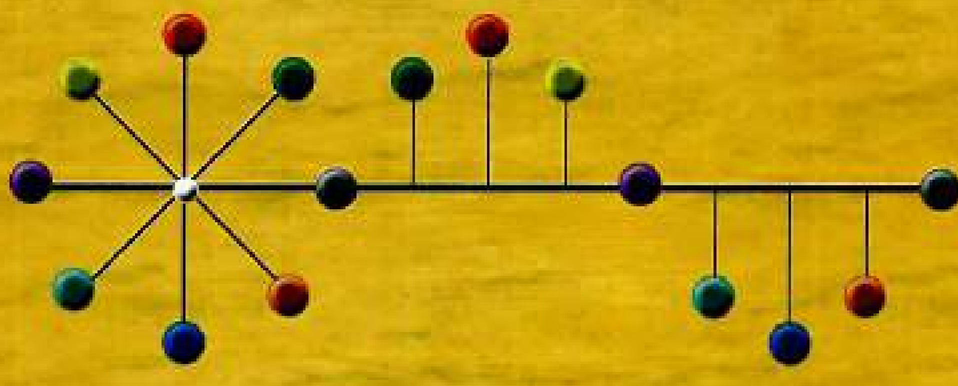
Borivoje Miladinoviq
Nikolla Petreski

MATEMATİKA

viti III



ARSİMİ I GJİMNAZİT

Borivoje Miladinoviq
Nikolla Petreski

MATEMATİKA

viti III

ARSİMİ İ GJİMNAZİT

2020

PARATHËNIE

Ky libër do të ndihmon gjat të mësuarit e matematikës në vitin e tretë. Të jesh aktiv dhe i rregulltë në punë, kurse ajo do të ndihmon në mënyrë të pavarur të përvetësosh njohuri që do të sjellë kënaqësi dhe sukses në mësim.

Libri është ndarë në katër tërësi tematike. Tërësitë tematike fillojnë me përmbajtjen e tyre, kurse njësitë mësimore janë me numra.

Vëreji shenjat në njësitë mësimore dhe vëreje porosinë e tyre.

Kujtohu! Njësitë mësimore fillojnë me diçka që e ke të njohur. Duhet të kujtohesh dhe t'i zgjidhësh kërkesat e dhëna. Ajo do ta lehtëson të mësuarit e përmbajtjeve të tyre.

A, **B**, **C**, … Me këto shenja njësia mësimore është ndarë në pjesët për konceptet e tyre.

1, 2, 3, … Me shenjat e këtilla janë shënuar aktivitetet, pyetjet dhe detyrat që do t'i zgjidhish në orë të mësimit në mënyrë të pavarur ose me ndihmën e arsimtarit tënd, kurse ajo është në njësinë mësimore.

● Me shenjën rreth të jepet pyetje në të cilën duhet të japish përgjigje.

■ Me këtë shenjë është dhënë informacioni për sqarimin e konceptit të ri.

Mbaj mend! Kjo të udhëzon çka është e rëndësishme për konceptin e ri.

Vëre! Kjo porosi të jep në dije t'i kushtosh kujdes më të madh.

Detyra

1, 2, 3, … Pas çdo njësie mësimore janë dhënë detyra. Duke zgjidhur rregullisht dhe në mënyrë të pavarur në këto detyra më mirë do ta kuptosh atë që e ke mësuar. Përgjigjet tuaja krahasoji me përgjigjet dhe zgjidhjet të cilat janë dhënë në fund të librit.

Kur do të hasish në vështirsi gjatë të mësuarit e përmbajtjeve të caktuara, mos u dorëzo, përpiqu përsëri, bëru këmbngulës.

Do të na gëzon nëse ky libër të mundëson të arrish sukses të shkëlqyeshëm.

Nga autorët

TEMA 1

FUNKSIONI EKSPONENCIAL DHE LOGARITMIK

Në këtë temë do mësosh për:

TEMA 1 FUNKSIONI EKSPONENCIAL DHE LOGARITMIK

1 FUNKSIONI EKSPONENCIAL. VETITË E FUNKSIONIT EKSPONENCIAL

Kujtohu!

- $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a,\ a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$
- $a^0 \overset{def}{=} 1$ i $a^{-n} \overset{def}{=} \dfrac{1}{a^n},\ a \neq 0.$
- $a^{\frac{m}{n}} \overset{def}{=} \sqrt[n]{a^m},\ a > 0,\ m, n \in \mathbb{N}.$

A

Vlera e fuqisë $a^x, a > 0$ është njëvlerësisht e përcaktuar për çdo numër racional x.
Ky gjykim vijon prej përkufizimit për fuqinë me tregues numër natyror dhe racional.

Fuqia a^x, $a > 0$, gjithashtu, është njëvlerësisht e përcaktuar nëse x është numër iracional. Këtë gjykim nuk do ta vërtetojmë.

Domethënë, fuqia a^x, $a > 0$ është njëvlerësisht e përcaktuar për çdo numër real x.

Kufizimi $a > 0$ është futur për shkak të kushtit $a < 0$ fuqia a^x për disa vlera të treguesit x nuk është numër real. Për shembull për $a = -9$ dhe $x = \dfrac{1}{2}$ kemi $(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9} = 3i \notin \mathbb{R}$.

Operacionet me fuqi treguesi i të cilëve është numër real nxirren sipas rregullave që vlejnë me tregues numër natyror.
Vërtetimi i disa prej tyre është shumë i ndërlikuar, prandaj nuk do ta bëjmë.

1 Kryeji operacionet e shënuarai:

a) $(x^2 \cdot x^3)^2 \cdot (x \cdot x^2)^{-3},\ x \neq 0;$ b) $(a^{2} \cdot a)^{3} \cdot (a \cdot a^2)^3,\ a \neq 0;$ c) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{2}};$

ç) $a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{3}} : a^{-1}\right),\ a \neq 0;$ d) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}}.$

Vëreje zgjidhjen:

Operacionet me fuqi nxirren sipas këtyre rregullave:

$1^\circ\ a^m \cdot a^n = a^{m+n};$ $2^\circ\ a^m : a^n = a^{m-n};$ $3^\circ\ (a^m)^n = a^{m \cdot n};$

$4^\circ\ (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m;$ $5^\circ\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}\ \ b \neq 0,\ \ m, n \in \mathbb{R}.$

a) $(x^2 \cdot x^3)^2 \cdot (x \cdot x^2)^{-3} = x^{10} \cdot x^{-9} = x;$

d) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81.$

B Sipas asaj që u përmend paraprakisht për fuqinë a^x, $a > 0$ është njëvlerësisht i përcaktuar për çdo numër real x, domethënë mund të përkufizojmë një pasqyrim $f: x \to a^x$ ose $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ me të cilën bashkësia R pasqyrohet në R^+.

Mbaj mend!

Funksioni $f: R \to R^+$ është dhënë me formulën $f(x) = a^x$, $a > 0$ dhe $a \neq 1$ quhet funksion eksponencial me bazë a.

Vërejtëm pse e futëm kufizimin $a > 0$, kurse kushtin $a \neq 1$ është e qartë, pasi nëse $a = 1$, atëherë $y = 1^x = 1$ për çdo $x \in R$ pra nuk ka kuptim të shqyrtohet funksioni i cili është konstant.

2 Cilët prej këtyre funksioneve janë eksponenciale:

a) $y = 3{,}1^x$; b) $y = x^2$; c) $y = \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)^0\right)^x$; ç) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

Vëreje përgjigje:

Vetëm funksionet a) dhe ç) janë eksponenciale.

3 Vizato grafikun e funksionit:

a) $y = 2^x$; b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; c) $y = 3^x$; ç) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Vëreje zgjidhjen:

Funksionet së pari i paraqesim tabelarisht, ku për argumentin x japim numra të plotë dhe për caktimin më të lehtë të vlerave të funksionit.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

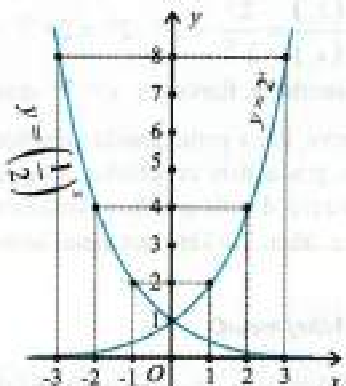


fig. 1

Grafikët e funksioneve a) dhe b) janë paraqitur në fig. 1, kurse c) dhe ç) në fig .2.

Të shqyrtojmë disa veti të funksionit $y = 2^x$.

1. Funksioni është përkufizuar për të gjithë numrat realë që vijon prej vet përkufizimit D_f; $x \in \mathbb{R}$.
2. Vlerat e funksionit janë çfarëdo numra pozitiv realë, vijon prej përkufizimit, d.m.th. $V_f: y \in \mathbb{R}^+$.
3. Për $x = 0$ vijon $y = a^2 = 1$, d.m.th. grafiku kalon nëpër pikën $(0,\ 1)$.

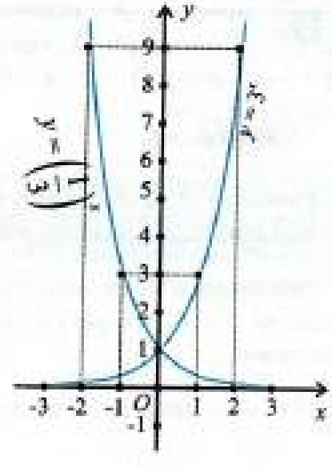


fig.2

Kujtohu!

- Funksioni $y = f(x)$ monotonisht rritet nëse për çfarëdo $x_1, x_2 \in D_f$ dhe $x_2 > x_1$, vijon se $f(x_2) > f(x_1)$, d.m.th. $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)} > 1$.
- Funksioni $y = f(x)$ monotonisht zvogëlohet nëse për çfarëdo $x_1, x_2 \in D_f$ dhe $x_2 > x_1$, vijon se $f(x_2) < f(x_1)$, d.m.th. $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)} < 1$.

4. Nëse $x_2 > x_1 > 0$, atëherë $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)} = \dfrac{2^{x_2}}{2^{x_1}} = 2^{x_2 - x_1} > 1$.

   Nëse $x_1 < 0,\ x_2 < 0$, kurse $x_2 > x_1$ në atë rast le të jetë $x_1 = -k_1$, $(k_1 > 0)$, kurse $x_2 = -k_2$, $(k_2 > 0)$ dhe poashtu $k_1 > k_2$, atëherë $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)} = \dfrac{2^{-k_2}}{2^{-k_1}} = \dfrac{2^{k_1}}{2^{k_2}} = 2^{k_1 - k_2} > 1$.

   Nëse $x_2 > 0,\ x_1 < 0$, atëherë $x_2 > x_1$. Le të jetë $x_1 = -k_1$, $(k_1 > 0)$, atëherë

   $$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{2^{x_2}}{2^{-k_1}} = 2^{x_2} \cdot 2^{k_1} = 2^{x_2 + k_1} > 1.$$

   Domethënë, funksioni $y = 2^x$ monotonisht rritet në tërë fushën e përkufizimit.

5. Vëreve, kur x pafundësisht zvogëlohet (majtas prej zeros) vlera e funksionit ngel pozitive dhe gradualisht zvogëlohet, megjithatë vlera e tij asnjë herë nuk mund të jetë e barabartë me zero, d.m.th. grafiku i funksionit afrohet deri te boshti x, por asnjë herë nuk e prenë as që e takon. Në këtë rast themi se boshti x-është **asimptotë** e lakores $y = 2^x$.

Mbaj mend!

Drejtëza ndaj së cilës ndonjë lakore gradualisht (deri në pakufi) afrohet, por nuk e prenë quhet **asimptotë**.

Vërë!

- Vetitë e funksioneve $y = 2^x$ dhe $y = 3^x$, $\left(y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right.$ dhe $\left.y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right)$ janë të përbashkëta.

■ Grafikët e funksioneve $y = a^x$ dhe $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$, ($y = 2^x$ dhe $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = 3^x$ dhe $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$) janë simetrike në lidhje me boshtin y, d.m.th. nëse pika $A(x_1, y_1)$ i takon grafikut të funksionit $y = a^x$, $a > 0$, atëherë pika $B(-x_1, y_1)$ i takon grafikut të funksionit $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$.

C Disa veti të funksionit eksponencial $y = a^x$, $a > 0$ dhe $a \neq 1$.

1. Funksioni është përkufizuar për të gjitha numrat realë, d.m.th.. D_f: $x \in R$.
2. Vlera e funksionit është bashkësia e numrave pozitiv realë, d.m.th.
V_f: $x \in R^+$. Domethënë $y > 0$ për çdo $x \in R$.

Këto veti vijojnë prej përkufizimit të funksionit.

3. Për $x = 0$, $y = a^0 = 1$, d.m.th. grafiku e prenë boshtin y në pikën $(0, 1)$.
4. a) për $a > 1$ funksioni monotonisht rritet, d.m.th. për $x_1, x_2 \in D_f$ dhe $x_2 > x_1$ vijon
$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}=a^{x_2-x_1}>1.$$
b) Për $0 < a < 1$ funksioni monotonisht zvogëlohet, d.m.th. për $x_1, x_2 \in D_f$ dhe $x_2 > x_1$, vijon $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}=a^{x_2-x_1}<1$.
5. boshti x është asimptotë e funksionit eksponencial.

5 Shqyrto vetitë e funksionit $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (fig. 1) dhe $y = 3^x$ (fig. 2).

Detyra

1 Njehso:

a) $\left(\frac{3}{5}-\left(\frac{4}{3}\right)^0\right)^{-1}$; b) $4^{-\frac{1}{2}}+8^{-\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{4}}$.

2 Krahasoji fuqitë:

a) $\sqrt[7]{2^5}$ dhe $\sqrt[7]{2^6}$; c) $\pi^{\sqrt{2}}$ dhe $\pi^{\sqrt{3}}$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ dhe $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$.

b) $\sqrt[3]{5^4}$ dhe $\sqrt[4]{5^7}$; ç) $3^{\sqrt{6}}$ dhe $3^{\sqrt{8}}$;

3. Thjeshtoji shprehjet:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{8}} \cdot 4^{\sqrt{2}} \cdot 8^{\sqrt{8}}$; b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\sqrt{3}} \cdot 4^{\sqrt{12}}$; c) $\left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{8}}$.

4. Vërteto identitetin:

a) $\left(\left(\sqrt[4]{4}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-3\sqrt{5}} = \frac{1}{64}$; b) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}} = 81$.

5. Cilat prej funksioneve janë rritëse, kurse cilat zvogëluese:

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; b) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$; c) $y = \left(\sqrt{2}\right)^{-x}$; ç) $y = \left(\frac{1}{0,5}\right)^x$?

6. Në sistemin e njëjtë koordinativ vizato grafikun e funksioneve:

a) $y = \left(\frac{1}{0,25}\right)^x$ dhe $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; b) $y = 10^x$ dhe $y = 10^{-x}$.

7. Me ndihmën e grafikut të funksionit $y = 2^x$, vizato grafikun e funksionit $y = 3 \cdot 2^x$ dhe $y = -2^x$.

2 GRAFIKU I FUNKSIONIT $y = a^{x-m} + n$

Kujtohu!

Grafikun e funksionit $y = x^2 + 2$ e vizatojmë ashtu që grafikun e funksionit $y = x^2$ e zhvendosim nëpër boshtin y për 2 njësi lartë, fig. 1

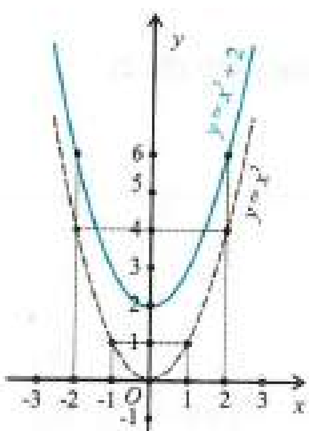


fig. 1

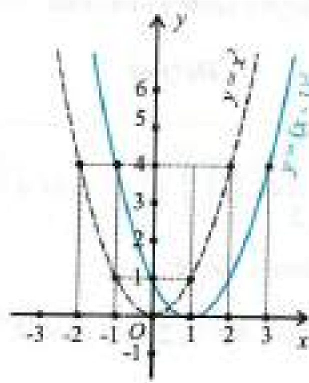


fig.2

Grafikun e funksionit $y = (x - 1)^2$ e vizatojmë ashtu që grafikun $y = x^2$ e zhvendosim nëpër boshtin x për 1 njësi djathtas, fig. 2.

Grafikun e funksionit $y = a(x - a)^2 + b$ mund ta vizatojmë në dy mënyra:

1° Me zhvendosjen e grafikut të funksionit $y = ax^2$ nëpër boshtin x për vlerën e a, majtas ose djathtas varësisht prej shenjës së a, kurse pastaj atë grafikon e zhvendosim për vlerën e b lartë ose poshtë varësisht prej shenjës së b.

2° Grafikun e funksionit $y = ax^2$ e vizatojmë me ndihmën e sistemit koordinativ $x_1O_1y_1$, (të fituar me translacionin e sistemit koordinativ xOy) ku $O_1(a, b)$. Në fig.3. është paraqitur grafiku i funksionit $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$.

Që ta vizatojmë grafikun e funksionit $y = a^{x-m} + n$ veprojmë në të njëjtën mënyrë sikurse gjatë të vizatuarit e grafikut të funksionit katror $y = a(x - a)^2 + b$. I caktojmë m dhe n, të cilët kanë domethënie të njëjtë sikurse a dhe b të funksionit katror.

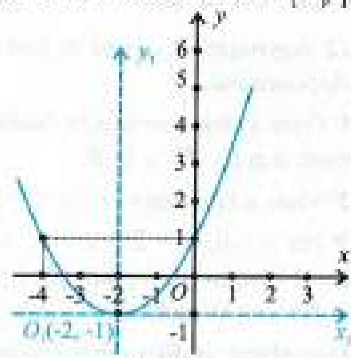


fig. 3

1 Vizato grafikun e funksionit $y = 2^{x+3} - 2$ me:

a) translacionin e grafikut të funksionit $y = 2^x$;

b) translacionin e sistemit kordinativ.

Vëre zgjidhjen:

Funksionin $y = 2^x$ do ta paraqesim tabelarisht:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Vëre, duke i krahasuar funksionet $y = a^{x-m} + n$ dhe $y = 2^{x+3} - 2$ kemi $m = -3$, kurse $n = -2$.

a) Domethënë, grafikun $y = 2^x$ duhet ta zhvendosim për 3 njësi majtas, kurse pastaj grafikun e fituar ta zhvendosim për 2 njësi poshtë, fig. 4.

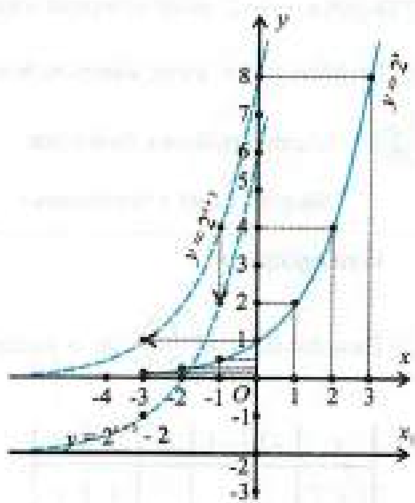


fig. 4

b) E caktojmë fillimin e koordinatave O_1 te sistemi ndihmës koordinativ (e translatojmë sistemin koordinativ xOy për vektorin $\overline{OO_1}$).

Te sistemi ndihmës koordinativ $x_1O_1y_1$ e vizatojmë grafikun e funksionit $y = 2^x$. (fig. 5). $O_1(m, n)$, d.m.th. $O_1(-3, -2)$.

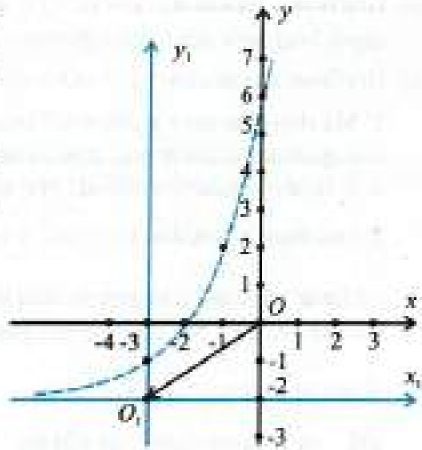


fig. 5

Të shqyrtojmë disa veti të funksionit të dhënë eksponencial.

1° Fusha e përkufizimit është bashkësia e numrave realë, d.m.th. D_f: $x \in$ R.

2° Vlera e funksionit V_f: $y \in (-2, \infty)$.

3° Për $x = 0$, $y = 2^3 - 2 = 6$, d.m.th. grafiku e prenë boshtin y në pikën (0, 6).

4° Për $y = 0$ kemi $2^{x+3} - 2 = 0$, $2^{x+3} = 2$ ose $x + 3 = 1$, $x = -2$.

Domethënë, grafiku e prenë boshtin x në pikën (-2, 0), d.m.th. $x = -2$ është zero e funksionit.

■ Nëse barazimi $a^{x-m} + n = 0$ nuk ka zgjidhje reale, atëherë funksioni nuk ka zero.

5° Shenja e funksionit: $y > 0$ nëse $2^{x+3} - 2 > 0$, $2^{x+3} > 2$ ose $x + 3 > 1$ ose $x > -2$, që vërehet edhe prej grafikut të funksionit, d.m.th. $y > 0$ për $x \in (-2, \infty)$, $y < 0$ nëse $2^{x+3} - 2 < 0$, $2^{x+3} < 2$ ose $x + 3 < 1$ ose $x < -2$, d.m.th. $y < 0$ për $x \in (-\infty, -2)$.

6° $a = 2 > 1$, domethënë, funksioni monotonisht rritet në tërë fushën e përkufizimit.

7° Drejtëza $y = -2$ është asimptotë e lakores.

■ Drejtëza $y = n$ është asimptotë horizontale e funksionit $y = a^{x-m} + n$.

2 Vizato grafikun e funksionit: a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 1$.

Shqyrto vetitë e funksioneve.

Vëre zgjidhjen:

■ Funksionin $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ do ta paraqesim tabelarisht:

x	-2	-1	0	1	2
$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

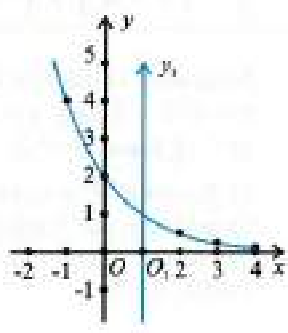


fig. 6

a) $m = 1$, $n = 0$ pra $O_1(1, 0)$. Domethënë, grafiku i funksionit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ është zhvendos për 1 njësi djathtas, (fig. 6).

b) $m = 0$, $n = 1$ pra $O_1(0, 1)$. Domethënë, grafiku i funksionit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ duhet të zhvendoset për 1 njësi lartë, (fig. 7).

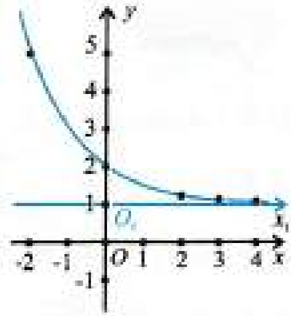


fig. 7

Shqyrtoji vetitë e funksionit $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

1° D_f; $x \in R$.

2° V_f; $y \in (1, \infty)$.

3° Për $x = 0$, $y = 2$, grafiku e prenë boshtin y në pikën $(0, 2)$.

4° Funksioni monotonisht zvogëlohet.

5° $y = 1$ është asimptotë e funksionit

Detyra

1 Duke i shfrytëzuar vetitë e funksionit eksponencial krahasoji fuqitë:

a) $(1,5)^{\frac{3}{4}}$ dhe $(1,5)^{\frac{2}{3}}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ dhe $(0,5)^{\sqrt{3}}$; c) 7^{π} dhe $7^{\sqrt{3}}$;

2 Është dhënë funksioni eksponencial $y = 2^x - 2$.

a) Plotësoje tabelën:

x	-3		-1	0		2	3
$2^x - 2$		-1,75			0		

b) Vizato grafikun e funksionit.

c) Për cilat vlera të x është: 1. $y = 0$; 2. $y > 0$; 3. $y < 0$; 4. $-1 < y < 6$?

3 Në të njëjtin sistem koordinativ vizato grafikët e funksioneve:

a) $y = 3^x$, $y = 3^x - 1$; $y = 3^x + 2$;

b) $y = 2^x$, $y = 2^{x+1}$; $y = 2^{x-2}$.

Shqyrtoji vetitë e funksioneve.

4 Vizato grafikun e funksioneve dhe shqyrto vijimin:

a) $y = 2^{x-1} + 2$; b) $y = 2^{2-x} - 1$.

3 BARAZIMET EKSPONENCIALE

Kujtohu!

- $2^x > 0$ për çdo $x \in \mathbb{R}$.
- $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2$; $3^{x-2} = \dfrac{3^x}{3^2}$.
- $2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x$; $2^x = 3^x \Rightarrow x = 0$.
- $9^x = 3^{2x}$, $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$.
- Funksioni $y = f(x)$ është **injektiv** për çdo $x_1, x_2 \in D_f$ dhe $x_1 \neq x_2$, vijon $f(x_1) \neq f(x_2)$.

1 Cakto zerot e funksionit

$$y = 2^x - 16.$$

- $2^x - 16 = 0$; $2^x = 2^4$; $x = 4$.

Barazimi te i cili e panjohura është në eksponent të paktën te njëra faqi, baza e së cilës është numër real pozitiv i ndryshueshëm prej numrit 1 quhet **barazim eksponencial**.

2 Cili prej barazimeve është eksponencial:

a) $\sqrt{3}^x + 1 = 2^x$; b) $x^{\sqrt{3}} - 1 = 2^{\sqrt{3}}$; c) $4^x = 2^x - 3$?

Barazimet eksponenciale do t' zgjidhim në bashkësinë e numrave realë..

Për zgjidhjen e barazimeve eksponenciale nuk ekziston metodë e përgjithshme. Disa lloje të barazimeve eksponenciale me zbatimin e transformimeve identike mund të sillen në formë të caktuar prej ku mund të caktohet zgjidhja e barazimit.

A Barazimet eksponenciale mund të sillen në këtë formë $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, $a > 1$ dhe $a \neq 1$, do t'i zgjidhim në bazë të monotonisë dhe injeksionit të funksioneve eksponenciale, d.m.th. vlen kjo ekuivalencë:

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x).$$

3 Zgjidhi barazimet eksponenciale:

a) $2^{x-3} = 16$; b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} = \dfrac{16}{81}$; c) $100 \cdot 10^{2x-2} = \sqrt[3]{1000^{x+1}}$; ç) $9^{-3x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+5}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $2^{x-3} = 16$; $2^{x-3} = 2^4$; $x - 3 = 4$; $x = 7$;

b) $10^{2+2x-2} = \left(10^3\right)^{\frac{x+1}{9}}$; $10^{2x} = 10^{\frac{x+1}{3}}$; $2x = \dfrac{x+1}{3}$; $x = \dfrac{1}{5}$;

ç) $9^{-3x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+5}$; $9^{-3x} = 3^{-(x+5)}$; $-3x = -x - 5$; $x = \dfrac{5}{2}$.

4 Zgjidhi barazimet eksponenciale:

a) $\frac{3^{x-1}}{3}=\frac{5^{x-1}}{5}$; b) $\frac{4^x}{4}=\frac{5^{2x-1}}{5}$; c) $2^{\frac{x+1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=1$; ç) $4^x=2^{\frac{x+1}{x}}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\frac{3^{x-1}}{3}=\frac{5^{x-1}}{5}$;

$3^{x-1-1}=5^{x-1-1}$;

$x-2=0$;

$x=2$;

c) $2^{\frac{x+1}{x}}\cdot 2^{-(x+1)}=2^0$;

$\frac{x+1}{x}-x-1=0$;

$x+1-x^2-x=0$;

$x^2=1$; $x=1$ ose $x=-1$;

B **5** Zgjidhi barazimet eksponenciale:

a) $3^{x+2}-3^{x+1}+3^x=21$; b) $3^{x+2}-3^{x-2}=240$;

c) $2^{2x+2}-2^{2x+1}-2^{2x}=256$; ç) $2^x+2^{x-1}=3^x$; d) $5^x+5^{x-1}=6^x$;

Vëre zgjidhjen:

a) $3^x\cdot3^2-3^x\cdot3+3^x=21$;

$3^x(9-3+1)=21$;

$3^x=3$;

$x=1$;

ç) $2^x+\frac{2^x}{2}=3^x$;

$2^x\left(1+\frac{1}{2}\right)=3^x$;

$\frac{2^x}{3^x}=\frac{2}{3}$; $x=1$;

C **6** Zgjidhi barazimet eksponenciale që sillen në barazime katrore:

a) $7^{2x}-8\cdot7^x+7=0$; b) $9^x-3^x-6=0$; c) $3^{4x}-5\cdot9^x-36=0$;

ç) $3^{4x}-5\cdot9^x-36=0$; d) $5^x-5^{3-x}=20$; e) $3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0$.

Vëre zgjidhjen:

Barazimet do t'i zgjidhim duke futur zëvëndësimin, d.m.th. do t'i sjellim në barazime katrore.

b) $(3^x)^2-3^x-6=0$. Me zëvëndësimin $3^x=y$ barazimi është i formës: $y^2-y-6=0$; $y_{1/2}=\frac{1\pm5}{2}$; $y_1=3$ ose $y_1=-2$. Për $y_1=3$ kemi $3^x=3$, pra $x=1$.
Për $y_2=-2$, barazimi $3^x=-2$ nuk ka zgjidhje. Pse?
d) $5^x-\frac{5^3}{5^x}=20$. Me zëvëndësimin $5^x=y$ barazimi e merr formën: $y-\frac{125}{y}=20$ ose $y^2-20y-125=0$; $y_{1/2}=\frac{20\pm30}{2}$; $y_1=25$ ose $y_1=-5$. Për $y_1=25$ kemi $5^x=25$, pra $x=2$. Për $y_2=-5$, barazimi $5^x=-5$ nuk ka zgjidhje.

e) Barazimi i dhënë është ekuivalent me $3\left(\sqrt[x]{9}\right)^2 - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$. Me zëvëndësimin $\sqrt[x]{9}$ y, barazimi është i formës: $3y^2 - 10y + 3 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $y_1 = 3$ ose $y_2 =$

Për $y = 3$ kemi $\sqrt[x]{9} = 3$ ose $3^{\frac{2}{x}} = 3$, d.m.th. $x = 2$.

Për $y = \frac{1}{3}$ kemi $\sqrt[x]{9} = \frac{1}{3}$ ose $3^{\frac{2}{x}} = 3^{-1}$ d.m.th. $x = -2$.

Detyra

Zgjidhi barazimet eksponenciale:

1. a) $2^{x-1} = 1024$; b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{0.2x} = \frac{64}{125}$; c) $\sqrt[x-1]{a^{x+1}} = \sqrt[x-2]{a^{x+2}}$.
2. a) $5^{x^2-3x+1} = \frac{1}{5}$; b) $3^{x^2-3x+3,5} = 27\sqrt{3}$.
3. a) $(2^{x+2})^{x+1} = 64$; b) $2^{x+2} \cdot 3^{x+2} = 36 \cdot 6^{2x-1}$.
4. a) $4^{x+1} + 4^x = 320$; b) $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$.
5. a) $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$; b) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.
6. a) $4^x + 7 \cdot 2^x = 44$; b) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$.
7. a) $4^{x-1} = 2^{x+3} - 28$; b) $5 \cdot 2^{4x} - 3 \cdot 4^{x+1} = 32$.
8. a) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$; b) $5^x - 3 = \sqrt{9 - 5^x}$.

4 KONCEPTI PËR LOGARITËM DHE LOGARITMIZIM

Kujtohu!

- $2^5 = x \Rightarrow x = 32$.
  Vlera e fuqisë caktohet me operacionin fuqizim.
- $x^5 = 32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{32}$.
  Baza e fuqisë caktohet me operacionin e rrënjëzimit.

A 1 Cakto x prej barasisë:

a) $2^x = 32$; b) $2^x = 7$.

Vëre përgjigjen:

a) $2^x = 2^5$ vijon $x = 5$.

b) Nuk ekziston numër iracional i cili de jetë zgjidhje e barazimit.

Caktimi i treguesit të fuqisë prej barazimit $a^x = b$ në rastin e përgjithshëm bashkësinë e numrave racionalë nuk është i mundshme.

Në mësimet e kaluara theksuam se fuqia, a^x, $a > 0$ është njëvlerësisht e caktuar në bashkësinë e numrave realë.

Prandaj barazim:

$$a^x = b, \ a > 0, \ a \neq 1 \text{ dhe } b > 0$$

ka zgjidhje të vetme në bashkësinë e numrave realë.

Zgjidhja e barazimit quhet **logaritmi i numrit b për bazë a**, kurse shënohet me $x = log_a b$.

Operacioni me të cilin caktohet vlera e logaritmit quhet **logaritmizim**.

Për logaritmin e numrave pozitiv vlen ky:

Përkufizim: Logaritmi i numrit real pozitiv b, për bazë a $(a \neq 1, a > 0)$ është numri real x, me të cilin duhet të fuqizohet baza a, që të fitohet numri b.

Prej përkufizimit vijon $log_a b = x$ nëse dhe vetëm nëse $a^x = b$, d.m.th. barasitë $log_a b = x$ dhe $a^x = b$ janë ekuivalente. Në njëtën barasi përfshihet operacioni fuqizim, kurse te tjetri operacioni i logaritmizimit. Prej këtu vijon saktësia e barasisë:

$$log_a(a^x) = x.$$

Në shënimin $log_a b$

a -quhet **baza** e logaritmit; b - quhet **logaritmandi** ose **numerusi**.

Domethënë, logaritmizimi është operacioni inverz i fuqizimit.

2 Barasitë që vijojnë shkruaji në formën logaritmike:

a) $3^2 = 9$; b) $2^4 = 16$; c) $2^{-5} = \frac{1}{32}$; ç) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$.

Vëre përgjigjen:

a) $log_3 9 = 2$; b) $log_2 16 = 4$; c) $log_2 \frac{1}{32} = -5$; ç) $log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = -1$.

Prej përkufizimit vijon

$$log_a b = x \overset{def}{\Leftrightarrow} a^x = b.$$

Pasi $a > 0$ dhe $a \neq 1$ vijon edhe $b > 0$, që do të thotë se logaritmi prej 0 dhe çfarëdo numri negativ nuk ekziston në bashkësinë e numrave realë.

Nëse në barazimin $a^x = b$, e zëvendësojmë x me $log_a b$ do të fitojmë:

$$a^{log_a b} = b.$$

i cili quhet **identiteti themelor logaritmik**. Prej këtu vijon se **fuqizimi është operacion inverz i logaritmizimit**.

Me zbatimin e identitetit themelor logaritmik kemi:

$$2^{\log_2 3} = 3; \quad 6^{\log_6 5} = 5; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

3 Njehso: a) $4^{\log_2 3}$; b) $9^{\log_3 4}$; c) $2^{1+\log_2 5}$.

Vëre zgjidhjen:

Me zbatimin e identitetit themelor logaritmik dhe rregullat për fuqizim kemi:

a) $4^{\log_2 3} = 2^{2\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^2 = 3^2 = 9$. b) $2^{1+\log_2 5} = 2^1 \cdot 2^{\log_2 5} = 2 \cdot 5 = 10$.

4 Provo saktësinë e barasive:

a) $log_3 27 = 3$; b) $log_{10} 0{,}01 = -2$; c) $log_{64} 8 = \frac{1}{2}$; ç) $log_8 \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}$.

Vëre zgjidhjen:

Me zbatimin e përkufizimit për logaritëm kemi:

a) $log_3 27 = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27$;

ç) $log_8 \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 8^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

5 Njehso:

a) $log_{10} 100$; b) $log_6 1$; c) $log_{\frac{1}{2}} 64$; ç) $log_a \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}$.

Vëre zgjidhjen:

Prej përkufizimit kemi:

a) $log_{10} 100 = x \Leftrightarrow 10^x = 100$, $x = 2$, d.m.th. $log_{10} 100 = 2$;

b) $log_6 1 = x \Leftrightarrow 6^x = 1$, $x = 0$, d.m.th.. $log_6 1 = 0$;

ç) $log_a \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} = x \Leftrightarrow a^x = \frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}$; $a^x = a^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$, $x = \frac{5}{6}$.

6 Cakto bazën a, nëse:

a) $log_a 25 = 2$; b) $log_a 64 = 3$; c) $log_a \sqrt{3} = -\frac{1}{4}$; ç) $log_a \frac{1}{8} = -\frac{1}{3}$.

Vëre zgjidhjen:

Prej përkufizimit kemi

b) $log_a 64 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 64$, $a^3 = 4^3$, $a = 3$.

7 Cakto x në barasinë:

a) $log_3 x = 2$; b) $log_{2\sqrt{3}} x = 2$; c) $log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x = 2$.

8 Vërtetoji identitetet:

a) $log_a a = 1$; b) $log_a 1 = 0$; c) $log_a a^n = n$; ç) $log_{a^m} a = \frac{1}{m}$; d) $log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$,
$a > 0$, $a \neq 1$.

Vëre vërtetimin:

a) Le të jetë $log_a a = x$, atëherë $a^x = a$, $x = 1$, d.m.th. $log_a a = 1$.

ç) Le të jetë $log_{a^m} a = x \Leftrightarrow (a^m)^x = a \Leftrightarrow a^{mx} = a \Leftrightarrow mx = 1$, $x = \frac{1}{m}$, d.m.th.

$log_{a^m} a = \frac{1}{m}$.

Mbaj mend!

Nëse $a > 0$, $a \neq 1$, atëherë janë të sakta barasitë:

1° $log_a a = 1$; **2°** $log_a 1 = 0$; **3°** $log_a a^n = n$; **4°** $log_{a^m} a = \frac{1}{m}$; **5°** $log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$,
$a > 0$, $a \neq 1$.

9 Njehso vlerën e shprehjes:

a) $log_2 128$; b) $log_{\sqrt{10}} 1000$; c) $log_{\sqrt{3}} 81$; ç) $2log_2 8 + \frac{1}{2} log_3 81$.

Me zbatimin e barasive paraprake kemi:

a) $log_2 128 = log_2 2^7 = 7$; c) $log_{\sqrt{3}} 81 = log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^4 = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$;

ç) $2log_2 8 + \frac{1}{2} log_3 81 = 2log_2 2^3 + \frac{1}{2} log_3 3^4 = 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 8$.

Detyra

1 Barasitë që vijojnë shkruaji në formë logaritmike:

a) $6^2 = 36$; b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 64$; c) $7^0 = 1$; ç) $\left(\sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{1}{2}$.

2 Njehso vlerën e logaritmit:

a) $log_4 8$; b) $log_{\frac{1}{5}} 125$; c) $log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$; ç) $log_{0.1} \sqrt[3]{100}$.

3 Cakto x prej barazimit:

a) $\log_2 x = 6$; b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$; c) $\log_{3\sqrt{3}} x = -2$; ç) $\log_{\sqrt{8}} x = -8$.

4 Për cilën bazë:

a) logaritëm prej 64 është 3; b) logaritëm prej 625 është 4;

c) logariëm prej $\frac{1}{256}$ është 8; ç) logaritëm prej $\frac{1}{128}$ është -7?

5 Njehso vlerën e shprehjes:

a) $3\log_5 25 + 2\log_3 27 - \log_2 8$; b) $\log_3 81 \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \cdot \log_4 16$.

6 Njehso: a) $\log_2(\log_2 256)$; b) $\log_4(\log_2 16) + \log_{\frac{1}{3}}(\log_3 27)$.

7 Njehso a) $2 \cdot 5^{\log_5 4} - 5 \cdot 3^{\log_3 2}$; b) $5^{2+\log_5 6}$; c) $3^{4 \cdot \log_3 27}$.

5 GRAFIKU I FUNKSIONIT LOGARITMIK

Kujtohu!

- Cili operacion është inverz i operacionit fuqizim?
- Nëse $2^3 = 8$, sa është $\log_2 8$?
- Nëse $y = \log_2 x$, sa është x?
- Boshti x është asimptota e funksionit $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
- Funksioni $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ është përkufizuar për të gjithë numrat realë, d.m.th. $D_f : x \in \mathbb{R}$.

A Në mësimin paraprak theksuam se $\log_a b$, $a > 1$, $a \neq 0$ ka kuptim për çdo numër real pozitiv b.
Prandaj për çdo vlerë pozitive të ndryshores x njëvlerësisht është caktuar numër real $\log_a x$.
Në këtë mënyrë mund të përkufizohet një pasqyrim $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Përkufizimi: Funksioni $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ i dhënë me formulën $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ quhet **funksion logaritmik** me bazën a.

Për shembull funksione logaritmike janë $f(x) = \log_2 x$; $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

1 Cilët prej funksioneve janë logaritmike:

a) $y = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x$; b) $y = \log_{0,5} x$; c) $y = x\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$?

Vëre përgjigjen:

- Vetëm funksioni $y = x\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$ nuk është logaritmik.

2 Vizato grafikun e funksionit $y = log_2 x$. Shqyrtoji vetitë e funksionit..

Vëre zgjidhjen:

- Funksionin do ta paraqesim tabelarisht:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Grafiku i funksionit është paraqitur në fig. 1.

Theksuam se operacionet fuqizim dhe logaritmizim janë inverze ndërmjet veti. Kjo do të thotë për funksionin $y = log_2 x$ funksion inverz është $y = 2^x$.

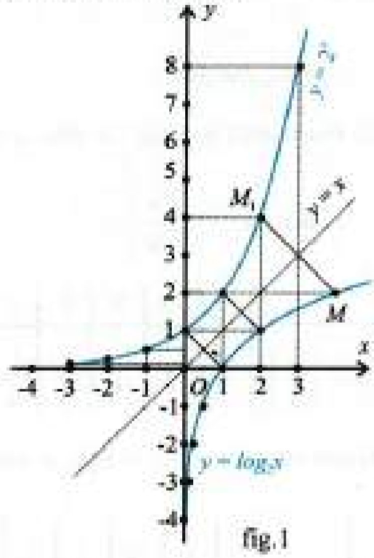


fig.1

- Deri te funksioni inverz arrijmë në bazë të përkufizimit për logaritëm. Prej $y = log_2 x$ vijon $x = 2^y$. Me zëvendësimin e ndryshoreve x dhe y fitojmë funksionin $y = 2^x$ i cili është inverz i funksionit logaritmik.

- Funksioni inverz e ka vetinë nëse pika $M(x_o, y_o)$ i takon grafikut të një funksioni, atëherë pika $M_1(y_o, x_o)$ i takon grafikut të funksionit tjetër inverz.

- Grafikët e funksioneve inverze janë simetrike në lidhje me simetralen e kuadrantit I dhe III, d.m.th. në lidhje me drejtëzën $y = x$, fig. 1.

B Disa veti të funksionit $y = log_2 x$.

- Prej përkufizimit të funksionit logaritmik vijon:

1° D_f: $x \in \mathbb{R}^+$, d.m.th. $x \in (0, \infty)$.

2° V_f: $y \in \mathbb{R}$, d.m.th. $y \in (-\infty, \infty)$.

3° Për $x = 1$, $y = log_2 1 = 0$, grafiku e prenë boshtin x në pikën $(1, 0)$, d.m.th. $x = 1$ është zero e funksionit logaritmik.

- Grafiku a prenp boshti y? Pse?

4° Shenja e funksionit:

$y > 0$ për $x > 1$, d.m.th. $x \in (1, \infty)$.

$y < 0$ për $0 < x < 1$, d.m.th. $x \in (0, 1)$.

5° Funksioni $y = log_2 x$ monotonisht rritet.

6° boshti y është asimptota e lakores.

3 Vizato grafikun e funksionit $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Shqyrtoji vetitë e funksionit.

Vëre zgjidhjen:

Funksionet $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ dhe $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ janë inverze. Në tabelën që vijon është paraqitur funksioni $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Nëse pika $A(x_0, y_0)$ i takon grafikut të një funksioni, atëherë pika $A_1(y_0, x_0)$ i takon grafikut të funksionit inverz.

Tabela e funksionit $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ është:

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	-2	-1	0	1	2

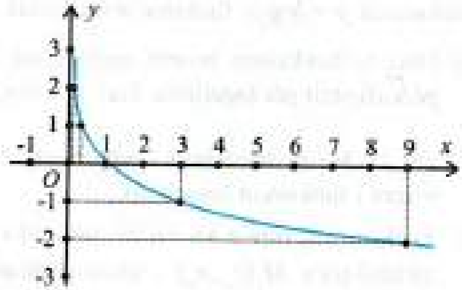


fig. 2

Grafiku i funksionit $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ është paraqitur në fig. 2.

Vetitë e funksionit $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ janë:

1° $D_f: x \in (0, \infty)$. 2° $V_f: y \in (-\infty, \infty)$.

3° $x = 1$ është zero e funksionit, d.m.th. për $x = 1$, atëherë $y = 0$.

4° $y > 0$ për $x \in (0, 1)$; $y < 0$ për $x \in (1, \infty)$.

5° Funksioni monotonisht zvogëlohet.

6° Boshti y është asimptota e grafikut të funksionit.

Vëre!

Grafikët e funksioneve $y = \log_a x$ dhe $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ janë simetrike në lidhje me boshtin x, d.m.th. nëse pika $M(x_0, y_0)$ i takon funksionit $y = \log_a x$, atëherë pika $M_1(x_0, -y_0)$ i takon grafikut të funksionit $y = \log_{\frac{1}{a}} x$.

C Disa veti të funksionit logaritmik $y = log_a x$ janë:

$1°$ $D_f: x \in \mathbb{R}^+$; $2°$ $V_f: y \in \mathbb{R}$;

$3°$ $x = 1$ është zero e funksionit, d.m.th. grafiku e prenë boshtin x në pikën $(1, 0)$.

$4°$ shenja e funksionit:

$$\text{për } a > 1,\ y > 0 \text{ për } x \in (1, \infty)$$
$$y < 0 \text{ për } x \in (0, 1)$$
$$\text{për } 0 < a < 1,\ y > 0 \text{ për } x \in (0, 1)$$
$$y < 0 \text{ për } x \in (1, \infty).$$

$5°$ Për $a > 1$ funksioni monotonisht rritet. Për $0 < a < 1$ funksioni monotonisht zvogëlohet.

- Nëse logaritmet e dy numrave me bazë të njëjtë janë të barabartë, atëherë edhe vetë numrat janë të barabartë, d.m.th.

$$log_a x_1 = log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

- Funksioni logaritmik nuk ka vlera ekstreme, pasi në tërë intervalin funksioni ose rritet ose zvogëlohet.

$5°$ Boshti y është asimptota e funksionit.

4 Cakto fushën e përkufizimit për funksionet:

a) $y = log_2(2x - 3)$; b) $y = log_4(3x - x^2)$; c) $y = log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4)$.

Vëre zgjidhjen:

- a) $2x - 3 > 0,\ x > \dfrac{3}{2}$ d.m.th. $x \in \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$.b) $3x - x^2 > 0,\ x(3 - x) > 0;\ x \in (0, 3)$.

5 Cili numër është më i madh:

a) $\log_3 5$ ose $log_3 7$; b) $log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$ ose $log_{\frac{1}{2}}\pi$?

Vëre zgjidhjen:

- a) Funksioni $y = log_3 x$, monotonisht rritet, pra prej $x_1 < x_2$ vijon $log_3 x_1 < log_3 x_2$.

Pasi $5 < 7$, vijon $log_3 5 < log_3 7$.

6 Cakto ndërmjet cilëve numra të plotë gjendet: a) $log_{\frac{1}{2}} 15$; b) $log_{\frac{1}{2}} \dfrac{4}{5}$; c) $log_5 35$.

Vëre zgjidhjen:

- a) Pasi $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 8$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = 16$, prej $log_{\frac{1}{2}} 16 <$ $log_{\frac{1}{2}} 8$,domethënë $-4 < log_{\frac{1}{2}} 15 < -3$.

c) Pasi $5^0 = 1; 5^2 = 25;\ 5^3 = 125$, domethënë $log_5 25 < log_5 125$, d.m.th. $2 < log_5 35 < 3$.

Detyra

1. Vizato grafikun e funksionit:

a) $y = log_{\frac{1}{2}} x$; b) $y = log_3 x$; c) $y = log_{10} x$.

Shqyrto vijimin e funksionit.

2. Cakto fushën e përkufizimit të funksionit:

a) $y = log_2(-x)$; b) $y = log_2(1 - x)$; c) $y = log_3(x^2 - 4)$; ç) $y = log_3(x^2 - 3x - 4)$.

3. Cilët prej funksioneve janë rritës:

a) $y = log_{0,5} x$; b) $y = log_4 x$; c) $y = log_{\sqrt{5}} x$.

4. Duke i shfrytëzuar vetitë e funksionit logaritmik, cakto cili numër është më i madh:

a) $log_2 3$ ose $log_2 \sqrt{2}$; b) $log_3 \frac{1}{5}$ ose $log_3 0,5$;

c) $log_2 \sqrt{3}$ ose $log_2 p$; ç) $log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{9}$ ose $log_{\frac{1}{5}} \frac{3}{13}$.

5. Cakto cili prej numrave a ose b është më i madh nëse:

a) $log_3 a > log_3 b$; b) $log_{\frac{1}{3}} a > log_{\frac{1}{3}} b$; c) $log_{\sqrt{2}} a > log_{\sqrt{5}} b$; ç) $log_{0,2} a < log_{0,2} b$.

6. Për cilën vlerë të a janë të sakta jobarasitë:

a) $log_a 7 < log_a 3$; b) $log_a 2,5 > log 1,5$; c) $log_a \frac{1}{2} > log_a \frac{1}{3}$.

7. Cakto ndërmjet cilëve numra të plotë janë logaritmet:

a) $log_2 3$; b) $log_2 9$; c) $log_{\frac{1}{2}} 7$; ç) $log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}$.

6 RREGULLAT PËR LOGARITMIZIM

Operacioni logaritmizim ka disa veti që nuk i ka asnjë operacion tjetër. Ato veti caktohen me logaritmizimin e shprehjeve algjebrike.

Logaritmizimin e shprehjeve e kryejmë sipas këtyre rregullave (teoremave):

A

Teorema: Logaritmi i prodhimit prej dy numrave pozitiv me bazë a është i barabartë me shumën e logaritmeve të tyre me bazën e njëjtë, d.m.th.

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N, \text{ për } a > 0,\ a \neq 1 \text{ dhe } M, N > 0$$

Vërtetimin do ta bëjmë në dy mënyra:

Mënyra e parë: Sipas identitetit themelor logaritmik kemi $M = a^{\log_a M}$ dhe $N = a^{\log_a N}$.

Prej këtu vijon: $M \cdot N = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N} = a^{\log_a M + \log_a N}$.

Sipas përkufizimit për logaritmizim kemi:

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N$$

Mënyra e dytë: Le të jetë $m = log_a M$ dhe $n = \log_a N$. Prej këtu vijon:

$$M = a^m, \text{ kurse } N = a^n, \text{ pra}$$

$$M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ d.m.th. } log_a(M \cdot N) = m + n = log_a M + log_a N.$$

Kjo teoremë vlen edhe për më shumë se dy shumëzuesë, d.m.th.

$$log_a(M \cdot N \cdot P \cdot Q) = log_a M + log_a N + log_a P + log_a Q.$$

Këto teorema vlejnë për çfarëdo baze prandaj shpeshherë nuk do ta shënojmë.

Teorema: Logaritmi i herësit prej dy numrave pozitiv me bazë a është i barabartë me ndryshimin prej logaritmeve të pjesëtueshmit dhe pjesëtuesit, d.m.th.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N, \ a > 0, \ a \neq 1 \ \text{ dhe } \ M, N > 0$$

Vërtetimi: Le të jetë $M = a^{\log_a M}$ dhe $N = a^{\log_a N}$.

Me pjesëtimin e anës përkatëse të barasive kemi:

$$\frac{M}{N} = \frac{a^{\log_a M}}{a^{\log_a N}} = a^{\log_a M - \log_a N}.$$

Sipas përkufizimit të logaritmit kemi $log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N.$

1 Logaritmoji shprehjet: a) $x = 2ab$, b) $x = \frac{2a}{b}$, c) $x = \frac{4abc}{3pq}$.

Vëre zgjidhjen:

c) $logx = log4abc - log3pq = log4 + loga + logb + logc - (log3 + logp + logq).$

Teorema: Logaritmi i fuqisë së numrit pozitiv është i barabartë me prodhimin e treguesit të fuqisë dhe logaritmit të bazës së tij, d.m.th.

$$log_a M^n = n \cdot log_a M, \ a > 0, \ a \neq 1, \ M > 0, \ n \in \mathbb{R}.$$

Vërtetimi: Nëse $M > 0$, atëherë $M = a^{\log_a M}$. Me fuqizimin e barasisë me n, fitojmë

$M^n = \left(a^{\log_a M}\right)^n = a^{n \log_a M}$, d.m.th. $log_a M^n = n \cdot log_a M.$

Pasoja: $log_a \sqrt[m]{M^n} = log_a M^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} log_a M$.

2 Logaritmoji shprehjet:

a) $x = 3a^3b$, b) $x = \sqrt[3]{a^2b}$, c) $x = \dfrac{2a\sqrt{3ab}}{3b^2c}$; ç) $x = \sqrt[3]{\dfrac{2ab^2}{3xy^3}}$;

Vëre zgjidhjen:

c) $logx = log2a\sqrt{3ab} - log3b^2c =$

$$= log2 + loga + \frac{1}{3}(log3 + loga + logb) - log3 - 2logb - logc =$$

$$= log2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)log3 + \left(1+\frac{1}{3}\right)loga + \left(\frac{1}{3}-2\right)logb - logc =$$

$$= log2 - \frac{2}{3}log3 + \frac{4}{3}loga - \frac{5}{3}logb - logc.$$

B **3** Cakto x prej barasisë $log_ax = 3log_a2 - log_a4$.

Vëre zgjidhjen:

$logx = log_a2^3 - log_a4$ ose $log_ax = log_a\dfrac{8}{4}$, d.m.th. $log_ax = log_a2$.

Duke e shfrytëzuar vetinë $log_ax_1 = log_ax_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, vijon $x = 2$.

Për zgjidhjen e detyrave të tipit paraprak, shfrytëzoji rregullat (formulat):

$$log_aM + log_aN = log_aMN;\quad log_aM - log_aN = log_a\frac{M}{N}$$

$$nlog_aM = log_aM^n,\quad \frac{m}{n}log_aM = log_a\sqrt[n]{M^m}.$$

Caktimi i shprehjes nëse është dhënë logaritmi i tij quhet **antilogaritmizim**.

4 Cakto x prej barasive:

a) $logx = 2logb + 3loga$; b) $logx = 2loga - 5logb - 3logc$;

c) $logx = \dfrac{3}{2}logb - \dfrac{2log\,a}{3}$;

ç) $logx = loga + \dfrac{1}{2}\left[log(a+b) - \dfrac{1}{3}log(a-b) + 2log\,c\right]$.

Vëre zgjidhjen:

ç) $logx = loga + \dfrac{1}{2}\left[log(a+b) - \dfrac{1}{3}log(a-b) + 2log\,c\right]$;

$$logx = loga + \frac{1}{2}log\frac{(a+b)c^2}{\sqrt[3]{a-b}}\ ; \quad logx = loga + log\sqrt{\frac{(a+b)c^2}{\sqrt[3]{a-b}}}\ ;$$

$$logx = loga\sqrt{\frac{(a+b)c^2}{\sqrt[3]{a-b}}} \quad \text{ose} \quad x = ac\sqrt{\frac{a+b}{\sqrt[3]{a-b}}}\ .$$

Detyra

1. Nëse dihet se $log_{10}3 = 0{,}47712$, kurse $log_{10}2 = 0{,}30103$, njehso:

   a) $log_{10}6$; b) $log_{10}12$; c) $log_{10}648$.

Logaritmoji këto shprehje:

2. a) $x = 5a^2b^3$; b) $x = \frac{8a^2b^3}{5c}$; c) $x = \frac{a^2+2}{b-3}$.

3. a) $x = a\sqrt{a}$; b) $x = \frac{a^2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b^2}}$; c) $x = \frac{8a^4\sqrt{b}}{b^2\sqrt[3]{a}}$.

4. a) $x = 2(a+b)^3$; b) $x = 8a^3(a-b)^2$; c) $x = \frac{2(a+1)^2}{a^2-4}$.

5. a) $x = a\sqrt{a\sqrt{a}}$; b) $x = \frac{2a^2b\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$.

6. a) $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; b) $x = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{5(a-b)^2}}$.

Cakto x nës logaritmi i tij është:

7. $logx = 2logm + 4logn - 3loga - 5logb$.

8. $logx = log5 + 2log4 - log8 - 3logn - 2logm$.

9. $logx = \frac{2}{3}log(a-2b) + \frac{1}{3}log(a+2b)$.

10. $logx = 2log(a+b) - \frac{2}{3}log(a-b) + 2loga$.

11. Njehso:

    a) $log_6 4 + log_6 9$; b) $log_{12}4 + log_{12}36$;

    c) $log_{10}500 - log_{10}5$; ç) $log_5\frac{1}{4} - log_5 0{,}01$.

7 LIDHJA NDËRMJET LOGARITMEVE ME BAZA TË NDRYSHME

Kujtohu!

- $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$, $a \neq 1$ dhe $a > 0$.
- Cili numër është më i madh:

a) $log_7 13$ ose $log_7 15$;

b) $log_8 100$ ose $log_2 5$?

A **1** Cakto cili numër i shumëzuar me $log_3 x$ është i barabartë me $log_5 x$.

Vëre përgjigjen:

Prej identitetit themelor logaritmik kemi $3^{\log_3 x} = x$.

Me logaritmizimin e shprehjes me bazë 5 do të fitojmë:

$$log_5 \left(3^{\log_3 x}\right) = log_5 x.$$

Duke e zbatuar rregullën për logaritëm të fuqisë kemi $log_3 x \cdot log_5 3 = log_5 x$.
Domethënë, numri i kërkuar është $log_5 3$.
Caktimin e shumëzuesit të kërkuar na e mundëson kjo

Teoremë: $log_a x = \dfrac{log_c x}{log_c a}$ për $\begin{cases} a > 0 \wedge a \neq 1 \\ c > 0 \wedge c \neq 1 \wedge x > 0. \end{cases}$

Teorema paraqet formulë për kalim të logaritmit me një bazë në logaritëm me bazë tjetër.

Vërtetimi: Nëse identitetin themelor logaritmik $a^{\log_a x} = x$, e logaritmojmë me bazë c kemi $log_c(a^{\log_a x}) = log_c x$, d.m.th.

$$log_a x \cdot log_c a = log_c x \text{ ose } log_a x = \frac{log_c x}{log_c a}$$

Vëre!

$log_a x = \dfrac{1}{log_c a} \cdot log_c x = m \cdot log_c x$, ku $m = \dfrac{1}{log_c a}$ është konstante, nuk varet prej x.

2 Njehso, pa kalkulator

a) $log_2 3 \cdot log_3 4$; b) $log_5 3 \cdot log_3 25$; c) $log_3 8 \cdot log_4 81$; ç) $\dfrac{log_2 7}{log_4 7}$.

Vëre zgjidhjen:

Me zbatimin e teoremës paraprake, kalimi në bazë tjetër, në këtë rast le të jetë $c = 5$, kemi:

a) $log_2 3 \cdot log_3 4 = \dfrac{log_5 3}{log_5 2} \cdot \dfrac{log_5 4}{log_5 3} = \dfrac{log_5 2^2}{log_5 2} = \dfrac{2log_5 2}{log_5 2} = 2.$

3 Vërteto identitetet:

a) $\log_c x = \dfrac{1}{\log_x c}$; $c, x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; b) $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n}\log_a x$; c) $\log_{a^n} x^n = \log_a x$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\log_c x = \dfrac{\log_x x}{\log_x c} = \dfrac{1}{\log_x c}$; b) $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{\log_x a^n} = \dfrac{1}{n}\log_a x$;

c) $\log_{a^n} x^n = \dfrac{\log_a x^n}{\log_a a^n} = \dfrac{n\log_a x}{n\log_a a} = \log_a x$;

4 Vërteto se vlera e thyesave: a) $\dfrac{\log_x 2}{\log_x 3}$; b) $\dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$; c) $\dfrac{\log_5 x}{\log_4 x}$

nuk varet prej x ($x > 0$, $x \neq 1$).

Vëre zgjidhjen:

a) $\dfrac{\log_x 2}{\log_x 3} = \dfrac{\dfrac{\log_3 2}{\log_3 x}}{\dfrac{\log_3 3}{\log_3 x}} = \log_3 2$. Deri te gjykimi i njëjtë do të arrinje nëse baza për kalim

është çfarëdo numër pozitiv.

5 Njehso:

a) $\log_2 \sqrt[3]{a}$, nëse $\log_a 8 = b$; b) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$, nëse $\log_a 9 = b$;

c) $\log_{90} 120$, nëse $\log_5 2 = a$ dhe $\log_5 3 = b$;

ç) $\log_{30} 8$, nëse $\log_{10} 2 = a$ dhe $\log_{10} 3 = b$;

Vëre zgjidhjen:

b) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \dfrac{1}{6} \cdot 2 \cdot \log_3 a = \dfrac{1}{3} \log_{3^2} a^2 = \dfrac{2}{3}\log_9 a = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\log_a 9} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{3b}$.

ç) $\log_{30} 8 = \dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 30} = \dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 10 \cdot 3} = \dfrac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 10 + \log_{10} 3} = \dfrac{3\log_{10} 2}{1+b} = \dfrac{3a}{1+b}$.

B Vëreve në shqyrtimin e gjer tanishëm se baza e logaritmit mund të jetë çfarëdo numër real pozitiv.

Përkufizimi: Bashkësia e logaritmeve të të gjithë numrave realë pozitiv me bazë të njëjtë a ($a > 0$, $a \neq 1$) quhet **sistem logaritmik me bazë a**.

Në matematikë më së shpeshti përdoren dy sisteme logaritmike:

1° Sistemi logaritmik **dekad** (Brigsit), të cilin e përbëjnë logaritmet e të gjithë numrave pozitiv me bazë 10 (dhjetë), e shënojmë $log_{10}x = lgx$.

2° Sistemi logaritmik **natyror** (Neperit) baza e të cilit është numri iracional $e \approx 2{,}71828...$ shënohet $log_e x = lnx$.

Në matematikën elementare shfrytëzohet sistemi logaritmik dekad, ndërsa në matematikën e lartë sistemi logaritmik i Neperit.

6 Cakto lidhjen ndërmjet sistemit logaritmik dekad dhe natyror për të njëjtin numër pozitiv x.

Vëre zgjidhjen:

Në formulën $log_a x = \frac{1}{log_c a} \cdot log_c x$, zëvëndësojmë $a = e$, $c = 10$ pra fitojmë $lnx = \frac{1}{lg\, e} \cdot lgx$, d.m.th. $lgx = lge \cdot lnx$.

Detyra

1. Njehso vlerën e shprehjes:

a) $log_2 3 \cdot og_9 16$; b) $log_2 \sqrt{5} \cdot log_{25} \sqrt[3]{2}$; c) $lg56$, nëse $lg2 = a$, kurse $lg7 =$ b.

2. Njehso

a) $log_3 8 \cdot log_4 81$; b) $\frac{log_3 \sqrt{5}}{log_{27} \sqrt{5}}$; c) $log_{35} 28$, nëse$og_{14} 7 = a$, $log_{14} 5 =$ b.

3. Vërteto barasitë:

a) $log_2 2 \cdot log_4 3 \cdot log_3 4 \cdot log_4 5 \cdot log_5 6 \cdot log_6 7 \cdot log_7 8 \cdot log_8 9 = 1$;

b) $log_3 12 = 1 + log_5 4 \cdot log_6 5 \cdot log_3 6$.

4. Vërteto barasitë:

a) $log_2 3 + log_3 2 > 2$; b) $log_{\frac{1}{2}} 3 + log_3 \frac{1}{2} < -2$; c) $log_2 3 > log_3 4$.

5. Vërteto se:

a) $log_a b + log_{\frac{1}{a}} b = 0$; b) $3log_b a + 2\,log_b \frac{1}{a} = log_b a$;

c) $log_b a - log_b \frac{1}{a} - log_b a^2 = 0$; ç) $log_{b+c} a + log_{c-b} a = 2log_{b+c} a \cdot log_{c-b} a$.

8 LOGARITMI DEKAD

A Bashkësia e logaritmeve prej të gjithë numrave pozitivë realë me bazë 10 quhet sistemi logaritmik dekad ose i Brigsit, sipas matematikanit anglez Brigs (Briggs). Në këtë sistem janë njehsuar logaritmet prej të gjithë numrave pozitivë realë me bazë 10.

1 Cakto logaritmin dekad prej numrave:

a) 1; 10; 100; 1000; 10000; b) 0,1; 0,01; 0,001; c) $\sqrt[3]{100}$; $\sqrt[5]{1000}$.

Vëre zgjidhjen:

- Në sistemin logaritmik dekad baza nuk shkruhet, d.m.th. në vend të $log_{10}a$ do të shkruajmë lga.
- Prej vetisë $log_a a = 1$, kemi $lg10 = 1$, kurse

a) $lg1 = 0$; $lg10 = 1$; $lg100 = lg10^2 = 2$; $lg1000 = lg10^3 = 3$; $lg10000 = lg10^4 = 4$.

b) $lg0,1 = lg10^{-1} = -1$; $lg0,01 = lg10^{-2} = -2$; $lg0,001 = lg10^{-3} = -3$.

c) $lg\sqrt{10} = lg10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; $lg\sqrt[3]{100} = lg10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$; $lg\sqrt[5]{1000} = lg10^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$.

Mbaj mend!

Nëse $x = 10^k$, atëherë $lgx = lg10^k = k$, ku k është numër racional.

Teorema: Nëse numri x nuk mund të shprehet në formën 10^k, k numër racional, atëherë logaritmi prej numrit x është numër iracional.

Vërtetimi: Të supozojmë se logaritmi prej numrit x është numër racional

$$\frac{p}{q}, \text{ d.m.th. } lgx = \frac{p}{q}$$

- Sipas përkufizimit për logaritëm kemi:

$$10^{\frac{p}{q}} = x, \text{ d.m.th. } 10^p = x^q.$$

Sipas gjykimit x nuk mund të shkruhet në formën 10^k, pra prej këtu vijon se edhe x^q nuk mund të shkruhet si 10^p. Domethënë lgx nuk është numër racional, por numër iracional.

Teorema: Nëse numri x është ndërmjet dy njësive dekade të njëpasnjëshme, atëherë lgx është ndërmjet dy numrave natyrorë të njëpasnjëshëm, d.m.th. nëse $10^n < x < 10^{n+1}$, atëherë $n < lgx < n + 1$, $n \in N$.

Vërtetimi: Nëse $10^n < x < 10^{n+1}$, pasi funksioni $y = lgx$ është rritës në tërë fushën e përkufizimit, atëherë $lg10^n < lgx < lg10^{n+1}$, d.m.th. $n < lgx < n + 1$.

Prej këtu vijon se $lgx = n + m,\ n \in N_0,\ m \in [0, 1]$, d.m.th. logaritmi prej çfarëdo numri pozitiv real x është shumë prej një numri të plotë n i cili quhet **karakteristikë** dhe një numri dhjetor m, $m \in [0, 1]$ i cili quhet **mantisë**.

2 Cakto karakteristikën e logaritmit dekad të numrave:

a) 73,45; b) 734,5; c) 7345.

Vëre përgjigjen:

a) Prej $10 < 73{,}45 < 100$ vijon $lg10 < lg73{,}45 < lg100$, d.m.th. $1 < lg73{,}45 < 2$, pra $lg73{,}45 = 1 + m,\ m \in [0, 1)$.

b) $100 < 734{,}5 < 1000$; $lg100 < lg734{,}5 < lg1000$; $2 < lg734{,}5 < 3$,d.m.th. $lg734{,}5 = 2 + m = 2{,}m$.

c) $lg7345 = 3 + m = 3{,}m,\ m \in [0, 1]$.

3 Cakto karakteristikën e logaritmit dekad të numrave:

a) 0,75; b) 0,075; c) 0,0075.

Vëre përgjigjen:

a) Numri 0,75 është më i madh 0,1, kurse më i vogël se 1, d.m.th. $0{,}1 < 0{,}75 < 1$, pra $lg10^{-1} < lg0{,}75 < lg10^0$, d.m.th. $-1 < lg0{,}75 < 0$, vijon $lg0{,}75 = -1 + m$; $m \in [0, 1)$.

b) $0{,}01 < 0{,}075 < 0{,}1$; $lg0{,}01 < lg0{,}075 < lg0{,}1$; $-2 < lg0{,}075 < -1$; $lg0{,}075 = -2 + m$; $m \in [0, 1)$.

Mbaj mend!

Nëse numri $x > 1$, atëherë karakteristika e logaritmit të tij dekad është për 1 më i vogël se numri i shifrave të pjesës së tij të plotë.

Karakteristika e logaritmit të numrit x, $0 < x < 1$ është numër negativ vlera absolute e të cilit është e barabartë me numrin e zerove, te shënimi dhjetor të numrit, para shifrës së parë që nuk është zero.

Vëre!

Nëse numri shumëzohet ose pjesëtohet me njësinë dekade, ndryshon vetëm karakteristika e logaritmit të tij dekad, mantisa ngel e pandryshuar, d.m.th.

$$lgA \cdot 10^k = lgA + lg10^k = lgA + k = n + m + k = (n + k) + m,\ m \in [0, 1).$$

B Sipas teoremës logaritmi dekad prej çfarëdo numri pozitiv real është numër iracional. Karakteristika e logaritmit dekad është numër i plotë, domethënë mantisa e logaritmit dekad është numër iracional, d.m.th. numër dhjetor i pafundëm joperiodik.

Për këto shkaqe për mantisë merret përafërsisht numër i rrumbullakuar në 5 dhjetore.

Në praktikë shfrytëzohet mantisa me 4, 6, 7 por edhe me më shumë dhjetore që varet prej asaj sa saktësi na nevojitet.

Mantisa nuk varet prej pozitës së presjes dhjetore te numri, pra për caktimin e saj të çfarëdo numri mjafton të dihen mantisat e logaritmeve prej numrave natyrorë..

Për caktimin e mantisës shfrytëzohen tabela logaritmike. Te ato njehsohen mantisat e logaritmeve të numrave natyrorë prej 1 deri më 10000.

Tabelat e para logaritmike i ka formuar vet Brigsi në vitin 1600.

C Gjatë caktimit të logaritmit dekad të çfarëdo numri do të shfrytëzojmë kalkulator për të cilin ka opcion *log*, në këtë mënyrë:

- e fusim numrin dekad;

- me shtypjen e tastit *log*, në displej paraqitet logaritmi dekad i numrit të dhënë.

Për shembull $lg43,25 = 1,635986112$, $lg432,5 = 2,635986112$.

Vëre!

Karakteristika e numrit të parë është 1, kurse mantisa $m = 0,63598$. I numrit të dytë karakteristika është 2, kurse mantisa është e barabartë me mantisën e numrit të parë. Pse?

Më tutje mantisën do ta rrumbullakojmë në 5 dhjetore.

Nëse baza e logaritmit është $a > 1$, atëherë $lgx < 0$ për $x \in (0, 1)$. Prej këtu vijon për $0 < x < 1$; $lgx < 0$, pra $lg0,738 = -0,13194$; $lg0,006785 = -2,16845$.

Prej $lg0,738 = -0,13194$ menjëherë nuk mund të caktohet karakteristika dhe mantisa, pasi kalkulatori e jep rezultatin e fundit, d.m.th. njehson vlerën prej karakteristikës negative dhe mantisës pozitive.

Prandaj, karakteristikën dhe mantisën e numrit $lg0,738$ do ta caktojmë në këtë mënyrë: $-0,13194 = -0,13194 + 1 - 1 = -1 + 0,86806$, kurse për numrin $lg0,006785$ kemi: $-2,16845 = -2,16845 + 3 - 3 = -3 + 0,83155$ karakteristika është -3, kurse mantisa $m = 0,83155$.

Caktimi i logaritmandit (numerusit) nëse është dhënë logaritmi i tij quhet **antilogaritmizim**.

4 Cakto x nëse është dhënë: a) $lgx = 2,34567$; b) $lgx = -1,34567$.

Vëre përgjigjen:

a) E fusim numrin 2,34567; e shtypim tastin 2nd, operacioni inverz, kurse pastaj tastin log. Në displej është numri 221,6511557,domethënë numri i kërkuar $x = 221,65$ (i rrumbullakuar në dy dhjetore).

b) $x = 0,045115938 \approx 0,045$.

Ç Zbatimi i logaritmeve qëndron në njehsimin e vlerave të shprehjeve numerike. Zbulimi i logaritmeve në fillim të shekullit XVII mundëson vendosjen e thjeshtimit të njehsimeve numerike të shprehjeve në të cilat janë përfshirë operacionet shumëzim, pjesëtim, fuqizim dhe rrënjëzim.

5 Njehso vlerën e shprehjes:

a) $x=\dfrac{\sqrt[3]{785}\cdot 4{,}32}{(0{,}78)^5}$; b) $x=\dfrac{(2{,}35)^4\cdot 0{,}7856}{\sqrt[3]{(43{,}25)^2}}$.

Vëre zgjidhjen:

- E caktojmë logaritmin dekad të shprehjes, d.m.th.

$lgx = lg\sqrt[3]{785} + lg4{,}32 - lg(0{,}78)^5$; $lgx = \dfrac{1}{3}lg785 + lg4{,}32 - 5lg0{,}78$;

$lgx = \dfrac{1}{3}\cdot 2{,}89487 + 0{,}63548 - 5\cdot(-0{,}12494)$; $lgx = 0{,}96495 + 0{,}63548 + 0{,}6247$;

$lgx = 2{,}22513$; $x = 167{,}93$.

- Me kalkulator do ta fitojmë këtë vlerë të shprehjes:

$$x=\frac{9{,}22479\cdot 4{,}32}{0{,}237304}=\frac{39{,}851098}{0{,}237304}=167{,}93$$

Gjatë caktimit të $\sqrt[3]{785}$

$\boxed{785}\rightarrow\boxed{2nd}\rightarrow\boxed{\sqrt[x]{y}}\rightarrow\boxed{3}=9{,}22479.$

Detyra

1 Cakto: a) $lg\sqrt[3]{0{,}00567}$; b) $lg(2{,}345)^5$; c) $lg\sqrt[7]{(8{,}786)^4}$.

2 Cakto x, nëse:
a) $lgx = 0{,}75642$; b) $lgx = 3 + 0{,}25643$;
c) $lgx = -3 + 0{,}25645$; ç) $lgx = -1{,}35423$.

3 Cakto karakteristikën dhe mantisën e logaritmit dekad të numrit x, nëse:
a) $lgx = 2{,}35426$; b) $lgx = 0{,}47856$; c) $lgx = -0{,}12345$; ç) $lgx = -1{,}45678$.

4 Zgjidhi barazimet: a) $10^x = 172$; b) $10^x = 0{,}524$; c) $2^x = 3$; ç) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 5$.

5 Cakto x, nëse: a) $x = \dfrac{1}{2}log0{,}5$; b) $x = \dfrac{3}{4}lg7 - \dfrac{2}{5}lg0{,}7$.

6 Me ndihmën e logaritmit dekad cakto sa shifror është numri:
a) 2^{30}; b) 3^{1000}; c) $2^{20}\cdot 3^{30}\cdot 6^{40}$.

7 Vlera e përafërtë e numrit e të sistemit logaritmik natyror (Neperit) caktohet me formulën

$$e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Cakto e nëse $n \in \{5, 7, 10, 100\}$.

8 Me ndihmën e logaritmit dekad cakto vlerën e shprehjes:

a) $x = \sqrt{\dfrac{(34{,}52)^3 \cdot 0{,}73}{(0{,}25)^3}}$; b) $x = 0{,}0009^{0{,}0009}$; c) $x = 3{,}42^{3{,}42}$; ç) $x = \sqrt[10]{10}$.

9 BARAZIMET LOGARITMIKE

Kujtohu!

- Cilat barazime i përkufizojmë si eksponenciale?
- Cakto x prej barasisë $lg_3 x = 2$.
- Nëse M dhe N janë numra pozitiv, atëherë për ato vlejnë këto formula:

$$log_a M + log_a N = log_a M \cdot N$$

$$log_a M - log_a N = log_a \frac{M}{N}$$

$$n\,log_a M = log_a M^n$$

$$\frac{m}{n}\,log_a M = log_a \sqrt[n]{M^m}$$

$a > 0,\ a \neq 1;\ m, n \in \mathbb{N}$.

A Barazimet te të cilat e panjohura gjendet në logaritmand ose në bazë të paktën të njërit logaritëm quhen **barazime logaritmike**.

Të atilla janë barazimet:

$$lg(x^2+1) = 2;\quad lg_x 9 = \frac{1}{2};$$

$$lg_{\frac{1}{2}}(x-3) = 1;\quad lg_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+3) = 1.$$

1 Cilat prej këtyre barazimeve janë logaritmike:

a) $lg(x+2) - lg(x-1) = lg3$;

b) $log_{\frac{1}{5}} 5 = x$;

c) $log_5 x = 3$;

ç) $x^2 - (1 + lg7) \times x = lg7$;

d) $x^{3+lgx} = 100$?

Vëre përgjigjen:

- Barazime logaritmike janë a) dhe c).

Barazimet logaritmike do t'i zgjidhim një lloj sikurse barazimet eksponenciale në bashkësinë e numrave realë. Për zgjidhjen e barazimeve logaritmike nuk ekziston metodë e përgjithshme, prandaj do të zgjidhim vetëm disa lloje të barazimeve logaritmike.

- Gjatë të zgjidhurit e barazimeve logaritmike do t'i shfrytëzojmë rregullat për logaritmizimin dhe vetitë e funksionit logaritmik.

Mbaj mend!

Zgjidhja e barazimit logaritmik është numri real për të cilën barazimi kalon në barasi numerike të saktë, ku logaritmandi dhe baza e logaritmit për atë numër janë numra pozitivë.

B 2 Zgjidhi barazimet:

a) $log_2(x - 3) = 3$;   b) $log_3(x^2 - 2x + 6) = 2$;   c) $log_{x-2}(2x - 1) = 2$.

Vëre zgjidhjen:

- Barazimet e formës $log_a(f(x)) = b,\ a > 0,\ a \neq 1$, zgjidhen duke zbatuar përkufizmin për logaritëm.

a) $log_2(x - 3) = 3 \iff 2^3 = x - 3;\ x = 11.$

Për $x = 11$ logaritmandi $x - 3 = 11 - 3 = 8 > 0$, domethënë $x = 11$ është zgjidhje e barazimit.

c) Zgjidhja e barazimit duhet ta kënaq kufizimin:

$$x - 2 > 0,\ x - 2 \neq 1,\ 2x - 1 > 0 \text{ d.m.th. } x > 2 \text{ dhe } x \neq 3.$$

- Me zbatimin e përkufizimit për logaritëm kemi:

$$2x - 1 = (x - 2)^2;\ x^2 - 4x + 4 - 2x + 1 = 0;\ x^2 - 6x + 5 = 0$$

Zgjidhjet e këtij barazimi janë $x_1 = 5$ ose $x_2 = 1$, prej të cilëve vetëm $x = 5$ e kënaq kufizimin. Domethënë $x = 5$ është zgjidhje e barazimit të dhënë.

Në përgjithësi barazimi i formës $log_{g(x)}(f(x)) = h(x)$ është ekuivalent me konjuksionin

$$f(x) = (g(x))^{h(x)} \wedge \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$$

Shpeshherë të zgjidhurit e sistemit të jobarazimeve $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ dhe $g(x) \neq 1$,d.m.th. caktimi i fushës së përkufizimit D të barazimit logaritmik nuk është i lehtë. Për këto shkaqe barazimi mund të zgjidhet edhe pa e caktuar bashkësinë D, por në atë rast patjetër duhet të konstatohet cilët prej zgjidhjeve i kënaqin kushtet e kufizimit, d.m.th. provohen cilët janë zgjidhje të barazimit të dhënë.

3 Zgjidhi barazimet:

a) $log_{\frac{1}{2}}(2x + 3) = -2$;   b) $log_3(x^2 - 5x + 15) = 2$;   c) $log_{(x-2)}(2x + 12) = 2$.

C Barazimet logaritmike të cilat me transformime identike mund të sillen në formën:

$$log_a(f(x)) = log_a\varphi(x),\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Cila ka kuptim për ato vlera të x për të cilat $f(x) > 0$ dhe $f(x) > 0$, zgjidhet duke shfrytëzuar ekuivalencën

$$log(f(x)) = log(\varphi(x)) \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x).$$

4 Cakto zgjidhjen e barazimeve logaritmike:

a) $lg(2x - 3) - lg(x + 2) = lg3 - lg2$; b) $lg(4x + 5) = 2lg(x + 2)$.

Vëre zgjidhjen:

- a) Prej $2x - 3 > 0$ dhe $x + 2 > 0$ vijon $x > \frac{3}{2}$ dhe $x > -2$, d.m.th. bashkësia e përkufizimit të barazimit është $D: x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.
- Duke zbatuar rregullat për logaritmizim kemi $lg\frac{2x-3}{x+2} = lg\frac{3}{2}$, d.m.th. $\frac{2x-3}{x+2} = \frac{3}{2}$ ose $x = 12$. Pasi $12 \in D$, domethënë $x = 12$ është zgjidhje e barazimit të dhënë..

Ç Barazimet logaritmike të cilat janë identike me tranformim sillen në formën

$$F(log_a(f(x))) = 0,\ a \neq 1,\ a > 0$$

zgjidhen me zëvëndësim.

5 Zgjidhe barazimin:

a) $lg^2(x) - 5lgx - 6 = 0$; b) $5lgx + 2log_x10 = 7$.

Vëre zgjidhjen:

- $D: x \in (0, \infty)$, por pastaj $lg^2x = (lgx)^2$ me zëvëndësimin $lgx = t$ barazimi i formës $t^2 - 5t - 6 = 0$.
  Zgjidhja e barazimit është $t_1 = 6$, $t_2 = -1$.
  Për $t_1 = 6$ vijon $lgx = 6$, kurse $x = 10^6$.
  Për $t_2 = -1$ vijon $lgx = -1$, kurse $x = 10^{-1}$.

  b) Me zbatimin e identitetit $log_a b = \frac{1}{log_b a}$ barazimi i formës

$$5lgx + 2\ \frac{1}{lg\,x} = 7,$$

pas zëvëndësimit $lgx = t$ kemi $5t + 2 \cdot \frac{1}{t} = 7$, d.m.th. $5t^2 - 7t + 2 = 0$ zgjidhjet e së cilës janë $t_1 = 1$ dhe $t_2 = \frac{2}{5}$.

Për $t_1 = 1$ vijon $lgx = 1$, pra $x = 10$.

Për $t_2 = \frac{2}{5}$ vijon $lg\, x = \frac{2}{5}$, pra $x = 10^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{100}$.

D Barazimet logaritmike te të cilat e panjohura gjendet në eksponent zgjidhen me logaritmizim të të dy anëve.

6 Zgjidhe barazimin:

a) $x^{3-lgx} = 100$; b) $x^{2x-5} = x$.

Vëre zgjidhjen:

a) Prej $x > 0$ vijon D: $x \in (0, \infty)$.

Me logaritmizimin e të dy anëve me bazë 10 kemi:

$lg(x^{3-lgx}) = lg100$, d.m.th. $(3 - lgx) \cdot lgx = lg10^2$, kurse me zëvëndësimin $lgx = t$

$$(3 - t) \cdot t = 2, \text{ d.m.th. } t^2 - 3t + 2 = 0$$

$t_1 = 1$ ose $t_2 = 2$, pra për $t_1 = 1$ vijon $lgx = 1$, $x = 10$.

$t_2 = 2$ vijon $lgx = 2$, $x = 10^2 = 100$

b) $lg(x^{2x-5}) = lgx$, d.m.th. $(2x - 5) \cdot lgx - lgx = 0$ d.m.th. $lgx(2x - 5 - 1) = 0$.

Prej këtu vijon $lgx = 0$ ose $2x - 6 = 0$; d.m.th. $x = 10^0 = 1$ ose $x = 3$.

Detyra

Zgjidhi barazimet logaritmike:

1. a) $log_3(2x - 1) = 3$; b) $lg(x^2 - 5x + 3) = 0{,}47712$.
2. a) $log_{x+5}(3x - 5) = 1$; b) $log_{x+2}(x^3 - 56) = 3$.
3. a) $lg(x^2 + 2) = lg(2x + 1)$; b) $lg\sqrt{2x+7} - lg(x+2) = 0$
4. a) $lg(x + 2) - lg(x - 1) = lg3$; b) $log_2(x + 1) + log(3x - 1) = 5$.
5. a) $2lg(x + 3) + lgx^2 = 2$; b) $lg\sqrt{x+6} + \frac{1}{2} lg(x+1) = lg\, 6$.
6. a) $\frac{lg(2x+5)}{lg(x^2-8)} = \frac{1}{2}$; b) $lg(x^3 - 8) - lg(x - 2) = lg19$.
7. a) $(2 - lgx)(1 - 2lgx) + 1 = 0$; b) $\frac{2}{2+lg\, x} + \frac{1}{4-lg\, x} = 1$.
8. a) $log_5 x + log_x 5 = 2{,}5$; b) $log_2 x + log_3 x = 1$.
9. a) $log_2 x - log_4 x + log_{16} x = 3$; b) $log_x 4 + log_x 256 = 5$.
10. a) $x^{lgx-1} = 100$; b) $0{,}1 \cdot x^{lgx-2} = 100$.

TEMA 2

FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE TË ÇFARËDO KËNDI

Në këtë temë do të mësosh për

TEMA 2

FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE PREJ ÇFARËDO KËNDI

1 ZGJERIMI I KONCEPTIT PËR KËND. MATJA E KËNDEVE

Kujtohu!

- Figura gjeometrike e formuar prej dy gjysmëdrejtëzave me pikë të përbashkët të fillimit dhe pjesë të rrafshit e kufizuar me ato quhet kënd.
- Cili kënd është i ngushtë, e cili i gjerë?
- Një shkallë (1^o) është e 90-ta pjesë e këndit të drejtë.
- Një gradë është e 100-ta pjesë e këndit të drejtë.

A 1 Diametri i makares së pusit është $\frac{2}{\pi}m$ (fig. 1).

Që të nxjerrim ujë prej pusit, gjatë lëshimit, kova duhet të kalon rrugë prej 6,25 m. Të njëjtën rrugë duhet ta kalon edhe gjatë nxjerrjes së kovës plotë me ujë.

fig 1

a) Cakto këndin që e përshkruan një pikë A prej makares gjatë lëshimit të kovës në pus.

b) Cakto këndin që e përshkruan pika A prej makares gjatë nxjerrjes së kovës.

Vëre zgjidhjen:

Perimetri i një rrethi prej makares ku gjendet pika A prej makares është

$$P = d\pi = \frac{2}{\pi}\cdot\pi = 2 \text{ m}.$$

a) Gjatë lëshimit të kovës, pika A prej makares do të rrotullohet

$6,25 : 2 = 3\frac{1}{8}$ herë në kahen e kundërtë prej lëvizjes së shigjetave të orës

Këndi i kërkuar φ është $3\frac{1}{8}$ herë më i madh se këndi 360^o, d.m.th.

$$\varphi = 3\frac{1}{8}\cdot 360^o = \left(3+\frac{1}{8}\right)\cdot 360^o = 3\cdot 360^o + \frac{1}{8}\cdot 360^o = 1125^o.$$

b) Gjatë nxjerrjes së kovës prej pusit, pika A, gjithashtu, do të rrotullohet $3\frac{1}{8}$ herë, por në kahen e kundërt, d.m.th. në kahen e lëvizjes së shigjetave të orës.

Gjatë të mësuarit e këndit në gjeometri sipas përkufizimit për kënd, krahët e këndit janë me domethënie të njëjtë, d.m.th. nuk ka ndryshim ndërmjet shënimit të $\sphericalangle AOB$ dhe $\sphericalangle BOA$ (fig. 2).Operacionet me kënde në gjeometri janë të kufizuara, d.m.th. shuma e këndeve nuk mund të jetë më e madhe se 360°, kurse ndryshimi i këndeve nuk mund të jetë negativ

fig. 2

Për nevojat e trigonometrisë, fizikës, mekanikës dhe shkencave tjera teknike, duhet të kryhet zgjerimi i konceptit për kënd.

Më tutje $\sphericalangle AOB$ do ta shqyrtojmë si figurë e cila formohet me rrotullimin e njërit krah rreth pikës O deri te puthitja e tij me krahun tjetër.

Rrotullimi i krahut fillestar mund të jetë në kahen pozitive ose negative. Këndi i atillë i formuar quhet kënd i orientuar për të cilin vlen ky:

Përkufizim: Këndi krahu i të cilit është marr si i parë, kurse tjetri si i dytë me kahe të shënuar të rrotullimit të krahut të parë deri në puthitjen e tij me krahun tjetër quhet **kënd i orientuar** ose **i kahëzuar**.

- Në fig. 3 (OA, OB) është kënd pozitivisht i orientuar, d.m.th. pozitiv, kurse $\sphericalangle(OB, OA)$ është kënd negativ
- Gjatë lëshimit të kovës pika A prej makares ka bërë kënd prej 1125°, kurse gjatë nxjerrjes kënd prej -1125°.

Operacionet me këndet negative nxirren nëpërmjet të rregullave të njëjta sikurse edhe operacionet me numrat e plotë.

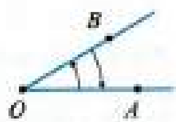


fig. 3

2 Janë dhënë këndet $\alpha = -40^\circ$; $\beta = 70^\circ$; $\gamma = -150^\circ$. Njehso:

a) $\alpha + \beta + \gamma$; b) $2\alpha - \beta + 2\gamma$; c) $3\alpha - \beta + \gamma$.

