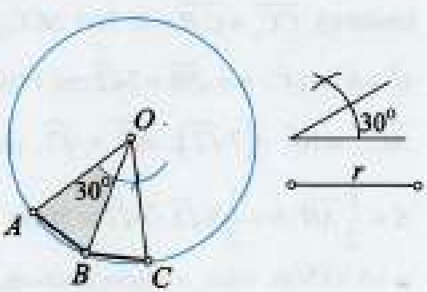


fig. 14

(4) Shihe zgjidhjen e detyrës 5 te mësimi.

TEMA 6

SYPRINA E FIGURAVE NË RRAFSH

1

(1) a) Prej $a : b = 4 : 9$ vjon $a = 4k, b = 9k$, pra $144 = 4k \cdot 9k = 36k^2$, $k = 2 \cdot a = 8m, b = 18m$.

b) $2(a+b) = 74$; $a + b = 3{,}7m$ dhe $a \cdot b = 3$ kemi $\begin{cases} a+b=3{,}7 \\ a \cdot b = 3 \end{cases}$; Brinjët e drejtkëndëshit janë 2,5 m dhe 1,2 m.

(2) $AB \perp DM$ dhe $AD \perp DN$, domethënë $\measuredangle DAB = 60^0$ si kënde me krah normal. $\sin 60^0 = \dfrac{h_a}{b}$; $b = \dfrac{h_a}{\sin 60^0} = \dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$;

$S = b \cdot h_b = \dfrac{6}{\sqrt{3}} 2\sqrt{3} = 12cm^2$. (fig. 1)

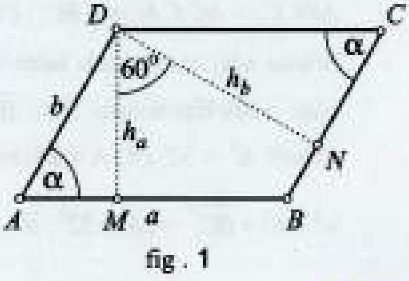


fig . 1

③ Ngjashëm si te detyra paraprake cakto lartësitë h_a dhe h_b. Prej kushtit $S = ah_a = bh_b$.

Vijon $a:b = h_b:h_a$. $a = 24cm$ dhe $b = 16cm$. ④ Prej $S = \frac{d_1 d_2}{2}$ vijon $d_2 = 3dm$, kurse

$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$, $a = 2{,}5dm$, $P = 4 \cdot 2{,}5 = 10dm$, kurse

$h = 6:a = 6:2{,}5 = 2{,}4dm$. ⑤ Le të jenë x dhe y brinjë të drejtkëndëshit, $x \cdot y = 63$. $\Delta ABC \sim \Delta QPC$ (Pse). $\overline{AB}:h = \overline{QP}:(h-x)$; $3(10-x) = y$.

Zgjidhje e sistemin $\begin{cases} y = 3(10-x) \\ x \cdot y = 63 \end{cases}$ është çifti $(7,9)$ dhe $(3,21)$.

Domethënë, mund të brendashkruhen dy drejtkëndësha brinjët e të cilëve janë: 7 cm dhe 9 cm; 3 cm dhe 21 cm. (fig. 2)

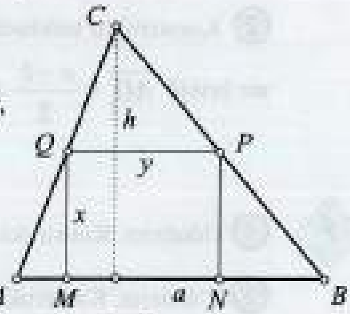


fig. 2

2 ① Trekëndëshi me dy brinjë të dhëna ka syprinë më të madhe nëse brinjët janë katete të trekëndëshit kënddrejt. a) po; b) jo; c) po. Le të jetë $b = 10cm$, ② $a = 14cm$, kurse C_1 pika rënzë e lartësisë h_c. ΔCC_1B është barakrahas kënddrejt, $\overline{CC_1} = \overline{C_1B} = h$. Prej ΔCC_1B vijon $\overline{CC_1}^2 + \overline{C_1B}^2 = \overline{BC}^2$;

$h^2 + h^2 = 14^2$; $h = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}cm$. Prej ΔAC_1C vijon: $\overline{AC_1}^2 = 10^2 - \overline{CC_1}^2$;

$\overline{AC_1}^2 = 10^2 - (7\sqrt{2})$; $\overline{AC_1} = \sqrt{2}$, pra $\overline{AB} = \sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, kurse

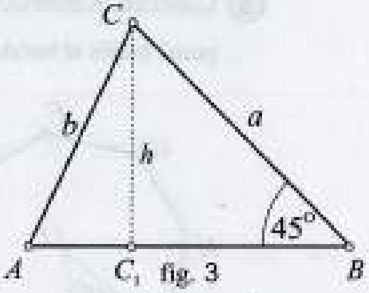


fig. 3

$S = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h = \frac{1}{2} 8\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 56cm^2$. (fig. 3) ③ Le të jetë $h_a = 4$, $h_b = 6cm$. Prej $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$ dhe $a + b = 15cm$. vijon $a = 9cm$, $b = 6cm$, $S = 18cm^2$. ④ Prej $a + 2b = 64$ dhe $b - a = 11$, vijon $a = 14cm$. dhe $b = 25cm$. Lartësia ndaj bazës $h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $h_a^2 = 25^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2$;

$h_a = 24cm$, $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}14 \cdot 24 = 168cm^2$. ⑤ Prej konstruksionit vijon se pikat M dhe N janë meset e brinjëve AC dhe BC, pra MN është vija e mesme e ΔABC. Trekëndëshat AC_1N, C_1BM, NC_1M dhe NMC janë të puthitshëm, kanë brinjë të barabarta dhe kënde të barabarta.

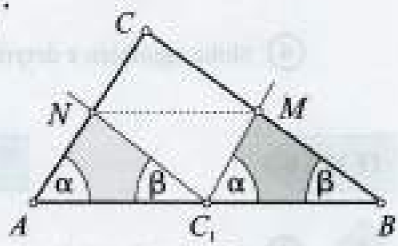


fig. 4

Trekëndëshat kanë syprina të barabarta, pra $S_{NC_1MC} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$. (fig. 4)

⑥ Nëse $CC_1 \perp AB$, atëherë $\alpha = \measuredangle BCC_1$ dhe $\beta = \measuredangle C_1CA$. Prej këtu vijon $\Delta BCC_1 \sim \Delta C_1CA$; pra $\overline{BC_1}:\overline{CC_1} = \overline{CC_1}:\overline{C_1A}$, $\overline{CC_1}^2 = \overline{BC_1} \cdot \overline{C_1A}$, d.m.th. lartësia ndaj hipotenuzës është mesi gjeometrik i segmenteve në të cilat është ndarë hipotenuza. Nëse $\overline{BC_1} = 32cm$, $\overline{C_1A} = 18cm$, atëherë $h^2 = 32 \cdot 18$, $h = 24cm$. Prej ΔBCC_1 vijon

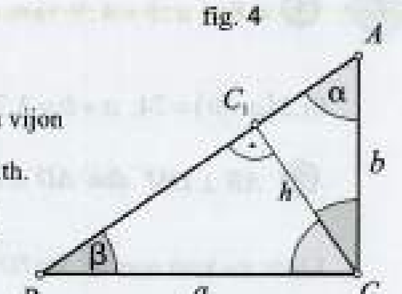


fig. 5

$a^2 = h^2 + \overline{BC_1}^2 = 24^2 + 32^2$; $a = 40cm$, kurse $b^2 = h^2 + \overline{C_1A}^2 = 24^2 + 18^2$; $b = 30cm$. $S = \frac{30 \cdot 40}{2} = 6dm^2$. (fig. 5)

3 ① Le të jetë $r_1 = 39cm$, $r_2 = 17cm$, kurse $\overline{O_1O_2} = 44cm$. Pra formula e Heronit $s = \dfrac{39+17+44}{2} = 50cm$, pra

$S_{\Delta O_1O_2M} = \sqrt{50(50-39)(50-17)(50-44)}$; $S_{\Delta O_1O_2M} = \sqrt{50\cdot 11\cdot 33\cdot 6} =$

$= \sqrt{5^2\cdot 11^2\cdot 3^2\cdot 2^2} = 330cm^2$. $S = 330 = \dfrac{1}{2}\overline{O_1O_2}\cdot\overline{MN}$; $330 = \dfrac{1}{2}\cdot 44\cdot\overline{MN}$;

$\overline{MN} = 15cm$, kurse $\overline{MP} = 2\cdot 15 = 30cm$. (fig. 6)