Vëre përgjigjen:

- b) $2\alpha - \beta + 2\gamma = 2(-40^\circ) - 70^\circ + (-150^\circ) = -80^\circ - 70^\circ - 150^\circ = -300^\circ$.

3 Njehso: a) $\alpha - \beta + \gamma$; b) $\alpha - 3\beta + 2\gamma$; nëse $\alpha = 30^\circ$; $\beta = -50^\circ$; $\gamma = 120^\circ$.

B Prodhimi $230^\circ \cdot 5$ është i mundshëm. Ai është këndi $\varphi = 1150^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 70^\circ$, kurse konstruksioni i tij është paraqitur në fig.. 4.

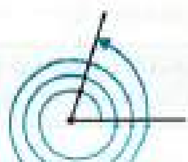


fig. 4

4 Konstrukto këndin:

a) 780°; b) -1125°; c) 2170°.

Vëre përgjigjen:

$\varphi = -1125^\circ = -(3 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = -3 \cdot 360^\circ - 45^\circ$;kurse konstruksioni i tij është paraqitur në fig. 5.

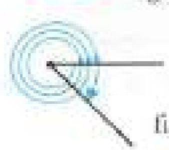


fig. 5

Mbaj mend!

Çfarëdo këndi φ mund të shkruhet në formën e përgjithshme, d.m.th.

$$\varphi = k \cdot 360^\circ \pm \alpha, \quad 0 \le \alpha < 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Numri k paraqet numër të rrotullimeve të plota të krahut që rrotullohet, d.m.th. $k = \pm1, \pm2, \pm3, ...$

Këndi α është numri matës i këndit që e formojnë krahët e këndit.

5 Është dhënë këndi: a) 690°; b) 930°; c) -1950°. Shkruaji këndin në formën e përgjithshme.

6 Cili kënd do të përshkruan:

a) shigjeta e orës b) shigjeta e minutave;

për një ditë dhe natë?

C Prej formulës për gjatësinë e harkut rrethor $l = \frac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ}$, ku këndi α përbëhet prej këndit qëndror i matur në shkallë:

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ.$$

Prej këtu vijon se raporti i çfarëdo harku rrethor dhe rrezes së tij është konstante dhe është i barabartë për të gjithë harqet që kanë këndin e njëjtë qëndror, d.m.th.

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_3}{r_3} = ... = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ, \text{ fig. 6.}$$

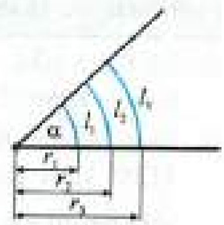


fig. 6

Numri $\frac{l}{r}$ e karakterizon madhësinë e këndit qëndror α, pra mund të merret si numër matës i gjatësisë së harkut rrethor.

Nëse $l = r$, atëherë $\frac{l}{r} = 1$, pra ai kënd qëndror është marrë si njësi matëse e cila quhet **radian**, për të cilin vlen ky

Përkufizimi: Radiani është kënd qëndror që i përgjigjet harkut rrethor gjatësia e të cilit është e barabartë me rrezen e vijës rrethore.

7 Cakto, në çfarë relacioni janë njësitë matëse të këndit të matur në shkallë dhe të matur në radianë.

Vëre zgjidhjen:

Le të jetë α numër i matur në shkallë, kurse φ numër i matur i këndit në radianë.

Prej $\frac{l}{r}=\frac{\pi}{180^\circ}\cdot\alpha^\circ$ dhe $\frac{l}{r}=\varphi$ vijon

$$\varphi=\frac{\pi}{180^\circ}\cdot\alpha^\circ \text{, kurse } \alpha^\circ=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot\varphi_{rad}.$$

Vëre!

Nëse këndi $\varphi=1^\circ$, atëherë ai është $0{,}01745\ rad$, pasi $\varphi=\frac{\pi}{180^\circ}\cdot 1^\circ=0{,}01745$.

Nëse këndi $\varphi=1\ rad$, atëherë $\alpha=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot 1=57^\circ 17' 44{,}8''$

Nëse këndi $\alpha=180^\circ$, atëherë $\varphi=\frac{\pi}{180^\circ}\cdot 180^\circ=\pi\ rad$ d.m.th.

$180^\circ=\pi\ rad$ ose $180^\circ=3{,}14\ rad$, kurse

$360^\circ=2\pi\ rad$ ose $360^\circ\approx 6{,}28\ rad$.

8 Këndet: a) 30°; b) 45°; c) 90°; ç) 780°; d) $48^\circ 24' 36''$ shprehi në radianë.

Vëre zgjidhjen:

d) $48^\circ 24' 36''=48^\circ+\left(\frac{24}{60}\right)^\circ+\left(\frac{36}{3600}\right)^\circ=48{,}41^\circ$, pra $\varphi=\frac{\pi\cdot 48{,}41^\circ}{180^\circ}\approx 0{,}845\ rad$.

Detyra

1. Shkruaji këndet në formën e përgjithshme:
a) 450°; b) -164°; c) 3000°, ç) -1000°.

2. Njehso në shkallë dhe radianë çfarë këndi përshkruan shigjeta e minutave të orës:
a) 5 *min*; b) 30 *min*; c) 1 orë.

3. Rrezja e vijës rrethore është 36 *cm*. Cakto gjatësinë e harkut këndi qëndror i të cilit është $\frac{7\pi}{9}$ radianë.

4. Shprehi në radianë këto kënde:
a) 36°; b) 108°; c) 210°; ç) $212^\circ 24'$; d) $345^\circ 36'$.

5. Shprehi në shkallë këndet të dhënë në radianë:
a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{3\pi}{4}$; ç) $\frac{7\pi}{8}$; d) 4 *rad*.

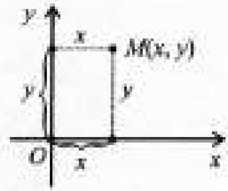
2 VIJA RRETHORE TRIGONOMETRIKE. PËRKUFIZIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE PREJ ÇFARËDO KËNDI

Kujtohu!

- Sistemi koordinativ i Dekartit e ndan rrafshin në 4 pjesë dhe quhen kuadrantë.

- Çdo pike nga rrafshi mund t'i shoqërohet çift i radhitur (x, y) dhe quhen koordinatat e pikës.

- A vlen e anasjellta?



- Në vizatim pika M është paraqitur me sistemin koordinativ me koordinatat e saja x dhe y.
  x - abshisa e pikës.
  y - ordinata e pikës.

- Këndi $\varphi = \alpha + k \cdot 360^o$, $k \in \mathbb{Z}$ i shkruar në radianë është $\varphi = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A 1 Vizato kënd të orientuar pozitivisht dhe negativisht në rrafshin koordinativ.

Vëre zgjidhjen:

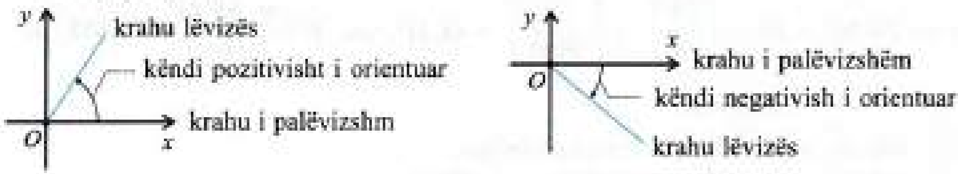


fig. 1

- Vëre, krahu i palëvizshëm të këndit të orientuar me pjesën pozitive të boshtit x, fig. 1.

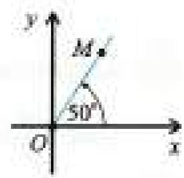


fig. 2

- Që të fitohet krahu i dytë (i fundit) i këndit të dhënë α duhet krahu i parë të rrotullohet (në kahen pozitive ose negative) për madhësinë (të shprehur në shkallë ose radianë) të këndit të dhënë.

  Kështu krahu i dytë i fituart α, kulmi i të cilit është në fillimin e koordinatave është krahu i dytë i bashkësisë së pafundme të këndeve ku krahu i parë i të cilit është pjesa pozitive e boshtit x.

Të gjithë këndet ndryshojnë njëri prej tjetrit në rrotullime të plota. Madhësia e çfarëdo këndi β nga ajo bashkësi është e formës $\beta = \alpha + \kappa \cdot 360^o$ ose $\beta = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Për shembull, nëse OM është krahu i dytë i këndit $\alpha = 50^o$ (fig. 2), atëherë ai është krahu i dytë i këndeve $50^\circ + k \cdot 360^\circ$, d.m.th. i këndit 50°, $(k = 0)$, të 410° $(k = 1)$, të 770° $(k = 2)$, të -310° $(k = 1)$ etj.

Përkufizimi: Vija rrethore e orientuar me qendër në fillimin e koordinatave dhe rreze me gjatësi 1 quhet **vijë rrethore trigonometrike**.

2 a) Cakto koordinatat e pikave te të cilat vija rrethore trigonometrike i prenë boshtet e koordinatave.

b) Cakto pozitën e krahut të dytë të këndeve: 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.

Vëre zgjidhjen:

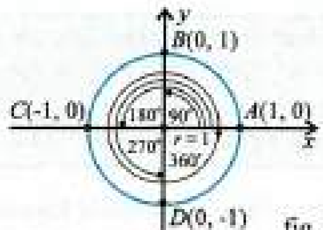


fig. 3

3 a) Cakto pozitën e krahut të dytë të këndeve: 30°, 120°, 210°, 300°.

b) Cakto intervalet e këndeve që i përshkruan krahu i lëvizshëm në çdonjërin prej kuadrantëve, nëse ai lëviz në kahen pozitive.

Vëre përgjigjen:

- a) pika M_1 i takon kuadrantit të parë, kurse këndi në intervalin $(0, 90^\circ)$.
Pika M_2 i takon kuadrantit të dytë, kurse këndi në intervalin $(90^\circ, 180^\circ)$.
Pika M_3 është në kuadrantin e tretë, kurse këndi në intervalin $(180^\circ, 270^\circ)$.
Pika M_4 i takon kuadrantit të katërtë, kurse këndi intervalit $(270^\circ, 360^\circ)$, fig. 4.

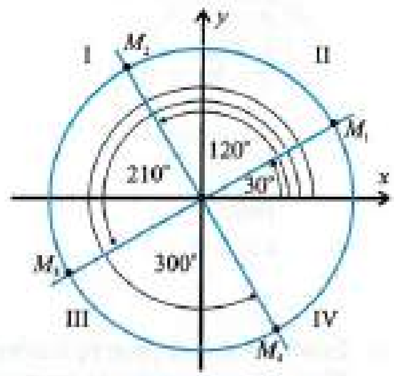


fig. 4

- Krahu i dytë i çfarëdo këndi kulmi i të cilit është në fillimin e koordinatave do ta prenë vijën rrethore trigonometrike vetëm në një pikë.

Pasi pozita e çdo pike në rrafsh është përcaktuar me koordinatat e saja, domethënë pikat prej vijës rrethore trigonometrike janë përcaktuar me koordinatat e saja..

B Le të jetë dhënë vija rrethore trigonometrike dhe këndi i ngushtë α, fig. 5.

Me zbatimin e përkufizimit të funksioneve trigonometrike prej këndit të ngushtë, kemi:

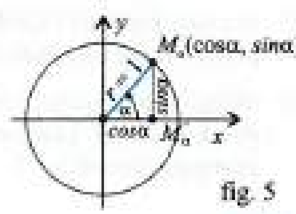


fig. 5

$$\sin\alpha = \frac{\overline{M_\alpha M'_\alpha}}{\overline{OM_\alpha}} = \overline{M_\alpha M'_\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{\overline{OM'_\alpha}}{\overline{OM_\alpha}} = \overline{OM'_\alpha}, \text{pasi } \overline{OM_\alpha} = 1.$$

Vëre, në kuadrantin e parë (d.m.th. për këndin e ngushtë) koordinatat e pikës të vijës rrethore trigonometrike janë vlerat e funksioneve trigonometrike $\sin\alpha$ dhe $\cos\alpha$.

Prandaj, për funksionet trigonometrike sinus dhe kosinus prej çfarëdo këndi vlejnë këta përkufizimeve:

Përkufizimi: Sinusi prej çfarëdo këndi është ordinata e pikës te e cila krahu lëvizës i këndit e prenë vijën rrethore trigonometrike.

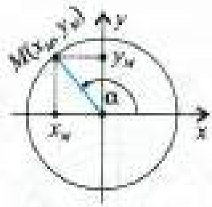
Përkufizimi: Kosinusi prej çfarëdo këndi është abshisa e pikës te e cila krahu lëvizës i këndit e prenë vijën rrethore trigonometrike.

4 Paraqiti grafikisht koordinatat e pikave që fitohen me prerjen e krahut lëvizës të këndit dhe vijës rrethore trigonometrike në:

a) kuadrantin II; b) kuadrantin III; c) kuadrantin IV.

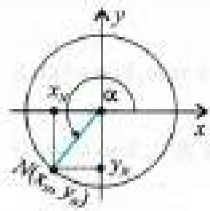
Vëre përgjigjen:

a)



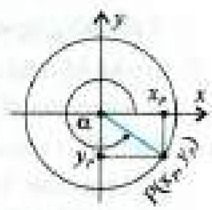
$\sin\alpha = y_M$;
$\cos\alpha = x_M$;

b)



$\sin\alpha = y_N$;
$\cos\alpha = x_N$;

c)



$\sin\alpha = y_P$;
$\cos\alpha = x_P$.

fig. 6

- Është e njohur se pikat në kuadrantin I dhe II kanë ordinata pozitive, kurse në kuadrantin III dhe IV kanë ordinata negative.
- Prandj, **sinusi** prej këndeve krahu i dytë i të cilit është në kuadrantin I ose II është pozitiv, kurse në kuadrantin III dhe IV është negativ.
- Pikat në kuadrantin I dhe IV kanë abshisa pozitive, kurse në kuadrantin II dhe III kanë abshisa negative.
- Prandaj, kosinusi i këndeve krahu i dytë i të cilëve është në kuadrantin I dhe IV është pozitiv, kurse në kuadrantin II dhe III është negativ.
- Shenja e funksioneve trigonometrike sinus dhe kosinus në çdonjërin prej kuadrantëve janë paraqitur në fig. 7.

fig. 7

5 Cakto shenjën e prodhimeve:

a) $sin120^o \cdot cos120^o$; b) $sin50^o \cdot cos200^o$; c) $sin150^o \cdot sin200^o \cdot cos300^o$.

Vëre përgjigjen:

a) Këndi prej 120^o është në kuadrantin II , ku sinusi është pozitiv, kurse kosinusi është negativ, d.m.th. $sin120^o > 0$, kurse $cos120^o < 0$, pra $sin120^o \cdot cos120^o < 0$.

C Tangjenta e vijës rrethore trigonometrike në pikëprerjen me pjesën pozitive të boshtit x quhet **boshti i tangensit**. Pikat e saja janë me koordinata $(1, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Tangjenta e vijës rrethore trigonometrike në pikëprerjen me pjesën pozitive të boshtit y quhet boshti i kotangensit.
Pikat e saja janë me koordinata $(x, 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Le të jetë dhënë vija rrethore trigonometrike dhe këndi i ngushtë α ku krahu lëvizës e prenë boshtin e tangensit dhe kotangensit përkatësisht në pikat M dhe N, fig. 8.

Prej përkufizimit të tangensit dhe kotangensit prej këndit të ngushtë, kemi:

$$tg\alpha = \frac{\overline{MM_x}}{\overline{OM_x}} = \overline{MM_x} \quad \text{dhe}$$

$$ctg\alpha = \frac{\overline{NN_y}}{\overline{ON_y}} = \overline{NN_y}\ .$$

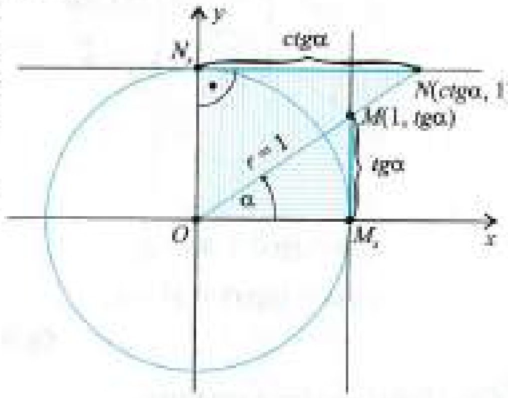


fig. 8

Krahu lëvizës të çfarëdo këndi e prenë boshtin e tangensit dhe kotangensit në një pikë.

Vëre, në kuadrantin e parë (për kënd të ngushtë) ordinata e pikës të boshtit të tangensit është vlerë e tangensit prej këndit të ngushtë, kurse abshisa e pikës të boshtit të kotangensit është vlera e kotangensit prej këndit të ngushtë.

Prandaj, për funksionet trigonometrike tangensi dhe kotangensi prej çfarëdo këndi vlejnë këta përkufizime:

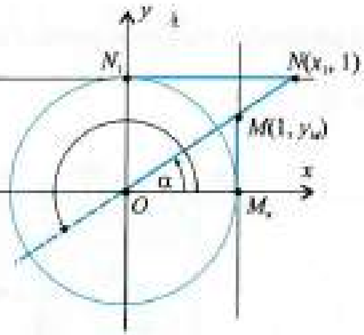
Përkufizimi: Tangensi prej çfarëdo këndi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ është ordinata e pikës në të cilën krahu lëvizës i këndit ose vazhdimi i tij e prenë boshtin e tangensit.

Përkufizimi: Kotangensi i çfarëdo këndi $\alpha \neq k\pi$, $k \in Z$ është abshisa e pikës në të cilën krahu lëvizës i këndit ose vazhdimi i tij e prenë boshtin e kotangensit.

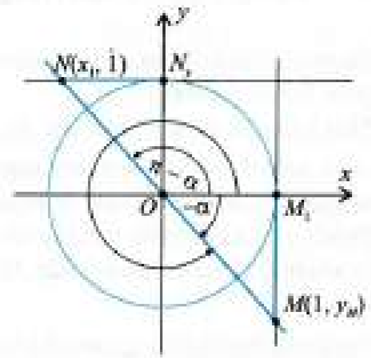
6 Paraqiti grafikisht koordinatat e pikave që fitohen me prerjen e krahut lëvizës të këndit me boshtin e tangensit dhe kotangensit për këndet në kuadrantin II, III dhe IV.

Është e qartë, prej dy vizatimeve paraprake përfundojmë se koordinatat e pikave për këndin krahu lëvizës i të cilit mbaron në kuadrantin e parë, përkatësisht në të tretin janë pozitiv, ndërsa në të III dhe IV janë negativ.

Prandaj, tangensi dhe kotangensi në kuadrantin I dhe III janë pozitiv, kurse në II dhe IV janë negativ (fig. 9).



$$tg\alpha = tg(\alpha + \pi) = y_M$$
$$ctg\alpha = ctg(\alpha + \pi) = x_N$$



$$tg(\pi - \alpha) = tg(2\pi - \alpha) = y_M$$
$$ctg(\pi - \alpha) = ctg(2\pi - \alpha) = x_N$$

fig. 9

7 Cakto shenjën e prodhimit:

a) $tg20^\circ \cdot ctg120^\circ$; b) $tg130^\circ \cdot ctg240^\circ$; c) $tg200^\circ \cdot ctg350^\circ$.

Vëre përgjigjen:

a) $tg20^\circ > 0$, $ctg120^\circ < 0$, pra $tg20^\circ \cdot ctg120^\circ < 0$.

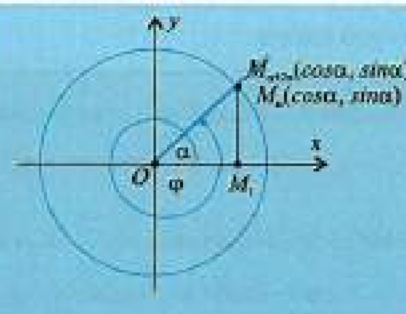
Duhet të dish:

Pasi krahu lëvizës i këndit α dhe të këndit $\varphi = \alpha \pm 2k\pi$, $k \in Z$ puthiten, atëherë edhe pikat M_α dhe $M_{\alpha+2k\pi}$ puthiten që do të thotë se:

$$sin(\alpha + 2k\pi) = sin\alpha$$
$$cos(\alpha + 2k\pi) = cos\alpha, \ k \in Z.$$

Nga shkaqet e njëjta vijon se

$$tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha$$
$$ctg(\alpha + k\pi) = ctg\alpha, \ k \in Z.$$



8 Provo saktësinë e gjykimit: a) $cos800^o = cos80^o$; b) $tg1880^o = tg80^o$.

Detyra

1 Këndet: a) 760^o; b) 1420^o; c) 1080^o; ç) 1830^o; transformoji në formën $k \cdot 360^o \pm \alpha$.

2 Në vijën rrethore trigonometrike cakto pikën te e cila:

a) $sin\alpha = \frac{1}{2}$; b) $cos\alpha = -\frac{2}{3}$; c) $sin\alpha = -\frac{3}{4}$.

3 Cakto shenjën e prodhimit:

a) $sin115^o \cdot cos160^o$; b) $sin220^o \cdot cos130^o$;

c) $tg15^o \cdot ctg210^o$; ç) $tg130^o \cdot ctg300^o$.

3 NDËRRIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE

Kujtohu!

- Vlerat e sinusit dhe kosinusit për këndin që është në kuadrantin e parë janë pozitive, ndërsa në kuadrantin III janë negative.
- Çfarë shenje ka vlera e funksionit sinus për këndet që janë në kuadrantin: a) II; b) IV?
- Çfarë shenje kanë vlerat e funksionit kosinus për këndet që janë në kuadrantin: a) II; b) IV?
- Vlera e tangensit dhe kotangensit për këndin që është në kuadrantin II dhe III.
- Çfarë shenje kanë vlerat e funksionit tangens dhe kotangens për këndin që është në kuadrantin II dhe IV?

A 1 Cakto koordinatat e pikëprerjeve të vijës rrethore trigonometrike me boshtet e koordinatave.

Vëre zgjidhjen:

- Pasi rrezja e vijës rrethore është e barabartë me 1, pra koordinatat e pikëprerjeve me boshtin x janë $(1, 0)$ dhe $(-1, 0)$, ndërsa në boshtin y janë $(0, 1)$ dhe $(0, -1)$.
- Krahu lëvizës për këndet prej 0^o dhe 180^o puthitet me boshtin x, që do të thotë $sin0^o = 0$, $sin180^o = 0$ dhe $sin360^o = 0$, ndërsa $cos0^o = 1$, $cos180^o = -1$ dhe $cos360^o = 1$.
- Krahu lëvizës për këndet prej 90^o dhe 270^o puthitet me boshtin y, që do të thotë $cos90^o = 0$ dhe $cos270^o = 0$, ndërsa $sin90^o = 1$ dhe $sin270^o = -1$.

Vlerat e fituara të funksioneve sinus dhe kosinus do t'i paraqesim në këtë tabelë:

	0^o	90^o	180^o	270^o	360^o
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1

Kujtohu!

Për funksionin $y = f(x)$ të përkufizuar në bashkësinë D vlen ky

Përkufizimi: a) Funksioni $y = f(x)$ monotonisht rritet nëse çfarëdo $x_1,\ x_2 \in D_f$ dhe $x_2 > x_1$, atëherë vijon $f(x_2) > f(x_1)$.

b) Funksioni $y = f(x)$ monotonisht zvogëlohet nëse për çfarëdo $x_1,\ x_2 \in D_f$ dhe $x_2 > x_1$, atëherë vijon $f(x_2) < f(x_1)$.

Le të jenë α dhe β kënde të ngushta dhe poashtu $\alpha < \beta$.

Sipas përkufizimeve të funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi, kemi:

$$\cos\alpha = \overline{OM_x} \quad \text{dhe} \quad \cos\beta = \overline{ON_x}$$

$$\sin\alpha = \overline{MM_x} \quad \text{dhe} \quad \sin\beta = \overline{NN_x}$$

Është e qartë se:

$$\overline{OM_x} > \overline{ON_x}, \text{ d.m.th. } \cos a > \cos b$$

$$\overline{MM_x} < \overline{NN_x}, \text{ d.m.th. } \sin a < \sin b$$

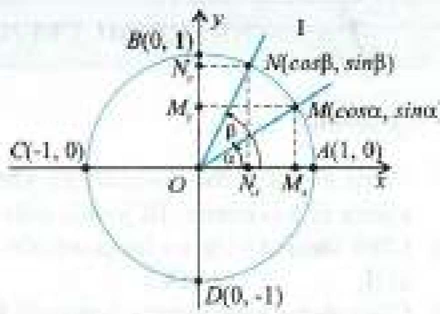


fig. 1

Sipas përkufizimit të monotonisë së funksioneve kemi:

- Nëse këndi rritet në kuadrantin I, atëherë funksioni kosinus zvogëlohet, kurse funksioni sinus rritet.

Vëreji ndërrimet e funksioneve sinus dhe kosinus në kuadrantët tjerë, fig. 2, ku $\alpha < \beta$.

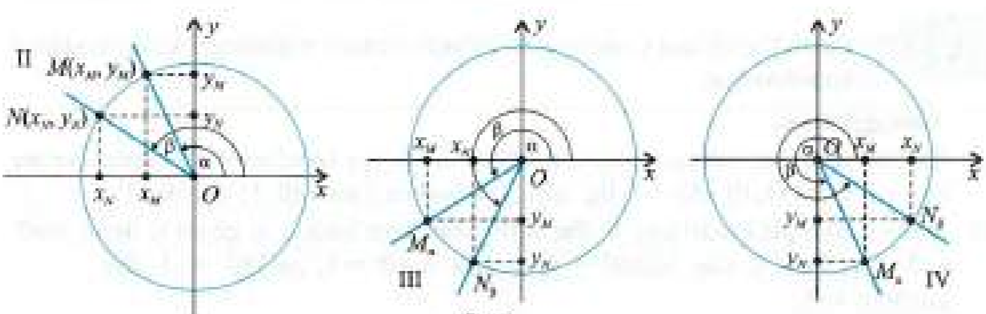


fig. 2

Le të jenë (x_M, y_M), (x_N, y_N) koordinatat e pikave te të cilat krahu i dytë i këndeve α dhe β e prenë vijën rrethore trigonometrike.

Kuadranti II   Kuadranti III   Kuadranti IV

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha = y_M\\ \sin\beta = y_N\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_M > y_N \text{ pra}\\ \sin\alpha > \sin\beta\end{array};\ \left.\begin{array}{l}\sin\alpha = y_M\\ \sin\beta = y_N\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_M > y_N \text{ pra}\\ \sin\alpha > \sin\beta\end{array};\ \left.\begin{array}{l}\sin\alpha = y_M\\ \sin\beta = y_N\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_M < y_N \text{ pra}\\ \sin\alpha < \sin\beta\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = x_M\\ \cos\beta = x_N\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_M > x_N \text{ pra}\\ \cos\alpha > \cos\beta\end{array}\ \left.\begin{array}{l}\cos\alpha = x_M\\ \cos\beta = x_N\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_M < x_N, \text{ pra}\\ \cos\alpha < \cos\beta\end{array}\ \left.\begin{array}{l}\cos\alpha = x_M\\ \cos\beta = x_N\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_M < x_N, \text{ pra}\\ \cos\alpha < \cos\beta\end{array}$$

Në bazë të përkufizimit për monotoninë e funksioneve vijon, nëse këndi α rritet në:
kuadrantin II, atëherë funksioni sinus zvogëlohet dhe kosinusi zvogëlohet.
kuadranti III, atëherë funksioni sinus zvogëlohet, kurse kosinusi rritet.
kuadrantin IV, atëherë funksioni sinus rritet, kurse kosinusi rritet.

2 Krahasoji numrat:

a) $sin5^o$ dhe $sin85^o$; b) $cos130^o$ dhe $cos150^o$;

c) $sin220^o$ dhe $sin260^o$;ç) $cos300^o$ dhe $cos310^o$.

3 Cakto shenjën e ndryshimit:

a) $sin100^o - sin130^o$; b) $cos15^o - cos85^o$; c) $cos215^o - cos220^o$.

Vëre zgjidhjen:

a) funksioni $sin\alpha$ në kuadrantin e dytë zvogëlohet..

Pasi $100^o < 130^o$ vijon $sin100^o > sin130^o$, d.m.th. $sin100^o - sin130^o > 0$.

B Le të jenë α dhe β janë dy kënde ku $\alpha < \beta$.

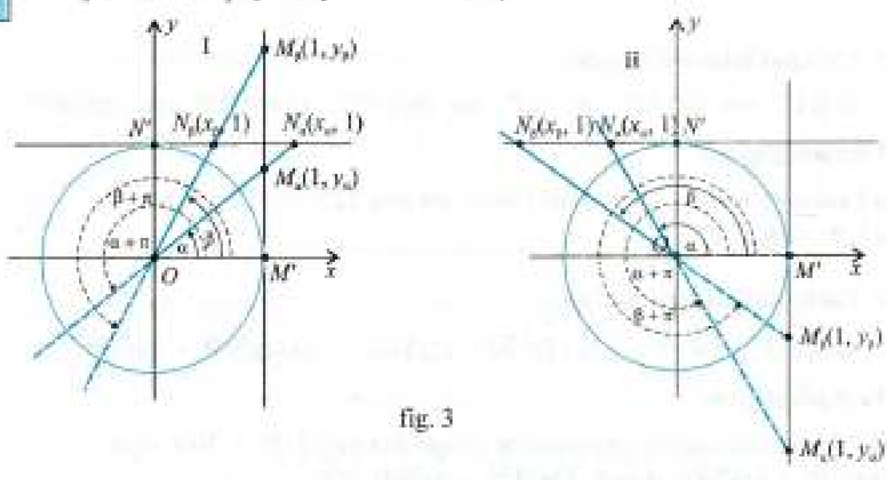


fig. 3

Le të jenë x_α, y_α, x_β, y_β koordinatat e pikave te të cilët krahu i dytë ose vazhdimi i tij e prenë boshtin e tangensit dhe kotangensit, fig. 3.

Për këndet në kuadrantin I dhe III

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = y_\alpha \\ tg\,\beta = y\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} y_\alpha < y_\beta, \text{ pra} \\ tg\,\alpha < tg\,\beta \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ctg\,\alpha = x_\alpha \\ ctg\,\beta = x_\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_\beta > x_\beta, \text{ pra} \\ ctg\,\alpha > ctg\,\beta \end{array}$$

Për këndet në kuadrantin II dhe IV

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = y_\alpha \\ tg\,\beta = y_\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y_\alpha < y_\beta, \text{ pra} \\ tg\,\alpha < tg\,\beta \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} ctg\,\alpha = x_\alpha \\ ctg\,\beta = x_\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_\alpha > x_\beta, \text{ pra} \\ ctg\,\alpha > ctg\,\beta \end{array}$$

- Krahu lëvizës i këndit prej 0^o dhe 180^o puthitet me boshtin x, domethënë $tg0^o = tg180^o = 0$. Funksioni kotangens prej 0^o dhe 180^o, d.m.th. për çdo kënd të formës $k\pi$, $k \in Z$, nuk është i përkufizuar, pasi krahu i dytë i atyre këndeve nuk e prenë boshtin e kotangensit.
- Krahu i parë prej këndit 90^o dhe 270^o puthitet me boshtin y, domethënë $ctg90^o = ctg270^o = 0$. Funksioni tangens prej 90^o dhe 270^o, d.m.th. për çdo kënd të formës $\frac{k\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ nuk është përkufizuar, pasi krahu i dytë prej atyre këndeve nuk e prenë boshtin tangens.

Vëre, kur këndi α rritet prej 0^o deri 90^o ose 180^o deri 270^o funksioni tangens rritet prej 0 deri ∞.
Kur këndi α rritet prej 90^o deri 180^o ose prej 270^o deri 360^o, atëherë vlerat e funksionit tangens janë negative dhe gjithashtu funksioni në mënyrë të vijueshme rritet prej $-\infty$ deri 0. Prandaj funksioni tangens monotonisht rritet prej $-\infty$ deri $+\infty$ në tërë fushën e përkufizimit.

4 Shqyrto monotoninë e funksionit $ctg\alpha$.

5 Cili kënd është më i madh:

a) $tg12^o$ ose $tg152^o$; b) $ctg7^o$ ose $ctg170^o$; c) $ctg310^o$ ose $ctg300^o$?

Vëre përgjigjen:

- a) Funksioni tangens monotonisht rritet, pra prej $125^o < 152^o$, vijon $tg125^o < tg152^o$.

6 Cakto shenjën e ndryshimit:

a) $tg253^o - tg235^o$; b) $ctg130^o - ctg132^o$; c) $ctg310^o - ctg300^o$.

Vëre përgjigjen:

- c) Funksioni kotangens monotonisht zvogëlohet prej $310^o > 300^o$ vijon $ctg310^o < ctg300^o$, d.m.th. $ctg310^o - ctg300^o < 0$.

Monotoninë e funksioneve trigonometrike do ta paraqesim në këtë tabelë:

α	0	kuad.I	$\frac{\pi}{2}$	kuad.II	π	kuad.III.	$\frac{3\pi}{2}$	kuad.IV.	2π
$sin\alpha$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
$cos\alpha$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
$tg\alpha$	0	↗	$\pm\infty$	↗	0	↗	$\pm\infty$	↗	0
$ctg\alpha$	$\pm\infty$	↘	0	↘	$\pm\infty$	↘	0	↘	$\pm\infty$

Detyra

1. Cili numër është më i madh:

a) $sin25^\circ$ ose $sin15^\circ$; b) $cos130^\circ$ ose $cos120^\circ$; c) $sin20^\circ$ ose $sin320^\circ$,

ç) $tg38^\circ$ ose $tg62^\circ$; d) $ctg280^\circ$ ose $ctg300^\circ$?

2. Cakto shenjën e ndryshimit

a) $sin10^\circ - sin15^\circ$; b) $cos15^\circ - cos25^\circ$;

c) $tg135^\circ - tg150^\circ$; ç) $ctg230^\circ - ctg260^\circ$.

3. Radhiti sipas madhësisë duke filluar prej më të voglit:

a) $sin126^\circ$, $sin123^\circ$, $sin212^\circ$, $sin225^\circ$; b) $tg48^\circ$, $tg52^\circ$, $tg45^\circ$, $tg154^\circ$, $tg142^\circ$.

4. Cakto shenjën e herësit:

a) $\frac{sin48^\circ - sin64^\circ}{tg15^\circ - tg50^\circ}$; b) $\frac{1-sin\alpha}{1-tg\alpha}$, nëse $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Cakto shenjën e shprehjes:

a) $\frac{ctg320^\circ \cdot tg214^\circ}{tg150^\circ + tg165^\circ}$; b) $\frac{tg63^\circ \cdot ctg173^\circ}{sin38^\circ \cdot cos110^\circ}$.

6. Njehso vlerën e shprehjes:

a) $sin0^\circ + sin90^\circ$; b) $cos0^\circ - cos180^\circ$; c) $cos180^\circ - sin270^\circ$;

ç) $\frac{sin2\pi + cos2\pi}{tg\pi - cos\pi}$; d) $\frac{sin\frac{\pi}{2} + sin\frac{3\pi}{2}}{2cos\pi}$.

4 VARËSITË THEMELORE TË FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE PREJ ÇFARËDO KËNDI

Kujtohu !

- Për përkufizimin e funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi.
- Lartësia e trekëndëshit barabrinjës me brinjë a është $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Për varësitë themelore trigonometrike prej këndit të ngushtë.

A 1. Cakto vlerën e funksioneve trigonometrike prej këndeve:

a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{6}$.

Vëre zgjidhjen:

- Trekëndëshi OM_1M është kënddrejtë barakrahas, d.m.th. $\overline{OM_1}=\overline{M_1M}=x$, pra $\overline{OM_1}^2=\overline{M_1M}^2=\overline{OM}^2$, d.m.th. $2x^2=1$ ose $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x>0$.

- Domethënë pika M i ka koordinatat $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, pra $sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg\frac{\pi}{4}=1$, $ctg\frac{\pi}{4}=1$ (fig. 1a).

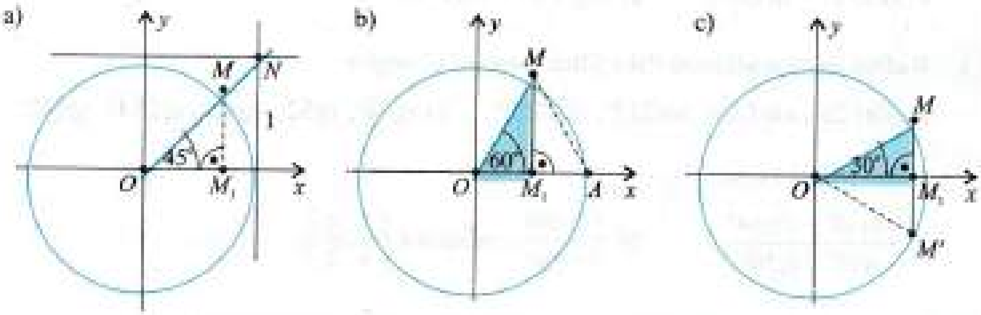


fig. 1

- Trekëndëshi OAM është barabrinjës (pse?), pra $\overline{MM_1}=\frac{\overline{OA}\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, kurse $\overline{OM_1}=\frac{\overline{OA}}{2}=\frac{1}{2}$ (fig. 1b).

- Domethënë pika M i ka koordinatat $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, pra $sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,

$$tg\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{MM_1}}{\overline{OM_1}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3},\quad ctg\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{OM_1}}{\overline{MM_1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Trekëndëshat OM_1M dhe OM_1M' janë simetrik në lidhje me boshtin x, pra $\Delta MM'O$ është barabrinjës (fig. 1c). Nga shkaqet e njëjta sikurse te rasti paraprak pika M i ka koordinatat $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Domethënë $sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Vlerat e funksioneve trigonometrike prej këndeve $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ janë shkruar në tabelë.

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 Njehso vlerën e shprehjes:

a) $2sin30^\circ cos30^\circ$; b) $2sin60^\circ cos30^\circ$; c) $cos45^\circ - sin45^\circ cos0^\circ$;

ç) $cos0^\circ - sin90^\circ \cdot cos60^\circ$; d) $tg30^\circ \cdot ctg30^\circ - 1$.

Vëre përgjigjen:

c) $cos45^\circ - sin45^\circ cos0^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = 0$.

B **3** Vërteto se $sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$ ku $\varphi = k \cdot 360^\circ + \alpha$, $0 \le \alpha < 360^\circ$.

Vëre vërtetimin:

Prej trekëndëshit kënddrejtë OM_1M vijon (fig. 2):

$$\overline{MM_1}^2 + \overline{OM_1}^2 = 1$$

$$(sin\varphi)^2 + (cos\varphi)^2 = 1$$

$$sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$$

Për $\varphi = k \cdot 360^\circ + \alpha$ kemi

$sin^2(k \cdot 360^\circ + \alpha) + cos^2(k \cdot 360^\circ + \alpha) = 1$.

d.m.th. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

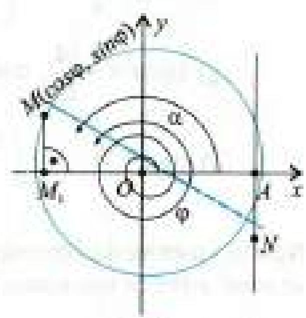


fig. 2

Prej ngjashmërisë së ΔONA dhe ΔOMM_1 vijon:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{MM_1}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OM_1}}, \text{ d.m.th. } \frac{tg\alpha}{sin\alpha} = \frac{1}{cos\alpha} \text{ ose } tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}, \text{ kurse } ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}.$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1, \quad \alpha \ne k \cdot \frac{\pi}{2}.$$

4 Vërtetoji formulat: $sin\alpha = \dfrac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ dhe $cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$.

Vëre përgjigjen:

Nëse të dy anët e identitetit themelor i pjesëtojmë me $cos^2\alpha$, kurse pastaj me $sin^2\alpha$, kemi:

$$\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}+\frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{1}{cos^2\alpha} \quad \text{dhe} \quad \frac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha}+\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}=\frac{1}{sin^2\alpha}$$

$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{cos^2\alpha} \qquad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{sin^2\alpha}$$

$$cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Shenja para rrënjës varet prej shenjës të funksionit të dhënë në kuadrantin përkatës.

Deri te përfundimi i njëjtë mund të arrijmë nëse e shqyrtojmë fig. 3.

Prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike prej këndit të ngushtë kemi:

$$sin\alpha=\frac{\overline{AM}}{OM},\quad sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}},\ \text{kurse}\ cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

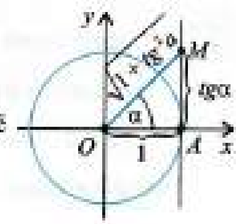


fig. 3

5 Caktoji vlerat e funksioneve tjera trigonometrike, nëse është dhënë:

a) $sin\alpha=\frac{3}{4}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$; b) $sin\alpha=-\frac{5}{13}$, $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$; c) $cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ç) $cos\alpha=-\frac{24}{25}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$; d) $tga=1$; e) $tg\alpha=-\sqrt{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$;

f) $ctga=-1$, $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$; g) $ctg\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Nëse në kushtin e detyrës nuk është dhënë në cilin kuadrant gjendet këndi, atëherë nënkuptohet se këndi është në kuadrantin e parë.

Vëre zgjidhjen:

a) Prej identitetit themelor kemi $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, kemi:

$$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \text{ ose } cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{3}{4}:\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{7}}{7} \text{ dhe } ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

d) $sin\alpha = \dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dhe $ctg\alpha = 1$.

6 Njehso vlerën e shprehjes: a) $5sin\alpha cos^2\alpha - sin^2\alpha$ për $cos\alpha = \dfrac{3}{5}$;

b) $cos^2\alpha - 3sin^2\alpha cos\alpha$ për $sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\dfrac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha}$ për $cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ dhe $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Vëre zgjidhjen:

a) $sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$ ose $sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

Vlera e shprehjes është:

$5sin\alpha cos^2\alpha - sin^2\alpha = 5 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{9}{25} - \dfrac{16}{25} = \dfrac{36}{25} - \dfrac{16}{25} = \dfrac{4}{5}$.

7 Thjeshtoji shprehjet:

a) $\dfrac{1}{1-cos\alpha} + \dfrac{1}{1+cos\alpha}$, $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

b) $\dfrac{1+sin\alpha}{cos\alpha} - \dfrac{cos\alpha}{1-sin\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

c) $(tg\alpha + ctg\alpha)^2 - (tg\alpha - ctg\alpha)^2$;

ç) $\left(\sqrt{\dfrac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}\right)^2$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\dfrac{1}{1-cos\alpha} + \dfrac{1}{1+cos\alpha} = \dfrac{1+cos\alpha+1-cos\alpha}{(1-cos\alpha)(1+cos\alpha)} = \dfrac{1}{1-cos^2\alpha} = \dfrac{2}{sin^2\alpha}$.

8 Vërtetoji identitetet:

a) $\dfrac{1}{1+sin\alpha} + \dfrac{1}{1-sin\alpha} = \dfrac{2}{cos^2\alpha}$; b) $\dfrac{sin\alpha}{ctg\alpha+1} + \dfrac{cos\alpha}{tg\alpha+1} = \dfrac{1}{sin\alpha+cos\alpha}$;

c) $sin^2\alpha\,(ctg\alpha - 3)\,(3ctg\alpha - 1) + 10sin\alpha cos\alpha = 3$.

Vëre zgjidhjen:

b) $\dfrac{sin\alpha}{ctg\alpha+1} + \dfrac{cos\alpha}{tg\alpha+1} = \dfrac{sin\alpha}{\dfrac{cos\alpha}{sin\alpha}+1} + \dfrac{cos\alpha}{\dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}+1} = \dfrac{sin^2\alpha+cos^2\alpha}{sin\alpha+cos\alpha} = \dfrac{1}{sin\alpha+cos\alpha}$.

Detyra

1. Njehso vlerën e shprehjes:

a) $sin60^o - cos30^o \cdot cos0^o$; b) $tg\dfrac{\pi}{4}+ctg\dfrac{\pi}{4}-2$; c) $\dfrac{sin60^o}{1+cos60^o}+\dfrac{1}{tg30^o}$.

2. Nëse është dhënë $cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, cakto vlerën e funksioneve tjera trigonometrike.

3. Cakto vlerën e shprehjes $\dfrac{1-2tg\alpha}{1+2tg\alpha}$, nëse $sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

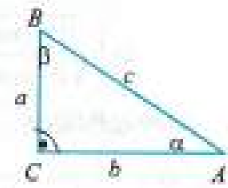
4. Thjeshtoji shprehjet a) $\dfrac{sin^3\alpha+cos^3\alpha}{sin\alpha+cos\alpha}$; b) $\dfrac{sin\alpha}{ctg^2\alpha+1}-\dfrac{cos\alpha}{tg^2\alpha+1}$.

5. Vërteto identitetet:

a) $\dfrac{ctg^2\alpha-1}{ctg\alpha}\cdot\dfrac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=1$; b) $\dfrac{sin^2\alpha}{1+ctg\alpha}+\dfrac{cos\alpha}{1+tg\alpha}=1-sin\alpha cos\alpha$.

5 SJELLJA E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE PREJ ÇFARËDO KËNDI NË FUNKSION TRIGONOMETRIK PREJ KËNDIT TË NGUSHTË

Kujtohu!



- $sin\alpha=\dfrac{a}{c}$; $cos\alpha=\dfrac{b}{c}$; $tg\alpha=\dfrac{a}{b}$; $ctg\alpha=\dfrac{b}{a}$.
- Shkruaji funksionet trigonometrike prej këndit β.
- Sa është shuma e këndeve të ngushtë në trekëndëshin këndrejtë dhe si quhen?
- Është dhënë vlera e një funksioni. Shprehi vlerat e funksioneve tjera.

A 1. Cakto vlerën e funksioneve trigonometrike prej këndit negativ α.

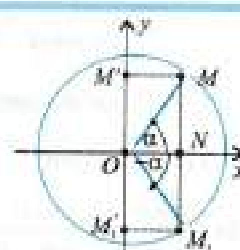


fig. 1

Vëre zgjidhjen:

- Pika M nga vija rrethore është simetrike me pikën M_1 në lidhje me boshtin x, $(ON, OM) = a = |-a|$. Nëse pika M është me koordinata $(cos\alpha, sin\alpha)$, atëherë koordinatat e pikës M_1 janë $(cosa, -sina)$.

Prej këtu vijon $\boxed{cos(-\alpha) = cos\alpha,}$

kurse vlerat e $sin(-\alpha)$ dhe $sin\alpha$ janë me numra të kundërt, pra

$$\boxed{sin(-\alpha) = -sin\alpha.}$$

- $tg(-\alpha) = \dfrac{sin(-\alpha)}{cos(-\alpha)} = \dfrac{-sin\alpha}{cos\alpha} = -tg\alpha$ dhe - $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha.$

2 Cakto shenjën e shprehjes:

a) $sin(-\alpha) \cdot cos(-\alpha) \cdot tg(-\alpha)$; b) $\dfrac{sin^2(-\alpha)tg^2(-\alpha)}{cos(-\alpha)ctg(-\alpha)}$.

- Për funksionin çift dhe tek të funksionit $y = f(x)$ vlen ky:

Përkufizimi: Funksioni $y = f(x)$ është çift nëse $f(-x) = f(x)$, kurse është tek nëse $f(-x) = -f(x)$, për çdo $x \in D_f$.

- Domethënë, funksioni $cosx$ është çift, kurse funksionet $sinx$, tgx, $ctgx$ janë tek.
- Gjatë sjelljes së funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi në kënd të ngushtë, këndi α gjithmonë do të jetë i ngushtë, d.m.th. $0° < \alpha < 90°$.

B Funksionet trigonometrike për këndet e formës $360° - \alpha$.

- Për shkak të simetrisë së pikave $M_{-\alpha}$ dhe M_α në lidhje me boshtin x dhe të dy pikat shtrihen në të njëjtën vijë rrethore trigonometrike, pra vlerat

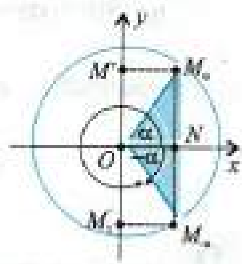


fig. 2

$$cos(360° - \alpha) = cos\alpha,$$

$$sin(360° - \alpha) = sin(-\alpha) = -sin\alpha,$$

$$tg(360° - \alpha) = \frac{sin(360° - \alpha)}{cos(360° - \alpha)} = \frac{sin(-\alpha)}{cos\alpha} = tg(-\alpha) = -tg\alpha\ ;$$

$$ctg(360° - \alpha) = ctg(-\alpha) = -ctg\alpha.$$

C Funksionet trigonometrike për këndet e formës $180° - \alpha$.

- Prej simetrisë së pikave M_α dhe $M_{180°-\alpha}$ në lidhje me boshtin y kemi: Pika M_α është me koordinata $(cos\alpha, sin\alpha)$, kurse pika $M_{180-\alpha}$ është me koordinata $(-cos\alpha, sin\alpha)$.
- Prej këtu vijon:

$$sin(180° - \alpha) = sin\alpha, \quad cos(180° - \alpha) = -cos\alpha.$$

Për tangensin dhe kotangensin kemi:

$$tg(180° - \alpha) = -tg\alpha; \quad ctg(180° - \alpha) = -ctg\alpha.$$

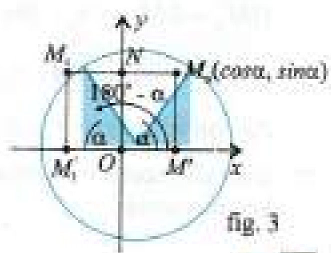


fig. 3

■ Për shembull: $ctg120^\circ = ctg(180^\circ - 60^\circ) = -ctg60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$$sin120^\circ = sin(180^\circ - 60^\circ) = sin60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ç Funksionet trigonometrike për këndet e formës $180^\circ + \alpha$.

■ Prej simetrisë së pikave M_α dhe $M_{180^\circ+\alpha}$ në lidhje me fillimin e koordinatave (fig. 4) kemi: Pika M_α është me koordinata $(cos\alpha, sin\alpha)$, kurse pika $M_{180^\circ+\alpha}$ është me koordinata $(-cos\alpha, -sin\alpha)$.

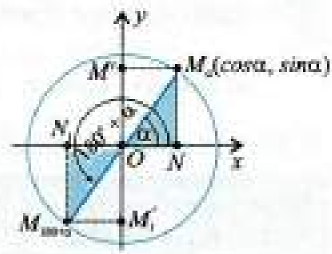


fig. 4

■ Prej këtu vijon:

$sin(180^\circ + \alpha) = -sin\alpha$, $\quad cos(180^\circ + \alpha) = -cos\alpha$.

Për tangensin dhe kotangensin kemi:

$tg(180^\circ + \alpha) = tg\alpha$; $\quad ctg(180^\circ + \alpha) = ctg\alpha$.

■ Për shembull: $cos210^\circ = cos(180^\circ + 30^\circ) = -cos30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$tg240^\circ = tg(180^\circ + 60^\circ) = tg60^\circ = \sqrt{3}.$$

D Funksionet trigonometrike për këndin e formës $90^\circ - \alpha$.

■ T'i shqyrtojmë trekëndëshat ΔONM_α dhe $\Delta OM_{90^\circ-\alpha}N_1$.

$\sphericalangle NOM_\alpha = \sphericalangle M_{90^\circ-\alpha}ON_1$; $\overline{OM}_\alpha = \overline{OM}_{90^\circ-\alpha} = r$ dhe
$\sphericalangle N = \sphericalangle N_1 = 90^\circ$.
Domethënë $\Delta ONM_\alpha \cong \Delta OM_{90^\circ-\alpha}M_1$.

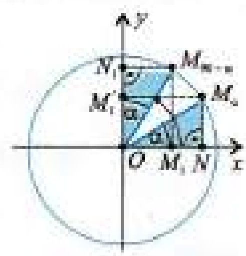


fig. 5

■ Nëse pika M_α është me koordinata (x_α, y_α), atëherë prej puthitshmërisë së trekëndëshave kemi:

$\overline{OM_1} = \overline{NM_\alpha} = y_\alpha$ dhe $\overline{ON_1} = \overline{ON} = x_\alpha$, d.m.th.

$cos(90^\circ - \alpha) = \overline{OM_1} = y_\alpha = sin\alpha$; $\quad sin(90^\circ - \alpha) = \overline{ON_1} = x_\alpha = cos\alpha$;

Për $tg(90^\circ - \alpha) = ctg\alpha$, kurse $ctg(90^\circ - \alpha) = tg\alpha$.

■ Deri në rezultate të njëjta mund të arrihet edhe me shfrytëzimin e vetisë të këndit komplementar.

E Funksionet trigonometrike për këndin e formës $90^\circ + \alpha$.

- $\Delta ONM_\alpha \equiv \Delta OM_1M_{90^\circ+\alpha}$. (Pse?)

Prej puthitshmërisë së trekëndëshave kemi $\overline{OM_1} = \overline{ON} = x_\alpha$ dhe $\overline{ON_1} = \overline{NM_\alpha} = y_\alpha$.

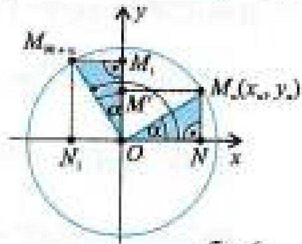


fig. 6

- Prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike sinus dhe kosinus, duke pasur llogari për shenjën e funksioneve në kuadrantin e dytë kemi:

$$cos(90^\circ + \alpha) = -y_\alpha = -sin\alpha,$$

$$sin(90^\circ + \alpha) = x_\alpha = cos\alpha.$$

- Për funksionin $tg(90^\circ + \alpha) = \frac{sin(90^\circ + \alpha)}{cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{cos\alpha}{-sin\alpha} = -ctg\alpha$, kurse

$ctg(90^\circ + \alpha) = -tg\alpha$.

- Vërtetimi i këtyre gjykimeve është i ngjashëm me gjykimet paraprake.
- Për këndet e formëst $270^\circ - \alpha$ kemi:

$sin(270^\circ - \alpha) = -cos\alpha$; $\quad cos(270^\circ - \alpha) = -sin\alpha$;

$tg(270^\circ - \alpha) = ctg\alpha$; $\quad ctg(270^\circ - \alpha) = tg\alpha$.

- Për këndet e formës $270^\circ + \alpha$ kemi:

$sin(270^\circ + \alpha) = -cos\alpha$; $\quad cos(270^\circ + \alpha) = sin\alpha$;

$tg(270^\circ + \alpha) = -ctg\alpha$; $\quad ctg(270^\circ - \alpha) = -tg\alpha$.

Vëre dhe mbaj mend

- Gjatë sjelljes së funksioneve trigonometrike të formës $180^\circ \pm \alpha$ dhe $360^\circ \pm \alpha$ (ndryshimi në lidhje me boshtin x) funksioni nuk ndryshon, kurse shenja do të varet prej asaj në cili kuadrant është krahu i dytë i këndit të dhënë.
- Gjatë sjelljes së funksioneve trigonometrike të formës : $90^\circ \pm \alpha$ dhe $270^\circ \pm \alpha$ (ndryshimi në lidhje me boshtin y) funksioni kalon në kofunksion (sinus në kosinus dhe anasjelltas, tangensi në kotangens dhe anasjelltas), kurse shenja do të varet prej asaj në cilin kuadrant është krahu i dytë i atij këndi.

3 Silli në kënde të ngushtë funksionet trigonometrike prej këndit:

a) 140°; b) 220°; c) 290°; ç) 320°.

Vëre zgjidhjen:

- b) $sin220^\circ = sin(180^\circ + 40^\circ) = -sin40^\circ$; $\quad cos220^\circ = cos(270^\circ - 50^\circ) = -sin50^\circ$;

$tg220^\circ = tg(180^\circ + 40^\circ) = tg40^\circ$; $\quad ctg220^\circ = ctg(180^\circ + 40^\circ) = ctg40^\circ$.

4 Cakto vlerën e funksionit trigonometrik prej këndit:

a) $120°$; b) $240°$; c $1470°$; ç) $-750°$.

Vëre zgjidhjen:

a) $sin120° = sin(90° + 30°) = cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$cos120° = cos(180° - 60°) = -cos60° = -\frac{1}{2}$;

$tg120° = tg(90° + 30°) = -ctg30° = -\sqrt{3}$;

$ctg120° = ctg(180° - 60°) = -ctg60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ç) $sin(-750°) = -sin(2 \cdot 360° + 30°) = -sin30° = -\frac{1}{2}$;

$cos(-750°) = cos750° = cos(2 \cdot 360° + 30°) = cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$tg(-750°) = -tg750° = -tg(2 \cdot 360° + 30°) = -tg30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$ctg(-750°) = -ctg(2 \cdot 360° + 30°) = -ctg30° = -\sqrt{3}$.

5 Njehso vlerën e shprehjes:

a) $sin330° + tg240° + 4cos150° - 3ctg120°$;

b) $\frac{5}{6}cos1320° \cdot ctg2010° - \frac{3}{4}sin945° \cdot tg570°$;

c) $2sin\frac{3\pi}{2} \cdot ctg\frac{5\pi}{2} + 3cos\frac{7\pi}{3} \cdot tg\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Vëre zgjidhjen:

a) $sin(360° - 30°) + tg(180° + 60°) + 4cos(90° + 60°) - 3ctg(90° + 30°) =$

$= -sin30° + tg60° - 4sin60° + 3tg30° = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\frac{1}{2}$.

6 Njehso vlerën e shprehjes:

a) $\frac{sin\alpha - sin\beta}{tg\alpha - ctg\beta}$, nëse $sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$;

b) $\frac{cos\beta + ctg\alpha}{tg\beta - sin\alpha}$, nëse $cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Vëre zgjidhjen:

b) $sin\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$; $sin\beta = sin(90^o - \alpha) = cos\alpha = \frac{3}{5}$;

$cos\beta = cos(90^o - \alpha) = sin\alpha = \frac{4}{5}$; $tg\beta=\frac{sin\beta}{cos\beta}=\frac{3}{4}$;

$ctg\alpha = ctg(90^o - \beta) = tg\beta = \frac{3}{4}$;

$$\frac{cos\beta+ctg\alpha}{tg\beta-sin\alpha}=\frac{\frac{4}{5}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{31}{20}}{-\frac{1}{20}}=-31.$$

7 Vërteto identitetet:

a) $sin(2\pi + \alpha) \cdot ctg(3\pi + \alpha) - cos(2\pi - \alpha) \cdot tg(3\pi - \alpha) = sin\alpha + cos\alpha$;

b) $\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+cos(2\pi-\alpha)\right]^2+\left[sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+sin(\pi-\alpha)\right]^2=2.$

Vëre zgjidhjen:

a) $sin(2\pi + \alpha) \cdot ctg(3\pi + \alpha) - cos(2\pi - \alpha) \cdot tg(3\pi - \alpha) =$

$= sin\alpha \cdot ctg\alpha - cos\alpha \cdot (-tg\alpha) = sin\alpha \cdot \frac{cos\alpha}{sin\alpha} + cos\alpha \cdot \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = cos\alpha + sin\alpha.$

Detyra

1 Njehso vlerën e shprehjes:

a) $sin390^o + tg780^o - 2cos585^o - 3ctg960^o$;

b) $sin\frac{5\pi}{6} - tg\frac{5\pi}{3} + cos\frac{5\pi}{4} + ctg\frac{9\pi}{4}$.

2 Thjeshto shprehjen:

a) $sin(90^o - \alpha) - sin(\alpha - 180^o) + sin(270^o - \alpha) - sin(\alpha - 360^o) + sin\alpha$;

b) $tg(\alpha + 45^o) \cdot tg(45^o - \alpha)$.

3 Vërteto identitetet:

a) $\frac{cos(\alpha+270^o)sin(\alpha-180^o)tg(\alpha-90^o)}{tg(\alpha+270^o)ctg(\alpha-90^o)cos(-\alpha)}=1$;

b) $cos575^o \cdot cos865^o + sin505^o \cdot sin395^o + tg1104^o \cdot tg606^o = 2.$

6 KONCEPTI DHE PËRKUFIZIMI I FUNKSIONIT TRIGONOMETRIK PREJ ARGUMENTIT REAL

Kujtohu!

- Radiani është kënd qëndror, gjatësia harkut përkatës të të cilit është e barabartë me rrezen e vijës rrethore.
- $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} rad$, $1 rad = \frac{180^\circ}{\pi}$.
- Sa është njësia radiale për 360°?
- Njësia radiale e α° le të jetë $x\ rad$, sa është njësia radiale e këndit $\alpha^\circ \pm k \cdot 360^\circ$?

A Prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi vijon se vlerat varen prej koordinatave të pikëprerjes së krahut lëvizës prej këndit dhe vijës rrethore trigonometrike, por nuk varen prej njësisë matëse me të cilën është matur këndi.

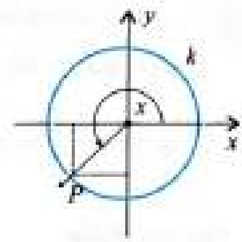


fig. 1

Para se ta përkufizojmë funksionin trigonometrik në bashkësinë e numrave realë do të theksojmë se gjatësia e çfarëdo harku rrethor që e prenë krahu i dytë i këndit prej vijës rrethore trigonometrike i korenspondon një dhe vetëm një numër real, dhe anasjelltas.

Për këtë qëllim shfrytëzohet njësia matëse e gjatësisë për këndin, d.m.th. radiani

Nëse krahu lëvizës i këndit, numri matës i të cilit është $x\ rad$, e prenë vijën rrethore në pikën P,fig. 1, atëherë gjatësia e harkut është x, pasi rrezja e vijës rrethore është e barabartë me 1.

Prej këtu vijon se çdo numri real x mund t'i shoqërohet pikë e vetme P te e cila krahu i dytë prej këndit e prenë vijën rrethore trigonometrike.

Prandaj e kemi këtë:

Përkufizim: Çdo pasqyrim prej R në R të dhënë me $f(x) = sinx$; $f(x) = cosx$; $f(x) = tgx$; $f(x) = ctgx$ quhet **funksion trigonometrik prej argumentit real**.

Funksioni $y = f(x)$ i përkufizuar në bashkësinë D, i cili e ka vetinë që për çdo $x \in D$, ekziston numër T, $T \neq 0$ ashtu që $(x \pm T) \in D$ dhe $f(x \pm T) = f(x)$ quhet funksion periodik me periodë T.

Funksionet trigonometrike $y = sinx$ dhe $y = cosx$ janë periodike me periodë 2π, kurse funksionet $y = tgx$ dhe $y = ctgx$ janë periodike me periodë π.

Funksionet periodike $sinx$ dhe $cosx$ janë edhe numratë: $\pm4\pi$; $\pm6\pi$; ..., por numri 2π quhet periodë themelore e funksionit $y = sinx$ dhe $y = cosx$.

B **1** Vizato grafikun e funksionit:

a) $y = sinx$; b) $y = cosx$ në intervalin $[0, 2\pi]$.

Çdo funksion mund të paraqitet edhe analitikisht (në formë të formulës), tabelarisht dhe grafikisht.

Vëre zgjidhjen:

a) Funksionin $y = sinx$ do ta paraqesim tabelarisht.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Gjatë paraqitjes grafike duhet pasur parasysh se argumenti real është paraqitur në radianë, fig. 2.

Pasi $\pi\, rad \approx 3{,}14$, pra 1 është përafërsisht i barabartë me $\frac{\pi}{3}$, d.m.th.. $\frac{\pi}{3} \approx 1$.

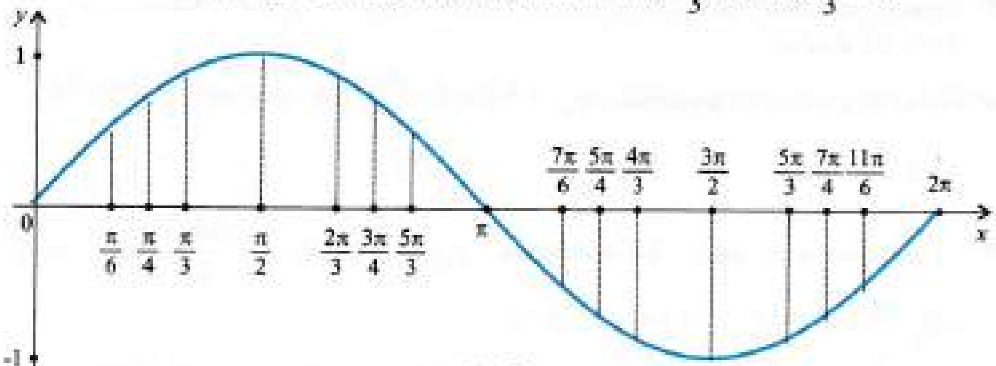


fig. 2

Më tutje për shkak të vizatimit praktik dhe të shpejtë, grafikonët e funksioneve $y = sinx$ dhe $y = cosx$ do t'i vizatojmë me pika karakteristike të funksionit, d.m.th. pikat në të cilat funksioni ka zero, minimum dhe maksimum, fig. 3.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sinx$	0	1	0	-1	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$cosx$	1	0	-1	0	1

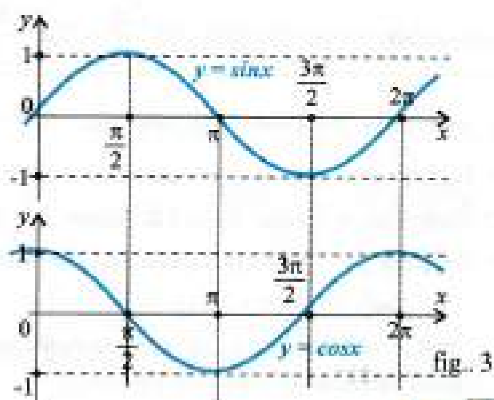


fig.. 3

Pasi $sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=cos\,x$, domethënë grafikun e funksionit $y=cosx$ mund ta vizatojmë ashtu që grafikun e funksionit $y=sinx$ do ta zhvendosim për $\frac{\pi}{2}$ majtas.

Funksioni $y=sinx$ i ka këta veti:

1° Prej përkufizimit të funskionit trigonometrik vijon funksioni $y=sinx$ është **përkufizuar** për çdo numër real, d.m.th. $x\in(-\infty,\infty)$.

2° Funksioni $y=sinx$ është **i kufizuar**, d.m.th. $-1\le sinx\le 1$.

3° Funksioni $y=sinx$ është funksion **periodik** me periodën 2π, d.m.th.
$sin(x+2k\pi)=sinx,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

4° Prej vetisë $sin(-x)=-sinx$ vijon se funksioni $y=sinx$ është tek, pra grafiku i tij është simetrik në lidhje me fillimin e koordinatave.

5° **Zero** të funksionit (vlerat e argumentit për të cilët $sinx=0$) janë $x=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

6° Funksioni $y=sinx$ ka **maksimum** $y_{max}=1$, për $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, pasi $sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1$,

$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

7° Funksioni $y=sinx$ ka **minimum** $y_{min}=-1$, për $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, pasi $sin\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)=-1$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

8° Kujtohu: funksioni sinus në intervalin prej $(0,2\pi)$ rritet në kuadrantin I dhe IV, kurse pastaj zvogëlohet në kuadrantin II dhe III..

Funksioni $y=sinx$ monotonisht rritet nëse $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, kurse monotonisht zvogëlohet nëse $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Funksioni $y=cosx$, i ka këto veti:

1° Funksioni $y=cosx$ është **përkufizuar për çdo numër real, d.m.th.**. $x\in(-\infty,\infty)$.

2° Funksioni $y=cosx$ është **i kufizuar**, d.m.th. $-1\le cosx\le 1$.

3° Funksini $y=cosx$ është **periodik**, me periodën 2π, d.m.th..

$cos(x+2k\pi)=cosx,\ k=0,\pm1$

Pasi $cos(-x)=cosx$, domethënë funksioni $y=cosx$ është çift, d.m.th. grafiku i tij është simetrik në lidhje me boshtin y.

5° **Zerot** e funksionit $y = cosx$ janë në prerjen e boshtit x, d.m.th. $cosx = 0$ për $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ose $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, ...\right\}$.

6° Funksioni $y = cosx$ ka **maksimum**, $y_{max} = 1$, për $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$, d.m.th.

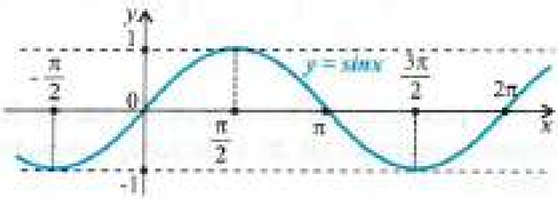
$x \in \{..., -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ...\}$.

7° Funksioni $y = cosx$ ka **minimum**, $y_{min} = -1$, ka $x = (2k + 1)\pi$,

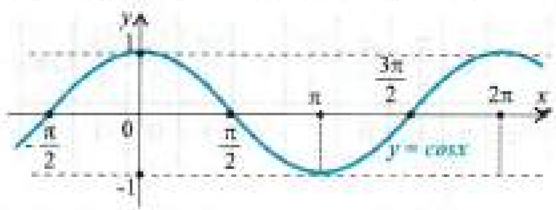
$k = 0, \pm1, \pm2, ...$, d.m.th. $x \in \{..., -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, ...\}$.

8° Funksioni $y = cosx$ monotonisht zvogëlohet nëse $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, kurse monotonisht rritet nëse $x \in (2k\pi - \pi, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Grafikonët e funksioneve $y = sinx$ dhe $y = cosx$ në intervalin $(-\infty, \infty)$ do t'i vizatojmë ashtu që grafiku i cili është në intervalin $(0, 2\pi)$ e zhvendosim në çdo interval me gjatësi 2π, d.m.th. prej $(2\pi, 4\pi)$, $(4\pi, 6\pi)$, $(-2\pi, 0)$ etj. fig. 4..



Grafiku i funksionit $y = sinx$ quhet **sinusoidë**.



Grafiku i funksionit $y = cosx$ quhet **kosinusoida**.

fig 4

C Grafiku dhe vetitë e funksionit $y = tgx$ dhe $y = ctgx$.

Funksioni trigonometrik $y = tgx$ është përkufizuar për $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Fuksioni $y = tgx$ është periodik me periodë π. Që ta vizatojmë grafikun e tij, mjafton ta vizatojmë grafikun në intervalin prej $-\frac{\pi}{2}$ deri $\frac{\pi}{2}$, kurse pastaj e zhvendosim translativisht për gjatësisnë e periodës nëpër boshtin x.

Funksionin $y = tgx$ do ta paraqesim tabelarisht.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
tgx	0	1	∞	-1	0	1	∞	1	0

Grafiku i funksionit $y = tgx$ quhet tangensoida dhe është paraqitur në fig. 5..

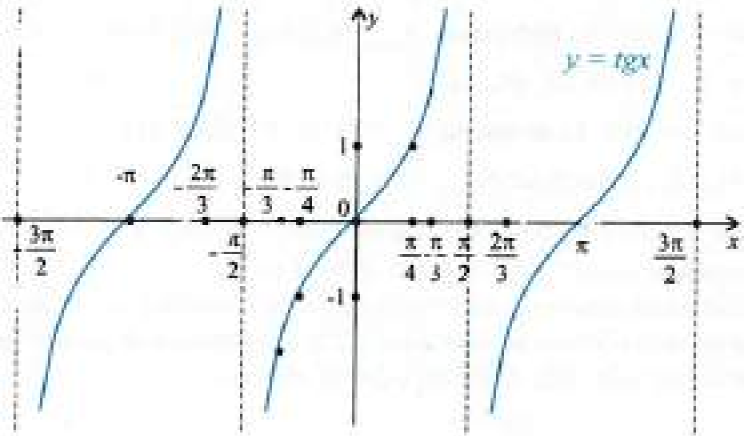


fig. 5

Funksioni $y = ctgx$ është përkufizuar për numrat realë $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ai është periodik π, grafikun e vizatojmë në intervalin $(0, \pi)$, kurse pastaj e zhvendosim për gjatësinë e periodës nëpër boshtin x.

Funksionin $y = ctgx$ do ta paraqesim tabelarisht.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$ctgx$	∞	1	0	-1	∞	1	0	-1	0

Grafiku i funksionit $y = ctgx$ quhet kotangensoida dhe është paraqitur në fig. 6.

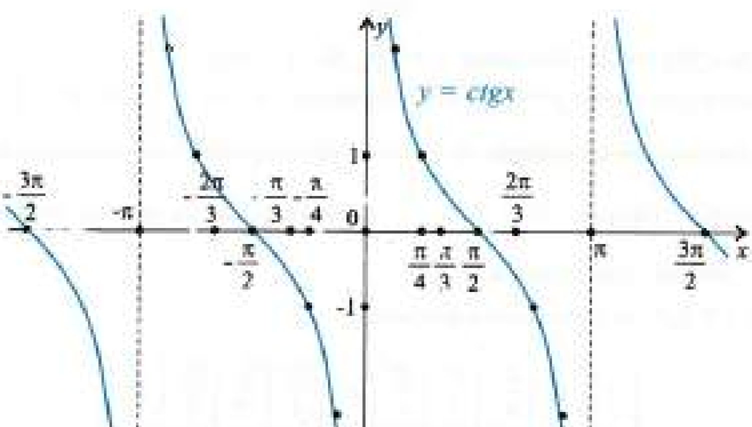


fig. 6

Vëre, funksioni $y = tgx$ është i pavijueshëm në pikat e boshtit x, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kurse $y = tgx$ i vijueshëm në pikat $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Grafiku i funksionit $y = tgx$ quhet **tangensoida**, kurse i funksionit $y = ctgx$, **kotangensoida**.

Vetitë e funksionit $y = tgx$.

1° Funksioni $y = tgx$ është përkufizuar për çdo numër real $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2° Funksioni është **i pakufizuar,** d.m.th. $-\infty < tgx < +\infty$.

3° Funksioni është **periodik**, me periodë π, d.m.th. $tg(x + k\pi) = tgx$, $k \in \mathbb{Z}$.

4° Pasi $tg(-x) = -tgx$, domethënë funksioni $y = tgx$ është **tek.**

5° **Zerotë** e funksionit janë $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d.m.th. $x \in \{..., -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ...\}$.

6° Funksioni $y = tgx$ **rritet** në intervalin $(-\infty, +\infty)$.

7° Drejtëzat $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ janë **asimptotat** vertikale të tangensoidës.

Vetitë e funksionit $y = ctgx$.

1° Funksioni $y = ctgx$ është përkufizuar për çdo numër real $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, ...$

2° Funksioni është i **pakufizuar**, d.m.th. $-\infty < ctgx < +\infty$.

3° Funksioni është **periodik**, me periodën π, d.m.th. $ctg(x + k\pi) = ctgx$, $k \in \mathbb{Z}$.

4° Funksioni është **tek**, d.m.th. $ctg(-x) = -ctgx$.

5° **Zerotë** e funksionit janë dhënë me barazimet $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, ...$

6° Funksioni $y = ctgx$ **zvogëlohet** në intervalin $(-\infty, +\infty)$.

7° Drejtëzat $x = kp$, $k \in Z$ janë **asimptotat** vertikale të kotangensoidës.

7 GRAFIKU DHE VETITË E FUNKSIONEVE $y = asin(x + c)$ dhe $y = acos(x + c)$

A Funkcsioni $y = sinx$ është i kufizuar, d.m.th.. $-1 \leq sinx \leq 1$, edhe funksioni $y = asinx$ është i kufizuar, d.m.th. $-|a| \leq asinx \leq |a|$, $a \in \mathbb{R}$. E njëjta vlen edhe për funksionin $y = acosx$, d.m.th. $-|a| \leq cosx \leq |a|$. Grafiku i funksionit $y = asinx$ dhe $y = acosx$ gjenden ndërmjet drejtëzave $y = a$ dhe $y = -a$.

Numri a quhet amplituda e funksioneve.

1 Vizato grafikun e funksioneve:

a) $y = 2sinx$; b) $y = \frac{1}{2}cos x$; c) $y = -2cosx$.

a) Grafikun e funksionit $y = 2sinx$ do ta vizatojmë në këtë mënyrë:

1° E vizatojmë grafikun $y = sinx$;

2° E vizatojmë grafikun $y = 2sinx$, ashtu që amplitudën e grafikut paraprak e zmadhojmë dy herë, fig. 1.

a)

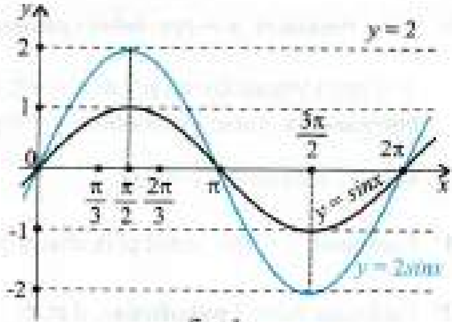


fig. 1

b) Grafikun e funksionit $y = \frac{1}{2}\cos x$ do ta vizatojmë në këtë mënyrë:

1° E vizatojmë grafikun $y = cosx$;

2° E vizatojmë grafikun $y = \frac{1}{2}\cos x$, ashtu që amplitudën e grafikut paraprak e zvogëlojmë dy herë.

c) Funksioni $y = -2cosx$ është vizatuar ashtu që amplituda e funksionit themelor $y = cosx$ është shumëzuar me -2.

b), c)

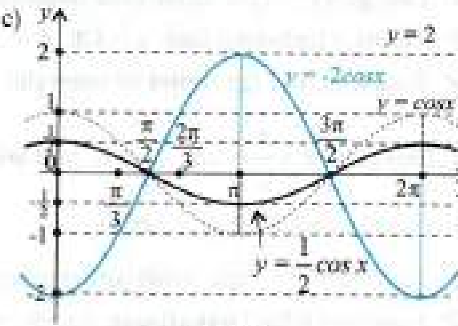


fig.. 2

2 Grafikisht paraqiti funksionet:

a) $y = \frac{1}{2}\sin x$; b) $y = -2sinx$; c) $y = 2cosx$; ç) $y = -\frac{1}{2}\cos x$.

B Funksioni $y = sin(x + c)$ ka veti të njëjta 1°, 2° dhe 3° sikurse funksioni $y = sinx$.

- Zerot e funksionit përcaktohen me zgjidhjen e barazimit $x + c = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Maksimumin e funksionit e fitojmë prej barazimit $x + c = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Minimumin e funksionit e fitojmë prej barazimit $x + c = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Grafiku i funksionit $y = sin(x + c)$ mund të konstruktohet me ndihmën e grafikut të funksionit $y = sinx$, me zhvendosjen paralele të të njëjtit majtas për vlerën c nëse $c > 0$, ose djathtas nëse $c < 0$.

3 Grafikisht paraqite funksionin:

a) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; b) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

a) E vizatojmë grafikun e funksionit $y = sinx$, kurse pastaj me zhvendosjen paralele të atij grafikoni për $\frac{\pi}{6}$ majtas $\left(c = \frac{\pi}{6} > 0\right)$ fitohet grafiku i funksionit $y = sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, fig. 3

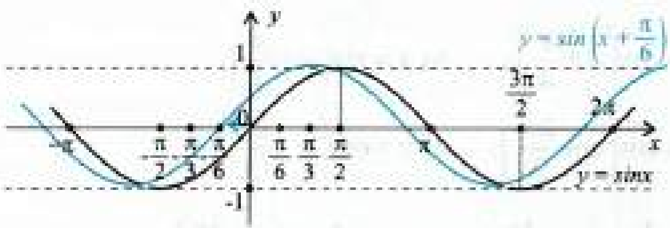


fig. 3

Numri c tregon për sa duhet të zhvendoset grafiku i funksionit $y = sinx$, nëpër boshtin x. Zhvendosja e këtillë quhet **zhvendosja e fazës**. Për sa duhet të zhvendoset grafiku, ajo në realitet është zgjidhja e barazimit $x + c = 0$, d.m.th. $x = -c$.

Në rastin e dhënë $x + \frac{\pi}{6} = 0$, d.m.th. $x = -\frac{\pi}{6}$ është faza fillestare.

b) Grafikun e funksionit $y = 2cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ do ta vizatojmë me zhvendosjen e grafikut të funksionit $y = 2cosx$ për $\frac{\pi}{3}$ djathtas, pasi prej $x - \frac{\pi}{3} = 0$ vijon $x = \frac{\pi}{3}$ është faza fillestare, fig. 4.

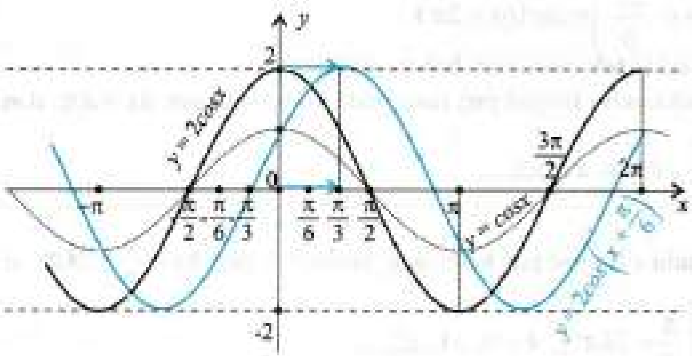


fig. 4

4 Vizato grafikun e funksioneve:

a) $y = -2sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; b) $y = \frac{3}{2}cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Detyra

Grafikisht paraqiti funksionet:

1 a) $y = -sinx$; b) $y = \frac{1}{2} sinx$; c) $y = -\frac{1}{2} cosx$; ç) $y = 3cosx$.

2 a) $y = cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; b) $y = sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $y = cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$; ç) $y = cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

3 a) $y = \frac{1}{2} sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$; b) $y = -\frac{3}{2} cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

8 GRAFIKU DHE VETITË E FUNKSIONEVE $y = asinbx$ dhe $y = acosbx$

A Funksioni $y = sinbx$ i ka këto veti:

1° **I përkufizuar** është për çdo numër real x.

2° Funksioni është **i kufizuar**, d.m.th. $-1 \leq sinbx \leq 1$.

3° Funksioni $y = sinbx$ është **periodik** me periodën $\frac{2\pi}{b}$, pasi $sinb\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) =$

$= sin\left(bx + b \cdot \frac{2\pi}{b}\right) = sin(bx + 2\pi)$.

4° Funksioni është **tek**, pasi $sin(-bx) = -sinbx$.

5° **Zerot** e funksionit i fitojmë prej barazimit: $sinbx = 0$ për $bx = k\pi$, d.m.th.

për $x = \frac{k\pi}{b}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6° **Maksimumin** e fitojmë prej barazimit: $sinbx = 1$ për $bx = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, d.m.th.

për $x = \frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7° **Minimumin** e fitojmë prej barazimit: $sinbx = -1$ për $bx = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, d.m.th.

për $x = \frac{1}{b}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

1 Vizato grafikun e funksioneve: a) $y=\frac{3}{2}\sin 2x$; b) $y=\sin\frac{x}{2}$.

a) Grafikun e funksionit $y=\frac{3}{2}\sin 2x$ do ta vizatojmë në këtë mënyrë:

1. E vizatojmë grafikun e funksionit $y=\sin x$.

2. E vizatojmë grafikun e funksionit $y=\frac{3}{2}\sin x$.

3. Perioda e funksionit $y=\frac{3}{2}\sin 2x$ është $\frac{2\pi}{b}=\pi$.

Domethënë, në lidhje me sinusoidën, grafiku i funksionit $y=\frac{3}{2}\sin 2x$ është „i ngjeshur" në drejtim të boshtit x, d.m.th. një periodë e sinusoidës $(0, 2\pi)$ do të jetë „e ngjeshur" në intervalin $(0, \pi)$, fig. 1.

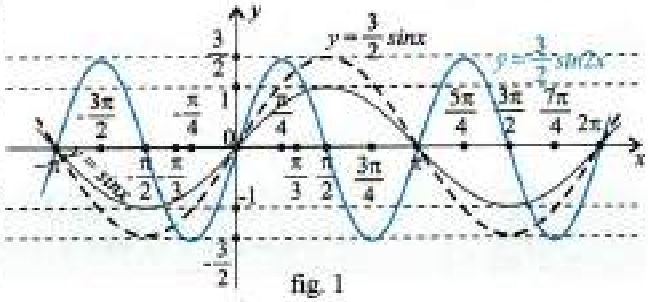


fig. 1

B **2** Vizato grafikun e funksioneve: a) $y = 2\cos\frac{x}{2}$; b) $y = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

Vëre zgjidhjen:

a) Grafikun e funksionit $y = 2\cos\frac{x}{2}$ do ta vizatojmë në këtë mënyrë.

1. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = \cos x$.

2. E vizatojmë grafikun $y = 2\cos x$. **3.** Perioda e funksionit është $\frac{2\pi}{b} = 4\pi$.

Domethënë, në lidhje me funksionin $y = 2\cos x$ grafiku do të jetë „i zgjatur" në drejtim të boshtit x, d.m.th. perioda $(0, 2\pi)$ e kosinusoidës do të jetë e zgjatur në intervalin $(0, 4\pi)$, fig. 2.

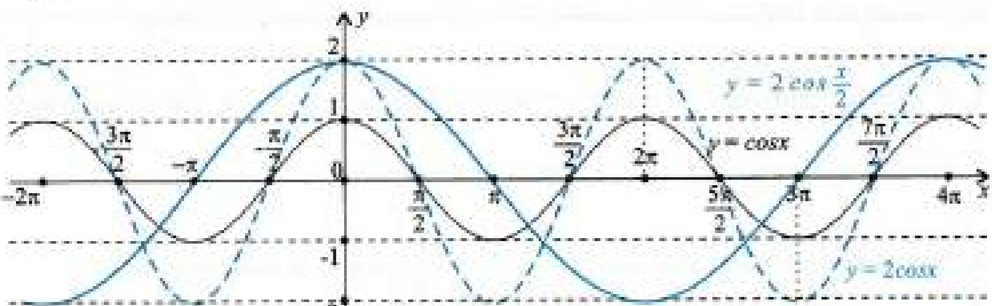


fig. 2

Vetitë e funksionit $y = 2cos\frac{x}{2}$ janë:

1° $D_f: x \in \mathbb{R}$.   2° $V_f: y \in [-2, 2]$.   3° Funksioni është çift, pasi $2cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 2cos\frac{x}{2}$.   4° $y = 0$ për $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.   5°. $y_{max} = 2$ për $x = 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.   6° $y_{min} = -2$ për $x = 2\pi + 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;   7° Funksioni është periodik me periodën 4π.

Detyra

Vizato grafikun e funksioneve:

1. a) $y = sin3x$;   b) $y = sin\frac{x}{3}$;   c) $y = 2sin\frac{x}{2}$;   ç) $y = -\frac{1}{2}sin2x$.

2. a) $y = cos3x$;   b) $y = cos\frac{x}{3}$;   c) $y = \frac{1}{2}cos\frac{2x}{3}$;   ç) $y = -\frac{3}{2}cos2x$.

9 GRAFIKËT E FUNKSIONEVE $y = asin(bx + c)$ dhe $y = acos(bx + c)$

- Funksioni $y = asin(bx + c)$, mund të shkruhet në këtë formë:

$$y = a\,sin\,b\left(x + \frac{c}{b}\right).$$

- Numri a e cakton amplitudën e funksionit.
- Numri b e cakton frekuencën (dendësinë), d.m.th. periodën e funksionit,

$$T = \frac{2\pi}{b}.$$

- Shprehja $bx + c$ quhet faza e funksionit të dhënë. Vlera e fazës për $x = 0$, është numri c i cili quhet faza fillestare.
- Numri $\frac{c}{b}$ është zhvendosja e fazës.

Sipas grafikut të funksionit $y = asin(bx + c)$ do ta vizatojmë në këtë mënyrë:

1. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = sinx$.

2. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = asinbx$, ashtu që periodën $(0, 2\pi)$ e sinusoidës e zhvendosim („e ngjeshim'' ose „e zgjasim'') në periodën $\left(0, \frac{2\pi}{b}\right)$.

3. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = sinb\left(x + \frac{c}{b}\right)$, ashtu që grafikun paraprak e zhvendosim nëpër boshtin x për vlerat e $\frac{c}{b}$, majtas nëse $\frac{c}{b}>0$, ose djathtas nëse $\frac{c}{b}<0$.

4. Amplitudën e funksionit paraprak e zmadhojmë, e zvogëlojmë a herë.

1 Vizato grafikun e funksioneve:

a) $y=sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$; b) $y=-\frac{3}{2}sin\left(3x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Vëre zgjidhjen:

1. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = sinx$.

2. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = sin2x$, ashtu që periodën $(0, 2\pi)$ të sinusoidës „e ngjeshim'' në periodën prej $(0, \pi)$.

3. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = sin2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, ashtu që grafikun e funksionit paraprak e zhvendosim për $\frac{\pi}{6}$ majtas.

4. Vëre, $a = 1$.

Grafiku i funksionit të dhënë është paraqitur në fig..1.

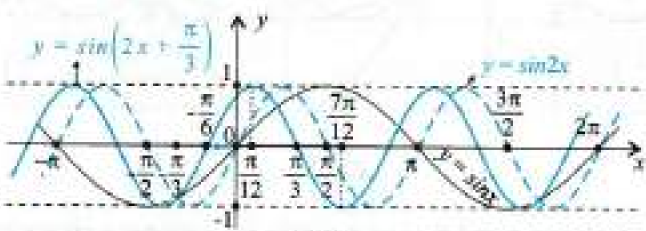


fig. 1

2 Vizato grafikun e funksionit:

a) $y=3cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; b) $y=\frac{1}{2}cos(3x-\pi)$.

Vëre zgjidhjen:

a) Prej funksionit të dhënë $y=3cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; $\left(a=3, b=\frac{1}{2}, c=\frac{\pi}{4}\right)$ vijon:

- $a = 3$, domethënë grafiku është ndërmjet drejtëzave $y = 3$ dhe $y = -3$.
- Perioda e funksionit është $T = 4\pi$.
- Zhvendosja e fazës është $\frac{c}{b}=\frac{\pi}{2}$.

Grafikun e funksionit të dhënë do ta vizatojmë në këtë mënyrë.

1. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = cosx$.

2. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = cos\frac{x}{2}$, ashtu që grafikun paraprak që është në intervalin $(0, 2\pi)$ e „zgjasim'' në intervalin $(0, 4\pi)$.

3. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ ashtu që grafikun paraprak e zhvendosim për $\frac{\pi}{2}$ (zhvendosje fazore) majtas.

4. Grafikun e kërkuar të funksionit $y = 3cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ e fitojmë ashtu që amplitudën e zmadhojmë për 3 herë.Grafiku është paraqitur në fig.2.

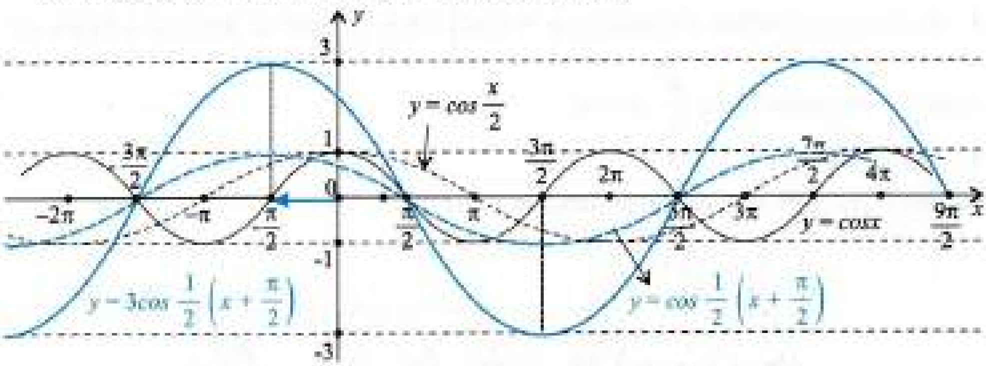


fig. 2

Grafiku i çdo funksioni mund të vizatohet edhe me caktimin e pikave karakteristike të funksionit, d.m.th. me caktimin e zerove të funksionit, të pikave ku funksioni ka minimum, përkatësisht maksimum.

Për funksionin $y = sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ kem:

Zero $y = 0$:	**max:** $y = 1$:	**min:** $y = -1$:
$2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$	$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$	$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$
k = 0 $x=-\frac{\pi}{6}=-\frac{2\pi}{12};$	**k = 0** $x=\frac{\pi}{12};$	**k = 0** $x=\frac{7\pi}{12};$
k = 1 $x=\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{12};$	**k = -1** $x=-\frac{11\pi}{12};$	**k = 1** $x=\frac{19\pi}{12};$
k = -1 $x=-\frac{2\pi}{3}=-\frac{8\pi}{12};$	**k = 1** $x=\frac{13\pi}{12};$	**k = -1** $x=-\frac{5\pi}{12}.$

Grafiku i funksionit është paraqitur në fig. 3.

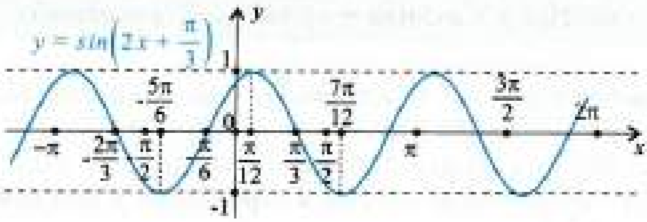


fig. 3

Për funksionin $y = 3cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Zerotë janë $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}$.

2. $y_{max} = 3$ për $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots\right\}$.

3. $y_{min} = -3$ për $x \in \left\{-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$.

Grafiku i funksionit është paraqitur në fig.4.

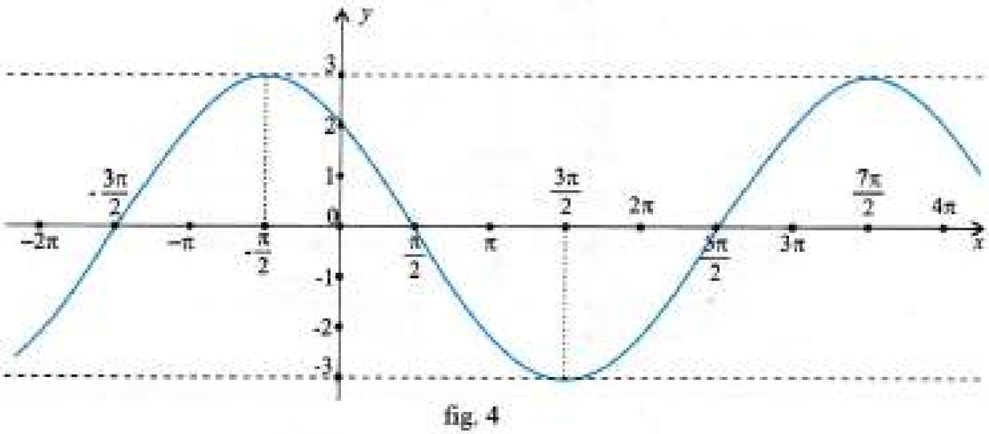


fig. 4

Detyra

Vizato grafikun e funksioneve:

1 a) $y = cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; b) $y = sin\left(\frac{4x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.

2 a) $y = cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $y = -\frac{1}{2}sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

10 GRAFIKËT E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE TË FORMËS $y = asin(bx + c) + d$ dhe $y = acos(bx + c) + d$

Numrin d e zmadhojmë (nëse $d > 0$), e zvogëlojmë (nëse $d < 0$) ordinatat e çdo pike prej grafikut të funksionit $y = asin(bx + c)$ ose $y = acos(bx + c)$.
Grafiku vizatohet ashtu që grafikun e funksionit $y = asin(bx + c)$ ose $y = acos(bx + c)$ e zhvendosim për vlerën e d nëpër boshtin y lartë nëse $d > 0$, poshtë nëse $d < 0$.

1 Vizato grafikun e funksioneve:

a) $y = \frac{3}{2} \sin x + 2$; b) $y = -2cosx + 1$.

Vëre zgjidhjen:

a) **1.** E vizatojmë grafikun $y = sinx$;

2. E vizatojmë grafikun $y = \frac{3}{2} \sin x$.

3. $d = 2$, pra grafikun paraprak e zhvendosim për 2 njësi nëpër boshtin y lartë, fig. 1.

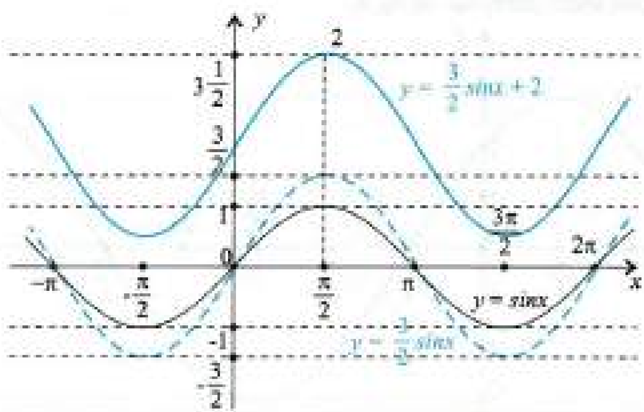


fig. 1

b) Grafiku i funksionit $y = -\frac{1}{2} cosx + 1$ është paraqitur në fig. 2.

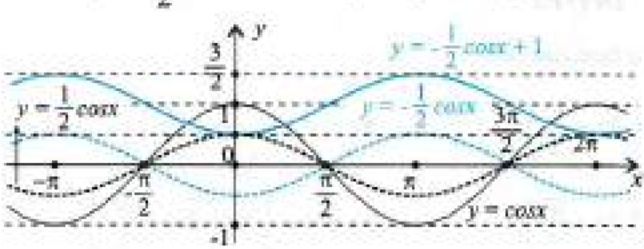


fig. 2

2 Vizato grafikun e funksioneve: a) $y=\frac{3}{2}sin2x-1$; b) $y=2cosx-1$.

3 Vizato grafikun e funksioneve: a) $y=sin2x-1$; b) $y=2cos\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$.

Vëre zgjidhjen:

a) E vizatojmë grafikun e funksionit $y=sin2x$, kurse pastaj grafikun vertikalisht e zhvendosim për $d=-1$, (fig .3).

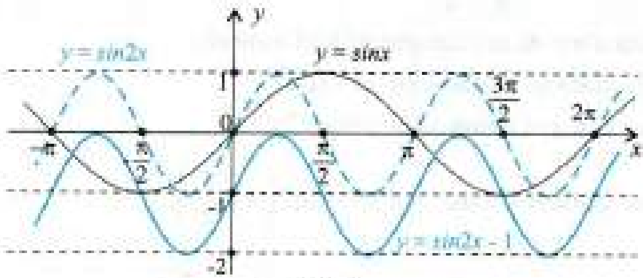


fig. 3

b) E vizatojmë grafikun e funksionit $y=2cos\frac{x}{2}$, kurse pastaj nëpër boshtin y, lartë e zhvendosim për $d=1\frac{1}{2}$, fig. 4.

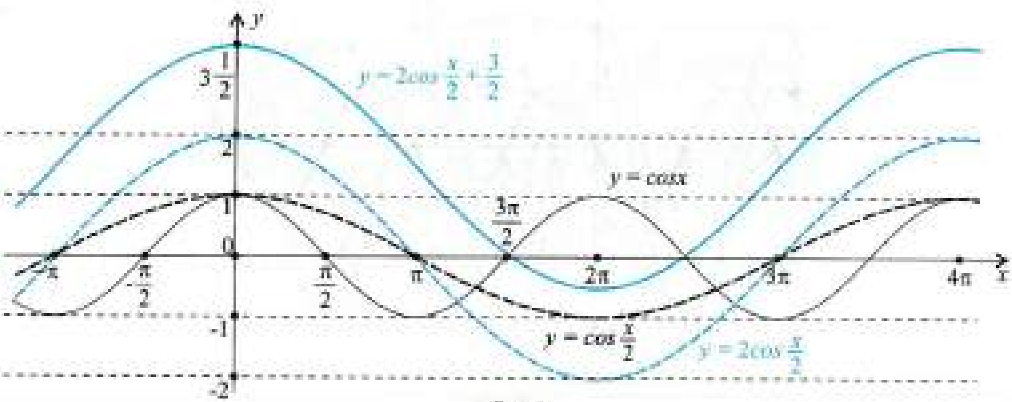


fig. 4

4 Vizato grafikun e funksioneve: a) $y=2sin\frac{x}{2}-2$; b) $y=-cos2x-1$.

5 Vizato grafikun e funksioneve:

a) $y=2sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-1$; b) $y=\frac{3}{2}cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1$.

Vëre zgjidhjen:

a) Vëre $a = 2$; $b = 2$; $c = \dfrac{\pi}{2}$ dhe $d = -1$.

- Perioda e funksionit është $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.
- Zhvendosja fazore është $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\pi}{4}$.
- Grafikun e funksionit do ta vizatojmë në këtë mënyrë:

1. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = sinx$.

2. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = sin2x$.

3. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = sin2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = 2sin2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. E vizatojmë grafikun e funksionit $y = 2sin2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$-1.

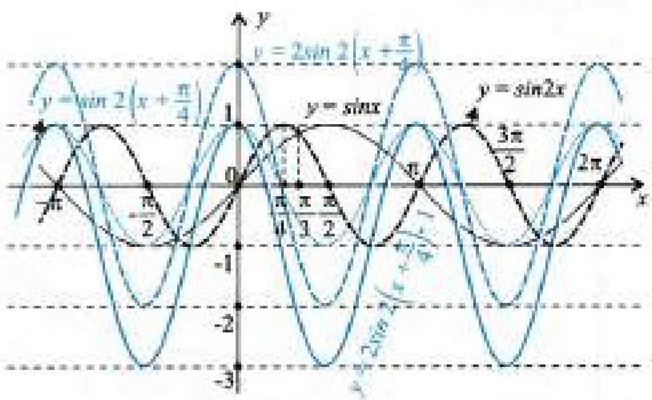


fig. 5

b) E vizatojmë grafikun e funksionit $y = \dfrac{3}{2}cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$, me ndihmën e grafikut të funksionit $y = \dfrac{3}{2}cos\,x$, të cilin e zhvendosim për $\dfrac{\pi}{6}$ djathtas. Grafikun e atillë të fituar e zhvendosim nëpër boshtin y për $d = -1$ poshtë.

Grafikun e funksionit vizatoje vet.

Detyra

Grafikisht paraqiti funksionet:

1. a) $y = -2\sin x + 1$;   b) $y = \frac{1}{2}\cos x - 2$.

2. a) $y = 3\sin\frac{x}{2} - 1$;   b) $y = -2\cos 2x + 1$.

3. a) $y = -\frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$;   b) $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

11 FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE SINUS DHE KOSINUS TË SHUMËS DHE NDRYSHIMIT TË DY KËNDEVE

Kujtohu!

- Për vlerat e funksioneve trigonometrike prej 30°, 60°, 45°.
- Për përkufizimin e funksioneve trigonometrike prej këndit të ngushtë në trekëndëshin kënddrejtë.
- Këndet me krahë reciprokisht paralele janë të barabartë ose suplementap.
- Si janë këndet me krahë reciprokisht normal.
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

A 1 Provo saktësinë e barasisë.

$$\sin(30^\circ + 90^\circ) = \sin 30^\circ \cos 90^\circ + \sin 90^\circ \cos 30^\circ$$

Vëre zgjidhjen:

$$\sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot 0 + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ose } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Domethënë, barasia është e saktë.
Për sinusin dhe kosinusin prej shumës dhe ndryshimit të dy këndeve vlen kjo

Teoremë. Nëse α dhe β janë çfarëdo dy kënde, atëherë:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Vërtetimi. Le të jenë α dhe β kënde qëndrore në vijën rrethore trigonometrike, të cilët nuk kanë fushë të brendshme të përbashkët, por kanë krah të përbashkët OP dhe rreze $\overline{OM} = 1$ fig. 1.

- Konstruktojmë $MN \perp OP$, $MA \perp OX$, $NB \perp OX$ dhe $NC \perp MA$.

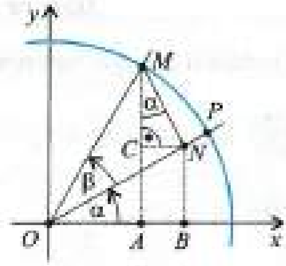


fig. 1

- Sipas përkufizmit të sinusit prej çfarëdo këndi, vijon:

$$sin(\alpha + \beta) = \overline{MA} = \overline{MC} + \overline{CA} = \overline{MC} + \overline{NB},$$

pasi $\overline{CA} = \overline{NB}$.

- Prej ΔOBN vijon $sin\alpha = \dfrac{\overline{NB}}{\overline{ON}}$, d.m.th. $\overline{NB} = \overline{ON}\, sin\alpha$.

Pej ΔONM vijon $cos\,\beta = \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OM}}$, d.m.th. $cos\,\beta = \overline{ON}$, pasi $\overline{OM} = 1$.

Nga të dy barasitë vijon $\overline{NB} = cos\,\beta\, sin\,\alpha$.

- $\sphericalangle NMC = \alpha$ (si kënde me krah normale).
- Prej ΔMCN vijon $cos\,\alpha = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{MN}}$, d.m.th. $\overline{MC} = \overline{MN}\, cos\,\alpha$.
- Prej ΔONM vijon $sin\,\beta = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{OM}} = \overline{MN}$, pra $\overline{MC} = sin\,\beta\, cos\,\alpha$.

Prandaj $sin(\alpha + \beta) = \overline{MC} + \overline{NB} = sin\beta cos\alpha + cos\beta sin\alpha$, d.m.th.

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha.$$

2 Njehso vlerën e funksionit trigonometrik:

a) $sin75°$, b) $sin105°$, c) $sin240°$.

Vëre zgjidhjen:

a) $sin75° = sin(45° + 30°) = sin45°cos30° + sin30°cos45° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

- Teoremën $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$ vërtetoje vet, në të njëjtën mënyrë sikurse teoremën paraprake.
- Teoremën e njëjtë do ta vërtetojmë duke shfrytëzuar vetinë e këndeve komplementare,

d.m.th. prej $cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin\alpha$, kemi $cos(a + b) = sin\left[\dfrac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] =$

$$= sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (-\beta)\right] = sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)cos(-\beta) + sin(-\beta)cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$= cos\alpha cos\beta - sin\beta sin\alpha$, d.m.th.

$$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta.$$

3 Njehso: a) $cos75°$, b) $cos105°$, c) $cos150°$.

Vëre zgjidhjen:

b) $cos105° = cos(60° + 45°) = cos60°cos45° - sin60°sin45° =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right).$$

B Për sinusin dhe kosinusin prej ndryshimit të dy këndeve vlen kjo

Teoremë. nëse α dhe β janë çfarëdo dy kënde, atëherë

$$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha cos\beta - sin\beta cos\alpha$$

$$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$

Vërtetimi. Pasi $sin(-\alpha) = -sin\alpha$, $cos(-\alpha) = cos\alpha$, kemi $sin(\alpha - \beta) = sin[\alpha + (-\beta)] = sin\alpha cos(-\beta) + sin(-\beta)cos\alpha = sin\alpha cos\beta - sin\beta cos\alpha$.

Teoremën e dytë vërtetoje vet.

4 Cakto vlerën e $sin15°$ dhe $cos15°$, pa përdorimin e kalkulatorit.

Vëre zgjidhjen:

a) $sin15° = sin(45° - 30°) = sin45°cos30° - sin30°cos45° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

5 Vërteto:

a) $sin(180° - a) = sina$, b) $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -sin\alpha$;

c) $sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -cos\alpha$, ç) $cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -sin\alpha$.

Vëre zgjidhjen:

c) $sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = sin\frac{3\pi}{2}cos\alpha - sin\alpha cos\frac{3\pi}{2} = (-1)cos\alpha - sin\alpha \cdot 0 = -cos\alpha$.

6 Njehso: a) $sin(\alpha + \beta)$; b) $cos(\alpha - \beta)$ nëse është $sin\alpha = \frac{1}{2}$, $cos\beta = \frac{3}{5}$, $0° < \alpha, \beta < 90°$.

Vëre zgjidhjen:

a) Pasi $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha$, duhet të njehsohet $cos\alpha$ dhe $sin\beta$. Prej varësive themelore trigonometrike, kemi.

$$cos\,\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Në të njëjtën mënyrë njehsohet $sin\,\beta = \sqrt{1 - cos^2\beta} = \frac{4}{5}$.

Prandaj $sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{10}(3 + 4\sqrt{3})$.

7 Njehso: a) $cos(\alpha + \beta)$, b) $sin(\alpha - \beta)$ ако $sin\,\alpha = \frac{4}{5}$ dhe $sin\,\beta = -\frac{2}{3}$, kurse

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ dhe $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Vëre zgjidhjen:

a) Duhet të njehsohet $cos\alpha$ dhe $cos\beta$. Pasi $cos\alpha < 0$ në kuadrantin e tretë kemi

$$cos\,\alpha = -\sqrt{1 - sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$, ngjashëm $cos\,\beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Prandaj:

$$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) - \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{15}(3\sqrt{5} + 8).$$

8 Thjeshto shprehjen:

a) $sin55^\circ sin65^\circ - sin25^\circ sin35^\circ$; b) $cos70^\circ cos75^\circ + cos20^\circ cos5^\circ$.

Vëre zgjidhjen:

a) Pasi $sin55^\circ = sin(90^\circ - 35^\circ) = cos35^\circ$ dhe $sin65^\circ = cos25^\circ$, kemi:

$$sin55^\circ sin65^\circ - sin25^\circ sin35^\circ = cos35^\circ cos25^\circ - sin25^\circ sin35^\circ =$$

$$= cos(35^\circ + 25^\circ) = cos60^\circ = \frac{1}{2}.$$

9 Vërteto identitetet:

a) $sin(30^\circ - \alpha) + sin(30^\circ + \alpha) = cos\alpha$; b) $cos(60^\circ + \alpha) + cos(60^\circ - \alpha) = cos\alpha$.

Vëre zgjidhjen:

a) $sin(30^\circ - \alpha) + sin(30^\circ + \alpha) = sin30^\circ cos\alpha - sin\alpha cos30^\circ + sin30^\circ cos\alpha + sin\alpha cos30^\circ =$

$= 2sin30^\circ cos\alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} cos\alpha = cos\alpha$.

Mbaj mend!

Teoremat:

$sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm sin\beta cos\alpha$ dhe $cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta$

quhen teoremat adicionale.

Detyra

1. Njehso $cos(\alpha - \beta)$, nëse është $sin\alpha = \frac{3}{4}$, $sin\beta = \frac{2}{3}$ (α dhe β janë kënde të ngushtë).

2. Njehso $sin(\alpha + \beta)$, nëse $sin\alpha = \frac{4}{5}$, $sin\beta = \frac{24}{25}$ (α dhe β janë kënde të ngushtë).

3. Njehso $cos(\alpha - \beta)$, ако $cos\alpha = -0{,}96$, $sin\beta = -\frac{12}{13}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

4. Cakto $sin\alpha$, nëse $\alpha + \beta = 60^\circ$, $cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Thjeshtoji shprehjet:

5. a) $sin20^\circ cos10^\circ + sin10^\circ cos20^\circ$; b) $cos35^\circ cos25^\circ - sin35^\circ sin25^\circ$.

6. $sin(\alpha + 15^\circ)sin(\alpha - 15^\circ) + cos(\alpha + 15^\circ)cos(\alpha - 15^\circ)$.

7. $\dfrac{sin20^\circ cos40^\circ - sin40^\circ cos20^\circ}{cos75^\circ cos75^\circ - cos5^\circ cos15^\circ}$.

Vërtetoji identitetet:

8. $cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta) = 2sin\alpha sin\beta$.

9. $cos(\alpha - \beta) \cdot cos(\alpha + \beta) = cos^2\alpha - sin^2\beta$.

12 FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE TANGENS DHE KOTANGENS PREJ SHUMËS DHE NDRYSHIMIT TË DY KËNDEVE

Kujtohu!

- $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$; $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$
- Për vlerat e funksioneve trigonometrike prej 30°, 45°, 60°.
- Vëre: $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{\frac{a}{m} + \frac{b}{m}}{\frac{c}{m} + \frac{d}{m}}$, $m \neq 0$.
- $tg(-\alpha) = -tg\alpha$; $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$.

A Për tangensin prej shumës dhe ndryshimit të dy këndeve vlen kjo

Teoremë: Nëse α dhe β janë çfarëdo dy kënde, të atillë që

$$\alpha, \beta, \alpha+\beta, \alpha-\beta \notin \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}, \text{ atëherë}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}; \quad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Vërtetimi: $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{sin(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$.

- Numëruesin dhe emëruesin e pjesëtojmë me $cos\alpha\cdot cos\beta$.

$$\frac{\dfrac{sin\alpha\cos\beta}{cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{sin\beta\cos\alpha}{cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha\cos\beta}{cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{sin\alpha\sin\beta}{cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}.$$

- Pjesën e dytë të teoremës vërtetoje vet duke e shfrytëzuar vetinë $tg(-\beta)=-tg\beta$.

1 Cakto vlerat e: a) $tg105°$; b) $tg15°$; c) $tg135°$.

Vëre zgjidhjen:

- $tg105° = tg(45° + 60°) = \dfrac{tg45°+tg60°}{1-tg45°\cdot tg60°}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-\left(2+\sqrt{3}\right)$

2 Njehso: a) $tg(60° - \alpha)$, nëse $ctg\alpha=\dfrac{3}{4}$; b) $tg(45° + \alpha)$, nëse $sin\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Vëre zgjidhjen:

- b) $cos\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, kurse $tg\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, pra

$$tg(45°+\alpha)=\frac{tg45°+tg\alpha}{1-tg45°\cdot tg\alpha}=\frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Për kotangensin prej shumës dhe ndryshimit të dy këndeve vlen kjo

Teoremë: Nëse α dhe β janë çfarëdo dy kënde të atillë që

$$\alpha, \beta, \alpha+\beta, \alpha-\beta \notin \{\pi+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\}, \text{ atëherë}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}; \quad ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

a) Vërtetimi është identik me vërtetimin e teoremës paraprake.

Të njëjtën teoremë do ta vërtetojmë:

a) duke e shfrytëzuar vetinë e këndeve komplementare, d.m.th. prej $ctg(90^\circ - \alpha) = tg\alpha$, kemi:

$$ctg(\alpha + \beta) = tg[90^\circ - (\alpha + \beta)] = tg[(90^\circ - \alpha) - \beta] = \frac{tg(90^\circ - \alpha) - tg\beta}{1 + tg(90^\circ - \alpha) \cdot tg\beta} =$$

$$= \frac{ctg\alpha - tg\beta}{1 + ctg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{ctg\alpha - \frac{1}{ctg\beta}}{1 + ctg\alpha \cdot \frac{1}{ctg\beta}} = \frac{ctg\alpha ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}.$$

b) Duke e shfrytëzuar barasinë $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$ (vërtetoje vet).

3 Cakto: a) $ctg15^\circ$; b) $ctg75^\circ$; c) $ctg330^\circ$.

Vëre zgjidhjen:

b) $ctg75^\circ = ctg(45^\circ + 30^\circ) = \dfrac{ctg45^\circ ctg30^\circ - 1}{ctg45^\circ + ctg30^\circ} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

4 Vërteto se:

a) $tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$; b) $ctg\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\alpha$; c) $ctg\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -tg\alpha$.

Vëre zgjidhjen:

a) $tg(\pi - \alpha) = \dfrac{tg\pi - tg\alpha}{1 + tg\pi \cdot tg\alpha} = \dfrac{0 - tg\alpha}{1 + 0 \cdot tg\alpha} = -tg\alpha$.

5 Njehso $tg(\alpha + \beta)$, nëse $tg\alpha = \dfrac{1}{2}$ dhe $\sin\beta = \dfrac{7}{25}$ (α, β janë kënde të ngushta).

Vëre zgjidhjen:

Për njehsimin e shprehjes nevojitet $tg\beta$, përkatësisht $\cos\beta$.

$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{49}{625}} = \sqrt{\dfrac{576}{625}} = \dfrac{24}{25}$, prej ku

$tg\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \dfrac{7}{24}$. Për vlerën e shprehjes, kemi:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{24}} = \frac{\frac{19}{24}}{\frac{41}{48}} = \frac{38}{41}.$$

6. Njehso vlerën e shprehjes $ctg(\alpha - \beta)$, nëse është dhënë $ctg\alpha = 2$ dhe $cos\beta = \frac{24}{25}$ (α, β janë kënde të ngushtë).

7. Thjeshto shprehjen: $\frac{tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha-\beta)} + \frac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha+\beta)}$.

8. Vërteto identitetin: $1 + tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{cos(\alpha-\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta}$.

Vëre vërtetimin:

$$1 + tg\alpha \cdot tg\beta = 1 + \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \cdot \frac{sin\beta}{cos\beta} = \frac{cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta} = \frac{cos(\alpha-\beta)}{cos\alpha cos\beta}$$

9. Vërteto identitetin: $ctg\alpha + ctg\beta = \frac{sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha \cdot sin\beta}$.

Detyra

1. Njehso $tg(\alpha - \beta)$, nëse $sin\alpha = \frac{15}{17}$, $cos\beta = \frac{35}{37}$; (α, β janë kënde të ngushtë).
2. Njehso vlerën e $tg\alpha$, nëse $tg(\alpha - 45°) = 2$.
3. Thjeshto shprehjen: a) $tg(\alpha + \beta) - tg(\alpha - \beta)$; b) $\frac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha+\beta)} + \frac{tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha-\beta)}$.

Vërtetoji identitetet:

4. $\frac{tg\beta+1}{tg\beta-1} = -tg\alpha$, nëse $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.
5. a) $(tg\alpha + 1)(tg\beta + 1) = 2$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$; b) $(ctg\alpha - 1)(ctg\beta - 1) = 2$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

13 FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE TË KËNDIT TË DYFISHTË

Kujtohu!

Provo saktësinë e barasive:

a) $sin2\alpha = 2sin\alpha$; b) $cos2\alpha = 2cos\alpha$

për $\alpha = 30°$ dhe $\alpha = 45°$.

A 1. Provo saktësinë e barasive:

a) $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$;

b) $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$.

për $\alpha = 30°$ dhe $\alpha = 60°$.

Vëre zgjidhjen:

a) $sin(2 \cdot 30°) = 2sin30° \cdot cos30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ose $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Për funksionet trigonometrike prej këndit të dyfishtë vlen kjo:

Teoremë: Nëse α është çfarëdo kënd, atëherë:

$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$$
$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$
$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\ \alpha \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha},\ \alpha \notin \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

Vërtetimi. $sin2\alpha = sin(\alpha + \alpha) = sin\alpha cos\alpha + sin\alpha cos\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$

$$tg2\alpha = tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha \cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}.$$

■ Ngjashëm vërtetohet edhe për $cos2\alpha$ dhe $ctg2\alpha$.

2 Njehso: a) $cos120^o$; b) $sin2\alpha$, nëse $cos\alpha = \frac{1}{2}$;

c) $tg2\alpha$, ако $sin\alpha = \frac{1}{2}$; ç) $ctg2\alpha$, ако $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $cos120^o = cos2 \cdot 60^o = cos^2 60^o - sin^2 60^o = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.

c) $cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{3}$.

3 Zbato teoremën për funksionet $sin\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$ dhe $ctg\alpha$.

Vëre përgjigjen:

■ $sin\alpha = sin2\cdot\frac{\alpha}{2} = 2sin\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\alpha}{2}$;

■ $cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}$;

■ $tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$; ■ $ctg\alpha = \frac{ctg^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2ctg\frac{\alpha}{2}}$.

4 Zbato teoremën për shprehjet: $sin4\alpha$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg3\alpha$, $ctg5\alpha$.

Vëre zgjidhjen:

■ $sin4\alpha = sin2\cdot 2\alpha = 2sin2\alpha \cdot cos2\alpha = 4sin\alpha cos\alpha(cos^2\alpha - sin^2\alpha) =$
$= 4sin\alpha cos\alpha(1 - 2sin^2\alpha)$.

5 Cakto vlerën e:

a) $sin2\alpha$, nëse $sin\alpha = \frac{3}{5}$, $0° < \alpha < 90°$;

b) $cos2\alpha$, nëse $cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $90° < \alpha < 180°$.

Vëre zgjidhjen:

a) $cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$, $sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

6 Funksionet $sin2\alpha$, $cos2\alpha$ shprehi me ndihmën e funksionit $tg\alpha$.

Vëre zgjidhjen:

$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha = \frac{2 sin\alpha cos\alpha}{sin^2\alpha + cos^2\alpha} = \frac{\frac{2 sin\alpha cos\alpha}{cos^2\alpha}}{\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha}} = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}.$$

Ngjashëm vërtetohet edhe $cos2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$.

7 Pa e përdor tabelën (dhe kalkulatorin), njehso:

a) $2sin15°cos15°$; b) $sin22°30' \cdot sin67°30'$.

Vëre zgjidhjen:

b) $sin22°30' \cdot sin67°30' = \frac{1}{2} \cdot 2sin22°30'cos22°30' = \frac{1}{2} sin2 \cdot (22°30') = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

8 Pa e përdor kalkulatorin, njehso:

a) $cos^2 15° - cos^2 75°$; b) $cos^2 22{,}5° - sin^2 22{,}5°$.

9 Thjeshtoji shprehjet: a) $(1 + cos2\alpha)tg\alpha$, b) $\frac{tg\alpha}{tg\alpha + 1} - \frac{tg\alpha}{tg\alpha - 1}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $(1 + cos2\alpha)tg\alpha = (sin^2\alpha + cos^2\alpha + cos^2\alpha - sin^2\alpha)tg\alpha =$

$= 2cos^2\alpha \cdot \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = sin2\alpha$.

10 Thjeshtoji shprehjet: a) $2cos(45° + \alpha)cos(45° - \alpha)$; b) $cos^2 50° - cos^2 40°$.

11 Vërteto identitetin: $\frac{1 - cos2\alpha + sin2\alpha}{1 + cos2\alpha + sin2\alpha} = tg\alpha$.

Vëre zgjidhjen:

$$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha.$$

Detyra

1. Njehso $\cos 2\alpha$, nëse $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$.
2. Njehso $\sin 3\alpha$, nëse $\cos\alpha=0{,}6$; $270^\circ<\alpha<360^\circ$.
3. Pa e përdor kalkulatorin njehso $\frac{2tg75^\circ}{1-tg^2 75^\circ}$.
4. Thjeshtoji shprehjet:

   a) $\frac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$; b) $\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{1-\sin 2\alpha}$; c) $\frac{1}{ctg\alpha+1}+\frac{1}{ctg\alpha-1}$.
5. Të caktohet $\sin 2\alpha$, nëse $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{tg^2\alpha}+\frac{1}{ctg^2\alpha}=7$.
6. Vërteto identitetet:

   a) $\frac{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=ctg\alpha$; b) $\frac{4\cos^2\alpha-1}{1-4\sin^2\alpha}=tg3\alpha\cdot ctg\alpha$.
7. Vërteto identitetet:

   a) $8\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 10^\circ=ctg10^\circ$;

   b) $16\cdot\cos 80^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ=1$.

14 FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE TË GJYSMËKËNDIT

A 1 Provo saktësinë e barasive:

a) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; b) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, nëse $\alpha=60^\circ$.

Vëre zgjidhjen:

a) $1-\cos 60^\circ=2\sin^2\frac{60^\circ}{2}$; $1-\frac{1}{2}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$ d.m.th. $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Për funksionet trigonometrike prej gjysmëkëndit vlen kjo

Teoremë: Nëse α është çfarëdo kënd, atëherë

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}};\qquad ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}},\ \text{për}\ \alpha\notin\{\pi+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

Shenja + ose - merret varësisht në cilin kuadrant është krahu i dytë i këndit $\frac{\alpha}{2}$.

Vërtetim. $\begin{cases} sin^2\frac{\alpha}{2}+cos^2\frac{\alpha}{2}=1 \\ cos^2\frac{\alpha}{2}-sin^2\frac{\alpha}{2}=cos\,\alpha \end{cases}$. Nëse i mbledhim barazimet do të fitojmë

$2cos^2\frac{\alpha}{2}=1+cos\,\alpha$ ose $cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}$. Nëse i zbresim barazimet

$2\,sin^2\frac{\alpha}{2}=1-cos\,\alpha$ ose $sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}$.

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}.$$

Mbaj mend formulat:

$$1-cos\alpha=2sin^2\frac{\alpha}{2};\quad 1+cos\alpha=2cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

2 Njehso: a) $sin15^\circ$; b) $cos\frac{\pi}{8}$; c) $tg15^\circ$.

Vëre zgjidhjen:

a) $sin15^\circ=sin\frac{30^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\,30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

3 Njehso $sin\frac{\alpha}{2}$ dhe $cos\frac{\alpha}{2}$ nëse: a) $sin\,\alpha=\frac{4}{5}$; b) $tg\alpha=\sqrt{3}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $cos\,\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$, $sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Në mënyrë të ngjashme e fitojmë edhe $cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4 Njehso $tg\frac{\alpha}{2}$ dhe $ctg\frac{\alpha}{2}$, nëse: a) $cos\alpha=\frac{7}{25}$; b) $sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(0^o<\alpha<90^o)$.

Vëre zgjidhjen:

b) $cos\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Në mënyrë të ngjashme e fitojmë $ctg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3}$.

5 Thjeshtoji shprehjet: a) $\frac{1+cos80^o}{2cos^2 40^o}$; b) $\frac{1-sin\alpha}{1+sin\alpha}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\frac{1+cos80^o}{2cos^2 40^o}=\frac{1+cos80^o}{2cos^2\frac{80^o}{2}}=\frac{1+cos80^o}{2\frac{1+cos80^o}{2}}=1$;

b) $\frac{1-sin\alpha}{1+sin\alpha}=\frac{1-cos(90^o-\alpha)}{1+cos(90^o-\alpha)}=tg^2(90^o-\alpha)=ctg^2\alpha$.

6 Thjeshtoji shprehjet: a) $\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}$; b) $\frac{sin^2 35^o}{1-cos70}$.

7 Vërteto identitetin: $\frac{sin\alpha+cos\alpha}{cos\alpha-sin\alpha}=\frac{1+sin2\alpha}{cos2\alpha}$.

Vëre zgjidhjen:

$$\frac{1+sin2\alpha}{cos2\alpha}=\frac{sin^2\alpha+cos^2\alpha+2sin\alpha cos\alpha}{cos^2\alpha-sin^2\alpha}=\frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2}{(cos\alpha-sin\alpha)(cos\alpha+sin\alpha)}=$$
$$=\frac{sin\alpha+cos\alpha}{cos\alpha-sin\alpha}.$$

8 Vërteto identitetin: $\frac{sin\alpha+tg\alpha}{sin\alpha-tg\alpha}=-ctg^2\frac{\alpha}{2}$.

Detyra

1. Pa e përdor kalkulatorin, njehso: a) $cos15^o$; b) $sin\frac{\pi}{8}$; c) $tg67^o30'$.
2. Njehso: $sin\frac{\alpha}{2}$; $cos\frac{\alpha}{2}$; $tg\frac{\alpha}{2}$, nëse: a) $cos\alpha=\frac{4}{25}$; b) $sin\alpha=\frac{3}{5}$.
3. Cakto $tg\frac{\alpha}{2}$ dhe $ctg\frac{\alpha}{2}$, nëse $ctg\alpha=-2{,}4$; $270^o<\alpha<360^o$.

4. Thjeshtoji shprehjet: a) $(1+\cos 2\alpha)\cdot tg\alpha$; b) $(1-\cos\alpha)\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

Vërtetoji identitetet:

5. a) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}=tg\frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha+1}{1-\sin\alpha-\cos\alpha}=-ctg\frac{\alpha}{2}$.

6. a) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=tg\frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=tg\frac{\alpha}{2}$; c) $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=tg^2\frac{\alpha}{2}$.

15 TRANSFORMIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE PREJ SHUMËS DHE NDRYSHIMIT NË PRODHIM

A 1. Njehso shumën $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$.

Vëre zgjidhjen:

Duke i shfrytëzuar teoremat adicionale, njehso

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cos 45^\circ.$$
$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 30^\circ\cos 45^\circ.$$

Duke i mbledhur të dy barasitë, fitojmë

$$\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=2\sin 45^\circ\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Domethënë, shumën e njehsojmë ashtu që atë e transformojmë në prodhim

Prandaj për shumën dhe ndryshimin e sinusit të dy këndeve vijon

Teorema: Nëse α dhe β janë çfarëdo kënde, atëherë

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \text{ dhe } \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Vërtetimi. Prej teoremave adicionale kemi:

$$\begin{cases}\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x\\ \sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x.\end{cases}$$

Duke i mbledhur barasitë, fitojmë

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y.$$

Nëse $\begin{cases}x+y=\alpha\\ x-y=\beta\end{cases}$, atëherë $\begin{cases}x=\frac{\alpha+\beta}{2}\\ y=\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$, vijon: $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Duke i zbritur barasitë fitojmë

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\sin y\cos x.$$

Me zëvendësimin e $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$ kemi $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$, d.m.th.

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

2 Transformoje në prodhim:

a) $\sin 70^\circ + \sin 20^\circ$; b) $\sin 40^\circ - \cos 70^\circ$; c) $\sin 70^\circ + \cos 70^\circ$;

ç) $\cos 25^\circ + \sin 25^\circ$; d) $1 + \sin a$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\sin 70^\circ + \sin 20^\circ = 2\sin\dfrac{70^\circ + 20^\circ}{2}\cdot\cos\dfrac{70^\circ - 20^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ\cos 25^\circ = \sqrt{2}\cos 25^\circ$.

ç) $\cos 25^\circ + \sin 25^\circ = \sin 65^\circ + \sin 25^\circ = 2\sin 45^\circ\cos 20^\circ = \sqrt{2}\cos 20^\circ$.

B **3** Njehso shumën $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$.

Vëre zgjidhjen:

$$\begin{cases}\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ\cos 45^\circ - \sin 60^\circ\sin 45^\circ\\ \cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ\cos 45^\circ + \sin 60^\circ\sin 45^\circ.\end{cases}$$

Duke i mbledhur barasitë:

$$\cos 105^\circ + \cos 15^\circ = 2\cos 60^\circ\cos 45^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vëre se shuma $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$ mund të njehsohet duke e transformuar në prodhim.

Prandaj për shumën dhe ndryshimin e kosinusëve prej dy këndeve vlen kjo

Teoremë: Nëse α dhe β janë çfarëdo kënde, atëherë:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{dhe} \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Vërtetimi. Sipas teoremave adicioanle, kemi:

$$\begin{cases}\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y\\ \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y.\end{cases}$$

Duke i mbledhur barasitë, kemi:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y.$$

Le të jetë $\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{cases}$, atëherë $\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ y=\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$, pra:

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Duke i zbritur barasitë paraprake, fitojmë

$$cos(x + y) - cos(x - y) = -2sinxcosy.$$

Me zëvëndësimin $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$ dhe $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$,d.m.th.

$$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

4 Transformoji në prodhim këto shprehje:

a) $cos20^o + cos40^o$; b) $cos50^o - sin50^o$; c) $1 + cos\alpha$.

Vëre zgjidhjen:

a) $cos20^o+cos40^o = 2cos\dfrac{20^o+40^o}{2}cos\dfrac{20^o-40^o}{2} = 2cos30^o cos(-20^o) = \sqrt{3}\,cos20^o.$

b) $cos50^o - sin50^o = cos50^o - cos40^o = -2sin\dfrac{50^o+40^o}{2}sin\dfrac{50^o-40^o}{2} = -\sqrt{2}\,sin5^o.$

c) $1 + cos\alpha = cos0^o + cos\alpha = 2cos\dfrac{\alpha}{2}cos\dfrac{\alpha}{2} = 2cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

5 Transformoji në prodhim shprehjet:

a) $sin40^o + sin20^o$; b) $cos50^o + cos70^o$;

c) $1 - cos\alpha$; ç) $1 + cos2\alpha$.

6 Transformoji në prodhim shprehjet:

a) $tg\alpha + tg\beta$; b) $tg\alpha - tg\beta$; c) $ctg\alpha + ctg\beta$; ç) $ctg\alpha - ctg\beta$.

Vëre zgjidhjen:

a) $tg\alpha + tg\beta = \dfrac{sin\alpha}{cos\alpha} + \dfrac{sin\beta}{cos\beta} = \dfrac{sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha}{cos\alpha cos\beta} = \dfrac{sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha cos\beta}$;

b) Në mënyrë analoge edhe $tg\alpha - tg\beta = \dfrac{sin(\alpha-\beta)}{cos\alpha cos\beta}$;

c) $ctg\alpha + ctg\beta = \dfrac{cos\alpha}{sin\alpha} + \dfrac{cos\beta}{sin\beta} = \dfrac{sin\beta cos\alpha + sin\alpha cos\beta}{sin\alpha sin\beta} = \dfrac{sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha sin\beta}$;

ç) Në mënyrë analoge edhe $ctg\alpha - ctg\beta = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} - \frac{cos\beta}{sin\beta} = \frac{sin(\beta - \alpha)}{sin\alpha\, sin\beta}$

7 Transformoji në prodhim shprehjet:

a) $tg25^\circ + tg35^\circ$; b) $ctg15^\circ - ctg45^\circ$; c) $tg50^\circ - tg10^\circ$; ç) $ctg25^\circ + ctg20^\circ$.

Vëre zgjidhjen:

a) $tg25^\circ + tg35^\circ = \frac{sin(25^\circ + 35^\circ)}{cos25^\circ\, cos35^\circ} = \frac{sin60^\circ}{cos25^\circ\, cos35^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2cos25^\circ\, cos35^\circ}$;

b) Në mënyra analoge edhe $ctg15^\circ - ctg45^\circ = \frac{sin30^\circ}{sin15^\circ\, sin45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2sin15^\circ}$.

8 Thjeshtoji shprehjet:

a) $\frac{sin37^\circ - sin19^\circ}{cos37^\circ\, cos19^\circ}$; b) $\frac{cos3\alpha + cos\alpha}{sin3\alpha + sin\alpha}$; c) $\frac{cos\alpha - cos3\alpha}{sin\alpha - sin3\alpha}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\frac{sin37^\circ - sin19^\circ}{cos37^\circ\, cos19^\circ} = \frac{2cos\frac{37^\circ + 19^\circ}{2} sin\frac{37^\circ - 19^\circ}{2}}{-2sin\frac{37^\circ + 19^\circ}{2} sin\frac{37^\circ - 19^\circ}{2}} = -\frac{cos28^\circ}{sin28^\circ} = -ctg28^\circ$;

b) $\frac{cos3\alpha + cos\alpha}{sin3\alpha + sin\alpha} = \frac{2cos2\alpha\, cos\alpha}{2sin2\alpha\, cos\alpha} = ctg2\alpha$.

Mbaj mend!

Formulat:

$$sin\alpha + sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sin\alpha - sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

njihen si formula për transformimin e funksioneve trigonometrike prej shumës dhe ndryshimit në prodhim.

Detyra

1. Transformoji në prodhim shprehjet:

a) $sin80^\circ + sin70^\circ + sin20^\circ + sin10^\circ$; b) $cos2\alpha + 2cos\alpha + 1$; c) $\frac{1}{2} + cos\alpha$;

ç) $1 - 2cos\alpha$; d) $\sqrt{3} + 2cosa$; e) $1 - \sqrt{2}\, sin\alpha$.

2 Provo saktësinë e barasive:

a) $cos70^\circ + sin40^\circ = cos10^\circ$; b) $cos20^\circ - sin50^\circ = sin10^\circ$.

3 Vërteto identitetet:

a) $\dfrac{sin\alpha + cos\alpha}{sin\alpha - cos\alpha} = ctg(\alpha - 45^\circ)$; b) $\dfrac{ctg\alpha + 1}{ctg\alpha - 1} = ctg(45^\circ - \alpha)$.

4 Thjeshtoji shprehjet: a) $1 - cos\alpha + sin\alpha$; b) $1 + cos\alpha + sin\alpha$.

5 Vërteto identitetin $\dfrac{sin3\alpha + sin2\alpha + sin\alpha}{cos3\alpha + cos2\alpha + cos\alpha} = tg2\alpha$.

6 Vërteto identitetet:

a) $\dfrac{1 - sin\alpha + cos\alpha}{1 - sin\alpha - cos\alpha} = -ctg\dfrac{\alpha}{2}$; b) $\dfrac{sin3\alpha + sin2\alpha - sin4\alpha - sin\alpha}{cos\alpha - cos2\alpha + cos3\alpha - cos4\alpha} = tg\alpha$.

7 Vërteto se funksionet:

a) $y = sinx$ dhe $y = cosx$ kanë periodë 2π;

b) $y = tgx$ dhe $y = ctgx$ kanë periodë π.

16 TRANSFORMIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE PREJ PRODHIMIT NË SHUMË

A Në mësimin paraprak vërejtëm se si shuma e funksioneve trigonometrike transformohet në prodhim.

Tani do ta shqyrtojmë rastin e anasjelltë se si prodhimi i funksioneve trigonometrike transformohet në shumë.

Për atë transformim vlen kjo

Teoremë: Nëse janë α dhe β çfarëdo kënde, atëherë

$$sin\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left[sin(\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta)\right];$$

$$cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$sin\alpha sin\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)\right]$$

Vërtetimin do ta nxjerrim me ndihmën e teoremave adicionale, përkatësisht:

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \end{cases}$$

Me mbledhjen e të dy anëve të barazimeve, kemi:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta, \text{ d.m.th.}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right].$$

Për të tjerat, vërtetimin bëje vet.

1 Prodhimin:

a) $\sin45^\circ\cos15^\circ$; b) $\cos45^\circ\cos30^\circ$; c) $\sin60^\circ\sin45^\circ$;

transformoje në shumë.

Vëre zgjidhjen

a) $\sin45^\circ\cos15^\circ=\frac{1}{2}\left[\sin(45^\circ-15^\circ)+\sin(45^\circ+15^\circ)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin30^\circ+\sin60^\circ\right].$

2 Vërteto se:

a) $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$; b) $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$.

Vëre zgjidhjen:

$\sin^2\alpha=\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\alpha)-\cos(\alpha+\alpha)\right]=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha).$

3 Transformoji në shumë këta prodhime:

a) $4\cos80^\circ\cos50^\circ\sin20^\circ$; b) $4\cos15^\circ\sin20^\circ\sin40^\circ$.

Vëre zgjidhjen:

a) $$\begin{aligned}4\sin20^\circ\cos50^\circ\cos80^\circ &= 4\sin20^\circ\cdot\frac{1}{2}(\cos30^\circ+\cos130^\circ)=\\ &=2\sin20^\circ\cos30^\circ+2\sin20^\circ\cos130^\circ=\\ &=-\sin10^\circ+\sin50^\circ-\sin110^\circ+\sin150^\circ=\\ &=-\sin10^\circ+\sin50^\circ-\sin70^\circ+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4 Vërtetoji identitetet:

a) $\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)=\cos^2\alpha-\sin^2x$;

b) $2\sin2\alpha\sin\alpha+\cos3\alpha=\cos\alpha$;

c) $\cos20^\circ+8\sin70^\circ\sin50^\circ\sin10^\circ=2\sin^280^\circ$.

Vëre zgjidhjen:

c) $cos20^\circ + 8sin70^\circ sin50^\circ sin10^\circ = cos20^\circ + 4sin70^\circ(cos40^\circ - cos60^\circ) =$
$= cos20^\circ + 4sin70^\circ cos40^\circ - 2sin70^\circ =$
$= cos20^\circ + 2(sin30^\circ + sin110^\circ) - 2cos20^\circ =$
$= 1 + 2sin110^\circ - cos20^\circ = 1 + 2cos20^\circ cos20^\circ =$
$= 1 + cos20^\circ = 2cos^2 10^\circ = 2sin^2 80^\circ.$

5 Vërteto identitetet:

a) $\cos 2\alpha + 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}(1 - 8\sin^2\alpha)$;

b) $2sin^2\alpha cos\alpha + 2cos^3\alpha = 2cos\alpha$.

Detyra

Transformoji në shumë, këta prodhime:

1 a) $sin15^\circ cos5^\circ$; b) $sin7^\circ sin3^\circ$.

2 $2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$.

3 $cos2\alpha + 2sin(\alpha + 60^\circ)sin(\alpha - 60^\circ)$.

Vërtetoji identitetet:

4 $2sin185^\circ(sin130^\circ + sin140^\circ) + cos35^\circ + cos125^\circ = 0$.

5 $2sin(15^\circ - \alpha)sin(15^\circ + \alpha) + sin^2\alpha = cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6 $2sin(60^\circ - \beta)sin(60^\circ + \beta) + sin^2\beta = \frac{1}{2} + cos^2\beta$.

7 $sin\alpha \cdot sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 + sin\alpha - cos2\alpha)$.

17 BARAZIMET THEMELORE TRIGONOMETRIKE

Kujtohu!

- Për përkufizimet e funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi.
- Funksionet trigonometrike $sin\alpha$ dhe $cos\alpha$ janë periodike me periodë 2π, kurse $tg\alpha$ dhe $ctg\alpha$ janë periodike me periodë π.
- $sin(\alpha + 2k\pi) = sin\alpha$, $tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha$,
  $cos(\alpha + 2k\pi) = cos\alpha$, $ctg(\alpha + k\pi) = ctg\alpha$
- Në cilat kuadrante funksionet $sin\alpha$ dhe $cos\alpha$ janë pozitiv, dhe ku janë negativ?

A **1** Grafikisht cakto vlerën e funksioneve $sin150^o$ dhe $cos150^o$.

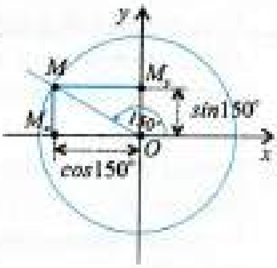


fig. 1

Vëre zgjidhjen:

- Prej përkufizimit të funksioneve trigonometrike prej çfarëdo këndi vijon se koordinatat e pikës në të cilën krahu lëvizës e prenë vijën rrethore trigonmetrike janë $M(cos\alpha,\ sin\alpha)$, fig.1.

  Domethënë, $sin150^o = \overline{OM_y}$. Funksioni $cos\alpha$ në kuadrantin e dytë është negativ, pra $cos150^o = -\overline{OM_x}$.

B **2** Është dhënë $sin\alpha = \frac{3}{4}$. Cakto këndin α në intervalint $(0, 2\pi)$.

Vëre zgjidhjen:

- Kjo detyrë është e anasjelltë e detyrës paraprake. Domethënë, në boshtin e ordinatës, d.m.th.në boshtin y duhet të caktojmë pikë M_y, ashtu që $\overline{OM_y} = \frac{3}{4}$.
- Funksioni $sin\alpha$ është pozitiv në kuadrantin I dhe II. Domethënë krahu lëvizës e prenë vijën rrethore në dy pika. Njëra pikë gjendet në kuadrantin I, kurse tjetra në kuadrantin II.
- Pikat e kërkuara M_1 dhe M_2 gjenden në prerjen e vijës rrethore dhe drejtëzës që kalon nëpër pikën M_y, kurse është paralele me boshtin x.

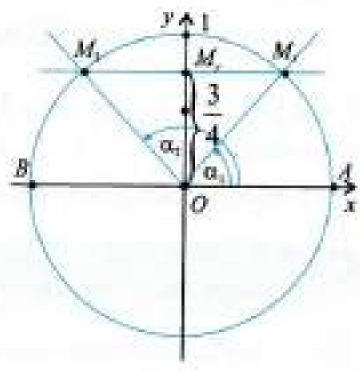


fig. 2

- Këndet e kërkuar janë: $\alpha_1 = \sphericalangle AOM_1$ dhe $\alpha_2 = \sphericalangle AOM_2$, fig..2.

Dihet se gjatë sjelljes së funksioneve trigonometrike në kënd të ngushtë, për këndet e formës $180^o \pm \alpha$,ose $360^o \pm \alpha$ funksioni nuk ndryshon.

Nga këto shkaqe këndet që gjenden në kuadrantin II do t'i shkruajmë në formën $180^o - \alpha_o$, në kuadrantin III kështu$180^o + \alpha_o$, kurse në kuadrantin IV, $360^o - \alpha_o$ ose vetëm $- \alpha_o$, ku $0 < \alpha_o < 90^o$.

Për shkak të simetrisë së vijës rrethore trigonometrike në lidhje me fillimin e koordinatave dhe boshteve koordinative, kemi:

$\alpha_1 = \sphericalangle AOM_1 = \sphericalangle BOM_2 = \alpha_o$, pra $\alpha_1 = \alpha_o$, kurse $\alpha_2 = \pi - \alpha_o$; $0 < \alpha_o < 90^o$, crt.3.

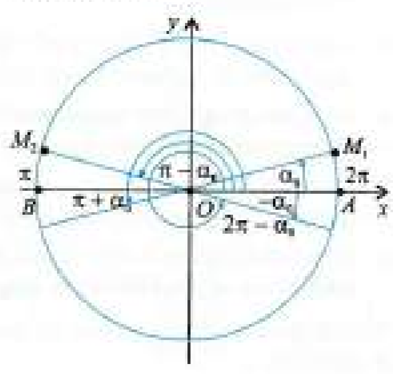


fig. 3

- Nëse në kërkesën e detyrës nuk ka kufizime për këndin α, atëherë çdo kënd që do të fitohet me rrotullimin e krahut lëvizës OM_1 ose OM_2 për 360^o, d.m.th. 2π herë numër çfarëdo në kahen pozitive ose negative është, gjithashtu, zgjidhje për këndin e kërkuar α.
- Prandaj ekzistojnë shumë kënde të pafundme ku shënimi i përgjithshëm është $\alpha_1 = \alpha_0 + 2k\pi$ ose $\alpha_2 = \pi - \alpha_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, që është zgjidhje e detyrës së parashtruar.
  k - paraqet numrin e rrotullimeve të plota në kahen pozitive ose negative të krahut lëvizës të këndit.

Vëre!

Caktimi i këndit nëse është dhënë vlera e funksionit trigonometrik, në realitet është zgjidhja e barazimit trigonometrik përkatës.

Kujtohu!

- Barazimi në të cilën e panjohura është në logaritëm ose në bazën e logaritmit quhet barazim logaritmik.
- $log_3(x + 2) = 2$; $log_{x+2}9 = 3$ janë barazime logaritmike.
- Pse barazimet $2^{x+3} = 4$; $2^{2x} - 2^x - 3 = 0$ quhen barazime eksponenciale?
- Sa zgjidhje mund të ketë barazimi linear, por sa barazimi katror?

C Barazimi në të cilën e panjohura gjendet vetëm në argumentin e funksionit trigonometrik quhet **barazim trigonometrik**.

3 Cili prej këtyre barazimeve është barazim trigonometrik:

a) $sinx = 1$; b) $2cos3x - 1 = 0$; c) $sin2x + cos2x = 1$;

ç $x + cos2x = 3$; d) $tg2x + 2tgx - 3 = 0$; e) $x + ctg30^o + tg(x - \frac{\pi}{4}) = 1$?

Vëre zgjidhjen:

- Vetëm barazimet ç) dhe e) nuk janë trigonometrike pasi e panjohura gjendet edhe jashtu argumentit të funksionit trigonometrik.
- Të zgjidhet barazimi trigonometrik domethënë të caktohet bashkësia e zgjidhjeve, nëse ka, për të cilën barazimi kalon në barasi numerike të saktë.
- Barzimet trigonometrike nëse kanë zgjidhje, atëherë, për shkak të vetisë të periodizimit të funksioneve, atë kanë bashkësi të fundme të zgjidhjeve.
- Barazimet trigonometrike mund të klasifikohen si barazime algjebrike, pasi nuk është e mundshme të jepet metoda e përgjithshme e zgjidhjes.

Në këtë pjesë do të tregojmë si zgjidhen disa lloje të barazimeve trigonometrike të cilat sillen në zgjidhjen e

barazimeve themelore trigonometrike:

$$sinx = a; \quad cosx = a; \quad tgx = a \text{ dhe } ctgx = a, \ a \in \mathbb{R}.$$

Ç **4** Zgjidhe barazimin $sinx = a, \ a \in \mathbb{R}$.

Vëre zgjidhjen:

- Funksioni $sinx$ është i kufizuar, d.m.th. $-1 \leq sin\,x \leq 1$, domethënë barazimi ka zgjidhje vetëm nëse $-1 \leq a \leq 1$. Do t'i shqyrtojmë edhe këto raste:

$$\mathbf{1^\circ} \quad \boldsymbol{sinx = a, \ 0 < a < 1.}$$

- Zgjidhja e barazimit $sinx = a, \ 0 < a < 1$, sillet në caktimin e këndit nëse është dhënë vlera e funksionit trigonometrik, detyra 2, fig. 2.
Pasi $sinx > 0$ në kuadrantin I dhe II, domethënë krahu i dytë i këndit është në kuadrantin e parë ose të dytë, fig. 4.
Sipas zgjidhjes së detyrës 2, në intervalin $(0, 2\pi)$ zgjidhja e barazimit është $x = \alpha_o$ ose
$x = \pi - \alpha_o, \ 0 < \alpha_o < 90^o$.

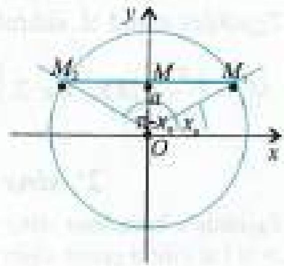


fig. 4

- Këndin e ngushtë α_0 do ta shënojmë me x_o, d.m.th. $x_o = \alpha_o$, por do ta caktojmë me funksionin inverz të funksioneve trigonometrike të cilat quhen edhe funksione **arcus**: d.m.th. $x_o = arcsin|a|$.

Për shembull: $arcsin\left|\frac{1}{2}\right| = 30^o = \frac{\pi}{6}$, pasi $sin30^o = \frac{1}{2}$; $arccos\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 30^o$, pasi që

$cos30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $arctg1 = 45^o$, pasi $tg45^o = 1$.

Prandaj zgjidhja e barazimit $sinx = a, \ 0 < a < 1$ në intervalin $(0, 2\pi)$ është $x_1 = x_o$ ose $x = \pi - x_o, \ x_o = arcsina$.

Mbaj mend!

Zgjidhja e përgjithshme e barazimit $sinx = a, \ a \in \mathbb{R}$ është

$$x = x_o + 2k\pi \ \text{ ose } \ x = \pi - x_o + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}, \text{ kurse}$$

$$x_o = arcsin|a|, \quad 0^o < x_o < 90^o.$$

5 Zgjidhe barazimin $sinx = \frac{1}{2}$.

Vëre zgjidhjen:

- Zgjidhja e barazimit në intervalin prej 0^o deri 2π është $x = x_o$ ose $x = \pi - x_o$, pasi $x_o = arcsin\frac{1}{2} = 30^o = \frac{\pi}{6}$, kemi $x = \frac{\pi}{6}$ ose $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, kurse zgjidhja e përgjithshme e barazimit është $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ose $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit është paraqitur në tabelën.

k	...	-2	-1	0	1	...
$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$	...	$-\frac{23\pi}{6}$	$-\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$	...
$x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$	...	$-\frac{19\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{6}$	...

Zgjidhjet mund të shkruhen në formë të bashkësisë, d.m.th.

$$M_1=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \text{kurse}\ M_2=\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2° $\sin x=a,\ -1<a<0.$

Zgjidhja e barazimit $\sin x=a,\ -1<a<0$ është këndi krahu i dytë i të cilit e prenë vijën rrethore trigonometrike në kuadrantin III dhe IV, fig. 5.

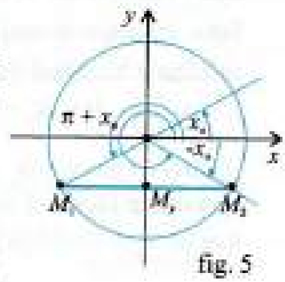


fig. 5

- Zgjdhja e barazimit në intervalin $(0,2\pi)$ është $x=\pi+x_0$ ose $x=2\pi-x_0$, $x_0=\arcsin|a|$.
- Zgjidhja $x=2\pi-x_0$ e cila është në kuadrantin IV mund ta shkruajmë edhe në këtë formë $x=-x_0$.

Mbaj mend!

Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit $\sin x=a,\ -1<a<0$ është

$x=\pi+x_0+2k\pi$ ose $x=-x_0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, kurse $x_0=\arcsin|a|,\ 0°<x_0<90°$.

6 Zgjidhe barazimin $\sqrt{3}+2\sin x=0$.

Vëre zgjidhjen:

- Barazimin e sjellim në këtë formë $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Zgjidhja e barazimit në intervalin $(0,2\pi)$, është këndi krahu i të cilit është në kuadrantin III ose IV, fig. 5, d.m.th. prej formës $x=\pi+x_0$ ose $x=-x_0$, kurse zgjidhja e përgjithshme është $x=\pi+x_0+2k\pi$ ose $x=-x_0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}, x_0=\arcsin\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\pi}{3}$.

Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit është:

$$x=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\ \text{ose}\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Zgjidhjet mund të shkruhen në formën e bashkësisë, d.m.th.

$$M_1=\left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \text{kurse}\ M_2=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

3° $sinx = 0,\ a = 0.$

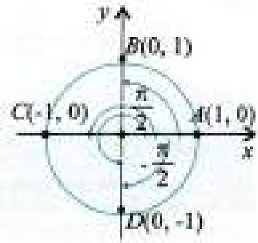


fig. 6

- Zgjidhja e barazimit $sinx = 0$ është këndi krahu i dytë i të cilit e prenë vijën rrethore në pikat ordinatat e të cilës janë të barabarta me 0.
  Ato janë pikat e boshti x, $(1, 0)$ ose $(-1, 0)$, fig .6.
- Zgjidhjet e barazimit, $sinx = 0$ janë $x = 0 + 2k\pi$ ose $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ të cilat ndryshojnë për π, pra dy zgjidhje mund të shkruhen në këtë formë $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Mbaj mend

Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit

$$sinx = 0 \text{ është } x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4° $sinx = 1,\ a = 1$

- Ku gjendet pika e vijës rrethore trigonometrike ordinata e së cilës është e barabartë me 1?
- Sa është këndi që e formon krahu i dytë i këndit i cili kalon nëpër pikën B, fig. 6?

Mbaj mend!

Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit

$$sinx = 1 \text{ është } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5° $sinx = -1,\ a = -1$

- Ku gjendet pika e vijës rrethore trigonometrike ordinata e së cilës është e barabartë me 1?
- Sa është këndi që e formon krahu i dytë i këndit i cili kalon nëpër pikën D, fig.6?

Mbaj mend!

Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit

$$sinx = -1 \text{ është } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zgjidhja e njëjtë mund të shkruhet edhe në këtë formë

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

7 Zgjidhe barazimin:

a) $2sinx + \sqrt{2} = 0$; b) $sinx = -\frac{1}{2}$; c) $2sinx - \sqrt{3} = 0$; ç) $2sinx - 4 = 0$.

Zgjidhe barazimin $sinx = a$, $|a| \leq 1$ ne në realitet e vërtetojmë

Teoremën: Për çfarëdo numër real a, $|a| \leq 1$, ekziston bashkësi e pafundme e zgjidhjeve për këndin x, për të cilin $sinx = a$.

Të zgjidhurit e barazimeve themelore trigonometrike përfshihet në këto hapa:

1. Konstatohet për numrin real a barazimi a ka zgjidhje.

2. Sipas shenjës të funksionit trigonometrik caktohet në cilin kuadrant është krahu i dytë i këndit.

3. Caktohet zgjidhja në intervalin $(0, 2\pi)$, e pastaj zgjidhja e përgjithshme.

4. Caktohet këndi i ngushtë x_0.

8 Zgjidhe barazimin $sinx = -\frac{5}{8}$.

Vëre zgjidhjen:

- $sinx < 0$ në kuadrantin III dhe IV, pra zgjidhja është e formës $x = \pi + x_0 + 2k\pi$ ose $x = -x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, kurse $x_0 = arcsin\left|-\frac{5}{8}\right|$, pra $x = \pi + arcsin\frac{5}{8} + 2k\pi$ ose $x = -arcsin\frac{5}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Në këtë rast këndin e ngushtë x_0 do ta caktojmë me ndihmën e kalkulatorit në këtë mënyrë:

  - e fusim numrin $\frac{5}{8} = 0,625$;
  - e shtypim tastin 2nd ;
  - e shtypim tastin sin^{-1}.

- Nëse në displej është opcioni DEG, atëherë e fitojmë vlerën për këndin në shkallë, d.m.th. $x_0 = 38,68218°$.

  - Me aktivizimin e përsërishëm të 2nd dhe DMS këndi është shndërruar në shkallë dhe minuta, d.m.th. $x_0 = 38°40'$, pra $x = \pi + 38°40' + 2k\pi = 218°40'$ ose $x = -38°40' + 2k\pi$.

- Nëse në displej është opcioni RAD, atëherë këndi është shprehur në radian, d.m.th. $x_0 = 0,675$ rad, pra zgjidhja e barazimit është $x = \pi + 0,675 + 2k\pi$ ose $x = -0,675 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

9 Zgjidhe barazimin

a) $3sinx - 1 = 0$; b) $4sinx - 3 = 0$; c) $6sinx + 7 = 0$.

Çdo barazim themelor trigonometrik zgjidhet në të njëjtën mënyrë sikurse barazimi $sinx = a$, që do të shohim në detyrën që vijon.

D 10 Zgjidhe barazimin:

a) $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $cosx = 0$; ç) $cosx = 1$.

Duhet të dish:

Barzimi $cosx = a$ ka zgjidhje vetëm nëse $|a| \leq 1$.

Vëre zgjidhjen:

a) $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- $cosx > 0$ në kuadrantin I dhe IV, d.m.th. krahu i dytë i këndit është në kuadrantin I ose IV fig. 7.
- Zgjidhja në intervalin $(0, 2\pi)$ është $x = x_0$ ose $x = 2\pi - x_0$. Zgjidhje $x = 2\pi - x_0$ mund të shkruhet edhe në këtë formë $x = -x_0$.

  Zgjidhja e përgjithshme

  $$x = x_0 + 2k\pi \text{ ose } x = -x_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

  $$x_0 = arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30° = \frac{\pi}{6}, \text{ pra } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ose } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

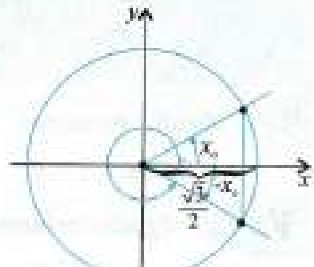


fig. 7

- Funksioni $cosx$ është çift për shkak të asaj vetie zgjidhjet mund t'i shkruajmë edhe në këtë formë:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- $cosx < 0$ në kuadrantin II dhe III, pra zgjidhja është

  $$x = \pi - x_0 + 2k\pi \text{ ose } x = \pi + x_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

  $$x_0 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ose}$$

  $$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ fig. 8.}$$

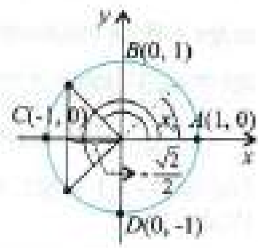


fig. 8

- Kosinusi prej çfarëdo këndi është i barabartë me abshisën e pikës nga vija rrethore trigonometrike, fig. 9.

  Prandaj, zgjidhja e barazimit:

  $cosx = 1$ është $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

  $cosx = 0$ është $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

  $cosx = -1$ është $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

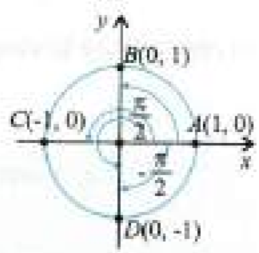


fig. 9

Mbaj mend!

Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit $cosx = a, |a| \leq 1$, për

$$0 < a < 1 \text{ është } x = \pm x_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$-1 < a < 0 \text{ është } x = \pi \pm x_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$a = 0 \text{ është } x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$a = 1 \text{ është } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
$$a = -1 \text{ është } x = -\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$
$$x_0 = arccos|a|,\ 0^o < x_0 < 90^o.$$

11 Zgjidhe barazimin:

a) $2cosx + 1 = 0$; b) $2cosx + \sqrt{3} = 0$; c) $3cosx - 2 = 0$; ç) $4cosx - 7 = 0$.

E 12 Zgjidhe barazimin:

a) $tgx = -\sqrt{3}$; b) $ctgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $tgx = 0$; ç) $ctgx = 0$.

Vëre zgjidhjen:

Tangensi prej çfarëdo këndi është i barabartë me ordinatën e pikës nga ordinata e boshtit të tangensit, domethënë barazimi $tgx = a$ është përkufizuar për çdo $a \in \mathbb{R}$.

Prej $tg(x + \pi) = tgx$ vijon se barazimi $tgx = a$ në intervalin $(0, 2\pi)$ ka një zgjidhje, fig. 10.

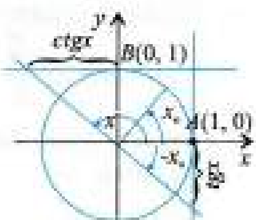


fig. 10

a) $tgx < 0$ në kuadrantin II dhe IV, pra zgjidhja e barazimit $tgx = -\sqrt{3}$ është $x = \pi - x_0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, kurse

$x_0 = \text{arctg}|-\sqrt{3}| = 60^o = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi - \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{2\pi}{3} + k\pi$.

Prej $tg(\pi - x_0) = -tgx_0$ vijon se zgjidhja e barazimit mund të merret edhe këndi në kuadrantin IV, d.m.th.

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $ctgx > 0$ në kuadrantin I dhe III, pra zgjidhja e barazimit $ctgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$ është

$$x = x_0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$x_0 = arcctg\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = 60^o = \frac{\pi}{6}, \text{ d.m.th. } x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) $tgx = 0,\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. ç) $ctgx = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

12 Zgjidhe barazimin:

a) $tgx - 1 = 0$; b) $ctgx + 1 = 0$; c) $ctgx = -\sqrt{3}$; ç) $2tgx - 3 = 4$.

Mbaj mend!

Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit $tgx = a$ dhe $ctgx = a$ $a \in \mathbb{R}$, për

$$0 < a < \infty \text{ është } x = x_0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$-\infty < a < 0 \text{ është } x = \pi - x_0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$x_0 = arctg|a| \text{ ose } x_0 = arcctg|a|.$$

$$a = 0 \text{ është } tgx = 0,\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ kurse}$$

$$ctgx = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Detyra

1. Zgjidhi barazimet:

a) $2sinx = \sqrt{2}$; b) $\sqrt{2}\,sinx + 1 = 0$; c) $4sinx + \sqrt{12} = 0$; ç) $3sinx - 5 = 0$.

2. Cakto bashkësinë e zgjidhjeve të barazmit:

a) $2cosx - 1 = 0$; b) $6cosx + \sqrt{27} = 0$; c) $2cosx + 5 = 0$; ç) $5cosx + 2 = 0$.

3. Zgjidhi barazimet:

a) $3tgx + \sqrt{3} = 0$; b) $tgx = \sqrt{3}$; c) $tgx + 1 = 0$; ç) $2tgx + 6 = 0$.

4. Zgjidhi barazimet:

a) $3ctgx + \sqrt{3} = 0$; b) $ctgx - \sqrt{3} = 0$; c) $ctgx - 1 = 0$; ç) $3ctgx = 5$.

18 BARAZIMET TRIGONOMETRIKE QË SILLEN NË BARAZIME THEMELORE TRIGONOMETRIKE

A Barazimi i formës $asin(bx + c) + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ me zëvëndësimin $bx + c = u$ dhe $-\dfrac{d}{a} = m$ sillet në barazimin themelor trigonometrik $sinu = m$.

1 Zgjidhe barazimin $2sin(3x - \dfrac{\pi}{3}) - 1 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

Duke e futur zëvëndësimin $3x - \dfrac{\pi}{3} = u$, fitojmë

$$sinu = \frac{1}{2}.$$

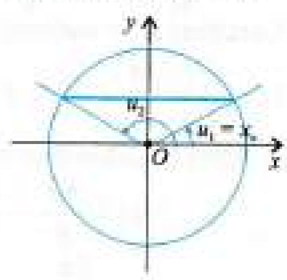


fig. 1

$sinu > 0$, domethënë këndi u është në kuadrantin I ose në **II, pra zgjidhja është e formës:**

$$u_1 = x_o + 2k\pi \text{ ose } u_2 = \pi - x_o + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ fig.1.}$$

$x_o = \arcsin\frac{1}{2} = 30^o = \frac{\pi}{6}$, pra duke u kthyer te zëvendësimi, zgjidhjet janë të formës:

$$3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ose } 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Duke i zgjidhur të dy barazimet sipas x kemi:

$$3x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad 3x = \pi + 2k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \quad \text{ose} \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2 Zgjidhi barazimet:

a) $2sin(2x + 10^o) - \sqrt{3} = 0$; b) $4sin(3x - 45^o) + \sqrt{8} = 0$.

B Barazimi i formës $acos(bx + c) + d = 0$ me zëvendësimin $u = bx + c$ dhe $m = -\frac{d}{a}$, e sjellim në barazim themelot trigonometrik $cosu = m$.

3 Zgjidhe barazimin $6cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{27} = 0$.

Vëre zgjidhjen:

Prej barazimit vijon $cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Me futjen e zëvendësimit $u = 2x - \frac{\pi}{2}$, fitojmë $cosu = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, zgjidhjet e të cilit janë:

$cosu < 0$, domethënë edhe këndi u është në kuadrantin I dhe III, pra $u = \pi - x_o + 2k\pi$ ose $u = \pi + x_o + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, fig. 2.

$$x_o = arccos\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 30^o = \frac{\pi}{6},$$

$$u = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ose } u = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

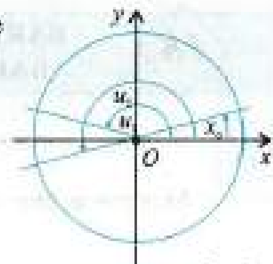


fig. 2

Kthehemi te zëvendësimi, kemi:

$$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ose } 2x - \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Duke i zgjidhur barazimet sipas x kemi

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ose} \quad 2x = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

4 Zgjidhi barazimet:

a) $cos\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0;$ b) $10cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{50}=0.$

C Barazimet e formës $atg(bx+c)+d=0$ ose $actg(bx+c)+d=0$, me futjen e zëvëndësimit $bx+c=u$ dhe $-\frac{d}{a}=m$, i sjellim në barazim themelor trigonometrik:

$$tgu=m \text{ ose } ctgu=m.$$

5 Zgjidhi barazimet: a) $3tg\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+3=0;$ b) $3ctg\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{27}=0.$

Vëre zgjidhjen:

a) Me zëvëndësimin $u=2x+\frac{2\pi}{3}$, e fitojmë barazimin $tgu=-1$, zgjidhja e së cilës është:

$$u=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Kthehemi te zëvëndësimi, kemi:

$$2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ \text{d.m.th. } x=\frac{\pi}{24}+\frac{1}{2}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

b) Me zëvëndësimin $u=4x-\frac{\pi}{6}$, e fitojmë barazimin $ctgu=\sqrt{3}$, zgjidhja e të cilit është:

$$u=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Kthehemi te zëvëndësimi, kemi

$$4x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ \text{d.m.th. } x=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

6 Zgjidhe barazimin:

a) $3tg\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}=0;$ b) $\sqrt{2}\,ctg\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{8}=0.$

Është e dobishme të dish! Bashkësia e zgjidhjeve të një barazimi mund të shkruhet në shumë mënyra, varësisht vallë a do të shfrytëzohet edhe këndi negativ.

Këtë do ta tregojmë nëpërmjet këtij shembulli: $sinx=-\frac{1}{2}$.

Bashkësia e zgjidhjeve do të jetë:

$$1)\left[\begin{array}{l}x_1=-30^\circ+360^\circ\cdot k\\ x_2=-150^\circ+360^\circ\cdot k\end{array}\right.;\qquad 2)\left[\begin{array}{l}x_1=-30^\circ+360^\circ\cdot k\\ x_2=210^\circ+360^\circ\cdot k\end{array}\right.;$$

$$3)\left[\begin{array}{l}x_1=330^\circ+360^\circ\cdot k\\ x_2=-150^\circ+360^\circ\cdot k\end{array}\right.;\qquad 4)\left[\begin{array}{l}x_1=330^\circ+360^\circ\cdot k\\ x_2=210^\circ+360^\circ\cdot k,\ (k\in\mathbb{Z}).\end{array}\right.$$

Detyra

Zgjidhi barazimet:

1. a) $sin(x - 10°) = sin40°$; b) $cos(30° - x) = sin70°$.

2. a) $sin(x + 15°) = \frac{1}{2}$; b) $cos(x + 20°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. a) $tg(25° - x) = -1$; b) $ctg(18° + x) = \sqrt{3}$.

4. a) $cos3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $sin2x = -\frac{1}{2}$.

5. a) $2sin\frac{2x}{3} - \sqrt{3} = 0$; b) $\sqrt{3}\,cos(2x + 30°) = \frac{3}{2}$.

6. a) $\sqrt{3}\,tg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$; b) $\sqrt{3}\,ctg(p - 3x) = 1$.

7. a) $\frac{3 + 8\sin x}{\sin x} = 2$; b) $\frac{1 - 3\cos x}{\cos x} = -1$.

8. a) $\frac{3tgx - 1}{6tgx + 5} = \frac{tgx - 3}{2tgx + 1}$; b) $\frac{10\sin x + 4}{4\sin x + 1} - \frac{5\sin x + 24}{2\sin x + 6} = 0$.

19 BARAZIMET TRIGONOMETRIKE TË CILAT SILLEN NË BARAZIME KATRORE

Kujtohu!

Zgjidhja e barazimit katror $ax^2 + bx + c = 0$ caktohet me formulën

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Zgjidhe barazimin

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Cili prej barazimeve është barazim katror trigonometrik

$asinx + bcosx^2 = 0$,

$3sin^2x - 4sinx + 1 = 0$,

$3sin^2 30° + 2sinx - 1 = 0$?

A Barazimi i formës $a\left(f(x)\right)^2 + bf(x) + c = 0$, ku $f(x)$ është ndonjë funksion trigonometrik, quhet barazim katror trigonometrik.

Me zëvendësimin $f(x) = y$, sillet në barazim katror:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

1 Zgjidhe barazimin

$$2sin^2x - sinx - 1 = 0$$

Vëre zgjidhjen:

Barazimin e transformojmë në formën $2(sinx)^2 - sinx - 1 = 0$, i cili me zëvëndësimin $sinx = y$, e merr formën

$2y^2 - y - 1 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $y_1 = -\frac{1}{2}$ dhe $y_2 = 1$.

Këthehemi te zëvëndësimi $sinx = y$, i fitojmë barazimet:

$sin\,x = -\frac{1}{2}$ zgjidhja e të cilit është: $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, dhe

$sinx = 1$ zgjidhja e të cilit është: $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2 Zgjidhi barazimet trigonometrike:

a) $2sin^2x - sinx = 0$; b) $cos^2x + cosx = 0$;

c) $tg^2x - 1 = 0$; ç) $2cos^2x + cosx - 1 = 0$.

B **3** Zgjidhe barazimin $tg^22x - 2tg2x - 3 = 8$.

Vëre zgjidhjen:

Me zëvëndësimin $tg2x = y$ e fitojmë barazimin katror $y^2 - 2y - 3 = 8$, zgjidhjet e të cilit $y_1 = -1$ ose $y_2 = 3$, d.m.th. $tg2x = -1$, $tg2x = 3$.

Zgjidhjet e barazimit janë:

$$2x = \pi - \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{ose} \quad 2x = arctg3 + k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{ose} \quad x = 35°46' + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

4 Zgjidhi barazimet trigonometrike:

a) $2cos^22x + 3cos2x + 1 = 0$; b) $5tgx + 7ctgx = 12$.

C **5** Zgjidhe barazimin trigonometrik $2cos\,x + \frac{3 - 7cos\,x}{2 + cos\,x} = \frac{2}{2 + cos\,x}$.

Vëre zgjidhjen:

Pasi $2 + cosx \neq 0$ (pse?), vijon

$$4cosx + 2cos^2x + 3 - 7cosx = 2 \quad \text{ose} \quad 2cos^2x - 3cosx + 1 = 0$$

Me futjen e zëvëndësimit $cosx = y$, e fitojmë barazimin $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

zgjidhjet e të cilit janë $\begin{matrix} y_1 = 2 \\ y_2 = 1 \end{matrix}$ ose $\begin{matrix} cos\,x = 2 \\ cos\,x = 1. \end{matrix}$

Barazimi $cosx = 2$ Nuk ka zgjidhje. Pse?

Zgjidhja e barazimit $cosx = 1$, është $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6 Zgjidhe barazimin trigonometrik $\frac{sin\,x}{sin\,x - 2} - \frac{sin\,x - 2}{sin\,x + 2} = 1$.

7 Zgjidhe barazimin trigonometrik $4cos^2x + 4cosx + sin^2x = 0$.

Vëre zgjidhjen:

Duke zëvëndësuar për $sin^2a = 1 - cos^2a$, fitojmë

$$3cos^2x + 4cosx + 1 = 0$$

Duke zëvëndësuar $cosx = y$, e fitojmë barazimin

$$3y^2 + 4y + 1 = 0,$$

zgjidhjet e të cilit janë: $y_1 = -1$, $y_2 = -\frac{1}{3}$ ose $\cos x = -1$, $\cos x = -\frac{1}{3}$.

Zgjidhjet e barazimit janë: $x = \pi + 2k\pi$, $x = \pi \pm arccos\left|-\frac{1}{3}\right| + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

8 Zgjidhe barazimin trigonometrik $6sin^2x - sinx - 4cos^2x + 1 = 0$.

Detyra

Zgjidhi barazimet

1. a) $2sin^2x - \sqrt{2}\,sinx = 0$; b) $2cos^2x - cosx = 0$.
2. a) $6sin^2x - 7sinx + 2 = 0$; b) $2cos^2x - cosx - 1 = 0$.
3. a) $3tg^2x + \sqrt{3}\,tgx = 0$; b) $ctgx - ctg^2x = 0$.
4. a) $sin^2x + 4cosx + 4cos^2x = 0$; b) $cos^2x - 3sin^2x = 0$.
5. a) $sin^2x - cos^2x - cosx = 0$; b) $sin^2x - 2cos^2x - 3sinx + 2 = 0$.
6. a) $4sin^2x + tg^2x = 0$; b) $3ctgx + 2sinx = 0$.

20 BARAZIMET TRIGONOMETRIKE QË ZGJIDHEN DUKE ZBATUAR DISA TRANSFORMIME TË SHPREHJEVE TRIGONOMETRIKE

Kujtohu!

Barazimi prodhim

$$x(x - 1)(x - 2) = 0$$

është ekuivalent me disjunksionin e barazimeve:

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$$

A **1** Zgjidhe barazimin trigonometrik

$$sinx(1 - sinx)(1 + sinx) = 0.$$

Vëre zgjidhjen:

Barazimi është ekuivalent me disjunksionin e barazimeve:

$$sinx = 0 \text{ ose } 1 - sinx = 0 \text{ ose } 1 + sinx = 0$$

zgjidhjet janë $x = k\pi$ ose $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ose $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Zgjidhjet $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, mund të shkruhet si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2 Zgjidhe barazimin $\cos x\left(1-\cos\frac{2x}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3 Cakto bashkësinë e zgjidhjeve të barazimeve:

a) $\sin 2x - \sin x = 0$; b) $\sin 2x + 2\cos x = 0$.

Vëre zgjidhjen:

a) $2\sin x\cos x - \sin x = 0$, $\sin x(2\cos x - 1) = 0$. Prej këtu vijon

$\sin x = 0$: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

$\cos x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; ose $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4 Zgjidhi barazimet trigonometrike:

a) $\sin 2x = ctg x$; b) $\sin 2x = 2\cos x$.

5 Zgjidhe barazimin trigonometrik $\cos 2x = \cos^2 x - 1$.

Vëre zgjidhjen:

Duke e zbatuar formulën $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ kemi

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 \text{ ose } \sin^2 x = 1.$$

Prej këtu vijon se $\sin x = 1$ ose $\sin x = -1$, pra

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

6 Zgjidhi barazimet trigonometrike:

a) $\cos^2 x - \sin 2x = \cos 2x$; b) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$.

7 Zgjidhe barazimin $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.

Vëre zgjidhjen:

$2\sin x\cos x = \cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x$

$4\sin x\cos x = 1$, d.m.th. $2\sin 2x = 1$, pra

$\sin 2x = \frac{1}{2}$, kurse $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ose $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

8 Zgjidhe barazimin $\sin 2x - \sin^2 x = \cos 2x$.

9 Zgjidhe barazimin $1 - \cos x = tg\frac{x}{2}$.

Vëre zgjidhjen:

Pasi $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, kemi: $2\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ ose

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0, \quad \text{d.m.th.} \quad \sin\frac{x}{2}(\sin x - 1) = 0.$$

Prej këtu vijon: $\sin\frac{x}{2} = 0$ ose $\sin x - 1 = 0$

zgjidhjet e të cilit janë: $x = 2k\pi$ ose $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

10 Zgjidhe barazimin $(1 + \sin 2x)(1 - tgx) = 1 - tgx$.

11 Zgjidhe barazimin $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

Vëre zgjidhjen:

$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{2}$ ose $\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{1}{2}$, d.m.th. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$,

kurse zgjidhja është $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ose $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12 Zgjidhe barazimin $\sin 3x + \sin x = 0$.

Vëre zgjidhjen:

Duke i zbatuar formulat $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, barazimi i dhënë është i formës $2\sin 2x\cos x = 0$, d.m.th.

$$\sin 2x = 0 \quad \text{ose} \quad \cos x = 0, \text{ kurse}$$

$$x = \frac{k\pi}{2}; \qquad x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

13 Zgjidhi barazimet:

a) $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$; b) $\cos 3x - \cos 2x + \cos x = 0$.

Detyra

Zgjidhi barazimet:

1. a) $\sin^2 x + \cos 2x = \frac{3}{4}$; b) $tgx - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$.
2. $\cos 2x + \cos^2 x(1 + tgx) = \sin^2 x(1 + ctgx)$.
3. $\cos 2x + \sin x = 1 + \sin x\cos 2x$.

(4) $tgx \cdot sinx + \sqrt{3}\,sinx - tgx - \sqrt{3} = 0.$

(5) $cosx + cos3x = cos2x + cos4x.$

(6) $4sin^2x + cosx = cos3x.$

21 TEOREMA E SINUSIT

Kujtohu!

- Cilët janë elementet e trekëndëshit?
- Për brinjët e trekëndëshit vlejnë:

$$|b - c| < a < b + c$$

- Për këndet α, β dhe γ në trekëndësh vlen

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o.$$

- Këndet e përballta te katërkëndëshi kordiak janë suplementar.
- Cakto elementet e trekëndëshit këndrejtë, nëse hipotenuza $c = 12$ mm dhe këndi $\beta = 60^o$.

Në vitin II u njohe me zgjidhjen e trekëndëshit kënddrejtë. Tani do të njihemi me zgjidhjen e çfarëdo trekëndëshi. Për atë qëllim duhet t'i dijmë varësitë ndërmjet brinjëve dhe këndeve në trekëndësh. Njëra prej tyre është kjo teoremë e shprehur kështu

Teorema: Në çdo trekëndësh brinjët janë proporcionale me sinusët e këndeve të përballta, d.m.th.

$$a : b : c = sin\alpha : sin\beta : sin\gamma \text{ ose}$$

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$$

Vërtetimi: Do t'i shqyrtojmë të tre mundësitë:

1. ΔABC është këndngushtë 2. ΔABC është kënddrejtë; 3. ΔABC është këndgjerë.