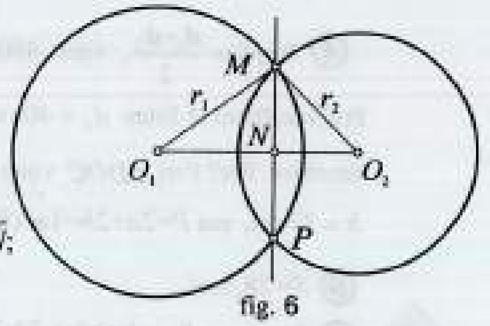


fig. 6

② Brinjët le të jenë $b = 27cm$, $c = 29cm$, kurse $t_a = 26cm$. Me vazhdimin e vijës së rëndimit $t_a = \overline{AA_1}$ për t_a fitohet paralelogrami $ABCM$ me brinjë $\overline{AB} = c$, $\overline{BM} = b$ dhe $\overline{AM} = 2t_a$. Sipas formulës së Heronit $S_{\Delta ABC}$=270cm^2. (fig. 7)

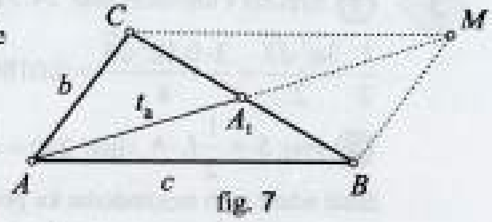


fig. 7

③ Prej kushtit $a:b:c = 9:10:17$ vijon $a:9 = b:10 = c:17 = k$; $a = 9k$, $b = 10k$, $c = 17k$. Me zbatimin e formulës së Heronit kemi $36k^2 = 144$; $k^2 = 144:36 = 4$; $k = 2$, kurse brinjët janë $a = 18$, $b = 20$ dhe $c = 34cm$. ④ Nëse $c = 20cm$, kurse $a = 12cm$, $b^2 = c^2 - a^2$; $b^2 = 20^2 - 12^2$; $b = 16$, kurse P=20+12+16=48. Prej $P:P_1 = a:a_1 = b:b_1 = c:c_1$ vijon $48:60 = 12:a_1$; $a_1 = 15cm$. $48:60 = 16:b_1$,

$b_1 = 20cm$, kurse $S_1 = \dfrac{a_1\cdot b_1}{2} = \dfrac{20\cdot 15}{2} = 150cm^2$. ⑤ Prej $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{35^2}{14^2}$; $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{25}{4}$ dhe S-S_1=105 vijon

S_1=20cm^2, kurse S=125cm^2.

4 ① Prej kushtit $a:b:c = 10:4:5$ vijon $\dfrac{a}{10} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{5} = k$; $a = 10k$, $b = 4k$ dhe $c = 5k$, kurse $h^2 = c^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$;

$h^2 = 25k^2 - 9k^2 = 16k^2$; $h = 4k$. Prej $S = \dfrac{(a+b)h}{2}$ vijon $112 = \dfrac{(10k+4k)\cdot 4k}{2}$; $112 = 28k^2$; $k = 2$.

$a = 20cm$, $b = 8cm$ dhe $c = 10cm$, P=20+8+2·10=48cm ② Prej pikës D tërhiq $DM \parallel CD$.

Njehso syprinën e ΔAMD brinjët e të cilit janë $a-b = 14cm$, $13cm$ dhe $15cm$ me formulën e Heronit,

$S_{\Delta AMD} = 84cm$. Prej $S_{\Delta AMD} = \dfrac{1}{2}(a-b)\cdot h$ vijon $84 = \dfrac{1}{2}\cdot 14\cdot h$, $h = 12cm$, kurse

$S = \dfrac{(a+b)h}{2} = \dfrac{34\cdot 12}{2} = 204cm^2$.

③ Konstrukto $CM \parallel DB$. Vërteto $\overline{DC} = \overline{BM} = b$, pra

$S_{ABCD} = S_{AMC} = \dfrac{(a+b)\cdot h}{2}$. Syprinën ΔAMC, do ta caktojmë prej formulës së Heronit.S=84cm^2 .(fig. 8)

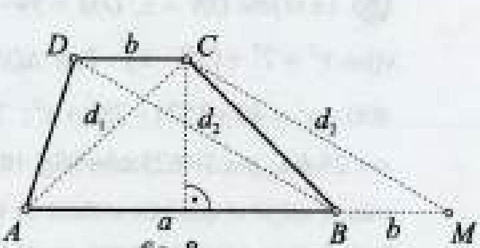


fig. 8

④ Prej $S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$, vijon $480=\frac{24\cdot d_2}{2}$, $d_2=40cm$.

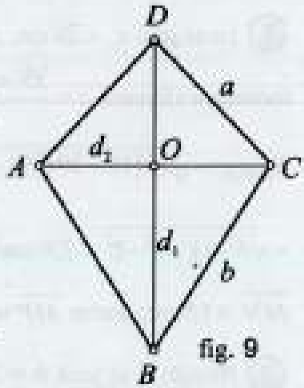


fig. 9

Prej rezultatit të fituar $d_2=40cm$ vijon se $d_1=24cm$ nuk është boshti i simetrisë. Pse? Prej ΔDOC vijon $\overline{DO}=5cm$, kurse prej ΔOBC vijon $b=37cm$, pra $P=2a+2b=1m$ (fig. 9)

⑤ $S=28{,}5m^2$

5 ① Syprina e dhomës është $24{,}31m^2$, kurse syprina e njërës pllakë është $\frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3\cdot 0{,}12^2\sqrt{3}}{4}=0{,}018684m^2$. Numri i pllakave është: $24{,}31:0{,}018684=1301$.

② Prej $S=\frac{1}{2}L\cdot h$ vijon $240=\frac{1}{2}\cdot 60h$ vijon $h=8cm$, d.m.th.. $r=h=8cm$. ③ Pesëkëndëshi është ndarë në 6 trekëndësha ku pesë këndet qëndrore janë të dhënë kurse i gjashti është, gjithashtu, 60^0. Me shfrytëzimin e formulës $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, pra kemi:

$$S=\frac{1}{2}r^2\sin 30^0+\frac{1}{2}r^2\sin 60^0+\frac{1}{2}r^2\sin 90^0+\frac{1}{2}r^2\sin 120^0+\frac{1}{2}r^2\sin 60^0;\ S=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right);\ S=\frac{6^2\left(3+3\sqrt{3}\right)}{4}=9\left(3+3\sqrt{3}\right)=27\left(1+\sqrt{3}\right)cm^2.$$

④ Nëse a është brinja e trekëndëshit, b i gjashtëkëndëshit, atëherë $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$, d.m.th.. $a=b\sqrt{6}$. $\frac{P}{P_1}=\frac{3a}{6b}=\frac{3b\sqrt{6}}{6b}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

⑤ Gjashtëkëndëshat kënddrejtë janë të ngjashëm, pra $h_1:h_2=a_1:a_2$, d.m.th. $a_1:a_2=2:3$, $a_1=\frac{2a_2}{3}$. Prej $S_2-S_1=160\sqrt{3}$ vijon $\frac{3a_2^{\,2}\sqrt{3}}{2}-\frac{3a_1^{\,2}\sqrt{3}}{2}=160\sqrt{3}$, d.m.th. $3a_2^{\,2}-3a_1^{\,2}=320$; $3a_2^{\,2}-3\left(\frac{2a_2}{3}\right)^2=320$; $3a_2^{\,2}-3\frac{4a_2^{\,2}}{9}=320$; $5a_2^{\,2}=3\cdot 320$; $a_2^{\,2}=192$, pra $S_2=\frac{3\cdot 192\sqrt{3}}{2}=288\sqrt{3}\,cm^2$, kurse $S_1=128\sqrt{3}\,cm^2$.

6 ① Prej $\pi r^2=2\pi r$ vijon $r=2cm$. ② Le të jetë $r_1=4r$ vijon a) $P_1=2\pi r_1, P_1=2\pi\cdot r=4(2\pi r)=4P$ - do të zmadhohet 4 herë; b) $S_1=\pi r_1^{\,2}=\pi(4r)^2=16\pi r^2=16S$ - do të zmadhohet 16 herë..

③ Pika do të kalon rrugë prej $P=2\pi\ r\cdot 80$, $P=2\pi\cdot 0{,}7\cdot 80=351{,}6m$ në minutë, kurse shpejtësia $5{,}86\ m/sek$.