Edhe në të tri rastet do të tregojmë se vlejnë barasitë

1. $a = 2Rsin\alpha$, d.m.th. $\frac{a}{sin\alpha} = 2R$; **2.** $b = 2Rsin\beta$, d.m.th. $\frac{b}{sin\beta} = 2R$; **3.** $c = 2Rsin\gamma$, d.m.th. $\frac{c}{sin\gamma} = 2R$, R - rrezja e vijës rrethore të jashtashkruar.

Do ta vërtetojmë barasinë e parë

1° ΔABC është këndngushtë (fig.1)

- Rreth ΔABC është jashtashkruar vija rrethore me rreze R.
- Nëpër kulmin A e tërheqim diametrin AA_1 të vijës rrethore të jashtashkruar dhe A_1 e lidhim me B.
- ΔABA_1 është kënddrejtë, $\sphericalangle ABA_1 = 90^o$, $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle ACB = \gamma$. (si kënde periferike mbi harkun e njëjtë rrethor).
- Prej ΔABA_1 kemi: $\frac{c}{2R} = sin\gamma$, d.m.th. $c = 2Rsin\gamma$.

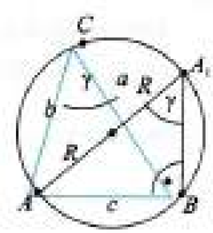


fig. 1

2° ΔABC është kënddrejtë fig. 2.

- Jashtashkruajmë vijë rrethore me rreze R rreth ΔABC kënddrejtë.
- Hipotenuza e këtij trekëndëshi është e barabartë me $2R$, d.m.th. $c = 2R = 2R \cdot 1 = 2R\sin 90^\circ = 2R\sin\gamma$.

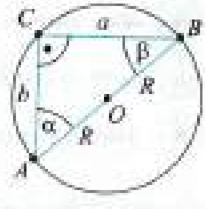


fig. 2

3° ΔABC është këndgjerë fig. 3.

- Rreth ΔABC jashtashkruajmë vijë rrethore me rreze R.
- Nëpër kulmin A e tërheqim diametrin AA_1. Katërkëndëshi i fituar AA_1BC është kordiak.
- $\sphericalangle\gamma$ dhe $\sphericalangle AA_1B$ janë kënde të përballtë në katërkëndëshin kordiak AA_1BC, pra shuma e tyre është 180°, d.m.th. $\sphericalangle AA_1B = 180^\circ - \gamma$.
- Prej trekëndëshit kënddrejtë ABA_1 vijon se:

$\frac{c}{2R} = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$, përkatësisht $c = 2R\sin\gamma$.

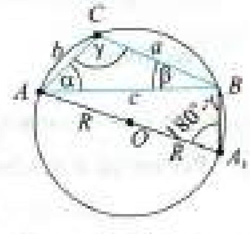


fig. 3

Domethënë, vërtetuam se $c = 2R\sin\gamma$, për çfarëdo trekëndësh.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohen edhe barasitë tjera.

Duke i pasur parasysh barasitë e sipërme, kemi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

me çka teorema u vërtetua.

Teorema e sinusit zbatohet gjatë zgjidhjes së detyrave të lidhura për çfarëdo trekëndësh, prej ku këto dy detyra që vijojnë janë të rëndësishme:

1. Zgjidhja e trekëndëshit nëse është dhënë një brinjë dhe dy kënde.
2. Zgjidhja e trekëndëshit nëse janë dhënë dy brinjë dhe këndi që shtrihet përballë njërit prej tyre.

Përveç këtyre dy detyrave themelore, ekzistojnë edhe detyra tjera te të cilat elementet e dhëna të trekëndëshit janë në një lloj relacioni, për shembull:

$a,\ \alpha,\ b+c;\quad a,\ R,\ b+c;\quad b,\ \beta,\ a-c;\quad R,\ a+b+c,\ \alpha$ etj.

1 Zgjidhe trekëndëshin të dhënë me $a = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

Vëre zgjidhjen:

- Këndi $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 75^\circ$.
- Prej teoremës së sinusit kemi: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, prej ku $b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta$.

$$b = \frac{3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}\sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},\ b = 2\sqrt{3}.$$

Brinjën c e caktojmë me zbatimin e teoremës së sinusit për së dyti herë, d.m.th.

$$\frac{a}{sin\alpha}=\frac{c}{sin\gamma} \Rightarrow c=\frac{a}{sin\alpha}sin\gamma .$$

$$c=\frac{3\sqrt{2}}{sin60^{\circ}}sin75^{\circ}=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right),\ c=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Vërejtje: Me dy kënde dhe një brinjë të dhënë, detyra gjithmonë ka zgjidhje të vetme.

2 Zgjidhe trekëndëshin ABC të dhënë me dy brinjë dhe këndin përballë njërit prej tyre:

a) $a=12,\ b=15,\ \beta=59^{\circ}21'$; b) $a=4,\ c=13,\ \alpha=14^{\circ}15'$;

c) $b=5,\ c=3,\ \gamma=45^{\circ}$.

Vëre zgjidhjen:

a) Prej $\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}$ vijon $sin\alpha=\frac{a}{b}sin\beta$, $sin\alpha=\frac{12}{15}sin59^{\circ}21'$,

$sin\alpha=0,8\cdot 0,8602974=0,6882379$.

Prej $a<b \Rightarrow \alpha<\beta$, që do të thotë α mund të jetë vetëm kënd i ngushtë, pra detyra ka një zgjidhje të vetme, edhe pse barazimi $sin\alpha=0,6882379$ ka dy zgjidhje: α dhe $\pi-\alpha$.

Prandaj: $\alpha=45^{\circ}29'27''$

Këndi $\gamma=180^{\circ}-(\alpha+\beta)$; $\gamma=179^{\circ}59'60''-102^{\circ}50'27''$; $\gamma=77^{\circ}9'33''$.

b) $a=4,\ c=13,\ \alpha=14^{\circ}15'$.

Prej $\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}$ kemi $sin\gamma=\frac{c}{a}sin\alpha=\frac{13}{14}sin14^{\circ}15'$,

$sin\gamma=3,25\cdot 0,2461532=0,7999982<1$.

Prej $c>a$ kemi $\gamma>\alpha$ që do të thotë se γ mund të jetë kënd i gjerë, pra detyra ka dy zgjidhje: γ ose $\pi-\gamma$.

$$\gamma_1=53^{\circ}7'48'',\ \gamma_2=180^{\circ}-\gamma_1=126^{\circ}52'12''$$

Vlerat përkatëse për këndin e tretë janë:

$\beta_1=180^{\circ}-(\alpha+\gamma_1)$, $\beta_2=180^{\circ}-(\alpha+\gamma_2)$

$\beta_1=112^{\circ}37'12''$, $\beta_2=38^{\circ}52'48''$

Brinjën b e caktojmë duke e zbatuar përsëri teoremën e sinusit, d.m.th.

prej $\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}$ fitojmë $b=\frac{a\sin\beta}{sin\alpha}$.

$b_1=\frac{4\cdot sin112^{\circ}37'12''}{sin14^{\circ}15'}$; $b_2=\frac{4\cdot sin38^{\circ}52'48''}{sin14^{\circ}15'}$

$b_1\approx 15$; $b_2\approx 10,2$.

Domethënë

$$b_1 \approx 15; \quad \beta_1 = 112°37'12''; \quad \gamma_1 = 53°7'48''.$$
$$b_2 \approx 10{,}2; \quad \beta_2 = 38°52'48''; \quad \gamma_2 = 126°52'12''.$$

Që të bindemi se detyra ka dy zgjidhje, konstruktojmë trekëndësh ABC, me $a = 4$ cm, $c = 13$ cm dhe $\alpha = 15°$.

b) $b = 5, c = 3, \gamma = 45°$. Prej $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ fitojmë $\sin\beta = \frac{b}{c}\sin\gamma$.

$$\frac{b}{c}\sin\gamma = \frac{5}{3}\sin 45° = \frac{5}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}785113 > 1.$$

Domethënë, $\sin\beta > 1$, që nuk është e mundshme, pra përfundojmë se detyra nuk ka zgjidhje.

Që të bindemi se detyra nuk ka zgjidhje, konstruktojmë trekëndësh ABC, me $a = 4$ cm, $c = 13$ cm dhe $\alpha = 45°$.

Detyra

1. Zgjidhe ΔABC nëse: a) $b = 2$, $\alpha = 60°$, $\gamma = 105°$;
   b) $c = 2\sqrt{15}$, $b = 4\sqrt{5}$, $\alpha = 60°$; c) $b = \sqrt{6}$, $c = 2\sqrt{3}$, $\beta = 30°$.

2. Zgjidhe ΔABC, të dhënë me një brinjë dhe dy kënde:
   a) $a = 17$, $\alpha = 48°19'$, $\beta = 56°35'$; b) $b = 11$, $\alpha = 77°$, $\gamma = 57°34'$;
   c) $c = 7$, $\alpha = 21°47'12''$, $\beta = 107°27'$; ç) $a = 23{,}47$; $\beta = 51°32'$, $\gamma = 70°54'$.

3. Zgjidhe ΔABC, të dhënë me dy brinjë dhe një kënd përballë njërës prej tyre:
   a) $a = 450$, $b = 530$, $\alpha = 53°48'$; b) $b = 2{,}9$; $c = 2{,}1$; $\beta = 98°56'$;
   c) $a = 40{,}8$; $b = 25{,}7$, $\beta = 34°16'$; ç) $b = 6$; $c = 4$; $\gamma = 60°$.

4. Zgjidhe ΔABC, nëse
   a) $R = 2\sqrt{6}$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$; b) $R = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$;
   c) $R = 3\sqrt{2}$, $a = 6$, $\gamma = 60°$; ç) $R = 23$, $a = 31$, $b = 28$.

5. Zgjidhe ΔABC, nëse:
   a) $R = 8{,}125$, $a = 13$, $h_b = 12$; b) $R = 7\sqrt{3}$, $b = 24$, $h_c = 12\sqrt{3}$;
   c) $R = 1$, $a + b + c = 3 + \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$.

6. Vërteto se vlen për çfarëdo trekëndësh $abc = 8R^3\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$.

7. Dy brinjë në një trekëndësh qëndrojnë si $4 : 11$, kurse këndet e përballta si $1 : 3$. Cakto këndet e trekëndëshit.

8. Njehso syprinën dhe perimetrin e paralelogramit me diagonalen $d_1 = 25$ dhe këndin $\alpha = 61°55'$.

22 TEOREMA E KOSINUSIT

Gjatë të zgjidhurit e detyrave të ndryshme të lidhura me çfarëdo trekëndësh, përveç teoremës së sinusit shfrytëzohet edhe kjo

Teoremë: Katrori i çfarëdo brinje të trekëndëshit është i barabartë me shumën e katrorëve të dy brinjëve tjera, e zvogëluar për prodhimin e dyfishtë të atyre dy brinjëve dhe kosinusit të këndit ndërmjet tyre, d.m.th.

$$1.\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha;$$
$$2.\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta;$$
$$3.\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

Vërtetimi: Vërtetimin do ta bëjmë për barasinë e tretë në këto raste:
1. ΔABC është këndngushtë 2. ΔABC është këndgjerë; 3. ΔABC është kënddrejtë.

1° ΔABC është këndngushtë (fig. 1)

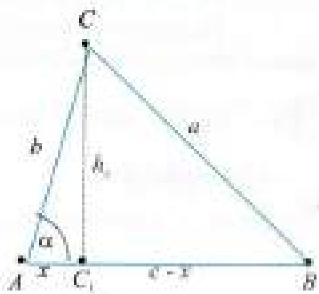


fig. 1

- Me tërheqjen e lartësisë CC_1 trekëndëshin ABC e ndajmë në dy trekëndësha kënddrejtë: AC_1C dhe CC_1B.
- Me zbatimin e teoremës së Pitagorës kemi:

$$a^2 = h_c^2 + (c - x)^2$$
$$h_c^2 = b^2 - x^2.$$

- Shprehjen për h_c^2 e zëvëndësojmë te barasia e parë, pra kemi

$$a^2 = b^2 - x^2 + (c - x)^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2, \text{ d.m.th } a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

- Prej ΔAC_1C kemi $\frac{x}{b} = \cos\alpha$, d.m.th. $x = b\cos\alpha$.
- Shprehjen për x e zëvëndësojmë te barasia $c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$, ku fitojmë:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos a$$

që duheshte të vërtetohet.

2° ΔABC është këndgjerë fig. 2.

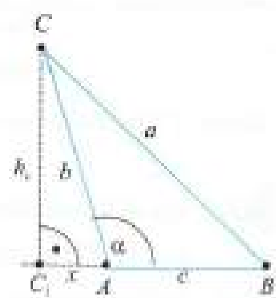


fig 2

- Me tërheqjen e lartësisë CC_1 trekëndëshin ABC e ndajmë në dy trekëndësha kënddrejtë: AC_1C dhe CC_1B.
- Me zbatimin e teoremës së Pitagorës fitojmë:

$a^2 = h_c^2 + (c + x)^2$ dhe $h_c^2 = b^2 - x^2$. Prej këtu vijon:

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2, \text{ d.m.th.}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

Prej ΔACC_1 kemi $\frac{x}{b} = cos(180^0 - \alpha) = -cos\alpha$, pra prej këtu $x = -bcos\alpha$.

Shprehjen për x e zëvëndësojmë te barasia $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$ dhe fitojmë:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$$

që duheshte të vërtetohet.

3° ΔABC është kënddrejtë (α është kënd i drejtë) fig. 2.

ΔABC është kënddrejtë, pra për atë vlen teorema e Pitagorës, d.m.th. $c^2 = a^2 + b^2$.

Pasi $cos90^o = 0$, për c^2 mund të shkruajmë:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos90^o$$

me çka teorema u vërtetua.

Teorema e kosinusit zbatohet nëse:

1. dy brinjë dhe këndi i formuar prej tyre;

2. janë dhënë të tre brinjët.

Teorema e kosinusit mund të zbatohet në zgjidhjen e trekëndëshit nëse është dhënë ndonjë relacion ndërmjet elementeve të trekëndëshit.

1 Zgjidhe ΔABC, nëse: $a = 8$, $b = 7$, $\gamma = 21^o47'$.

Vëre zgjidhjen:

Brinjën c e caktojmë prej barasisë

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma, \text{ d.m.th.}$$

$$c = \sqrt{8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot cos21^o47'} = \sqrt{64 + 49 - 111 \cdot 0{,}9285938}$$

$$c = \sqrt{9{,}92609} = 3{,}15.$$

Për njehsimin e njërit prej këndeve α ose β, gjithashtu, mund të zbatohet teorema e kosinusit

Prej $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$, kemi

$$cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{49 + 9 - 64}{2 \cdot 7 \cdot 3} = -0{,}1428571$$

Pasi $0^o < \alpha < 180^o$, për α kemi:

$$\alpha = arccos(-0{,}1428571), \text{ d.m.th. } \alpha = 98^o12'48'',$$

$$\text{kurse } \beta = 180^o - (\alpha + \gamma), \text{ kemi } \beta = 60^o0'12''.$$

Vërejtje: Për caktimin e njërit prej këndeve α ose β mund të zbatohet edhe teorema e sinusit

2 Zgjidhe trekëndëshit ABC, nëse:

a) $a = 17$, $c = 22$, $\beta = 56^o35'$; b) $b = 16$, $c = 15$, $\gamma = 107^o27'$.

3 Zgjidhe trekëndëshin ABC, nëse $a = 6$, $b = 7$, $c = 11$.

Vëre zgjidhjen:

Prej barasisë $cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, fitojmë:

$$cos\alpha = \frac{49+121-36}{2\cdot 7\cdot 11} = 0{,}8701298,\ \text{kurse}\ \alpha = 29^o31'34''.$$

$$cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{36+121-49}{132} = 0{,}818181,\ \text{d.m.th.}\ \beta = 35^o05'48'',\ \text{kurse}$$

këndi γ do të jetë $\gamma = 180^o - (\alpha+\beta)$ d.m.th. $\gamma = 115^o22'37''$.

4 Zgjidhe trekëndëshin ABC, nëse:

a) $a = 17, b = 12, c = 9$; b) $a = 2{,}3; b = 1{,}7; c = 1{,}5$.

5 Vërteto se për çfarëdo trekëndësh vlejnë barasitë:

$$a = bcos\gamma + ccos\beta;\quad b = ccos\alpha + acos\gamma,\quad c = acos\beta + bcos\alpha.$$

Vëre zgjidhjen:

Sipas teoremës së kosinusit kemi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot cos\alpha \quad \text{dhe} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot cos\beta.$$

Duke i mbledhut të dy anët e këtyre barazimeve fitojmë:

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - 2c(bcos\alpha + acos\beta)$$

prej ku $c = bcos\alpha + acos\beta$ që duheshte të vërtetohet..

Dy barasitë tjera vërtetoji vet.

Detyra

1 Zgjidhe trekëndëshin ABC nëse:

a) $a^2 + b^2 = 34, c = 7, \gamma = 120^o$; b) $a = 8, bc = 60, \alpha = 53^o7'50''$.

2 Pa e përdor kalkulatorin njehso brinjët e panjohura në trekëndësh, nëse:

a) $a + b = 20, c = 15, \beta = 60^o$; b) $c - a = 30, b = 33, \gamma = 120^o$.

3 Pa e përdor kalkulatorin, njehso këndin α në trekëndëshin ABC, nëse ndërmjet brinjëve të tij ekziston relacioni.

a) $a^2 = b^2 + c^2 - bc$; b) $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}$;

4 Pa e përdor tabelën, njehso brinjën e panjohur në trekëndëshin ABC, nëse:

a) $a = 7, b = 5, \alpha = 2\beta$; b) $a = 6, c = 4, \alpha = 2\gamma$.

Udhëzim: a) Me ndihmën e teoremës së sinusit do të fitojmë $cos\beta = \dfrac{7}{10}$, kurse pastaj zbatoje teoremën e kosinusit.

(5) Zgjidhe trekëndëshin ABC, nëse:

a) $a=27,\ b=29,\ t_c=26$;   b) $b=13,\ c=15,\ t_a=7$.

Udhëzim: Vazhdoje vijën e rëndimit t_c për gjatësinë $\overline{C_1D}=t_c$.

(6) Brinjët në trekëndësh qëndrojnë si $5:16:19$. Sa është këndi më i madh?

(7) Vërteto se për vijën e rëndimit në ΔABC vlen formula $t_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$.

23 ZBATIMI I TEOREMËS SË SINUSIT DHE KOSINUSIT

1 Cakto syprinën e paralelogramit diagonalet e të cilit janë e dhe f, kurse këndi ndërmjet tyre φ.

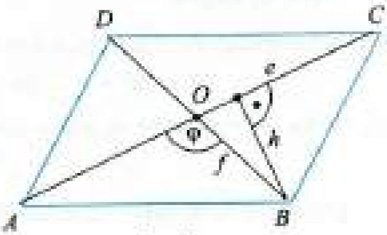


fig. 1

Vëre zgjidhjen:

Prej $S_{\Delta ABO}=S_{\Delta BOC}=\dfrac{1}{2}\overline{AO}\cdot h$ vijon se paralelogrami është ndarë në katër trekëndësha të cilët kanë syprina të barabarta. Prandaj syprina e paralelogramit është .

$$S=4\cdot\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cdot\sin\varphi}{2}$$

Pasi $\overline{AO}=\dfrac{e}{2}$, $\overline{BO}=\dfrac{f}{2}$, për syprinën fitojmë: $S=\dfrac{4\cdot\dfrac{e}{2}\cdot\dfrac{f}{2}\cdot\sin\varphi}{2}$, d.m.th.

$$S=\frac{e\cdot f\cdot\sin\varphi}{2}$$

2 Paralelogrami $ABCD$ është dhënë me brinjët $a=4$, $b=8$ dhe këndin ndërmjet tyre $\alpha=48°24'$. Të njehsohen diagonalet d_1 dhe d_2.

Vëre zgjidhjen:

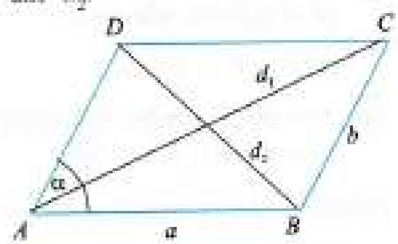


fig. 2

Duke e zbatuar teoremën e kosinusit në ΔABC dhe ΔABD fitojmë

$$d_2^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha$$

$$d_1^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(180°-\alpha)=$$

$$=a^2+b^2+2ab\cdot\cos\alpha$$

Duke e zëvëndësuar vlerën e dhënë, fitojmë:

$$d_2^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot cos\, 48^\circ 24' = 80 - 64 \cdot 0,663926 = 37,51\,;\; d_2 = 6,12.$$

$$d_1^2 = 80 + 42,49 = 122,49\,;\; d_1 = 11,07.$$

3 Në çdo trapez, shuma e katrorëve të diagonaleve është e barabartë me shumën e katrorëve të krahëve dhe prodhimit të dyfishtë të bazave. Vërteto!

Vëre zgjidhjen:

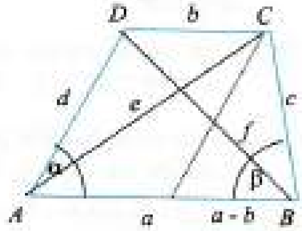


fig. 3

Nëse me e dhe f i shënojmë diagonalet e trapezit (fig. 3), atëherë sipas teoremës së kosinusit kemi:

$$e^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\beta,$$

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot cos\alpha.$$

Duke i mbledhur anët përkatëse të dy barasive të sipërme fitojmë:

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + c^2 + d^2 - 2a(c\,cos\beta + d\,cos\alpha).$$

Duke pasur parasysh se $c\,cos\beta + d\,cos\alpha = a - b$ (shihe detyrën2 nga mësimi 22) fitojmë:

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + c^2 + d^2 - 2a(a - b) = 2a^2 + c^2 + d^2 - 2a^2 + 2ab, \text{ d.m.th.}$$

$$e^2 + f^2 = c^2 + d^2 + 2ab,$$

që duheshte të vërtetohet.

4 Trekëndëshi me brinjë $a = 3$, $b = 5$ dhe këndin $\gamma = 120^\circ$ pasqyrohet simetrikisht në lidhje me brinjën më të gjatë. Cakto diagonalet e delltoidit të fituar.

Vëre zgjidhjen:

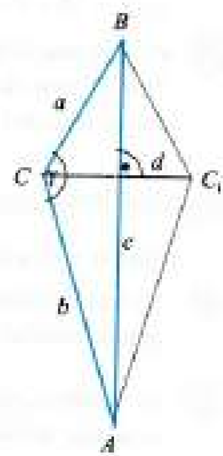


fig. 4

Cila brinjë është më e gjatë dhe pse?

Brinjën c do ta fitojmë duke shfrytëzuar teoremën e kosinusit, d.m.th.

$$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5\, cos 120^\circ$$

$$c^2 = 9 + 25 + 30 \cdot sin 30^\circ$$

$$c^2 = 49,\;\; c = 7.$$

Nëse diagonalja tjetër e delltoidit është d, atëherë

$$ab \cdot sin\,\gamma = \frac{cd}{2} \text{ prej ku } d = \frac{2ab \cdot sin\,\gamma}{c} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot sin 120^\circ}{7},$$

$$\text{d.m.th. } d = \frac{15\sqrt{3}}{7}.$$

Detyra

1) Vërteto se për brinjët dhe diagonalet e paralelogramit vlen:

$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

2) Sinuset e këndeve në trekëndësh qëndrojnë si 13 : 14 : 15. Njehso këndet e trekëndësht.

3) Njehso diagonalet e delltoidit me brinjë $a = 70$, $b = 80$ dhe këndi ndërmjet tyre $\varphi = 120^{\circ}$.

4) Është dhënë trapezi me baza $a = 49$, $b = 10$ dhe këndet pranë bazës së madhe $\alpha = 22^{\circ}37'12''$, $\beta = 14^{\circ}15'$. Njehso krahët dhe syprinën e trapezit.

5) Brinjët e trekëndëshit janë $a = 11$, $b = 24$ dhe $c = 31$. Njehso gjatësinë e simetrales së këndit më të madh të trekëndëshit.

6) Vërteto se këndi ndërmjet diagonaleve në drejtkëndësh njehsohet sipas formulës

$$tg\varphi = \frac{2ab}{a^2 - b^2}, \quad (b < a).$$

7) Në vijën rrethore k janë dhënë kordat $\overline{AB} = 8$ dhe $\overline{AC} = 5$, të cilat ndërmjet veti formojnë kënd prej 60°. Njehso rrezen e vijës rrethore.

8) Le të jenë M dhe N meset e brinjëve, të paralelogramit $ABCD$ me gjatësi a dhe b.

Vërteto: $\overline{AN}^2 + \overline{DM}^2 = 1{,}25(a^2 + b^2)$.

9) Vërteto se nëse për një trekëndësh ABC vlen:

a) $a^2 = b^2 + c^2 - bc^2$, atëherë $\alpha = 60^{\circ}$.

b) $a^2 = b^2 + c^2 + bc^2$, atëherë $\alpha = 120^{\circ}$.

10) Prej një pike të njëjtë nisen dy biçiklista në dy kahe të ndryshme. Njëri lëviz me shpejtësi 9 m/s, kurse tjetri me 15 m/s. Sa është largësia ndërmjet biçiklistave pas gjysmë ore pas nisjes, nëse kahet e tyre të lëvizjes formojnë kënd prej 60°?

11) Janë dhënë brinjët e trekëndëshit ABC: $b = 3$, $c = 2\sqrt{3}$, dhe këndi $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Cakto këndin γ të trekëndëshit, pa kalkulator.

12) Në trekëndëshin ABC janë dhënë $\alpha = 30^{\circ}$, $\beta = 45^{\circ}$ dhe $b = 10\sqrt{2}$. Cakto brinjën a të trekëndëshit, pa kalkulator.

13) Në trekëndëshin ABC janë dhënë: $\alpha = 30^{\circ}$, $\beta = 75^{\circ}$ dhe $a = \sqrt{18}$. Cakto brinjën më të madhe të trekëndëshit, pa kalkulator.

14) Në trekëndëshin ABC janë dhënë: $\alpha = 100^{\circ}$, $\gamma = 45^{\circ}$ dhe $b = 8{,}2$. Cakto brinjën më të vogël të trekëndëshit.

TEMA 3

ELEMENTET E KOMBINATORIKËS DHE GJASËS

Në këtë temë do të mësosh për

1 INDUKSIONI MATEMATIKOR

Të mësuarit aksiomatik të aritmetikës së numrave natyrorë e mundësojnë aksiomat e Peanos. (**Guisepe Peano**, 1858-1932), kurse ato janë:

I. 1 është numër natyror.

II. Çdo numër natyror ka saktësisht një pasardhës.

III. Dy numra të ndryshëm nuk mund të kenë pasardhës të njëjtë.

IV. 1 nuk është pasardhës i asnjë numri natyror.

V. Në çdo nënbashkësi M në vet bashkësinë $\mathbb{N}$ që e përmban numrin 1 e përmban edhe pasardhësin e çdo elementi të tij, i përmban të gjithë numratë natyrorë,

1 Njehso shumën e 100 numrave të parë natyrorë.

Vëre zgjidhjen:

$1+2+3+...+98+99+100;$

$1+2=3=\dfrac{2\cdot(1+2)}{2};$

$1+2+3=6=\dfrac{3\cdot(1+3)}{2};$

$1+2+3+4=10=\dfrac{4\cdot(1+4)}{2};$

Vëren se shuma e katër numrave të parë natyrorë është e barabartë me gjysmëprodhimin prej numrit të mbledhësave dhe shumës së mbledhësit të parë dhe të katërt.

Provo a vlen e njëjta rregullë për shumën e 10 numrave të parë natyrorë.

Mund të përfundohet se gjykimi vlen edhe për shumën e 100 numrave natyrorë, d.m.th.

$$1+2+3+...+98+99+100=\frac{100\cdot(1+100)}{2}=5050.$$

Mënyra e këtillë e të menduarit na çon deri te supozimi se për çfarëdo numër natyror n vlen:

$$1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(1+n)}{2}.$$

2 Njehso shumën e 100 numrave natyrorë tek.

Vëre zgjidhjen:

$1+3+5+7+...+199;$

$1+3=4=2^2;$ $1+3+5=9=3^2;$ $1+3+5+7=16=4^2;$

Vëren se shuma e dy, tre ose katër numrave të parë tek është e barabartë me katrorin e numrit të mbledhësave. Prandaj mund të përfundohet se

$$1+3+5+7+...+199=100^2=10000.$$

Ky supozim a vlen për çfarëdo numër natyror n, d.m.th.

$$1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2\,?$$

Përfundimet e nxjerra në të dy detyrat janë vërtetime që vlejnë në përgjithësi, edhe pse saktësia e tyre mund të provohet për çfarëdo numër n. Prova nuk na garanton se gjykimi vlen edhe për numrin natyror pasardhës $n+1$.

Që të vërtetohet se gjykimi vlen për çfarëdo numër natyror, duhet të bëhet një mënyrë logjike me të cilën do të konstatohet se gjykimi i dhënë është i saktë për çfarëdo numër natyror. Mënyra e cila mundëson vërtetimin e gjykimeve të këtilla quhet ***principi i induksionit matematikor***, që bazohet në këtë:

Le të jetë $p(n)$ ndonjë gjykim saktësia e të cilit varet prej numrit natyror n.
1. Nëse $p(1)$ është i saktë.
2. Nëse prej supozimit për saktësinë e gjykimit $p(k)$ vijon saktësia edhe për $p(k+1)$, atëherë gjykimi $p(n)$ është i saktë për çdo numër natyror n.

Vërtetimi i implikacionit $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ është me rëndësi të veçantë. Përkatësisht, për $n=1$ tregohet se gjykimi $p(1)$ është i saktë. Duke marrë $k=1$, sipas implikacionit $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ vijon se prej $p(1) \Rightarrow p(2)$, d.m.th. $p(2)$ është gjykim i saktë. Prej këtu kemi: $p(2) \Rightarrow p(3)$, $p(3) \Rightarrow p(4)$ etj.

Çdo vërtetim i nxjerrë me principin e induksionit matematikor përbëhet prej këtyre tri fazave:

1. Prova se gjykimi i dhënë është i saktë për $n=1$.

2. Supozimi se gjykimi është i saktë për $n=k$, $k \in \mathbb{N}$, i cili quhet supozim induktiv.

3. Vërtetimi se gjykimi është i saktë edhe për numrin natyror pasardhës $n=k+1$.

3 Vërteto se gjyklimi $1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ është i saktë për çdo numër natyror n.

Vëre vërtetimin:

1. Provo a është i saktë gjykimi për $n=1$:

$p(1)$: $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$, domethënë gjykimi është i saktë.

2. Supozojmë se gjykimi është i saktë për $n=k$, d.m.th.

$p(k)$: $1+2+3+...+k=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$ është i saktë

3. Duhet të vërtetojmë se gjykimi është i saktë edhe për $n=k+1$, d.m.th.

$$p(k+1):\ 1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}.$$

Prej supozimit kemi

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Prandaj, pasi për $n=1$ gjykimi $p(1)$ është i saktë, kurse prej supozimit se për $n=k$ është i saktë gjykimi $p(k)$, e vërtetojmë saktësinë e implikacionit $p(k) \Rightarrow p(k+1)$.

sipas principit të induksionit matematikor vijon se gjykimi është i saktë për çdo numër natyror n.

4 Vërteto se për çdo numër natyror n është i saktë: $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

5 Me induksionin matematikor vërteto gjykimin

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \quad \forall n\in \mathbb{N}.$$

Vëre vërtetimin:

1. Për $n=1$, $p(1)$ është i saktë, pasi $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

2. Supozojmë se për $n=k$, $p(k)$: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ është i saktë

3. Duhet të vërtetojmë se për $n=k+1$,

$$p(k+1): \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

- Prej supozimit kemi

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}\right)+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Shpeshherë në disa shkenca natyrore me shumë prova të fundme të bëra ose dukuri dhe vështrime të kryera të disa dukurive nxirret përfundimi i përgjithshëm ose konstatohet ligji i përgjithshëm.

Induksioni i atillë quhet induksion empirik jo i plotë. Nxjerrja e përfundimit me induksionin empirik është në bazë të të dhënave jo të plota, të bashkësive jo të plota nga shembujt e vërejtur dhe mund të ndodh dukuritë ose shembujt që nuk janë shqyrtuar të mos pajtohen me ligjet e konstatuara. Induksioni empirik matematikor mund të sjellë deri në përfundime jo të sakta

6 Le të jetë $p(n)=n^2-79n+1601$. A është $p(n)$ është numër i thjeshtë?

Vëre zgjidhjen:

- Me provë konstatojmë se

$p(1)=1^2-79\cdot 1+1601=1523;$

$p(2)=2^2-79\cdot 2+1601=1447;$

$p(3)=3^2-79\cdot 3+1601=1373$ etj.

$p(4)$, $p(5)$, ..., $p(79)$ janë numra të thjeshtë.

Me induksionin empirik mund të përfundohet se gjykimi $p(n)$ është i saktë për çdo numër natyror. Megjithatë për $n=80$, $p(80)=80^2-79\cdot 80+1601=1681$, kurse ky numër është i përbërë, pasi 1681 plotëpjesëtohet me 41. Domethënë, gjykimi nuk është i saktë për çdo numër natyror.

7 Gjykimi $2+4+6+8+\ldots+2n=n^2+n+1$ a është i saktë për çdo numër natyror n?

Principi i induksionit matematikor bazohet në këtë:

Aksiomë: Nëse për një bashkësi M të numrave natyrorë vlen:
$1\in M$ dhe nëse $n\in M \Rightarrow (n+1)\in M$, për çdo $n\in M$, atëherë $M=\mathbb{N}$, aksioma e pestë e Peanos

Detyra

Duke e zbatuar induksionin matematikor vërtetoji këto gjykime:

1. $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

2. $2+5+8+\ldots+(3n-1)=\dfrac{n(3n+1)}{2}$.

3. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

5. $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

6. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

7. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

8. $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2n-1)x=\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

9. Vërteto se për çfarëdo numër natyror.

a) 7^n+3n-1 plotëpjesëtohet 9;

b) $2^{3(n+1)}-7n+41$ plotëpjesëtohet me 49;

c) $3^{2(n+1)}-8n-9$ plotëpjesëtohet me 64.

2 PERMUTACIONET

A Le të jetë dhënë një bashkësi e fundme $A_n = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, elementet e të cilës mund të jenë persona, sende, bimë, numra, shenja, ngjarje etj Prej bashkësisë së dhënë të fundme mund në mënyra të ndryshme të formohen bashkësi të ndryshme të radhitura. Te disa prej atyre bashkësive disa elemente mund të përsëriten, d.m.th. të paraqiten shumë herë.

Pjesa e matematikës që e studion formimin e këtyre bashkësive dhe nënbashkësive dhe radhitjen e mundshme dhe radhitjen e elementeve quhet ***kombinatorika***.

Kombinatorika i studion permutacionet, variacionet dhe kombinacionet e bashkësive të fundme, për të cilat vlen ky

Përkufizim: Për një bashkësi *A* themi se është e fundme nëse $A = \varnothing$ ose nëse ekziston numër natyror *n*, ashtu që çdo elementi nga bashkësia $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ mund t'i shoqërohen elemente nga bashkësia $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dhe anasjelltas.

Për shembull, nxënësit në klasën tënde, në shkollën tënde, në Republikën e Maqedonisë janë bashkësi të fundme. Bashkësia $B = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ është bashkësi e fundme..

B 1 Është dhënë bashkësia $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Shkruaje çdo radhitje të mundshme të bashkësisë së dhënë.

Vëre zgjidhjen:

- Njëra nga radhitjet e këtyre elementeve është $a_1\ a_2\ a_3$ quhet ***permutacion fillestar.***

- Permutacion i ri është $a_1\ a_3\ a_2$ i fituar me zhvendosjen e dy elementeve të fundit a_2 dhe a_3.
- Permutacioni që vijon është $a_2\ a_1\ a_3$, i fituar me zhvendosjen e elementit të parë dhe të dytë a_1 dhe a_2 në permutacionin fillestar etj.

Zgjidhjen shpeshherë e paraqesim në këtë mënyrë:

$a_1\ a_2\ a_3$	$a_2\ a_1\ a_3$	$a_3\ a_1\ a_2$
$a_1\ a_3\ a_2$	$a_2\ a_3\ a_1$	$a_3\ a_2\ a_1$

Tre elemente të bashkësisë së dhënë mund të radhiten në 6 mënyra të ndryshme $(6 = 1 \cdot 2 \cdot 3)$.

Mbaj mend!

Çdo radhitje e elementeve prej një bashkësie të fundme në të cilën asnjë element nuk përsëritet është ***permutacion pa përsëritje***.

- Dy permutacione janë të ndryshme nëse janë elementet me radhitje të ndryshme prej bashkësisë së njëjtë.

2 Është dhënë bashkësia $A=\{1,2,3,4\}$. Shkruaji të gjithë numrat katërshifrorë me shifra të ndryshme, shifrat e të cilave janë elementet e bashkësisë së dhënë.

Vëre zgjidhjen:

- Numrat e kërkuar janë permutacionet e elementeve të bashkësisë së dhënë.

Permutacioni filestar shpeshherë është radhitja e dhënë e elementeve, nëse ndryshe nuk është theksuar. Prandaj kemi:

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

Vëre mënyrën e formimit të permuatcioneve:

- Në shtyllën e parë shifra 1 është në vendin e parë, kurse shifrat tjera te numri fitohen me permutimin e shifrave 2, 3 dhe 4.
- Shtylla e dytë është fituar ashtu që shifra 2 vjen në vendin e parë kurse shifrat tjera fitohen me perumtimin e shifrave 1, 3 dhe 4 etj.
- Me shifrat e dhëna mund të shkruhen gjithsej 24 numra katërshifrorë me shifra të ndryshme $(24=1\cdot2\cdot3\cdot4)$

3 Sa numra të ndryshëm n - shifrorë mund të shkruhen me n shifra të ndryshme te të cilët asnjë shifër të mos përsëritet?

Vëre zgjidhjen:

- Shifra e parë mund të zgjedh n mënyra të ndryshme.
- Shifra e dytë mund të zgjedh $n-1$ mënyra, një shifër më pak.

Domethënë, dy shifrat e para mund të zgjedhin $n\cdot(n-1)$ mënyra.

- Për vendin e tretë mund të zgjedhin $n-2$ shifra (dy shifra tani më janë marrë). Domethënë, tre shifrat e para te numri mund të zgjedhin $n(n-1)(n-2)$ mënyra.

Duke e vazhduar mënyrën, për vendin e fundit te numri do të ngel vetëm një shifër.

Prandaj, prej n shifrave të ndryshme mund të shkruhen

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \text{ numra.}$$

Mbaj mend!

Prodhimi i n numrave të parë natyrorë quhet ***„en - faktoriel"*** dhe shënohet me $n!$, d.m.th. $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n=n!$.

$1!=1$; $2!=1\cdot 2=2$; $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$; $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ etj. kurse $0!$ sipas përkufizimit është i barabartë me 1, d.m.th. $0!=1$.

Teorema: Numri i permutacioneve pa përsëritje prej n elemente është

$$P(n)=n!$$

Vërtetimi: Teoremën do ta vërtetojmë duke zbatuar induksionin matematikor.
Për $n=1$ gjykimi është i qartë.
Të supozojmë se për $n=k$ gjykimi është i saktë, d.m.th. nëse një bashkësi ka k elemente, atëherë prej tyre fitohen $k!$ permutacione.
Le të jetë $n=k+1$, përkatësisht bashkësia ka $k+1$ elemente. Prej kësaj bashkësie mund të formohen $k+1$ nënbashkësi, ashtu që çdo nënbashkësi ka nga k elemente. Sipas supozimit induktiv prej elementeve të çdo nënbashkësie mund të fitohen $k!$ permutacione, d.m.th.

$$P(k)=k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=k!$$

Numri i përgjithshëm i permutacioneve prej $k+1$ elemente është e barabartë me:

$$P(k+1)=(k+1)\cdot P(k)=(k+1)\cdot k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=(k+1)!$$

Sipas principit të induksionit matematikor gjykimi është i saktë për çdo numër natyrorë n.

Prej teoremës vijon se $P(n)=n\cdot P(n-1)$. Domethënë, nëse bashkësia ka n elemente atëherë numri i permutacioneve të cilët fillojnë me element të njëjtë është i barabartë me numrin e permutacioneve prej elementeve që kanë ngelur, d.m.th. $P(n-1)=(n-1)!$.

4 Sa numra pesëshifrorë mund të formohen prej shifrave 0, 3, 4, 5 i 6? Sa prej tyre:

a) fillojnë me 43 dhe cilët janë ato;
b) fillojnë me 5, por nuk mbarojnë me 6;
c) janë tek;
ç) nuk fillojnë dhe nuk mbarojnë me shifrën çift?

Vëre zgjidhjen:

Çdo numër pesëshifrorë me shifra të ndryshme është permutacion pa përsëritje të shifrave të dhëna, sipas teoremës, janë

$$P(5)=5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120.$$

Te ato120 numra janë edhe numrat: 03456, 03465, 03645 etj. të cilët nuk janë pesë-shifrorë. Ato numra janë të formës $0(3456)$. Shënimi $0(3456)$ paraqet se numrat e kërkuar fitohen duke i permutuar shifrat 3, 4, 5 dhe 6. Numri i tyre është

$$P(4)=4!=24.$$

Gjithsej numra pesëshifrorë që mund të shkruhen me shifrat 0, 3, 4, 5 dhe 6 janë

$$P(5)-P(4)=5!-4!=96.$$

a) Numrat pesëshifrorë që fillojnë me 43 janë të formës $43(056)$, por janë

$$P(3)=3!=6.$$

Ato janë:	43056	43056	43056
	43056	43056	43056

b) Numrat që fillojnë me 5 janë të formës $5(0346)$, por që mbarojnë me 6 janë të formës $5(034)6$. Numra të atillë ka gjithsej

$$P(4)-P(3)=4!-3!=18.$$

c) Numrat tek janë të formës $(0346)5$ ose $(0456)3$, prej të cilëve $0(346)5$ dhe $0(456)3$ nuk janë pesëshifrorë. Të gjithë numrat tek janë

$$2\cdot P(4)-2\cdot P(3)=2\cdot 4!-2\cdot 3!=36.$$

ç) Ato janë numrat shifrat e fundit të të cilëve janë tek, d.m.th. të formës $3(046)5$ ose $5(046)3$, kurse gjithsej janë

$$2\cdot P(3)=2\cdot 3!=12.$$

5 Është dhënë bashkësia $A=\{4,6,7,8\}$.

a) Sa numra katërshifrorë me shifra të ndryshme mund të formohen prej elementeve të bashkësisë së dhënë?

b) Sa prej numrave të formuar janë çift, kurse sa tek? Shkruaji ato numra.

C

6 Shkruaji të gjitha permutacionet prej elementeve a, a, a dhe b.

Vëre zgjidhjen:

- Vëre, elementi a përsëritet 3 herë. Çdo radhitje e atyre elementeve quhet ***permutacion me përsëritje***.
- Nëse të gjitha elementet janë të ndryshme, do të ketë $P(4)=4!=24$ permutacione.
- Në këtë rast i kemi këto permutacione: $aaab$, $aaba$, $abaa$, $baaa$.
- Në bashkësinë e dhënë ka një grup prej 3 elementeve të barabartë, pra $3!=6$ permutacione prej atyre elementeve në realitet është një permutacion.
- Numri i permutacioneve me përsëritje është aq herë më i vogël prej numrit të përgjithshëm të permutacioneve, sa është numri i permutacioneve të elementeve që përsëriten, d.m.th. $24:6=4$, prandaj shkruajmë: $P_3(4)=\dfrac{4!}{3!}=4$.

Mbaj mend!

Numri i permutacioneve me përsëritje prej n elemente prej të cilëve një element përsëritet k herë $(k<n)$ njehsohet me formulën

$$P_k(n)=\frac{n!}{k!}.$$

7 Sa permutacione mund të formohen prej fjalës RAMAZAN nga shkronjat e tij?

8 Sa permutacione mund të formohen prej shkronjave të fjalës MATEMATIKA?

Vëre zgjidhjen:

- Fjala MATEMATIKA përmban 10 shkronja, pra numri permutacioneve është

$$P(10)=10!.$$

- Shkronja A përsëritet 3 herë, $P(3)=3!=6$.
- Shkronja M përsëritet 2 herë, $P(2)=2!=2$.
- Shkronja T përsëritet 2 herë $P(2)=2!=2$.
- Numri i të gjitha permutacioneve është $6\cdot 2\cdot 2=24$ më i vogël se numri i përgjithshëm i permutacioneve, pra shkruajmë

$$P_{3,2,2}(10)=\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=151200.$$

Mbaj mend!

Numri i permutacioneve me përsëritje prej n elemente ndërmjet të cilëve ka shumë grupe prej nga $k_1, k_2, \ldots, k_m$ elemente identike njehsohet me formulën

$$P_{k_1k_2\ldots k_m}(n)=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_m!},\quad k_1+k_2+\ldots+k_m=n,\ m<n.$$

9 Sa numra shtatëshifrorë mund të shkruhen prej shifrave 1, 2 dhe 3, ashtu që te çdo numër të ketë 2 treshe, 3 dyshe dhe 2 njëshe?

Detyra

1 Njehso vlerën e shprehjes:

a) $8!+9!$; b) $10!-1!$; c) $\frac{102!}{100!}$; ç) $\frac{6!-5!}{120}$.

2 Thjeshto shprehjen: a) $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$; b) $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$.

3 Thjeshto thyesën: a) $\frac{(m+3)!}{m!}$; b) $\frac{n!}{(n-2)!}$.

4 Zgjidhe barazimin

a) $P(x)=24x$; b) $P(x+1)-8\cdot P(x-1)=8\cdot P(x)$; c) $P(x):P(x-2)=90$.

5 Shkruaji të gjitha permutacionet prej shkronjave të emrit NORA. Cili është me radhë permutacioni RONA, nëse permutacioni fillestar është

a) permutacioni i dhënë;

b) radhitja leksikografike (sipas alfabetit) e shkronjave?

6 Në sa mënyra mund të radhiten 5 libra në një bangë, nëse njëri libër gjithmonë duhet të jetë në mes?

7 Sa permutacione prej elementeve $1,2,3,4,5,6,7,8$ fillojnë me:

a) 5; b) 123; c) 8642?

8 Në sa mënyra 6 persona mund të ulen në një tryezë të rrumbullaktë?

9 Në sa mënyra 6 persona mund të ulen në një tryezë të rrumbullaktë, nëse dy persona prej tyre duan të ulen gjithmonë njëri pranë tjetrit?

10 Cakto numrin e të gjitha permutacioneve të ndryshme prej shifrave $1,1,1,2,2,2$.

11 Sa numra shtatëshifrorë të ndryshëm mund të formohen prej shifrave $0,0,0,0,1,2,3$?

12 Sa permutacione prej elementeve $a, a, a, a, a, b, b, b, c$ fillojnë me:

a) a; b) b; c) c?

13 Sa permutacione prej elementeve 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4 , 4 fillojnë me:

a) 22; b) 313; c) 1234?

3 VARIACIONET

Kujtohu!

- Prej shifrave 1, 2 dhe 3 shkruaji të gjitha numrat dyshifrorë me shifra të ndryshme.
- Çka është nënbashkësi e bashkësisë së dhënë?
- Shkruaji të gjitha nënbashkësitë e bashkësisë $A=\{1,2,3\}$.

A **1** Është dhënë bashkësia $A=\{1,2,3,4\}$.

Shkruaji të gjithë numrat

a) dyshifrorë

b) treshifrorë me shifra të ndryshme që janë elemente të bashkësisë së dhënë.

Vëre mënyrën e formimit të numrave:

Prej 1, 2, 3, 4 kemi:

a)

1 2	2 1	3 1	4 1
1 3	2 3	3 2	4 2
1 4	2 4	3 4	4 3

b)

1 2 3	2 1 3	3 1 2	4 1 2
1 2 4	2 1 4	3 1 4	4 1 3
1 3 4	2 3 1	3 2 1	4 2 1
1 3 2	2 3 4	3 2 4	4 2 3
1 4 2	2 4 1	3 4 1	4 3 1
1 4 3	2 4 2	3 4 2	4 3 2

Vëre!

- Të gjithë numrat dyshifrorë janë permutacionet e elementeve të nënbashkësive $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ nga bashkësia e dhënë.
- Numrat treshifrorë janë permutacionet e elementeve të nënbashkësive $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}$ dhe $\{2,3,4\}$

Mbaj mend!

Çdo nënbashkësi e radhitur e një bashkësie të fundme prej elementeve të ndryshme është ***variacion pa përsëritje***.
Nëse bashkësia ka n elemente, kurse nënbashkësia k elemente $(k \leq n)$, atëherë variacioni është prej n elemente të klasës k.

Në bashkësinë e dhënë të detyrës, numrat dyshifrorë janë variacione pa përsëritje të klasës së dytë, kurse numrat treshifrorë janë variacione pa përsëritje të klasës së tretë.

2 Shkruaji të gjitha variacionet prej elementeve a, b, c, d të klasës:
a) parë;   b) katërt.

- Çka paraqesin variacionet e klasës katërt të bashkësisë së dhënë?
- Dy variacione të klasës së njëjtë janë të ndryshme nëse ndryshojnë ose sipas radhës së elementeve, ose sipas elementeve.

B Numri i variacioneve prej n elemente të klasës k, pa përsëritje shënohet me V_n^k.

- Për detyrën e parë kemi: $V_3^2 = 12 = 4 \cdot 3$ dhe $V_4^3 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2$.
- Te detyra e dytë sigurisht fitove: $V_4^1 = 4$ dhe $V_4^4 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Vëren se numri i permutacioneve pa përsëritje është i barabartë me prodhimin e aq numrave të njëpasnjëshëm, aq sa është klasa k variacioneve, kurse shumëzuesi më i madh (i parë) është i barabartë me n elementet e bashkësisë.

Për shembull $\boxed{V_8^3 = \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6}_{3}}$; $V_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$, ose në përgjithësi për numrin e variacioneve pa përsëritje të klasës k për n - elemente vlen kjo:

Teoremë. Numri i variacioneve prej n elemente të klasës k pa përsëritje është:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1)).$$

Vërtetimin do ta nxjerrim me induksionin matematikor

- Gjykimi për $n=1$ është i saktë, pasi $V_1^1 = 1$.
- Për $n = i$; $1 \leq k \leq i$, të supozojmë se gjykimi është i saktë, d.m.th.

$$V_i^k = i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdots (i-(k-1)),$$

i cili quhet supozim induktiv.

- Le të jetë $n = i+1$ dhe le të jetë $1 \leq k < i+1$.

Nëse prej një bashkësie që përmban $i+1$ elemente i lejmë „me radhë" një element do të fitohen $i+1$ nënbashkësi që përmbajnë nga i elemente. Numri i variacioneve të klasës k

prej elementeve të çdonjërës të atyre nënbashkësive, sipas supozimit induktiv, është e barabartë me:

$$V_i^k = i\cdot(i-1)\cdot(i-2)\cdots(i-(k-1)).$$

Nëse çdonjërës prej këtyre variacioneve në vendin e parë ia shtojmë elementin e lënë, atëherë do të fitojmë variacione të klasës $k+1$. Numri i përgjithshëm i variacioneve prej $i+1$ elemente të klasës $k+1$ është i barabartë me:

$$V_{i+1}^{k+1} = (i+1)\cdot V_i^k = (i+1)\cdot i\cdot(i-1)\cdot(i-2)\cdots(i-(k+1)).$$

Sipas principit të induksionit matematikor gjykimi është i saktë për çdo numër natyror n me të cilin teorema është vërtetua.

Numri i variacioneve të klasës n të n elementeve është

$$V_n^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!,$$

d.m.th. është i barabartë me numrin e permutacioneve prej n elemente.

3 Në një këshill prej 11 anëtarë duhet të zgjedhet kryesi prej 3 anëtarë. Në sa mënyra mund të zgjedhet ajo kryesi, nëse çdo anëtar i këshillitt mund të jetë i zgjedhur?

Vëre zgjidhjen:

- Zgjedhja e kryesisë është treshe e radhitur, d.m.th. variacion i klasës tretë prej 11 elemente. Prandaj, $V_{11}^3 = 11\cdot 10\cdot 9 = 990$.
- Formula $V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k+1))$ mund të shkruhet në tjetër formë. Nëse formulën e dhënë e shumëzojmë dhe e pjesëtojmë me numrat natyrorë $(n-k),(n-k-1),(n-k-2),\ldots,2,1$ do të fitojmë:

$$V_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k-1)\cdot(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

4 Sa fjalë të ndryshme prej 5 shkronjave të ndryshme mund të formojnë shkronjat e alfabetit të gjuhës shqipe, pa marrë parasysh atë se disa fjalë nuk kanë kurfarë domethënie?

Vëre zgjidhjen:

- Fjalët e kërkuara prej klasës 5 nga 36 elemente, d.m.th.

$$V_{36}^5 = \frac{36!}{(36-5)!} = \frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31!}{31!} = 45239040\ .$$

5 Sa numra katërshifrorë, me shifra të ndryshme mund të formohen prej shifrave 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dhe 9?

Kujtohu!

- Çka është prodhimi i Dekartit për dy bashkësi?
- $A\times B = \{(x,y) \mid x\in A \land y\in B\}$.
- $\{a,b\}\times\{a,b\} = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

C 6 Shkruaji të gjitha numrat dyshifrorë me shifrat 1, 2 dhe 3.

Vëre zgjidhjen:

- Shkruaji elementet e prodhimit të Dekartit $\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}$.

$$\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}.=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1)(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

- Numrat e kërkuar janë:

11	21	31
12	22	32
13	23	33

Gjithsej janë 9 $(9=3\cdot 3=3^2)$.

- Te disa prej numrave shifrat përsëriten, ato janë variacione me përsëritje të klasës dytë prej tre elemente, kurse shënohen me

$$\overline{V}_3^2=3^2.$$

Mbaj mend!

Çdo element prej prodhimit të Dekartit $A\times A$ quhet variacion me përsëritje të klasës dytë, prej aq elemente, sa elemente ka bashkësia A.

7 Shkruaji të gjitha numrat treshifrorë prej shifrave 1, 2 dhe 3.

Vëre zgjidhjen:

- Shkruaje prodhimin e Dekartit $A\times A\times A$. Pasi prodhimi i Dekartit

$A\times A$ kemi, prodhimi $A\times A\times A=(A\times A)\times A=(A\times A)\times\{1,2,3\}=$

$$=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),\ldots,(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3)\}.$$

- Vëre mënyrën e formimit të $A\times A\times A$:

Çdo elementi prej $A\times A$ i shoqërohet element prej bashkësisë $\{1,2,3\}$.

- Numrat e kërkuar janë:

111	121	131	211	...	331
112	122	132	212		332
113	123	133	213		333

Këto numra paraqesin variacione me përsëritje të klasës 3 me 3 elemente.

- Gjithsej ka 27 numra treshifrorë, d.m.th. $\overline{V}_3^3=3^3=27$.

8 Shkruaji të gjitha numrat treshifrorë me shifrat 1 dhe 2.

Mbaj mend!

Le të jetë dhënë bashkësia $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$. Çdo element prej prodhimit të Dekartit $A\times A\times A\cdots A$ (bashkësia A si faktor është marrë k herë) quhet ***variacion me përsëritje*** prej klasës k nga n elemente. Numri i variacioneve me përsëritje shënohet me $\overline{V}_n^k$, kurse është i barabartë me

$$\overline{V}_n^k=n^k.$$

9 Sa shkronja të Morzeut mund të formohen prej shenjave themelore „ · " dhe „ – ", nëse një shkronjë shkruhet më së shumti me 4 shenja themelore?

Vëre zgjidhjen:

- Me një shenjë themelore mund të shkruhen $\overline{V}_2^1 = 2$ shkronja.
- Me dy shenja le të shkruhen $\overline{V}_2^2 = 2^2 = 4$ shkronja.
- Me tri shenja $\overline{V}_2^3 = 2^3 = 8$ shkronja.
- Me katër shenja shkruhen $\overline{V}_2^4 = 2^4 = 16$ shkronja.

Numri i përgjithshëm i shkronjave të shkruara është:

$$\overline{V}_2^1 + \overline{V}_2^2 + \overline{V}_2^3 + \overline{V}_2^4 = 30.$$

10 Sa numra treshifrorë formojnë shifrat 3, 4, 5, 6 dhe 7?

Detyra

1. Shkruaji të gjitha variacionet pa përsëritje të klasës, parë, dytë, tretë prej elementeve a, b, c dhe d.

2. Njehso: a) V_{12}^3; b) $V_{10}^4 : V_{10}^3$.

3. Zgjidhi barazimet: a) $V_x^2 = 380$; b) $9 \cdot V_n^3 = 5 \cdot \overline{V}_n^3$.

4. Sa signale të ndryshme mund të dërgohen me 5 flamuj të ndryshëm nëse përdoren: nga një, nga dy, nga tre, nga katër flamuj së bashku?

5. Sa numra pesëshifrorë mund të formohen prej shifrave 0, 1, 3, 5, 7 dhe 9 ku asnjë shifër nuk përsëritet?

6. Sa numra pesëshifrorë mund të formohen prej shifrave 0, 1, 3, 5, 7 dhe 9 ku shifra 0 nuk gjendet në vendin e parë as në vendin e fundit dhe asnjë shifër të mos përsëritet?

7. Sa numra pesëshifrorë me shifra të ndryshme mund të formohen prej dhjetë shifrave 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? Sa ka ndërmjet tyre që:
   a) fillojnë me 5;
   b) mbarojnë me3;
   c) fillojnë me shifrën 1, kurse mbarojnë me shifrën 4?

8. Në një stacion hekurudhor jepen signale me ndihmën e 5 semaforëve. Sa signale të ndryshme mund të jepen nëse shigjetat e çdo semafori mund të marrin 3 pozita të ndryshme?

9. Me ndihmën e shifrave 4 dhe 5 shkruaji të gjithë numrat:
   a) dyshifrorë;
   b) treshifrorë;
   c) katërshifrorë.

10 Në tiketën për prognozën sportive gjenden 13 ndeshje. Në sa mënyra të ndryshme duhet të plotësohen tiketat që të fitohen 13 të qëlluara, nëse:

a) nuk dihet me siguri asnjë rezultat;

b) nuk dihen rezultatet e 5 ndeshjeve;

c) dihet se 7 ndeshje nuk mbarojnë baraz?

11 Në sa mënyra mund të notohet një nxënës në fund të vitit shkollor në 10 lëndë nëse:

a) në të gjitha lëndët mund të fiton notë prej 1 deri në 5;

b) në dy lëndë nuk mund të fiton notë më të madhe se 3, kurse në tri lëndë notë më të vogël se 4?

4 KOMBINACIONET

Kombinacioni është fjalë latine,kurse do të thotë:

- radhitja e punëve në mënyra të ndryshme;
- kombinimi i punëve të ndryshme që të fitohet tërësia;
- mënyra e të luajturit ose të punuarit

A 1 Është dhënë bashkësia $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

Caktoji të gjitha nënbashkësitë të bashkësisë së dhënë që kanë nga 3 elemente.

Vëre zgjidhjen:

Rendi i të shkruarit e elementeve në bashkësinë e dhënë nuk është i rëndësishëm pra, nënbashkësitë e kërkuara janë: $\{a_1,a_2,a_3\},\{a_1,a_2,a_4\}$, $\{a_1,a_3,a_4\}$ dhe $\{a_2,a_3,a_4\}$

Këto bashkësi paraqesin kombinacione të klasës tretë prej 4 elemente..

Mbaj mend!

Çdo nënbashkësi prej k elemente prej ndonjë bashkësie me n elemente $(k \le n)$ quhet kombinacion pa përsëritje të klasës k prej n elemente.

2 Shkruaji të gjitha kombinacionet e klasës dytë prej elementeve a_1, a_2, a_3, a_4.

Vëre zgjidhjen:

$a_1\ a_2$	$a_1\ a_3$	$a_1\ a_4$
	$a_2\ a_3$	$a_2\ a_4$
		$a_3\ a_4$

Dy kombinacione të klasës së njëjtë janë të ndryshme nëse kanë të paktën një element të ndryshëm.

Permutacionet $a_1\ a_2$ dhe $a_2\ a_1$ ose $a_2\ a_3$ dhe $a_3\ a_2$ paraqesin një kombinacion të njëjtë. Gjithashtu, të gjitha (6) permutacionet prej elementeve 1, 2, 3 paraqesin një kombinacion të njëjtë.

3 Shkruaji të gjitha kombinacionet prej klasës 3-të nga elementete 1, 2, 3, 4, 5.

B Numri i kombinacioneve pa përsëritje prej klasës k prej n elemente e shënojmë me C_n^k.

Te detyra 1 kemi $C_4^3 = 4$.

Numri i variacioneve $V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ është 6 herë më i madh se numri i kombinacioneve të klasës së njëjtë dhe prej numrit të njëjtë të elementeve, pasi të gjitha variacionet prej elementeve a_1, a_2, a_3, kurse ato janë $3! = 6$, paraqesin një kombinacion të njëjtë.

Teorema. Numri i kombinacioneve pa përsëritje të klasës k prej n elemente është
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Vërtetimi. Nëse shqyrtojmë cilëndo kombinacion të klasës k dhe bëjmë permutacione prej elementeve të tij, fitojmë $P(k) = k!$ permutacione, kurse të gjithë ato paraqesin një kombinacion. Prandaj, numri i kombinacioneve pa përsëritje të klasës k prej n elemente është $k!$ $(P(k) = k!)$ herë më i vogël se numri V_n^k, d.m.th.
$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P(k)}.$$

Pasi $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ dhe $P(k) = k!$ vijon se
$$C_n^k = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

4 Në një klasë nxënësit mësojnë 10 lëndë dhe kanë nga 6 orë në ditë. Në sa mënyra të ndryshme mund të bëhet orari i mësimeve sipas orëve, ashtu që 6 orë të jenë të lëndëve të ndryshmei?

Vëre zgjidhjen:

Orarët e formuar paraqesin kombinacione pa përsëritje të klasës 6-të nga 10 elemente, pra
$$C_{10}^6 = \frac{V_{10}^6}{P(6)} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 210.$$

Nga të katër shembujt vëren se numri i kombinacioneve është numër natyror,
$$\text{d.m.th. } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}.$$

Shpeshherë numri i kombinacioneve C_n^k shënohet me $\binom{n}{k}$, d.m.th.
$$C_n^k = \binom{n}{k}, (k \le n) \text{ (lexohet „n mbi k'').}$$

Për shembull $C_5^4 = \binom{5}{4} = \dfrac{5!}{4!(5-4)!} = 5$ ose $C_6^4 = \binom{6}{4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$.

Pasi $0! \xlongequal{def} 1$, vijon se

a) Prej $C_n^0 = \binom{n}{0} \xlongequal{def} 1$ dhe $C_n^n = \binom{n}{n} \xlongequal{def} 1$ kurse $C_n^1 = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n.$

5 Vërteto se a) $C_n^k = C_n^{n-k}$, b) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.

Vëre vërtetimin:

a) Prej $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ dhe $C_n^{n-k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

vijon $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Kjo veti është e njohur si veti e simetrisë të kombinacioneve.

Për shembull $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$ ose $\binom{15}{6} = \binom{15}{15-6} = \binom{15}{9}$ etj.

b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} =$

$= \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1)! + n!k}{k(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} =$

$= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$ Kjo është vetia aditive e kombinacioneve

Për shembull $\binom{10}{4} + \binom{10}{3} = \binom{11}{4}$ ose $\binom{8}{5} + \binom{8}{4} = \binom{9}{5}$ etj.

6 Në garat e matematikës duhet të marrin pjesë ekipe me nga 4 nxënës prej një shkolle. Në sa mënyra të ndryshme mund të formohen ekipet, nëse të drejtën për në gara kanë 12 nxënës prej asaj shkolle?

C Nëse prej n elementeve të ndryshme formojmë kombinacione të klasës k, ashtu që një element mund të përsëritet k herë, atëherë fitojmë kombinacion me përsëritje prej klasës k prej n elemente.

7 Shkruaji të gjitha kombinacionet me përsëritje prej klasës: a) dytë; b) tretë prej elementeve 1, 2.

Vëre zgjidhjen:

a) 1 1, 1 2, 2 2; b) 1 1 1, 1 1 2, 1 2 2, 2 2 2.

Numri i kombinacioneve me përsëritje shënohet me $\overline{C}_n^k$ (në këtë rast, k mund të jetë edhe më e madhe se n).

Vëre, $\overline{C}_2^2 = 3$, kurse $\overline{C}_2^3 = 4$.

8 Shkruaji të gjitha kombinacionet me përsëritje të klasës: a) dytë; b) tretë prej elementeve 1, 2, 3, 4.

Vëre zgjidhjen:

a)

11,	12,	13,	14
	22,	23,	24
		33,	34
			44

$\overline{C}_4^2 = 10.$

b) Shkruaje permutacionin e parë themelor në 3 rreshta:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Kombinacionet me përsëritje formohen në këtë mënyrë:

Prej rreshtit të parë merren çfarëdo elemente dhe i shoqërohen rreshtit të dytë elementit që është nën atë i cili është marrë ose nga i djathti, pastaj prej rreshtit të tretë merret elementi që është nën tanimë element të marrun nga rreshti i dytë ose elementi i djathtë etj. Duke e zbatuar këtë mënyrë për çdo element nga rreshti i parë do të fitohen të gjitha kombinacionet e mundshme me përsëritje të klasës 3-të.

111	122	133	222	233	333	444
112	123	134	223	234	334	
113	124	144	224	244	344	
114						

Kombinacionet me përsëritje prej klasës k formohen në të njëjtën mënyrë, por në këtë rast permutacioni është shkruar në k rreshta.

Mbaj mend!

Numri i kombinacioneve me përsëritje njehsohet me formulën

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Për detyrën paraprake kemi:

$$\overline{C}_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3} = 20.$$

9 Një shitore disponon me lule në 5 ngjyra të ndryshme. Në sa mënyra mund të bëhen buqetë prej 3 luleve?

Vëre zgjidhjen:

Në buqet mund të jenë të gjitha lulet me ngjyrë të njëjtë, të gjitha lulet me ngjyra të ndryshme ose dy lule me një, kurse e treta me tjetër ngjyrë. Domethënë. këto janë kombinacione me përsëritje të klasë 3-të prej 5 elemente, pra

$$\overline{C}_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35.$$

10 Në një turnir shahu marrin pjesë 10 shahistë. Sa ndeshje gjithsej do të luhen, nëse çdonjëri duhet të luan nga një herë me çdonjërin?

Detyra

1. Në çka është ndryshimi ndërmjet variacioneve dhe kombinacioneve të klasës k prej n elemente?
2. Shkruaji të gjitha kombinacionet pa përsëritje të klasës: a) 1; b) 2; c) 3, prej elementeve 4, 5, 6, 7, 8, 9.
3. Trego se është i saktë barazimi
   a) $C_7^4 + C_7^3 = C_8^4$; b) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$.
4. Zgjidhe barazimin
   a) $C_n^2 = 3n$; b) $5 \cdot C_n^3 = C_{n+2}^4$; c) $C_n^k = 35$ i $V_n^k = 840$.
5. Sa trekëndësha të ndryshëm fitohen nëse kulmet e të cilëve janë kulmet e gjashtëkëndëshit?
6. Sa këshilla të ndryshëm të përbërë prej 5 nxënës dhe 2 profesorë mund të formohen prej gjithsej 10 nxënës dhe 4 profesorë?
7. Sa kombinacione të klasës 4-të prej elementeve a, b, c, d, e, f, g i përmbajnë elementete b, c dhe e? Shkruaji ato kombinacione.
8. Sa kombinacione të klasës 3-të prej elementeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 nuk i përmbajnë elementet 2, 4 dhe 6?
9. Sa më shumë drejtëza mund të tërhiqen nëpër 10 pika që shtrihen në një rrafsh, prej të cilëve: 4 pika shtrihen në një drejtëz, 3 pika shtrihen në drejtëzën tjetër, kurse të tjerat janë në çfarëdo pozite?
10. Në sa pika priten 30 drejtëza që shtrihen në një rrafsh, nëse 16 prej tyre janë paralele, kurse 12 kalojnë nëpër një pikë?
11. Shkruaji të gjitha kombinacionet me përsëritje të klasës 5-të nga elementet 1, 2, 3.
12. Sa kombinacione me përsëritje mund të formohen prej 3 elemente të klasës 6-të?

5 FORMULA E BINOMIT

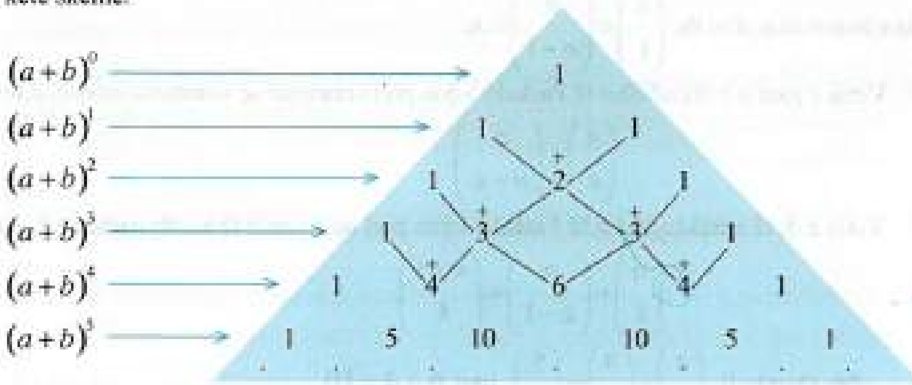
Kujtohu!

- a) $(a+b)^0 \stackrel{def}{=\!=} 1,\ a+b \neq 0$;
- b) $(a+b)^1 = a+b$;
- c) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- ç) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- d) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Vëre: Shembujt e shkruar tregojnë se shkalla e binomit ka ndonjë formë të rregullt.

- Forma e zbërthyer e shkallës së binomit është polinom.
- Numri i monomëve në polinom është gjithmonë për një më i madh se treguesi i binomit.
- Shkalla e çdo monomi është e barabartë me treguesin e binomit.

Koeficientët e monomëve në formën e zbërthyer të fuqisë së binomit do t'i paraqesim në këtë skemë.



Kjo skemë quhet ***trekëndëshi i Paskalit.***

Duke e shqyrtuar trekëndëshin e Paskalit mund t'i vërejmë këto veti:

1. Trekëndëshi është barakrahas dhe është figurë simetrike në lidhje me lartësinë ndaj bazës. Në çdo rresht koeficienti i parë dhe i fundit janë të barabartë. Gjithashtu, të barabartë janë edhe koeficientët që janë një lloj të larguar prej të skajshmëve, i dyti dhe i parafundit etj.

2. Në çdo rresht, anëtari pas të parit është i barabartë me shumën e dy anëtarëve që janë drejtpërdrejt mbi atë

1 Duke i shfrytëzuar këto njohuri njehso: a) $(a+b)^5$; b) $(a+b)^6$.

Vëre zgjidhjen:

- b) Nëse e vazhdojmë trekëndëshin e Paskalit edhe për një rresht, do t'i fitojmë koeficientët e binomit $(a+b)^6$, kurse ato janë:

1, 6 15 20 15, 6, 1, pra

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Sigurisht, kjo mënyrë për caktimin e koeficientëve të monomëve në formën e zbërthyer, quhen ***koeficientët e binomit***, nuk është i thjeshtë dhe i përshtatshëm, veçanërisht nëse treguesi i binomit është numër i madh.

Ta shqyrtojmë edhe një herë trekëndëshin e Paskalit.

- Është e qartë se koeficientët e binomit janë numra natyrorë, i njëjtë sikurse numri i kombinacioneve dhe do të tregojmë se ato mund të shprehen me numrin e kombinacioneve.

- Koeficientët e binomit dhe anëtari i fundit janë të barabartë me 1, d.m.th.

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1.$$

- Koeficientët e binomit të anëtarit të dytë dhe të parafundit janë të barabartë me treguesin e binomitl n, d.m.th. $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n.$

- Vetia e parë e trekëndëshit të Paskalit vijon prej simetrisë së kombinacioneve, d.m.th.

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

- Vetia e dytë e trekëndëshit të Paskalit vijon prej aditivitetit të kombinacioneve, d.m.th.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}.$$

Për shembull, $\binom{4}{2}+\binom{4}{1}=\binom{5}{2}$, pasi $6+4=10$.

Prandaj, koeficientët e binomit paraqesin kombinacione C_n^k, ku

$$k\in\{0,1,2,3,...,n-1,n\}.$$

Për zbërthimin e fuqisë së binomit $(a+b)^n$ vlen kjo

Teoremë. Për çfarëdo numër natyror n vlen:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n,$$

ku $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{k},\ldots,\binom{n}{n}$ janë koeficientët e binomit.

Kjo formulë quhet ***formula e binomit*** ose ***formula e Njutnit*** të cilën do ta përvetësojmë si të saktë pa vërtetim

2 Duke e zbatuar formulën e binomit fuqizoje binomin $(x+2)^6$.

Vëre zgjidhjen:

$$(x+2)^6=\binom{6}{0}x^6+\binom{6}{1}x^5\cdot 2+\binom{6}{2}x^4\cdot 2^2+\binom{6}{3}x^3\cdot 2^3+\binom{6}{4}x^2\cdot 2^4+\binom{6}{5}x\cdot 2^5+\binom{6}{6}2^6.$$

Sipas vetisë për simetri të koeficientëve të binomit, kemi

$$\binom{6}{0}=\binom{6}{6}=1;\ \binom{6}{1}=\binom{6}{5}=6;\ \binom{6}{2}=\binom{6}{4}=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15;\ \binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=20.$$

Prej këtu vijon $(x+2)^6 = x^6+6x^5\cdot 2+15x^4\cdot 4+20x^3\cdot 8+15x^2\cdot 16+6x\cdot 32+64 =$

$$= x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+64.$$

3 Zbërtheje fuqinë e binomit: a) $(3+2x)^5$; b) $(2x-5)^4$.

4 Cakto shumën e të gjithë koeficientëve të binomit $(a+b)^n$.

Vëre zgjidhjen

Në formulën e binomit:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n,$$

me zëvëndësimin e a dhe b me 1, fitojmë $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{k}+\ldots+\binom{n}{n}$.

Mbaj mend!

Shuma e të gjithë koeficientëve të fuqisë së binomit $(a+b)^n$ është:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{k}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

5 Cakto anëtarin e tetë në zbërthimin e fuqisë së binomit $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{72}}-\sqrt[7]{\frac{1}{11}}\right)^{12}$.

Vëre zgjidhjen:

Koeficienti i anëtarit të tetë në zbërthimin e binomit të dhënë është i formës

$$\binom{n}{7}=\binom{12}{7}=\frac{12!}{7!5!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=792,\ \text{kurse anëtari është}$$

$$T_8=\binom{12}{7}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[5]{72}}\right)^{12-7}\cdot\left(-\sqrt[7]{\frac{1}{11}}\right)^7=11\cdot 9\cdot 8\cdot\frac{1}{72}\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)=-1.$$

Ke kujdes, k i fiton të gjitha vlerat me radhë 0, 1, 2, ...n, pra për anëtarin e tetë $k=7$.

Mbaj mend!

Çfarëdo anëtar në zbërthimin e fuqisë së binomit $(a+b)^n$ është i barabartë me

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k,\ k\le n.$$

6 Cakto anëtarin e mesëm në zbërthimin e fuqisë së binomit $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-x\right)^{8}$.

Detyra

1 Zbërtheje fuqinë e binomit:

a) $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{y}\right)^{4}$; b) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{8}$; c) $\left(x+\sqrt{x}\right)^{6}$.

2 Njehso:

a) $\left(1-\sqrt{2}\right)^{7}$; b) $(1+i)^{6}$; c) $(2-i)^{4}$.

3 Duke e zbatuar formulën e binomit njehso:

a) $0{,}9^{5}$; b) $1{,}03^{10}$ me saktësi deri më katër dhjetore.

4 Cakto shumën e koeficientëve të binomit në zbërthimin e fuqisë së binomit:

a) $(1+x)^{10}$; b) $(1-x)^{10}$; c) $\left(\frac{8}{x}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$.

5 Cakto:

a) anëtarin e shtatë në zbërthimin e fuqisë së binomit $\left(a+\sqrt[6]{3}\right)^{12}$;

b) anëtari i mesëm në zbërthimin e fuqisë së binomit $\left(\frac{a}{x}-\sqrt{x}\right)^{16}$;

c) anëtarin e trembëdhjetë në zbërthimin e fuqisë së binomit $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{n}$, nëse koeficienti i binomit të anëtarit të tretë është 105.

6 Cakto atë anëtar në zbërthimin e fuqisë së binomit:

a) $\left(x+\frac{1}{x^{2}}\right)^{12}$ i cili nuk varet prej x; b) $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)^{11}$ që përmban x^{3}.

7 Shuma e koeficientëve të binomit të anëtarit të parë, të dytë dhe të tretë në zbërthimin e fuqisë së binomit $\left(x^{2}+\frac{1}{x}\right)^{n}$ është 46. Cakto anëtarin që nuk përmban x.

8 Anëtari i tretë në zbërthimin e fuqisë së binomot $\left(x+x^{\lg x}\right)^{5}$ është i barabartë me 1000000. Cakto x.

6 EKSPERIMENTI. NGJARJA. NGJARJA E RASTIT. LLOJET E NGJARJEVE

A Natyra gjendet në një lëvizje të rregulltë. Kjo lëvizje karakterizohet me ndryshime të rregullta të një gjendje në tjetër është ngjarje. Ngjarja është kur ditën do ta ndërron nata, kur pas verës së nxehtë vjen vjeshta me shi, kur do të fitohet në loto, kur do të lindin fëmijë treshe, kur në rrugë do të takosh dashurinë e vjetër, kur do të ndodh tërmet ose vërshim. Ngjarje është kur në zgjedhjet parlamentare do të vjen deri në ndërrimin e qeverisë etj.

Ndodhia e disa ngjarjeve mund saktësishtë të parashihet dhe ngjarja të sqarohet. Për shembull kur do të ndodh errësimi i Diellit ose Hënës, kur do të bëhet regjistrimi i banorëve, pasi saktësisht dihen shkaqet për këto dukuri dhe kushtet nën të cilat ndodhin. Megjithatë, konstatimi i lidhjeve ndërmjet kushteve në një ngjarje ose proces nuk është gjithmonë i lehtë. Ekzistojnë procese ose ngjarje kushtet e të cilëve nuk mund të vërehen dhe për të cilët nuk është e mundur të zbulohen shkaqet. Në këtë rast nuk ekziston mundësi të konstatohet rregullë (ligj) për caktimin dhe parashiqimin e saktë të atyre ngjarjeve. Për shembull, ndodhia e tërmetit nuk është e mundur saktësisht të parashihet, pasi nuk disponohet me fakte të mjaftueshme që e shkaktojnë. Fitimi në loto nuk mund të parashihet. Lindja e fëmijës mashkull ose femër, gjithashtu, nuk mund të parashiqohet. Por, përsëri ngjarjet kanë edhe karakteristika dhe ligjshmëri të përgjithshme të cilat janë lëndë e studimit të disiplinës **Gjasës dhe statistikës**.

Teoria e gjasës është pjesë e matematikës, fillimet e të cilës janë të lidhura me emrat e matematikanëve françez B. Paskal (1623-1662) dhe P. Ferma (1601-1665), të përkushtuar në lojërat e lotos. Bazat teorike të kësaj disipline i ka vën matematikani rus A. Kolmogorov në vitin 1933.

Sot teoria e gjasës ka zbatim të madh në disiplina të ndryshme: astronomi, biologji, gjenetikë, ekonomia teknikë, jetën shoqërore politike etj. Sot në botë nuk ekziston disiplinë në të cilën nuk eksperimentohet, hulumtohet, vlerësohet për ngjarjet e ndonjë ndodhie. Detyra themelore e Teorisë së gjasës është gjetja e lidhjeve ndërmjet ngjarjeve të rastit, caktimi i ligjeve të cilët vlejnë, gjasat dhe përkufizimet e tyre të funksioneve që mundësojnë zbatimin e tyre në shkencat tjera dhe në praktikë.

B Dihet se të studiuarit e dukurive natyrore dhe shoqërore ndodh si rezultat i shqyrtimeve të ndryshme, eksperimenteve ose vështrimeve. T'i shqyrtojmë këto eksperimente.

1. Prej kutisë me 5 topa të bardhë të shënuara me numrat prej 1 deri më 5, nxjerrja e një topi.

Rezultati i eksperimentit të kryer është nxjerrja e çfarëdo topi.

Sa herë mund të nxirret nga një top?

2 Për fluturimin e sukseshëm të aeroplanit duhet të kryhet vështrim i caktuar:

- aeroplani teknikisht të jetë në rregull;
- në aeroport të funksionojnë të gjitha mjetet teknike;
- të jenë kushtet kohore të mira.

Pas vështrimit të kryer është i mundshëm aeroplani „të fluturon'' ose „të mos fluturon''.

Sa mundësi të volitshme ka ky eksperiment?

3 Në tavolinë janë hedhur dy zare homogjene të cilët në faqet e tyre i kanë të shtypura: 1, 2, 3, 4, 5 ose 6 pikë.

Rezultati i këtij eksperimenti mund të paraqitet si çift i radhitur (x, y), ku x është numër i pikëve në faqen e sipërme të njërit zar, kurse y është numri i pikëve të faqes së sipërme të zarit tjetër. Të gjitha mundësitë e eksperimentit mund të përshkruhen me bashkësinë $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$, kurse elementet janë:

$\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,(6,4),(6,5),(6,6)\}$,

gjithsej janë $\overline{V}_6^2 = 6^2 = 36$ elemente. (Përkujtohu në variacionet me përsëritje)

Mbaj mend!

Çdo ***eksperiment*** nënkupton çdonjërin realizim të bashkësisë me kushte komplekse.

Çdo rezultat ose ecuri i ndonjë eksperimenti quhet ***ngjarje*** për atë eksperiment.

Termi eksperiment në kuptimin e gjerë i përfshin eksperimentet që organizohet dhe realizohen në laborator, por i përfshin gjithashtu, edhe llojet e ndryshme të vështrimeve ku eksperimenti ka kushte pasive. Vetia tjetër e eksperimentit qëndron në atë se rezultatet nuk janë njëvlerësisht të caktuara.

4 Në tavolinë është hedhur monedha.

Cilat ngjarje dhe çfarë ecuri e këtij eksperimenti mund të realizohet, nëse vërehet faqeja e sipërme e monedhës?

Është e qartë se njohja e kushteve për kryerjen e një ngjarje a do të ndodh ose nuk do ndodh. Ngjarjra e atillë quhet ***ngjarje rasti***. Ngjarjet e rastit janë: fitimi në loto; paraqitja „e stemës'' ose „numrit'' gjatë hedhjes së monedhës; nxjerrja e topave të bardhë ose të kuq; paraqitja e numrit çift të pikëve në faqen e sipërme të zarit et.

Mbaj mend!

Për një ngjarje themi se është e rastit kur veprimi i saj gjatë realizimit të ndonjë eksperimenti ose vështrimi nuk mund me siguri të parashihet.

Ngjarjet e rastit më tutje do t'i quajmë vetëm ngjarje dhe do t'i shënojmë me A, B, C, D. Në shembujt e përmendur çdo eksperiment, në kushte të pandryshuara mund të përsëritet çfarëdo herë, por rezultati nuk mund me siguri të parashihet.

Mbaj mend!

Në çdo eksperiment ekziston bashkësi e ngjarjeve të veçanta.
Bashkësia e ngjarjeve të veçanta të cilat paraqesin realizim (ecuri) të një eksperimenti ashtu që gjatë realizimit të eksperimentit vepron njëri dhe vetëm njëri prej tyre, quhen **ngjarje elementare**, kurse bashkësia e ngjarjeve elementare quhet **bashkësia e ngjarjeve elementare** për eksperimentin e dhënë.
Ngjarjet elementare do t'i shënojmë me E_1, E_2, E_3,..., kurse bashkësinë e ngjarjeve elementare me Ω.

Në detyrën 1 ngjarje elementare janë E_1-nxjerrja e topit me numër 1; E_2 - nxjerrja e topit me numër 2 etj. Bashkësia e ngjarjeve elementare është $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$. Në detyrën 2 ngjarje elementare janë: E_1 - aeroplani të fluturon dhe E_2 - aeroplani të mos fluturon, kurse $\Omega = \{E_1, E_2\}$. Në detyrën 3 çdo ecuri, d.m.th. çdo çift i radhitur është ngjarje elementare. Ngjarja $E_1 = (1,1)$ do të thotë faqja e sipërme e zarit të parë ka 1 pikë, kurse i dyti 2 pikë. Ngjarja $E_7 = (2,1)$ është i ndryshëm prej ngjarjes E_2, pasi çifti i radhitur $(1,2) \neq (2,1)$. Ngjarja $E_7 = (2,1)$ do të thotë se zari i parë ka 2 pikë, kurse te i dyti 1 pikë. Në detyrën 4 ngjarje elementare janë E_1 -„paraqitet stema'' dhe E_2 -„paraqitet numri'', kurse $\Omega = \{E_1, E_2\}$.

5 Në tavolinë janë hedhur dy zare. Përshkruaji ngjarjet:

$A = \{$ Në çdo zar në faqen e sipërme ka numër çift të barabartë të pikëve $\}$.

$B = \{$ Shuma e numrit të pikëve në faqen e sipërme të zarit është 2 $\}$.

$C = \{$ Prodhimi i numrit të pikëve në faqen e sipërme të zareve nuk është më i madh se 4 $\}$.

Vëre zgjidhjen:

Ngjarja A vlen kur në të dy zaret në faqen e sipërme paraqitet numër i barabartë çift i i pikëve, pra $A=\{E_2,E_4,E_6\}$, ku $E_2=(2,2)$, $E_4=(4,4)$ dhe $E_6=(6,6)$. Ngjarjet tjera janë:

$B=\{(1,1)\}$ dhe $C=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(4,1)\}$.

Ngjarjet A dhe C janë ngjarje të ndërlikuara, pasi çdonjëri prej tyre përbëhet prej më shumë ngjarjeve elementare. Ngjarja e përbërë realizohet nëse çfarëdo ngjarje e tij elementare vijon prej eksperimentit.

6 Në tavolinë është hedhur zari. Caktoji ngjarjet elementare të eksperimentit. Cakto bashkësinë e ngjarjeve elementare. Përshkruaji ngjarjet:

$A=\{$ Në faqen e sipërme të zarit paraqitet numër çift i pikëve $\}$.

$B=\{$ Në faqen e sipërme të zarit paraqitet numër tek i pikëve $\}$.

$C=\{$ Numri i pikëve në faqen e sipërme të zarit është më i madh se 6 $\}$.

C Për disa ngjarje në natyrë, në shoqëri dhe në jetën e përditshme mund me siguri të gjykojmë se do të ndodhin, kurse për disa ngjarje, se nuk mund të ndodhin. Ngjarje të caktuara ndodhin rastësisht, disa kanë shans më të madhe, kurse disa më të vogël për realizim. Varësisht prej asaj që u thekusa paraprakisht kemi:

1. Ngjarje të sigurta. Një ngjarje themi se është e sigurtë, nëse ajo gjatë kushteve të dhëna me siguri do të ndodh.

- E sigurtë është se pas ditës vjen nata, kurse pas natës vjen dita.
- E sigurtë është se uji është materia themelore e Tokës.
- E sigurtë është se shoqëria sociologjikisht evoulohet.
- E sigurtë është se baza e jetës materiale është produktiviteti i punës.
- E sigurtë është se prej kutisë në të cilën gjenden vetëm topa të bardhë do të nxjerrim top të bardh.

Ngjarja e sigurtë i përmban të gjitha ngjarjet elementare, d.m.th. bashkësia e ngjarjeve të sigurta është Ω.

2. Ngjarjet e pamundshme. Një ngjarje quhet e pamundshme, nëse ajo gjatë kushteve të dhëna nuk mund të realizohet.

- Nuk është e mundshme Toka të ndalet, të mos rrotullohet rreth Diellit dhe rreth boshtit të vet.
- Nuk është e mundshme të mos ketë batica dhe zbatica.
- Nuk është e mundshme në ujë të paraqitet edhe elementi i tretë.
- Nuk është e mundshme kthimi i sistemit të vjetër shoqëror dhe sundimit robërues ose rendi feudal në formën e tyre klasike.

- Nuk është e mundshme prej kutisë plotë me topa të zi të nxirret top i bardh.
- Nuk është e mundshme gjatë hedhjes së dy zareve shuma e pikëve në faqen e sipërme të jetë më e madhe se 12.

Bashkësia e ngjarjeve elementare prej ngjarjeve të pamundshme është bashkësi e zbrazët, d.m.th. $\Omega = \varnothing$.

Ngjarje të pamundshme ka po aq, sa ka ngjarje të sigurta. Zakonisht, negacioni i ngjarjes së sigurtë është ngjarje e pamundshme dhe anasjelltas.

3. Ngjarje të kundërta. Ngjarjen e kundërt të ngjarjes A e shënojmë me $\overline{A}$ dhe ajo ndodh atëherë dhe vetëm atëherë kur ndodh ngjarja A.

- Gjatë hedhjes së monedhës kemi dy ngjarje elementare, ose paraqitja e stemës ose paraqitja e numrit. Nëse njëra prej tyre është ngjarja A, atëherë tjetra është ngjarja e kundërt $\overline{A}$.

- Gjatë hedhjes së zarit ngjarja $A = \{$paraqitja e numrit çift të pikëve$\} = \{2,4,6\}$.

Ngjarja e kundërtë e kësaj ngjarje është $\overline{A} = \{$paraqitja e numrit tek të pikëve$\} = \{1,3,5\}$.

Si janë ndërmjet veti ngjarja e sigurtë dhe e pamundshme?

Prej përkufizimit të ngjarjeve elementare vijon $A \cup \overline{A} = \Omega$.