④ $S=\pi\ r^2=3{,}14\cdot 10{,}5^2=346{,}2m^2$

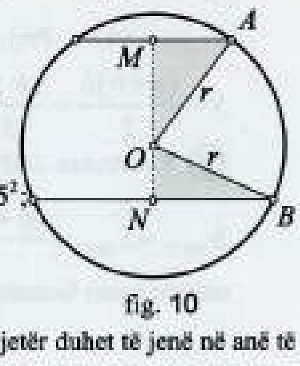


fig. 10

⑤ Le të jetë $\overline{ON}=x$, $\overline{OM}=39-x$, $\overline{MA}=7dm$, $\overline{NB}=20dm$. Prej ΔOMA vijon $r^2=7^2+\left(39-x\right)^2$. Prej ΔONB vijon $r^2=20^2+x^2$ pra $400+x^2=49+1521-78x+x^2$; $78x=1170$; $x=15dm$, kurse $r^2=20^2+15^2$; $r=25dm$, pra $S=625\pi dm^2$(fig. 10). Nëse i vizaton të dy kordat prej anës së njëjtë të qendrës, atëherë do të fitosh $x=-15$.
Pasi gjatësia e segmentit nuk mund të jetë negativ, domethënë se të dy kordat patjetër duhet të jenë në anë të ndryshme prej qendrës.

7 ① $P=2\pi r$ vijon $540=2\pi r$; $r=\frac{270}{\pi}$, $\ell=\frac{\pi r\alpha}{180}$; $200=\frac{\pi\cdot\frac{270}{\pi}\cdot\alpha}{180}$;

$200=\frac{270\alpha}{180}$; $200=\frac{3\alpha}{2}$; $\alpha=400^0:3$; $\alpha=133^0 20'$. (fig. 11)

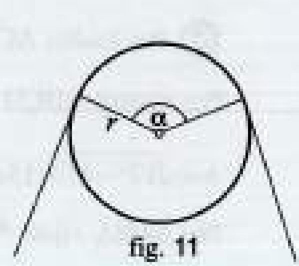


fig. 11

② $r=1200m$, $\ell=450m$, $\alpha=?$; $450=\frac{\pi\cdot r\alpha}{180}$; $450=\frac{\pi\cdot 1200\cdot\alpha}{180}=\frac{\pi\cdot 20\alpha}{3}$;

$\alpha=\frac{3\cdot 450}{\pi\cdot 20}=21{,}5^0=21^0 30'$. ③ $3\pi=\frac{\pi r^2 30^0}{360^0}$; $r=6$, kurse $S=\pi r^2=36\pi cm^2$

④ Tre barakrahas. Syprina e kërkuar

$S=2(S_{rot}-S_{\triangle})$; $S=2\left(\frac{\pi\cdot 4^2\cdot 60}{360}-\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right)=2{,}9cm^2$. (fig. 12)

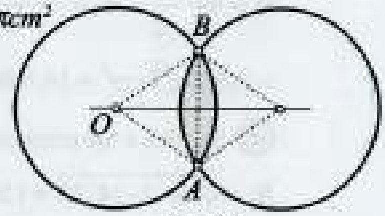


fig. 12

⑤ $S=a^2$.

TEMA 7 **ELEMENTET NGA STEREOMETRIA**

1 ① Çdo prerje paralele është e puthitshme me bazën.

$S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$; $S=120cm^2$.

$a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2$; $a=13cm$, $P=4a=52cm$.

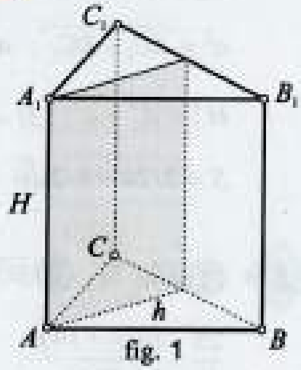


fig. 1

② Prerja është drejtkëndësh brinjët e të cilit janë lartësia e bazës dhe tehut anësor.

$S=h\cdot H$; $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$; $H=a=4$; $S=8\sqrt{3}\,cm^2$. (fig. 1)

③ Nëse tehu anësor është $s=15cm$, atëherë $H=s\cdot\sin 30^0=7{,}5cm$.

④ Bazat e prizmit do të jenë në madhësi të vërtetë.

Skica është bërë gjatë zgjedhjes të këndit $\alpha=45^0$ dhe

$q=\frac{2}{3}$. (fig. 2)

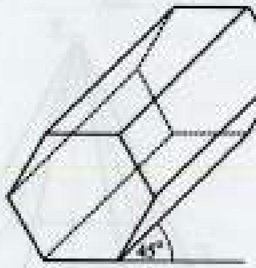


fig. 2

2 ① a) $6a^2=24$, $a=2$, $V=a^3=2^3=8m^3$; b) $16\sqrt{2}=a\sqrt{2}\cdot a$, $a=4$, $V=64m^3$;

c) $6=a\sqrt{2}$, $a=3\sqrt{2}$, $V=\left(3\sqrt{2}\right)^3=54\sqrt{2}\,m^3$.

② Prej $a:b:c=3:4:7$ vijon $a=3k$, $b=4k$, $c=7k$. $1098=2(3k\cdot 4k+3k\cdot 7k+4k\cdot 7k)$;

$1098=2\cdot 61k^2$; $k^2=9$; $k=3$, kurse $a=9cm$, $b=12cm$, $c=21cm$. $V=9\cdot 12\cdot 21=2268dm^3$.

③ Prej kushtit ACC_1A_1 është romb me brinjën d - diagonalja e trapezit.

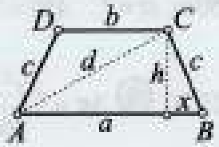
Prej trapezit ABCD vijon $x = \frac{a-b}{2} = \frac{44-28}{2} = 8$; $h^2 = c^2 - x^2$;

$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15cm$; $d^2 = (a-x)^2 + h^2$; $d^2 = (44-8)^2 + 15^2$; $d = 39cm$.

Prej ΔAMA_1 vijon $AA_1 = d = 39cm$, $\sin 45^0 = \frac{H}{d}$;

$H = 39\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, $V = \frac{(44+28)\cdot 15}{2}\cdot\frac{39\sqrt{2}}{2} =$

$= 10530\sqrt{2}\,cm^3 = 14{,}9\,dm^3$. (fig. 3)



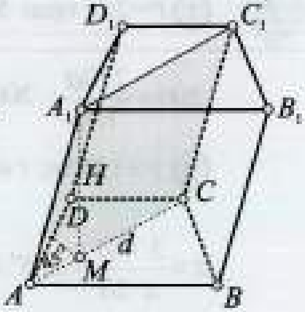


fig. 3

④ Syprina e një prerje normale $B_1 = \sqrt{s(s-a_1)(s-b_1)(s-c_1)}$; $s = \frac{a_1+b_1+c_1}{2} = 39$;

$B_1 = \sqrt{39\cdot 2\cdot 24\cdot 13} = 156$. Prej kushtit $B_1 = M$ vijon $156 = (a_1+b_1+c_1)\cdot s$; $156 = (37+15+26)\cdot s$;

$s = 2cm$. Vëllimi i prizmit të pjerrtë është $V = B\cdot H$ ose $V = B_1\cdot s$; $V = 156\cdot 2 = 312cm^3$.

⑤ $CB \perp AB$, kurse CB është proeksioni ortogonal i segmentit C_1B, pra sipas teoremës për tre normalet vijon $C_1B \perp AB$, d.m.th. ΔABC_1 është kënddrejt me kënd të drejtë te kulmi B.

$a^2 = \overline{AC_1}^2 - \overline{BC_1}^2$; $a = \sqrt{7^2 - 5^2}$; $a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Prej ΔBCC_1 vijon

$H^2 = {d_1}^2 - a^2$; $H = \sqrt{5^2 - \sqrt{24}^2} = 1cm$. $S = 2B + M$; $P = 2a^2 + 4aH$;

$S = 2\cdot 24 + 4\cdot 2\sqrt{6}\cdot 1$; $S = 6(8+\sqrt{6})cm^2$. $V = B\cdot M = 24\cdot 1 = 24cm^3$. (fig. 4)

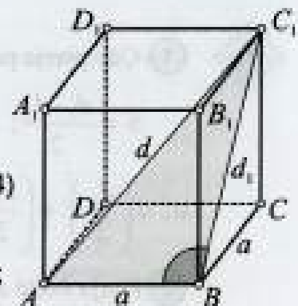


fig. 4

3 ① (fig. 5) ② $\overline{SO} = \overline{SO_1} + \overline{O_1O} = \overline{SO_1} + 14$; $\frac{S}{S_1} = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}$; $\frac{150}{54} = \frac{(\overline{SO_1}+14)^2}{\overline{SO_1}^2}$;

$\frac{25}{9} = \frac{(\overline{SO_1}+14)^2}{\overline{SO_1}^2}$; $\frac{5}{3} = \frac{\overline{SO_1}+14}{\overline{SO_1}}$; $\overline{SO_1} = 21cm$. $H = 21 + 14 = 35cm$. (fig. 6)

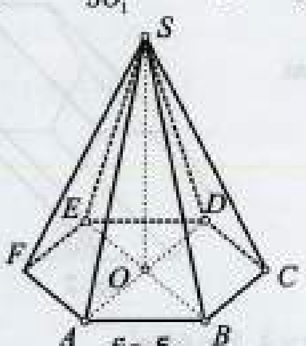


fig. 5

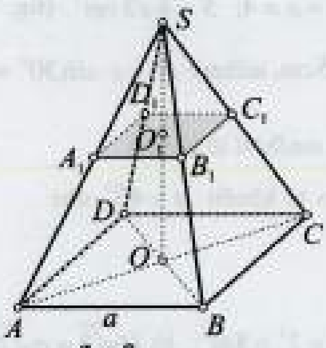


fig. 6

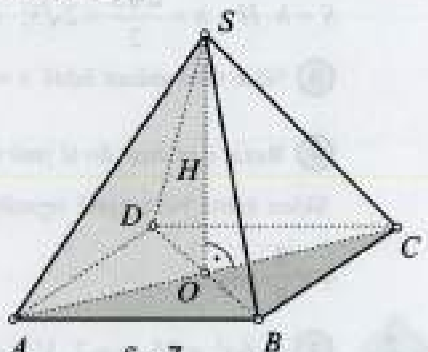


fig. 7

③ $S = a^2 = 16^2 = 256cm^2$, $S_1 = 120cm^2$. Prej $\frac{S}{S_1} = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}$, vijon $\overline{SO_1} = \frac{3\sqrt{30}}{2}$. Prej ΔAOS vijon:

$\overline{SA}^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \overline{SO}^2$; $\overline{SA} = \sqrt{272}$. Prej $\frac{\overline{SA}}{\overline{SA_1}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}}$, vijon $\overline{SA_1} = 11{,}3cm$. ④ Prerja më e madhe diagonale është trekëndëshi barabrinjës me bazë $2a = 12cm$, pra $S = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}\,cm^2$.

5 Prej kushtit $\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}=\overline{SD}$ dhe SO rrafsh normal, vijon ΔSOA, ΔSOB, ΔSOC, ΔSOD janë kënddrejt dhe të puthitshëm, domethënë $\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OA}=\overline{OB}$, d.m.th. pika O dhe qendra e vijës rrethore të jashtashkruar rreth drejtkëndëshit $ABCD$. Pika O është prerje e diagonaleve. Prej ΔSAO vijon $H^2=\overline{SA}^2-\overline{AO}^2$; $AO=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}$; $\overline{AO}=5cm$, kurse $H=\sqrt{13^2-5^2}=12$. (fig. 7)

Mbaj mend: Nëse tehet anësore të një piramide janë të barabarta ndërmjet vedi, atëherë pika e rënzës së lartësisë në qendrën e vijës rrethore të jashtashkruar rreth bazës.

4

1 a) $V=4cm^3$. b) $d=a\sqrt{2}=12\sqrt{2}$; $H=\sqrt{12^2-\left(\frac{1}{2}12\sqrt{2}\right)^2}=6\sqrt{2}$. $V=\frac{1}{3}a^2\cdot H=\frac{1}{3}\cdot 12^2\cdot 6\sqrt{2}=288\sqrt{2}cm^3$.

c) $d=a\sqrt{2}=24\sqrt{2}$; $36=\frac{1}{2}\cdot 24\sqrt{2}\cdot H$; $H=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. $V=\frac{1}{3}\cdot 24^2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $V=288\sqrt{2}\,cm^3$.

2 Prej kushtit $a+h=5$ dhe $a^2+2ah=16$ vijon $a=2dm$, $h=3dm$, pra $H^2=h^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2$, $H=2\sqrt{2}$, pra $V=\frac{1}{3}a^2\cdot H=\frac{8\sqrt{2}}{3}dm^3$. 3 Prej kushtit se $\measuredangle SMO=\measuredangle SNO=\measuredangle SPO$ vijon se ΔSOM, ΔSON, ΔSOP janë kënddrejt dhe të puthitshëm, pra $\overline{OM}=\overline{ON}=\overline{OP}=r$ të vijës rrethore të brendashkruar te ΔABC. Domethënë $\overline{OM}=\overline{ON}=\overline{OP}=h$ – lartësia e faqes anësore.

$B=s(s-a)(s-b)(s-c)$; $s=\frac{a+b+c}{2}=66$; $B=\sqrt{66(66-26)(66-51)(66-55)}=660cm^2$. (fig. 8)

Prej $V=\frac{1}{3}B\cdot H$ vijon $H=\frac{3V}{B}=12cm$. Prej $P_\Delta=r\cdot s$ vijon $r=\frac{S_\Delta}{s}=\frac{660}{66}=10cm$, pra $h^2=\overline{SO}^2+\overline{ON}^2$; $h=\sqrt{12^2+10^2}=\sqrt{244}=15{,}6cm$. $M=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot h=66\cdot 15{,}6=1031cm^2$.

4 Trekëndëshi ABC është barakrahas, pra $h_a=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$; $h=\sqrt{37^2-35^2}=12cm$.

$B=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot 70\cdot 12=420cm^2$. $V=\frac{1}{3}B\cdot H=\frac{1}{3}420\cdot 16=2240cm^3$. Prej $SA\perp\Delta ABC$ vijon, trekëndëshat SAB dhe SAC janë kënddrejt, kurse ΔSBC është barakrahas. Prej ΔSAM vijon $h^2=\overline{SA}^2+\overline{AM}^2$; $h=\sqrt{16^2+12^2}=20cm$. $S=B+M$; $M=2\cdot\frac{1}{2}b\cdot\overline{SA}+\frac{1}{2}a\cdot\overline{SM}=37\cdot 16+35\cdot 20=1292$.

$S=420+1292=1712\,cm^2$. (fig. 9)

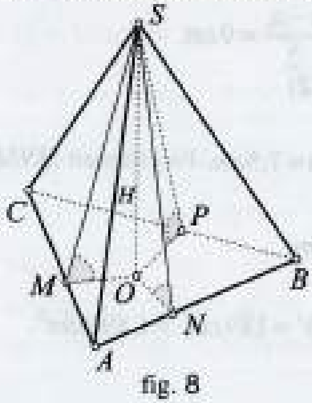


fig. 8

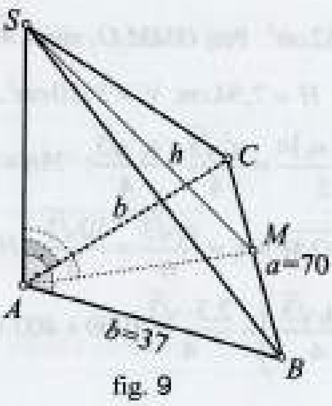


fig. 9

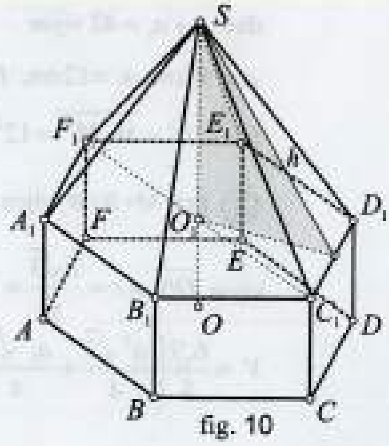


fig. 10

⑤ Vëllimi i arenës është shuma e vëllimeve të prizmit dhe piramidës

$V = B\cdot\overline{OO} + B\cdot\overline{SO_1}$; $V = B\left(\overline{OO}+\overline{SO_1}\right)$; $V = \dfrac{3\cdot 6^2\sqrt{3}}{2}(2{,}5+3) = 514{,}42\,m^3$. Numri më i madh i shiqueseve që mund të shiqojnë është 514,42:3,5=146,97 d.m.th. 147. Pëlhura e përdorur për të bërë mbështjellësin e prizmit dhe mbulesës, d.m.th. mbështjellësi i piramidës, pra $M = 6aH + 6\cdot\dfrac{ah}{2}$. Prej ΔSO_1M vijon $h^2 = \overline{SM}^2 = \overline{SO_1} + \overline{O_1M}^2$; $h = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 6m$, kurse $M = 6\cdot 6\cdot 2{,}5 + 3\cdot 6\cdot 6 = 198\,m^2$. Nga kjo sasi duhet të shtohet edhe 10% që hudhet. Prandaj, është blerë gjithsej $198 + 10\%\cdot 198 = 217{,}8\,m^2$ pëlhurë.

(fig. 10)

5

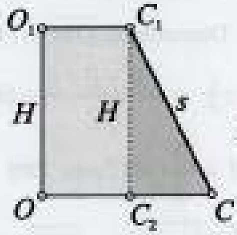
① Prej trapezit kënddrejt OCC_1O_2 vijon $\overline{C_2C_1} = a - a_1 = 3\,dm$, pra

$H^2 = s^2 - \overline{C_2C}^2$, $H = 3\,dm$.