7 Në tavolinë është hedhur zari.
Ngjarja $A = \{$ Në faqen e sipërme të zarit ka 5 pikë $\}$. Përshkruaje ngjarjen $\overline{A}$.

4. Ngjarjet e vetme të mundshme. Ngjarjet $A, B, C, \ldots$ janë të vetme të mundshme nëse të paktën njëra prej tyre do të realizohet si rezultat i eksperimentit..

- Gjatë hedhjes së monedhës ngjarje të vetme të mundshme janë: paraqitja e stemës ose paraqitja e numrit. Ngjarje të tretë nuk ka.
- Gjatë hedhjes së zarit ngjarje të vetme të mundshme janë: paraqitja e 1, 2, 3, 4, 5 ose 6 pikëve në faqen e sipërme të zarit. Ngjarja e shtatë nuk është e mundshme.

Ngjarjet e vetme të mundshme formojnë sistem të plotë të ngjarjeve.

5. Ngjarje të barabarta të mundshme. Ngjarjet janë të barabarta të mundshme, nëse gjatë kushteve të njëjta nuk ka shkaqe objektive sipas të cilës njëra prej ngjarjeve mund të realizohet më shpesh se të tjerat.

- Paraqitja e stemës ose numrit gjatë hedhjes së monedhës janë ngjarje të barabarta të mundshme.
- Nëse në kuti ka 6 topa të bardhë dhe 10 topa të zi, atëherë nxjerrja e topit të bardh nuk është ngjarje e barabartë e mundshme me ngjarjen e nxjerrjes së topit të zi.

6. Ngjarje të papajtueshme. Ngjarjet A dhe B janë të papajtueshme ose disjunkte, nëse paraqitja e njërës ngjarje e përjashton mundësinë e paraqitjes të ngjarjes tjetër, d.m.th. ato nuk mund të realizohen njëkohësisht.

- Paraqitja e dy numrave të njëjtë prej 1 deri më 39 gjatë tërheqjes së lotos nuk mund të ndodh.
- Ngjarjet e kundërta A dhe $\overline{A}$ janë ngjarje të papajtueshme. Anasjelltas nuk vlen, d.m.th. dy ngjarje të papajtueshme nuk janë gjithmonë të kundërta. Për shembull, ngjarja A - paraqitja e numrit çift të pikëve gjatë hedhjes së zarit përbëhet prej ngjarjeve elementare E_2, E_4 dhe E_6 të cilat janë disjunkte, por nuk janë të kundërta..

8 Në një tavolinë është hedhur zari. Janë dhënë ngjarjet:

$A = \{$ Në faqen e sipërme të zarit ka numër çift të pikëve $\}$.

$B = \{$ Në faqen e sipërme të zarit ka numër të pikëve të plotpjesëtueshëm me 3$\}$.

$C = \{$ Në faqen e sipërme të zarit ka numër tek të pikëve $\}$.

Përshkruaji ngjarjet A, B dhe C. Cilët prej ngjarjeve të dhëna janë të papajtueshme?

Detyra

1. Prej bashkësisë së numrave natyrorë njëshifrorë zgjedhet një numër. Cakto bashkësinë e ngjarjeve elementare. Përshkruaji ngjarjet:
A - është zgjedhur numri 3; B - është zgjedhur numër tek të plotëpjesëtueshëm me 3;
C -është zgjedhur numër tek; D - është zgjedhur numër që nuk është më i vogël se 7;
E - është zgjedhur numër që është më i madh se 9.

2. Shkruaje bashkësinë e ngjarjeve elementare të eksperimentit:
a) hedhja e dyfishtë e monedhës; b) hedhja e dyfishtë e zarit;
c) hedhja e njëkohësishme e monedhës dhe zarit.

3. Një makinë për testim të rregullshmërisë së llojeve të sendeve të caktuara funksionon ashtu që: nëse sendi është në rregull, do të ndizet ngjyra e gjelbër, por nëse nuk është në rregull, do të ndizet ngjyra e kuqe. Testohen 3 sende. Cakto bashkësinë e ngjarjeve elementare. Përshkruaji këto ngjarje:
A: saktësisht një send është në rregull; B: saktësisht dy sende janë në rregull;
C: të paktën një send është në rregull; D: të paktën dy sende janë në rregull.

4. Në tavolinë janë hedhur dy zare homogjene. Përshkruaji ngjarjet:
A: shuma e pikëve të paraqitura në faqet e sipërme të të dy zareve është numër çift;
B: shuma e pikëve të paraqitura në faqet e sipërme të dy zareve është më e madhe se 12;
C: në të dy zaret paraqitet numër i njëjtë i pikëve;
D: në të dy zaret janë paraqitur pikë shuma e të cilëve është më i madh se 9.

5. Në tavolinë janë hedhur tre zare homogjene. Përshkruaje bashkësinë e të gjitha ngjarjeve elementare.

7 PËRKUFIZIMI KLASIK I GJASËS

A Shpeshherë në jetën e përditshme ndëgjojmë ose themi: me gjasë sot do të bie shi, ose: me gjasë nesër do të jetë dita me diell. Gjitashtu, konstatime të këtilla bëhen edhe në shumë rrethana të rëndësishme dhe më gjerë, natyrore dhe sociologjike. Për shembull, gjatë dhjetë viteve të ardhshme me gjasë do të bëhet laborator në Hënë, në 20 vitet e ardhshme me gjasë do të gjendet lloj i ri i energjisë djegëse që do ta zëvëndëson naftën, me gjasë do të gjendet bar kundër kancerit dhe sidës etj. Gjithashtu, shpeshherë themi: me pak gjasë është se do të fitojmë preminë në loto, më me gjasë është se do të fitojmë ndonjë fitim të vogël, me më shumë gjasë është se nuk do të kemi fitim.

Konstatimet e këtilla i sjellim ***subjektivisht,*** në bazë të të dhënave të cilat i posedojmë, në bazë të informatave dhe përvojave të cilat edhe vet i kemi përvetësuar. Prandaj është e rëndësishme ***objektivisht*** të vlerësohen mundësitë e çdo ngjarje të rastit të realizohet, me kushte prej më parë të njohura. Karakteristika numerike e cila objektivisht e karakterizon shkallën e mundësisë së ndonjë ngjarje të realizohet nën rrethana të caktuara të cilat mund të përsëriten shumë herë (pra edhe në pakufi) quhet ***gjasë*** (ose ***gjasa matematike***).

1 Në një kuti ka dhjetë topa, prej të cilëve një i bardh, kurse të tjerët janë të zi. Të caktohet gjasa e ngjarjes A: të nxirret top i bardh.

Vëre zgjidhjen:

- Në këtë eksperiment nxjerrja e një topi është ngjarje elementare.

Supozojmë se të gjitha ngjarjet elementare janë me gjasë të barabarta të mundshme. Nxjerrjen e topit të bardh do ta llogarisim për ngjarje të volitshme, kurse nxjerrja e topit të zi për ngjarje të pavolitshme.

- Bashkësia e ngjarjeve elementare është $\Omega=\{E_1, E_2, E_3, \ldots, E_{10}\}$, domethënë ka 10 ngjarje elementare, prej të cilave vetëm njëra është e volitshme (ka vetëm 1 top të bardh), kurse nëntë janë ngjarje të pavolitshme.

- Numri i ngjarjeve të volitshme dhe të pavolitshme tregon se në një seri prej 10 nxjerrjeve ekziston një mundësi të nxjerrim top të bardh (ngjarje e volitshme), kurse nëntë mundësi të nxjerrim top të zi. kjo nuk do të thotë se në çdo seri prej 10 nxjerrjeve, të kryera në këtë mënyrë që pas nxjerrjes topi të kthehet në kuti, do të nxjerrim një top të bardh dhe 9 të zi. Mund të ndodh në disa seri të para prej 10 nxjerrjeve të topit të bardh ta nxjerrim një herë, dy herë, tre herë ose më shumë herë, por mund të ndodh edhe në përgjithësi të mos ta nxjerrim.

- Hulumtimet tregojnë se në numër të madh të serive gjatë ndodhjes së disa ngjarjeve ekziston ligjshmëri e caktuar e ngjarjeve të rastit.

- Në tabelën që vijon do të tregojmë se topi i bardh do të paraqitet rreth 10% prej numrit të nxjerrjes. Në këtë shembull $n=10$ është numri i ngjarjeve elementare, kurse $m=1$ është numri i ngjarjeve të volitshme. $N(n)$ është numri i të gjitha ngjarjeve në një seri, kurse k është numri i cili tregon sa herë është realizuar ngjarja e volitshme në serinë përkatëse, d.m.th. sa herë është nxjerrë topi i bardh në atë seri.

- Numri $f_n(A)=\dfrac{k}{n}$ quhet frekuenca (dendësia) e ngjarjes A.

Seria	$N(n)$	k	$f_n(A)=\dfrac{k}{N(n)}$	$\dfrac{m}{n}$
I	100	9	0,09	0,1
II	200	22	0,11	0,1
III	1000	108	0,108	0,1
IV	4080	426	0,104	0,1
V	12000	1240	0,103	0,1
VI	24000	2452	0,102	0,1

Të dhënat në tabelë do të thotë: për shembull në serinë III, 1000 herë është nxjerë një top (pas nxjerrjes topi kthehet në kuti), poashtu topi i bardh është nxjerrë 108 herë, kurse frekuenca është 0,108.

- Prej tabelës shihet se frekuenca e ngjarjes A - nxjerrja e topit të bardh tenton nga numri $0{,}1=\dfrac{1}{10}$, që paraqet hersin e numrit të ngjarjeve të volitshme dhe numrit të përgjithshëm të ngjarjeve për eksperimentin e dhënë.

- Gjasa se do të realizohet ngjarja A - nxjerrja e topit të bardh është $\dfrac{1}{10}$, por e shënojmë me $P(A)=\dfrac{1}{10}$ (P është shkronja e parë e fjalës latine *probabilitas*, që do të thotë gjasë-probabilitet).

B Përkufizimin klasik për gjasën e ka dhënë matematikani françez *Laplas* (1749 - 1827) në vitin 1812.

Mbaj mend!

Bashkësia e ngjarjeve elementare le të jetë Ω e fundme dhe le të jetë n numri i ngjarjeve elementare të cilat janë të vetme të mundshme, të barabarta të mundshme dhe ngjarje disjunkte për eksperimentin e dhënë.

Nëse m $(0\le m\le n)$ është numri i ngjarjeve të volitshme të ngjarjes së rastit A, atëherë herësi $\dfrac{m}{n}$ quhet gjasë e ngjarjes A dhe shënohet me $P(A)$,

$$\text{d.m.th. } P(A)=\frac{m}{n}.$$

2 Sa është gjasa gjatë hedhjes së zarit që të realizohet ngjarja:

A={ Në faqen e sipërme të zarit të paraqitet numët tek i pikëve};

B={ Në faqen e sipërme të zarit janë pikët numri i të cilëve është më i madh se 5 };

C={ Në faqen e sipërme të zarit janë pikët numri i të cilëve plotëpjesëtohet me 9 }?

Vëre zgjidhjen:

- Sipas përkufizimit klasik të gjasës kemi:

$$P(A)=\frac{\text{Numri i ngjarjeve elementare të volitshme}}{\text{Numri i ngjarjeve elementare të mundshme}}$$

- Bashkësia e ngjarjeve elementare është $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, d.m.th. $n=6$.

  Ngjarja $A=\{1,3,5\}$, d.m.th. $m=3$, pra $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

  Ngjarja $B=\{6\}$, kurse $m=1$, pra $P(B)=\frac{1}{6}$.

  Ngjarja $C=\{3,6\}$, $m=2$, pra $P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

- Kështu gjasa e përkufizuar quhet ***matematike*** ose ***gjasa teorike***.

3 Sa është gjasa gjatë hedhjes së monedhës në faqen e sipërme të paraqitet stema?

4 Në një kuti ka topa 45 të kuq, 25 të kaltër dhe 30 të verdhë. Cila është gjasa të nxirret top i kuq?

Vëre zgjidhjen:

- Numri i ngjarjeve të mundshme është $n=45+25+30$.
- Numri i ngjarjeve të volitshme është $m=45$.
- Gjasa është $P(A)=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}$.

Sipas përkufizimit për gjasën, që të caktohet herësi $P(A)=\frac{m}{n}$, duhet ***prej më parë*** të dihet (*a priori*) numri i ngjarjeve elementare dhe numri i të gjitha ngjarjeve të mudshme (të volitshme dhe të pavolitshme). Kjo lehtë realizohet gjatë disa sistemeve të ngjarjeve të zakonshme (zari, monedha, nxjerrja e topave), ku m dhe n janë fiks. Në këtë rast gjasa caktohet para se të fitohet ndonjë përvojë në lidhje me njohjen e vijimit të ngjarjes, d.m.th. pa realizimin e eksperimentit.

5 Cila është gjasa se dy zare të hedhura do të tregojnë numër të njëjtë shuma e të cilëve është më e madhe se 9?

Vëre zgjidhjen:

Bashkësia e ngjarjeve elementare përbëhet prej çdo faqe të njërit zar, me çdo faqe të zarit tjetër, është. $\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}=$

$\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(1,6),(2,1),(2,2),...,(2,6),...,(6,1),(6,2),...,(6,6)\}$, pra

$n=\overline{V}_6^2=6^2=36.$

Ngjarjet e volitshme ku shuma e pikëve është 10, 11 ose 12,
d.m.th. ngjarja $A=\{(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$, domethënë, $m=6$.

Gjasa e kërkuar është $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Përkufizimi klasik i gjasës (*a priori*) bazohet në idealizimin matematik të ngjarjeve, duke u nisur prej supozimit ideal se të gjitha ngjarjet janë të barabarta të mundshme dhe me gjasë të barabartë në kushte të njëjta. Idealizimi i këtillë në botën reale vështir se mund të arrihet. Por, përsëri, në disa raste, zari i rregullt dhe homogjen, monedha e rregullt dhe homogjene, tërheqja e letrave, tërheqja e numrave në loto, mund të pritet se të gjitha ngjarjet elementare janë të barabarta të mundshme dhe me gjasë të barabartë, pra përkufizimi klasik për gjasën mund të zbatohet me sukses.

Në shumë shembuj, veçanërisht në statistikë, biologji, ekonomi, demografi dhe shkenca të tjera, gjasa *a priori* nuk mund të zbatohet me sukses.

Prandaj, në natyrë dhe teknikë zbatohet gjasa *a posteriori* (pastaj), e cila quhet gjasa ***statistike*** (***empirike***).

6 Sa është gjasa që shuma e pikëve të paraqitura në faqet e sipërme të dy zareve të hedhura do të jetë 7?

Detyra

1) Agimi e ka harruar shifrën e fundit të numrit të telefonit të vajzës së tij. Cila është gjasa se Agimi me një zgjedhje do ta qëllon numrin e saktë?

2) Në një kuti ka topa 12 të bardhë, 23 të kuq dhe 27 të zi. Sa është gjasa se me një nxjerrje do të nxjerrim top të kuq?

3) Në një kuti ka 80 letra të shkruara me numrat prej 1 deri më 80. Sa është gjasa gjatë një nxjerrje të paraqitet letra me numër:
a) që është më i vogl se 9; b) që plotëpjesëtohet me 5;
c) që është më i madh se 45, kurse më i vogël se 70?

4) Prej shpilit me 32 letra lojtari tërheq një letër. Sa është gjasa se letra e tërhequr është:
a) damë; b) pik?

5. Janë hedhur dy zare në tavolinë çka është më me gjasë, të ketë numër të njëjtë të pikëve ose shuma e pikëve të jetë më e vogël se 5?

6. Sa është gjasa se dy zare të hedhura do të tregojnë pikë shuma e të cilëve është numër çift?

7. Në një kuti ka topa 5 të bardh dhe 4 të zi. Cila është gjasa se me një nxjerrje do të nxjerrim:
a) një top të bardh; b) dy topa të bardh;
c) një top të bardh dhe një top të zi?

8. Prej shpilit me 32 letra lojtari fiton dy letra. Sa është gjasa se lojtari do të fiton dy „asa''.

9. Njëkohësisht janë hedhur tre zare. Cakto gjasën e ngjarjes:
a) A: shuma e pikëve të faqeve të sipërme të zareve të jetë 11;
b) B: shuma e pikëve të faqeve të sipërme të zareve të jetë 12.

10. Në të dy letrat janë shkruar shkronjat *A, B, E, I, LL, O, P, R, H*. Letrat krejt rastësisht janë radhitur njëra pranë tjetrës. Sa është gjasa se në atë mënyrë do të shkruhet fjala *HIPERBOLLA*?

8 VETITË E GJASËS

Kujtohu!

- Bashkësinë e ngjarjeve elementare të eksperimentit të dhënë e përbëjnë të gjitha ngjarjet e pavolitshme elementare për eksperimentin e dhënë.
- Gjasa e ngjarjes së rastit A është

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

m - numri i ngjarjeve të volitshme elementare,
n - numri i të gjitha ngjarjeve elementare..

1. Në një kuti ka 10 topa të bardhë. Sa është gjasa se:

a) A: do të nxjerrim top të bardhë;
b) B: do të nxjerrim top të zi?

Vëre zgjidhjen:

- a) Bashkësia e ngjarjeve elementare ka 10 elemente, d.m.th. $n=10$.
- Nxjerrja e topit të bardh paraqet ngjarje të volitshme, d.m.th. $m=10$.

- Gjasa është $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{10}=1$.
- b) Numri i ngjarjeve të mundshme është $n=10$. Numri i ngjarjeve të volitshme është $m=0$, pasi prej kutisë në të cilën ka vetëm topa të bardhë nuk mund të nxjerrim top të zi.
- Gjasa është $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{0}{10}=0$.
- I cili lloj është ngjarja A, kurse i cilit lloj është ngjarja B?

Do të përmendim disa veti të gjasës të cilat vijojnë prej përkufizimit klasik të gjasës.

1. Gjasa për çfarëdo ngjarje nuk mund të jetë më e vogël se zero, as më e madhe se një, d.m.th. prej $P(A)=\frac{m}{n}$, $0\leq m\leq n$, vijon $0\leq P(A)\leq 1$.

Kjo veti është e qartë , pasi thyesa $\frac{m}{n}$ është numër jonegativ real që nuk është më i madh se 1, d.m.th. $0\leq \frac{m}{n}\leq 1$.

Varësisht prej vlerës $P(A)$ për ngjarjen e rastit A themi:

- Ngjarja A është me pak gjasë nëse $0<P(A)<\frac{1}{2}$.
- Ngjarja A është me dilemë nëse $P(A)=\frac{1}{2}$.
- Ngjarja A është me gjasë të madhe nëse $\frac{1}{2}<P(A)<1$.

2. Gjasa e ngjarjes të pamundshme A, $A=\varnothing$, është e barabartë me zero, d.m.th. $P(\varnothing)=0$.

- Nëse $m=0$, d.m.th. nuk ka mundësi të realizohet ngjarja A, pra $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{10}=0$.

3. Gjasa e ngjarjes së sigurtë A, $A=\Omega$, është e barabartë me një, d.m.th. $P(\Omega)=1$.

- Nëse $m=n$, d.m.th. nëse të gjitha ngjarjet e mundshme elementare janë të volitshëm, atëherë ngjarja A sigurisht do të realizohet, pra $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$.

4. Ngjarja A dhe ngjarja B le të jenë disjunkte, bashkësia e ngjarjeve elementare për ngjarjen $A+B$ do t'i përmban të gjitha ngjarjet e volitshme elementare edhe për A edhe për B, pra

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

- Le të jetë n numri i të gjitha ngjarjeve elementare. Nëse m_1 është numri i ngjarjeve të volitshme elementare për A, kurse m_2 është numri i ngjarjeve të volitshme elementare për B, atëherë m_1+m_2 do të jetë numri i ngjarjeve të volitshme elementare për $A+B$.

Prandaj kemi

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

2 Gjatë hedhjes së monedhës mund të ndodhin këto ngjarje:
A: paraqitja e stemës në faqen e sipërme të monedhës;
B: paraqitja e numrit në faqen e sipërme të monedhës.
Cakto gjasën e ngjarjes $A+B$.

Vëre zgjidhjen:

Pasi ngjarjet A dhe B janë të vetmet të mundshme, të barabarta të mundshme, dhe disjunkte, kemi: $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$, pra $P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Teorema për shumën e dy gjasave vlen edhe për shumën e tre, katër dhe në përgjithësi për shumë ngjarje të fundshme të papajtueshme, d.m.th.

$$P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n).$$

3 Sa është gjasa se prej shpilit me 52 letra do të tërheqim ose „as'', ose „xhandar'', ose „damë'' ose „prift''?

Vëre zgjidhjen

Numri i ngjarjeve elementare është $n=52$.

A -tërheqja e „as-it'', $m_1=4$; $P(A)=\frac{4}{52}$;

B - tërheqja e „xhandar-it'', $m_2=4$; $P(B)=\frac{4}{52}$;

C - tërheqja e „damës", $m_3=4$; $P(C)=\frac{4}{52}$;

D tërheqja e „priftit'', $m_4=4$; $P(D)=\frac{4}{52}$.

Pasi ngjarjet A, B, C dhe D janë të barabarta të mundshëm dhe disjunkte, për gjasën kemi:

$$P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}.$$

4 Në një kuti ka topa 5 të bardhë, 7 të zi, 8 të kuq dhe 10 të kaltër. Sa është gjasa se do të nxjerrim top me ngjyrë? (Topi i bardhë nuk është i ngjyrosur).

5. Gjasa e ngjarjes $\overline{A}$ që është e kundërt e ngjarjes A është

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Pasi ngjarjet A dhe $\overline{A}$ janë disjunkte, domethënë $A+\overline{A}=\Omega$, pra sipas teoremës paraprake kemi: $P(A+\overline{A})=P(\Omega)$, d.m.th. $P(A)+P(\overline{A})=1$. Prej këtu vijon

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

5 Në një kuti ka topa 4 të bardh, 5 të kaltër dhe 6 të verdhë. Sa është gjasa se nuk do të nxjerrim top të ngjyrosur? (Topi i bardh nuk është i ngjyrosur)

Vëre zgjidhjen:

Numri i përgjithshëm i ngjarjeve elementare është $n=4+5+6=15$. Ngjarja A: të mos nxjerrim top të ngjyrosur ka $m=5+6=11$ ngjarje të volitshme, pra gjasa është $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{11}{15}$.

Ngjarja e kundërtë $\overline{A}$ është nxjerrja e topit të bardh. Numri i volitshëm të ndodhe ngjarja $\overline{A}$ është $m_1 = 4$, pra gjasa është $P\left(\overline{A}\right) = \frac{m_1}{n} = \frac{4}{15}$. Sipas teoremës paraprake kemi:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}), \text{ d.m.th. } P(A) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}.$$

Vëreј!

Gjasa e ndonjë ngjarje A mund të caktohet me ndihmën e gjasës të ngjarjes së kundërt të $\overline{A}$.

Detyra

1. Në tavolinë është hedhur një zar. Cakto gjasën:
   A: paraqitja e numrit çift të pikëve në faqen e sipërme të zarit;
   B: paraqitja e pikëve numri i të cilve është më i vogël se 5.

2. Sa është gjasa prej 32 letrave të tërheqim ose „pik'' ose „karo''?

3. Në tavolinë janë hedhur dy zare. Sa është gjasa se në faqet e sipërme të zareve do të paraqiten pikët shuma e të cilëve është numër çift ose numër tek?

4. Në tavolinë janë hedhur dy zare. Sa është gjasa se ato do të tregojnë ose numër të barabartë të pikëve, ose numër të pikëve shuma e të cilëve është 7, ose numra të pikëve shuma e të cilëve është 9?

5. Në një kuti ka topa 4 të bardh, 5 të zi dhe 6 të gjelbër. Nxjerrim nga dy topa menjëherë. Sa është gjasa të nxjerrim ose një top të bardh edhe një top të zi, ose një top të gjelbër?

6. Ngjarjet A, B, C dhe D e përbëjnë bashkësinë e ngjarjeve elementare Ω, d.m.th. $\Omega = \{A, B, C, D\}$. Nëse $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,3$; $P(C) = 0,4$; atëherë sa është gjasa e ngjarjes D?

7. Në një kuti çfarëdo janë vendosur prodhime të llojit të caktuar, ndërmjet të cilave 5 janë standarde. Punëtori rastësisht ka nxjerrë tri prodhime. Sa është gjasa se të paktën një prej prodhimeve të nxjerra do të jetë standarde?

8. Shënjestra rrethore përbëhet prej tre zonave koncentrike. Gjasa me një plumb të qëllohet zona e parë është 0,16, e dyta 0,24, kurse e treta 0,28. Sa është gjasa të mos qëllohet shënjestra?

9 GJASA STATISTIKORE

Kujtohu!

- Përkufizimi klasik i gjasës mund të zbatohet nëse prej më parë dihet numri i ngjarjeve të volitshme elementare dhe numrit të gjithë ngjarjeve (të volitshme dhe të pavolitshme) elementare.

- Gjatë kalimit në përkufizimin klasik të gjasës supozohet se ngjarjet elementare të rastit janë të barabarta të mundshme dhe ngjarje të vetme të mundshme.

Gjasa matematikore që e shqyrtuam gjer më tani caktohet në bazë të numrit të ngjarjeve të volitshme prej më parë të njohura. Megjithatë, në praktikë, gjatë hulumtimit të dukurive natyrore ose të tjera të dhëna të atilla zakonisht nuk dihen as nuk janë të dhëna, pra gjasa matematikore, ose sikurse thuhet gjasa *a priori*, nuk mund me sukses të zbatohet. Prej këtyre shkaqeve, gjasën e atyre ngjarjeve e caktojmë me ndihmën e kryerjes së serisë të eksperimenteve në kushte të pandryshueshme.

Mbaj mend!

Nëse me m e shënojmë numrin e realizimit të ngjarjes A në n eksperimente të pavarura të kryera nën kushte të njëjta, atëherë numri $f_n(A)=\frac{m}{n}$ quhet frekuenca relative e ngjarjes A.

1 T'i shqyrtojmë rezultatet e eksperimentit „hedhja e monedhës'' që e kanë bërë shkencëtari francez Bifon (1838 - 1883) dhe matematikani anglez K. Pirson (1857 - 1936), të paraqitura në tabelën që vijon.

Eksperimentatori	Numri i hedhjeve (n)	Numri i paraqitjes së stemës (m)	Frekuenca $f_n(A)=\frac{m}{n}$
Zh. Bifon	4040	2048	0,5069
K. Pirson	12000	6019	0,5016
K. Pirson	24000	12012	0,5005

- Prej tabelës shihet se frekuenca relative e ngjarjes A tenton nga numri $\frac{1}{2}$, kurse numri $\frac{1}{2}$ është gjasa matematikore e ngjarjes A -„paraqitja e stemës".

2 Në tabelën që vijon janë treguar rezultatet nga eksperimenti A: „Hedhja e zarit".

Numri i hedhjeve	Realizimi i ngjarjeve elementare					
	1	2	3	4	5	6
600	82	130	106	92	106	84
6000	953	1053	1027	1028	982	957
60000	9880	9989	9888	10026	10190	9847
120000	19759	20065	19795	20232	20213	19936

Në tabelë do ta njehsojmë frekuencën relative të eksperimentit

Numri i hedhjeve	Frekuenca $f_n(A)=\frac{m}{n}$					
	1	2	3	4	5	6
600	0,140	0,220	0,180	0,150	0,180	0,140
6000	0,159	0,176	0,171	0,171	0,164	0,160
60000	0,165	0,166	0,165	0,170	0,170	0,164
120000	0,165	0,167	0,165	0,169	0,168	0,166

Prej tabelës vëren se zmadhimi i numrit të eksperimenteve të realizuara frekuenca relative $f_n(A)$ tenton nga $\frac{1}{6}=0,166...$, kurse gjasa matematike gjatë hedhjes së zarit të paraqitet njëri prej numrave 1, 2, 3, 4, 5 ose 6 është e barabartë me $\frac{1}{6}$. Këto edhe shumë shembuj të tjerë tregojnë se te ngjarjet e rastit për të cilët nuk mund të zbatohet përkufizimi klasik për gjasën, frekuenca e ngjarjes në numër të madh të eksperimenteve, sipas rregullës është shumë afër deri te gjasa e ngjarjes. Nga ato shkaqe mund të nxjerrim përfundim se ekziston konstante reale rreth së cilës grumbullohen frekuencat. Ajo konstante, si karakteristikë numerike objektive e ngjarjes A quhet gjasa e ngjarjes. Për vlerën numerike të asaj konstante, gjatë numrit të madh të eksperimenteve mund të merret ose frekuenca e ngjarjes A ose numri që është afër deri te frekuenca. Në këtë mënyrë nuk fitohet formalisht përkufizimi matematikor i gjasës, por tregohet se ekziston gjasë e ngjarjes gjatë kushteve të caktuara, si edhe metoda për vlerësimin e saj të përafërtë.

Mbaj mend!

Frekuenca relative $f_n(A)=\frac{m}{n}$ për ngjarjen e rastit A quhet ***gjasa statistike*** ose ***gjasa empirike.***

Formulat $P(A)=\frac{m}{n}$ dhe $f_n(A)=\frac{m}{n}$ edhe pse nga jashtë janë të ngjashme, por thelbësisht dallohen.

Me formulën $P(A)=\frac{m}{n}$ teoretikisht e caktojmë gjasën e ngjarjes A.

Me $f_n(A)=\frac{m}{n}$ eksperimentalisht e caktojmë gjasën e ngjarjes A.

Që ta caktojmë gjasën duhet të kemi material eksperimental, statistikor. Gjasa caktohet pas kryerjes së eksperimentit dhe marrjes të disa fakteve empirike.

Gjasa statistike quhet gjasa *a posteriori* (e pastajshme).

Për ngjarjen e rastit A mund të caktohet gjasa statistike nëse janë plotësuar kushtet:

1. Eksperimeni mund të kryhet pafund shumë herë në kushte të pandryshueshme në të cilat ngjarja A mund të paraqitet ose të mos paraqitet.

2. Frekuenca relative e ngjarjes A në çdonjërën prej formave të kryera të eksperimentit pa rëndësi dallohen ndërmjet veti, d.m.th. përafërsisht janë të barabarta me gjasën e ngjarjes.

Kjo veti e frekuencës relative quhet stabiliteti statik i ngjarjes.

Stabiliteti statistik i frekuencës për herë të parë është vërejtur në demografi ose shkencën për popullsinë. Qysh në shekullin e vjetër ka qenë e vërejtur se raporti i numrit të fëmijëve të lindur meshkuj dhe numrit të përgjithshëm të fëmijëve të lindur me vite ka qenë i pandryshueshëm dhe përafërsisht ka qenë 0,5. Laplasi, në bazë të numrit të madh të të dhënave statistike ka përfunduar se frekuenca $f_n(A)$ e fëmijëve të lindur meshkuj për Londër, Berlin, Petrograd dhe tërë Francën ka qenë i njëjtë. Të gjitha ato raporte gjatë periudhës më të madhe se një dekadë lëviz rreth numrit që është përafërsisht i barabartë me $\frac{22}{43}=0{,}51162$.

E gjithë kjo na çon deri te një ligj themelor në teorinë e gjasës i quajtur **Ligji për numrat e mëdhej**, i shprehur nga matemtikani Zviceran Jakob Bernuli (1667 - 1748). Ligji tregon sa më i madh është numri N i eksperimenteve, edhe aq më pak ndryshojnë frekuenca relative e ngjarjes A dhe gjasa teorike e saj $P(A)$. Për numër të madh të n të ngjarjeve elementare, numri $|f_n(A)-P(A)|$ mund të bëhet shumë i vogël, pra prej atje vijon se gjasa statistike $f_n(A)$ tenton nga gjasa teorike $P(A)$.

Në detyrën 1, për $n=2400$, $f_n(A)=0{,}5005$, kurse gjasa matematike është $P(A)=0{,}5$.

3 Cakto vlerën $|f_n(A)-P(A)|$ në detyrën 2.

Ligji i numrave të mëdhej ka karakterin e aksiomës, karakter të ligjit natyror. Kur punohet për ngjarje rasti, ai na tregon në atë që individualisht paraqitet si i rastit, në masë të madhe paraqitet si i nevojshëm, i ligjshëm.

Ekzistojnë edhe ngjarje tjera të rastit te të cilët nuk mund të zbatohet përkufizimi klasik i gjasës.

Detyra për përsëritje dhe përforcim

1 Me principin e induksionit matematikor vërteto se vlen

$$2+5+8+...+(3n-1)=\frac{n(3n+1)}{2}.$$

2 Është dhënë bashkësia $A=\{4,6,7,8\}$.

a) Sa numra katërshifrorë me shifra të ndryshëm mund të formohen me shifrat të bashkësisë së dhënë?

b) Prej numrave të formuar sa numra janë çift, kurse sa tek? Shkuaji.

3 Shkruaji të gjitha permutacionet e numrave me shifrat 1, 1, 1, 2, 2.

4 Zgjidhe barazimin $V_x^2=380$.

5 Në një stacion hekurudhor jepen signale me ndihmën e shigjetave prej 5 semaforëve. Sa signale të ndryshme mund të jepen, nëse shigjetat në çdo semafor mund të kenë tre pozita të ndryshme?

6 Sa këshilla të ndryshëm mund të formohen prej 10 nxënësve dhe 4 profesorëve, nëse çdo këshill përbëhet prej 5 nxënësve dhe 2 profesorëve?

7 Cakto n dhe k, nëse $C_n^k=35$ dhe $V_n^k=840$.

8 Në sa pika priten 30 drejtëza që shtrihen në një rrafsh, nëse 16 prej tyre janë paralele, kurse 12 kalojnë nëpër një pikë?

9 Cakto anëtarin e trembëdhjetë në zbërthimin e binomit $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$, nëse koeficienti i anëtarit të tretë është 105.

10 Zbërtheje binomin $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$.

11 Shkruaje bashkësinë e ngjarjeve elementare të eksperimentit:

a) dy herë, njëra pas tjetrës është hedhur monedha;

b) dy herë, njëra pas tjetrës është hedhur zari;

c) njëkohësisht janë hedhur zari dhe monedha.

12 Sa është gjasa se shuma e pikëve të dy zareve të hedhura të jetë 7?

13 Prej shpilit me 32 letra fiton dy letra. Sa është gjasa se lojtari do të fiton „xhandar'' dhe „një prift''?

14 Janë hedhur dy zare. Sa është gjasa se në faqet e sipërme të zareve do të paraqiten pikë shuma e të cilave është më e vogël se 4 ose më e madhe se 10?

TEMA 4

GJEOMETRIA ANALITIKE

Në këtë temë do të mësosh për:

1 SISTEMI KËNDDREJTË KOORDINATIV

Kujtohu!

- Çka është vektor?
- Cilët vektor janë kolinear?
- Në të njëjtin rrafsh janë dhënë vektorët $\overrightarrow{a}$ dhe $\overrightarrow{b}$.

Cakto:

a) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$;

b) $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$.

Nëse $k \in \mathbf{R}$, atëherë $k\overrightarrow{a}$ është vektor kolinear me $\overrightarrow{a}$ dh e ka gjatësinë të barabartë me $|k|\left|\overrightarrow{a}\right|$.

Vektori $k\overrightarrow{a}$ ka kahe të njëjtë me vektorin $\overrightarrow{a}$, nëse $k>0$, kurse kahe të kundërt me vektorin $\overrightarrow{a}$ nëse $k<0$.

A Vektori, gjatësia e të cilit është një, quhet vektor njësi dhe shënohet me $\overrightarrow{e}$.

1 Le të jetë dhënë vektori njësi $\overrightarrow{e}$.

Vizato vektorët:

a) $\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{e}$; b) $\overrightarrow{b}=-3\overrightarrow{e}$.

Vëre zgjidhjen:

Le të jetë dhënë vektori njësi e "⟶",atëherë:

a)  b) 

$\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{e}$ $\quad$ $\overrightarrow{b}=-3\overrightarrow{e}$

$\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{e}=\left|\overrightarrow{a}\right|\overrightarrow{e}$ $\quad$ $\overrightarrow{b}=-3\overrightarrow{e}=-\left|\overrightarrow{b}\right|\overrightarrow{e}$

Vektori njësi $\overrightarrow{e}$, i cili është me kahe të njëjtë me vektorin $\overrightarrow{a}$, quhet **orta** e vektorit $\overrightarrow{a}$ dhe shënohet me *ort* $\overrightarrow{a}$.

Vektorët njësi $\overrightarrow{e_1}$ dhe $\overrightarrow{e_2}$ që janë reciprokisht normal dhe kanë pikë të fillimit të përbashkët quhen ortë. Ato i shënojmë me $\overrightarrow{i}$ dhe $\overrightarrow{j}$.

B Me ndihmën e vektorëve njësi $\overrightarrow{i}$ dhe $\overrightarrow{j}$ do të përkufizojmë sistem kënddrejtë koordinativ në rrafsh.

Bashkësia e cila përbëhet prej një pike çfarëdo O dhe dy vektor njësi rreciprokisht normal $\overrightarrow{i}$ dhe $\overrightarrow{j}$, fillimi i të cilit është në pikën O, quhet **sistemi kënddrejtë koordinativ** në rrafshin π, e shënojmë me $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

Më tutje do ta quajmë vetëm sistem koordinativ.

Pika O quhet **fillimi i koordinatave**, kurse drejtëzat të caktuara me vektorët $\overrightarrow{i}=\overrightarrow{OE_1}$ dhe $\overrightarrow{j}=\overrightarrow{OE_2}$ quhen **boshte koordinative**, fig. 1.

Drejtëza e caktuar me vektorin $\overrightarrow{i}$ quhet **boshti i abshisës** (boshti x), kurse drejtëza e caktuar me vektorin $\overrightarrow{j}$ quhet **boshti i ordinatës** (boshti y).

Rrafshi në të cilin është dhënë sistemi koordinativ quhet **rrafshi koordinativ** Oxy.

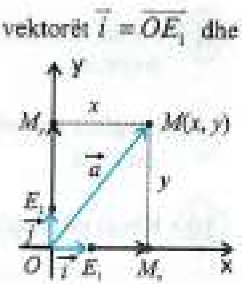


fig. 1

Vektori fillimi i të cilit është në fillimin koordinativ O, kurse skaji në çfarëdo pikë M prej rrafshit koordinativ, quhet **rreze vektor** i pikës M.

2 Le të jetë M çfarëdo pikë në sistemin koordinativ $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Cakto koordinatat e rreze vektorit $\overrightarrow{OM}$.

Vëre zgjidhjen:

Le të jetë $\overrightarrow{OM}$ rreze vektor ku pika M është caktuar me koordinatat e saja, (fig. 1), kurse $\overrightarrow{OM_x}$ dhe $\overrightarrow{OM_y}$ janë projeksione të rreze vektorit mbi boshtet koordinative x dhe y.

Prej këtu vijon $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$.

Pasi vektorët $\overrightarrow{OM_x}$ dhe $\overrightarrow{OM_y}$ janë kolinear me vektorët $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$, ekzistojnë numra të vetëm realë x dhe y ashtu që

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Në këtë mënyrë, në realitet, është bërë zbërthimi i rreze vektorit $\overrightarrow{OM}$ nëpër ortët $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$ në sistemin kënddrejtë koordinativ. Zbërthimi i këtillë gjithmonë është i mundshëm dhe i vetëm. Numrat realë x dhe y janë koordinatat e rreze vektorit $\overrightarrow{OM}$ dhe i shënojmë, $\overrightarrow{OM} = (x, y)$.

Njëkohësisht, x dhe y janë koordinatat e pikës M, i shënojmë $M(x, y)$.

Koordinata e parë x e pikës M, d.m.th. rreze vektori $\overrightarrow{OM}$ quhet **abshisa**, kurse koordinata e dytë y - **ordinata** e pikës M.

Në këtë mënyrë çdo pike M nga rrafshi Oxy i përgjigjet çifti i radhitur i vetëm i numrave realë x dhe y.

Vlen edhe e anasjellta: për çfarëdo çift të numrave realë x dhe y ekziston pikë e vetme M nga rrafshi Oxy, për të cilën x është abshisë, kurse y është ordinatë.

Në këtë mënyrë është vendosur pasqyrim i ndërsjelltë ndërmjet rrafshit π si bashkësi e pikave dhe bashkësisë $R \times R$ prej të gjitha çifteve të radhitura të numrave realë.

Boshtet koordinative e ndajnë rrafshin në katër pjesë, të cilat quhen kuadrantë: I, II, II, IV, fig..2.

Në të njëjtin sistem koordinativ cilado pikë ka shenja sikurse është paraqitur në fig. 2.

Pika A që shtrihet në boshtin x është me koordinata $A(x, 0)$, $x \in R$, d.m.th. ordinata është e barabartë me zero, pika B prej boshtit y është $B(0, y)$, $y \in R$, d.m.th. abshisa është zero, kurse fillimi i koordinatave $O(0, 0)$.

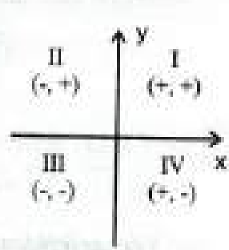


fig 2

Për shembull, pikës A nga rrafshi Oxy i përgjigjet i vetmi çift i radhitur i numrave realë (4, 2), kurse pikës B - çifti i radhitur (-2, 5), fig. 3.

Edhe anasjelltas, për çiftin e radhitur të numrave realë (-5, -2) ekziston pikë e vetme C nga rrafshi Oxy për të cilën -5 është abshisa, kurse -2 është ordinata. Për çiftin e e radhitur të numrave realë (3, -3) ekziston pikë e vetme D nga rrafshi Oxy, për të cilin abshisa është 3, kurse -3 është ordinatë.

Duke pasur parasysh, shpeshherë pikën M e identifikojmë me atë çift të radhitur të numrave realë (x, y), kurse rrafshin π me bashkësinë $R \times R$.

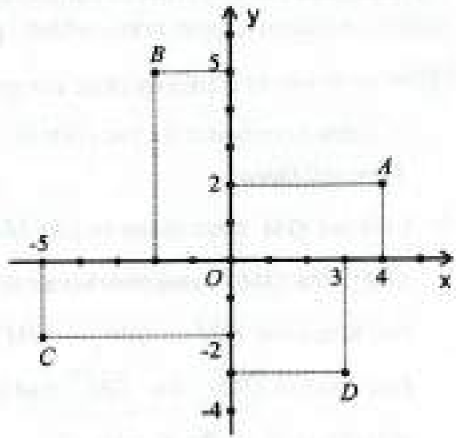


fig. 3

3 Në sistemin koordinativ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ janë dhënë pikat: $A(-3, 4)$, $B(2, -5)$, $C(-2, -1)$ dhe $D(5, 0)$. Zbërtheji rreze vektorët $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ dhe $\overrightarrow{OD}$ nëpër orta.

Vëre zgjidhjen

- $\overrightarrow{OA} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$;
- $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$;
- $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} - \vec{j}$;
- $\overrightarrow{OD} = 5\vec{i} + 0\vec{j} = 5\vec{i}$.

4 Janë dhënë rreze vektorët me koordinatat e tyre:

$$\overrightarrow{OA} = (-2, 4);\quad \overrightarrow{OB} = (0, -3);\quad \overrightarrow{OC} = (5, -2) \text{ dhe } \overrightarrow{OD} = (-4, -2).$$

a) Paraqiti në sistemin kënddrejtë koordinativ.

b) Zbërtheji sipas boshteve koordinative (ortat).

Nëse $\overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ dhe $\overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ janë rreze vektor, atëherë ato janë të barabartë nëse dhe vetëm nëse kanë koordinata përkatëse të barabarta, d.m.th.

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} \text{ nëse dhe vetëm nëse } x_1 = x_2 \text{ dhe } y_1 = y_2.$$

5 Caktoji numrat realë x dhe y prej relacioneve:

a) $3\vec{i} + 2\vec{j} = (x+1)\vec{i} + y\vec{j}$;   b) $x\vec{i} + 5\vec{j} = -3\vec{i} + (y-2)\vec{j}$.

Vëre zgjidhjen:

a) Prej barasisë vijon $\begin{cases} x+1=3 \\ y=2 \end{cases}$ d.m.th. $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Detyra

1) Paraqiti në sistemin koordinativ rreze vektorët e dhënë me koordinatat e tyre:

a) $\overrightarrow{a}=(2,3)$; $\overrightarrow{b}=(-1,5)$; $\overrightarrow{c}=(4,-2)$; $\overrightarrow{d}=(-1,-3)$; $\overrightarrow{e}=(8,-5)$;

b) $\overrightarrow{a}=(4,0)$; $\overrightarrow{b}=(0,-2)$; $\overrightarrow{c}=(0,3)$; $\overrightarrow{d}=(-5,0)$;

c) $\overrightarrow{a}=(3,3)$; $\overrightarrow{b}=(-5,-5)$; $\overrightarrow{c}=(-2,2)$; $\overrightarrow{d}=(-4,4)$.

Si është pozita e tyre reciproke e vektorëve nën b), dhe ortat $\overrightarrow{i}$ dhe $\overrightarrow{j}$?

2) Cakto koordinatat e rreze vektorëve $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ dhe $\overrightarrow{OG}$ të dhënë në fig. 4.

3) Rreze vektorët $\overrightarrow{a}=(4,1)$, $\overrightarrow{b}=(0,-3)$, $\overrightarrow{c}=(-1,0)$, $\overrightarrow{d}=(1,-1)$, $\overrightarrow{e}=(-2,5)$ zbërtheji sipas ortave $\overrightarrow{i}$ dhe $\overrightarrow{j}$.

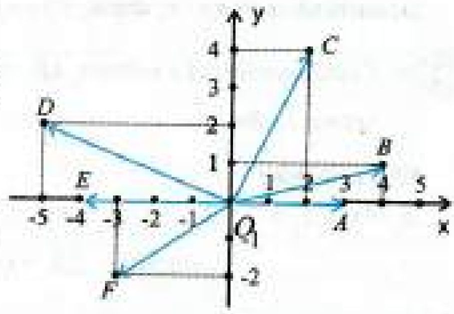


fig. 4

4) Cakto koordinatat e vektorëve: $\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-8\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{d}=-14\overrightarrow{i}+9\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{e}=-\overrightarrow{j}$.

2 KOORDINATAT E VEKTORIT NË SISTEMIN KËNDDREJTË KOORDINATIV

Kujtohu!

- Mbledhja e vektorëve ka vetinë komutative dhe asociative:

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a} \text{ dhe}$$
$$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right).$$

- Për shumëzimin e vektorit me numër vlejnë këto ligje:

$$(k\cdot m)\overrightarrow{a}=k\cdot\left(m\cdot\overrightarrow{a}\right);$$
$$(k+m)\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{a}+m\overrightarrow{a};$$
$$k\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=k\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}.$$

1 Në sistemin kënddrejtë koordinativ $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ është dhënë vektori $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$, pikat e skajshme të të cilit janë: $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$. Cakto koordinatat e vektorit $\overrightarrow{a}$.

Vëre zgjidhjen

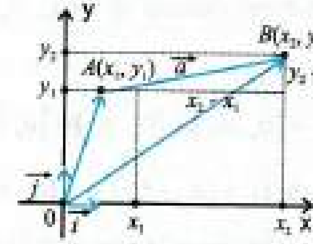


fig. 1

Koordinatat e vektorit $\overrightarrow{a}$ i shënojmë me a_x dhe a_y, fig. 1.

Vektori $\overrightarrow{AB}$ nuk është rreze vektor, por ai mund të paraqitet si ndryshim të dy rreze vektorëve, d.m.th.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

ku $\overrightarrow{OB}=x_2\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}$, $\quad \overrightarrow{OA}=x_1\overrightarrow{i}-y_1\overrightarrow{j}$, $\quad \overrightarrow{AB}=\left(x_2\overrightarrow{i}+y_2\overrightarrow{j}\right)-\left(x_1\overrightarrow{i}-y_1\overrightarrow{j}\right)$;
$\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1\right)\overrightarrow{i}+\left(y_2-y_1\right)\overrightarrow{j}$.

Domethënë, $a_x = x_2 - x_1$ dhe $a_y = y_2 - y_2$, d.m.th. $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,\ y_2-y_1\right)$.

2 Cakto koordinatat e vektorit $\overrightarrow{AB}$, nëse $A(2, -4)$, $B(1, 3)$, kurse pastaj zbërtheje sipas ortave $\overrightarrow{i}$ dhe $\overrightarrow{j}$.

Vëre zgjidhjen

$a_x = x_2 - x_1 = 1 - 2 = -1$, $a_y = y_2 - y_1 = 3 - (-4) = 7$.

Domethënë, $\overrightarrow{AB} = (-1, 7)$, d.m.th. $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{i}+7\overrightarrow{j}$.

3 Vektori $\overrightarrow{a}=-5\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}$ pikën e fillimit e ka $A(2, -1)$. Cakto koordinatat e pikës së tij të skajshme B.

Vëre zgjidhjen:

$a_x = x_2 - x_1$, $\quad a_y = y_2 - y_1$;
$-5 = x_2 - 2$, $\quad -4 = y_2 - (-1)$;
$x_2 = -3$. $\quad y_2 = -5$.

Domethënë, $B(-3, -5)$.

Mbaj mend!

Nëse janë dhënë pikat $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$, atëherë koordinatat e vektorit $\overrightarrow{AB}$ është çifti $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ d.m.th. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

B Operacionet: mbledhjen të dy ose më shumë vektorëve, zbritjen e vektorëve dhe shumëzimin e vektorit me numër, gjer më tani e bëmë gjeometrikisht, pasi edhe vet vektorët ishin të dhënë gjeometrikisht (si segmente të orientuara). Tani do të tregojmë si i bëm ato operacione, nëse vektorët janë dhënë me koordinatat e tyre në sistemin koordinativ $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

4 Janë dhënë vektorët $\overrightarrow{a}=\left(a_x, a_y\right)$; $\overrightarrow{b}=\left(b_x, b_y\right)$. Cakto shumën e tyre.

Vëre zgjidhjen:

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\left(a_x,a_y\right)+\left(b_x,b_y\right)=\left(a_x\overrightarrow{i}+a_y\overrightarrow{j}\right)+\left(b_x\overrightarrow{i}+b_y\overrightarrow{j}\right)=$$

$$=\left(a_x+b_x\right)\overrightarrow{i}+\left(a_y+b_y\right)\overrightarrow{j}=\left(a_x+b_x,a_y+b_y\right)$$

A vlen e njëjta rregullë nëse numri i mbledhësve është më i madh se dy?

5 Janë dhënë vektorët $\overrightarrow{a}=(3,-2)$, $\overrightarrow{b}=(2,0)$ dhe $\overrightarrow{c}=(-1,-4)$.

Cakto: a) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$; b) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(3,-2)+(2,0)=(3+2,-2+0)=(5,-2)$.

Mbaj mend!

Shuma e dy ose më shumë vektorëve është vektor koordinatat e të cilit janë të barabartë me shumën e koordinatave të tyre përkatëse, d.m.th. nëse $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y)$, $\overrightarrow{b}=(b_x,b_y)$, $\overrightarrow{c}=(c_x,c_y)$, atëherë $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=(a_x+b_x+c_x,\,a_y+b_y+c_y)$.

6 Cakto ndryshimin e vektorëve $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y)$ i $\overrightarrow{b}=(b_x,b_y)$.

Vëre zgjidhjen:

$$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_x,a_y)-(b_x,b_y)=(a_x\overrightarrow{i}+a_y\overrightarrow{j})-(b_x\overrightarrow{i}+b_y\overrightarrow{j})=$$
$$=(a_x-b_x)\overrightarrow{i}+(a_y-b_y)\overrightarrow{j}=(a_x-b_x,a_y-b_y)$$

7 Cakto ndryshimin e vektorëve: $\overrightarrow{a}=(5,-2)$ i $\overrightarrow{b}=(-1,-4)$.

Vëre zgjidhjen:

$$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(5,-2)-(-1,-4)=(5-(-1),-2-(-4))=(6,2)$$

Mbaj mend!

Ndryshimi i dy vektorëve është vektor koordinatat e të cilit janë të barabarta me ndryshimin e koordinatave të tyre përkatëse, d.m.th. nëse $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y)$, $\overrightarrow{b}=(b_x,b_y)$, atëherë
$$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y).$$

8 Vektorin $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y)$ shumëzoje me numrin λ.

Vëre zgjidhjen

$$\lambda\overrightarrow{a}=\lambda(a_x,a_y)=\lambda(a_x\overrightarrow{i}+a_y\overrightarrow{j})=(\lambda a_x)\overrightarrow{i}+(\lambda a_y)\overrightarrow{j}=(\lambda a_x,\lambda a_y).$$

9 Nëse $\overrightarrow{a}=(3,-2)$, cakto vektorin: a) $5\overrightarrow{a}$; b) $-\frac{1}{3}\overrightarrow{a}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $5\overrightarrow{a}=5\cdot(3,-2)=(5\cdot3,5\cdot(-2))=(15,-10)$.

Mbaj mend!

Vektori shumëzohet me numër ashtu që çdo koordinatë e vektorit shumëzohet me atë numër, d.m.th. nëse $\overline{a}=\left(a_x, a_y\right)$ dhe $\lambda \in R$, atëherë $\lambda\overline{a}=\left(\lambda a_x, \lambda a_y\right)$.

10 Janë dhënë vektorët: $\overline{a}=(3,-2)$, $\overline{b}=(2,0)$ dhe $\overline{c}=(-1,-4)$.

Caktoji vektorët:

a) $\overline{a}+\overline{b}$; b) $\overline{b}-\overline{c}$; c) $-2\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}+3\overline{c}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\overline{a}+\overline{b}=(3,-2)+(2,0)=(3+2,\ -2+0)=(5,-2)$

b) $\overline{b}-\overline{c}=(2,0)-(-1,-4)=(2-(-1),\ 0-(-4))=(3,4)$

c) $-2\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}+3\overline{c}=-2(3,-2)+\frac{1}{2}(2,0)+3(-1,-4)=$

$=(-6,+4)+(1,0)+(-3,-12)=(-8,-8)$

11 Janë dhënë vektorët: $\overline{a}=(-1,5)$ dhe $\overline{b}=\left(\frac{1}{2},-2\right)$. Caktoji vektorët:

a) $3\overline{a}+2\overline{b}$; b) $-\overline{a}+4\overline{b}$; c) $\frac{1}{2}\overline{a}-6\overline{b}$.

Detyra

1. Cakto shumën dhe ndryshimin e vektorëve:
   a) $\overline{a}=(3,-1)$ dhe $\overline{b}=(5,4)$; b) $\overline{p}=(-1,2)$ dhe $\overline{q}=(5,0)$.

2. Janë dhënë vektorët: $\overline{a}=(2,-3)$; $\overline{b}=(-1,2)$; $\overline{c}=(1,1)$.
   Cakto koordinatat e vektorëve:
   a) $2\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$; b) $3\overline{a}-\overline{c}$; c) $2\overline{a}-3\overline{b}+\frac{1}{4}\overline{c}$; ç) $\overline{a}-5\overline{b}+\overline{c}$.

3. Cakto numrat realë x dhe y nëse:
   a) $2\overline{i}+3\overline{j}=x\overline{i}+(2y-1)\overline{j}$; b) $(2x-y+1)\overline{i}+(y-3)\overline{j}=\overline{0}$;
   c) $(3-x)\overline{i}+y\overline{j}=(y+4)\overline{i}-(1-2x)\overline{j}$.

4. Cakto koordinatat e vektorit $\overline{AB}$, nëse:
   a) $A(5,-1)$, $B(3,4)$; b) $A(3,0)$, $B(0,5)$;
   c) $A(-4,7)$, $B(1,0)$; ç) $A(81,-32)$, $B(87,-33)$.

5. Cakto koordinatat e pikës së skajshme B të vektorit $\overline{AB}$, nëse:

a) $A(0, 0)$; $\overline{AB} = (-2, 5)$; b) $A(3, -1)$; $\overline{AB} = (4, 3)$;

c) $A(-1, 2)$; $\overline{AB} = (5, -10)$; ç) $A(0, -2)$, $\overline{AB} = (-3, 0)$.

6. Cakto koordinatat e pikës së fillimit A të vektorit $\overline{AB}$, nëse:

a) $B(0, 0)$, $\overline{AB} = (3, -2)$; b) $B(5, 0)$, $\overline{AB} = (-2, 1)$;

c) $B(-3, 4)$, $\overline{AB} = (4, -3)$; ç) $B(0, -1)$, $\overline{AB} = (-2, -5)$.

7. Duke i shfrytëzuar koordinatat e vektorëve vërteto teoremën për vijën e mesme të trapezit.

3 LARGËSIA NDËRMJET DY PIKAVE

A 1. Pikat $A(5, 1)$ dhe $B(2, 5)$ paraqiti në sistemin kënddrejtë koordinativ, kurse pastaj cakto largësinë ndërmjet tyre.

Vëre zgjidhjen:

- Nëpër pikat A dhe B tërheqim drejtëza paralele me boshtet e koordinatave fig. 1.
- Cilat janë koordinatat e pikëprerjes së pikës C?
- Si është ΔABC?
- Cakto gjatësitë e segmentëve AC dhe BC.
- Vëre se $\overline{AC} = 5 - 2 = 3$, $\overline{BC} = 5 - 1 = 4$;

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

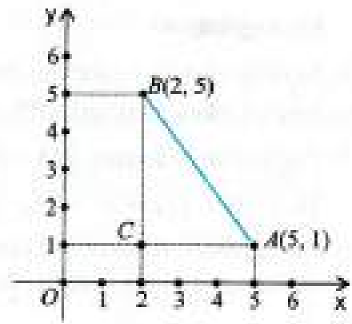


fig. 1

2. Në rrafsh janë dhënë pikat $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$. Cakto largësinë ndërmjet tyre.

Vëre zgjidhjen:

- ΔABC është kënddrejtë me katete $\overline{AC} = x_2 - x_1$ dhe $\overline{BC} = y_2 - y_1$, fig. 2.
- Largësia e kërkuar është $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ ose

$$d = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

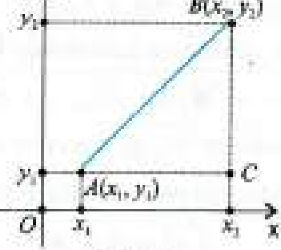


fig.. 2

3. Cakto largësinë ndërmjet tyre:

a) $A(7, 9)$ dhe $B(10, 3)$; b) $A(-4, -5)$ dhe B $(3, -4)$;

c) $A(cosa, 0)$ dhe $B\left(\sin\alpha, \sqrt{\sin 2\alpha}\right)$.

4 Në boshtin x cakto pikë e cila është një lloj e larguar prej pikave $A(0, 5)$ dhe $B(4, 2)$.

Vëre zgjidhjen:

- Sa është ordinata e pikës që shtrihet në boshtin x?
- Pika e kërkuar le të jetë $M(x, 0)$.
- $\overline{MA} = \sqrt{(0-x)^2 + (5-0)^2}$; $\overline{MB} = \sqrt{(4-x)^2 + (2-0)^2}$
- Prej kushtit $\overline{MA} = \overline{MB}$ kemi $\sqrt{x^2 + 25} = \sqrt{16 - 8x + x^2 + 4}$;

$x^2 + 25 = 16 - 8x + x^2 + 4$ prej ku

$x = -\dfrac{5}{8}$, d.m.th. $M\left(-\dfrac{5}{8}, 0\right)$.

5 Në boshtin y cakto pikën e cila është një lloj e larguar prej pikave $A(-3, -5)$ dhe $B(4, -3)$.

6 Në boshtin y të caktohet pikë që prej pikës $A(4, -6)$ është e larguar për 5 njësi.

Vëre zgjidhjen:

- Sa është abshisa e pikës që shtrihet në boshtin y ?
- Pika e kërkuar le të jetë $M(0, y)$.
- Prej kushtit të detyrës $\overline{MA} = 5$, d.m.th. $\sqrt{(4-0)^2 + (-6-y)^2} = 5$;

$16 + 36 + 12y + y^2 = 25$; $y^2 + 12y + 27 = 0$.

- Pas zgjidhjes së barazimit katror i fitojmë vlerat $y_1 = -9$ dhe $y_2 = -3$, që do të thotë se ekzistojnë dy pika të atilla: $M_1(0, -9)$ dhe $M_2(0, -3)$.

7 Në boshtin x të caktohet pika që prej pikës $A(5, 12)$ është e larguar për 13 njësi.

B Formula për largësinë ndërmjet dy pikave mund të zbatohet edhe për njehsimin e gjatësisë të çfarëdo vektori $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, nëse dihen koordinatat e tij a_x dhe a_y në sistemin koordinativ $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le të jetë dhënë vektori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, ku $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$. Atëherë gjatësia e vektorit $\vec{a}$, që shënohet me $|\vec{a}|$, është në realitet largësia ndërmjet pikave A dhe B fig. 3, d.m.th.

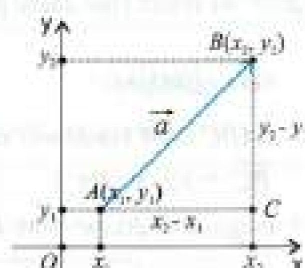


fig. 3

$$|\vec{a}| = d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- Pasi $x_2 - x_1 = a_x$, $y_2 - y_1 = a_y$ kemi

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

8 Cakto gjatësinë e vektorit $\overrightarrow{a}$, nëse:

a) $\overrightarrow{a}=\left(\sqrt{11},-\sqrt{5}\right)$; b) $\overrightarrow{a}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{i}-4\,\overrightarrow{j}$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{11+5}=4$.

9 Cakto gjatësinë e vektorit $\overrightarrow{AB}$, nëse:

a) $A(-2, 5)$, $B(-1, -3)$; b) $A(3, 2)$, $B(-2, 10)$.

Vëre zgjidhjen:

a) $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$; $\overrightarrow{AB}=(-1+2, -3-5)$; d.m.th. $\overrightarrow{AB}=(1, -8)$, pra

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-8)^2}=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}.$$

Detyra

1. Pikat $A(3, 4)$, $B(-2, 4)$ dhe $C(2, 2)$ janë kulmet e një trekëndëshi. Cakto perimetrin e trekëndëshit.
2. Vërteto se trekëndëshi kulmet e të cilit janë $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ dhe $C\left(-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right)$ është barabrinjës.
3. Vërteto se trekëndëshi me kulmet $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$ dhe $C(-1, -3)$ është kënddrejtë.
4. Cakto barazimin e vendit gjeometrik të pikave një lloj të larguara prej pikave $A(2, 2)$ dhe $B(4, 4)$.
5. Cakto koordinatat e pikës që janë një lloj të larguara prej pikave

   a) $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 2)$; b) $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(0, 4)$.
6. Pika $M(x, y)$ është një lloj e larguar prej pikave $A(3, 5)$ dhe $B(-2, 4)$. Largësia e saj deri te boshti y është dy herë më e madhe se largësia deri te boshti x.
   Cakto koordinatat e saja.
7. Janë dhënë dy kulme fqinje të katrorit $A(3, -7)$ dhe $B(-1, 4)$. Njehso syprinën e tij.
8. Një pikë lëvizëse, që ka pasur pozitën fillestare $M_0(3, 8)$, zhvendoset paralelisht me boshtin y. Të caktohet pozita e saj ku ajo do të jetë në largësi të barabartë prej pikave $M_1(4, 7)$ dhe $M_2(-3, 2)$.
9. Një pikë lëvizëse, që ka pasur pozitën fillestare $M_0(2, 1)$ zhvendoset paralelisht me boshtin x. Të caktohet pozita kur ajo ka qenë në largësi të barabartë me 13 njësi prej pikës $M(4, 6)$.
10. Vërteto analitikisht se në trekëndëshin kënddrejtë segmenti d, i cili e lidh kulmin e këndit të drejtë me mesin e hipotenuzës, është i barabartë me gjysmën e hipotenuzës.

4 NDARJA E SEGMENTIT NË RAPORT TË DHËNË

A **1** Caktoji koordinatat e pikës C, e cila segmentin AB, $A(1, 3)$ dhe $B(5,7)$ e ndan në raport $3 : 1$.

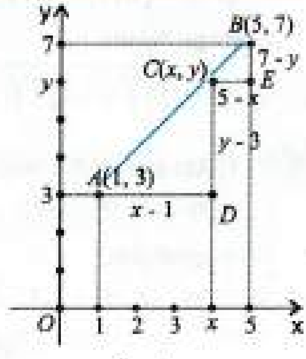


fig. 1

Vëre zgjidhjen:

- Nëpër pikën A tërheqim drejtëz paralele me boshtin x, kurse nëpër C drejtëz paralele me boshtin y. Pikëprerjen e shënojmë me pikën D.
  Nëpër C tërheqim drejtëz paralele me boshtin x, kurse nëpër B drejtëz paralele me boshtin y. Pikëprerjen e shënojmë me pikën E. (fig.1).
- Pasi pika C është ndërmjet pikave A dhe B, vijon se numrat $x - 1$ dhe $5 - x$ janë me shenja të njëjta.
- $\Delta ADC \sim \Delta CEB$ (si trekëndësha kënddrejtë, me kënde të barabartë).
- Prej ngjashmërisë së trekëndëshave vijon se brinjët përkatëse janë proporcionale, d.m.th.

$\overline{AC} : \overline{CB} = (x - 1) : (5 - x)$, dhe
$\overline{AC} : \overline{CB} = 3 : 1$ vijon
$(x - 1) : (5 - x) = 3 : 1;$
$x - 1 = 15 - 3x;$
$4x = 16;\ x = 4.$

$\overline{AC} : \overline{CB} = (y - 3) : (7 - y)$ dhe
$\overline{AC} : \overline{CB} = 3 : 1$, vijon
$(y - 3) : (7 - y) = 3 : 1;$
$y - 3 = 21 - 3y;$
$4y = 24;\ y = 6.$

Pika e kërkuar është $C(4, 6)$.

2 Cakto koordinatat e pikës C, e cila segmentin AB, $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$ e ndan në raport të dhënë $m : n = \lambda$.

Vëre zgjidhjen:

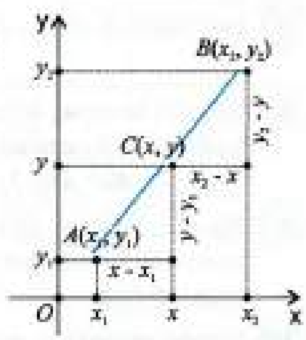


fig. 2

- Pasi pika C shtrihet ndërmjet pikave A dhe B, fig.2, numrat $x - x_1$ dhe $x_2 - x$ janë me shenja të njëjta, pra prej ngjashmërisë së trekëndëshave dhe kushtit të detyrës kemi:

$$\overline{AC} : \overline{CB} = (x - x_1) : (x_2 - x) \text{ dhe } \overline{AC} : \overline{CB} = \lambda$$

$$\text{t.e. } (x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda;$$

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x;$$

$$x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2, \text{ t.e.}$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Në mënyrë të ngjashme për ordinatën y fitojmë $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

Pika e kërkuar është $C\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

3 Cakto koordinatat e pikës C që segmentin AB e ndan në raport λ:

a) $A(-6, -2)$, $B(2, 10)$, $l = 3$; b) $A(-1, 2)$, $B(5, 2)$, $l=\dfrac{1}{2}$;

c) $A(3, 5)$, $B(-8, 1)$, $\lambda=\dfrac{2}{7}$.

Vëre zgjidhjen:

b) $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$;

$$x=\frac{-1+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=1; \qquad y=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{1}}{\frac{3}{2}}=2;$$

Domethënë, $C(1, 2)$.

Nëse pika C është mesi i segmentit AB, atëherë:

$\overline{AC}:\overline{CB}=1$, d.m.th. $\lambda=1$.

Cilat janë koordinatat e pikës C?

Mbaj mend!

Koordinatata e pikës, e cila segmentin e dhënë $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$ e ndan në raport $m : n = \lambda$, caktohet me formulat:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

Koordinatat e mesit të segmentit janë:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

4 Cakto koordinatat e vijës së rëndimit të trekëndëshit kulmet e të cilit janë pikat:

a) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$; b) $A(2, 3)$, $B(-10, -4)$, $C(2, -8)$.

Vëre zgjidhjen:

a) $A(x_1, y_1)$; $A_1\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$, fig. 3. Nëse T është vija e rëndimit të ΔABC, atëherë:

$$\overline{AT}:\overline{TA_1}=2:1=\lambda, \quad \lambda=2,$$

$$x_T = \frac{x_1 + 2\frac{x_2 + x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y_T = \frac{y_1 + 2\frac{y_2 + y_3}{2}}{1+2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Domethënë,

$$T\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

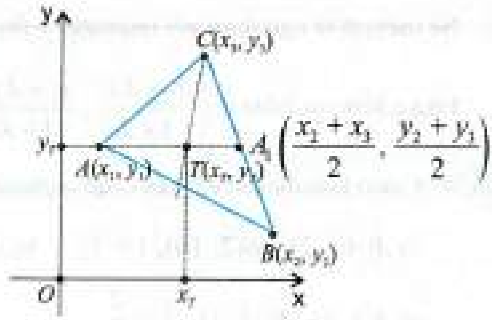


fig. 3

5 Segmenti AB, $A(-9, 5)$ dhe $B(11, -3)$ me pikat M, N dhe P është ndarë në katër pjesë të barabarta. Cakto koordinatat e pikave M, N dhe P.

Vëre zgjidhjen:

Pika M e ndan segmentin AB në raport $\lambda = 1:3$, fig. 4, pra

fig. 4

$$x_m = \frac{-9 + \frac{1}{3}\cdot 11}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{-27 + 11}{3}}{\frac{4}{3}} = -4; \qquad y_m = \frac{5 + \frac{1}{3}\cdot(-3)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3.$$

Koordinatata e pikave N dhe P caktoji vet.

Detyra

1. Caktoji koordinatat e pikës C e cila segmentin $A(-3, 1)$, $B(2, 5)$ e ndan në raport $3:1$.

2. Cakto koordinatat e vijës së rëndimit të trekëndëshit:

   a) $A(2, 3)$, $B(3, 4)$, $C(-8, 2)$; b) $A(-5, 2)$, $B(-1, -6)$, $C(3, 4)$.

3. Segmenti $A(3, -6)$, $B(10, 8)$ është ndarë me pikat C, D, E dhe F në pesë pjesë të barabarta. Cilët janë koordinatat e atyre pikave?

4. Cakto koordinatat e kulmit të katërt të paralelogramit, nëse tre kulmet e tij janë:

   a) $A(1, 2)$, $B(-5, -3)$, $C(7, -6)$; b) $A(-10, 7)$, $B(5, -13)$, $C(14, 7)$.

5. Vërteto se drejtëza që kalon nëpër meset e dy brinjëve të trekëndëshit është paralele me brinjën e tretë.

   Udhëzim: ΔABC vendose në sistemin koordinativ ashtu që brinja AB të shtrihet në boshtin x, kurse kulmi A të puthitet me fillimin e koordinatave.

6. Segmenti AB, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e ka gjatësinë d. Vazhdo segmentin nëpër pikën B për a njësi. Cilat janë koordinatat e pikës së skajshme të segmentit të fituar?

7) Segmenti AB, $A(1, -1)$ dhe $B(4, 5)$ të vazhdohet në kahen AB deri te pika C, ashtu që gjatësia e tij të zmadhohet tri herë. Caktoji koordinatat e pikës C.

8) Cakto syprinën e trekëndëshit, kulmet e të cilit janë:

a) $A(1, 0)$, $B(3, 1)$, $C(0, 2)$; b) $A(-4, -3)$, $B(5, 1)$, $C(-3, 5)$;

c) $A(a, 0)$, $B(a + b, a)$, $C(0, b)$.

9) Cakto syprinën e katërkëndëshit, kulmet e të cilit janë:

a) $A(2, 3)$, $B(-3, 4)$, $C(-1, -4)$, $D(3, -1)$; b) $A(-1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(0, 5)$, $D(-2, 3)$.

10) Pikat $A(3, 5)$, $B(12, 2)$ dhe $C(8, 12)$ janë kulmet e trekëndëshit. Cakto:

a) perimetrin e trekëndëshit;

b) koordinatat e meseve të brinjëve;

c) koordinatat e pikës së rëndimit;

ç) syprinën e trekëndëshit ABC.

11) Pikat $A(-2, -1)$, $B(0, 2)$ dhe $C(4, y_3)$ janë kulmet e trekëndëshit ABC, syprina e të cilit është $S = 7$. Cakto ordinatën y_3 e pikës C.

5 FORMA E PËRGJITHSHME E BARAZIMIT TË DREJTËZËS

Kujtohu!

- Me sa pika është përcaktuar një drejtëz?
- Sa drejtëza kalojnë nëpër një pikë?
- Nëpër çfarëdo dy pika të ndryshme kalon një dhe vetëm një drejtëz.
- Vizato grafikun e funksionit lienare $2x - y = 1$.

A Njëra nga detyrat e gjeometrisë analitike është: nëse është dhënë barazimi i ndonjë funksioni, të vizatohet grafiku i tij.

Detyra e dytë e gjeomtrisë analitike është nëse dihen vetitë e ndonjë funksioni, ta shkruajmë barazimin e tij.

Duke ditur se nëpër dy pika të ndryshme kalon vetëm një drejtëz, detyra e jonë është ta shkruajmë barazimin e saj.

1 Janë dhënë pikat $A(2, 1)$ dhe $B(5, 4)$. Cakto varësinë ndërmjet koordinatave të pikave A dhe B, dhe çfarëdo pike $P(x, y)$ prej drejtëzës që kalon nëpër pikat A dhe B.

Vëre zgjidhjen:

- Nëpër pikat A dhe B tërheqim drejtëza paralele me boshtin x.
- Nëpër pikat B dhe P tërheqim drejtëza paralele me boshtin y .
- Si janë ndërmjet veti ΔACB dhe ΔBDP?

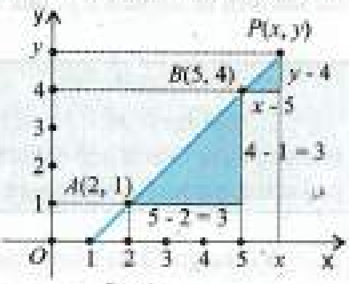


fig. 1

■ $\Delta ACB \sim \Delta BDP$, pra ngjashmërisë vijon $(x - 5) : 3 = (y - 4) : 3$ prej ku $x - 5 = y - 4$, d.m.th. $x - y - 1 = 0$.

Vëren se varësia ndërmjet koordinatave të pikave A, B dhe P është shprehur me barazimin linear të drejtëzës.

Teorema: Çdo drejtëz në rrafshin koordinativ mund të shprehet me barazim të shkallës së parë, në lidhje me koordinatat x dhe y të çfarëdo pike prej drejtëzës.

Vërtetimi:

■ Le të jenë $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ pika të dhëna dhe le të jetë $M(x, y)$ çfarëdo pikë prej drejtëzës që kalon nëpër pikat A dhe B.

■ Nëpër pikat A dhe B tërheqim drejtëza paralele me boshtin x.

■ Nëpër pikat B dhe M tërheqim drejtëza paralele me boshtin y.

■ Pikëprerjet e drejtëzave të tërhequra le të jenë C dhe D.

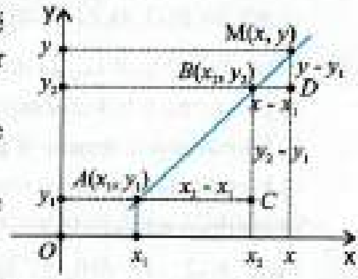


fig. 2

■ $\Delta ACB \sim \Delta BDM$. Pse?

Prej ngjashmërisë së trekëndëshave vijon $\frac{\overline{DM}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$ d.m.th. $\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ prej ku $(y - y_2)(x_2 - x_1) = (x - x_2)(y_2 - y_1)$.

Pas reduktimit të kryer fitohet barazimi

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

Ndryshimet $y_1 - y_2$, $x_2 - x_1$ dhe $x_1y_2 - x_2y_1$ janë numra konstantë për çfarëdo pikë M, pra mund t'i shënojmë me A, B dhe C përkatësisht. Atëherë barazimi është i formës

$$Ax + By + C = 0$$

i cili quhet **forma e përgjithshme e barazimit të drejtëzës**.

Ai e shpreh kushtin ku pika $M(x, y)$ shtrihet në drejtëzën p. Domethënë, koordinatat e çdo pike $M(x, y)$ e cila shtrihet në drejtëzën p e kënaq barazimin, kurse koordinatat e pikave që nuk shtrihen në drejtëzën p, nuk e kënaqin barazimin e fituar.

Vlen teorema e anasjelltë:

Çdo barazim i formës $Ax + By + C = 0$, ku A, B dhe C janë koeficientët konstantë dhe të atillë që të paktën njëri prej koeficientëve A ose B është i ndryshueshëm prej zeros, paraqesin barazim të drejtëzës.

2 Vizato grafikun e barazimit:

a) $2x - y = 0$; b) $x - 2 = 0$; c) $3y + 5 = 8$.

Vëre zgjidhjen

a) Sa është koeficienti C në këtë barazim?

x	0	1
y	0	2

Vëre se grafiku kalon nëpër $O(0, 0)$ (fig.3).

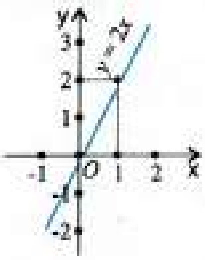


fig. 3

fig. 4

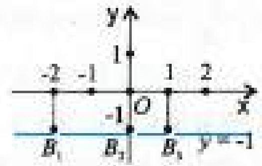


fig. 5

b) Drejtëza $x - 2 = 0$ është identike me $x + 0 \cdot y - 2 = 0$, e cila i kënaq koordinatat e pikave $A(2, y)$, ku y është çfarëdo numër real, d.m.th. $A_1(2, -1)$, $A_2(2, 0)$, $A_3(2, 2)$ etj. fig. 4.

c) Drejtëza $3y - 5 = -8$ është identike me $0 \cdot x + 3y + 3 = 0$, e cila i kënaq koordinatat e pikave $B(x, -1)$, ku x është çfarëdo numër real, d.m.th.
$B_1(-2, -1)$, $B_2(0, -1)$, $B_3(1, -1)$ etj. fig. 5.

B 3 Çfarë pozite ka drejtëza $Ax + By + C = 0$, në rrafsh nëse:

a) $C = 0$; b) $B = 0$; c) $A = 0$; ç) $A = 0, C = 0$; d) $B = 0, C = 0$.

Vëre zgjidhjen

a) Nëse $C = 0$, $A \neq 0$ dhe $B \neq 0$ atëherë barazimi është i formës $Ax + By = 0$. Koordinatat e fillimit të koordinatave $O(0, 0)$ e kënaqin barazimin, $Ax + By = 0$. Domethënë, drejtëza e formës $Ax + By = 0$ kalon nëpër fillimin e koordinatave fig. 6.

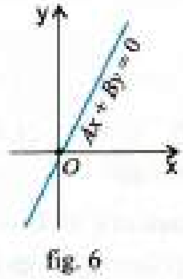


fig. 6

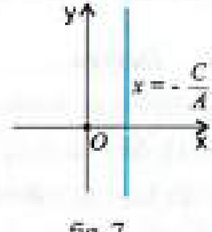


fig. 7

b) Nëse $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, atëherë barazimi i formëst $Ax + C = 0$ ose $x = -\dfrac{C}{A}$.

Kjo do të thotë se të gjitha pikat e drejtëzës kanë abshisë të njëjtë $x = -\dfrac{C}{A}$, d.m.th. drejtëza është paralele me boshtin y dhe është në largësi $\left|-\dfrac{C}{A}\right|$ njësi prej saj, fig.7.

c) Nëse $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, atëherë barazimi është i formës

$By + C = 0$ ose $y = -\frac{C}{B}$.

Kjo do të thotë se të gjitha pikat e drejtëzës kanë ordinatë të njëjtë

$y = -\frac{C}{B}$, d.m.th, drejtëza është paralele me boshtin x dhe është në

largësi $\left|-\frac{C}{B}\right|$ njësi prej saj fig.8.

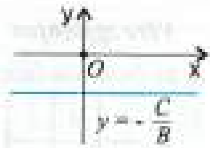


fig. 8

ç) Nëse $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$, atëherë $y = 0$, është barazimi i boshtit x.

d) Nëse $B = 0$, $C = 0$, $A \neq 0$, atëherë $x = 0$ është barazimi i boshtit y.

Duke e zgjidhur këtë detyrë e vërtetojmë teoremën e anasjelltë.

4 Caktoji pikëprerjet e drejtëzës $x - y + 1 = 0$ me boshtet koordinative.

5 Caktoji pikëprerjet e drejtëzës $Ax + By + C = 0$ me boshtet koordinative.

Vëre zgjidhjen:

- Pikëprerja me boshtin x e ka ordinatën $y = 0$.
- Duke zëvendësuar te barazimi fitojmë $Ax + C = 0$ prej ku $x = -\frac{C}{A}$.

  Domethënë, prerja me boshtin x është $M\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$.
- Pikëprerja me boshtin y e ka abshisën $x = 0$.
- Duke zëvendësuar te barazimi fitojmë $By + C = 0$ prej ku $y = -\frac{C}{B}$.

  Domethënë, prerja me boshtin y është $N\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

Detyra

1. Cila pikë shtrihet në drejtëzën: a) $M(2, 3)$, $4x - y = 0$; b) $M(4, -2)$, $8x - 7y = 46$; c) $P(-3, -1)$, $5x - 3y + 12 = 0$; ç) $Q(-4, 7)$, $x - 2y = 10$?
2. Çfarë pozite kanë në rrafshin koordinativ drejtëzat, barazimet e të cilave janë:
   a) $3x + 6 = 0$; b) $2y - 3 = 0$; c) $3x + y = 0$; ç) $2y = 0$; d) $3x = 0$.
   Vizato grafikët e tyre.
3. Te barazimet që vijojnë cakto koeficientin e panjohur, ashtu që pika M të shtrihet në drejtëzën p.
   a) $Ax + 3y - 7 = 0$, $M(-2, 9)$; b) $2x + By + 6 = 0$, $M(-6, -5)$;
   c) $2x + 3y + C = 0$, $M(-4, 3)$.

4. Është dhënë barazimi i përgjithshëm i drejtëzës $2x - y + 3 = 0$. Caktoji pikëprerjet me boshtet koordinative.

5. Te barazimi i drejtëzës $(m + 2)x + (2m - 3)y + 3m + 5 = 0$ cakto parametrin m, ashtu që drejtëza:

a) të kalon nëpër fillimin e koordinatave; b) të jetë paralele me boshtin x;

c) të jetë paralele me boshtin y; ç) të kalon nëpër pikën $M(2, -2)$.

6 BARAZIMI I DREJTËZËS NËPËR DY PIKA. FORMA SEGMENTALE E BARAZIMIT TË DREJTËZËS

A 1. Janë dhënë pikat $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$. Shkruaje barazimin e drejtëzës të caktuar me ato pika.

Vëre zgjidhjen:

- Nëpër pikat A dhe B kalon drejtëza e vetme. Pika $M(x, y)$ le të jetë çfarëdo pikë prej drejtëzës.
- $\Delta AM_1M \sim \Delta AB_1B$. (Pse?)
- Prej ngjashmërisë së trekëndëshave (fig.1) vijon

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ose}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

çka paraqet **barazimin e drejtëzës nëpër dy pika**.

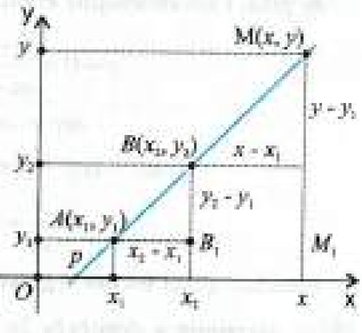


fig. 1

2. Janë dhënë pikat $A(1, 2)$ dhe $B(5, 4)$. Shkruaje barazimin e drejtëzës të caktuar me ato pika.

Vëre zgjidhjen:

- $\Delta AM_1M \sim \Delta AB_1B$.
- $\frac{y-2}{x-1} = \frac{2}{4}$; $y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)$; $x - 2y + 3 = 0$.
- Duke e zbatuar formulën

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ kemi:}$$

$$y - 2 = \frac{4-2}{5-1}(x-1), \text{ t.e. } x - 2y + 3 = 0.$$

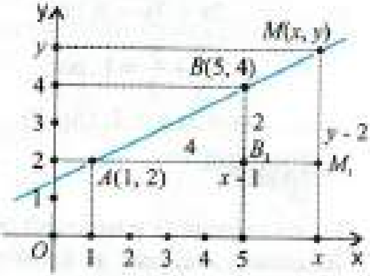


fig. 2

3. Është dhënë trekëndëshi ABC, $A(2, 3)$, $B(-4, 1)$ dhe $C(2, -3)$. Shkruaje barazimin e

a) brinjës AB; b) vijës së rëndimit të tërhequr prej kulmit A.

Nëse pikat A dhe B shtrihen në drejtëzën që është paralele me boshtin y, atëherë barazimin e drejtëzës nëpër dy pika shfrytëzoje në këtë rast:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1).$$

Mbaj mend!

Barazimi:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

paraqet barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$.

4 Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat $A(m, 0)$ dhe $B(0, n)$.

Vëre zgjidhjen:

Nëpër pikat A dhe B kalon drejtëz e vetme. Në formulën për barazimin e drejtëzës nëpër dy pika, i zëvendësojmë koordinatat e pikave të dhëna, d.m.th.

$$y - 0 = \frac{0 - n}{m - 0}(x - m);$$

$$my = -nx + mn;$$

$$nx + my = mn/:mn, \ (mn \neq 0)$$

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

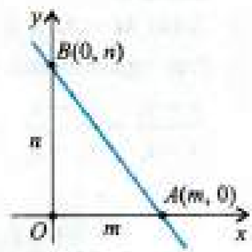


fig. 3

Ky barazimi quhet **forma segmentale** e barazimit të drejtëzës.

5 Barzimin e drejtëzës $2x + 3y - 6 = 0$ sille në formën segmentale. Vizato grafikun e drejtëzës duke i shfrytëzuar segmentat.

Vëre zgjidhjen:

$$2x + 3y = 6 /:6;$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1, \text{ pra}$$

$m = 3$, $n = 2$; (fig. 4).

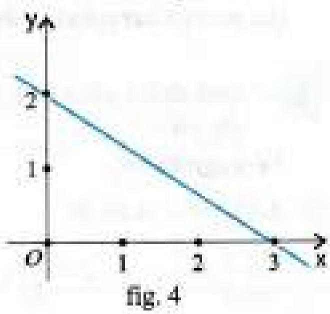


fig. 4

Vëre!

Forma segmentale e barazimit të drejtëzës mundëson konstruksionin e shpejtë të drejtëzës. Barazimi i drejtëzës që kalon nëpër fillimin e koordinatave, nuk mund të shkruhet në formën segmentale, pasi në atë rast $m = 0$ dhe $n = 0$.

Prandaj, çdo drejtëz që kalon nëpër fillimin e koordinatave, mund të paraqitet me barazim në formën segmentale dhe anasjelltas, çdo barazim i formës $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ cakton drejtëz që me boshtet koordinative x dhe y prenë segmenta me gjatësi $|m|$ dhe $|n|$ përkatësisht.

C **6** Barzimin e drejtëzës $Ax + By + C = 0$ sille në formën segmentale.

Vëre zgjidhjen:

$Ax + By = -C$; $\quad \dfrac{Ax}{-C} + \dfrac{By}{-C} = 1$; $\quad \dfrac{x}{-\dfrac{C}{A}} + \dfrac{y}{-\dfrac{C}{B}} = 1$, vijon $m = -\dfrac{C}{A}$, $n = -\dfrac{C}{B}$.

7 Shkruaje barazimin e drejtëzës, nëse m dhe n përkatësisht janë:

a) 1 dhe -1; $\qquad$ b) 2 dhe -3; $\qquad$ c) $\dfrac{2}{3}$ dhe $\dfrac{3}{4}$.

Vëre zgjidhjen:

$\dfrac{x}{\dfrac{2}{3}} + \dfrac{y}{\dfrac{3}{4}} = 1$; $\quad \dfrac{3x}{2} + \dfrac{4y}{3} = 1$, d.m.th. $9x + 8y - 6 = 0$.

Mbaj mend!

Barazimi $\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ quhet forma segmentale e barazimit të drejtëzës.

m - segment (pjesë) te boshti x; n - segment (pjesë) te boshti y.

8 Cakto syprinën e trekëndëshit që drejtëza $4x + 3y - 12 = 0$ e formon me boshtet koordinative.

Vëre zgjidhjen:

Barazimin e dhënë duhet ta sjellim në formën segmentale, d.m.th.

$\dfrac{4x}{12} + \dfrac{3y}{12} = 1$; $\quad \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1$. Domethënë $m = 3$, $n = 4$.

Trekëndëshi është kënddrejtë me kateta m dhe n, pra , d.m.th.

$$S = \frac{m \cdot n}{2} \text{ d.m.th. } S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

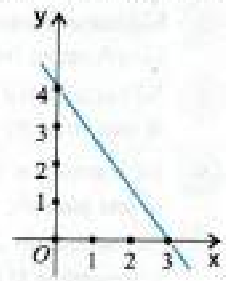


fig. 5

9 Në barazimin e drejtëzës $\lambda x + (\lambda - 2)y - 6 = 0$ të caktohet λ ashtu që, gjatësia e segmentit në boshtin x të jetë dy herë më e madhe se gjatësia e segmentit në boshtin y.

Vëre zgjidhjen:

$\lambda x + (\lambda + 2)y - 6 = 0 /:6$; $\quad \dfrac{\lambda x}{6} + \dfrac{(\lambda + 2)y}{6} = 1$; $\dfrac{x}{\dfrac{6}{\lambda}} + \dfrac{y}{\dfrac{6}{(\lambda + 2)}} = 1$; $m = \dfrac{6}{\lambda}$; $n = \dfrac{6}{(\lambda + 2)}$.