$B = 6\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 166{,}28\,dm^2$, $B_1 = 6\dfrac{a_1\sqrt{3}}{4} = 64{,}95\,dm^3$.

$V = \dfrac{\left(B + B_1 + \sqrt{BB_1}\right)H}{3} = 335{,}15\,dm^3$.

$T = V\cdot s = 335{,}15\cdot 0{,}075 = 33{,}52\,kg$. (fig 11)



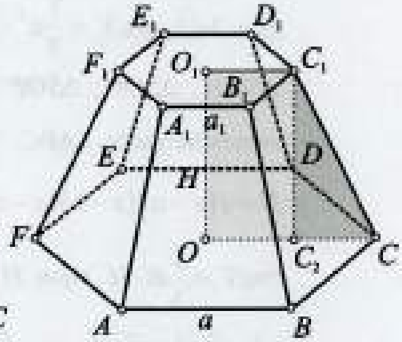


fig. 11

② Prej trapezit kënddrejt MCC_1M_1 vijon $C_2C = \dfrac{a-a_1}{2}$;

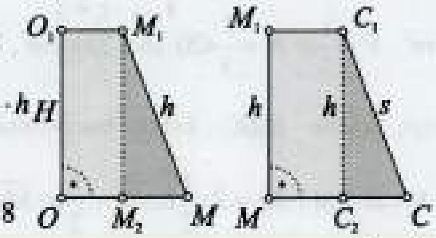
$\left(\dfrac{a-a_1}{2}\right)^2 = s^2 - h^2 = 15^2 - 12^2$;

$a - a_1 = 18cm$. Prej $M = 4\dfrac{a+a_1}{2}\cdot h$

kemi $1008 = 2(a+a_1)\cdot 12$;

$a + a_1 = 42\,cm$. Prej $a - a_1 = 18$

dhe $a + a_1 = 42$ vijon



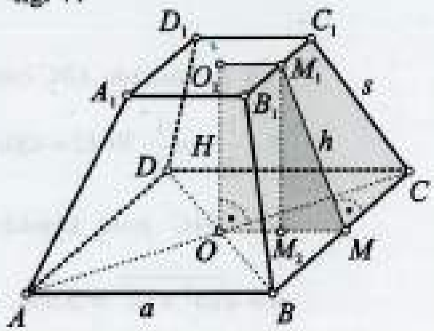


fig. 12

$a = 30cm$, $a_1 = 12cm$, $P = 2052\,cm^2$. Prej OMM_1O_1 vijon $\overline{M_2M} = \dfrac{a-a_1}{2} = 9\,cm$.

$H^2 = h^2 - \overline{M_2M}^2 = 12^2 - 9^2$; $H = 7{,}94\,cm$. $V = 3610\,cm^3$. (црт. 12)

③ Prej $M=B+B_1$ vijon $3\dfrac{(a+a_1)h}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a_1^2\sqrt{3}}{4}$; $75h = 562{,}9$; $h = 7{,}5cm$. Prej trapezit $ONMO_1$ vijon $\overline{ON} = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = 5\sqrt{3}$, $\overline{O_1M} = r_1 = \dfrac{a_1\sqrt{3}}{6} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$; $H = 6{,}9\,cm$.

$V = \dfrac{6{,}9}{3}\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a_1^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{aa_1\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{2{,}3\cdot\sqrt{3}}{4}(900+400+600)$; $V = 189\,cm^3 = 1{,}890\,dm^3$.

4 Le të jetë $a = 27\,cm$, $b = 29\,cm$ dhe $c = 52\,cm$ janë brinjët e njërës bazë dhe a_1, b_1, dhe c_1 brinjë të bazës tjetër të piramidës së cunguar. Baza dhe prerja paralele e piramidës janë figura të ngjashme, pra $\frac{P}{P_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$; $\frac{108}{72} = \frac{27}{a_1}$; $a_1 = 18\,cm$. Sipas formulës së Heronit $s = 54$.
$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 220\,cm^2$. Prej ngjashmërisë së bazave vijon $B : B_1 = a^2 : a_1^{\,2}$;
$B_1 = \frac{B \cdot a_1^{\,2}}{a^2} = \frac{220 \cdot 18^2}{27^2} = 97{,}7\,cm^2$. $V = 154{,}8\,cm^3$.

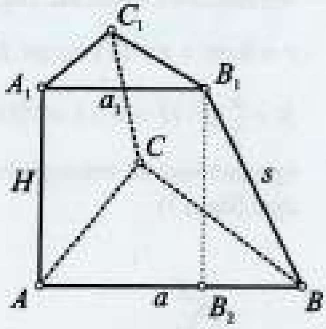


fig. 13

5 $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$, $B_1 = \frac{a_1^{\,2}\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$;
$V = \left(\frac{58\sqrt{3}}{4} + \frac{21\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{79\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3}$; $V = \frac{79\sqrt{3}}{6}\,cm^3$. Prej ΔB_2BB_1 vijon $\overline{BB_1}^{\,2} = \overline{B_2B_1}^{\,2} + \overline{B_2B}^{\,2}$; $s^2 = 2^2 + (7-3)^2$; $s = \sqrt{20}$ (fig. 13).
Prej puthitshmërisë së trapezave ABB_1A_1 dhe ACC_1A_1 vijon
$\overline{BB_1} = \overline{CC_1} = 2\sqrt{2}$, d.m.th. BCC_1B_1 është trapez barakrahas.
$\overline{C_1C_2}^{\,2} = \overline{CC_1}^{\,2} - \overline{C_2C}^{\,2}$; $h^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 - \left(\frac{7-3}{2}\right)^2$; $h = \sqrt{20-4} = 4\,cm$ (fig. 14)

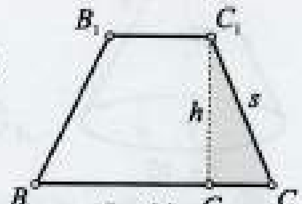


fig. 14

$M = 2\frac{(a+a_1)H}{2} + \frac{(a+a_1)h}{2}$; $M = 20 + 20 = 40\,cm^2$;
$S = \frac{49\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + 40 = \frac{58\sqrt{3}}{4} + 40 \approx 65{,}11\,cm^2$.

6 **1** a) $r = 15\,cm$, $H = 10\,cm$; b) $r = 10\,cm$, $H = 15\,cm$; c) $r = 7{,}5\,cm$, $H = 10\,cm$. **2** Prej $S = 2r \cdot H$ vijon $156 = 2r \cdot 12$; $r = 6{,}5\,cm$. **3** Shihe fig. 8.b te mësimi. $t = A_1B_1 = 16\,cm$. Prej $\Delta O_1M_1B_1$ vijon
$\overline{O_1M_1}^{\,2} = \overline{O_1B_1}^{\,2} - \overline{M_1B_1}^{\,2}$; $d = \overline{O_1M_1} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}$; $d = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15\,cm$. **4** Prej ΔO_1M_1B vijon
$\measuredangle B_1O_1M_1 = 60^0$, pra $tg\,60^0 = \frac{\frac{t}{2}}{d} = \frac{t}{2d}$. Pasi $d = 4$, $t = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot 4 = 8\sqrt{3}$, $P = t \cdot H$; $S = 8\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 120\,cm^2$.

7 **1** Le të jetë $a = 60\,cm$, $b = 40\,cm$. Nëse rrotullohet rreth a, atëherë $H = 60$, kurse $r = 40\,cm$, pra
$S_1 = 2r\pi(r+H) = 2 \cdot 40\pi(60+40) = 8000\pi\,cm^2$. $V_1 = r^2\pi H = 40^2\pi \cdot 60 = 96000\pi\,cm^3$. Nëse rrotullohet rreth b, atëherë $H = 40\,cm$, $r = 60\,cm$, pra $P_2 = 2 \cdot 60\pi(60+40) = 12000\pi\,cm^2$, $V_2 = 60^2\pi \cdot 40 = 144000\pi\,cm^3$.
$S : S_1 = 2 : 3$; $V_1 : V_2 = 2 : 3$.

2 Prej $80\pi = 2r\pi(r+H)$ dhe $H - r = 2$ vijon $r = 4\,cm$, $H = 6\,cm$, $V = r^2\pi \cdot H = 96\pi\,cm^3$.

3 $\sin 30^0 = \frac{H}{a}$; $H = a \cdot \sin 30^0 = 5\,cm$, $r = 5\,cm$, kurse
$V = r^2\pi \cdot H = 5^2 \cdot \pi \cdot 5 = 125\pi\,cm^3$. (црт. 15)

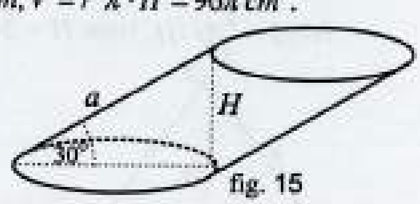


fig. 15

4 Rrezja e pusit të gropuar është $r = 0{,}65 + 0{,}40$; $r = 1{,}05\,m$,
pra dheu i gropuar është $V = 1{,}05^2\pi \cdot 12 = 41{,}5\,m^3$. Në pus ka $V = 0{,}65^2 \cdot \pi \cdot 4{,}5 = 5{,}97\,m^3$ ujë.
5 $V_1 = 0{,}3^2\pi \cdot 5 = 1{,}413\,m^3$. Tehu i bazës së prizmit është $a = 0{,}3\sqrt{2}$, kurse $V = \left(0{,}3\sqrt{2}\right)^2 5 = 0{,}9\,m^3$.
Hedhurina është $1{,}413 - 0{,}9 = 0{,}513\,m^3$, d.m.th. $36{,}3\%$.

8 ① Pasi prerja boshtore është trekëndësh barakrahas me këndin e bazës 60^0,domethënë ai është barabrinjës pra $P=\dfrac{(2r)^2\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}\,cm^2$. ② Diametri $\overline{AB}=2r=16\,cm$. Pasi $16^2+12^2=20^2$, domethënë prerja boshtore SAB është trekëndësh barakrahas me hipotenuzë $\overline{SA}=20\,cm$. Sipas kësaj $P=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{SB}=\dfrac{1}{2}\cdot16\cdot12=96\,cm^2$. Nëse nuk vëren se ΔABS është kënddrejt, atëherë syprinën e tij njehso me formulën e Heronit. (fig. 19) ③ Trupi rrotullues i fituar është kon i drejtë me $r=8\,cm$ i $s=17\,cm$, pa $H^2=s^2-r^2$, $H=\sqrt{17^2-8^2}=15\,cm$. Syprina e prerjes boshtore është $S=\dfrac{1}{2}2r\cdot H=8\cdot15=120\,cm^2$. (fig.16) ④ Detyra ka dy zgjidhje. Së pari: Le të jetë $\overline{SO_1}=4\,cm$. Prej ngjashmërisë së trekëndëshave SAO dhe SA_1O_1 vijon $\dfrac{r}{r_1}=\dfrac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}}$; $\dfrac{7}{r_1}=\dfrac{14}{4}$; $r_1=2\,cm$. Cakto zgjidhjen e dytë.(fig. 17)

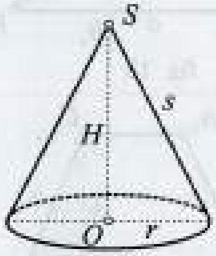


fig. 16

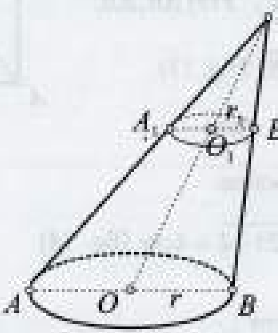


fig. 17

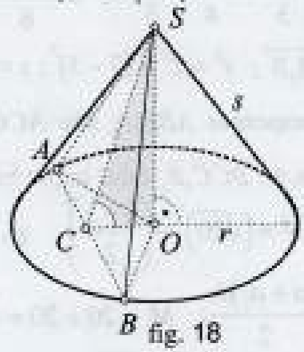


fig. 18

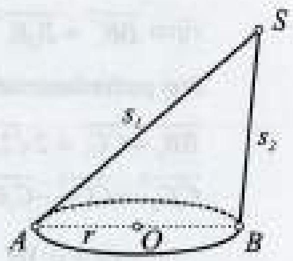


fig. 19

⑤ Trekëndëshi SCO është trekëndësh barakrahas, pasi $\measuredangle SOC=90^0$, kurse $\measuredangle SCO=45^0$, pra $\overline{OC}=\overline{OS}=6\,cm$. Trekëndëshi AOB është gjithashtu, barakrahas kënddrejt, pra edhe ΔOCB është barakrahas kënddrejt. Domethënë $\overline{OC}=\overline{CB}=6\,cm$, kurse $\overline{AB}=12\,cm$. Prej ΔSCO vijon $\overline{SC}=6\sqrt{2}$, pra $S=\dfrac{1}{2}AB\cdot SC=\dfrac{1}{2}\cdot12\cdot6\sqrt{2}=36\sqrt{2}\,cm^2$. (fig. 18)

9 ① Prej $S=\dfrac{s^2}{2}$ vijon $36\cdot2=s^2$, $s=6\sqrt{2}\,cm$, kurse $r=H=6\,cm$. $S=\pi r(r+s)=6\pi\left(6+6\sqrt{2}\right)=36\pi\left(1+\sqrt{2}\right)cm^2$. $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2H=\dfrac{1}{3}\pi\cdot6^2\cdot6=72\pi\,cm^3$. (fig. 20) ② Prej $M=rs\pi$ vijon $rs=4896$. Prej $r:s=8:17$ vijon $r=8k$, $s=17k$, pra $8k\cdot17k=4896$; $k^2=36$, $k=6$. $r=48\,cm$, $s=102\,cm$, $H=\sqrt{s^2-r^2}=90\,cm$. $V=\dfrac{1}{3}r^2\pi\cdot H=\dfrac{1}{3}\cdot48^2\pi\cdot90=69120\pi\,cm^3=69{,}12\pi\,dm^3$. ③ Prej $L=2r\pi$, vijon $2r=21\,cm$. Syprinën e ΔABS do ta njehsojmë me formulën e Heronit.

$S=\sqrt{s(s-s_1)(s-s_2)(s-2r)}$; $s=\dfrac{20+13+21}{2}=27$; $S=\sqrt{27(27-20)(27-13)(27-21)}=252\,cm^2$.

Prej $S=\dfrac{1}{2}2r\cdot H$ vijon $H=24\,cm$. $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2H=\dfrac{1}{3}\pi\cdot10{,}5^2\cdot24=882\pi\,cm^3$. (fig. 21)

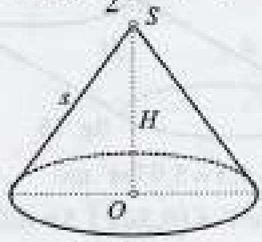


fig. 20

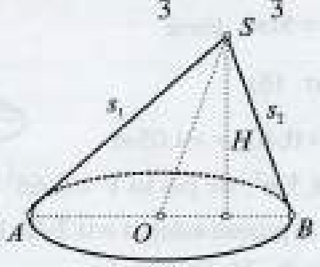


fig. 21

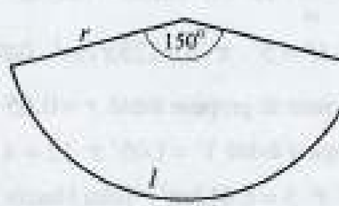


fig. 22

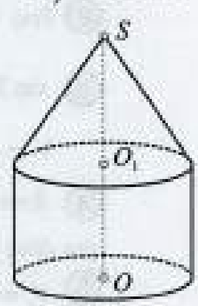


fig 23

④ $\ell=\frac{\pi r\alpha}{180^0}=\frac{5\cdot\pi\cdot288^0}{180^0}=8\pi\,cm.$ Gjatësia e harkut të konit, kurse rrezja e harkut është përftuesja e konit, d.m.th. $s=r=5\,dm.$ Prej $P=\ell=8\pi=2\pi r_1$ vijon se rrezja e bazës së konit është $r_1=4\,cm.$ Lartësia e konit $H=\sqrt{s^2-r^2}=3\,dm.$

$V=\frac{1}{3}\pi r_1^2H=\frac{1}{3}\pi4^2\cdot3=16\pi\,dm^3.$ (fig. 22) ⑤ $V=\pi r^2\cdot\overline{OO_1}+\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\overline{SO_1};\ V=\pi r^2\left(\overline{OO_1}+\frac{1}{3}\overline{SO_1}\right);$

$V=2{,}5^2\pi\left(2{,}2+\frac{1}{3}\cdot18\right)=54{,}95\,m^3.\ T=V\cdot s=54{,}95\cdot0{,}03=1{,}65\,t.$ (fig. 23)

10 ① Lartësia e konit të cunguar $H=\sqrt{s^2-(r-r_1)^2};\ H=\sqrt{17^2-8^2}=15cm.$ Od $\pi(r+r_1)\cdot s=2\pi R\cdot H,$ kemi $\pi(19+11)\cdot17=2\pi R\cdot15,\ R=17cm-$ rrezja e bazës së cilindrit.