Prej kushtit të detyrës $m = 2n$, kemi: $\dfrac{6}{\lambda} = 2\dfrac{6}{(\lambda + 2)}$; $\lambda + 2 = 2\lambda$; $\lambda = 2$.

10 Në barazimin e drejtëzës $6x + 5y - 12\lambda = 0$ të caktohet λ ashtu që, prodhimi i gjatësive të segmentave të boshteve koordinative të jetë 12.

Detyra

1 Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat:

a) $A(-1, 2)$ dhe $B(2, 1)$; b) $A(3, -4)$ dhe $B(-2, -3)$.

Barazimet e fituara të drejtëzës shkruaji në formën e përgjithshme dhe në formën segmentale.

2 Diagonalet e rombit $d_1 = 10$, $d_2 = 4$ janë marrë për boshte koordinative. Shkruaji barazimet e brinjëve të rombit, nëse për boshtin x është marrë diagonalja më e madhe.

3 Është dhënë segmenti AB, $A(2, -1)$ dhe $B(7, 9)$.
Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $C(1, -2)$ dhe e ndan segmentin AB në raport $2 : 3$.

4 Barazimin e drejtëzës shkruaje në formën segmentale, kurse pastaj vizato grafikun e saj:

a) $3x - 4y - 24 = 0$; b) $4x + 9y - 6 = 0$;

c) $6x - 20y + 15 = 0$; ç) $35x + 9y + 15 = 0$.

5 Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $M(3, 5)$ dhe në boshtet koordinative prenë segmenta gjatësitë e të cilëve qëndrojnë si $3 : 4$.

6 Një drejtëz kalon nëpër pikën $M(4, 1)$, kurse në boshtet koordinative prenë segmenta shuma e gjatësive të tyre është 10. Shkruaje barazimin e saj.

7 Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikën $B(-5, 4)$, kurse me boshtet koordinative formon trekëndësh me syprinë $S = 5$.

8 Në barazimin e drejtëzës $12x + \lambda y - 60 = 0$ të caktohet λ ashtu që gjatësia e segmentit të asaj drejtëze ndërmjet boshteve koordinative të jetë 13.

9 Në barzimin e drejtëzës $(2\lambda + 1)x + (3\lambda - 5)y + 4\lambda = 0$ të caktohet λ ashtu që drejtëza të jetë paralele me: a) boshtin x; b) boshtin y.

10 Në barazimin $Ax + By - 45 = 0$ të caktohen A dhe B ashtu që shuma e gjatësive të segmentëve të boshteve koordinative të jetë 14, kurse ndryshimi i tyre të jetë 4.

7 FORMA EKSPLICITE E BARAZIMIT TË DREJTËZËS. BARAZIMI I DREJTËZËS QË KALON NËPËR NJË PIKË

A 1 Formo barazim të drejtëzës e cila me pjesën pozitive të boshtit y prenë segment me gjatësi 2, kurse me pjesën pozitive të boshtit x formon kënd prej $\alpha = 45°$.

Vëre zgjidhjen:

Prej ΔMNP vijon:

$$\frac{y-2}{x} = tg\alpha$$

$$y - 2 = x \cdot tg45°$$

$$y = x + 2$$

fig. 1

2 Formo barazim të drejtëzës e cila me boshtin y prenë segment me gjatësi n, kurse me pjesën pozitive të boshtit x formon kënd α.

Vëre zgjidhjen:

Në fig 2 është paraqitur drejtëza p. Pozita e saj në lidhje me sistemin koordinativ të Dekartit është caktuar me segmentin $\overline{OB} = n$ që drejtëza e prenë në boshtin y dhe këndin α që ajo e formon me pjesën pozitive të boshtit x.

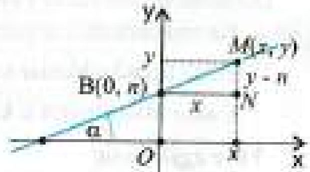


fig. 2

Le të jetë $M(x, y)$ çfarëdo pikë prej drejtëzës p. Shprehe varësinë ndërmjet koordinatave x dhe y të pikës M, këndit α dhe segmentit n.

Nëpër pikën B tërheqim drejtëz paralele me boshtin x, kurse nëpër M drejtëz paralele me boshtin y. Pikëprerjen do ta shënojmë me N.

Prej trekëndëshit MBN vijon $tg\alpha = \dfrac{y-n}{x}$, d.m.th. $y = tg\alpha \cdot x + n$. Nëse $tg\alpha = k$, atëherë barazimi është i formës

$$y = kx + n.$$

e cila quhet **forma eksplicite e barazimit të drejtëzës**,

k - quhet koeficienti i drejtimit të drejtëzës,

n - segmenti që drejtëza e prenë me boshtin y.

3 Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila me boshtin e ordinatës prenë segment me gjatësi 5, kurse me pjesën pozitive të boshtit x formon kënd prej $\alpha = 225°$.

Vëre zgjidhjen:

$n = 5$, $k = tg\alpha = tg225° = tg(180° + 45°) = tg45° = 1$, pra $y = x + 5$.

4 Vizato drejtëzën $y = x\sqrt{3} - 2$.

Vëre zgjidhjen:

Prej barazimit të drejtëzës $y = x\sqrt{3} - 2$ vijon: $k = \sqrt{3}$, $tg\alpha = \sqrt{3}$, kurse $\alpha = 60°$ dhe $n = -2$, fig. 3.

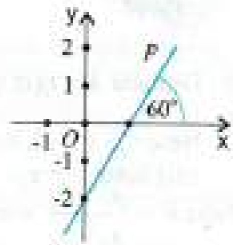


fig. 3

5 Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër fillimin e koordinatave dhe me pjesën pozitive të boshtit x formon kënd prej 135°.

Vëre zgjidhjen:

$n = 0$, $n = tg135° = -1$.

Domethënë, $y = -x$ është barazimi i drejtëzës, e cila është simetralja e kuadrantit II dhe IV.

6 Shkruaje barazimin e drejtëzës që është paralele me boshtin x, kurse në boshtin e ordinatës prenë segment me gjatësi 3.

Vëre zgjidhjen:

- Këndi ndërmjet drejtëzave paralele është 0^o ose 180^o, pra $tg0^o = tg180^o = 0$, d.m.th. $k = 0$;
  $y = 0 \cdot x + 3$.
  Domethënë, barazimi i kërkuar është $y = 3$.

7 Në trekëndëshin të përcaktuar me drejtëzën $y = -\frac{1}{2}x + 3$ dhe me boshtet koordinative, është brendashkruar katror ashtu që dy brinjë të tij shtrihen në boshtet koordinative. Cakto koordinatat e kulmeve të tij.

Vëre zgjidhjen:

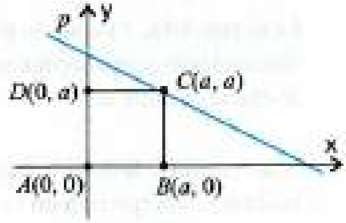


fig. 4

- Brinja e katrorit le të jetë a.
- Koordinatat e kulmeve të katrorit le të jenë:
  $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, a)$ dhe $D(0, a)$.
- Pika C shtrihet në drejtëzën p, pra koordinatat e saja e kënaqin barazimin e drejtëzës, d.m.th. $a = -\frac{1}{2}a + 3$ prej ku vijon $a = 2$. Domethënë, pikat $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 2)$ dhe $D(0, 2)$ janë kulmet e katrorit.

B **8** Janë dhënë koordinatat e dy pikave $A_1(x_1, y_1)$ dhe $A_2(x_2, y_2)$. Të caktohet koeficienti i drejtimit të drejtëzës që kalon nëpër pikat.

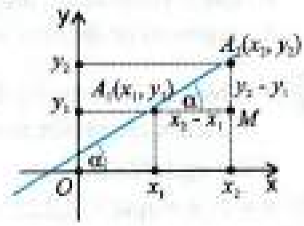


fig. 5

Vëre zgjidhjen:

- $\sphericalangle A_2A_1M = \alpha$ (si kënde me krahë paralele).
- Prej ΔA_1MA_2 vijon $k = tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Vëre!

- Formula $k = tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ka kuptim vetëm për $x_2 - x_1 \neq 0$.
- Nëse $x_2 - x_1 = 0$, d.m.th. $x_2 = x_1$, atëherë drejtëza është normale në boshtin x dhe barazimi i saj është $x = x_1$.

Nëse $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e zëvëndësojmë në barazimin e drejtëzës që kalon nëpër dy pika, atëherë barazimi është i formës

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

i cili quhet **barazimi i drejtëzës nëpër një pikë**, me koeficientin e drejtimit k.

- Kjo formë e barazimit të drejtëzës zbatohet nëse është dhënë një pikë dhe koeficienti i drejtimit ose ndonjë kusht i cili duhet të kënaq koeficientin e drejtimit të drejtëzës.

9 Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat $A(-3, 2)$, kurse me pjesën pozitive të boshtit x formon kënd prej $\alpha = 150^o$.

Vëre zgjidhjen:

Barazimi i formës $y - y_1 = k(x - x_1)$; $k = tg150^o = tg(90^o + 60^o) = -ctg60^o = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

pra barazimi është $y - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + 3)$ ose $x\sqrt{3} + 3y + 3\sqrt{3} - 6 = 0$.

Mbaj mend!

Barazimi $y = kx + n$ është forma eksplicite e barazimit të drejtëzës, kurse barazimi $y - y_1 = k(x - x_1)$ është barazimi i drejtëzës që kalon nëpër një pikë.

10 Caktoji këndet që i formojnë me pjesën pozitive të boshtit x, si edhe segmentin që ato drejtëza e prejnë në boshtin e ordinatës:

a) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}}$; b) $y = -7$; c) $x = 3$.

11 Shkruaji barazimet e brinjëve të trapezit barakrahas bazat e të cilit janë $a = 10$, $b = 6$, kurse këndet e bazës së madhe janë 60^o.
Për boshte koordinative të merren: baza e madhe për bosht të abshisave, kurse boshti i simetrisë së trapezit për bosht të ordinatës.

Vëre zgjidhjen:

Detyra ka dy zgjidhje. 6

Sipas kushtit të detyrës kulmet e njërit trapez janë:
$A(-5, 0), B(5, 0), C(3, y)$ dhe $D_1(-3, y)$,
kurse të tjetrit
$A(-5, 0), B(5, 0), D_1(-3, -y)$ dhe $C(3, -y)$.

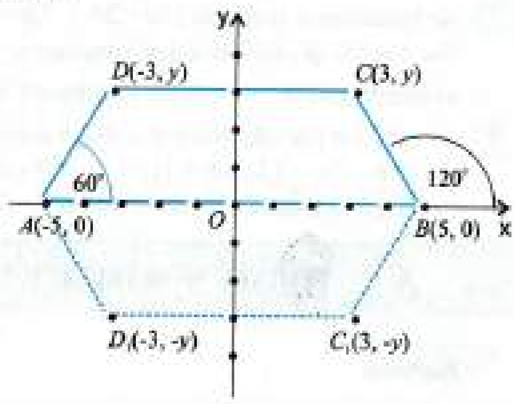


fig. 6

Drejtëza BC kalon nëpër pikën $B(5, 0)$ dhe me boshtin x formon kënd prej 120^o.
Barazimi i drejtëzës BC është:

$y - y_1 = k(x - x_1)$, $k = tg120^o = -\sqrt{3}$,

$$y = -\sqrt{3}(x - 5), \text{ d.m.th.}$$

$$BC: x\sqrt{3} + y - 5\sqrt{3} = 0.$$

Pika $C(3, y)$ shtrihet në drejtëzën BC, pra prej $3\sqrt{3} + y - 5\sqrt{3} = 0$ vijon $y = 2\sqrt{3}$, e cila paraqet barazimin e drejtëzës CD.

Shkruaji barazimet e brinjëve tjera të trapezit.

Detyra

1. Cakto barazimin e drejtëzës e cila me pjesën pozitive të boshtit x - formon këndin $\alpha = 30°$, kurse në boshtin e ordinatës prenë segment me gjatësi 3.

2. Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër pikën M dhe me pjesën pozotive të boshtit x formon këndin α:

   a) $M(2, 5)$, $\alpha = 45°$; b) $M(-1, 3)$, $\alpha = 135°$;

   c) $M(-3, -2)$, $a = 300°$; ç) $M(2, 3)$, $\alpha = 150°$.

3. Në trekëndëshin të përcaktuar me drejtëzën $y = -3x + 2$ dhe boshtet koordinative është brendashkruar drejtkëndësh ashtu që dy brinjë të tij shtrihen në boshtet koordinative. Të caktohen koordinatat e kulmeve të tij, nëse dihet se:

   a) njëra brinjë është tri herë më e madhe se tjetra;

   b) njëra brinjë është për 1 më e madhe se tjetra.

4. Të caktohet barazimi i drejtëzës që kalon nëpër pikën $A(3, 1)$, kurse në boshtin e ordinatës prenë segment me gjatësi 5.

5. Të shkruhet barazimi i drejtëzës që kalon nëpër pikën $A(-1, -5)$, kurse e ka koeficientin këndor 3.

6. Në barazimin e drejtëzës $2x - (5\lambda - 2)y - 3 = 0$ të caktohet λ ashtu që drejtëza me boshtin x të formon kënd prej $45°$.

7. Në barazimin e drejtëzës $(3a - 2b + 5)x - (a - b)y + 2a - 5b + 1 = 0$ të caktohen a dhe b ashtu që drejtëza të jetë simetrale e:

   a) kuadrantit I; b) kuadrantit II.

8. Të caktohet për cilat vlera të a dhe b drejtëza $(a + 2b - 3)x + (2a - b + 1)y + 6a + 9 = 0$ është paralele me boshtin e abshisës, kurse boshtin e ordinatës e prenë në pikën$(0, -3)$.

8 FORMA NORMALE E BARAZIMIT TË DREJTËZËS

Kujtohu!

- $cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta$.
- $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

A Në shqyrtimet e gjer tanishme të drejtëzës shikuam me cilat elemente është përcaktuar një drejtëz. Drejtëza mund të jetë e përcaktuar edhe me:

- gjatësinë p të normales të tërhequr prej fillimit të koordinatave deri te drejtëza$(p > 0)$;
- këndin φ që normalja e tërhequr prej fillimit të koordinatave e formon me pjesën pozitive të boshtit x, ku $0° < \varphi < 360°$.

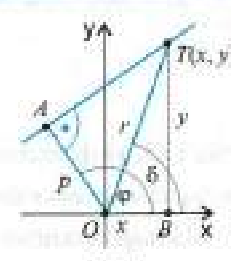


fig. 1

Le të jetë $T(x, y)$ çfarëdo pikë prej drejtëzës, kurse δ është këndi që $OT = r$ e formon me pjesën pozitive të boshtit x.

Prej ΔOAT kemi $\frac{p}{r} = \cos(\varphi - \delta)$ ose $p = r\cos(\varphi - \delta) = r\cos\varphi\cos\delta + r\sin\varphi\sin\delta$.

Prej ΔOBT kemi $x = r\cos\delta$, $y = r\sin\delta$ pra largësia p prej fillimit të koordinatave deri te drejtëza është $p = x\cos\varphi + y\sin\varphi$ ose barazimi

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

Kjo quhet forma normale ose Hesit të drejtëzës.

1 Vizato grafikun e drejtëzës dhe shkruaje barazimin e drejtëzës, nëse $\varphi = 60°$ dhe $p = 2$.

Vëre zgjidhjen:

$x\cos60° + y\sin60° - 2 = 0$; $x\frac{1}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = 0$; $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$, fig. 2.

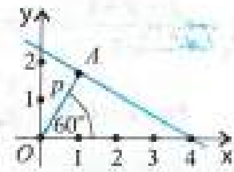


fig. 2

B **2** Barazimin $Ax + By + C = 0$ sille në formën normale.

Vëre zgjidhjen:

- Nëse barazimin $Ax + By + C = 0$ e shumëzojmë me ndonjë numër λ, $(\lambda \neq 0)$ do të fitohet barazimi $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ i cili është ekuivalent me barazimin e dhënë.
- Barazimet $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ dhe $x\cos\varphi + y\sin\varphi + p = 0$ janë ekuivalente nëse koeficientët e tyre janë të barabartë, d.m.th.

$$\lambda A = \cos\varphi, \quad \lambda B = \sin\varphi, \quad \lambda C = -p.$$

- Duke i kuadruar dhe mbledhur dy barazimet e para fitojmë:

$$\lambda^2(A^2 + B^2) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

- Prej këtu vijon

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \text{ pra } \cos\varphi = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\ \sin\varphi = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\ p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Pas zëvendësimit të λ në barazimin $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$, kemi $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$.

Prej $p > 0$, vijon se shenja para rrënjës duhet të jetë e kundërt me shenjën e anëtarit të lirë.

3 Drejtëzën a) $12x + 5y - 10 = 0$; b) $2x + y - 4 = 0$; transformoje në formën normale.

Vëre zgjidhjen:

- a) Në barazimin e drejtëzës $A = 12$, $B = 5$, $C < 0 \Rightarrow \lambda > 0$.d.m.th.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{1}{\sqrt{169}} = \frac{1}{13}, \text{ pra } 12x + 5y - 10 = 0 \,/\cdot\frac{1}{13};$$

$\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-\frac{10}{13}=0$ ose nëse e zbatojmë formulën $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$, fitojmë

$$\frac{12x+5y-10}{\sqrt{12^2+5^2}}=0 \text{, d.m.th. } \frac{12x+5y-10}{13}=0.$$

4 Cakto këndin që normalja e drejtëzës $x - y + 1 = 0$ e tërhequr prej fillimit të koordinatave e formon me pjesën pozitive të boshtit x, si edhe gjatësinë e asaj normaleje.

Vëre zgjidhjen:

Do ta sjellim barazimin në formën normale: $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $\lambda = -\sqrt{2}$;

$\frac{x-y+1}{-\sqrt{2}}=0$, prej ku vijon: $cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Prej $cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dhe $sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vijon $\varphi = 135°$.

Mbaj mend!

Forma normale e barazimit të drejtëzës $Ax + By + C = 0$, është:

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

ku rrënja katrore dhe anëtari i lirë C janë me shenja të kundërta.

5 Barazimin e drejtëzës $y = kx + n$ sille në formën normale.

Vëre zgjidhjen:

Prej cilës formë është barazimi i dhënë?

Barazimin e sjellim në formën e përgjithshme, d.m.th. $kx - y + n = 0$, kurse forma normale është:

$$\frac{kx-y+n}{\pm\sqrt{k^2+1}}=0,$$

ku para rrënjës katrore merret shenja e kundërt me shenjën e n.

Detyra

1 Shkruaje barazimin e drejtëzës, nëse është dhënë:

a) $\varphi = 30°$, $p = 2$; b) $\varphi = 150°$, $p = 2$;

c) $\varphi = 45°$, $p = 1$; ç) $\varphi = 135°$, $p = 1$.

2 Barazimet e drejtëzës që vijojnë shkruaji në formën normale:

a) $4x + 3y + 30 = 0$; b) $7x - 24y - 100 = 0$; c) $x - y + 2 = 0$;

ç) $y = ax + 2$; d) $4y + 3 = 0$; e) $4x + 3 = 0$;

f) $x\sqrt{3} - y\sqrt{6} + 7 = 0$; g) $y = -\frac{3}{4}x + 5 = 0$; h) $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$.

(3) Cakto këndin që normalja e drejtëzës e formon me pjesën pozitive të boshtit x:

a) $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$; b) $\sqrt{3}x - y - 4 = 0$; c) $x + y + 2 = 0$.

9 LARGËSIA PREJ PIKËS DERI TE DREJTËZA

Kujtohu!

- Çka është largësia prej pikës deri te drejtëza?
- Çka është largësia ndërmjet dy drejtëzave paralele?

1 Është dhënë barazimi i drejtëzës m: $Ax + By + C = 0$ dhe pika $M(x_1, y_1)$ që nuk shtrihet në drejtëzën e dhënë. Cakto largësinë prej pikës M deri te drejtëza m.

Vëre zgjidhjen:

Rasti I: Pika M dhe fillimi i koordinatave shtrihen në anë të ndryshme prej drejtëzës m, fig. 1.

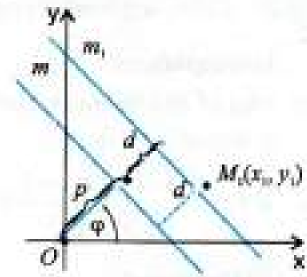


fig. 1

- Le të jetë $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ barazimi i drejtëzës m në formën normale.
- Nëpër pikën M tërheqim drejtëz m_1 e cila është përcaktuar me këndin φ dhe largësinë prej fillimit të koordinatave $p + d$. Forma normale e barazimit të drejtëzës m_1 është:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - (p + d) = 0.$$

- Pasi pika $M_1(x_1, y_1)$ shtrihet në drejtëzën m_1, koordinatat e tyre e kënaqin barazimin e drejtëzës, d.m.th.

$$x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - (p + d) = 0.$$

Prej këtu vijon $d = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p$ është largësia e kërkuar.

- Nëse barazimi i drejtëzës është dhënë në formën e përgjithshme, atëherë paraprakisht duhet ta transformojmë në formën normale.

Në këtë rast largësia d prej pikës $M(x_1, y_1)$ deri te drejtëza $Ax + By + C = 0$ do të njehsohet sipas formulës

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

para rrënjës merret shenja e kundërt e anëtarit të lirë C.

2 Cakto largësinë prej pikës $M(4, 3)$ deri te drejtëza m: $2x + y - 2 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

- Pika M dhe fillimi i koordinatave shtrihen në anë të ndryshme prej drejtëzës m, fig. 2.

$$d = \frac{2\cdot 4 + 1\cdot 3 - 2}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{9}{5}.$$


fig. 2

Rasti II: Pika M dhe fillimi i koordinatave shtrihen në anën e njëjtë të drejtëzës m, fig. 3.

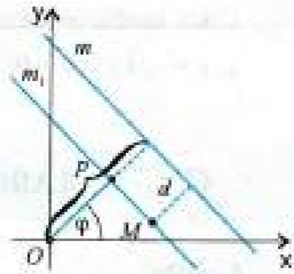


fig. 3

- Në këtë rast forma normale e barazimit të drejtëzës m_1 është:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - (p - d) = 0, \text{ d.m.th.}$$

$$x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - (p - d) = 0,$$

prej ku

$$d = -(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p) \text{ ose}$$

- $d = -\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$, para rrënjës merret shenja e kundërt me shenjën e C.

3 Cakto largësinë prej pikës $M(-1, 1)$ deri te drejtëza p: $2x + y - 2 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

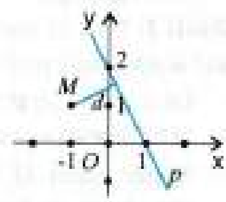


fig. 4

- Pika M dhe fillimi i koordinatave shtrihen në anën e njëjtë të drejtëzës p, fig.4.
- $d = -\dfrac{2\cdot(-1)+1\cdot1-2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Mbaj mend!

Largësia prej pikës së dhënë $M(x_1, y_1)$ deri te drejtëza e dhënë $Ax + By + C = 0$ përcaktohet me formulën $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

4 Cakto largësinë prej fillimit të koordinatave deri te drejtëza $3x - 4y + 6 = 0$.

5 Cakto lartësitë e ΔABC, nëse dihen koordinatat e kulmeve të tij: $A(-2, 5)$, $B(6, -3)$ dhe $C(1, 9)$.

Vëre zgjidhjen:

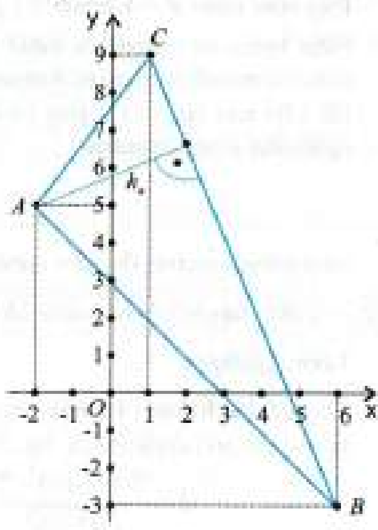


fig. 5

- Cakto barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat B dhe C, fig. 5.
- Nëse punon saktë, duhet të fitosh barazimin $12x + 5y - 57 = 0$.
- Cakto largësinë prej pikës A deri te drejtëza BC.

$$d = \frac{|12\cdot(-2)+5\cdot5-57|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{56}{13}$$

Domethënë, $h_a = \dfrac{56}{13}$.

6 Cakto largësinë ndërmjet dy drejtëzave paralele $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

Këtë detyrë mund ta zgjidhim në shumë mënyra. Do të ndalemi në dy prej tyre.

Mënyra I: Në njërën prej drejtëzave marrim çfarëdo pikë $M(x_1, y_1)$ dhe e kërkojmë largësinë e tyre deri te drejtëza tjetër.

Pika $M(2, y_1)$ le të shtrihet në drejtëzën $3x - 4y - 10 = 0$.

Prej këtu vijon: $3 \cdot 2 - 4y_1 - 10 = 0$; $4y_1 = -4$; $y_1 = -1$.

Domethënë $M(2, -1)$, kurse largësia e saj deri te drejtëza $6x - 8y + 5 = 0$ është:

$$d = \frac{|6 \cdot 2 - 8(-1) + 5|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{12 + 8 + 5}{10} = \frac{25}{10} = 2,5.$$

Mënyra II (Udhëzim): Caktoji largësitë p_1 dhe p_2 prej fillimit të koordinatave deri te drejtëza tjetër. Nëse fillimi i koordinatave është prej anës së njëjtë të drejtëzave atëherë $d = |p_1 - p_2|$, fig. 6, nëse fillimi i koordinatave O është ndërmjet drejtëzave atëherë $d = p_1 + p_2$, fig. 7.

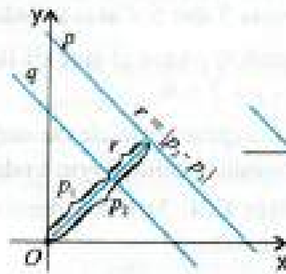


fig. 6

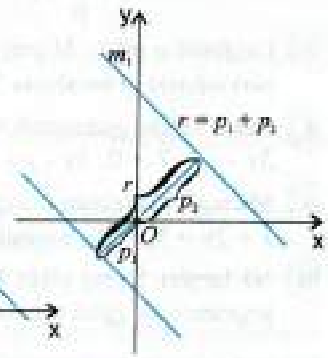


fig. 7

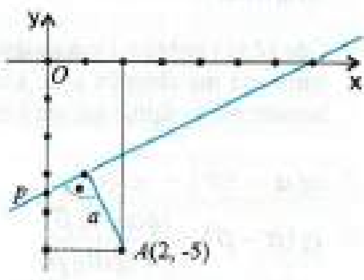
7 Pika $A(2, -5)$ është kulmi i katrorit, kurse një brinjë e tij gjendet në drejtëzën $p: x - 2y - 7 = 0$. Të njehsohet syprina e tij.

Vëre zgjidhjen:

Largësia prej pikës $A(2, -5)$ deri te drejtëza $p: x - 2y - 7 = 0$ është e barabartë me brinjën a të katrorit, d.m.th.

$$a = \left| \frac{1 \cdot 2 - 2(-5) - 7}{\sqrt{1 + 4}} \right| = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Syprina e katrorit është $S = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$.



figt. 8

8 Janë dhënë barazimet e dy brnjëve të një drejtkëndëshi $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ dhe një kulm i tij $A(-2, 1)$. Njehso syprinën e tij.

Detyra

1 Njehso largësinë d prej pikës së dhënë deri te drejtëza e dhënë, nëse:

a) $A(2, 7)$, $p: 12x + 5y - 7 = 0$; b) $A(-3, 2)$, $p: 4x - 7y + 26 = 0$.

(2) Provo drejtëzat $2x + \sqrt{5}y - 15 = 0$ dhe $\sqrt{11}x - 5y + 36 = 0$ a e takojnë një rreth të njëjtë qendra e të cilit është në fillimin e koordinatave. Sa është rrezja e atij rrethi?

(3) Njehso largësinë prej drejtëzës p: $a(x - a) + b(y - b) = 0$ deri te fillimi i koordinatave.

(4) Diagonalet e rombit me gjatësi 30 dhe 16 janë marrë për boshte koordinataive. Njehso largësinë ndërmjet brinjëve të rombit.

(5) Në boshtin e ordinatës cakto pikën që është një lloj e larguar prej fillimit të koordinatave dhe prej drejtëzës $3x - 4y + 12 = 0$.

(6) Në boshtin e abshisave cakto pikën që gjendet në largësi $d = a$ prej drejtëzës

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

(7) Largësitë e pikës M prej drejtëzave $5x - 12y - 13 = 0$ dhe $3x - 4y - 19 = 0$ janë përkatësisht të barabarta 3 dhe 5. Cakto koordinatat e pikës M.

(8) Cakto vendin gjeometrik të pikave që janë një lloj të larguara prej dy drejtëzave paralele $3x - y + 7 = 0$, $3x - y - 3 = 0$.

(9) Shkruaje barazimin e drejtëzës paralele me drejtëzën $x + 2y = 1$ dhe $x + 2y = 3$, e cila largësinë ndërmjet tyre e ndan në $1 : 3$.

(10) Në largësi 5 prej pikës $C(4, 3)$ tërhiq drejtëz e cila në boshtet koordinative prenë segmenta me gjatë të barabarta.

10 KËNDI NDËRMJET DY DREJTËZAVE

Kujtohu!

- Çdo kënd i jashtëm i trekëndëshit është i barabartë me shumën e dy këndeve të brendshme jo fqinjë me atë kënd.
- $tg(\alpha + 90^\circ) = -ctg\alpha$
- $tg(\alpha - \beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$
- Dy drejtëza që priten formojnë katër kënde.
- Si janë ato ndërmjet veti?

A 1 Cakto këndin ndërmjet drejtëzave:

$$y = \frac{3}{4}x + 1 \text{ dhe } y = 7x - 14$$

Vëre zgjidhjen:

- Drejtëzat do t'i paraqesim grafikisht në fig 1.

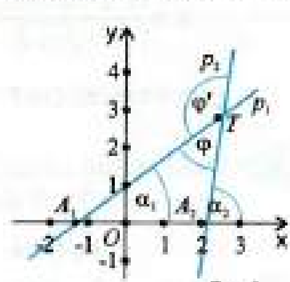


fig. 1

- Vëre, drejtëzat që formojnë kënd të ngushtë φ ose kënd të gjerë $\varphi' = 180^\circ - \varphi$.

Zakonisht prej këndeve ndërmjet dy drejtëzave e marrim më të voglin (të ngushtin).

Këndi α_2 është kënd i jashtëm i ΔA_1A_2T fig. 1 pra prej këtu vijon:

$$\varphi + \alpha_1 = \alpha_2, \text{ d.m.th. } \varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Duke i zbatuar teoremat adicionale $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1}$.

Prej barazimeve të drejtëzave kemi $tg\alpha_1 = \dfrac{3}{4}$; $tga_2 = 7$, pra

$$tg\varphi = \frac{7 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} \cdot 7} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{4}} = 1. \text{ Domethënë } \varphi = 45^\circ.$$

2 Cakto këndin ndërmjet drejtëzave $y = k_1x + b_1$ dhe $y = k_2x + b_2$.

Vëre zgjidhjen:

Nëse në barasinë $tg\varphi = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1}$ zëvëndësojmë $tg\alpha_1 = k_1$ dhe $tg\alpha_2 = k_2$, atëherë këndi ndërmjet dy drejtëzave është dhënë me formulën:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

ku k_1 është koeficienti i drejtimit të njërës drejtëz; k_2 është koeficienti i drejtëzës tjetër.

Duke e zbatuar këtë formulë caktohet ose $tg\varphi > 0$, ose $tg\varphi < 0$. Në rastin e parë është caktuar këndi i ngushtë, kurse në rastin e dytë këndi i gjerë ndërmjet drejtëzave të dhëna.

B Dy drejtëza janë paralele nëse dhe vetëm nëse kanë koeficiente të drejtimit të barabartë, fig. 2.

Vëre zgjidhjen:

Nëse drejtëzat p_1 dhe p_2 janë paralele, atëherë ato formojnë kënde të njëjtë me pjesën pozitive të boshtit të x - it, d.m.th. $\alpha_2 = \alpha_1$, pra edhe $tg\alpha_2 = tg\alpha_1$.
Prej $tg\alpha_2 = k_2$ dhe $tg\alpha_1 = k_1$, vijon:

$$k_2 = k_1$$

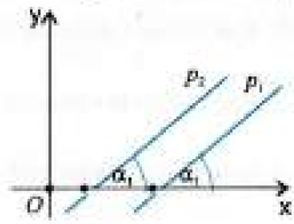


fig. 2

Anasjelltas, nëse $k_2 = k_1$ atëherë $tg\alpha_2 = tg\alpha_1$ d.m.th. $\alpha_2 = \alpha_1$, që do të thotë se drejtëzat p_1 dhe p_2 janë paralele.

3 Nëpër pikën $A(-3, 2)$ tërhiq drejtëz p_2 që është paralele me drejtëzën p_1: $2x - 3y + 4 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

Barazimin e drejtëzës p_1 e sjellim në formën eksplicite, d.m.th. $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$, vijon,

$k_1 = \frac{2}{3}$. Koeficienti i drejtimit të drejtëzës $Ax + By + C = 0$ mund të caktohet edhe me zbatimin e formulës $k = -\frac{A}{B}$.

- Prej kushteve për paralelizëm të drejtëzave p_1 dhe p_2 vijon $k_2 = k_1 = \frac{2}{3}$.
- Prej barazimit të drejtëzës nëpër një pikë kemi

$$y - y_1 = k(x - x_1) \text{ d.m.th. } y - 2 = \frac{2}{3}(x + 3) \text{ ose } 2x - 3y + 12 = 0.$$

4 Vërteto se drejtëzat janë reciprokisht normale, nëse dhe vetëm nëse koeficientët e drejtëzave janë reciproke me shenjë të kundërt.

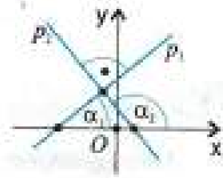


fig. 3

Vëre vërtetimin:

- Nëse drejtëzat p_1 dhe p_2 janë reciprokisht normale atëherë $\alpha_2 = \alpha_1 + 90°$, fig. 3.

$$tg\alpha_2 = tg\,(\alpha_1 + 90°) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1}, \text{ d.m.th. } k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ ose } k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Anasjelltas nëse $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, atëhetë $tg\alpha_2 = -\frac{1}{tg\alpha_1} = -ctg\alpha_1 = tg\,(\alpha_1 + 90°)$.

5 Nëpër pikën $A(-3, 2)$ tërhiq drejtëz p_2 që është normale në drejtëzën p_1: $2x - 3y + 4 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

- Koeficienti i drejtimit të drejtëzës së dhënë $k_1 = -\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$.
- Prej kushtit të normales kemi $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{2}$.
- Duke zëvendësuar në barazimin e drejtëzës nëpër një pikë $y - y_1 = k(x - x_1)$ kemi

$$p_2: y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 3) \text{ d.m.th. } 3x + 2y + 5 = 0.$$

6 Janë dhënë dy drejtëza p_1: $3x - 4y + 8 = 0$, p_2: $5y - 4mx - 7 = 0$. Cakto m ashtu që drejtëzat të jenë reciprokisht:

a) normale; b) paralele.

Vëre zgjidhjen:

- a) Barazimet e drejtëzave i sjellim në formën eksplicite:

$$p_1: y = \frac{3}{4}x + 2, \quad k_1 = \frac{3}{4}; \qquad p_2: y = \frac{4}{5}mx + \frac{7}{5}, \quad k_2 = \frac{4}{5}m.$$

Prej kushtit të normales $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ vijon $\frac{4}{5}m = -\frac{1}{\frac{3}{4}}$, d.m.th. $m = -\frac{5}{3}$.

7 Janë dhënë barazimet e drejtëzave p_1: $4x - 3y + 1 = 0$, p_2: $2x - my + 5 = 0$. Cakto m ashtu që drejtëzat të priten nën këndin prej 45°.

Vëre zgjidhjen:

Prej barazimeve të drejtëzave: p_1: $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$, $k_1 = \frac{4}{3}$, kurse prej p_2: $y = \frac{2}{m}x + \frac{5}{m}$, $k_2 = \frac{2}{m}$, pra prej $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = tg\varphi$ kemi:

$$\frac{\frac{2}{m} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{2}{m}\cdot\frac{4}{3}} = 1 \quad \text{ose} \quad \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{m}}{1 + \frac{2}{m}\cdot\frac{4}{3}} = -1;$$

$$6 - 4m = 3m + 8; \qquad 4m - 6 = 3m + 8;$$

$$m = -\frac{2}{7} \qquad \text{ose} \qquad m = 14.$$

Domethënë, për $m = -\frac{2}{7}$ ose $m = 14$ drejtëzat e dhëna formojnë kënd prej 45°.

8 Nëpër pikën $A(1,2)$ tërhiq drejtëz: a) paralele; b) normale; me drejtëzën

$$y = \frac{2}{3}x - 1.$$

Detyra

1. Shkruaje barazimin e simetrales të segmentit AB, $A(5, 7)$, $B(9, 5)$.
2. Është dhënë ΔABC, $A(3, 3)$, $B(11, 6)$, $C(7, 12)$. Cakto barazimin e lartësisë të tërhequr prej kulmit C.
3. Cakto këndin ndërmjet drejtëzave:

   a) $y = x$, $y = 3x + 5$; b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.
4. Cakto këndet e trekëndëshit ABC, $A(1, 3)$, $B(5, 1)$, $C(3, 7)$.
5. Nëpër pikën $M(3, 5)$ tërhiq drejtëz e cila me drejtëzën $3x - 2y + 7 = 0$ formon kënd prej 45°.
6. Për çfarë këndi duhet të rrotullohet drejtëza $3x + y - 6 = 0$ rreth pikëprerjes së saj me boshtin y që ta prenë drejtëzën $x - 3y - 6 = 0$ nën këndin prej 45°?

7. Për cilin kënd duhet të rrotullohet drejtëza $2x - 3y + 5 = 0$ rreth pikës së saj $M(2, 3)$ që në boshtin x të prenë segment me gjatësi 4?

8. Cakto vendin gjeometrik të pikave që janë një lloj të larguara prej krahëve të këndit që e formojnë drejtëzat $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y - 2 = 0$.

11 POZITA RECIPROKE E DY DREJTËZAVE

Kujtohu!

Sistemi i barazimeve $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ mund të:
a) ketë një zgjidhje të vetme;
b) nuk ka asnjë zgjidhje;
c) ka pafund shumë zgjidhje.

Çfarë pozite reciproke mund të kenë dy drejtëza në rrafsh?

Dy drejtëza janë paralele nëse koeficientët e tyre të drejtimit janë të barabartë.

1 Le të jenë dhënë drejtëzat p_1 dhe p_2: a) $3x + 2y - 8 = 0$ dhe $3x - 2y - 4 = 0$; b) $3x - 2y - 7 = 0$ dhe $6x - 4y - 10 = 0$; c) $2x - 5y - 1 = 0$ dhe $4x - 10y - 2 = 0$.

Cakto pozitën reciproke të drejtëzave.

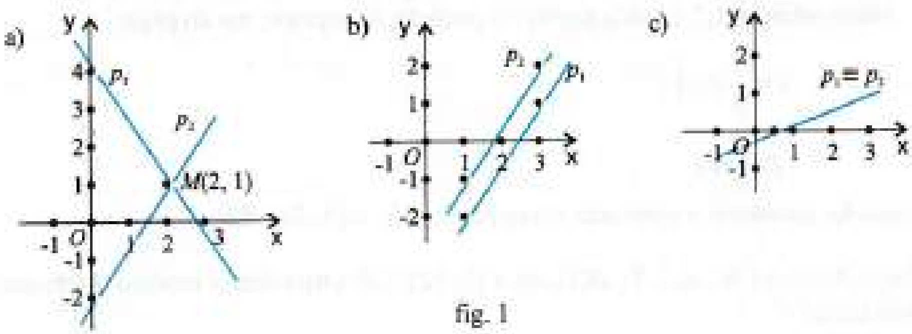


fig. 1

Vëre!

a) Drejtëzat priten në pikën $M(2, 1)$; b) drejtëzat janë paralele; c) drejtëzat puthiten, fig. 1.

2 Le të jenë dhënë drejtëzat p_1 dhe p_2, barazimet e të cilave janë: $p_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $p_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Caktoji kushtet kur drejtëzat:

a) priten; b) janë paralele; c) puthiten.

Vëre zgjidhjen:

a) Pikëprerja $M_0(x_0, y_0)$ shtrihet në të dy drejtëzat, prandaj koordinatat e saja do t'i kënaqin njëkohësisht barazimet e drejtëzave. Koordinatat e M_0 do t'i fitojmë si zgjidhje të sistemit të barazimeve

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}, \text{ d.m.th.}$$

$$x_0 = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

1. Sistemi ka zgjidhje të vetme, d.m.th. drejtëzat priten

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \text{ d.m.th. } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

2. Nëse $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ dhe të paktën njëra prej drejtëzave $C_1B_2 - C_2B_1$ ose $A_1C_2 - A_2C_1$ nuk është e barabartë me zero, atëherë sistemi nuk ka zgjidhje, d.m.th. drejtëzat janë paralele dhe të ndryshme.

Prej $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ vijon $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, prej $C_1B_2 - C_2B_1 \neq 0$ vijon $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Prej këtu vijon $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

3. Nëse $A_1B_1 - A_2B_2 = 0$, $C_1B_2 - C_2B_1 = 0$ dhe $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$, atëherë sistemi ka zgjidhje të pafundme, d.m.th. drejtëzat puthiten.

Prej këtu vijon $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Cakto raportin e koeficientëve të drejtëzave në detyrën 1.

3 Cakto koordinatat e pikës së rëndimit të trekëndëshit barazimet e të cilit janë:
a: $7x + y + 20 = 0$, b: $x - 2y - 10 = 0$, c: $x + y - 4 = 0$.

4 Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër prerjen e drejtëzave p: $x - y + 4 = 0$ dhe q: $4x - 2y - 20 = 0$, kurse është: a) paralele; b) normale me drejtëzën r: $2x - 3y - 1 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

a) E caktojmë prerjen e drejtëzave $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 14 \\ y = 18 \end{cases}$, $M(14, 18)$.

Pasi drjtëza duhet të jetë paralele me drejtëzën r, $k = k_r = \frac{2}{3}$.

Drejtëza e kërkuar kalon nëpër pikën $M(14, 18)$ dhe e ka koeficientin e drejtimit $k = \frac{2}{3}$, d.m.th. $y - y_1 = k(x - x_1)$; $y - 18 = \frac{2}{3}(x - 4)$; $2x - 3y + 26 = 0$.

5 Cakto për cilën vlerë të koeficientit k, drejtëza $y = kx + 3$ kalon nëpër prerjen e drejtëzave $y = 2x + 1$ dhe $x - y + 5 = 0$.

Mbaj mend!

Drejtëzat $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dhe $A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

1. priten, nëse $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$;

2. janë paralele dhe të ndryshme nëse $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

3. puthiten nëse $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Detyra

1. Janë dhënë dy pika: $A(-4, 2)$ dhe $B(3, 1)$.
Cakto barazimin e drejtëzës e cila është paralele me AB, kurse boshtin y e prenë në pikën $C(0, -2)$.

2. Për cilën vlerë të parametrit m drejtëzat $(m - 2)x + my - 2 = 0$ dhe $6x + (m + 8)y - m - 2 = 0$ puthiten?

3. Cakto m ashtu që drejtëzat $mx - 3y - 2 = 0$ dhe $3x - my - m + 1 = 0$:

a) të jenë paralele; b) të puthiten.

4. Shkruaje barazimin e drejtëzës e cila kalon nëpër pikën $A(1, 2)$, ashtu që pikat $B(3, 3)$ dhe $C(5, 2)$ të jenë në largësi të njëjtë prej drejtëzës.

5. Barazimet e brinjëve të një trekëndëshi janë: $y - x + 3 = 0$, $7y - 2x + 6 = 0$, $3y + 2x + 14 = 0$. Cakto:
a) perimetrin b) syprinën; c) gjatësinë e lartësive;
ç) gjatësinë e vijës së rëndimit të trekëndëshit.

6. Formo barazim të drejtëzës që kalon nëpër pikëprerjen e drejtëzave $2x + y - 2 = 0$; $x - 5y - 23 = 0$ dhe nëpër mesin e segmentit MN, $M(5, -6)$; $N(-1, -4)$.

7. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikëprerjen e drejtëzave $2x + 7y - 8 = 0$ dhe $3x + 2y + 5 = 0$, kurse me drejtëzën $2x + 3y - 7 = 0$ formon kënd prej $45°$.

8. Cakto projeksionin ortogonal të pikës $A\left(1\frac{1}{6}, 2\frac{1}{4}\right)$ mbi drejtëzën $6x - 4y - 15 = 0$.

9. Cakto pikën A që është simetrike me pikën $B(-3, -4)$ në lidhje me drejtëzën $2x + 3y + 5 = 0$.

12 VIJA RRETHORE

Kujtohu!

- Çka është vijë rrethore?
- Me formulën

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ caktohet largësia ndërmjet pikave $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$.

- Cakto largësinë ndërmjet pikave A(3, -1), B(-1, -4).

A Në pjesën paraprake nga gjeometria analitike e mësuam drejtëzën si njërën nga vijat më të thjeshta. Në këtë pjesë, metodën e koordinatave do ta zgjerojmë edhe me lakore: vija rrehore, elipsa, hiperbolla dhe parabolla. Për këto kanë ditur edhe grekët e vjetër. Pasi metodën e koordinatave nuk e kanë pasur të njohur, ato lakoret i kanë shqyrtuar si prerje konike. Ne do t'i shqyrtojmë si *vend gjeometrik të pikave* në rrafsh.

Mbaj mend!

Vendi gjeometrik i pikave në rrafsh është ndonjë bashkësi e pikave të cilat posedojnë ndonjë veti karakteristike vetëm për ato, veti e cila i veçon prej të gjitha pikave tjera të rrafshit.

B Vija rrethore është vend gjeometrik i pikave në rrafsh të cilat janë një lloj të larguara prej një pike të dhënë nga rrafshi i njëjtë. Pika e dhënë (fikse) quhet qendra e vijës rrethore, e shënojmë me $C(p,q)$, kurse largësinë r, rrezja e vijës rrethore.

1 Cakto barazimin e vendit gjeometrik të pikave në rrafsh që janë prej pikës $C(p, q)$ të larguara për r.

Vëre zgjidhjen:

- Vendi gjeometrik i pikave të kërkuara $M(x, y)$ prej rrafshit shtrihet vija rrethore me qendrën e cila është në pikën C, kurse rrezja r, fig.1.

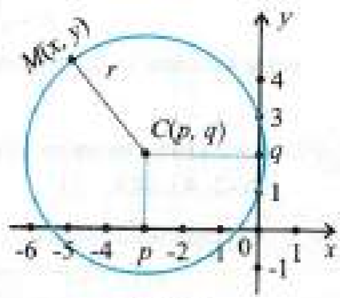


fig. 1

- Kushti i nevojshëm dhe i mjaftueshëm pika $M(x, y)$ të shtrihet në vijën rrethore të dhënë është $\overline{CM}=r$, $(r>0)$.
- Sipas formulës për largësinë ndërmjet dy pikave kemi:

$$\overline{CM}=\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2},\quad \text{d.m.th.}\quad \sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=r.$$

Pasi $r>0$ vijon

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Ky barazim quhet barazimi i vijës rrethore (forma normale e vijës rrethore), me qendër në pikën $C(p, q)$ dhe rreze r.

2 Shkruaje barazimin e vijës rrethore me qendër në pikën C dhe rreze r:

a) $C(-4, 2)$, $r = 1$; c) $C(-1, 0)$, $r = \sqrt{5}$;
b) $C(0, 3)$, $r = 2$; ç) $C(0, 0)$, $r = 2{,}5$.

Vëre zgjidhjen:

a) Me zëvëndësimin $p = -4$, $q = 2$ dhe $r = 1$ në barazimin e vijës rrethore kemi:

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

ç) Pasi $C(0, 0)$, domethënë $p = q = 0$, pra barazimi i vijës rrethore është

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ ose } x^2 + y^2 = 6{,}25.$$

Mbaj mend!

Nëse pika $C(p, q)$ është qendra e vijës rrethore, kurse r rrezja, atëherë barazimi

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

është barazimi i vijës rrethore *në formën normale*.
Nëse $p = q = 0$, atëherë barazimi quhet *barazimi qëndror i vijës rrethore*.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

3 Të shkruhet barazimi i vijës rrethore që kalon nëpër pikën $M(7, -3)$, kurse qendra është në vijën rrethore $C(3, 0)$.

Vëre zgjidhjen:

Rrezja e vijës rrethore është $r = \overline{CM}$

$$r = \sqrt{(7-3)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5,$$

kurse barazimi i vijës rrethore është

$$(x - 3)^2 + y^2 = 25.$$

4 Të shkruhet barazimi i vijës rrethore diametri i së cilës është segmenti AB, $A(-2, 4)$; $B(4, -5)$.

5 Caktoji koordinatat e qendrës dhe rrezen e vijës rrethore barazimi i të cilit është:

a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$; c) $(x + 3)^2 + y^2 = 1$;
b) $x^2 + (y + 4)^2 = 7$; ç) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

Vëre zgjidhjen:

b) $C(0, -4)$, $r = \sqrt{7}$. Qendra shtrihet në boshtin y.

ç) $C(2, 2)$, $r = 2\sqrt{2}$. Pasi $p = q$, qendra shtrihet në simetralen e kuadrantit të parë dhe të tretë, d.m.th. në drejtëzën $y = x$.

6 Cila prej pikave $A(3, 1)$; $B(-2, 0)$, $C(-1, \sqrt{3})$, $D(0, 0)$ shtrihet në vijën rrethore $x^2 + y^2 = 4$.

Vëre zgjidhjen

Pika shtrihet në vijën rrethore nëse me zëvendësimin e koordinatave të pikës në barazimin e vijës rrethore, ajo bëhet barasi e saktë numerike.

a) $3^2 + 1^2 = 4$, barasia nuk është e saktë, domethënë pika A nuk shtrihet në vijën rrethore.

7 Shkruaje barazimin e vijës rrethore që e takon boshtin y në pikën $M(0, -3)$ me rreze $r = 2$.

Vëre zgjidhjen

Qendra $C(p, q)$ e vijës rrethore që e takon boshtin y shtrihet në drejtëzën $y = q$, kurse $p = 2$ ose $p = -2$, fig.2.

Ekzistojnë dy vija rrethore që e kënaqin kërkesën. Qendra e vijës rrethore të dhënë është $C(2, -3)$, kurse e tjetrës $C_1(-2, -3)$.

Barazimet e kërkuara janë:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4 \text{ ose}$$
$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4.$$

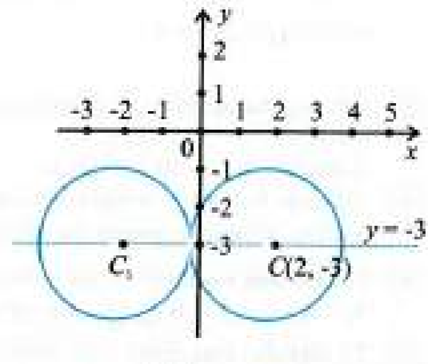


fig. 2

8 Shkruaje barazimin e vijës rrethore që e takon boshtin x në pikën $M(-3, 0)$ dhe rreze $r = 3$.

9 Shkruaje barazimin e vijës rrethore që i takon të dy boshtet koordinative, kurse rrezja $r = 3$.

Vëre zgjidhjen

Sipas zgjidhjes së detyrës 5.ç).
Qendra e vijës rrethore shtrihet në drejtëzën $y = x$ ose $y = -x$, d.m.th. $|p| = |q| = r$. Detyra ka katër zgjidhje, fig. 3.
Koordinatat e qendrës janë $C(\pm 3, \pm 3)$, kurse barazimet e vijave rrethore janë

$$(x \pm 3)^2 + (y \pm 3)^2 = 9.$$

Vëre nëse vija rrethore e takon njërin ose të dy boshtet duhet të kemi kujdes. Që të mund të ketë një ose dy ose katër zgjidhje.

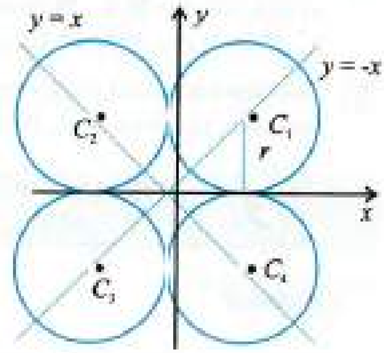


fig. 3

Detyra

1 Të shkruhet barazimi i vijës rrethore nëse:

a) qendra është $C(0, 0)$, $r = 7$;

b) qendra është $C(-2, 4)$, $r = \dfrac{5}{2}$;

c) qendra është $C(-3, 4)$, kurse kalon nëpër fillimin e koordinatave;

ç) qendra është $C(2, 8)$, kurse kalon nëpër pikën $A(-2, 5)$.

2. Cakto pozitën e pikave $A(-1, -4)$; $B(2, -4)$; $C(-5, 3)$, $D(-3, -2)$ në lidhje me vijën rrethore $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 9$.

3. Cakto koordinatat dhe rrezen e vijës rrethore nëse barazimi i saj është:

a) $(x-2)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 2$; c) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 9$;

b) $x^2 + (y-3)^2 = 4$; ç) $x^2 + y^2 = 36$.

4. Shkruaje barazimin e vijës rrethore qendra e së cilës është në pikën $C(-2, 4)$, kurse e takon:
a) boshtin x; b) boshtin y.

5. Shkruaje barazimin e vijës rrethore që e takon boshtin x në pikën $A(5, 0)$, kurse në boshtin y prenë segment me gjatësi 10.

6. Të shkruhet barazimi i vijës rrethore diametri i së cilës është segmenti nga drejtëza $3x - 4y + 12 = 0$ që gjendet ndërmjet boshteve koordinative.

7. Të shkruhet barazimi i vijës rrethore nëse dy diametra të saj shtrihen në drejtëzat $x + y - 14 = 0$ dhe $2x - 3y + 12 = 0$, kurse kalon nëpër fillimin e koordinatave.

8. Shkruaje barazimin e vijës rrethore e cila kalon nëpër pikat $A(0, -2)$ dhe $B(4, 6)$, kurse qendra shtrihet në: a) boshtin x; b) boshtin y.

9. Shkruaje barazimin e vijës rrethore që kalon nëpër pikat:
a) $A(5, -3)$ dhe $B(4, -2)$, kurse rrezja $r = 5$;
b) $A(-1, 3)$ dhe $B(3, 1)$, kurse qendra shtrihet në drejtëzën $3x - y - 2 = 0$.

10. Shkruaje barazimin e vijës rrethore e cila kalon nëpër pikën $A(-5, 7)$, kurse e takon boshtin x në pikën $B(-4, 0)$.

13 FORMA E PËRGJITHSHME E BARAZIMIT TË VIJËS RRETHORE

Kujtohu!

- Fuqizoji binomët: $(2x-3)^2$; $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.
- Barazimi $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ quhet barazim katror me një të panjohur.
- Cili prej çifteve të radhitur $(x, y) \in \{(1, 2); (1, -2); (3, -2); (3, 3)\}$ është zgjidhje e sistemit të barazimeve $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$?
- Barazimi $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, nëse të paktën njëri prej koeficientëve A, B ose C është i ndryshueshëm prej zeros është forma e përgjithshme e barazimit katror me dy të panjohura.

1 Shkruaje barazimin e vijës rrethore, nëse $r = 1$ me qendër në pikën $C\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

Vëre zgjidhjen

Vija rrethore e kërkuar është:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=1^2.$$

Pas fuqizimit të kryer dhe reduktimit, fitohet barazimi

$$4x^2 + 4y^2 + 12x - 16y + 21 = 0$$

Vëre, çdo barazim të vijës rrethore

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

mund të sillet në këtë formë të përgjithshme

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0$$

Barazimi i fituar është barazim katror me dy të panjohura.

Cilat kushte duhet t'i kënaqin koefcientët e barazimit $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ që ai të jetë barazimi i vijës rrethore?

Duke e krahasuar këtë barazim me barazimin paraprak duhet:

1. koeficientët para x^2 dhe y^2 të jenë të barabartë, d.m.th. $A = C \neq 0$;
2. Të mos ekziston anëtari $x \cdot y$, d.m.th. $B = 0$.

Me këto kushte barazimi është i formës

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ d.m.th. } x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0.$$

Duke i krahasuar barazimet

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0 \quad \text{dhe} \quad x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0, \text{ pra}$$

1. $-2p=\frac{D}{A}$, kurse $p=-\frac{D}{2A}$; 2. $-2q=\frac{E}{A}$, kurse $q=-\frac{E}{2A}$.

3. $p^2 + q^2 - r^2 = \frac{F}{A}$, ose pas zëvendësimit p dhe q, fitojmë $r^2=\frac{1}{4A^2}\left(D^2+E^2-4AF\right)$,

d.m.th. $r=\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF}$, $A > 0$. Pasi $r \in \mathbf{R}^+$, vijon $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

Mbaj mend!

Barazimi katror me dy të panjohura i formës $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ paraqet **formën e përgjithshme të barazimit të vijës rrethore** nëse koeficientët e kënaqin kushtin $A \neq 0$ dhe $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

Koordinatat e qendrës $C(p, q)$ janë

$$p=-\frac{D}{2A}, q=-\frac{E}{2A} \text{ dhe } r^2=p^2+q^2-\frac{F}{A}.$$

2 Cili prej këtyre barazimeve paraqet barazimin e vijës rrethore:
a) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 16y - 11 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 18 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$?

Vëre zgjidhjen

a) $A = 4$; $D = -12$, $E = 16$ dhe $F = -11$, kurse $D^2 + E^2 - 4FA = 144 + 256 - 4 \cdot 4(-11) = 576 > 0$.

Domethënë, barazimi i dhënë është barazim i vijës rrethore: $p = -\dfrac{D}{2A} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$,

$q = -\dfrac{E}{2A} = -\dfrac{16}{8} = -2$, pra qendra e saj është në pikën $C\left(\dfrac{3}{2}, -2\right)$, kurse

$r^2 = p^2 + q^2 - \dfrac{F}{A} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2 + \dfrac{11}{4} = 9$, d.m.th. $r = 3$.

b) $A = 1$, $D = 6$, $E = -4$, $F = 18$, kurse $D^2 + E^2 - 4AF = 36 + 16 - 72 = -20 < 0$.

Domethënë, barazimi i dhënë nuk është barazim i vijës rrethore.

c) $A = 1$, $D = -4$, $E = 2$ dhe $F = 5$, kurse $D^2 + E^2 - 4AF = 16 + 4 - 20 = 0$.

Domethënë, barazimi i dhënë nuk është barazim i vijës rrethore.

Barazimi i dhënë mund të shkruhet edhe në këtë formë $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$.
Shuma e katrorëve është zero nëse dhe vetëm nëse $x - 2 = 0$ dhe $y + 1 = 0$, d.m.th. $x = 2$ dhe $y = -1$.

Gjeometrikisht kjo do të thotë se koordinatat e pikës $(2,-1)$ edhe vetëm ato e kënaqin barazimin, d.m.th. me barazimin e dhënë është përcaktuar pika $(2,-1)$.

3 Është dhënë barazimi $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$.
Nëse barazimi paraqet vijë rrethore, shkruaje në formën normale.

Vëre zgjidhjen

- $D^2 + E^2 - 4AF = 4 + 16 + 124 = 144 > 0$. Domethënë barazimi i dhënë është barazim i vijës rrethore.
- **Mënyra e parë:**

Sipas formulave: $p = -\dfrac{D}{2A} = 1$; $q = -\dfrac{E}{2A} = 2$ dhe $r^2 = p^2 + q^2 - \dfrac{F}{A}$.

$r^2 = 1^2 + 2^2 + 31 = 36$, pra barazimi në formën normale është $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$.

- **Mënyra e dytë:**

Me plotësim të binomit në katror:

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 2^2) - 2^2 - 31 = 0$$
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36.$$

4 Cakto koordinatat e qendrës dhe rrezes së vijës rrethore të dhënë me barazimin:
a) $4x^2 + 4y^2 = 49$; b) $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$; c) $x^2 + y^2 + 4y - 16 = 0$;
ç) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$; d) $x^2 + y^2 + 7x - 4y + 19 = 0$.

5 Për cilën vlerë të parametrit λ, vija rrethore:

a) $x^2 + y^2 + \lambda x - (2\lambda - 7)y + \lambda + 3 = 0$, e takon boshtin x?

b) $x^2 + y^2 + (\lambda + 4)x + (3\lambda + 1)y + 4\lambda = 0$, e takon boshtin y?

Vëre zgjidhjen

a) Prej barazimit $p = -\dfrac{\lambda}{2}$; $q = -\dfrac{2\lambda - 7}{2}$ dhe $r^2 = p^2 + q^2 - \dfrac{F}{A}$. prej kushtit $|q| = r$, vijon $q^2 = r^2$, pra prej $r^2 = p^2 + q^2 - \dfrac{F}{A}$, vijon $p^2 - \dfrac{F}{A} = 0$, d.m.th. $\left(-\dfrac{\lambda}{2}\right)^2 - (\lambda + 3) = 0$.

Zgjidhja e barazimit është $\lambda = 6$ ose $\lambda = -2$. Për $\lambda = 6$, barazimi i dhënë e merr këtë formë $x^2 + y^2 + 6x - 5y + 9 = 0$, i cili është barazimi i vijës rrethore me $C\left(-3, \dfrac{5}{2}\right)$ dhe $r^2 = 9 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 9$, d.m.th. $r = \dfrac{5}{2}$, kurse për $\lambda = -2$, barazimi i dhënë kalon në barazim të vijës rrethore $x^2 + y^2 - 2x + 11y + 1 = 0$.

6 Të shkruhet barazimi i vijës rrethore e cila kalon nëpër pikat $A(-2, 4)$, $B(5, -3)$, $C(7, 1)$.

Vëre zgjidhjen

Të shkruhet barazimi i vijës rrethore, duhet të caktohen koordinatat e qendrës dhe rrezja e vijës rrethore.
Detyra mund të zgjidhet në dy mënyra.

Mënyra I:

- Pikat A, B dhe C janë kulmet e trekëndëshit, fig.1.
- Qendra e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit gjendet në prerjen e simetraleve të brinjëve të trekëndëshit. Le të jetë M mesi i brinjës AB;

$M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$, d.m.th. $M\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$,

kurse N mesi i AC, $N\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

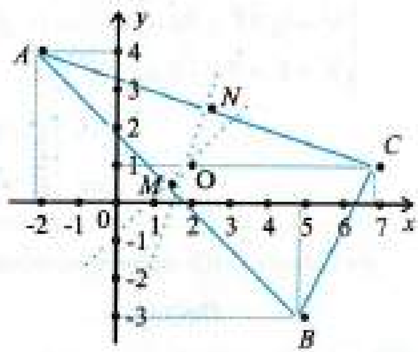


fig. 1

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1; \ k_{AC} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}.$$

Barazimet e simetraleve janë:

$$s_{AB}: y-\frac{1}{2}=\left(x-\frac{3}{2}\right); \qquad s_{AC}: y-\frac{5}{2}=3\left(x-\frac{5}{2}\right);$$

$$y = x - 1; \qquad y = 3x - 5;$$

$s_{AB} \cap s_{AX} = \{O\}$; $O(2, 1)$,

kurse rrezja $r = \overline{AO} = \sqrt{(2+2)^2+(1-4)^2} = 5$. Barazimi i vijës rrethore në formën normale është $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Mënyra II:

Me zëvëndësimin e koordinatave të pikës në barazimin $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ kemi:

$$\begin{cases}(-2-p)^2+(4-q)^2=r^2\\(5-p)^2+(-3-q)^2=r^2\\(7-p)^2+(1-q)^2=r^2.\end{cases}$$

Zgjidhja e sistemit i jep vlerat e të panjohurave p, q dhe r.

Mënyra III:

Nëse në barazimin $x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0$ zëvëndësojmë $a = -2p$, $b = -2q$ dhe $c = p^2 + q^2 - r^2 = 0$ do të fitojmë $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ i cili paraqet formën e përgjithshme të barazimit të vijës rrethore.

Me zëvëndësimin e koordinatave të pikave A, B dhe C në barazimin e fundit kemi:

$$\begin{cases}(-2)^2+4^2-2a+4b+c=0\\5^2+(-3)^2+5a-3b+c=0\\7^2+1^2+7a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=2a-4b-20\\5a-3b+c=-34\\7a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=2a-4b-20\\7a-7b=-14\\7a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c=2a-4b-20\\a-b=-2\\3a-b=-10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-4\\b=-2\\c=-2,\end{cases}$$

pra barzimi i vijës rrethore në formën e përgjithshme është: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

Detyra

1. Për cilën vlerë të parametrit $\lambda \in \{0, 1, 5\}$ barazimi:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4 + \lambda(x^2 + y^2 + 9) = 10$$

paraqet barazimin e vijës rrethore?

2. Në barazimin $x^2 + y^2 + \lambda x + 3\lambda y - 7 = 0$, cakto parametrin λ ashtu që barazimi të paraqet vijën rrethore e cila kalon nëpër pikën $(1, 0)$.

3. Për cilën vlerë të parametrit λ, vija rrethore
$$x^2 + y^2 + (\lambda - 6)x - (\lambda + 2)y + 3\lambda - 2 = 0$$
i prek të dy boshtet koordinative

4. Cakto qendrën dhe rrezen e vijës rrethore të dhënë me barazimin:
a) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$; b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 3x = 0$; ç) $2x^2 + 2y^2 - 5y = 0$.

5. Shkruaj barazimin e vijës rrethore qendra e së cilës puthitet me qednrën e vijës rrethore $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$, kurse rrezja është për 2 më e madhe se rrezja e vijës rrethore të dhënë.

6. Shkruaj barazimin e vijës rrethore e cila kalon nëpër pikën $A(3, -5)$ dhe e pren boshtin y në pikat $M(0, 4)$ dhe $N(0, -2)$.

7. Shkruaj barazimin e vijës rrethore e cila kalon nëpër pikat:
a) $A(2, -2)$; $B(7, 3)$, $C(6, 0)$; b) $A(1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(9, 6)$.

8. Cakto syprinën dhe vëllimin e topit rrethi më i madh i të cilit kalon nëpër pikat $M_1(1, 2)$, $M_2(3, 4)$, $M_3(6, 4)$.

9. Është dhënë ΔABC, $A(7, 1)$, $B(5, 5)$, $C(-2, 4)$. Shkruaje barazimin e vijës rrethore e cila kalon nëpër meset e brinjëve të rekëndëshit.

10. Shkruaje barazimin e vijës rrethore të jashtashkruar rreth trekëndëshit, barazimet e brinjëve të të cilit janë AB: $3y + x - 7 = 0$; BC: $y - x + 3 = 0$ dhe AC: $2y - x - 3 = 0$.

14 POZITA RECIPROKE E DREJTËZËS DHE VIJËS RRETHORE

Kujtohu!

- Kur një barazim katror ka: rrënjë reale dhe të barabarta ose komplekse të konjuguara?
- Cakto pikëprerjen e drejtëzave $2x - y = 1$ dhe $x + y = 5$.
- Dy drejtëza janë paralele nëse i kanë koeficientët e drejtimit të barabartë.
- Në çfarë raporti janë koeficientët e drejtimeve të drejtëzave reciprokisht normale?

A Largësia d prej qendrës së vijës rrethore deri te drejtëza quhet largësia qëndrore, fig. 1.

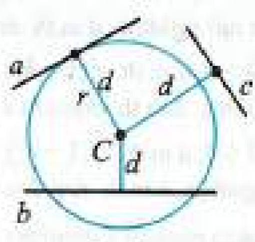


fig. 1

Prej më herët e ke të njohur:

1. Nëse $d = r$, atëherë, drejtëza e prek vijën rrethore, d.m.th. kanë një pikë të përbashkët.

2. Nëse $d < r$, atëherë, drejtëza e prenë vijën rrethore, d.m.th. ato kanë dy pika të përbashkëta.

3. Nëse $d > r$, atëherë, drejtëza dhe vija rretore nuk kanë pika të përbashkëta.

Duke e ditur shënimin analitik të dy vijave, d.m.th. barazimet e tyre, pikëprerjet e vijave, nëse ka, do t'i caktojmë duke zgjidhur sistemin prej barazimeve të tyre.

1 Cakto koordinatat e pikëprerjeve të drejtëzës $3x + y - 6 = 0$ dhe vijës rrethore $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Vëre zgjidhjen:

$$\begin{cases} y = 6 - 3x \\ (x-3)^2 + (4-3x)^2 = 25 \end{cases}; \begin{cases} y = 6 - 3x \\ x^2 - 6x + 9 + 16 - 24x + 9x^2 - 25 = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = 6 - 3x \\ 10x^2 - 30x = 0 \end{cases}.$$

Zgjidhja e sistemit $x_1 = 0, y_1 = 6$ ose $x_2 = 3, y_2 = -3$, d.m.th. pikëprerjet e drejtëzës dhe vijës rrethore janë: $A(0, 6)$ dhe $B(3, -3)$.

2 Shqyrto pozitën e drejtëzës $y = kx + n$ dhe vijës rrethore $x^2 + y^2 = r^2$.

Vëre zgjidhjen e sistemit:

$$\begin{cases} y = kx + n \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Duke zëvëndësuar y në barazimin e dytë kemi:

$$x^2 + (kx + n)^2 = r^2;$$
$$x^2 + k^2x^2 + 2kxn + n^2 - r^2 = 0;$$
$$(1 + k)^2 + 2kxn + n^2 - r^2 = 0.$$

Zgjidhja e barazimit katror varet prej diskriminantës së tij.

$$D = (2kn)^2 - 4(1 + k^2)(n^2 - r^2);$$
$$D = 4((1+k^2)r^2 - n^2).$$

1. Nëse $D = 0$, d.m.th. $r^2(1 + k^2) = n^2$, barazimi katror ka zgjidhje të vetme, pra sistemi ka saktësisht një zgjidhje, d.m.th. drejtëza e prek vijën rrethore.

2. Nëse $D > 0$, d.m.th. $r^2(1 + k^2) > n^2$, barazimi katror ka dy zgjidhje reale, pra edhe sistemi ka dy zgjidhje, d.m.th. drejtëza e prenë vijën rrethore.

3. Nëse $D < 0$, d.m.th. $r^2(1 + k^2) < n^2$ barazimi katror nuk ka zgjidhje reale, pra edhe sistemi nuk ka zgjidhje, d.m.th. drejtëza nuk ka pika të përbashkëta me vijën rrethore.

3 Cakto pozitën e drejtëzës në lidhje me vijën rrethore:
a) $2x - y + 5 = 0$ dhe $x^2 + y^2 = 50$; b) $x - 2y + 5 = 0$ dhe $x^2 + y^2 = 5$.

Mënyra e parë:
Vëre zgjidhjen e sistemit:

b) $$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = 2y - 5 \\ (2y-5)^2 + y^2 = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = 2y - 5 \\ y^2 - 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

$x = -1$ dhe $y = 2$, d.m.th. drejtëza e prek vijën rrethore në pikën $A(-1, 2)$.

Mënyra e dytë:

Prej drejtëzës $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, vijon $k=\frac{1}{2}$, $n=\frac{5}{2}$, kurse rrezja e vijës rrethore $r^2=5$. Këto vlera e kënaqin kushtin $(1+k^2)r^2=n^2$, $\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot 5=\left(\frac{5}{2}\right)^2$,

d.m.th. drejtëza e prek vijën rrethore

Mbaj mend

Drejtëza $y=kx+n$ e prek vijën rrethore $x^2+y^2=r^2$ (barazimi qëndror i vijës rrethore) nëse kënaq kushtin

$$(1+k^2)r^2=n^2$$

i cili quhet kushti për prekje.

4 Në barazimin e dhënë $\lambda x-y+5=0$, cakto parametrin λ, ashtu që drejtëza e prek vijën rrethore $x^2+y^2=5$.

Vëre zgjidhjen:

- Prej drejtëzës $y=\lambda x+5$ vijon $k=\lambda$, $n=5$, kurse rrezja e vijës rrethore është $r^2=5$.
- Me zëvendësimin në kushtin për prekje

$$(1+k^2)r^2=n^2;\quad (1+\lambda^2)5=25;\quad \lambda=\pm 2.$$

B **5** Cakto kushtin që drejtëza $Ax+By+C=0$ ta prek vijën rrethore $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$.

Vëre zgjidhjen:

- Drejtëza është tangjentë (e prek) vijën rrethore nëse $d=r$, fig. 2.
- Largësia prej pikës $A(x_1, y_1)$ deri te drejtëza $Ax+By+C=0$ njehsohet sipas formulës

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

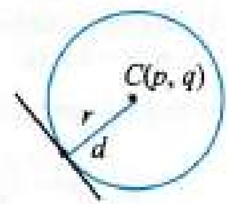


fig. 2

Nëse pika $C(p, q)$ është qendra e vijës rrethore dhe $d=r$, atëherë kemi

$$r=\frac{|Ap+Bq+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \text{d.m.th.}\ (A^2+B^2)\cdot r^2=(Ap+Bq+C)^2$$

është kushti i kërkuar për prekje.

Nëse drejtëza është shkruar në formën eksplicite, d.m.th. $y=kx+n$, atëherë kushti është

$$(1+k^2)\,r^2=(kp-q+n)^2.$$

6 Cakto pozitën e drejtëzës dhe vijës rrethore:

a) $x+y-9=0$ dhe $(x-2)^2+(y-1)^2=25$; b) $x+y+4=0$ dhe $x^2+y^2+2y-3=0$.

Vëre zgjidhjen

a) Qendra e vijës rrethore është $C(2, 1)$, kurse $r = 5$.

$d = \dfrac{|1\cdot 2+1\cdot 1-9|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} < r$, domethënë drejtëza e prenë vijën rrethore.

7 Cakto parametrin λ ashtu që drejtëza ta prek vijën rrethore:

a) $x + \lambda y + 1 = 0$; $x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$; b) $y = -\lambda x + 8$; $(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 20$.

Vëre zgjidhjen:

a) Prej barazimit të vijës rrethore kemi: $p = -\dfrac{D}{2A} = \dfrac{10}{2} = 5$; $q = 0$;

$r^2 = p^2 + q^2 - \dfrac{F}{A} = 25 - 7 = 18$, pra me zëvëndësimin te kushti për prekje kemi:

$$(A^2 + B^2)r^2 = (Ap + Bq + C)^2;$$
$$(1 + \lambda^2)\cdot 18 = (1\cdot 5 + \lambda\cdot 0 + 1)^2;$$
$$(1 + \lambda^2)\cdot 18 = 36;$$
$$\lambda^2 = 1, \text{ d.m.th. } \lambda = \pm 1.$$

8 Shkruaji barzimet e tangjentave të vijës rrethore që kalojnë nëpër pikën:

a) $M(3, 2)$; $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$; b) $N(2, 1)$; $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 18$.

Vëre zgjidhjen:

b) Tangjenta e kërkuar t: $y = kx + n$ kalon nëpër pikën $M(3, 2)$ domethënë $2 = 3k + n$, d.m.th. $n = 2 - 3k$.

Prej barazimit të vijës rrethore $p = -\dfrac{D}{2A} = 2$; $q = -\dfrac{E}{2A} = -1$, kurse

$r^2 = p^2 + q^2 - \dfrac{F}{A} = 5$ dhe kushtit për prekje kemi:

$(1 + k^2)r^2 = (kp - q + n)^2$, pra me zëvëndësim kemi $n = 2 - 3k$;

kemi
$$(1 + k^2)\cdot 5 = (3 - k)^2;$$
$$5 + 5k^2 = 9 - 6k + k^2;$$
$$2k^2 + 3k - 2 = 0;$$
$$k_1 = \frac{1}{2};\ k_2 = -2, \text{ kurse } n_1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, n_2 = 8.$$

Tangjentat e kërkuara janë: t_1: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; t_2: $y = -2x + 8$.

9 Të shkruhet barazimi i tangjentës së vijës rrethore $x^2 + y^2 = 5$ paralele me drejtëzën p: $2x - y + 1 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

- Prej kushtit për paralelizëm të dy drejtëzave vijon: $k_t = k_p = 2$, pra t: $y = kx + n$, d.m.th. $y = 2x + n$.
- Prej barazimit të vijës rrethore kemi: $p = q = 0$, $r^2 = 5$, pra prej $(1 + k^2)r^2 = n^2$ vijon

$$(1 + 2^2) \cdot 5 = n^2;\ \ n = \pm 5.$$

Tangjentat e kërkuara janë:

t_1: $y = 2x + 5$ dhe t_2: $y = 2x - 5$, fig.3.

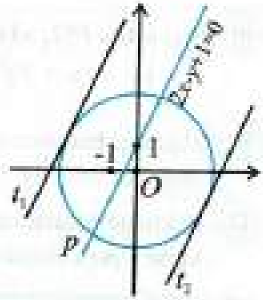


fig. 3

10 Shkruaj barazimin e tangjentës të vijës rrethore $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 5$ që është normale në drejtëzën p: $2x - y + 7 = 0$.

Detyra

1. Cakto pikëprerjet e drejtëzës dhe vijës rrethore:
   a) $2x - y + 5 = 0$, $x^2 + y^2 = 50$; b) $x - 3y - 5 = 0$, $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$.

2. Cakto pozitën e drejtëzës në lidhje me vijën rrethore duke mos e zgjidhur sistemin:
   a) $x + 3y - 15 = 0$, $x^2 + y^2 = 25$;
   b) $x - 2y = 10$, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$;
   c) $7x + y = 25$, $x^2 + y^2 - 14x - 2y + 25 = 0$;

3. Cakto koeficientin e panjohur ashtu që drejtëza ta prek vijën rrethore:
   a) $x + By + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$;
   b) $Ax + 4y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$.

4. Cakto p dhe q ashtu që drejtëza e prek vijën rrethore:
   a) $x + y - 3 = 0$, $(x - p)^2 + (y - 3)^2 = 18$;
   b) $x - 2y + 1 = 0$, $(x - 5)^2 + (y - q)^2 = 20$.

5. Shkruaje barazimin e tangjentës të vijës rrethore e cila kalon nëpër pikën:
   a) $P(-5, 0)$; $x^2 + y^2 = 9$; b) $P(-3, 6)$; $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$.

6. Shkruaje barazimin e tangjentës së vijës rrethore $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ e cila është paralele me drejtëzën $4x - 3y - 12 = 0$.

7. Shkruaje barazimin e tangjentës së vijës rrethore $x^2 + y^2 = 5$ e cila është normale në drejtëzën $x - 2y - 3 = 0$.

8. Nën cili kënd shihet vija rrethore:
   a) $x^2 + (y - 4)^2 = 16$ prej pikës $M(8, 4)$;
   b) $x^2 + y^2 - 2x - 14y + 25 = 0$ prej fillimit të koordinatave?

9. Shkruaje barazimin e drejtëzës që e prek vijën rrethore $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 5$, kurse boshtin e x-it e prenë në pikën $C(6, 0)$.

10. Prej pikës $P(2, -3)$ janë tërhequr tangjentat e vijës rrethore $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 4$. Shkruaje barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat prekëse.

11. Shkruaje barazimin e vijës rrethore qendra e të cilës është në pikën $C(p, 1)$, kurse i prek drejtëzat $3x - 4y + 35 = 0$, $4x + 3y - 20 = 0$.

12. Shkruaje barazimin e vijës rrethore qendra e së cilës shtrihet në drejtëzën $2x + y = 0$, kurse i prek drejtëzat $4x - 3y + 10 = 0$ dhe $4x - 3y - 30 = 0$.

15 BARAZIMI I TANGJENTËS SË VIJËS RRETHORE NË PIKËN E DHËNË

Kujtohu!

- Barazimi i drejtëzës nëpër një pikë $y - y_1 = k(x - x_1)$
- Barazim i drejtëzës nëpër dy pika $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$
- Kushti për dy drejtëza normale ku koeficientët e drejtimit janë k_1 dhe k_2, është $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0$.
- Tangjenta e vijës rrethore është normale në pikën prekëse.
- Drejtëza e cila është normale në tangjentën e vijës rrethore dhe kalon nëpër pikën prekëse quhet normale e vijës rrethore.

1 Shkruaje barazimin e tangjentës në pikën $T(x_1, y_1)$ të vijës rrethore $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Vëre zgjidhjen:

- Normalja e vijës rrethore kalon nëpër qendrën $C(p, q)$ dhe pikën $T(x_1, y_1)$, fig.1. pra barazimi saj është:

$$n: \; y - q = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - p).$$

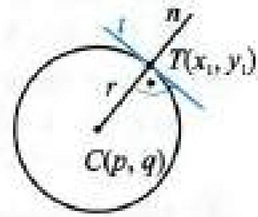


fig. 1

Koeficienti i drejtimit të normales është $k_n = \dfrac{y_1 - q}{x_1 - p}$.

Prej kushtit të drejtëzave normale $k_t \cdot k_n = -1$, vijon

$$k_t = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}, \text{ pra barazimi i tangjentës është:}$$

$$t: \; y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1), \text{ d.m.th. } (x_1 - p)(x - x_1) + (y - y_1)(y_1 - q) = 0.$$

- Pika $T(x_1, y_1)$ shtrihet në vijën rrethore, pra kemi $(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2$.

Duke i mbledhur të dy barazimet e fundit, fitojmë:

$$(x_1 - p)(x - x_1) + (x_1 - p)^2 + (y - y_1)(y_1 - q) + (y_1 - q)^2 = r^2;$$
$$(x_1 - p)(x - x_1 + x_1 - p) + (y_1 - q)(y - y_1 + y_1 - q) = r^2.$$

Barazimi i kërkuar i tangjentës është

$$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2.$$

2 Shkruaje barazimin e tangjentës dhe normales në pikën $T(4, 1)$ të vijës rrethore $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$.

Vëre zgjidhjen:

- Pika T shtrihet në vijën rrethore, pasi $(4 - 2)^2 + (1 + 3)^2 = 22 + 42 = 20$.
- Prej vijës rrethore vijon $p = 2$, $q = -3$, $r^2 = 20$, me zëvendësimin në barazimin e tangjentës kemi:

$$t: (4 - 2)(x - 2) + (1 + 3)(y + 3) = 20;$$
$$x + 2y - 6 = 0.$$

- Barazimi i normales është

$$n: y - y_1 = k_n(x - x_1).$$

Prej barazimit të tangjentës kemi $k_t = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{2}$, kurse prej kushtit për drejtëza normale kemi $k_n = -\frac{1}{k_t} = 2$, pra barazimi i normales është $n: y - 1 = 2(x - 4)$, t.e. $2x - y - 7 = 0$.

Mbaj mend!

Barazimi i tangjentës së vijës rrethore $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ në pikën $T(x_1, y_1)$ e

$$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2.$$

Nëse qendra e vijës rrethore është në fillimin e koordinatave, d.m.th. $p = q = 0$, atëherë tangjenta është: $xx_1 + yy_1 = r^2$.

3 Drejtëza $3x + y = 1$ e prenë vijën rrethore $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$.

a) Shkruaji barazimet e tangjentave në pikëprerjet.

b) Cakto syprinën e trekëndëshit të kufizuar me drejtëzën e dhënë dhe të dy tangjentat.

Vëre zgjidhjen:

- $p = 1$, $q = 3$, $C(1, 3)$, $r^2 = 1^2 + 3^2 - 5 = 5$. (fig. 2).

$y = -3x + 1$,

x	-1	0	1
y	4	1	-2

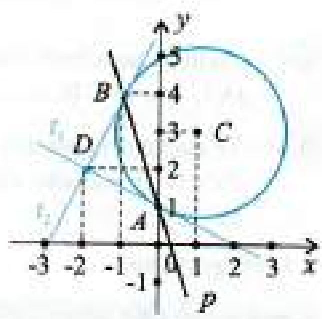


fig. 2

- Zgjidhjet e sistemit $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \end{cases}$ janë koordinatat e pikëprerjeve A dhe B.

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = 1 - 3x \\ x^2 + x = 0 \end{cases}; \ A(0, 1), \ B(-1, 4).$$

■ a) Tangjentat janë:

t_1: $(x - 1)(0 - 1) + (y - 3)(1 - 3) = 5$; $x + 2y - 2 = 0$;

t_2: $(x - 1)(-1 - 1) + (y - 3)(4 - 3) = 5$; $2x - y + 6 = 0$.

■ Pikëprerja e tangjentave fitohet me zgjidhjen e sistemit:

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ 2x-y+6=0 \end{cases}, D(-2, 2).$$

■ b) Syprina e trekëndëshit ABD: $A(0, 1)$, $B(-1, 4)$, $D(-2, 2)$.

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|;$$

$$S=\frac{1}{2}\left|0(4-2)+(-1)(2-1)+(-2)(1-4)\right|=5.$$

4 Shkruaje barazimin e tangjentës së vijës rrethore $x^2 + y^2 = 13$, në pikën $T(-2, y_1 > 0)$.
Sa zgjidhje ka detyra nëse nuk është dhënë kufizimi?

Vëre zgjidhjen:

■ Pika T shtrihet në vijën rrethore, pra

$$(-2)^2 + y_1^2 = 13;\ \text{d.m.th.}\ y_1^2 = 9;$$

$y_1 = 3$ ose $y_1 = -3$, fig. 3.

Tangjenta kalon nëpër pikën $T(-2, 3)$.

Pasi $p = q = 0$, vijon:

t: $xx_1 + yy_1 = r^2$;

$-2x + 3y = 13$;

$2x - 3y + 13 = 0$.

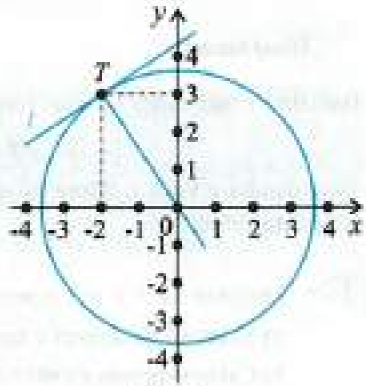


fig. 3

5 Shkruaje barazimin e tangjentës së vijës rrethore $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$ në pikën $D(1, y)$, $y < 0$.

6 Të caktohet këndi nën të cilin priten drejtëza $3x - y - 1 = 0$, dhe vija rrethore $(x - 2)^2 + y^2 = 5$.

Vëre zgjidhjen:

Këndi nën të cilin priten drejtëza dhe vija rrethore është këndi që e formojnë drejtëza dhe tangjenta e vijës rrethore në pikëprerjen, fig. 4.

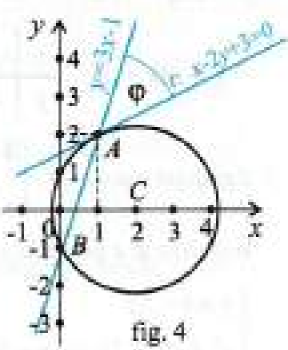


fig. 4

- Zgjidhje e sistemit $\begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ janë koordinatat e pikëprerjeve A dhe B.

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x^2 - 4x + 4 + (3y-1)^2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 1 \\ x^2 - x = 0; \end{cases} \quad A(1, 2), \quad B(0, -1).$$

- Barazimi i tangjentës së vijës rrethore në pikën $A(1, 2)$ është

$$t: (x - 2)(x_1 - 2) + yy_1 = 5;$$
$$(x - 2)(1 - 2) + 2y = 5;$$
$$x - 2y + 3 = 0.$$

- Këndi ndërmjet dy drejtëzave caktohet me formulën $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 - k_1 k_2}$, pra kemi: $k_t = \dfrac{1}{2}$,

$k_p = 3$, kurse $tg\varphi = \dfrac{\frac{1}{2} - 3}{1 + \frac{1}{2} \cdot 3} = \dfrac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = -1$; $\varphi = \text{arctg}|-1|$; $\varphi = 45°$.

Vlerën e njëjtë do ta fitojmë edhe në pikën B.

Detyra

1. Shkruaje barazimin e tangjentës në pikën A të vijës rrethore:
   a) $A(-1, 2)$, $x^2 + y^2 = 5$; b) $A(5, 1)$, $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$;
   c) $A(0, -3)$, $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$.

2. Shkruaje barazimin e tangjentës së vijës rrethore në pikën T:
   a) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 20$, $T(1, y)$, $y > 0$; b) $x^2 + y^2 = 10$, $T(x < 0, -1)$.

3. Është dhënë vija rrethore $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$.
   a) Shkruaji barazimet e tangjentave në pikën $T(x, -3)$ të vijës rrethore.
   b) Cakto këndin ndërmjet tangjentave.

4. Në pikëprerjet e drejtëzës $x - 3y + 5 = 0$ dhe vijës rrethore $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 50$ tërhiq tangjenta të vijës rrethore.
   Cakto syprinën e trekëndëshit që e formjnë drejtëza e dhënë dhe të dy tangjentat.

5. Drejtëza $2x + y = 10$ e prenë vijën rrethore $x^2 + y^2 = 25$.
   Cakto këndin që e formojnë tangjentat të tërhequra në pikëprerjet prej vijës rrethore.

6. Cakto këndin nën të cilin drejtëza $x - 3y - 5 = 0$ e prenë vijën rrethore $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$.

7) Cakt pikëprerjet e vijave rrethore:

a) $x^2 + y^2 = 8$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

b) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$.

c) $x^2 + y^2 - 8x - 18y + 93 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0$.

8) Cakto këndin nën të cilin priten vijat rrethore:

a) $x^2 + y^2 = 3$, $(x - 1)^2 + y^2 = 4$;

b) $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$, $x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0$.

16 ELIPSA. BARAZIMI QËNDROR I ELIPSËS

A Përpiqu ta bëjsh këtë eksperiment.

Në sipërfaqe të rafshtë në largësi të caktuar ngulim dy gozhda. Për gozhdave i lidhim skajet e një peri, gjatësia e të cilit është më e madhe se largësia ndërmjet gozhdave, fig. 1.

Nëse perin e tërheqim me një laps, gjatë tërheqjes së atillë të perit, lapsi do të përshkruan një lakore të mbyllur e cila quhet *elipsë*.

fig. 1

Matematikani Françez Rene Dekart (1596-1650), i cili llogaritet si themelues i gjeometrisë analitike, kështu mekanikisht elipsën e konstruktuar e ka quajtur „konstruksion kopshti''

- Vëre, pika që shtrihen në elipsë që e kanë vetinë: shuma e largësive të çdonjërës prej atyre deri te dy pikat e dhëna të jetë konstant,

Prandaj, për elipsën vlen ky

Përkufizim: Elipsa është vend gjeometrik i pikave në rrafsh shuma e largësive deri te dy pikat të dhëna (fikse) nga rrafshi i njëjtë është konstant. Shuma e largësive duhet të jetë gjithmonë më e madhe se largësia ndërmjet pikave të dhëna.

- Pikat e dhëna quhen fokuse të elipsës, shënohen me F_1 dhe F_2, kurse largësia $\overline{F_1F_2} = 2c$ quhet largësi fokale.
- Numri konstant (shumën e largësive të çfarëdo pike të elipsës deri te fokusët) e shënojmë me $2a$ ($a > 0$).

B 1 Shkruaje barazimin e elipsës nëse dihet largësia fokale $\overline{F_1F_2} = 2c$ dhe largësia konstante $2a$.

Bllpe zgjidhjen:

- Duhet të caktojmë barazimin që i kënaq koordinatat e çfarëdo pike të elipsës (dhe vetëm ato).

Për këtë qëllim vendosim sistem kënddrejtë koordinativ ashtu që boshti x të kalon nëpër fokuset F_1 dhe F_2, kurse fillimi i koordinatave - të jetë mesi i segmentit F_1F_2, fig. 2.

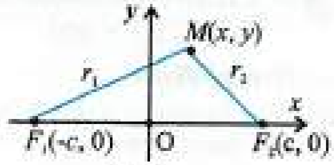


fig. 2

Me zgjedhjen e këtillë të sistemit koordinativ kemi:

$F_1F_2 = 2c$, pra $F_1(-c, 0)$, kurse $F_2(c, 0)$.

Nëse pika $M(x, y)$ është çfarëdo pikë e elipsës, atëherë:

$$r_1 = \overline{F_1M} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ;\ r_2 = \overline{F_2M} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

quhet rreze fokale.

Prej përkufizimit për elipsën kemi:

$r_1 + r_2 = 2a$, d.m.th. barasia $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, është barazimi i elipsës i shprehur në formën koordinative.

Këtë barazim me transformim identik do ta sjellim në formë më të thjeshtë.

Prej barazimit vijon:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Prej përkufizimit vijon $2a > \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, pas kuadrimit fitojmë barasi që është ekuivalente me barasinë e dhënë:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Kuadrojmë përsëri:

$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2x + x^2c^2$, d.m.th. $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Prej jobarasive të brinjëve të trekëndëshit ΔF_1F_2M vijon:

$$r_1 + r_2 > \overline{F_1F_2} \text{ ose } 2a > 2c, \text{ d.m.th. } a > c.$$

Prej këtu vijon se $a^2 > c^2$, d.m.th. $a^2 - c^2 > 0$, pra me zëvendësimin

$$a^2 - c^2 = b^2, (b > 0),$$

barazimi i elipsës është:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Pas pjesëtimit të barazimit me a^2b^2, $(a > 0, b > 0)$ kemi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i cili quhet **barazimi qëndrot** ose **barazimi kanonik i elipsës**.

Numrat pozitiv a dhe b quhen gjysmëboshte të elipsës.

2 Caktoji gjysmëboshtet a dhe b dhe koordinatat e fokuseve të elipsës $9x^2 + 25y^2 = 900$.

Vëre zgjidhjen:

Nëse barazimin e pjesëtojmë me 900, atëherë barazimi do të jetë i shkruar në formën kanonike, d.m.th.

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$$

Prej këtu vijon $a^2 = 100$, $b^2 = 36$, d.m.th. $a = 10$ dhe $b = 6$.

Prej kushtit $a^2 - c^2 = b^2$ vijon $c^2 = a^2 - b^2$; $c^2 = 100 - 36 = 64$, pra $c = 8$, kurse fokusët janë $F_1(-8, 0)$ dhe $F_2(8, 0)$.

3 Shkruaje barazimin e elipsës nëse janë dhënë gjysmëboshtet:

a) $a = 5$, $b = 3$; b) $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{3}$.

Vëre zgjidhjen:

a) Nëse $a = 5$ dhe $b = 3$ i zëvendësojmë në barazimin e elipsës $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ kemi $3^2x^2 + 5^2y^2 = 3^25^2$ ose $9x^2 + 25y^2 = 225$.

4 Shkruaj barazimin e elipsës nëse të dy kulmet e saja janë pikat $A_1(-13, 0)$ dhe $A_2(13, 0)$, kurse fokusët $F_1(-5, 0)$ dhe $F_2(5, 0)$.

Vëre zgjidhjen:

Pasi fokusët shtrihen në boshtin x domethënë gjysmëboshti i madh është $a = 13$, dhe $c = 5$.

Prej kushtit $a^2 - c^2 = b^2$ vijon $b^2 = 132 - 52 = 144$, pra barazimi i elipsës është:

$$\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{12^2}=1.$$

5 Shkruaje barazimin e elipsës nëse gjysmëboshti i vogël është $b = 2\sqrt{5}$, kurse $F_1(-4, 0)$.

6 Shkruaje barazimin e elipsës e cila kalon nëpër pikën $A(3, \sqrt{2})$, kurse gjysmëboshti i madh është $a = \sqrt{15}$.

Vëre zgjidhjen:

Me zëvendësimin në barazimin e elipsës kemi: $\frac{3^2}{(\sqrt{15})^2}+\frac{(\sqrt{2})^2}{b^2}=1$; $\frac{9}{15}+\frac{2}{b^2}=1$;

$\frac{2}{b^2}=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$; $b^2 = 5$. Barazimi i elipsës është:

$$\frac{x^2}{(\sqrt{15})^2}+\frac{y^2}{5}=1 \text{ ose } x^2 + 3y^2 = 15.$$

C Formën e elipsës do ta vërejmë nga analiza e barazimit të saj.

Prej barazimit $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ vijon $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ dhe $x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$, ose

$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ dhe $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$.

- Prej këtu vijon:
  $y\in\mathbf{R}$ nëse $a^2-x^2\geq 0$, d.m.th. $-a\leq x\leq a$, kurse $x\in\mathbf{R}$ nëse $b^2-y^2\geq 0$, d.m.th. $-b\leq y\leq b$.
  Për $x=\pm a$ vijon $y=0$, d.m.th. elipsa e prenë boshtin x në pikat $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$. Për $y=\pm b$ vijon $x=0$, d.m.th. elipsa e prenë boshtin y në pikën $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$.

- Pikat A_1, A_2, B_1 dhe B_2 quhen kulmet e elipsës. Prej zgjidhjeve $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ dhe $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ vijon se elipsa është simetrike në lidhje me boshtet koordinative.

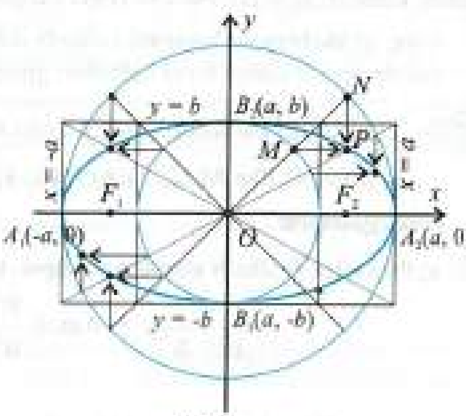


fig. 3

- Pasi ndryshoret x, y të barazimit janë në fuqi të treguesit, domethënë nëse pika $T(x, y)$ shtrihet në elipsë, atëherë pika $T_1(-x_1, -y_1)$ shtrihet në elipsë, d.m.th. elipsa është simetrike edhe në lidhje me fillimin e koordinatave.

  Prej këtij diskutimi vijon se pikat e elipsës gjenden në drejtkëndëshin $-a\leq x\leq a$, $-b\leq y\leq b$, fig.3.

- Në fig. 3 është paraqitur një mënyrë e konstruksionit të elipsës me rrathë koncentrik diametrat e të cilëve janë $2a$ dhe $2b$.

- Prej pikëprerjeve M dhe N të diametrit ON dhe në të dy vija rrethore tërheqim drejtëza paralele me boshtet Ox dhe Oy, përkatësisht.

- Prerja P e atyre drejtëzave paralele është pikë e elipsës.

- Në të njëjtën mënyrë caktohet pikë e elipsës në çfarëdo diametër të tërhequr.

- Gjatësia e segmentit $\overline{A_1A_2}=2a$ quhet boshti i madh, kurse segmenti $\overline{B_1B_2}=2b$ boshti i vogël i elipsës.

- Numri $c=\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$ quhet ekscentriciteti linear.

Mbaj mend!

Barazimi i elipsës me qendër në fillimin e koordinatave është i formës

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ose $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, pikat $F_1(-C, 0)$ dhe $F_2(C, 0)$ quhen fokuset e elipsës, kurse $c=\sqrt{a^2-b^2}$, për $a > b$, ekscentriciteti linear.

Nëse $b > a$, atëherë barazimi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ është, gjithashtu, barazimi i elipsës, fokuset e së cilës shtrihen në boshtin y dhe poashtu $c^2 = b^2 - a^2$. Në këtë rast $\overline{B_1B_2}=2b$ është boshti i madh, kurse $\overline{A_1A_2}=2a$ boshti i vogël i elipsës.

- Vëre, që të shkruhet barazimi i elipsës duhet të dihen gjysmëboshtet e saj a dhe b ose dy kushte prej të cilëve do të caktohen gjysmëboshtet.

7 Të shkruhet barazimi i elipsës e cila kalon nëpër pikat:

a) $M(9, 4)$ dhe $N(12, 3)$; b) $M(6, 4)$ dhe $N(-8, 3)$.

Vëre zgjidhjen:

- a) Pasi pikat M dhe N shtrihen në elipsë, koordinatat e tyre e kënaqin barazimin e elipsës:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{, d.m.th. }\frac{9^2}{a^2}+\frac{4^2}{b^2}=1\text{ dhe }\frac{12^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1.$$

- Sistemin $\frac{81}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1$ dhe $\frac{144}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$ do ta zgjidhim me metodën e koeficientëve të kundërt në këtë mënyrë:

$$\begin{cases}\frac{81}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1/\cdot 9\\ \frac{144}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1/\cdot(-16)\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{729}{a^2}+\frac{144}{b^2}=9\\ -\frac{2304}{a^2}-\frac{144}{b^2}=-16\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{81}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\\ \frac{729}{a^2}-\frac{2304}{a^2}=9-16\end{cases};$$

$$\begin{cases}\frac{81}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\\ -\frac{1575}{a^2}=-7\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{16}{b^2}=1-\frac{81}{225}\\ a^2=225\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{16}{b^2}=\frac{144}{225}\\ a^2=225\end{cases};\quad \begin{cases}b^2=25\\ a^2=225.\end{cases}$$

- Barazimi i elipsës është: $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{25}=1$ ose $x^2 + 9y^2 = 225$.

8 Shkruaje barazimin e elipsës dy kulmet e të cilës i kanë koordinatat $(\pm 6, 0)$, kurse fokuset puthiten me fokuset e elipsës $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Vëre zgjidhjen:

- Prej elipsës së dhënë vijon $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, kurse $c^2 = 26 - 9 = 16$, d.m.th.fokusët janë $F_1(-4, 0)$ dhe $F_2(4, 0)$.
- Pasi gjysmëboshti i elipsës së kërkuar $a = 6$, vijon $b^2 = a^2 - c^2$; $b^2 = 6^2 - 4^2 = 20$, pra barazimi i elipsës është

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1 \text{ ose } 5x^2 + 9y^2 = 180.$$

Mbaj mend!

Dy elipsa fokusët e të cilëavee puthiten quhen *elipasa konfokale*.

9 Vizato (skico) elipsa gjysmëboshtet e të cilave janë: a) $a = 6$, $b = 4$; b) $a_1 = 6$, $b_1 = 2{,}5$ në të njëjtin sistem koordinativ.

- Të dy elipsat janë paraqitur në fig. 4.
- Vëren se elipsat kanë forma të ndryshme, njëra është më e ngjeshur.
- Forma e elipsës varet prej numrit $\varepsilon=\frac{c}{a}$, i cili quhet *ekscentriciteti numerik*. Pasi $c < a$, domethënë $0 \le \varepsilon < 1$.

  Për elipsën a) $c^2 = a^2 - b^2$; $c^2 = 25 - 16$; $c = 3$, pra $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

  Për elipsën b) $c_1^2 = 5^2 - 2{,}5^2$; $c_1 = \sqrt{18{,}75}$; $c_1 = 4{,}33$, pra $\varepsilon_1 = \frac{4{,}33}{5} = 0{,}866$.

  Largësia fokale $c_1 > c$, kurse prej këtu vijon gjatë vlerës konstante të boshtit të madh $\varepsilon_1 > \varepsilon$, që do të thotë se boshti i vogël është më i vogël, pra elipsa e dytë është më shumë e ngjeshur.

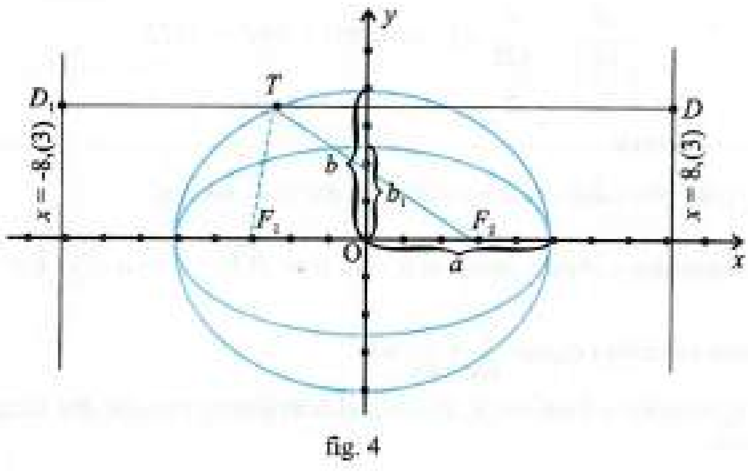


fig. 4

Nëse $\varepsilon = 0$, atëherë $c = 0$, pra $b = a$ edhe në këtë rast barazim i elipsës është i formës $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ose $x^2 + y^2 = a^2$, d.m.th. elipsa kalon në vijë rrethore me rreze $r = a$ dhe qendër në fillimin e koordinatave. Prandaj vija rrethore mund të llogaritet për elipsë me ekcentricitet $\varepsilon = 0$.

Drejtëzat $x=\frac{a}{\varepsilon}$ dhe $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ quhen *direktrisa* të elipsës.

Pasi $\varepsilon < 1$, vijon se $\frac{a}{\varepsilon}>a$, pra direktrisat nuk e prejnë elipsën.

Direktrisa të elipsës $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ janë $x=\pm\frac{5}{0,6}=\pm 8,(3)$ (fig. 4).

Direktrisa e elipsës e ka këtë veti: raporti i largësive prej çfarëdo pike T të elipsës deri te fokusi, që është më afër direktrisës, dhe largësia prej asaj pike deri te direktrisa është konstant, e barabartë me ekscentricitetin numerik, d.m.th.

$$\overline{TF_2}:\overline{TD}=\overline{TF_1}:\overline{TD_1}=\varepsilon.$$

10 Shkruaje barazimin e elipsës:

a) $b=6\sqrt{3}$, $\varepsilon=0,5$;   b) $\varepsilon=\frac{2}{3}$, $F(\pm5,0)$.

Vëre zgjidhjen

b) Prej $F(\pm5, 0)$ vijon $c = 5$, kurse prej $\varepsilon=\frac{c}{a}$ vijon $\frac{2}{3}=\frac{5}{a}$; $a=\frac{15}{2}$.

Prej $b^2 = a^2 - c^2$; $b^2=\left(\frac{15}{2}\right)^2-5^2=\frac{225-100}{4}=\frac{125}{4}$.

Barazimi i elipsës është:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{15}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{125}{4}}=1 \quad \text{ose} \quad 20x^2 + 36y^2 = 1125.$$

Detyra

1. Vizato elipsën nëse është dhënë një pikë e saj dhe të dy fokusat.

2. Shkruaje barazimin e elipsës, nëse: a) $a = 7$, $b=\sqrt{13}$;   b) $a = 3$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$;

3. Është dhënë barazimi i elipsës $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$.

   Caktoji koordinatat e fokusëve të elipsës, ekcentricitetin numerik dhe barazimet e direktrisave.

(4) Shkruaje barazimin e elipsës e cila kalon nëpër pikën $M(-5, 4)$, kurse ekscentricitetin linear e ka $3\sqrt{2}$.

(5) Shkruaje barazimin e elipsës e cila kalon nëpër pikat:

a) $M(-4, 1)$, $N(2, -3)$; b) $M(6, \frac{28}{5})$, $N(-8, \frac{21}{5})$;

(6) Shkruaje barazimin e elipsës nëse largësia prej një fokusi deri te kulmet e boshtit të madh janë 2 dhe 8.

(7) Cakto pozitën e pikave $A(6, -3)$, $B(-2, 5)$, $C(3, -6)$, $D(-4, 2\sqrt{6})$ në lidhje me elipsën $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$.

(8) Shkruaji barazimet e rrezeve fokale të elipsës $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ në pikën $T(-8, y<0)$.

(9) Shkruaje barazimin e elipsës nëse boshti i madh është 16, kurse është konfokale me elipsën $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{30}=1$.

(10) Është dhënë elipsa $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Shkruaje barazimin e elipsës e cila kalon nëpër fokusët e elipsës së dhënë, kurse fokusët e saj janë në kulmet e elipsës së dhënë që janë në boshtin y.

17 POZITA RECIPROKE E DREJTËZËS DHE ELIPSËS

Kujtohu!

- Për natyrën e zgjidhjeve të barazimit katror.
- Zgjidhe sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$$

- Pikat e përbashkëta të drejtëzës dhe vijës rrethore i caktojmë duke e zgjidhur sistemin e barazimeve të tyre.

A 1 Cakto pozitën reciproke të elipsës $x^2 + 3y^2 = 36$ dhe drejtëzës:

a) $x - 3y = 0$; b) $y = x - 8$;

c) $y = x + 4\sqrt{3}$.

Vëre zgjidhjen

- Pozitën reciproke të drejtëzës dhe elipsës do ta konstatojmë me zgjidhjen e sistemit të barazimeve të tyre.

a) Sistemi i barazimeve është:

$$\begin{cases} x^2+3y^2=36 \\ x=3y. \end{cases}$$

Zgjidhja e sistemit është: $\begin{cases} x=\pm 3\sqrt{3} \\ y=\pm 3. \end{cases}$ Domethënë drejtëza e prenë elipsën në pikat

$N(3\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ dhe $N_1(-3\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$.

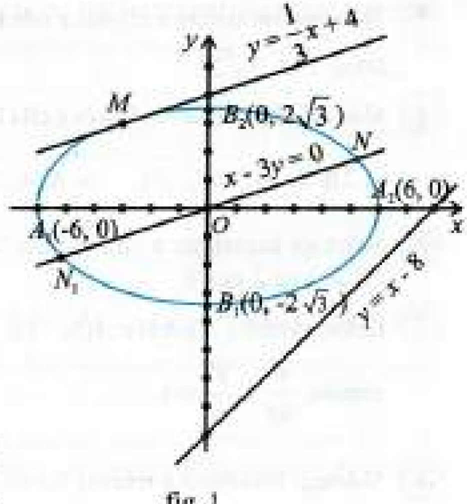


fig. 1

b) Sistemi barazimeve është: $\begin{cases} x^2+3y^2=36 \\ y=x-8. \end{cases}$

Për zgjidhjen e sistemit kemi:

$x^2 + 3(x-8)^2 = 36;\ \ x^2 - 12x + 39 = 0.$

Diskriminanta e këtyre barazimeve katrore është:

$D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4\cdot 39 = -12 < 0$, pra barazimi nuk ka rrënjë reale.

Kjo do të thotë se edhe sistemi nuk ka zgjidhje reale, d.m.th. drejtëza dhe elipsa nuk kanë pika të përbashkëta.

c) Sistemi i barazimeve është $\begin{cases} x^2+3y^2=36 \\ x-3y+12=0. \end{cases}$

Për zgjidhjen e sistemit kemi: $\begin{cases} (3y-12)^2+3y^2=36 \\ x=3y-12 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2-6y+9=0 \\ x=3y-12. \end{cases}$

Diskriminanta e barazimit katror $D=(-6)^2-4\cdot 9=0$, pra $y=\frac{-b}{2a}=3$, kurse

$x = 3\cdot 3 - 12 = -3.$

Kjo do të thotë se drejtëza dhe elipsa kanë një pikë të përbashkët, d.m.th. drejtëza e pek elipsën në pikën $M(-3, 3)$.

Prandaj ajo drejtëz mund ta prenë elipsën, ta prek ose me elipsën të mos ketë pika të përbashkëta që mund të vërehet prej fig.1.

2 Njehso gjatësinë e segmentit që elipsa $x^2+2y^2=18$ e prenë në simetralet e kuadrantit I dhe III.

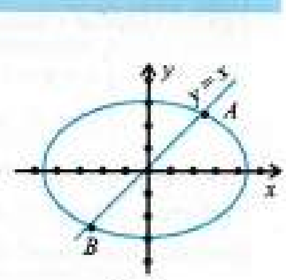


fig. 2

Vëre zgjidhjen

Barazimi i simetraleve të kuadrantit I dhe III është $y=x$, kurse sistemi i barazimeve është $\begin{cases} x^2+2y^2=18 \\ y=x, \end{cases}$ zgjidhja e të cilit është $x=\pm\sqrt{6}$; $y=\pm\sqrt{6}$. Pikëprerjet janë $A\left(\sqrt{6},\sqrt{6}\right)$, $B\left(-\sqrt{6},-\sqrt{6}\right)$, fig. 2. pra

gjatësia e kordës është $\overline{AB}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$;

$\overline{AB}=\sqrt{\left(-\sqrt{6}-\sqrt{6}\right)^2+\left(-\sqrt{6}-\sqrt{6}\right)^2}$; $\overline{AB}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

3 Cakto pozitën reciproke të drejtëzës $y = kx + n$ dhe elipsës $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Vëre zgjidhjen:

- Pozitën e drejtzës në lidhje me elipsën do ta konstatojmë me zgjidhjen e sistemit

$$\begin{cases} y=kx+n \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2. \end{cases}$$

- Duke zëvendësuar kemi: $b^2x^2 + a^2(kx + n)^2 = a^2b^2$;

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2knx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0.$$

- Diskriminanta e këtij barazimi është

$$D = (2a^2kn)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2n^2 - a^2b^2);$$

$$D = 4a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - n^2).$$

Mbaj mend!

1. Nëse $D > 0$, d.m.th. $a^2k^2 + b^2 - n^2 > 0$, atëherë drejtëza e prenë elipsën.
2. Nëse $D = 0$, d.m.th. $a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0$, atëherë drejtëza e prek elipsën (drejtëza është tangjentë e elipsës).
3. Nëse $D < 0$, d.m.th. $a^2k^2 + b^2 - n^2 < 0$, atëherë drejtëza dhe elipsa nuk kanë pika të përbashkëta.

4 Cakto pozitën reciproke të elipsës dhe drejtëzës:

a) $x^2 + 2y^2 = 54,\ x - y - 9 = 0$; b) $x^2 + 4y^2 = 25,\ x + 2y - 7 = 0$;

c) $3x^2 + 16y^2 = 48,\ x + y = 16$.

Vëre zgjidhjen:

a) Prej barazimit të elipsës vijon $a^2 = 54$, $b^2 = 27$, kurse prej drejtëzës $y = x - 9$, vijon $k = 1$, $n = -9$.

Prej kushtit:

$a^2k^2 + b^2 - n^2 = 54 \cdot 1^2 + 27 - (-9)^2 = 54 + 27 - 81 = 0$, vijon se $D = 0$, d.m.th. drejtëza e takon elipsën.

Me zgjidhjen e sistemit cakto pikën prekëse $\begin{cases} x^2+2y^2=54 \\ x=y+9. \end{cases}$

5 Cakto c në barazimin $x + 2y = c$, ashtu që drejtëza të jetë tangjentë e elipsës $x^2 + 2y^2 = 12$.

Vëre zgjidhjen:

Prej barazimit të elipsës $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$ vijon $a^2 = 12$, $b^2 = 6$. Prej barazimit të drejtëzës $y=-\frac{1}{2}x+\frac{c}{2}$, vijon $k=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{c}{2}$, pra duke zëvëndësuar në kushtin për prekje $a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0$, kemi $12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+6=\left(\frac{c}{2}\right)^2$, d.m.th. $c = \pm 6$.

Mbaj mend!

Drejtëza $y = kx + n$ e prek elipsën $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ nëse kënaq kushtin për prekje

$$a^2k^2 + b^2 = n^2.$$

Nëse drejtëza është në formën e përgjithshme $Ax + By + C = 0$, atëherë kushti për prekje është i formës

$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2.$$

6 Për cilën vlerë të parametrit λ drejtëza $\lambda x + y - 3 = 0$ e prek elipsën $x^2 + 2y^2 = 6$?

7 Shkruaji barazimet e tangjentave të elipsës $x^2 + 4y^2 = 20$ të tërhequra prej pikës $M(6, 1)$.

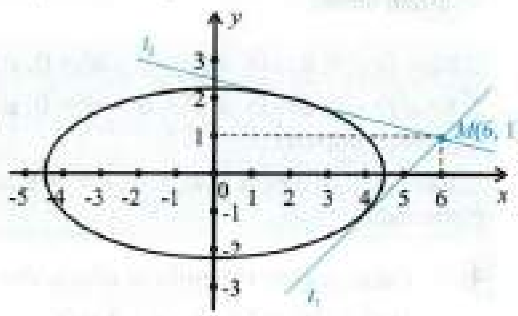


fig. 3

Vëre zgjidhjen:

Tangjenta e kërkuar që kalon nëpër pikën M dhe e prek elipsën e dhënë, fig. 3.

Prej barazimit $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ vijon $a^2 = 20$, $b^2 = 5$.

Prej barazimit të drejtëzës nëpër një pikë kemi:

$$t:\ y - y_1 = k(x - x_1)$$
$$y - 1 = k(x - 6)$$
$$kx - y + 1 - 6k = 0$$

Koeficientin k do ta caktojmë prej kushtit për prekje:

$$a^2A^2 + b^2B^2 = c^2$$

$$20\cdot k^2 + 5\cdot(-1)^2 = (1 - 6k)^2;\quad 20k^2 + 5 = 1 - 12k + 36k^2;\quad 4k^2 - 3k - 1 = 0$$

$$k_1 = 1 \text{ ose } k_2 = -\frac{1}{4}.$$

Duke zëvendësuar në barazimin e tangjentës t kemi:

$$t_1: 1\cdot x - y + 1 - 6\cdot 1 = 0; \qquad t_2: -\frac{1}{4}x - y + 1 - 6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = 0\ ;$$

$$x - y - 5 = 0 \qquad\qquad x + 4y - 10 = 0.$$

8 Shkruaje barazimin e tangjentës së elipsës $x^2 + 3y^2 = 28$ e cila është normale në drejtëzën $3x - 2y + 11 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

- Prej barazimit të elipsës vijon $a^2 = 28,\ b^2 = \dfrac{28}{3}$.
- Prej barazimit të drejtëzës vijon $k_p = -\dfrac{A}{B} = \dfrac{3}{2}$, kurse prej kushtit për drejtëza normale

$k_t = -\dfrac{1}{k_p} = -\dfrac{2}{3}$, pra: $t: y = kx + n;\quad y = -\dfrac{2}{3}x + n$ ose $2x + 3y - 3n = 0$.

- Prej kushtit për prekje kemi:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2,\ \text{d.m.th.}\ 28\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{28}{3} = n^2;\quad n = \pm\frac{14}{3},\ \text{pra}$$

$$t_1: y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3};\quad t_2: y = -\frac{2}{3}x - \frac{14}{3};$$

Detyra

1 Cakto pozitën reciproke të drejtëzës dhe elipsës:

a) $x + y = 8,\ 3x^2 + 5y^2 = 120$; b) $5x - 3y = 14,\ x^2 + 3y^2 = 28$;

c) $2x^2 + 5y^2 = 40,\ x - y = 20$.

2 Cakto pikëprerjet e drejtëzës dhe elipsës:

a) $y = 2x - 9,\ x^2 + 3y^2 = 36$; b) $x - y + 20 = 0,\ 2x^2 + 5y^2 = 40$.

3 Për cilat vlera të n, drejtëza $y = -x + n$:

a) e prenë elipsën $x^2 + 4y^2 = 20$;

b) e prekin elipsën $4x^2 + 5y^2 = 20$;

c) kalon jashta elipsës $x^2 + 3y^2 = 12$?

4 Cakto parametrin p ashtu që drejtëza $x + py - 10 = 0$ ta prek elipsën $x^2 + 4y^2 = 20$.

5 Cakto këndin nën të cilin shikohet elipsa $3x^2 + y^2 = 48$ prej pikës $M(8, 0)$.

6 Shkruaje barazimin e elipsës $\dfrac{x^2}{30} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ që është paralele me drejtëzën $2x - y + 17 = 0$.

7. Shkruaje barazimin e tangjentës së elipsës $2x^2 + 3y^2 = 35$ e cila është normale në drejtëzën $3x - 8y - 24 = 0$.

8. Shkruaje barazimin e tangjentës së elipsës $x^2 + 3y^2 = 28$ e cila me drejtëzën $x - 5y = 20$ formon kënd prej $45°$.

9. Shkruaje barazimin e elipsës e cila e prek drejtëzën $x + 4y - 10 = 0$ në pikën $M(2, y)$.

10. Shkruaje barazimin e elipsës tangjentat e të cilës janë drejtëzat $x + y - 8 = 0$ dhe $x + 3y + 16 = 0$.

18 TANGJENTA E ELIPSËS

A 1. Të shkruhet barazimi i tangjentës së elipsës $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ në pikën $T(x_1, y_1)$ të elipsës.

Vëre zgjidhjen:

- Tangjenta e elipsës është çdo drejtëz e cila e prek elipsën, d.m.th. me elipsën ka vetëm një pikë të përbashkët.
- Tangjenta e kërkuar kalon nëpër pikën T, fig.1. pra sipas barazimit të drejtëzës nëpër një pikë kemi:
  t: $y - y_1 = k(x - x_1)$ ose $y = kx + y_1 - kx_1$.
- Koeficientin e drejtimit k do ta caktojmë prej kushtit për prekjen e drejtëzës dhe elipsës.

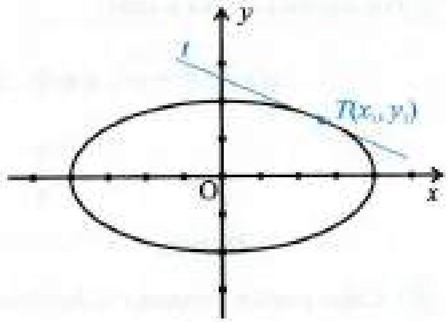


fig. 1

- Duke zëvendësuar $n = y_1 - kx_1$ në kushtin për prekje $a^2k^2 + b^2 = (y_1 - kx_1)^2$.
- Pas kryerjes së fuqizimit dhe reduktimit të barazimit sipas fuqisë k, barazimi është i formës:

$$(a^2 - x_1^2)k^2 + 2x_1y_1 \cdot k + b^2 - y_1^2 = 0.$$

- Pasi në pikën T mund të tërhiqet vetëm një tangjentë, domethënë barazimi sipas të panjohurës k ka vetëm një zgjidhje. Kjo është e mundshme vetëm nëse $D = 0$.

  Në këtë rast $k_1 = k_2 = k$, pra $k = -\dfrac{2x_1y_1}{2(a^2 - x_1^2)} = -\dfrac{x_1y_1}{a^2 - x_1^2}$.

- Pika $T(x_1, y_1)$ shtrihet në elipsë, pra $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$. Prej këtu duke pjesëtuar me b^2 kemi $x_1^2 + \dfrac{a^2y_1^2}{b^2} = a^2$, d.m.th. $\dfrac{a^2y_1^2}{b^2} = a^2 - x_1^2$.

- Duke zëvendësuar në $k = -\dfrac{x_1y_1}{a^2 - x_1^2}$ kemi $k = -\dfrac{x_1y_1}{\dfrac{a^2y_1^2}{b^2}} = -\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

Duke zëvendëzuar koeficientit k në barazimin e tangjentës kemi:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

Pas reduktimit, të barazimit fitojmë:

$$a^2yy_1 - a^2 y_1^2 = -b^2xx_1 + b^2 x_1^2;$$

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2b^2.$$

Prandaj barazimi i kërkuar i tangjentës është:

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2 \text{ ose } \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

2 Në pikat $A(8, 3)$ dhe $B(6, -4)$ të elipsës $x^2 + 4y^2 = 100$, janë tërhequr tangjenta. Cakto këndin ndërmjet tangjentave.

Vëre zgjidhjen:

Prej barazimit të elipsës $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ vijon $a^2 = 100$, $b^2 = 25$.

Barazimi i tangjentës në pikën e elipsës është i formës $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$, pra:

t_A: $\frac{x \cdot 8}{100} + \frac{y \cdot 3}{25} = 1$; t_B: $\frac{x \cdot 6}{100} + \frac{y \cdot (-4)}{25} = 1$;

$2x + 3y - 25 = 0$; $3x - 8y - 50 = 0$.

$k_1 = -\frac{2}{3}$; $k_2 = \frac{3}{8}$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1 \cdot k_2}; \quad tg\varphi = \frac{\frac{3}{8} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{\frac{9+16}{24}}{\frac{24-6}{24}} = \frac{25}{18};$$

$$\varphi = arctg\frac{25}{18} = 72°15'$$

3 Në pikëprerjen e drejtëzës $5x - 3y - 14 = 0$ dhe elipsës $x^2 + 3y^2 = 28$, janë tërhequr tangjentat e elipsës. Shkruaji barazimet e tangjentave.

Detyra

1. Shkruaje barazimin e tangjentës së elipsës $5x^2 + 20y^2 = 100$ në pikën $M(2, 2)$.

2. Shkruaje barazimin e tangjentës së elipsës $9x^2 + 25y^2 = 225$, në pikën $T\left(x, \frac{12}{5}\right)$, $x > 0$.

(3) Shkruaje barazimin e normales në pikën prekëse të drejtëzës $x - 2y + 9 = 0$ dhe elipsës $9x^2 + 45y^2 = 405$.

(4) Shkruaji barazimet e tangjentave të elipsës $x^2 + 4y^2 = 20$ në pikëprerjet me drejtëzën $3x + 2y = 10$.
Cakto syprinën e trekëndëshit që është i kufizuar me drejtëzën e dhënë dhe dy tangjentave.

(5) Shkruaji barazimet e tangjentave të elipsës $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ në pikat $M(4, 3)$ dhe $N(-4, -3)$. Si është pozita reciproke e tangjentave?

(6) Në pikëprerjet e drejtëzës $3x + 2y - 7 = 0$ dhe elipsës $3x^2 + 8y^2 = 35$ janë tërhequr tangjentat e elipsës. Cakto këndin ndërmjet tyre.

(7) Nëse normalja në çdo pikë të elipsës kalon nëpër qendrën e elipsës atëherë elipsa është vijë rrethore. Vërteto!

(8) Në pikën $M(2, y > 0)$ të elipsës $4x^2 + 9y^2 = 36$ është tërhequr tangjenta e elipsës. Prej fokusëve të elipsës janë tërhequr drejtëza normale në tangjentën. Shkruaji barazimet e normaleve të tangjentës.

19 HIPERBOLLA. BARAZIMI QËNDROR I HIPERBOLLËS

Kujtohu!

- Për përkufizimin e elipsës.
- Çka janë fokusët e elipsës?
- Si është boshti i madh i elipsës në lidhje me largësinë fokale?

A Elipsën e përkufizojmë si bashkësi pikash në rrafsh shuma e largësive (rreze vektorëve) të të cilëve deri te dy pika të fiksuara gjithmonë është konstant.

Nëse në vend të shumës shqyrtohet ndryshimi i largësive, d.m.th. rreze vektorët, do të fitojmë vijë të lakuar e cila quhet hiperbollë, ku pikat fikse F_1 dhe F_2 quhen fokuse të hiperbollës.

Prandaj për hiperbollën vlen ky

Përkufizim: Hiperbolla është vend gjeometrik i pikave në rrafsh të cilat e kanë vetinë vlera absolute e ndryshimit të largësive deri te dy pikat (fikse) të dhëna prej atij rrafshi të jetë konstant.

Që ta shkruajmë barazimin e hiperbollës veprojmë sikurse te elipsa.

- Vendosim sistem këndrejtë koordinativ, ashtu që boshti x kalon nëpër fokusët, kurse fillimi i koordinatave të jetë mesi i segmentit $\overline{F_1F_2}$, e cila quhet largësia fokale, fig.1.

Gjatë zgjedhjes së këtillë të sistemit koordinativ kemi:

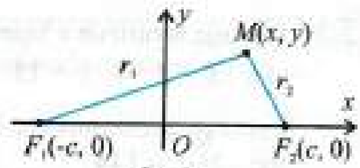


fig. 1

- $\overline{F_1F_2} = 2c$; $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$. Numri $c = \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$ quhet *ekscentriciteti linear*.
- Konstanta që është e barabartë me ndryshimin e rrezeve fokale quhet boshti real i hiperbollës dhe shënohet me $2a$, $a > 0$ dhe $a < c$.
- Nëse pika $M(x, y)$ është çfarëdo pikë e hiperbollës, atëherë

$$r_1 = \overline{F_1M} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ dhe } r_2 = \overline{F_2M} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

quhen rreze fokale.

- Prej përkufizimit të hiperbollës kemi

$$|r_1 - r_2| = 2a, \text{ d.m.th. } \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

është barazimi i hiperbollës së shkruar në formën koordinative.

- Barazimi i shkruar pa vlerën absolute është i formës

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Prej barazimit shihet se, në realitet, kemi dy barazime, kurse çdonjëri prej tyre e shpreh kushtin pika M të shtrihet në hiperbollë. Kjo tregon se hiperbolla përbëhet prej dy degëve.

- Më tutje në reduktimin e barazimit veprojmë sikurse te elipsa, pra kemi:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a;$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2;$$

$$(-cx - a^2) = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Duke e fuqizuar edhe një herë dhe e reduktojmë e fitojmë **barazimin**

$$(c^2 - a^2) \cdot x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Pasi $c > a$ vijon se $c^2 - a^2 > 0$, pra nëse bëjmë zëvëndësimin

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

barazimi është i formës

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ ose } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

i cili quhet **barazimi qëndror** ose **kanonik i hiperbollës**.
Numrat pozitiv a dhe b quhen **gjysmëboshtet e hiperbollës**.

1 Shkruaje barazimin e hiperbollës nëse: a) $a = 3$, $b = 7$; b) $b = 6$, $c = 2\sqrt{14}$.

Vëre zgjidhjen:
b) Prej kushtit $c^2 - a^2 = b^2$ vijon $a^2 = c^2 - b^2$; $a^2 = 56 - 36 = 20$, pra barazimi i hiperbollës është $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{36} = 1$.

2 Shkruaje barazimin e hiperbollës nëse

a) $a : b = 3 : 4;\ c = 15;$ b) $a + c = 25,\ b = 5.$

3 Cakto gjysmëboshtet dhe koordinatat e fokusëve të hiperbollës $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Vëre zgjidhjen:

- Barazimi i shkruar në formën kanonike është $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Prej këtu vijon $a^2 = 16$, d.m.th. $a = 4$; $b^2 = 9$, d.m.th. $b = 3$, kurse $c^2 = a^2 + b^2$, d.m.th. $c^2 = 25$, $c = 5$ pra $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$.

4 Shkruaje barazimin e hiperbollës nëse $a = 2$, kurse kalon nëpër pikën $M(4, 3)$.

B Formën e hiperbollës do ta shqyrtojmë nga analiza e barazimit të saj.

Prej barazimit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ vijon

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \qquad \text{dhe} \qquad x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + y^2),$$

$$\text{d.m.th.} \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad \text{dhe} \qquad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

- Prej këtu vijon:

$y \in \mathbb{R}$ nëse $x^2 - a^2 \geq 0$, d.m.th. $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$, kurse $x \in \mathbb{R}$ për çdo $y \in \mathbb{R}$, pasi $b^2 + y^2 > 0$ për çdo numër real y.

Hiperbolla përbëhet prej dy degë:

- njëra degë është përkufizuar për $x \in (-\infty, -a]$,
- kurse tjetra për $x \in [a, \infty)$.

Për $x = \pm a$ vijon $y = 0$, d.m.th. hiperbolla e prenë boshtin x në pikat $A_1(-a, 0)$ dhe $A_2(a, 0)$, të cilat quhen kulmet e hiperbollës, kurse segmenti $\overline{A_1A_2} = 2a$ quhet boshti real i hiperbollës.

- Prej zgjidhjes $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$ vërehet se për çdo $y \in \mathbb{R}$ vlera e $x \neq 0$, domethënë hiperbolla nuk e prenë boshtin y.

- Numri $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ quhet gjysmëboshti imagjinar, kurse gjatësia e segmentit $\overline{B_1B_2} = 2b$ e cila shtrihet në boshtin y, quhet boshti imagjinar.

- Prej barazimit $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ dhe $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$ vijon se hiperbolla është simetrike në lidhje me boshtet koordinative, d.m.th. ka dy boshte të simetrisë.

Nëse pika $T(x, y)$ shtrihet në hiperbollë, atëherë edhe pika $T_1(-x, -y)$ gjithashtu, shtrihet në hiperbollë, kurse gjatësia e segmentit $\overline{TT_1}$, mesi i të cilit është fillimi i koordinatave, quhet diametri i hiperbollës. Fillimi i koordinatave O është qendra e hiperbollës.

C Ta shqyrtojmë barazimin $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ në këtë formë:

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Nëse abshisa x rritet sipas vlerës absolute në numra të mëdhej pakufi, atëherë herësi $\frac{a^2}{x^2}$ zvogëlohet dhe tenton nga 0, pra ndryshimi $1 - \frac{a^2}{x^2}$ tenton nga 1 edhe në këtë rast barazimi do të kalon në këtë formë $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Domethënë, nëse abshisa x rritet sipas vlerës absolute, ordinatat e pikave përkatëse të hiperbollës $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ dhe të drejtëzave $y = \pm\frac{b}{a}x$ bëhen më afër njëra pranë tjetrës, d.m.th. grafiku i hiperbollës afrohet deri te drejtëzat $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Mbaj mend!

Drejtëzat $y = \pm\frac{b}{a}x$ quhen *asimptota të hiperbollës*.

Asimptotat shfrytëzohen për vizatimin preciz të hiperbollës.

Nëse vizatohet drejtkëndëshi $MNPQ$ brinjët e të cilit janë paralele me boshtet koordinative, kurse janë me gjatësi $2a$ dhe $2b$, fig. 2, atëherë asimptotat shtrihen në diagonalet e drejtkëndëshit pasi koeficientët e drejtimit të tyre janë $tg\alpha = \frac{b}{a}$; $tg\beta = tg(180 - \alpha) = -tg\alpha = -\frac{b}{a}$.

- Në fig. 2 është vizatuar drejtkëndësh, janë tërhequr asimptotat dhe është paraqitur një konstruksion i hiperbollës.
- I caktojmë kulmet A_1 dhe A_2 të hiperbollës dhe fokusëve $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.
- Zgjedhim çfarëçdo rreze $r_1 > 2a$.
- Përshkruajmë harqe rrethore $k_1(F_1, r_1)$ dhe $k_2(F_2, r_1)$.

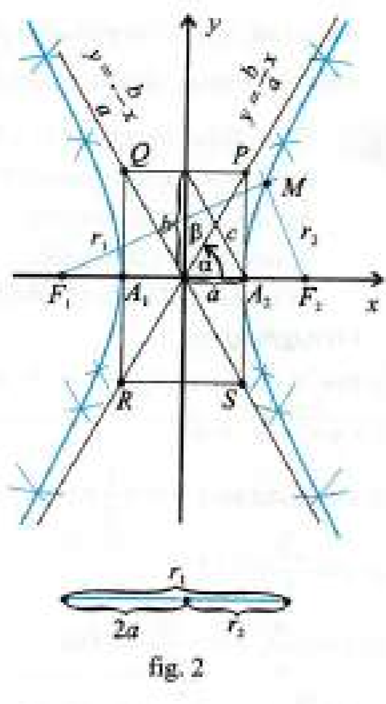


fig. 2

- E caktojmë $r_2 = r_1 - 2a$.
- Përshkruajmë harqe rrethore $k_3(F_1, r_2)$ dhe $k_4(F_2, r_2)$.
- Pikëprerjet e këtyre harqeve përcaktojnë 4 pika të hiperbollës, pasi $\overline{F_1M} - \overline{F_2M} = r_1 - (r_1 - 2a) = 2a$.
- Duke e përsëritur këtë veprim për vlerë tjetër të r_1 fitohen 4 pika të reja etj.

Hiperbolla te e cila $b = a$ quhet *hiperbolla barabrinjëse*, kurse barazimi i saj është $x^2 - y^2 = a^2$.

- Forma e hiperbollës varet prej numrit $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ i cili quhet *ekscentriciteti numerik*.

Pasi $c > a$ vijon se $\varepsilon > 1$. Gjer sa ekscentriciteti i hiperbollës është shumë i madh, edhe aq hiperbolla do të jetë më e hapur, d.m.th. degët e saja janë të larguara prej boshtit x.

- Drejtëzat $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ quhen direktrisat e hiperbollës.

  Pasi $\varepsilon > 1$, vijon se $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$ dhe $-\dfrac{a}{\varepsilon} > -a$, d.m.th. direktrisat nuk e prejnë hiperbollën. Për direktrisën vlen kjo veti: nëse r është largësia prej çfarëdo pike të hiperbollës deri te një fokus i saj, kurse d largësia prej pikës së njëjtë deri te direktrisa që është më afër deri te fokusi i zgjedhur, atëherë raporti është madhësi konstante, d.m.th $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$.

5 Është dhënë hiperbolla $x^2 - 4y^2 = 4$. Cakto:

a) barazimet e asimptotave të hiperbollës;

b) ekscentricitin numerik;

c) direktrisat e hiperbollës;

ç) vizato grafikun e hiperbollës.

Vëre zgjidhjen:

- Prej barazimit vijon $a = 2$, $b = 1$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$;

a) asimptotat janë $y = \pm\dfrac{1}{2}x$;

b) $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}12$;

c) $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$; $x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -0{,}9$;

$x = \dfrac{a}{\varepsilon}$; $x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}9$, fig. 3.

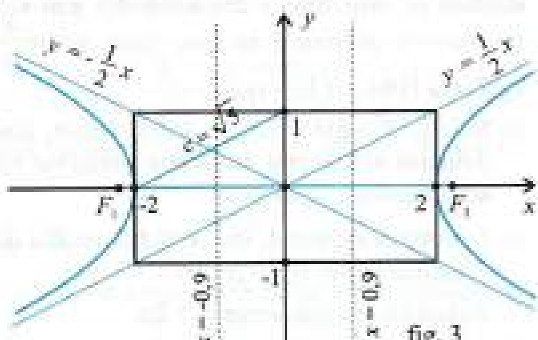


fig. 3

Mbaj mend!

Barazimi i hiperbollës me qendër në fillimin e koordinatave është i formës

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ose $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Pikat $F_1(-c, 0)$ dhe $F_2(c, 0)$ quhen fokuse të hiperbollës, ku

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

6 Shkruaje barazimin e hiperbollës, nëse:

a) $a = 12, \varepsilon = 1{,}25$; b) $c = 4\sqrt{2}$, $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Vëre zgjidhjen:

b) Prej $c^2 - a^2 = b^2$ dhe $\varepsilon = \frac{c}{a}$ vijon $\left(4\sqrt{2}\right)^2 - a^2 = b^2$ dhe $\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{a}$.

Prej këtu vijon $a = 4$, dhe $b^2 = 16 \cdot 2 - 16 = 16$, pra barazimi i hiperbollës është

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1, \text{ d.m.th. } x^2 - y^2 = 16,$$

hiperbolla është barabrinjëse.

7 Barazimet e asimptotave të hiperbollës janë $y = \pm\frac{5}{12}x$, kurse boshti real 48.

Shkruaje barazimin e hiperbollës.

Vëre zgjidhjen:

Prej barazimeve të asimptotave vijon $\frac{b}{a} = \frac{5}{12}$ dhe $2a = 48$. Prej këtu vijon

$a = 24$, $b = \frac{5}{12} \cdot a = 10$. Barazimi i hiperbollës është $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1$.

8 Shkruaje barazimin e hiperbollës e cila kalon nëpër pikat $A(2, 1)$; $B(10, 7)$.

Vëre zgjidhjen:

Koordinatat e pikave A dhe B, e kënaqin barazimin e hiperbollës

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, pra $\frac{2^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = 1$ dhe $\frac{10^2}{a^2} - \frac{7^2}{b^2} = 1$.

E zgjidhim sistemin

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 / \cdot (-25) \\ \frac{100}{a^2} - \frac{49}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{100}{a^2} + \frac{25}{b^2} = -25 \\ \frac{100}{a^2} - \frac{49}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Pas mbledhjes të të dy barazimeve kemi:

$$\frac{25}{b^2} - \frac{49}{b^2} = -25 + 1;\ -\frac{24}{b^2} = -24;\ b^2 = 1.$$

duke zëvendësuar $b^2 = 1$ në njërin prej barazimeve kemi $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{1} = 1$, d.m.th. $\frac{4}{a^2} = 2$,

$a^2 = 2$, pra barazimi i hiperbollës është $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1$ ose $x^2 - 2y^2 = 2$.

Detyra

1) Shkruaje barazimin e hiperbollës, nëse:

a) $a = 4$, $c = 5$; b) $c = 3$, $\varepsilon = \frac{3}{2}$; c) $a + b = 7$, $c = 5$.

2) Është dhënë hiperbolla $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. Cakto:

a) gjysmëboshtet;
b) fokusët;
c) ekscentricitetin numerik;
ç) barazimet e asimptotave;
d) konstrukto grafikun e hiperbollës.

3) Shkruaje barazimin e hiperbollës boshti imagjinar i së cilës është $\sqrt{2}$ dhe kalon nëpër pikën $A(9, -4)$.

4) Shkruaje barazimin e hiperbollës fokusët e së cilës janë $F(\pm 10, 0)$ dhe kalon nëpër pikën $M(12, 3\sqrt{5})$.

5) Shkruaje barazimin e hiperbollës kulmet e së cilës janë në fokusët e elipsës $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$, kurse fokusët e hiperbollës janë në kulmet e elipsës së dhënë që janë në boshtin x.

6) Fokusët e hiperbollës puthiten me fokusët e elipsës $9x^2 + 25y^2 = 225$. Shkruaje barazimin e hiperbollës, nëse ekscentriciti i saj numerik është $\varepsilon = 2$.

7) Shkruaje barazimin e hiperbollës e cila kalon nëpër pikën $A(6, 9)$, kurse barazimet e asimptotave të saja janë $y = \pm\frac{5}{2}x$.

8) Shkruaje barazimin e hiperbollës e cila kalon nëpër pikat:

a) $A(4, -2)$, $B(4\sqrt{3}, 4)$; b) $M(-6, 3)$, $N(4, -\frac{1}{3})$.

9) Cakto pikën e hiperbollës $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ largësia e së cilës deri te fokusi i majtë është 7.

10) Të shkruhet barazimi i hiperbollës barabrinjëse e cila kalon nëpër pikën $A(-5, 4)$. Konstrukto grafikun e hiperbollës.

20 POZITA RECIPROKE E DREJTËZËS DHE HIPERBOLLËS

Kujtohu!

- Si e konstatojmë pozitën reciproke të drejtëzës dhe elipsës?
- Drejtëza $y = kx + n$ e prek elipsën $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, nëse vlen kushti për prekje $a^2k^2 + b^2 = n^2$.
- Barazimi i tangjentës së elipsës në pikën $T(x_1, y_1)$ të elipsës është $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$.

A 1 Cakto pozitën reciproke të drejtëzës dhe hiperbollës:

a) $x - 2y - 1 = 0,\ x^2 - 4y^2 = 4$; b) $x - y - 3 = 0,\ 3x^2 - 12y^2 = 36$;

c) $2x - y - 10 = 0,\ x^2 - 4y^2 = 20$.

Vëre zgjidhjen:

- Edhe në këtë rast, sikurse te drejtëza dhe elipsa, pozitën do ta konstatojmë duke e zgjidhur sistemit përkatës.

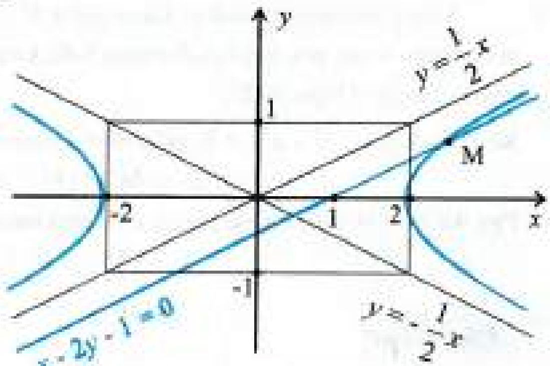


fig. 1

a) $\begin{cases} x = 2y+1 \\ (2y+1)^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$;

$4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 = 4$

$4y = 3$

$y = \dfrac{3}{4},\ x = \dfrac{5}{2};\ M\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$.

Drejtëza e prenë një degë të hiperbollës, fig. 1.

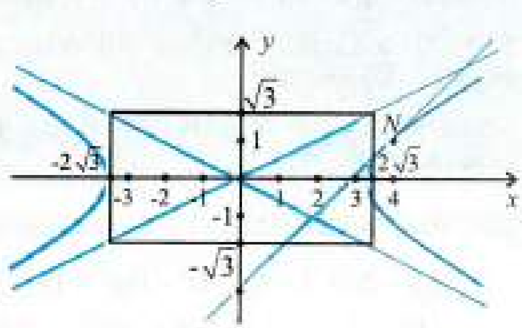


fig. 2

b) $\begin{cases} x = y+3 \\ 3(y+3)^2 - 12y^2 = 36 \end{cases}$;

$3(y^2 + 6y + 9) - 12y^2 = 36$;

$y^2 - 2y + 1 = 0$;

$y_1 = 1,\ x = 4;\ N(4, 1)$.

Drejtëza e takon hiperbollën, fig. 2

c) $\begin{cases} x = y+3 \\ 3(y+3)^2 - 12y^2 = 36 \end{cases}$; $x^2 - 400 + 160x - 16x^2 - 20 = 0$; $3x^2 - 32x + 84 = 0$;

$x_1 = 6,\ y_1 = -2;\ A(6, -2),\ x_2 = \dfrac{14}{3},\ y_2 = \dfrac{5}{3};\ B\left(\dfrac{14}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$. Drejtëza e prenë hiperbollën

Vëre, drejtëza dhe hiperbolla mund të kenë një pikë të përbashkët, dy pika të përbashkëta ose në përgjithësi të mos kenë pika të përbashkëta.

Nëse drejtëza dhe hiperbolla kanë vetëm një pikë të përbashkët, atëherë drejtëza ose e prenë vetëm njërën degët të hipebollës, fig. 1, ose është tangjentë e hiperbollës, fig. 2.

2 Cakto kushtin ashtu që drejtëza $y = kx + n$ të jetë tangjentë e hiperbollës $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Vëre zgjidhjen:

Në të njëjtë mënyrë sikurse te pozita reciproke e drejtëzës dhe elipsës e zgjidhim sistemin e barazimeve:

$$\begin{cases} y = kx + n \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = kx + n \\ b^2x^2 - a^2(kx+n)^2 = a^2b^2 \end{cases};$$

d.m.th. $(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2knx - a^2n^2 - a^2b^2 = 0$.

Nëse koeficienti te anëtari katror është $b^2 - a^2k^2 = 0$, atëherë barazimi katror kalon në barazim linear, pra drejtëza dhe hiperbolla kanë një pikë të përbashkët, d.m.th. drejtëza e prenë degën e hiperbollës.

Nëse koeficienti $b^2 - a^2k \neq 0$, atëherë diskriminanta e barazimit katror është

$$D = 4a^2b^2 (b^2 - a^2k^2 + n^2).$$

Pasi $4a^2b^2 > 0$, domethënë shenja e diskriminantës varet prej shenjës së shprehjes

$$b^2 - a^2k^2 + n^2.$$

Mbaj mend!

1. Nëse $D > 0$, d.m.th. $b^2 - a^2k^2 + n^2 > 0$, atëherë drejtëza e prenë hiperbollën.

2. Nëse $D = 0$, d.m.th. $b^2 - a^2k^2 + n^2 = 0$, atëherë drejtëza e prek hiperbollën (drejtëza është tangjenta e hiperbollës)

3. Nëse $D < 0$, d.m.th. $b^2 - a^2k^2 + n^2 < 0$, atëherë drejtëza dhe hiperbolla nuk kanë pika të përbashkëta.

3 Cakto pozitën reciproke të drejtëzës dhe hiperbollës:

a) $x - 2y + 1 = 0$, $9x^2 - 16y^2 = 144$; b) $7x - 5y = 0$; $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$;

c) $4x - 3y - 16 = 0$, $16x^2 - 25y^2 = 400$.

Vëre zgjidhjen:

a) Vijon se $b^2 = 9$, $a^2 = 16$, kurse prej drejtëzës $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $k = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$.

E caktojmë vlerën e shprehjes $b^2 - a^2k^2 + n^2$, d.m.th.

$$b^2 - a^2k^2 + n^2 = 9 - 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 9 - 4 + \frac{1}{4} = 5\frac{1}{4} > 0.$$

Domethënë, drejtëza e prenë hiperbollën.

Caktoji pikëprerjet me zgjidhjen e sistemit të barazimeve: $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 9x^2 - 16y^2 = 144. \end{cases}$

4 Cakto parametrin p ashtu që drejtëza $2x - y - p = 0$ ta prek hiperbollën $8x^2 - 3y^2 = 24$.

Vëre zgjidhjen:

Prej barazimit të hiperbollës vijon $b^2 = 8$, $a^2 = 3$, kurse prej drejtëzës $y = 2x - p$ vijon $k = 2$, $n = -p$.

Duke zëvendësuat te kushti $b^2 - a^2k^2 + n^2 = 0$, kemi $8 - 3 \times 22 + (-p)^2 = 0$; $p^2 = 4$; $p = \pm 2$.

Mbaj mend!

Drejtëza $y = kx + n$ e takon hiperbollën $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ nëse kënaq kushtin

$$\boxed{a^2k^2 - b^2 = n^2}$$

Nëse drejtëza është në formën e përgjithshme $Ax + By + C = 0$, atëherë kushti për prekje është

$$a^2A^2 - b^2B^2 = C^2.$$

5 Për cilën vlerë të parametrit n, drejtëza $5x - 2y + 2n = 0$ e prek hiperbollën $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{30} = 1$?

6 Shkruaje barazimin e tangjentës së hiperbollës $x^2 - 2y^2 = 2$ e cila kalon nëpër pikën $A(3, 2)$.

Vëre zgjidhjen:

Barazimi i kërkuar i tangjentës është i formës t: $y - y_1 = k(x - x_1)$ e cile kalon nëpër pikën $A(-4, 3)$.

$$y - 2 = k(x - 3); \qquad y = kx - 3k + 2.$$

Prej barazimit të hiperbollës vijon $a^2 = 2$, $b^2 = 1$, pra prej kushtit për prekje kemi:

$$a^2k^2 - b^2 = n^2$$
$$2 \cdot k^2 - 1 = (-3k + 2)^2$$
$$2k^2 - 1 = 4 - 12k + 9k^2$$
$$7k^2 - 12k + 5 = 0$$
$$k_1 = 1,\ k_2 = \frac{5}{7},$$

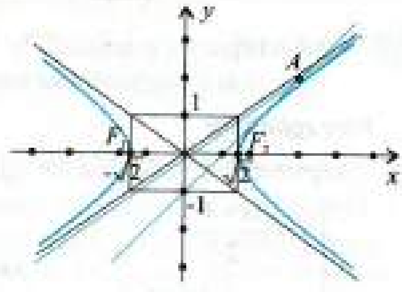


fig 3

kurse tangjentat janë:

$$t_1: y = x - 3 + 2;\ y = x - 1, \qquad \text{ose} \qquad t_2: y = \frac{5}{7}x - \frac{1}{7}, \text{ fig. 3.}$$

7 Shkruaje barazimin e tangjentës së hiperbollës $4x^2 - y^2 = 1$ e cila është paralele me drejtëzën $10x - 3y + 9 = 0$.

B Shkruaje barazimin e tangjentës së hiperbollës $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, në pikën $T(x_1, y_1)$ prej hiperbollës.

Tangjenta e kërkuar është e formës

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Koeficienti k caktohet në të njëjtën mënyrë sikurse te elipsa, pra $k_t = \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$,

kurse tangjenta është e formës $y - y_1 = \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$, e cila pas rregullimit është

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2 \text{ ose } \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

8 Shkruaje barazimin e tangjentës në pikën M prej hiperbollës:

a) $x^2 - y^2 = 40$, $M(x > 0, 9)$; b) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{64} = 1$, $M\left(-6\dfrac{1}{4}, y < 0\right)$.

Vëre zgjidhjen:

b) Koordinatat e pikës M e kënaqin barazimin e hiperbollës, pra prej këtu

kemi $\dfrac{\left(\dfrac{-25}{4}\right)^2}{25} - \dfrac{y^2}{64} = 1$ vijon $y = \pm 6$, kurse pika $M\left(-6\dfrac{1}{4}, -6\right)$.

Barazimi i tangjentës është

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2;$$

$$64x \cdot \left(\frac{-25}{4}\right) - 25y \cdot (-6) = 25 \cdot 64, \text{ ose } 8x - 3y + 32 = 0.$$

9 Në pikëprerjen e drejtëzës $3x - 2y + 6 = 0$ dhe hiperbollës $3x^2 - 4y^2 = 12$, shkruaje barazimin e tangjentës dhe normales së hiperbollës.

Vëre zgjidhjen:

Pikëprerjet do t'i caktojmë me zgjidhjen e sistemit

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x+6}{2} \\ 3x^2 - 4\left(\dfrac{3x+6}{2}\right)^2 = 12 \end{cases};\ 3x^2 - 4\cdot\frac{9x^2 + 36x + 36}{4} - 12 = 0;\ x^2 + 6x + 8 = 0.$$

Zgjidhjet e sistemit janë: $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, kurse $y_1 = 0$ dhe $y_2 = -3$.

Pikëprerjet janë: $A(-2, 0)$ dhe $B(-4,-3)$.

Barazimi i tangjentës:

në pikën $A(-2, 0)$ është:	kurse në pikën $B(-4, -3)$ është:
t_1: $3xx_1 - 4yy_1 = 12$	t_2: $3xx_1 - 4yy_1 = 12$
$3x \cdot (-2) - 4y \cdot 0 = 12$	$3x(-4) - 4y(-3) = 12$
$x + 2 = 0$	$x - y + 1 = 0$

Barazimi i normales në pikën $A(-2, 0)$, në kulmin e hiperbollës, është drejtëz e cila është normale në drejtëzën $x = -2$, ajo është vet boshti x: d.m.th. $n : y = 0$.

Koeficienti i drejtimit të tangjentës në pikën B: $k_t = -\frac{A}{B} = 1$. Prej kushtit për drejtëzat normale vijon $k_n = -\frac{1}{k_t} = -1$, pra normalja në pikën B është

$$y - y_1 = k_n(x - x_1);$$

$$y + 3 = -1 \cdot (x + 4) \text{ ose } x + y + 7 = 0.$$

Detyra

1. Cakto pikëprerjen e drejtëzës dhe hiperbollës:
   a) $20x - 9y - 60 = 0$, $16x^2 - 9y^2 = 144$; b) $2x - y - 10 = 0$, $x^2 - 4y^2 = 20$.

2. Cakto pozitën reciproke të drejtëzës dhe hiperbollës:
   a) $2x - y + 3 = 0$, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$; b) $x + y - 3 = 0$, $x^2 - 4y^2 = 12$;
   c) $x - y = 0$, $3x^2 - 4y^2 = 12$.

3. Në barazimin e drejtëzës $y = kx - \frac{5}{2}$ cakto parametrin k ashtu që drejtëza ta takon hiperbollën $x^2 - 4y^2 = 20$.

4. Është dhënë barazimi i hiperbollës $16x^2 - a^2y^2 = 16a^2$. Cakto a ashtu që drejtëza $y = 2x - 8$ të jetë tangjenta e hiperbollës.

5. Shkruaji barazimet e tangjentave të hiperbollës $16x^2 - 25y^2 = 400$ të tërhequra prej pikës $M(1, -4)$. Cakto këndin ndërmjet tangjentave.

6. Shkruaji barazimet e tangjentave të hiperbollës $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ të cilat janë:
   a) paralele me drejtëzën $x + y - 7 = 0$; b) normale me drejtëzën $x - 2y = 0$.

7. Cakto barazimin e tangjentës së hiperbollës $3x^2 - 4y^2 = 12$ e cila në boshtet e koordinatave prenë segmenta me gjatësi të barabarta.

8. Në pikëprerjet e drejtëzës $y = 3$ dhe hiperbollës $16x^2 - 25y^2 = 400$ janë tërhequr normale të hiperbollës. Cakto syprinën e trekëndëshit të kufizuar me normalet dhe drejtëzën e dhënë.

9. Të shkruhet barazimi i hiperbollës fokusët e së cilës janë në pikat $F(\pm3, 0)$, kurse e prek drejtëzën $2x - y - 4 = 0$.

10. Shkruaje barazimin e tangjentës së hiperbollës $x^2 - 2y^2 = 4$ e cila me drejtëzën $x + 7y - 9 = 0$ formon kënd prej 45°.

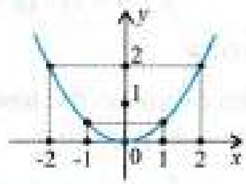
21 BARAZIMI I PARABOLLËS

Kujtohu!

- Grafiku i funksionit $y = x^2$ është parabollë kulmi i së cilës është në fillimin e koordinatave.

- Në vizatim është paraqitur grafiku i funksionit $y = \frac{1}{2}x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



- Grafiku i funksionit katror $y = ax^2$ është parabollë me kulmin në fillimin e koordinatave.
Nëse $a > 0$, parabolla është kthyer me hapjen lartë.
Nëse $a < 0$, parabolla është kthyer me hapjen poshtë.

- Kujtohu për vetitë e funksionit katror $y = ax^2$.

A 1. Vizato grafikun $y^2 = 2x$.

Vëre zgjidhjen:

x	0	1	2
y	0	$\pm\sqrt{2}$	±2

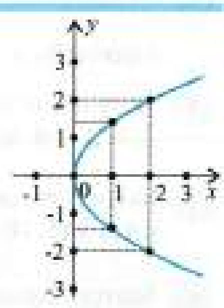


fig 1

Vëre, grafiku $y^2 = 2x$, fig. 1, është parabollë simetrike në lidhje me boshtin x.

Për parabollën vlen ky

Përkufizim: Parabolla është vend gjeometrik pikash në rrafsh të cilat janë një lloj të larguara prej një pike fiksuar (fokusi) dhe një drejtëze fiksuar (direktrisa).

Duhet të shkruajmë barazimin e parabollës që do t'i kënaq koordinatat e çfarëdo pike të parabollës (dhe vetëm ato).

Për këtë qëllim vendosim sistem kënddrejtë koordinativ, ashtu që boshti x të kalon nëpër fokusin dhe të jetë normal në direktrisën, kurse fillimi i koordinatave të jetë ndërmjet fokusit dhe direktrisës, fig. 2.

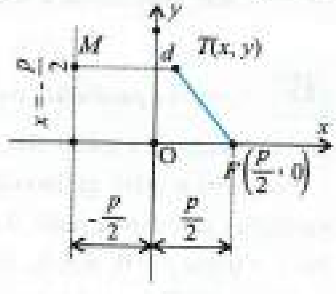


fig. 2

Largësia prej fokusit deri te direktrisa quhet parametër dhe shënohet me p, pra $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, kurse barazimi i direktrisës është $x=-\frac{p}{2}$.

Nëse pika $T(x, y)$ është çfarëdo pikë e parabollës, atëherë sipas përkufizimit për parabollën kemi $\overline{FT}=\overline{MT}$.

Pasi $\overline{FT}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2}$; $\overline{MT}=\frac{p}{2}+x$, kemi:

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x;\ \left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2=\left(\frac{p}{2}+x\right)^2;$$

$$\frac{p^2}{4}-px+x^2+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},\ \text{d.m.th.}\ \boxed{y^2=2px}$$

Mbaj mend!

Nëse fokusi i parabollës është boshti x, atëherë $y^2=2px$ është barazim i parabollës, i cili quhet **barazim kanonik** ose **barazim kulmor i parabollës**.

2 Shkruaje barazimin e parabollës nëse fokusi i saj është $F(2{,}5;\ 0)$.

Vëre zgjidhjen

Pasi $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, vijon se $\frac{p}{2}=2{,}5$; d.m.th. $p=5$, pra barazimi i parabollës është $y^2=2px$, d.m.th. $y^2=10x$.

3 Shkruaje barazimin e parabollës boshti i simetrisë i së cilës është boshti x, kurse kalon nëpër pikën $A(2, 4)$.

Vëre zgjidhjen

Pika shtrihet në parabollën $y^2=2px$, pra duke zëvendësuar kemi $4^2=2p\cdot 2$, $p=4$, kurse barazimi i parabollës është $y^2=2\cdot 4\cdot x$ ose $y^2=8x$.

4 Cakto koordinatat e fokusit dhe barazimin e direktrisës së parabollës $y^2 = 5x$.

B

Formën e parabollës do ta shqyrtojmë prej analizës së barazimit të saj.

Për barazimin e parabollës $y^2 = 2px$ kemi:

1. Parametri p është gjithmonë numër pozitiv, d.m.th. $p > 0$, pra ordinatat e pikave prej parabollës janë numra realë, d.m.th. $y \in \mathbb{R}$ vetëm nëse $x \geq 0$.

Për $x = 0$ dhe $y = 0$, d.m.th. fillimi i koordinatave është kulmi i parabollës.

2. Nëse pika $T(x, y)$ shtrihet në parabollë, atëherë pika $T_1(x, -y)$, gjithashtu, është pikë e parabollës. Domethënë parabolla është simetrike në lidhje me boshtin x, fig. 3.

Nëse fokusi i parabollës është $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, kurse direktrisa $x = \frac{p}{2}$, atëherë barazimi i parabollës është i formës $y^2 = -2px$, fig. 4.

Nëse fokusi i parabollës është në boshtin y, d.m.th. $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, kurse direktrisa $y = -\frac{p}{2}$, atëherë parabolla është e formës $x^2 = 2py$, fig. 5.

Nëse fokusi i parabollës është $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$, kurse direktrisa është $y = \frac{p}{2}$, atëherë parabolla është e formës $x^2 = -2py$, fig. 6.

5 Cakto koordinatat e fokusit dhe barazimin e direktrisës së parabollës:

a) $y^2 = 4x$, b) $y^2 = -8x$; c) $x^2 - 6y = 0$; g) $x^2 + 10y = 0$.

Vizato grafikun e parabollës.

Vëre zgjidhjen

a) Prej barazimit $y^2 = 4x$ vijon $2p = 4$, $p = 2$, pra $F(1, 0)$ dhe $x = -1$ (fig. 3).

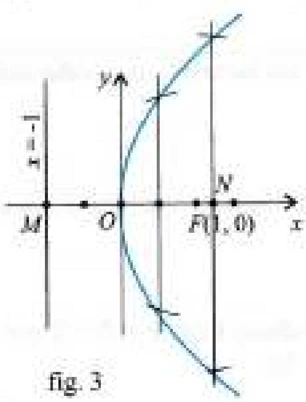


fig. 3

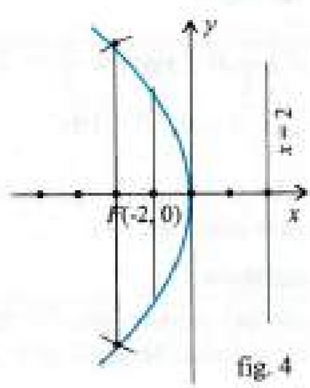


fig. 4

b) Prej barazimit $y^2 = -8x$ vijon se parabolla është e përkufizuar vetëm për $x \leq 0$, d.m.th. $2p = 8$, $p = 4$, kurse $F(-2, 0)$ dhe $x = 2$ (fig. 4).

c) Prej barazimit $x^2 = 6y$ vijon se boshti i simetrisë është boshti y, d.m.th. fokusi i parabollës është në boshtin y, fig 5, $2p = 6$, $p = 3$, pra $F\left(0, \frac{3}{2}\right)$ dhe $y = -\frac{3}{2}$ është direktrisa.

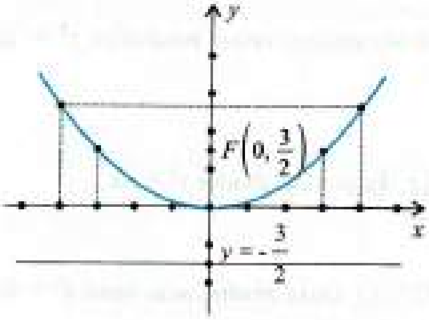


fig. 5

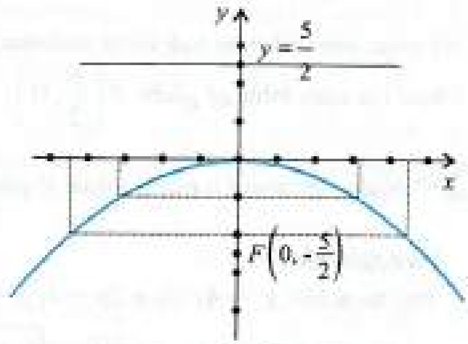


fig. 6

ç) Prej barazimit $x^2 = -10y$ vijon se parabolla është përkufizuar vetëm për $y \leq 0$, d.m.th. $2p = 10$, $p = 5$, kurse $F\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ dhe $y = \frac{5}{2}$, fig. 6.

Barazimi $x^2 = 2py$, mund të shkruhet në këtë formë $y = \frac{1}{2p}x^2$, domethënë barazimi i parabollës është gjithashtu funksion katror $y = ax^2$, ku $a = \frac{1}{2p}$.

- Vëreve një konstruksion gjeometrik të parabollës, fig. 3.
- Direktrisa le ta prenë boshtin e simetrisë në pikën M.
- Prej çfarëdo pike N të boshtit të simetrisë tërheqim normale në të.
- Pikat në të cilat vija rrethore $k\left(F, r = \overline{MN}\right)$ e prenë normalen e tërhequr prej pikës N janë pika të parabollës.
  Në të njëjtën mënyrë caktohet çfarëdo numër i pikave të parabollës.

6 Shkruaje barazimin e parabollës, nëse:

a) $F(-3, 0)$; b) $F(0, -4)$; c) barazimi i direktrisës është $y + 2 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

- a) Prej pozitës së fokusit vijon se parabolla gjendet majtas prej boshtit y, pra barazimi i saj është i formës $y^2 = -2px$.

Pasi $\frac{p}{2} = 3$, d.m.th. $p = 6$ barazimi i parabollës është $y^2 = -2 \cdot 6 \cdot x = -12x$.

b) Prej $F(0, -4)$ vijon $\frac{p}{2} = 4$, $p = 8$, kurse barazimi është i formës $x^2 = -2py$, d.m.th. $x^2 = -16y$.

c) Prej barazimit të direktrisës $y = -2$ vijon $-\frac{p}{2} = -2$, d.m.th. $p = 4$, kurse barazimi i parabollës është $x^2 = 2py$, $x^2 = 8y$.

Më tutje, nëse ndryshe nuk është theksuar, do të shqyrtojmë vetëm parabollën $y^2 = 2px$; fokusi i së cilës është në pikën $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

7 Njehso gjatësinë e rrezes fokale të pikës $A(x, 4)$, prej parabollës $y^2 = 4x$.

Vëre zgjidhjen

Prej barazimit $y^2 = 4x$ vijon $2p = 4$, $p = 2$, $F(1, 0)$. Duke zëvëndësuar kemi $4^2 = 4x$; $x = 4$, Pika $M(4, 4)$, kurse $\overline{FM} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2} = 5$.

8 Shkruaje barazimin e rrezes fokale të parabollës $y^2 = 32x$ e cila kalon nëpër pikën abshisa e së cilës është katër herë më e vogël se ordinata.

Vëre zgjidhjen

Prej kushtit vijon $x = \frac{1}{4}y$, d.m.th. $y = 4x$, pra duke zëvëndësuar në barazimin e parabollës kemi $(4x)^2 = 32x$; $16x^2 - 32x = 0$; $x = 0$ ose $x = 2$. Prej kushtit është $x \neq 0$. Për $x = 2$, $y = 4 \cdot 2 = 8$, pra $A(2, 8)$ është pika e kërkuar.

Prej parabollës vijon $2p = 32$, $p = 16$, kurse fokusi $F(8, 0)$.

Rreze fokale është drejtëz e cila kalon nëpër pikat $F(8, 0)$ dhe $A(2, 8)$, d.m.th.

$$FA: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1);\ y = \frac{8}{2-8}(x - 8);$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3} \text{ ose } 4x + 3y - 32 = 0.$$

Detyra

1. Shkruaje barazimin e parabollës nëse:

   a) boshti i së cilës është boshti x, kurse kalon nëpër $M(9, 6)$.

   b) boshti i së cilës është boshti y, kurse kalon nëpër $N(4, 8)$.

2. Shkruaje barazimin e parabollës fokusi i së cilës është $F(-7, 0)$, kurse kulmi është në fillimin e koordinatave.

3. Shkruaje barazimin e parabollës $y^2 = 2px$, e cila kalon nëpër pikën

a) $A(4, 4)$; b) $B(-1, 2)$; c) $C(-2, -6)$.

4. Cakto fokusin dhe barazimin edirektrisës së parabollës $y^2 = 18x$.

5. Cakto gjatësinë e rrezes fokale të pikës $M(x, 6)$ të parabollës $y^2 = 9x$.

6. Në parabollën $y^2 = 16x$ të caktohet pika rreze fokale e të cilës është 13.

7. Nëpër fokusin e parabollës $y^2 = 10x$ është tërhequr drejtëz normale në boshtin e saj. Cakto gjatësinë e kordës së parabollës.

8. Nëpër fokusin e parabollës $y^2 = 8x$ dhe pikës së saj $N(4,5;\ y)$, $y > 0$ është tërhequr drejtëza. Shkruaje barazimin e drejtëzës.

9. Rreth trekëndëshit barakrahas me brinjë $a = 6$ dhe lartësi $x = 4$ është jashtashkruar parabolla. Shkruaje barazimin e parabollës nëse maja e trekëndëshit është në fillimin e koordinatave, kurse baza është normale në boshtin x.

10. Në parabollën $y^2 = 6x$ është brendashkruar trekëndëshi barabrinjës. Njëri kulm i trekëndëshit është në kulmin e parabollës, kurse njëra brinjë është normale në boshtin x. Cakto syprinën e trekëndëshit.

22 POZITA RECIPROKE E DREJTËZËS DHE PARABOLLËS

Kujtohu!

- Si e caktojmë pozitën reciproke të drejtëzës dhe vijës rrethore, drejtëzës dhe elipsës, drejtëzës dhe hiperbollës?
- Si janë rrënjët e barazimit katror $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, nëse $D > 0$, $D < 0$ ose $D = 0$? Nëse $D = 0$, atëherë $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

A 1 Cakto pozitën reciproke të drejtëzës dhe parabollës:

a) $2x + y - 12 = 0$, $y^2 = 12x$;

b) $x - y + 2 = 0$, $y^2 = 8x$;

c) $2x - y + 3 = 0$, $y^2 = 5x$.

Vëre zgjidhjen:

- Duke e zgjidhur sistemin e barazimeve do ta caktojmë pozitën e drejtëzës dhe parabollës.

a) $\begin{cases} y = 12 - 2x \\ y^2 = 12x \end{cases}$; $(12 - 2x)^2 = 12x$; $x^2 - 15x + 36 = 0$; $x_{1/2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 36}}{2}$;

$x_1 = 12, y_1 = -12$; $A(12, -12)$; $x_2 = 3, y_2 = 6$; $B(3,6)$.

Drejtëza e prenë parabollën.

b) Drejtëza e prek parabollën, d.m.th. është tangjentë e parabollës.

c) Drejtëza dhe parabolla nuk kanë pika të përbashkëta.

2 Cakto kushtin ashtu që drejtëza $y = kx + n$ e prek, e prenë ose nuk ka pika të përbashkëta me parabollën $y^2 = 2px$.

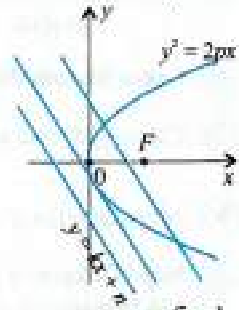


fig. 1

Vëre zgjidhjen:

Prej sistemit $\begin{cases} y = kx + n \\ y^2 = 2px \end{cases}$ kemi: $(kx + n)^2 = 2px$;

$k^2x^2 + 2(kn - p)x + n^2 = 0$.

Diskriminanta e barazimit $D = (2(kn - p))^2 - 4k^2n^2$;

$$D = 4p(p - 2kn).$$

Pasi $p > 0$, shenja e diskriminantës varet prej shprehjes $p - 2kn$.

Mbaj mend!

1. Nëse $D > 0$, d.m.th. $p - 2kn > 0$, atëherë drejtëza e prenë parabollën.

2. Nëse $D = 0$, d.m.th. $p - 2kn = 0$, atëherë drejtëza e prek parabollën, drejtëza është tangjentë e parabollës.

3. Nëse $D < 0$, d.m.th. $p - 2kn < 0$, atëherë drejtëza dhe parabolla nuk kanë pika të përbashkëta, fig. 1.

3 Cakto pozitën reciproke të parabollës $y^2 = 4x$ dhe drejtëzës:

a) $2x + 3y + 4 = 0$; b) $x - 3y + 9 = 0$; c) $3x - y + 1 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

a) Prej barazimit të drejtëzës vijn $k = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{3}$, $n = -\frac{C}{B} = -\frac{4}{3}$, kurse prej parabollës vijon

$2p = 4$, d.m.th. $p = 2$, pra $p - 2kn = 2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} > 0$.

Domethënë, drejtëza e prenë parabollën.
Cakto koordinatat e pikëprerjeve me zgjidhjen e sistemit.

4 Për cilën vlerë të parametrit k drejtëza $y = kx + 3$:

a) e prenë parabollën $y^2 = 6x$; b) e prek parabollën $y^2 = 4x$;

c) nuk kanë pika të përbashkëta me parabollën $y^2 = 3x$.

Vëre zgjidhjen:

c) Prej parabollës vijon $2p = 3$, $p = \frac{3}{2}$, pra prej kushtit $p - 2kn < 0$ vijon

$$\frac{3}{2} - 2 \cdot k \cdot 3 < 0; \quad 3 - 12k < 0; \quad k > \frac{1}{4}.$$

5 Shkruaje barazimin e tangjentës së parabollës $y^2 = 8x$ të tërhequr prej pikës $M(5, -7)$.

Vëre zgjidhjen:

Tangjentat e kërkuara janë:

$$t: y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y + 7 = k(x - 5)$$

$$y = kx - 5k - 7.$$

Prej parabollës vijon $2p = 8$, $p = 4$, pra duke zëvëndësuar në kushtin për prekje kemi:

$$4 - 2k(-5k - 7) = 0$$

$$5k^2 + 7k + 2 = 0$$

$$k_1 = -\frac{2}{5},\ t_1: y = -\frac{2}{5}x - 5;$$

$$k_2 = -1,\quad t_2: y = -x - 2, \text{ fig.2.}$$

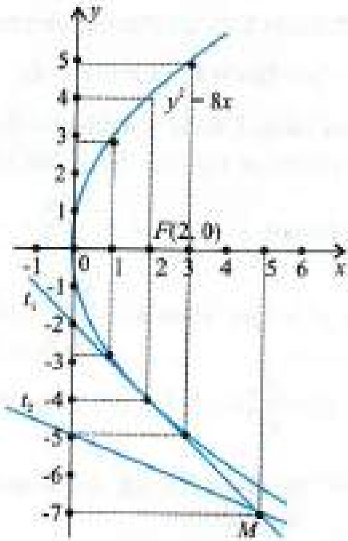


fig. 2

6 Shkruaje barazimin e tangjentës së parabollës $y^2 = 8x$ e cila është paralele me drejtëzën $p: 2x + 2y - 3 = 0$.

Vëre zgjidhjen:

Prej kushtit për paralelizëm kemi $kt = kp = -1$.
Tangjenta e kërkuar është

$t: y = kx + n$, d.m.th. $y = -x + n$.

Prej kushtit për prekje kemi:
$p - 2kn = 0$ dhe $p = 4$ kemi $4 - 2 \cdot (-1) \cdot n = 0$, $n = -2$, pra $t: y = -x - 2$, fig.3.

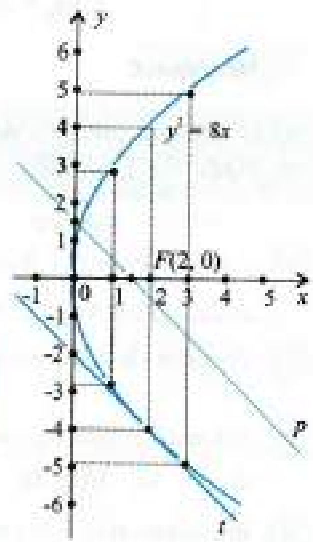


fig. 3

Mbaj mend!

Drejtëza $y = kx + n$ e prek parabollën $y^2 = 2px$ nëse vlen kushti

$$p - 2kn = 0.$$

Nëse drejtëza është në formën e përgjithshme $Ax + By + C = 0$, atëherë kushti për prekje është

$$pB^2 - 2AC = 0.$$

B **7** Shkruaje barazimin e tangjentës së parabollës $y^2 = 2px$, në pikën $T(x_1, y_1)$ prej parabollës.

Vëre zgjidhjen:

Tangjenta e kërkuar është

$$t: y - y_1 = k(x - x_1);\ \ y = kx + y_1 - kx_1.$$

Koeficientin k do ta caktojmë prej kushtit për prekje.

$$p - 2kn = 0, \text{ za } n = y_1 - kx_1, \quad p - 2k(y_1 - kx_1) = 0, \quad 2x_1k^2 - 2y_1k + p = 0.$$

Pasi në pikën T mund të tërhiqet vetëm një tangjentë, domethënë barazimi sipas të panjohurës k ka vetëm një zgjidhje. Kjo është e mundshme vetëm nëse $D = 0$.

Në këtë rast $k_1 = k_2 = k = \dfrac{2y_1}{2 \cdot 2x_1} = \dfrac{y_1 y_1}{2x_1 y_1} = \dfrac{y_1^2}{2x_1 y_1}$.

Prej $y_1^2 = 2px_1$ vijon $k = \dfrac{2x_1 p}{2x_1 y_1} = \dfrac{p}{y_1}$ pra barazimi i tangjentës është:

$y - y_1 = \dfrac{p}{y_1}(x - x_1)$ i cili pas rregullimt është i formës $yy_1 = p(x + x_1)$.

8 Në pikën $T(1, y)$, $y > 0$ prej parabollës $y^2 = 64\,x$ të shkruhet barazimi i tangjentës së parabollës.

Vëre zgjidhjen:

Pika e kërkuar është $y^2 = 64 \cdot 1$, $y = \pm 8$, pra $T(1, 8)$.
Prej parabollës $y^2 = 64x$ vijon $2p = 64$, $p = 32$, kurse tangjenta

$$t: yy_1 = p(x + x_1); \quad y \cdot 8 = 32(x + 1); \quad y = 4x + 4.$$

Mbaj mend!

Barazimi i tangjentës së parabollës $y^2 = 2px$ në pikën $T(x_1, y_1)$ të parabollës është i formës $yy_1 = p(x + x_1)$.

Detyra

1. Cakto pikëprerjet e drejtëzës dhe parabollës:
a) $2x + y - 4 = 0$, $y^2 = 4x$; b) $2x + y - 2 = 0$, $3y^2 = 16x$.

2. Për cilën vlerë të parametrit n drejtëza $5x + 2y + n = 0$ e prek parabollën $y^2 = 20x$.

3. Shkruaje tangjentën e parabollës të tërhequr prej pikës M, nëse
a) $y^2 = 8x$, $M(6, 8)$; b) $y^2 = -9x$, $M(3, -3)$.

4. Prej pikës $A(-2, -2)$ janë tërhequr tangjentat e parabollës $y^2 = 16x$. Shkruaji:
a) barazimet e tangjentave; b) cakto këndin ndërmjet tangjentave;

5. Shkruaj barazimin e tangjentës së parabollës $y^2 = 12x$ e cila është:
a) paralele me drejtëzën $3x - y + 5 = 0$; b) normale me drejtëzën $2x + y - 7 = 0$;
c) e cila me drejtëzën $4x - 2y + 9 = 0$ formon kënd prej $45°$.