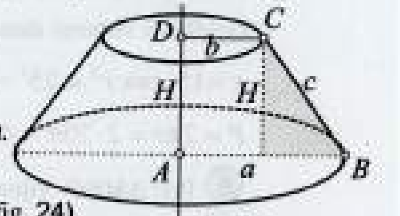


fig 24

② Prej $S=\frac{(a+b)h}{2}$ vijon $24=\frac{(10+6)h}{2};\ h=3.$ Prej kushtit vijon $H=3cm,\ a=r=10cm,\ b=r_1=6cm,$ kurse $s=c=\sqrt{H^2+(r-r_1)^2}=5cm.$

$V=\frac{\pi\cdot3}{3}(10^2+6^2+10\cdot6)=196\pi\,cm^3.\ S=\pi(10^2+6^2+(10+6)\cdot5)=226\pi\,cm^2.$ (fig. 24)

③ Prej $506\pi=\pi(r^2+r_1^2+(r+r_1)s)$ dhe $r=r_1+5$ vijon $506=(r_1+5)^2+r_1^2+(2r_1+5)\cdot13;$

$r_1^2+18r_1-208=0.\ r_1=8cm,$ kurse $r=8+5=13cm,\ H=\sqrt{s^2-(r-r_1)^2}=12cm.$

$V=\frac{12\pi}{3}(13^2+8^2+13\cdot8)=1348\pi\,cm^3.$ ④ Prej ΔACA_1 vijon $AC=24-10=14cm,\ \overline{AA_1}=13cm$ dhe $\overline{CA_1}=15cm.$ Sipas formulës së heronit $S_\Delta=\sqrt{s(s-14)(s-13)(s-15)};\ s=(14+13+15):2=21$

$S_\Delta=84cm^2.$ Од $S_\Delta=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot H;\ 84=\frac{1}{2}\cdot14\cdot H;\ H=12cm.$

$V=\frac{12\pi}{3}(12^2+5^2+12\cdot5)=916\pi\,cm^3.$ (fig. 25)

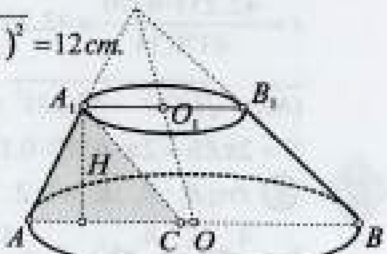


fig. 25

⑤ Trupi i fituar rrotullues është kon i cunguar prej të cilit është nxjerrë një kon rrezja e të cilit është $r_2=\overline{BO}=\frac{a}{2}=5cm,$ e maja është në qendrën e bazës së sipërme

Elementet e konit të cunguar janë: $\sin60^0=\frac{H}{a};\ H=5\sqrt{3}cm,$

$r_2=\overline{BO}=5cm,\ r=10+5=15cm,\ r_1=10cm,$ pra

$V=\frac{5\sqrt{3}\pi}{3}(15^2+10^2+15\cdot10)-5^2\pi\cdot5\sqrt{3};\ V=716{,}6\sqrt{3}\pi\,cm^3.$

Pasi çdo segment që rrotullohet përshkruan ndonjë sipërfaqe, domethënë syprina e trupit rrotullues është e barabartë me shumën e syprinave që fitohen si syprina rrotulluese të çdo segmenti që rrotullohet.

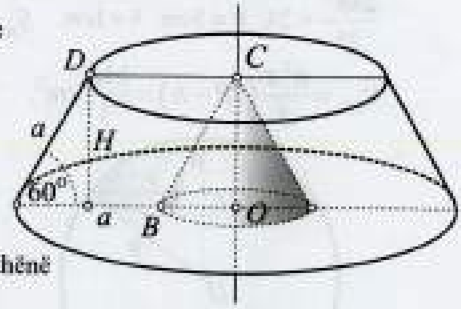


fig. 26

Në këtë rast segmenti AB përshkruan unazë rrethore. Segmenti BC përshkruan kon. Segmenti AD përshkruan mbështjellësin e konit të cunguar. Segmenti DC përshkruan rreth, baza e sipërme e konit të cunguar. Pra:

$P=M_{\text{ПК}}+M_{\text{К}}+B_1+(B-B_2);\quad S=\pi(r+5+r_1)s+r_2\pi s+r_1^2\pi+\left((r+r_2)^2-r_2^2\right)\pi;$

$S=\pi\cdot25\cdot10+5\cdot10\pi+10^2\pi(15^2-5^2)\pi;\quad S=600\pi\,cm^2.$ (fig. 26)

11 ① Më së shumti 2 pika. ② Me prerjen janë fituar dy kalota lartësitë e të cilave janë $h_1 = \frac{R}{2}$ dhe $h_2 = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$, pra $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi Rh_1}{2\pi R_2} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{2R}{2}} = \frac{1}{3}$. ③ $R = d+9$; $R^2 = 15^2 + d^2$; $(d+9)^2 = 225 + d^2$; $d = 8cm$.

④ $O_1O_2 = 36cm$, $R_1 = 29cm$, $R_2 = 25cm$. Prerja e vijës rrethore diametri i së cilës është korda e përbashkët. Le të jetë $\overline{OO_2} = x$; $\overline{O_1O} = 36 - x$. Od ΔAOO_2 vijon

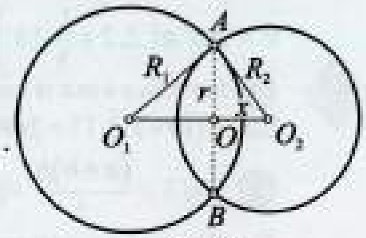


fig. 27

$r^2 = R_2{}^2 - x^2$. Prej ΔAOA_1 vijon $r^2 = R_1{}^2 - (36-x)^2$.
Zgjidhja e sistemit është $25^2 - x^2 = 29^2 - 36^2 + 72x - x^2$,
$x = 15$, pra $r^2 = 25^2 - 15^2$; $r = \sqrt{625-225} = 20cm$.
$P = 2\pi r = 2\cdot 20\pi = 40\pi cm^2$. (fig. 17)

⑤ Prej ΔMBO vijon $\overline{MB}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{OB}^2 = 6370{,}14^2 - 6370^2$;
$\overline{MB} = \sqrt{1783{,}62} = 42{,}233$. Prej $S_{\Delta MOB} = \frac{1}{2}\overline{MB}\cdot R = \overline{MO}\cdot r$ vijon
$r = \frac{42{,}233\cdot 6370}{6370{,}14} = 42{,}231$. Prej ΔO_1OB vijon
$\overline{OO_1} = \sqrt{6370^2 - 42{,}231^2} = 6369{,}86km$. $h = R - \overline{OO_1} = 0{,}13999$.
$S = 2\pi Rh = 2\pi\cdot 6370\cdot 0{,}13999 = 5600km^2$. (fig. 28)

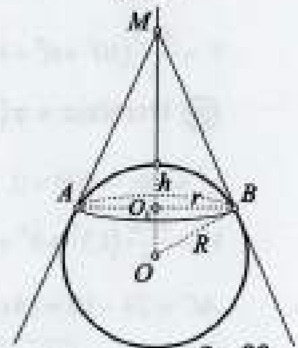
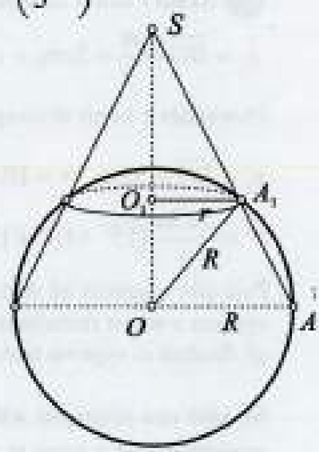


fig. 28

12 ① Prej $R_1 : R_2 : R_3 = 1:2:3$ vijon $R_1 = k$, $R_2 = 2k$, $R_3 = 3k$;
$V_1 = \frac{4}{2}\pi R_1^2 = \frac{4}{3}\pi k^3$; $V_2 = \frac{4}{3}\pi(2k)^3$; $V_2 = \frac{32}{3}\pi k^3$; $V_3 = \frac{4}{3}\pi(3k)^3 = \frac{108}{3}\pi k^3 = 36\pi k^3 = 36\pi k^3$.
$V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi k^3 + \frac{32}{3}\pi k^3 = 12\pi k^3$, d.m.th. $V_3 = 3(V_1 + V_2)$.

② $S_K = \frac{2}{5}\cdot 4\pi R^2$; $2\pi Rh = \frac{8\pi}{5}R^2$; $h = \frac{4}{5}R$; $\overline{OO_1} = R - \frac{4}{5}R = \frac{1}{5}R$, $R^2 - \left(\frac{1}{5}R\right)^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2$;
$\frac{24R^2}{25} = 24$; $R = 5cm$. $h = 1cm$. $S_K = 2\pi Rh = 2\pi 10\cdot 1 = 10\pi cm^2$. (fig. 29)
$V_{TO} = \frac{h^2\pi}{3}(3R-h) = \frac{14\pi}{3}cm^3$.



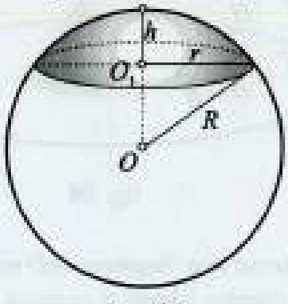


fig. 29

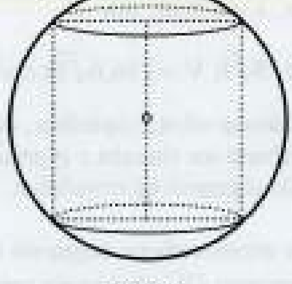


fig. 31

fig. 30

③ $\overline{SO} = 2R$; $\overline{OA_1} = 12cm$. $\Delta AOS \sim \Delta O_1A_1S_1$, pra $R:12 = 2R:(2R - \overline{OO_1})$; $\overline{OO_1} = 24 - 2R$. Prej ΔOA_1O_1 vijon $R^2 = \overline{OO_1}^2 + 12^2$; $R^2 = (24-2R)^2 + 144$. $R = 20cm$, $V = \frac{4}{3}\pi 20^3 = \frac{32\pi}{3}dm^3$. (fig 31)

(4) Rrezja e topit të brendashkruar është $R=\frac{a}{2}$, të jashtashkruar $R=\frac{D}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}$;

$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$. (5) Prerjet janë në anë të ndryshme të cilindrit dhe kanë rreze të njëjtë r.

Pasi $H_C=H_{TC}$ kemi: $V_{TC}=\frac{\pi H}{6}\left(3r^2+3r^2+H^2\right)$; $V_C=\pi r^2H$, pra $\frac{\pi H}{6}\left(6r^2+H^2\right)-\pi r^2H=36\pi$, vijon $H=6cm$. (fig. 31)

TEMA 8 — PËRPUNIMI I TË DHËNAVE

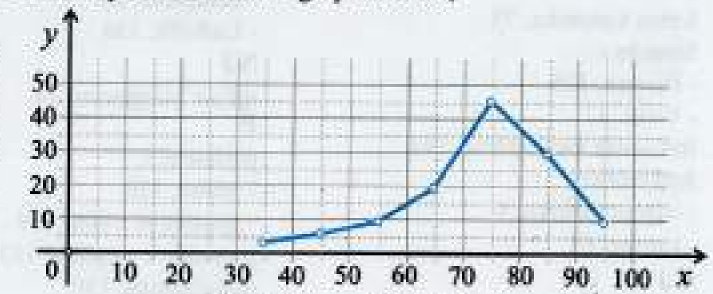
1 (1) Vargu statistik i cili nuk zvogëlohet është ky:

1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5

Tabela statistike është kjo:

Vlera e shënimit x	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=4$	$x_5=5$	
f: Numri i individëve të dobët që përsëriten	7	5	8	6	4	$\Sigma=30$

(2) a) Është e qartë , numri i individëve statistik vlera e së cilit është më e vogël ose e barabartë me 8 është 3+4+3=10 (frekuencat kumulative).b) Vlera e cila është më e vogël ose e barabartë me 15 është 3+4+3+8+4=22 (3) Shënimi i pandërprerë statistik që është dhënë në grup intervale, grafikisht paraqitet me histogram.
Histogrami është drejtkëndësh ku njëra brinjë shtrihet në boshtin x dhe është i barabartë me gjatësinë e intervalit të shpërdarjes, kurse brinja tjetër është e barabartë me madhësinë e frekuencës për intervalin përkatës.
Poligoni i frekuencës fitohet me bashkimin e pikave $M_1(x_1,f_1)$,



$x_1,x_2,\ldots x_k$ janë meset e grupit të intervaleve, d.m.th. $x_1=\frac{30+40}{2}$, $x_2=\frac{40+50}{2}$ etj.

(4) Vargu statistik është 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5.

Mesi aritmetik është $x=\frac{1\cdot2+2\cdot5+3\cdot3+4\cdot2+5\cdot2}{14}=2{,}64$. - Vargu ka numër çift të anëtarëve, pra mediana është $M_e(x)=\frac{2+3}{2}=2{,}5$. - Për modën kemi $M_0(x)=2$.

2 (1) $R_1=18-12=6$; $R_2=16-14=2$. (2) $\overline{x_1}=39$, $\overline{x_2}=40$; $R_1=76$, $R_2=78$. (3) Mediana $M_e=\frac{19+1}{2}=x_{10}=9$ e ndan bashkësinë në dy nënbashkësi me nga nëntë anëtarë ku medianet janë në kvartilet e kërkuara: $Q_1=x_5=3$ dhe $Q_3=x_{15}=16$.

3 (1) $\overline{x}=\frac{1}{35}(1\cdot4+2\cdot10+3\cdot7+4\cdot6+3\cdot5+6\cdot5)=\frac{114}{35}=3{,}22$

$d^2=\frac{1}{35}\left[4(1-3{,}22)^2+10(2-3{,}22)^2+7(3-3{,}22)^2+6(4-3{,}22)^2+3(5-3{,}22)^2+5(6-3{,}22)^2\right]=2{,}095$ ose $d=\sqrt{2{,}095}=1{,}45$. (2) $d=1{,}11$. (3) a) $\overline{x}=29{,}4$; b) $d=2{,}58$.

PASQYRA E KONCEPTEVE

PËRMBAJTJA

TEMA 1

FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE PREJ KËNDIT TË NGUSHTË TE TREKËNDËSHI KËNDDREJT

TEMA 2

NUMRAT KOMPLEKS

TEMA 3

BARAZIMET KATRORE

TEMA 4

FUNKSIONI KATROR, JOBARAZIMI KATROR

TEMA 5 KONSTRUKSIONI I TREKËNDËSHIT DHE KATËRKËNDËSHIT

TEMA 6 SYPRINA E FIGURAVE TË RRAFSHTA

TEMA 7 ELEMENTET NGA STEREOMETRIA

TEMA 8 PËRPUNIMI I TË DHËNAVE

Autorë: Borivoje Miladinoviç,
Trajçe Gjorgjievski,
Nikola Petreski

Recenzentë: Asen Radojkov - Fakulteti pedagogjik - Shtip
Katica Spasovska Binçeva - profesor në SHMSH, gjimnazi "R. J. Korçagin" Shkup
Dragan Gjorgjievski - profesor SMSH, gjimnazi "J. B. Tito"-Shkup

Redaktor: Biljana Angelova

Me vendim të Ministrit të Ministrisë së arsimit të Republikës së Maqedonisë nr. 11-518311 prej datës 30.09.2002 ky libër lejohet të përdoret në arsimin e mesëm të gjimnazit.

"ALBI" DOO Shkup, Rr. Dame Gruev nr.7-7/2 Shkup
Vendi dhe viti i botimit të parë: Shkup 2002

CIP - Katalogizacija vo publikacija na Narodna i univerzitetska
biblioteka "Sv. Kliment Ohridski" - Skopje
51 (075.3)

MILADINOVIÇ, Borivoje
Matematika: për vitin II: (drejtimi ntyroro - matematikor) /
Borivoje Miladinoviç, Trajce Gjorgievski, Nikola Petreski;
ëpërkthyes Muzafer Beqiri - Skopje : Albi, 2002. - 224 str.:
ilustr.: 26 cm

ISBN 9989 - 919 - 29 - 1
1. Gjorrijevski, Trajce 2. Petreski, Nikola

Botues:
SHOQËRIA PËR VEPRIMATRI BOTUESE
"ALBI" d.o.o. Shkup
Rr. "Dame Gruev" Nr. 7-7/2 Shkup
Drejtor: Aleksandar Stefanovski

Borivoje Miladinoviq, Trajçe Gjorgjievski, Nikola Petreski

MATEMATIKA

viti II arsimi i gjimnazit

Përktheu

Muzafer Beqiri

Përpunimi kompjuterik

Milço Avramoski, Dejan Kërstevski, Blazhee Tofilovski dhe Muzafer Beqiri

Korrektura

Muzafer Beqiri

Botimi i korrigjuar XIX
Sasia 224 faqe, format 21x26 cm
Tirazhi 95 kopje
Botuar në shtypshkronjën "Shtypshkronjën Naumovski" DOOEL - Shkup
Rr. Pekljane nr.71 Shkup

Shkup 2020