6. Shkruaj barazimin e tangjentës dhe normales së parabollës $y^2 = 9x$ në pikën $T(1, -3)$.

PËRGJIGJE, UDHËZIME, ZGJIDHJE

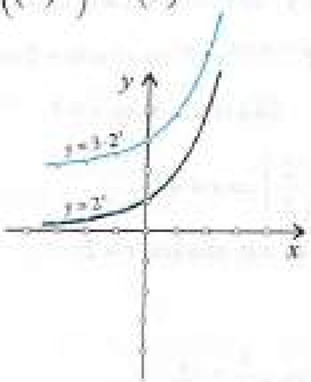
TEMA 1 FUNKSIONI EKSPONENCIAL DHE FUNKSIONI LOGARITMIK

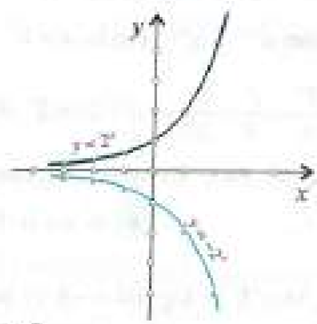
1 (1) a) $-\frac{5}{2}$; b) -1. (2) a) Me krahasimin e thyesave $\frac{5}{7}$ dhe $\frac{6}{8}$ fitojmë: $\sqrt[7]{2^5} < \sqrt[8]{2^6}$; b) $\sqrt[3]{5^4} < \sqrt[4]{5^7}$; c) $\pi^{\sqrt{2}} < \pi^{\sqrt{3}}$; ç) $3^{\sqrt[3]{6}} < 3^{\sqrt{6}}$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$.

(3) a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{8}} \cdot 4^{\sqrt{2}} \cdot 8^{\sqrt{8}} = 2^{-2\sqrt{2}} \cdot 2^{2\sqrt{2}} \cdot 2^{6\sqrt{2}} = 2^{6\sqrt{2}} = 64^{\sqrt{2}}$; b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\sqrt{3}} \cdot 4^{\sqrt{12}} = 2^{2\sqrt{3}} \cdot 2^{4\sqrt{3}} = 2^{6\sqrt{3}} = 64^{\sqrt{3}}$; c) $\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{3}} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{6} = 3^2 = 9$. (4) a) $\left(\left(\sqrt[4]{4}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-3\sqrt{8}} = \left(\sqrt[4]{4}\right)^{-12} = 4^{-3} = \frac{1}{64}$;

b) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$. (5) Ritëse janë b) dhe ç). (7)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8





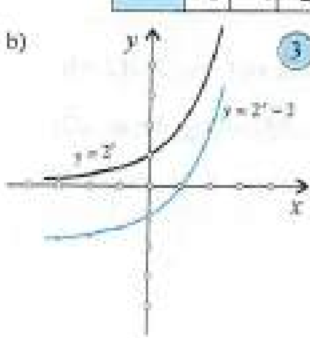
2 (1) a) $(1,5)^{\frac{1}{2}} > (1,5)^{\frac{2}{5}}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; c) $7^{\pi} > 7^{\sqrt{3}}$.

(2) a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x-2	$-\frac{15}{8}$	$-1\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	2	6

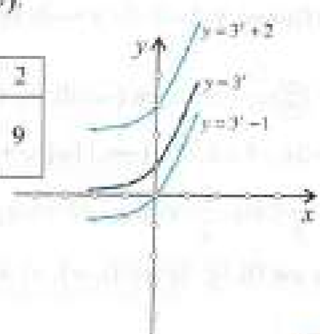
c) 1) $x=1$; 2) $x \in (1,\infty)$; 3) $x \in (-\infty,1)$; 4) $x \in (0,3)$.

b)



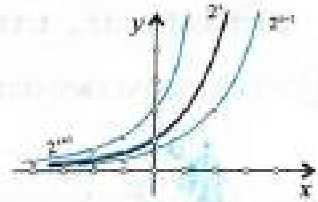
(3) a)

x	-2	-1	0	1	2
3^x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



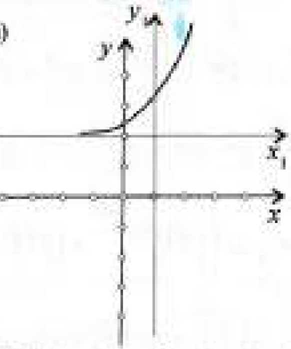
(4) a) $D_f=\mathbb{R}, V_f=(2,\infty)$, monotonisht rritet në të fushën, pozitive është në tërë fushën, zero nuk ka; b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-1$.

$D_f=\mathbb{R}, V_f=(-1,\infty)$, monotonisht zvogëlohet në tërë fushën.

$f(x)<0,\ x=2,\ f(x)=0.$

Për $x\in(-\infty,2),\ f(x)>0;\ x\in(2,\infty)$.

a)



3

(1) a) $x=11$; b) $x=-15$, c) $x=0$. (2) a) $5^{x^2-3x+1}=5^{-1}\Rightarrow x^2-3x+2=0,\ x_1=2$ ose $x_2=1$; b) $3^{x^2-3x+3,5}=3^{3,5}, x_1=0$ ose $x_2=3$; (3) a) $2^{(x+2)(x+1)}=2^6\Rightarrow x^2+3x+2=6$, b) $x_1=1$ ose $x_2=2$; fitohet $6^{x+2}=6^{2x+1}$, prej ku $x=1$. (4) a) $x=3$; b) $x=3$.

(5) a) Fitohet $\frac{2^x}{2}-\frac{2^x}{8}=\frac{3^x}{9}-\frac{3^x}{27}\Rightarrow 3^4\cdot 2^x=2^4\cdot 3^x\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^4\Rightarrow x=4$;

(6) a) Du ke zëvendësuar $y=2^x$ fitohet barazim katror $y^2+7y-44=0$, prej këtu $x=2$;

b) $x_1=3,\ x_2=1$. (8) a) $x=0$, b) $x=1$.

4

(1) a) $\log_6 36=2$; b) $\log_{\frac{1}{4}}64=-3$; c) $\log_7 1=0$; ç) $\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{2}=-2$.

(2) a) $\log_4 8=x\Rightarrow 4^x=8\Rightarrow 2^{2x}=2^3\Rightarrow 2x=3\Rightarrow x=\frac{3}{2}$; b) $x=-3$; c) $x=-\frac{1}{2}$;

ç) $x=-\frac{2}{3}$. (3) a) $x=2^6=64$; b) $x=\frac{1}{8}$; c) $x=\frac{1}{27}$; ç) $x=\frac{1}{4096}$. (4) a) 4; b) 5; c) $\frac{1}{2}$; ç) 2.

(5) a) Fitojmë $3\cdot 2-2\cdot 3-3=-3$; b) 24. (6) a) 3; b) 0. (7) a) -2; b) 150; c) 3.

5

(2) a) $-x>0,\ x\in(-\infty,0)$; b) $1-x>0,\ x\in(-\infty,1)$; c) $x^2-4>0,\ x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$;

ç) $x^2-3x-4>0,\ x\in(-\infty,1)\cup(4,\infty)$. (3) Rritëse janë b) dhe c). (4) a) $\log_2 3>\ln_2\sqrt{2}$;

b) $\log_3\frac{1}{5}<\log_3\frac{1}{2}$; c) $\log_2\sqrt{3}<\log_2\pi$. (5) a) $a>b$; b) $a<b$; c) $a>b$; g) $a>b$.

(6) a) $a\in(0,1)$; b) $a\in(1,\infty)$; c) $a\in(1,\infty)$.

6 (2) a) $\log x = \log 5 + 2\log a + 3\log b$; b) $\log x = \log 8 + 2\log a + 3\log b - \log 5$;
c) $\log x = \log\left(a^2+2\right) - \log(b-3)$. (3) a) $\log x = \log a + \frac{1}{2}\log a = \frac{3}{2}\log a$;
b) $\log x = 2\log a + \frac{1}{2}\log a - \log 3 - \frac{2}{3}\log b = \frac{5}{2}\log a - \log 3 - \frac{2}{3}\log b$.
(4) a) $\log x = \log 2 + 3\log(a+b)$; b) $\log x = \log 8 + 3\log a + 2\log(a-b)$;
c) $\log x = \log 2 + 2\log(a+1) - \log(a+2) - \log(a-2)$. (5) a) $\log x = \log a +$
$+\frac{1}{2}\left(\log a + \frac{1}{2}\log a\right) = \frac{7}{4}\log a$; b) $\log x = \log 2 + 2\log a + \log b + \frac{1}{2}\left(\log a + \frac{1}{2}\log b\right) -$
$-\frac{1}{3}\log a - \frac{1}{3}\log b = \log 2 + \frac{13}{6}\log a + \frac{11}{12}\log b$. (6) a) $\log p = \frac{1}{2}\left(\log s + \log(s-a) +\right.$
$\left.+\log(s-b) + \log(s-c)\right)$; b) $\log x = \frac{1}{3}\left(\log a + 2\log b - \log 5 - 2\log(a-b)\right)$. (7) $x = \frac{m^2n^4}{a^3b^3}$.
(8) $x = \frac{5\cdot 4^2}{8n^3m^2} = \frac{10}{n^3m^2}$. (9) $x = \sqrt[3]{\frac{(a-2b)^2}{a+2b}}$. (10) $x = \frac{(a+b)^2}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}\cdot a^2$. (11) a) $\log_6 4 + \log_6 9 =$
$= \log_6 36 = 2$; b) $\log_2 4 + \log_{12} 36 = \log_{12} 144 = 2$; c) $\log_{10} 500 - \log_{10} 5 = \log^{10}\frac{500}{5} = 2$;
ç) $\log_5 \frac{1}{4}\cdot 100 = 2$.

7 (1) a) $\log_2 3\cdot\log_9 16 = \log_2 3\cdot\frac{\log_2 2^4}{\log_2 3^2} = 2$; b) $\log_2\sqrt{5}\cdot\log_{25}\sqrt[3]{2} = \frac{1}{2}\log_2 5\cdot\frac{\frac{1}{3}\log_2 2}{2\log_2 5} = \frac{1}{12}$.
(2) a) 6; b) 2. (5) a) $\log_a b + \log_{\frac{1}{a}} b = \log_a b + \frac{\lg_a b}{\lg_a \frac{1}{a}} = \log_a b - \log_a b = 0$;
b) $3\log_b a + 2\log_b \frac{1}{a} = 3\log_b a + 2\log_b a^{-1} = \log_b a$; v) $\log_b a - \log_b \frac{1}{a} - \log_b a^2 =$
$= \log_b a + \log_b a - 2\log_b a = 0$.

8 (1) a) $-0,7488$; b) $1,8507$; c) $0,6741$. (2) a) $5,7076$; b) $1804,8$; c) $0,0018048$;
ç) $0,044235$. (4) a) $x = \lg 172$; b) $x = \lg 0,524$; c) $x = \frac{\lg 3}{\lg 2}$; ç) $x = \frac{\lg 5}{\lg 2 - \lg 3}$.
(6) Le të jetë $x = 2^{30}$. $\lg x = 30\lg 2 = 30\cdot 0,30103 = 9,0309$. Domethënë numri do të jetë njëshifror. (8) a) $\lg x = \frac{1}{2}\left(3\lg 34,52 + \lg 0,73 - 3\lg 0,25\right)$; b) $\lg x = 0,0009\lg 0,0009$;
c) $\lg x = 3,42\lg 3,42$; ç) $\lg x = \frac{1}{10}\lg 10$.

9 (1) a) $\frac{9}{2}$; b) 0; 5. (2) a) $D = \left(\frac{5}{3},\infty\right)$, $x = 5$; b) $D = \left(\sqrt[3]{56},\infty\right)$, $x = 4$. (3) a) 1;

b) 1. (4) a) 1; b) 3. (5) a) 2; b) 3. (6) a) $\frac{11}{3}$; b) 3. (7) a) $10; \sqrt{1000}$; b) 10;100.

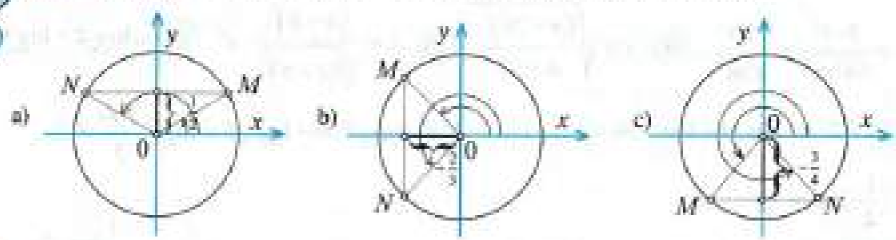
(8) a) $\sqrt{5}; 25$; b) $x = 2^{\log_3 a}$. (9) a) 16, b) 4. (10) a) $100; \frac{1}{10}$; b) $1000; \frac{1}{10}$.

TEMA 2 — TRIGONOMETRIA

1 (1) a) $90^0 + 1 \cdot 360^0$; b) $196^0 + (-1) \cdot 360^0$; c) $120^0 + 8 \cdot 360^0$; ç) $80^0 + (-3) \cdot 360^0$, ose $-2 \cdot 360^0 - 280^0$. (2) a) 30^0; b) 180^0; c) 360^0. (3) $28\pi = 87{,}96\,\text{cm}$. (4) a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{3\pi}{8}$; c) $\frac{7{,}068\pi}{6}$; ç) $\frac{59\pi}{50}$; d) $\frac{48\pi}{25}$. (5) a) 30^0; b) 60^0; c) 135^0; ç) $157^0\,30'$; d) $229^0\,10'$.

2 (1) a) $2 \cdot 360^0 + 40^0$; b) $4 \cdot 360^0 - 20^0$; c) $3 \cdot 360^0$; ç) $5 \cdot 360^0 + 30^0$.

(2)



(3) a) $\sin 115^0 \cdot \cos 160^0 < 0$; b) pozitiv; c) pozitiv; ç) pozitiv.

3 (1) a) $\sin 25^0 > \sin 15^0$; b) $\cos 120^0 > \cos 130^0$; c) $\sin 20^0 > \sin 320^0$, pasi $\sin 20^0 > 0$, kurse $\sin 320^0 < 0$. ç) $tg 38^0 < tg 62^0$; d) $ctg 280^0 > ctg 300^0$. (2) a) dhe c) negativ; b), ç) pozitiv. (3) a) $\sin 225^0 < \sin 212^0 < \sin 126^0 < \sin 123^0$; b) $tg 154^0 < tg 142^0 < tg 45^0 < tg 48^0 < tg 52^0$. (4) a) $\sin 48^0 - \sin 64^0 < 0$ dh $tg 15^0 - tg 50^0 < 0$, pra $\frac{\sin 48^0 - \sin 64^0}{tg 15^0 - tg 50^0} > 0$. b) negativ.

(5) $ctg 320^0 < 0$, $tg 214^0 > 0$, $tg 150^0 + tg 165^0 < 0$ si shumë të numrave negativ pra $\frac{ctg 320^0 \cdot tg 214^0}{tg 150^0 + tg 165^0} > 0$. (6) a) 1; b) -1; c) 0; ç) 1; d) 0.

4 (1) a) 0; b) 0; c) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. (2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $tg\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $ctg\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. (3) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $tg\alpha = \frac{12}{5}$, shprehja e ka vlerën $-\frac{19}{29}$. (4) a) $1 - \sin\alpha\cos\alpha$; b) $(1 + \sin\alpha\cos\alpha) \cdot$

b) $\cdot(\sin\alpha - \cos\alpha)$.

5 (1) a) $\frac{1}{2}(1 + 2\sqrt{2})$; b) $\frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{2})$. (2) a) $\sin\alpha$;

b) $\operatorname{tg}(45^0+\alpha)=\operatorname{ctg}(90^0-45^0-\alpha)=\operatorname{ctg}(45^0-\alpha)$ ose $\operatorname{tg}(45^0-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(45^0+\alpha)=$

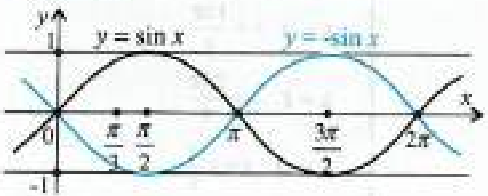
$=\operatorname{tg}(45^0-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(45^0-\alpha)=1.$ **3** b) $\cos(360^0+215^0)\cdot\cos(2\cdot360^0+145^0)+$

$\sin(360^0+35^0)\cdot\sin(360^0+45^0)+tg(2\cdot180^0+66^0)\cdot tg(6\cdot180^0+24^0)=$

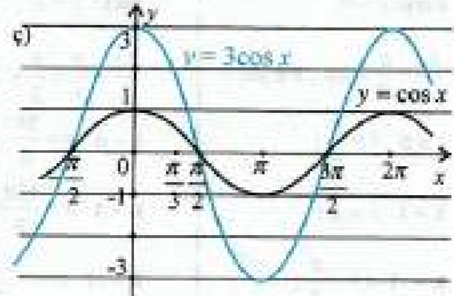
$\cos(180^0+35^0)\cdot\cos(180^0-35^0)+\sin35^0\cdot\sin(180^0-35^0)+\operatorname{tg}66^0\cdot\operatorname{ctg}(90^0-24^0)=$

$=\cos^2 35^0+\sin^2 35^0+1=2.$

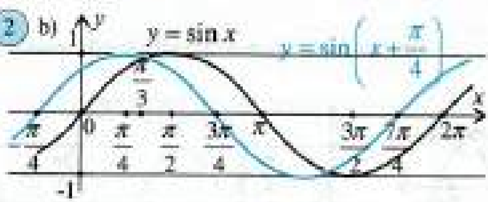
7 **1** a)



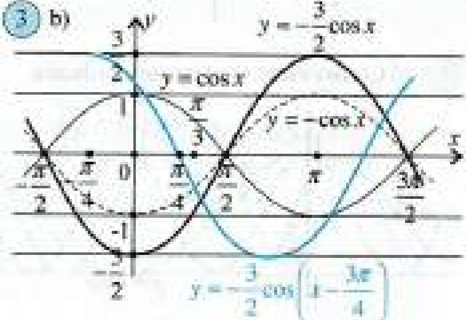
ç)



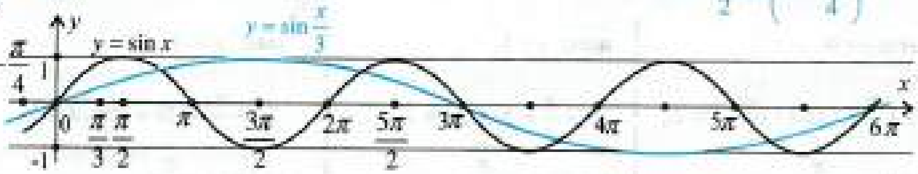
2 b)



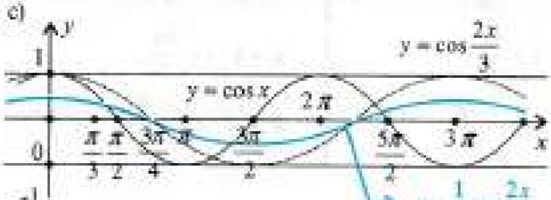
3 b)



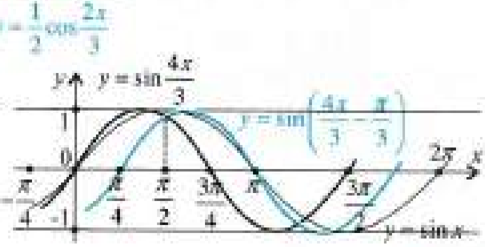
8 **1** b)



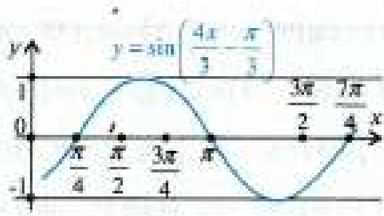
2 c)



9 **1** b) Grafiku është vizatuar me translacion.



Grafiku është vizatuar me pikat karakteristike.



Zero: $y=0$:

$\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{3}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

k = 0 $x=\frac{\pi}{4}$;

k = 1 $x=\pi$;

k = -1 $x=-\frac{\pi}{2}$;

max: $y=1$:

$\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

k = 0 $x=\frac{5\pi}{8}$;

k = 1 $x=\frac{13\pi}{8}$;

k = -1 $x=-\frac{7\pi}{8}$;

min: $y=-1$:

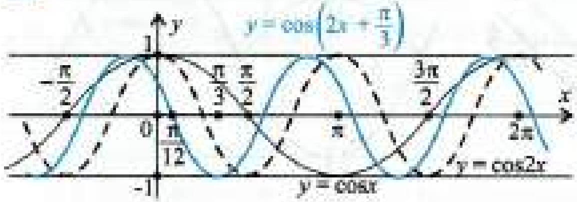
$\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

k = 0 $x=\frac{11\pi}{8}$;

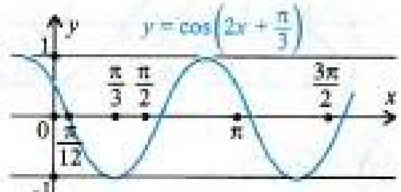
k = 1 $x=\frac{23\pi}{8}$;

k = -1 $x=-\frac{\pi}{8}$.

2 b) Grafiku është vizatuar me translacion.



Grafiku është vizatuar me pika karakteristike.



Zero: $y=0$:

$2x+\frac{\pi}{3}=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z};$

k = 0 $x=\frac{\pi}{12}$;

k = 1 $x=\frac{7\pi}{12}$;

k = -1 $x=-\frac{5\pi}{12}$;

max: $y=1$:

$2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

k = 0 $x=-\frac{\pi}{6}$;

k = 1 $x=\frac{5\pi}{6}$;

k = -1 $x=-\frac{7\pi}{6}$;

min: $y=-1$:

$2x+\frac{\pi}{3}=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

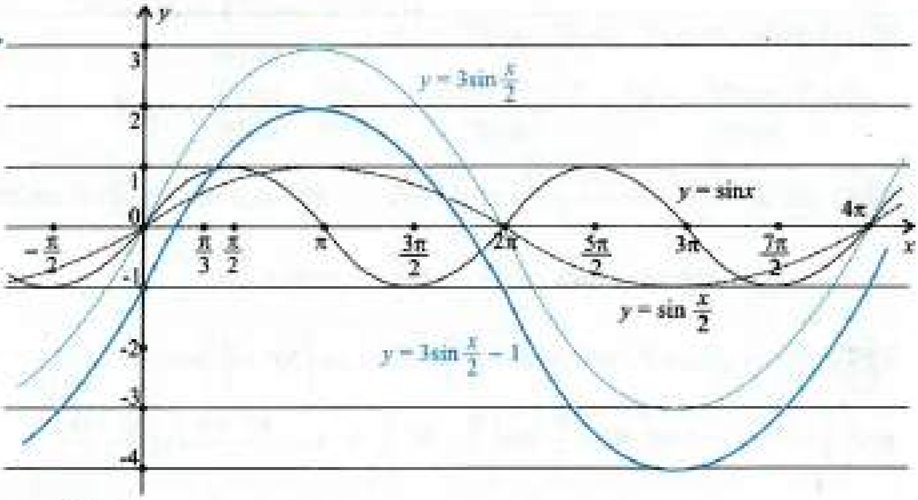
k = 0 $x=\frac{\pi}{3}$;

k = 1 $x=\frac{4\pi}{3}$;

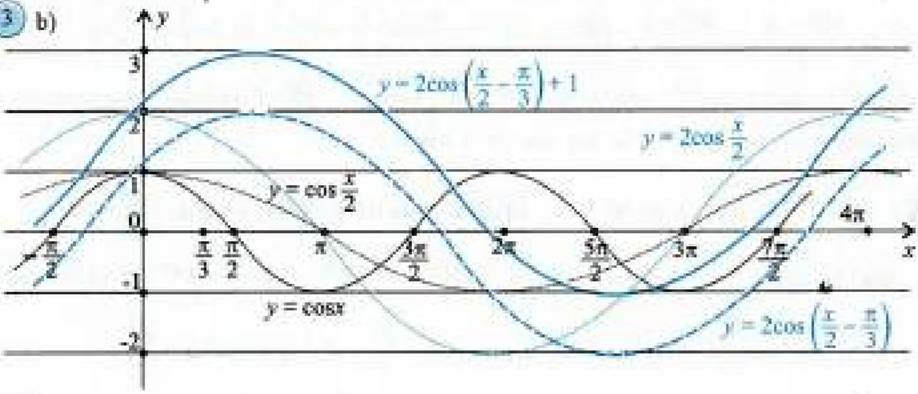
k = -1 $x=-\frac{2\pi}{3}$.

10

2 a)



3 b)



11 1 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{12}\left(6+\sqrt{35}\right)$. 2 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$. 3 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{204}{325}$.

4 $\frac{1}{2}$. 5 a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. 6 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 7 $tg\,20^0$. ***Udhëzim:*** $\cos 75^0=\sin 15^0$, $\cos 85^0=\sin 5^0$.

9 $\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta=\cos^2\alpha\left(1-\sin^2\beta\right)-$

$-\left(1-\cos^2\alpha\right)\cdot\sin^2\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$

12 1 $tg(\alpha-\beta)=\frac{433}{460}$. 2 $tg\alpha=-3$. 3 a) $\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$; b) 2.

4 ***Udhëzim:*** Zëvendëso $\beta=\alpha-45^0$ dhe zbatoje teoremën adicionale për $tg\left(\alpha-45^0\right)$.

13 1 $\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$. 2 $\sin 3\alpha=-\frac{46}{125}$. 3 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4 a) 1. b) 1. c) $tg\,2\alpha$.

5 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 6 b) Udhëzim: $ctg\alpha\cdot tg3\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin3\alpha}{\cos3\alpha}$, kurse pastaj shfytëzo $\sin 3\alpha$ dhe $\cos 3\alpha$.

7 a) **Zgjidhje**: $8\cos 10^0\cdot\cos 20^0\cdot\cos 40^0=\dfrac{4\left(2\sin 10^0\cos 10^0\right)\cos 20^0\cos 40^0}{\sin 10^0}=$

$=\dfrac{4\sin 20^0\cos 20^0\cos 40^0}{\sin 10^0}=\dfrac{2\sin 40^0\cos 40^0}{\sin 10^0}=\dfrac{\sin 80^0}{\sin 10^0}=\dfrac{\cos 10^0}{\sin 10^0}=ctg 10^0.$

14 1 a) $\dfrac{\sqrt{3+2}}{4}$; b) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; c) $\sqrt{3-\sqrt{2}}$. 3 $-0,2$ dhe -5. 4 a) $\sin 2\alpha$; b) $\sin\alpha$. 5 ***Udhëzim***: a) $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

15 1 a) $\sqrt{6}\cos 5^0$; b) $4\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$; c) $2\cdot\left(\cos\left(30^0+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$;

ç) $2\left(\dfrac{1}{2}-\cos\alpha\right)=4\sin\left(30^0+\dfrac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-30^0\right)$; d) $4\cos\dfrac{30^0+\alpha}{2}\cos\dfrac{30^0-\alpha}{2}$;

e) $2\sqrt{2}\sin\dfrac{45^0-\alpha}{2}\cos\dfrac{45^0+\alpha}{2}$. 4 a) $2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-45^0\right)$; b) $2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Udhëzim: $1-\cos\alpha=\cos 0^0-\cos\alpha$, $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$. 5 ***Udhëzim***: Transformoji në prodhim shprehjet $\sin 3\alpha+\sin\alpha$ dhe $\cos 3\alpha+\cos\alpha$, etj.

16 1 a) $\dfrac{1}{2}\left(\sin 10^0+\sin 20^0\right)$; b) $\dfrac{1}{2}\left(\sin 4^0+\sin 10^0\right)$. 2 $1+\sin\alpha$. 3 $-\dfrac{1}{2}$.

5 $2\sin(15^0-\alpha)\sin(15^0+\alpha)+\sin^2\alpha=2\cdot\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(15^0-\alpha-15^0-\alpha\right)-\cos\left(15^0-\alpha+15^0+\alpha\right)\right]+$

$\sin^2\alpha=\cos 2\alpha-\cos 30^0+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

17 1 a) $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$; b) $x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$;

c) $x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; ç) barazimi nuk ka zgjidhje.

2 a) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$; b) $x=\pi\pm\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$; c) barazimi nuk ka zgjidhje;

ç) $x=\pi\pm arc\cos\dfrac{2}{5}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. 3 a) $x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$; b) $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$; v) $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$;

ç) $x=-arc\,tg 3+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. 4 a) $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$; b) $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$; c) $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$;

ç) $x=arc\,ctg\dfrac{5}{3}+k\pi=59^0+180^0k$; $k\in\mathbb{Z}$.

18 1 a) $x-10^0=40^0+360^0k$ ose $x-10^0=140^0+360^0k$ b) $x=10^0+360^0k$ ose

$x=50^0+360^0k$ $x=150^0+360^0k$; $x=50^0+360^0k$.

2 a) $x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$, $x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; b) $x=\dfrac{\pi}{18}+2k\pi$, $x=-50^0+360^0\cdot k$, $k\in\mathbb{Z}$. 3 a) $x=70^0+180^0k$; $k\in\mathbb{Z}$; b) $x=12^0+180^0k$; $k\in\mathbb{Z}$.

4 a) $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi,\ x=-\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; b) $x_1=\frac{7\pi}{12}+k\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

5 a) $x=\pi+3k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+3k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; b) $x=k\pi,\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

6 a) $x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$; b) $x=-\frac{2\pi}{9}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$. 7 a) $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

b) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. 8 a) $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$; b) $x=k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

19 1 a) $x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; b) $x=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

2 a) $\left.\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, \\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \end{array}\right\} k\in\mathbb{Z}$, $\left.\begin{array}{l} x=\arcsin\frac{2}{3}+2k\pi, \\ x=\pi-\arcsin\frac{2}{3}+2k\pi, \end{array}\right\} k\in\mathbb{Z}$; b) $\left.\begin{array}{l} x=2k\pi, \\ x=\pi\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, \end{array}\right\} k\in\mathbb{Z}$.

3 a) $x=k\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; b) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

4 a) $x=\pi+2k\pi,\ x=\pi\pm\arccos\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; b) $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

5 a) $x=\pi+2k\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; b) $x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

6 a) $4\sin^2 x+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=0,\ \sin^2 x\left(4\cos^2 x+1\right)=0,\ \sin^2 x=0,\ x=k\pi$, kurse barazimi $4\cos^2 x+1=0$ nuk ka zgjidhje; b) $\frac{3\cos x}{\sin x}+2\sin x=0,\ 3\cos x+2\left(1-\cos^2 x\right)=0$, $2\cos^2 x-3\cos x-2=0;\ \cos x=2,\ \cos x=-\frac{1}{2}$. Barazimi $\cos x=2$ nuk ka zgjidhje, kurse zgjidhje e barazimit $\cos x=-\frac{1}{2}$ është $x=\pi\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

20 1 a) $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; b) $x=k\pi$ ose $x=\pi+k\pi,\ k\in N$ 2 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

3 $x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. 4 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. ***Udhëzim:*** $\sin x\left(tgx+\sqrt{3}\right)-\left(tgx+\sqrt{3}\right)=0,\ \left(tgx+\sqrt{3}\right)(\sin x-1)=0,\ tgx=-\sqrt{3}$ ose $\sin x=1$.

5 $x=\frac{2k\pi}{5}$ ose $x=2k\pi$. ***Udhëzim:*** $2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=2\cos\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2}$; $\cos x=0$ ose $\cos 2x=\cos 3x;\ 2x=3x+2k\pi$ ose $2x=-3x+2k\pi$.

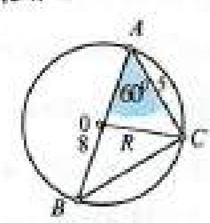
6 $x=k\pi$ ose $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$. ***Udhëzim:*** $4\sin^3 x+2\sin 2x\cdot\sin x=0,\ \sin x=0$, $4\sin^2 x+4\sin x\cos x=0,\ \sin x+\cos x=0,\ tgx=-1$.

21 1 a) $\beta=15^0,\ a=\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right),\ c=2\left(2+\sqrt{3}\right)$; b) $\beta=90^0,\ \gamma=30^0,\ c=2\sqrt{5}$; c) $\gamma=45^0,\ \alpha=105^0,\ a=3+\sqrt{3}$. 2 a) $\gamma=75^0 06',\ b=19,\ c=22$; b) $\beta=45^0 26',\ a=15,\ c=13$; c) $\gamma=50^0 45' 48'',\ a=3{,}35,\ b=8{,}62$; ç) $\alpha=57^0 34',\ b=21{,}77;\ c=26{,}28$.

(3) a) $\beta = 71^0\,52'56''$, $\gamma = 54^0\,19'4''$, $c = 452{,}95$; b) $\gamma = 50^0\,12'19''$, $\alpha = 30^0\,51'41''$, $a = 1{,}4$;
c) detyra ka dy zgjidhje: $\alpha_1 = 63^0\,21'45$, $\gamma_1 = 82^0\,22'15''$;
$\alpha_2 = 116^0\,38'15''$, $\gamma_2 = 29^0\,5'45''$; ç) Detyra nuk ka zgjidhje.
(4) a) $\gamma = 75^0$, $a = 4\sqrt{3}$, $b = 6\sqrt{2}$, $c = 2\left(3+\sqrt{3}\right)$; b) $\beta = 60^0$, $\gamma = 45^0$, $\alpha = 75^0$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$;
c) $\alpha = 45^0$, $\beta = 75^0$, $b = 3\left(1+\sqrt{3}\right)$, $c = 3\sqrt{6}$; ç) $\alpha = 42^0\,22'12''$, $\beta = 37^0\,29'43''$,
$\gamma = 100^0\,08'05''$, $c = 45{,}28$. (5) a) $\gamma = 67^0\,22'48''$, $\alpha = 53^0\,07'48''$, $\beta = 59^0\,29'24''$, $b = 14$, $c = 15$.
***Udhëzim*:** Prej $a = 2R\sin\alpha$ dhe $\sin\alpha = \frac{h_b}{c}$, fitohet $b = 2R\frac{h_b}{c}$ ose $c = 2R\frac{h_b}{a}$;
b) $\alpha = 60^0$, $\beta = 81^0\,47'12''$, $\gamma = 38^0\,12'48''$, $a = 21$, $c = 15$; c) Prej $a = 2R\sin\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, d.m.th. $a = \sqrt{3}, b+c = 3$. Më tutje prej $b = 2\sin\beta$ dhe $c = 2R\sin\gamma$ kemi
$b + c = 2R\left(\sin\beta + \sin\gamma\right)$, d.m.th. $3 = 2\cdot 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$, ku $\beta+\gamma = 120^0$,
$3 = 4\cdot\sin\frac{120^0}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ prej ku: $\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\beta-\gamma}{2} = 30^0 \Rightarrow \beta-\gamma = 60^0$.
Prej $\beta+\gamma = 120^0$, $\beta-\gamma = 60^0$ vijon $\beta = 90^0$, $\gamma = 30^0$, pra $b = 2\cdot 1\cdot\sin 90^0 = 2$,
$c = 2\cdot 1\cdot\sin 30^0 = 1$. Domethënë, $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 30^0$.
(7) ***Udhëzim*:** Prej $\alpha : \beta = 1:3 \Rightarrow \beta = 3\alpha$, pra fitojmë $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ose $\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{4}{11}$
prej ku $\alpha = 14^0\,28'$, $\beta = 43^0\,24'$. $\Rightarrow$ $a = 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, d.m.th. $a = \sqrt{3}, b + c = 3$.

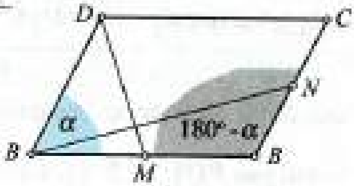
22 (1) a) $a = 5$, $b = 3$, $\alpha = 38^0\,12'48''$, $\beta = 21^0\,47'12''$; b) $b = 10$, $c = 6$, $\beta = 89^0\,59'58''$,
$\gamma = 36^0\,52'12''$. (2) a) $b = 13$, $a = 7$; b) $a = 7$, $c = 37$. (3) a) 60^0; b) 45^0. (4) a) $a = 5$;
b) $b = 5$ ose $b = 4$. (5) a) $a = 20{,}88$; $\alpha = 63^0\,05'49''$; $\beta = 73^0\,18'06''$; $\gamma = 43^0\,36'05''$;
b) $\alpha = 120^0\,30'36''$; $a = 24{,}33$; $\beta = 27^0\,24'32''$; $\gamma = 32^0\,04'52''$. (6) $a = 5k$, $b = 16k$,
$c = 19k$, që do të thotë se këndi më i madh është përballë brinjës c, pra prej
$\cos\gamma = \frac{25k^2 + 256k^2 - 361k^2}{2\cdot 5k\cdot 16k} = -\frac{1}{2}$ vijon $\gamma = 120^0$.

23 (1) ***Udhëzim*:** Zbatoje teoremën e kosinusit. (2) $53^0\,22'48''$, $59^0\,29'24''$,
$67^0\,22'48''$. (3) $\ell = 130$; $d = 74{,}61$. (4) $a = 25$, $b = 16$. (5) $S = 7{,}54$.
(7) Sipas teoremës së kosinusit kemi:
$\overline{BC}^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cos 60^0$, d.m.th. $\overline{BC} = 7$. Syprina e
ΔABC është $S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\sin 60^0 = 10\sqrt{3}$. Prej formulës $S = \frac{abc}{4R}$
për rrezen R fitojmë $R = \frac{abc}{4P}$, d.m.th. $R = \frac{8\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 10\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \approx 4$.



(8) Me zbatimin e teoremës së kosinusit për ΔABN dhe ΔAMD për $\overline{AN}$ dhe $\overline{DM}$

fitojmë: $\overline{AN}^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2a\frac{b}{2}\cos\left(180^0 - \alpha\right)$, d.m.th.



$$+\begin{cases} \overline{AN}^2 = a^2 + \dfrac{b^2}{4} + 2ab\cos\alpha \\ \overline{DM}^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + b^2 - 2\dfrac{a}{2}b\cos\alpha \end{cases}$$

Duke i mbledhur anët përkatëse të dy barasive të fundit fitojmë:

$\overline{AN}^2 + \overline{DM}^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + b^2$, d.m.th. $\overline{AN}^2 + \overline{DM}^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = 1{,}25(a^2 + b^2)$.

(10) 27,8km. (11) $\gamma = 90^0$. (12) $a = 10$. (13) $b = c = 3\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

TEMA 3 — ELEMENTET E KOMBINATORIKËS DHE GJASËS

1 (1) 1. Për $n = 1$ kemi $\frac{1\cdot(3\cdot 1 - 1)}{2}$, $P(1)$ është gjykim i saktë; 2. Për $n = k$ supozojmë se gjykimi $P(k): 1 + 4 + 7 + ... + (3k-2) = \frac{k(3k-1)}{2}$ është i saktë; 3. Për $n = k + 1$ kemi:

$P(k+1): 1 + 4 + 7 + ... + (3(k+1) - 2) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$, që duheshte të vërtetohet. Nëse te supozimi çdo ane të barasisë i shtojmë anëtarin $3k + 1$ i cili është fituar për $n = k + 1$ fitojmë: $1 + 4 + 7 + ... + (3k-2) + (3k+1) =$

$= \frac{k(3k-1)}{2} + 3k + 1 = \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} = \frac{(3k+2)(k+1)}{2}$. Prej $3k^2 + 5k + 2 = 0$ vijon $k_1 = -\frac{2}{3}$, $k_2 = -1$, pra $3k^2 + 5k + 2 = 3(k - k_1)(k - k_2) = 3\left(k + \frac{2}{3}\right)(k+1) =$

$= (3k+2)(k+1)$, me çka gjykimi u vërtetua. (2) Vërtetimi është identik me detyrën paraprake. (3) 1. Për $n = 1$, vijon $1^2 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$, gjykimi është i saktë. 2. Për $n = k$ supozojmë se gjykimi është i saktë $P(k) = 1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

3. Për $n = k + 1$ kemi: $P(k+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} =$

$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. Prej supozimit kemi $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 =$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)2\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+2)}{6}=\frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6},$$ me çka vërtetimi

është kryе, d.m.th. është vërtetua implikacioni $P(k)\Rightarrow P(k+1)$. **5** 1. Për $n=1$ gjykimi

është i saktë, pasi $P(1): 1=2^1-1$. 2. Le të jetë për $n=k$, $P(k): 1+2+2^2+...+2^{k-1}=2^k-1$

është i saktë. 3. Për $n=k+1$ kemi: $1+2+2^2+...+2^{k-1}+2^k=2^{k+1}-1$. Nëse supozimit i shtojmë

anëtarin $2k$, fitojmë: $1+2+2^2+...+2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k=2\cdot 2^k-1=2^{k+1}-1$.

7 1. Për $n=1$, $\sin x=\frac{\sin\frac{1+1}{2}x\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\sin x$, gjykimi është i saktë. 2. Le të jetë për $n=k$, gjykimi

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+...+\sin kx=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$ i saktë. 3. Për $n=k+1$ kemi:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+...+\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{k+2}{2}x\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$ Nëse supozimit i shtojmë anëtarin

$\sin(k+1)x$, kemi: $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+...+\sin kx+\sin(k+1)x=$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}+\sin(k+1)x\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$ Me zbatimin e

formulave kemi: $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ dhe $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$,

$$\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}+2\sin\frac{k+1}{2}\cos\frac{k+1}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\left(\sin\frac{kx}{2}+2\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\left(\sin\frac{kx}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{(k+1)x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{(k+1)x}{2}\right)\right)}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\left(\sin\frac{kx}{2}+\sin\left(-\frac{kx}{2}\right)+\sin\frac{(k+2)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{k+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$ me çka është vërtetua

implikacioni $P(k)\Rightarrow P(k+1)$. Domethënë, identiteti vlen për çfarëdo numër natyror.

8 1. Për $n=1$, $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin x}=\cos x$, gjykimi është i saktë. 2. Për $n=k$, supozojmë se gjykimi $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+...+\cos(2k-1)x=\frac{\sin 2kx}{2\sin x}$ është i saktë.

3. Për $n=k+1$ kemi: $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+...+\cos(2k+1)x=\frac{\sin 2(k+1)x}{2\sin x}$,

çka duheshte të vërtetohet. Nëse supozimit i shtojmë anëtarin $\cos(2k+1)x$, fitojmë:

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+...+\cos(2k-1)x+\cos(2k+1)x=$$

$$=\frac{\sin 2kx}{2\sin x}+\cos(2k+1)x=\frac{\sin 2kx+2\sin x\cos(2k+1)x}{2\sin x}=$$

$$=\frac{\sin 2kx+2\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\left(x-(2k+1)x\right)+\sin\left(x+(2k+1)x\right)\right)}{2\sin x}=$$

$$=\frac{\sin 2kx+\sin(-2kx)+\sin 2(k+1)x}{2\sin x}=\frac{\sin 2(k+1)x}{2\sin x}.$$ Implikacioni $P(k)\Rightarrow P(k+1)$

është i saktë. Domethënë, gjykimi është i saktë për çfarëdo numër natyror.

9 a) 1. Për $n=1$, $P(1)=7^1+3\cdot1-1=9$, plotëpjesëtohet me 9. 2. Le të jetë për $n=k$, i plotëpjesëtueshëm me 9. 3. Për $n=k+1$ kemi: $P(k+1)=7^{k+1}+3(k+1)-1=7^k\cdot7+3k+2=$

$=7\cdot\underbrace{7^k+21k}_{7^k+3\cdot k-1}-18k+9-7=7\left(7^k+3k-1\right)+9(1-2k)$. Prej këtu vijon $9\mid 9(1-2k)$, por pasi sipas supozimit $9\mid\left(7^k+3k-1\right)$ dhe $9\mid 9(1-2k)$, vijon se $9\mid P(n)$ për çdo numër natyror n. b) 1. Për $n=1$, $P(1)=2^{3\cdot2}-7\cdot1+41=98$, pra $49\mid 98$. Le të jetë për $n=k$

numri $P(k)=2^{3(k+1)}-7k+41$ i plotëpjesëtueshëm me 49. 3. Për $n=k+1$ fitojmë:

$$P(k+1)=2^{3(k+2)}-7(k+1)+41=2^{3(k+1)}\cdot2^3-7k-7+41=8\left(2^{3(k+1)}-7k+41\right)+49k-294=$$

$=8\left(2^{3(k+1)}-7k+41\right)+49(k-6)$. Prej këtu vijon se $P(k+1)$ plotëpjesëtohet me 49 për çfarëdo numër natyror. c) 1. Për $n=1$, $P(1)=3^{2\cdot2}-8\cdot1-9=64$, pra $64\mid 64$. 2. Supozojmë se për $n=k$, $P(k)=3^{2(k+1)}-8k-9$ plotëpjesëtohet me 64. 3. Për $n=k+1$ fitojmë:

$$P(k+1)=3^{2(k+1+1)}-8(k+1)-9=3^{2(k+1)}\cdot3^2-8k-8-9=9\left(3^{2(k+1)}-8k-9\right)+64k+64=$$

$=9\left(3^{2(k+1)}-8k-9\right)+64(k+1)$. Prandaj, është vërtetua implikacioni $P(k)\Rightarrow P(k+1)$, domethënë shprehja e dhënë plotëpjesëtohet me 64 për çdo numër natyror.

2 (1) a) $40320+362880=403200$; b) 3628799; c) $\frac{102!}{100!}=\frac{102\cdot101\cdot100!}{100!}=$
$=102\cdot101=10302$; ç) 5.

(2) a) $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{n!(n+1)}=\frac{n+1-1}{n!(n+1)}=\frac{n}{(n-1)!n(n+1)}=\frac{1}{(n-1)!(n+1)}$;

b) $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{(k-1)!k}=\frac{k-1}{(k-1)!k}=\frac{k-1}{(k-2)!(k-1)k}=\frac{1}{k(k-2)!}$.

(3) a) $(m+1)(m+2)(m+3)$; b) $n(n-1)$. (4) a) $x!=24\cdot x$; $x\cdot(x-1)!=24\cdot x$; Pasi $x\neq0$ vijon $(x-1)!=4!$; $x-1=4$; $x=5$. b) $(x+1)!-8(x-1)!=8\cdot x!$;
$(x+1)x(x-1)!-8(x-1)!=8x(x-1)!$; pasi $x-1\neq0, x\neq0$, $(x+1)x-8=8x$;
$x^2-7x-8=0$, $x_1=-1$, $x_2=8$. Për shkak të $x>0$, zgjidhja është $x=8$.

c) Prej $\frac{x!}{(x-2)!}=90$ vijon $\frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}=90$, d.m.th. $x(x-1)=90$,

pra $x_1=10$ ose $x_2=-9$. Zgjidhja është $x=10$.

(5) a)

N O R A	O N R A	R N O A	A N O R
N O A R	O N A R	R N A O	A N R O
N R O A	O R N A	R O N A	A O N R
N R A O	O R A N	R O A N	A O R N
N A O R	O A N R	R A N O	A R N O
N A R O	O A R N	R A O N	A R O N

RONA është permutacioni i pesëmbëdhjetë me radhë, duke llogaritur edhe permutacionin e dhënë. b) Radhitja leksikografike e shkronjave është ANOR, kurse ky është permutacioni fillestar. RONA është permutacioni 24.

(6) $P(5-1)=4!=24$. (7) a) $P(7)=7!=5040$; b) 123(45678), janë aq sa ka permutacione prej elementeve 4, 5, 6, 7 dhe 8, d.m.th. $P(5)=5!=120$; c) $P(4)=24$.

(8) Gjatë zhvendosjes rrethore të elementeve nuk ekziston as i parë, as i fundit. Nëse të gjithë janë ulur në një tavolinë zhvendosen majtas ose djathtas ose dy vende, atëherë nuk është fituar radhitje e re e personave. Prej këtyre shkaqeve, një pozitë fiksohet dhe në atë pozitë ulet një person çfarëdo, por në lidhje me atë person permutohen personat tjerë. Në këtë rast të atillë janë pesë persona, pra të mundshme janë gjithsej $P(5)=5!=120$ radhitje. (9) Sipas detyrës paraprake, dy vende janë të fiksuara dhe ato dy persona në lidhje me të tjerët llogariten për një element. Katër personat tjerë zhvendosen në $P(4)=4!=24$ mënyra. Pasi të dy personat mund të zhvendosen në dy mënyra, që është radhitje e ndryshueshme e personave, pra gjithsej ka $2\cdot P(4)=48$ mënyra.

(10) $P_{3,3}(6)=\frac{6!}{3!\,3!}=20$. (11) $P_4(7)-P_3(6)=\frac{7!}{4!}-\frac{6!}{3!}=210-120=90$.

(12) a) $P_{4,3}(8)=\frac{8!}{4!\,3!}=280$; b) $P_{5,2}(8)=\frac{8!}{5!\,2!}=186$; c) $P_{5,3}(8)=\frac{8!}{5!\,3!}=56$.

(13) a) $P_{4,3}(9)=\frac{9!}{4!\,3!}=2520$; b) $\frac{8!}{3!\,2!\,3!}=560$; c) $\frac{7!}{2!\,3!\,2!}=210$.

3 (1) Vëre zgjidhjen e detyrës 1 në mësimin paraprak. (2) a) $V_{12}^3=12\cdot 11\cdot 10=1320$;

b) $\frac{V_{10}^6}{V_{10}^3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10\cdot 9\cdot 8}=210$. (3) a) $x(x-1)=380$; $x^2-x-380=0$; $x_1=20$, $x_2=-18$. Pasi $x>0$, zgjidhja është $x=20$. b) $9\cdot n(n-1)(n-2)=5\cdot n^3$; $9(n-1)(n-2)=5n^2$; $n_1=6$ ose $n_2=\frac{3}{4}$. Pasi $n\in\mathbb{N}$, vijon $n=6$. (4) $V_5^1+V_5^2+V_5^3+V_5^4+V_5^5=325$.

(5) $V_6^5-V_5^4=6000$, numri i përgjithshëm i numrave pesëshifrorë është zvogëluar për numrat te të cilët shifra 0 nuk është në vendin e parë, por ato janë të formës $0(1,3,5,7,9)$.

(6) $2\cdot V_5^4=480$. (7) $V_{10}^5-V_9^4=27216$. a) $V_9^4=3024$; b) $V_9^4-V_8^3=2688$, $V_8^3=336$ janë numrat e formës $0(1,2,4,5,6,7,8,9)3$; c) numrat janë të formës $1(0,2,3,5,6,7,8,9)4$, kurse ato janë $V_8^3=336$. (8) $\overline{V}_3^6=3^6=729$.

(9) a) 44 55 b) 444 454 544 554
45 54; 445 455 545 555;

c) 4444 4454 4544 4554 5444 5454 5544 5554
4445 4455 4545 4555 5445 5455 5545 5555.

(10) a) $\overline{V}_3^{13}=3^{13}=1594323$; b) $\overline{V}_3^8=3^8=6561$; dy ndeshje, dy shenja dhe ka $\overline{V}_2^7$, gjashtë ndeshje me tre shenja $\overline{V}_3^6$, por gjithsej janë $\overline{V}_2^7\cdot\overline{V}_3^6=2^7\cdot 3^6=128\cdot 729=93312$. Luajtje e prognozës sportive është variacion, kurse në popull gabimisht thuhet: „Pagova 15 kombinacione''.

(11) a) $\overline{V}_5^{10}=5^{10}$; b) $\overline{V}_3^2\cdot\overline{V}_2^3\cdot\overline{V}_5^5=3^2\cdot 2^3\cdot 5^5$.

4 (1) Kombinacione janë të gjitha nënbashkësitë prej k elemente nga bashkësia që ka n elemente, ndërsa, variacionet janë nënbashkësi të radhitura prej k elemente prej bashkësisë që ka n elemente. Të gjitha variacionet të cilët përbëhen prej elementeve të njëjtë, por ndryshojnë sipas radhitjes së tyre paraqesin një kombinacion.

(2) a) Ato ajanë elementet: 4; 5; 6; 7; 8; 9.

b)
45 46 47 48 49
56 57 58 59
67 68 69
78 79
89

c)
456 467 478 567 578 678 789
457 468 479 568 579 679
458 469 489 569 589 689
459

(3) a) Pasi $C_7^4=\frac{V_7^4}{P(4)}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, $C_7^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$, $C_8^4=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ kemi:

$$C_7^4+C_7^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4+7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{2(7\cdot 6\cdot 5\cdot 4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{(2\cdot 4)(7\cdot 6\cdot 5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=C_8^4.$$

(4) a) Prej $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2!}$ vijon $\frac{n(n-1)}{2}=3n$, $n=7$. b) Prej $C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ dhe

$C_{n+2}^4 = \dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!}$ vijon $\dfrac{5n(n-1)(n-2)}{6} = \dfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24}$;

$20n(n-1)(n-2)-(n+2)(n+1)n(n-1)=0; n^2-17n+42=0; n=3$ ose $n=14$.

c) Prej $C_n^k = \dfrac{V_n^k}{P(k)}$ vijon $35=\dfrac{840}{k!}$, $k!=24$, d.m.th. $k=4$. Prej $C_n^4 = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 35$ vijon $n(n-1)(n-2)(n-3) = 7\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4 = 7\cdot6\cdot5\cdot4$, d.mth. $n=7$, pra zgjidhja është $n=7$, $k=4$. **5** Numri i trekëndëshave paraqet kombinacione prej 16 elementeve të klasës tretë , pra $C_6^3 = \binom{6}{3} = \dfrac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 20$. **6** Zgjedhja e nxënësve janë kombinacione të klasës 5 prej 10 elemente. Zgjedhja e nxënësve mund të kryhet në $C_{10}^5 = 252$ mënyra, kurse të profesorëve $C_4^2 = 6$ mënyra. Në këshill mund të jetë çdo grup prej nxënësve me çdo grup të profesorëve, kurse numri i tyre është $C_{10}^5 \cdot C_4^2 = 1512$.

7 $C_4^3 = 4$; $abce$, $bcde$, $bcef$, $bceg$. **8** $C_5^3 = 10$; 135,137,138,157,158,178,357,358,378,578.

9 $C_{10}^2 - C_4^2 - C_3^2 + 2 = 38$. Nëpër dy pika të ndryshme kalon vetëm një drejtëz.

10 $C_{30}^2 - C_{16}^2 - C_{12}^2 + 1 = 250$. **11** Vëre zgjidhjen në detyrën 8 në pjesën V.

12 $\overline{C}_3^6 = C_{3+6-1}^6 = \binom{8}{6} = 28$.

5 **1** a) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{y}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3\cdot\dfrac{2}{y} + \binom{4}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{y}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\dfrac{2}{y}\right)^4 =$

$= \dfrac{x^4}{16} + 4\cdot\dfrac{x^3}{8}\cdot\dfrac{2}{y} + 6\cdot\dfrac{x^2}{2^2}\cdot\dfrac{2^2}{y^2} + 4\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{2^3}{y^3} + \dfrac{2^4}{y^4} = \dfrac{x^4}{16} + \dfrac{x^3}{y} + 6\dfrac{x^2}{y^2} + 16\dfrac{x}{y^3} + \dfrac{16}{y^4}$.

b) $x^5 - 5x^3 + 10x - 10\cdot\dfrac{1}{x} + 5\cdot\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^5}$;

c) $x^6 + 6x^5\sqrt{x} + 15x^5 + 20x^4\sqrt{x} + 15x^4 + 6x^3\sqrt{x} + x^3$. **2** a) $239 - 169\sqrt{2}$; b) $16-112i$; c) $-7-24i$. **3** a) 0,5905. Zbato $0,9^5 = (1-0,1)^5$; b) 1,3439. Në zbërthimin e binomit $1,03^{10} = (1+0,03)^{10}$ shfrytëzoji pesë anëtarët e parë. **4** a) $2^{10} = 1024$; b) 0. Vëre zgjidhjen e detyrës 4 te mësimi. **5** a) $T_7 = \binom{12}{6}\cdot a^6\cdot\left(\sqrt[6]{3}\right)^6 = \dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot3a^6 =$

$= 2772a^6$; b) $T_9 = \binom{16}{8}\left(\dfrac{a}{x}\right)^{16-8}\cdot\left(-\sqrt{x}\right)^8 = 12870a^8x^{-4}$; c) Prej kushtit $\binom{n}{2} = 105$ vijon

$\dfrac{n(n-1)}{1\cdot2} = 105$, $n(n-1) = 210$, $n=15$. $T_{13} = \binom{15}{12}(9x)^3\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{12} = \binom{15}{3}\cdot9^3x^3\cdot\dfrac{1}{3^6x^6} =$

$= \dfrac{15\cdot14\cdot13}{1\cdot2\cdot3}x^{-3} = 455x^{-3}$. **6** a) $T_{k+1} = \binom{12}{k}x^{12-k}\cdot x^{-2k} = \binom{12}{k}x^{12-3k}$. Anëtari varet prej x, domethënë, $12-3k=0$, $k=4$. Anëtari i kërkuar është $T_5=\binom{12}{4}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=495$.

b) $T_{k+1}=\binom{11}{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{11-k}\cdot\left(-\sqrt{x}\right)^k=\binom{11}{k}\cdot(-1)^k\cdot x^{\frac{1}{3}(11-k)+\frac{1}{2}k}=\binom{11}{k}\cdot(-1)^k\cdot x^{\frac{11}{3}+\frac{1}{6}k}$. Anëtari i

i kërkuar të përmban x^5, domethënë, $\frac{11}{3}+\frac{1}{6}k=5$, $k=8$, pra anëtari është $T_{k+1}=T_9=\binom{11}{8}(-1)^8x^5=$

$=\binom{11}{3}x^5=165x^5$. Shfrytëzo vetinë e simetrisë $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

7 Prej $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=46$ vijon $1+n+\frac{n(n-1)}{2}=46$, $n=9$.

$T_{k+1}=\binom{9}{k}x^{2(9-k)}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=\binom{9}{k}x^{18-3k}$. Prej këtu vijon $18-3k=0, k=6$, kurse $T_7=\binom{9}{6}=84$.

8 $T_3=\binom{5}{2}x^{5-2}\cdot\left(x^{\lg x}\right)^2=1000000$; $x^3\cdot x^{2\lg x}=100000$; $\lg\left(x^3\cdot x^{2\lg x}\right)=\lg10^5$; $\lg x^3+\lg\left(x^{2\lg x}\right)=5$;

$3\lg x+2\lg x\cdot\lg x=5; 21(\lg x)^2+3\lg x-5=0; (\lg x)_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}$; $\lg x=1$ ose $\lg x=-\frac{5}{2}$

d.m.th. $x=10$ ose $x=10^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10^5}}=\frac{1}{100\sqrt{10}}$.

6 1 Bashkësia e ngjarjeve elementare $\Omega=\{E_1,E_2,E_3,\dots,E_9\}$. E_1 - është zgjedhur numri 1, E_2 -është zgjedhur numri 2 etj. $A=\{E_3,E_6,E_9\}$, $B=\{E_5,E_9\}$, $C=\{E_1,E_2,E_3,E_7,E_9\}$, $D=\{E_7,E_8,E_9\}$, $E=\varnothing$. 2 a) Të mundshme janë dy ngjarje elementare, kurse ato do t'i shënojmë me S - paraqitja e „stemës'' dhe N-paraqitja e „numrit''. Bashkësia e ngjarjeve elementare është $\Omega=\{(N,N),(N,S),(S,N),(S,S)\}$. b) Gjithsej janë $\overline{V}_6^2=6^2=36$ ngjarje elementare, kurse bashkësia është $\Omega=\{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(2,6),\dots,(6,6)\}$.
c) $\Omega=\{(N,1),(N,2),\dots,(N,6),(S,1),(S,2),\dots(S,6)\}$. Gjithsej ka 12 ngjarje elementare.

3 Ngjarje E_1 - sendi është në rregull le ta shënojmë me Gj (ngjyrë e gjelbër), E_2 me K (jo në rregull-ngjyra e kuqe). Numri i ngjarjeve elementare është $\overline{V}_2^3=2^3=8$, kurse bashkësia është
$\Omega=\{(GjGjGj),(GjGjK),(GjKGj),(KGjGj),(GjKK),(KGjK),(KKGj),(KKK)\}$.
$A=\{(GjKK),(KGjK),(KKGj)\}$; $B=\{(GjGjK),(GjKGj),(KGjGj)\}$;
$C=\{(GjGjGj),(GjGjK),(GjKGj),(KGjGj),(GjKK),(KGjK),(KKGj)\}$
$D=\{(GjGjGj),(GjGjK),(GjKGj),(KGjGj)\}$. 4 a) Shuma është çift nëse në të dy zaret në faqet e sipërme ka numër tek të pikëve 1,3,5 ose numër çift të pikëve 2,4,6. Numri i përgjithshëm i faqeve elementare është $\overline{V}_3^2+\overline{V}_3^2=9+9=18$ (variacione me përsëritje. b) $B=\varnothing$, ngjarja është e pamundshme shuma e pikëve në të dy zaret nuk mund të jetë më e madhe se 12.
c) $C=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$; ç) Në faqet e sipërme të zareve dubet të paraqiten

pikë shuma e të cilëve është 10, 11 dhe 12. $D=\{(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$.

(5) Të gjitha ngjarjet elementare janë variacione prej 6 elemente të klasës 3-të. Gjithsej ka $\overline{V}_6^3=216$ ngjarje elementare, por caktohet si prodhim i Dekartit, d.m.th. $\Omega=(\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\})\times\{1,2,3,4,5,6\}$.

7 (1) Ka 10 ngjarje të mundshme, por vetëm 1 është i volitshëm.

(2) $n=12+23+27=62,\ m=23,\ P(A)=\frac{23}{62}=0{,}371$. (3) a) $P(A)=\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$; b) $P(B)=\frac{16}{80}=\frac{1}{5}=0{,}2$; v) $m=25,\ n=80,\ P(C)=\frac{25}{80}=\frac{5}{16}=0{,}3125$.

(4) a) $P(A)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$; b) $n=32,\ m=8$, në shpil prej 32 letra ka 8 „pik" letra, kurse $P(A)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$. (5) Numri i përgjithshëm i ngjarjeve është $\overline{V}_6^2=36$, ngjarjet e volitshme janë $A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$, $m=6$, a $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$;

$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)\}$, $m=5$, kurse $P(B)=\frac{5}{32}$. Është e qartë, $P(A)>P(B)$.

(6) $n=36$, kurse ngjarjet e volitshme janë nëse në të dy zaret ka numër tek i pikëve $\{1,3,5\}$ ose numër çift të pikëve $\{2,4,6\}$, $m=\overline{V}_3^2+\overline{V}_3^2=3^2+3^2=18$; $P(A)=\frac{18}{36}=0{,}5$. (7) a) $P(A)=\frac{5}{9}$;

b) Topat e bardh t'i shënojmë me $b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5$, kurse me ngjyrë të zezë $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$. Ngjarje të mundshme janë $\{(b_1,c_1),(b_1,c_2),(b_1,c_3),(b_1,c_4),(b_2,c_1),\dots,(b_5,c_1),(b_5,c_2),\dots,(b_5,c_4),\ (b_1,b_2),$ $(b_1,b_3),\dots,(b_4,b_5),(c_1,c_2),\dots,(c_3,c_4)\}$, kurse ato janë kombnacione me 9 elemente të klasës dytë. $n=C_9^2=\binom{9}{2}=\frac{9\cdot 8}{2}=36$. Ngjarje të volitshme janë $\{(b_1,b_2),(b_1,b_3),\dots,(b_4,b_5)\}$,

$m=C_5^2=\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{2}=10,\ P(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$. c) Ngjarje të volitshme janë çdo top i bardhë me çdo top të kuq, $m=5\cdot 4=20,\ n=36$, pra $P(A)=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

(8) Tërheqja nga dy letra kemi: $n=C_{32}^2=\frac{32\cdot 31}{2}=496$, kurse $m=C_4^2=\frac{4\cdot 3}{2}=6$, pasi prej 4 asa, nga 2 asa mund të tërheqim në 6 mënyra. $P(A)=\frac{6}{496}=0{,}036$.

(9) Gjithsej ka $n=\overline{V}_6^3=6^3=216$ ngjarje rasti. a) Ngjarjet e volitshme janë permutacione të numrit të pikëve shuma e të cilëve është 11. Ato janë permutacione të numrave $(1,5,5),(3,4,4),$ $(3,3,5),(1,4,6),(2,3,6),(2,4,5)$, pra $m=3\cdot P_2(3)+3\cdot P(3)=3\cdot 3+3\cdot 6=27$, kurse $P(A)=\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$.

b) Ngjarjet e volitshme janë permuatcione të numrave $(1,5,6),(2,4,6),(3,4,5),(2,5,5)$,

$(3,3,6),(4,4,4)$. $m=3\cdot P(3)+2\cdot P_2(3)+1=25$, $P(A)=\dfrac{25}{216}$. (10) Numri i të gjitha ngjarjeve është numër i permuatcioneve prej 9 elemente, d.m.th $n=9!$. Vetëm në njërin prej atyre rasteve fitohet fjala Hiperbolla. Prandaj, gjasa është $\dfrac{1}{9!}=0,000002755$.

8 (1) Ngjarjet elementare janë E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 i E_6, d.m.th. $n=6$. a) $A=\{E_2,E_4,E_6\}$ janë ngjarje të volitshme të paraqiten ose 2 ose 4 ose 6 pikë.

$P(A)=P(E_2)+P(E_4)+P(E_6)$, $P(A)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$. b) $B=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$,

$P(B)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$. (2) Pik dhe karo janë ngjyra në letra, në çdo 4 letra ka 1 letër pik dhe 1 letër karo, kurse në shpil prej 32 letra ka 8 letra pik dhe 8 letra karo. Për ngjarjet A-ngjyra pik $m_1=8$, kurse për B - ngjyrë karo $m_2=8$, pra $P(A+B)=P(A)+P(B)=$ $=\dfrac{8}{32}+\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{2}$. (3) $n=\overline{V}_3^2=6^2=36$. Shuma është numër çift nëse në të dy anët e zareve janë numër tek i pikëve $\{1,3,5\}$ është ngjarja A, kurse numër çift i pikëve $\{2,4,6\}$ është ngjarja B. Numri i ngjarjeve elementare të A është $m_1=\overline{V}_3^2=9$, kurse i B është $m_2=\overline{V}_3^2=9$.

$P(A+B)=P(A)+P(B)=\dfrac{9}{36}+\dfrac{9}{36}=0,5$. (4) A - është i barabartë me numrin e pikëve,

B - numri i pikëve shuma e të cilëve është 7, $m_2=4$, C - numri i pikëve me shumën 9, $m_3=4$;

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\dfrac{6}{36}+\dfrac{6}{36}+\dfrac{4}{36}=\dfrac{4}{9}$. (5) Numri i ngjarjeve elementare është $n=C_{15}^2=\dfrac{15\cdot 14}{2}=105$. Për ngjarjen A: 1 top i bardh dhe 1 i zi, $m_1=4\cdot 5=20$ (çdo top i bardh me çdo top të zi). Për ngjarjen B: 1 top i zi dhe 1 top i gjelbër, $m_2=5\cdot 6=30$ (çdo top i zi me çdo top të gjelëbër). Ngjarjet A dhe B janë disjunkte, pra

$P(A+B)=P(A)+P(B)=\dfrac{20}{105}+\dfrac{30}{105}=\dfrac{10}{21}$. (6) $P(\Omega)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)$;

$1=0,2+0,3+0,4+P(D)$; $P(D)=0,1$. (7) Ngjarja A le të ketë të paktën një prodhim standard. Ngjarja e kundërt $\overline{A}$ - nuk ka asnjë prodhim standard.

$n=C_{20}^3=\dfrac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3}=1140$, ngjarje të volitshme për $\overline{A}$ janë $C_{15}^3=\dfrac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=445$.

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{455}{1140}=1-\dfrac{91}{228}=\dfrac{137}{228}$. (8) Le të jetë $\Omega=\{A,B,C,\overline{D}\}$, ku

$P(A)=0,16$ të qëlluarit në zonën e parë, $P(B)=0,24$ - të qëlluarit në zonën e dytë, kurse

$P(C)=0,28$ - të qëlluarit në zonën e tretë. Ngjarja $\overline{D}$ - shënjestra e pa qëlluar.

$P(\Omega)=P(A)+P(B)+P(C)+P(\overline{D})$; $P(\overline{D})=1-(P(A)+P(B)+P(C))$;

$P(\overline{D})=1-(0,16+0,24+0,28)=0,32$. Gjasa të qëllohet shënjestra është $0,32$.

1 (1) a)

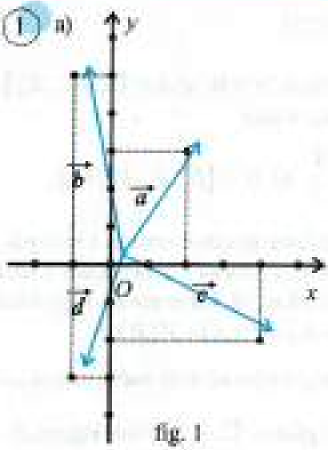


fig. 1

b)

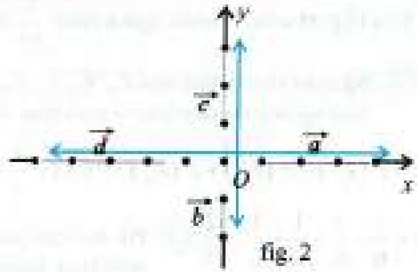


fig. 2

(2) $\overrightarrow{OA}=(3,0)$; $\overrightarrow{OB}=(4,1)$; $\overrightarrow{OC}=(2,4)$; $\overrightarrow{OD}=(-5,2)$; $\overrightarrow{OE}=(-4,0)$; $\overrightarrow{OF}=(-3,-2)$; $\overrightarrow{OG}=(0,-3)$. (3) $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{b}=-3\vec{j}$; $\vec{c}=-\vec{i}$; $\vec{d}=\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{e}=-2\vec{i}+5\vec{j}$.

(4) $\vec{a}=(4,3)$; $\vec{b}=(1,-8)$; $\vec{c}=(0,3)$; $\vec{d}=(-14,9)$; $\vec{e}=(0,-1)$.

2 (1) a) $\vec{a}+\vec{b}=(8,3)$; $\vec{a}-\vec{b}=(-2,-5)$; b) $\vec{p}+\vec{q}=(4,2)$; $\vec{p}-\vec{q}=(-6,2)$.

(2) a) $\left(\frac{9}{2},-7\right)$; b) (5, -10); c) $\left(\frac{29}{4},-\frac{49}{4}\right)$; ç) (8, -12). (3) a) $x=2, y=2$; b) $x=1, y=3$; c) $x=0, y=-1$. (4) a) $\overrightarrow{AB}=(-2,5)$; b) (-3, 5); c) (5, -7); ç) (6, -1). (5) a) $B(-2, 5)$; b) $B(7, 2)$; c) $B(4, -8)$; ç) $B(-3, -2)$. (6) a) $A(-3, 2)$; b) $A(7, -1)$; c) $A(-7, 7)$; ç) $A(2, 4)$.

(7) Le të jetë $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ dhe $D(x_4, y_4)$ janë kulmet e trapezit $ABCD$, kurse M dhe N janë meset e brinjëve AD dhe BC përkatësisht, fig. 3. Duhet të vërtetojmë se $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$. Pasi M është mesi i AD, vijon $M\left(\frac{x_1+x_4}{2},\frac{y_1+y_4}{2}\right)$, kurse N është mesi i BC, vijon $N\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right)$.

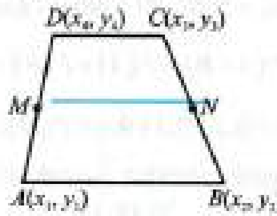


fig. 3

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x_2+x_3}{2}-\frac{x_1+x_4}{2},\frac{y_2+y_3}{2}-\frac{y_1+y_4}{2}\right)=\left(\frac{x_2+x_3-x_1-x_4}{2},\frac{y_2+y_3-y_1-y_4}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1+x_3-x_4,\ y_2-y_1+y_3-y_4)=\frac{1}{2}\left((x_2-x_1,\ y_2-y_1)+(x_3-x_4,\ y_3-y_4)\right)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}).$$

3 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(4-4)^2}=\sqrt{25}=5$; $\overline{AC}=\sqrt{(2-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$; $\overline{BC}=\sqrt{4^2+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$; $P=5+\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5+3\sqrt{5}$. (2) $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=2\sqrt{2}$.

(3) $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$. (4) Vendi gjeometrik i kërkuar është simetralja e segmentit AB. Le të

jetë $M(x, y)$ çfarëdo pikë nga vendi gjeometrik i kërkuar. Sipas vetisë të simetrales së segmentit, kemi: $\overline{MA} = \overline{MB}$, d.m.th.: $\overline{MA} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$, $\overline{MB} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$, pra prej kushtit $\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$ vijon $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y-4)^2$. Pas reduktimit të barazimit kemi $x + y - 6 = 0$, që paraqet barazimin e simetrales së segmentit AB, d.m.th. vendi gjeometrik i kërkuar.

5 a) $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; b) $M\left(\frac{3}{2}, 2\right)$. 6 Prej kushtit të detyrës kemi $\begin{cases} \overline{MA} = \overline{MB} \\ x = 2|y| \end{cases}$. Prej kushtit $\overline{MA} = \overline{MB}$, vijon: $\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}$. Me rregullimin e këtij barazimi kemi $5x + y - 7 = 0$. Prej barazimeve $x = 2|y|$ dhe $5x + y - 7 = 0$ kemi $\begin{cases} 5x + y - 7 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$ ose $\begin{cases} 5x + y - 7 = 0 \\ x = -2y \end{cases}$. Me zgjidhjen e të dy sistemeve fitohen pikat $M_1\left(\frac{14}{11}, \frac{7}{11}\right)$ dhe $M_2\left(\frac{14}{9}, -\frac{7}{9}\right)$, që do të thotë se detyra ka dy zgjidhje.

7 $P = 137$.

8

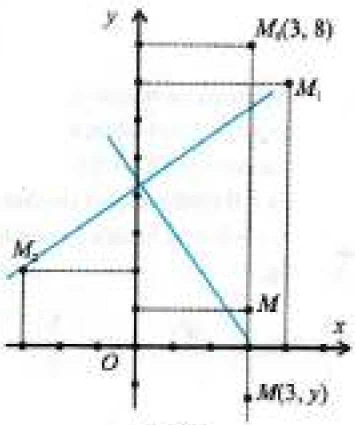


fig. 4

$$\overline{MM_1} = \overline{MM_2}$$

$$1 + (y-7)^2 = 6^2 + (y-2)^2$$

$$1 + y^2 - 14y + 49 = 36 + y^2 - 4y + 4,\ y = 1$$

Domethënë $M(3, 1)$, fig. 4.

9 $M_1(-8, 1)$, $M_2(16, 1)$.

10 Nëse kulmin e këndit të drejtë e vendosim në fillimin e koordinatave, ordinatat e dy kulmeve kanë koordinata $A(b, 0)$ dhe $B(0, a)$, fig. 5. C_1 është mesi për segmentin AB, pra prej formulës për largësi kemi:

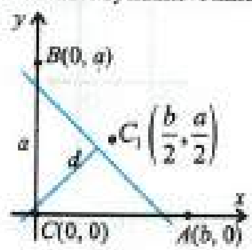


fig. 5

$$d = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{4}} =$$

$= \frac{1}{2}\sqrt{c^2} = \frac{c}{2}$, që duheshte të vërtetohet.

4 1 $C\left(\frac{3}{4}, 4\right)$. 2 a) $T(-1, 3)$; b) $T(-1, 0)$.

3 $C\left(\frac{22}{5}, -\frac{6}{5}\right)$; $D\left(\frac{29}{5}, \frac{18}{5}\right)$; $E\left(\frac{3}{5}, \frac{42}{5}\right)$; $F\left(\frac{43}{5}, \frac{66}{5}\right)$.

4 a) $D(13, -1)$; b) $D_1(-1, 27)$.

5 Le të jenë $P(p_1, p_2)$ dhe $Q(q_1, q_2)$ meset e brinjëve AC dhe BC

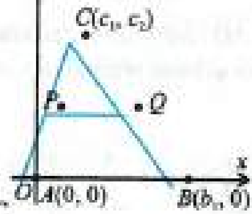


fig. 6

përkatësisht, fig. 6.

$$p_2 = \frac{0+c_2}{2} = \frac{c_2}{2};\ q_2 = \frac{0+c_2}{2} = \frac{c_2}{2}$$

prej ku vijon $p_2 = q_2$ d.m.th. pikat P dhe Q janë një lloj të larguara prej boshtit x, që do të thotë $PQ \parallel x$, d.m.th. $PQ \parallel AB$.

(6) Prej kushtit të detyrës kemi:

$\overline{AB} : \overline{BC} = d : a = \lambda$; $x_2 = \frac{x_1 + \lambda x_3}{1+\lambda}$; $y_2 = \frac{y_1 + \lambda y_3}{1+\lambda}$, prej ku $x_3 = \frac{1}{\lambda}(x_2 - x_1) + x_2$,

$y_3 = \frac{1}{\lambda}(y_2 - y_1) + y_2$, d.m.th. $x_3 = x_2 + \frac{a}{d}(x_2 - x_1)$; $y_3 = y_2 + \frac{a}{d}(y_2 - y_1)$.

(7) $C(10, 17)$.

(8) $S = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$; a) $\frac{5}{2}$; b) 34; c) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

(9) a) 28,5; b) 24. (10) a) $P = \sqrt{90} + \sqrt{116} + \sqrt{74}$; b) $S_{AB}\left(\frac{15}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $S_{AC}\left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$, $S_{BC}(10, 7)$;

a) $T\left(\frac{23}{3}, \frac{19}{3}\right)$; ç) S=39. (11) $y_3 = 15$.

5 (1) a) jo; b) po; c) po; ç) jo.

(2) a) b) c)

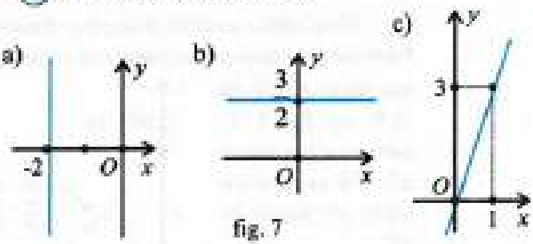


fig. 7

a) paralele me boshtin y;
b) paralele me boshtin x;
c) kalon nëpër $O(0, 0)$;
ç) $y = 0$ është barazimi i boshtit x;
d) $x = 0$ është barazimi i boshtit y, fig. 7.

(3) a) $A = 10$; b) $B = -\frac{6}{5}$; c) $C = -1$. (4) $P_x\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$; $P_y(0, 3)$. (5) a) $m = -\frac{5}{3}$;

b) $m = -2$; c) $m = \frac{3}{2}$; ç) $m = -15$.

6 (1) a) $x + 3y - 5 = 0$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1$; b) $x + 5y + 17 = 0$; $\frac{x}{-17} + \frac{y}{-\frac{17}{5}} = 1$. (2) $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$;

$\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1$; $\frac{x}{-5} + \frac{y}{-2} = 1$; $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$. (3) I caktojmë koordinatat e pikës D,

ashtu që $\overline{AD} : \overline{DB} = 2 : 3$. Prej këtu, $D(4, 3)$. Pastaj do ta shkruajmë barazimin e drejtëzës që kalon nëpër pikat C dhe D, dhe fitojmë: $5x - 3y - 11 = 0$, fig. 8.

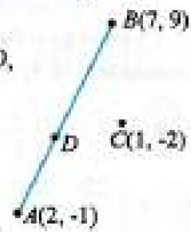


fig. 8

(4) a) $\frac{x}{8} + \frac{y}{-6} = 1$;

b) $\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{\frac{2}{3}} = 1$; c) $\frac{x}{-\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$; ç) $\frac{x}{-\frac{3}{7}} + \frac{y}{-\frac{5}{3}} = 1$.

5 $4x+3y-27=0$. **6** $x+4y-8=0$ dhe $x+y-5=0$. **7** Detyra ka dy zgjidhje, d.m.th. ekzistojnë dy drejtëza të atilla që: $p_1: 2x+5y-10=0$ dhe $p_2: 8x+5y+20=0$.

8 E sjellim barazimin në formën segmentale $\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{60}{\lambda}}=1$,

prej ku $m=5$, $n=\frac{60}{\lambda}$. Sipas teoremës së Pitagorës kemi:

$5^2+\left(\frac{60}{\lambda}\right)^2=13^2$, prej ku $\lambda=\pm5$, fig. 9.

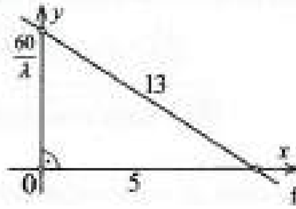


fig. 9

9 a) $\lambda=-\frac{1}{2}$; b) $\lambda=\frac{5}{3}$. **10** $A=5;\ B=9$.

7

1 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$. **2** a) $x-y+3=0$; b) $x+y-2=0$; c) $x\sqrt{3}+y+3\sqrt{3}+2=0$;

ç) $x\sqrt{3}+3y-2\sqrt{3}+9=0$.

3 a) $O(0,0)$; $A\left(\frac{1}{3},0\right)$; $B\left(\frac{1}{3},1\right)$; $C(0,1)$; b) $O(0,0)$;

$A\left(\frac{1}{4},0\right)$; $B\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$; $C\left(0,\frac{5}{4}\right)$. ***Udhëzim:*** $a=3b$ ose $b=3a$.

Kulmi B shtrihet në drejtëzën e dhënë, fig. 10.

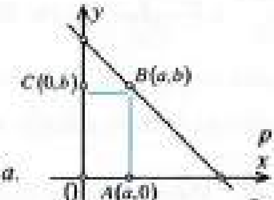


fig. 10

4 $4x+3y-15=0$. **5** $3x-y-2=0$. **6** $\lambda=\frac{4}{5}$. **7** a) a dhe b do t'i caktojmë kushtet: koeficienti i drejtimit $k=1$ dhe drejtëza kalon nëpër $(0,0)$, d.m.th. gjatësia e segmentit në boshtin y është $n=0$. Barazimi i drejtëzës në formën eksplicite është

$$y=\underbrace{\frac{3a-2b+5}{a-b}}_{k}\cdot x+\underbrace{\frac{2a-5b+1}{a-b}}_{n}.$$

Sipas kushtit të detyrës $k=1$ dhe $n=0$ d.m.th. $\begin{cases}\frac{3a-2b+5}{a-b}=1\\ \frac{2a-5b+1}{a-b}=0,\end{cases}$

prej ku a=-3, b=-1

b) $a=-\frac{11}{7}$, $b=-\frac{3}{7}$. **8** $a=7$, $b=-2$, $y+3=0$.

8

1 a) $\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}-2=0$; b) $-\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}+2=0$; c) $\frac{x\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$;

ç) $-\frac{x}{2}\sqrt{2}+\frac{y}{2}\sqrt{2}+1=0$. **2** a) $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-6=0$; b) $\frac{7}{25}x-\frac{24}{25}y-4=0$; c) $\frac{x-y+2}{-\sqrt{2}}=0$;

ç) $\frac{y-ax-2}{\sqrt{1+a^2}}=0$; d) $-\frac{1}{4}y-\frac{3}{4}=0$; e) $-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}=0$; f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{7}{3}=0$; g) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-4=0$;

h) $\frac{nx+my-mn}{\pm\sqrt{n^2+m^2}}=0$. **3** a) $\varphi=60^0$; b) $\varphi=30^0$; c) $\varphi=135^0$.

9 (1) a) $d = 4$; b) $d = 0$. (2) Po, $r = 5$. ***Udhëzim:*** Drejtëzat e prekin një rreth të njëjtë me qendër në fillimin e koordinatave, nëse gjenden në të njëjtën largësi prej fillimit të koordinatave.

(3) $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. (4) $d = \dfrac{240}{17}$. (5) Pra ka dy pika : $M_1(0,-12)$; $M_2\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$.

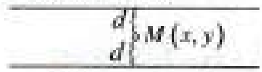
(6) Barazimin e drejtëzës e transformojmë në formën e përgjithshme: $bx + ay - ab = 0$.

Sipas formulës për largësi prej pikës deri te drejtëza kemi: $d = \dfrac{bx + ay - ab}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Prej kushtit të detyrës $d = a$ dhe $y = 0$ d.m.th. $a = \dfrac{bx - ab}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$, prej ku $x = a \pm \dfrac{a}{b}\sqrt{a^2 + b^2}$.

(7) $M(2, 3)$. (8) Le të jetë $M(x, y)$ një pikë nga vendi gjeometrik i kërkuar, d.m.th.

$\dfrac{3x - y + 7}{-\sqrt{10}} = \dfrac{3x - y - 3}{\sqrt{10}}$ prej ku fitohet $3x - y + 2 = 0$.



Domethënë, vendi gjeometrik i kërkuar është drejtëza $3x - y + 2 = 0$. (9) $2x + 4y - 3 = 0$.

(10) Ekzistojnë dy drejtëza të atilla $p_1 : x + y - 7 - 5\sqrt{2} = 0$ dhe $p_2 : x + y - 7 + 5\sqrt{2} = 0$.

10 (1) Mënyra I: Simetralja s e segmentit AB kalon nëpër mesin e tij $S(s_1, s_2)$ dhe është normale në segmentin, d.m.th. $s_1 = \dfrac{5+9}{2} = 7$, $s_2 = \dfrac{7+5}{2} = 6$, $k_s = -\dfrac{1}{k_{AB}} = -\dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$. Barazimi i kërkuar: $y - 6 = 2(x - 7)$ d.m.th. $2x - y - 8 = 0$.

Mënyra II: ***Udhëzim:*** Barazimi i simetrales së segmentit AB, mund të caktohet si vend gjeometrik i pikave, të cilat janë një lloj të larguara prej pikave A dhe B.

(2) $8x - 3y + 92 = 0$. (3) a) $\varphi = 26^0 33'35''$; b) $\varphi = 17^0 35'3''$. (4) $90^0, 45^0, 45^0$.

(5) Detyra ka dy zgjidhje $5x + y - 20 = 0$, $x - 5y + 22 = 0$. (6) $45^0, 135^0$. (7) 90^0.

(8) $4x - 4y + 3 = 0$ ose $2x + 2y - 7 = 0$. Udhëzim. Vendi gjeometri i pikave të kërkuara është simetralja e këndit. Le të jetë $M(x, y)$ çfarëdo pikë prej simetrales, atëherë largësia d_1 prej M deri te njëri krah është në largësi të barabartë d_2 prej pikës M deri te krahu tjetër, d.m.th. $\dfrac{|x - 3y + 5|}{\sqrt{1+9}} = \dfrac{|3x - y - 2|}{\sqrt{9+1}}$.

11 (1) $k_{AB} = \dfrac{1-2}{3+4} = -\dfrac{1}{7}$. Prej kushtit për paralelizëm $k_p = k_{AB} = -\dfrac{1}{7}$.

Drejtëza e kërkuar p kalon nëpër pikën $C(0, -2)$, pra $y - (-2) = -\dfrac{1}{7}(x - 0)$ prej ku e fitojmë barazimin $x + 7y + 14 = 0$. (2) Po, $m = -4$, $m = 4$. (3) Për $m = -3$ drejtëzat janë paralele, kurse për $m = 3$ ato puthiten. (4) $x + 2y - 5 = 0$; $x - 6y + 11 = 0$. ***Udhëzim:*** Drejtëza e kërkuar le të jetë $p: y - 2 = k(x - 1)$. Koeficientin k do ta caktojmë prej kushtit $d_1 = d_2$.

(5) a) $P=\sqrt{13}+\sqrt{53}+4\sqrt{2}$; b) $S = 10$; c) $\dfrac{20}{\sqrt{13}}, -20\sqrt{53}, \dfrac{5}{\sqrt{2}}$; ç) $5, \dfrac{1}{2}\sqrt{157}, \dfrac{1}{2}\sqrt{37}$.

(6) $x - y - 7 = 0$. (7) $x - 5y + 13 = 0,\ 5x + y - 17 = 0$. (8) $(2, -7)$. (9) $\left(-2, -\dfrac{5}{2}\right)$.

Udhëzim: Cakto projeksionin ortogonal të pikës A mbi drejtëzën.

12 (1) a) $x^2 + y^2 = 49$; b) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = \dfrac{25}{4}$; c) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$;

ç) $(x-2)^2 + (y-8)^2 = 25$. (2) E caktojmë largësinë d prej pikës deri te qendra e vijës rrethore, d.m.th. $d = \overline{AO} = 0$. Pika A puthitet me qendrën e vijës rrethore B shtrihet në vijën rrethore, C është jashta vijës rrethore, kurse D është në vijën rrethore.

(3) a) $C\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$, $r = \sqrt{2}$; b) $C(0,3)$, $r = 2$; c) $C\left(-\dfrac{5}{2}, 0\right)$, $r = 3$; ç) $C(0,0)$, $r = 6$.

(4) a) $r = q = 4$, $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 16$; b) $r = |p| = |-2| = 2$. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 4$.

(5) $p = 5$ dhe $r = |q| = 5\sqrt{2}$; $(x-5)^2 + (y \pm 5\sqrt{2})^2 = 50$. (6) Drejtëza i prenë boshtet e koordinatave në pikat: $M(-4,0)$, $N(0,3)$, $(2r)^2 = (-4)^2 + 3^2 = 25$, $r = \dfrac{5}{2}$; $p = -2$, $q = \dfrac{3}{2}$;

$(x+2)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$. (7) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$. (8) a) $(x-6)^2 + y^2 = 40$;

b) $x^2 + (y-3)^2 = 25$. (9) a) Koordinatat e qendrës p dhe q janë zgjidhje të sistemit $(5 - p)^2 + (-3 - q)^2 = 25$ dhe $(4 - p)^2 + (-3 - q)^2 = 25$; $C_1(8, 1)$; $C_2(1, -6)$; $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 25$; $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 25$. b) Qendra është në prerjen e simetrales së segmentit AB dhe drejtëzës së dhënë. Barazimi i vijës rrethore është $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$. (10) Prej kushteve vijon $p = -4$, $q = r$. Vija rrethore $(x + 4)^2 + (y - r)^2 = 22$ kalon nëpër $A(-5, 7)$.

$(-5 + 4)^2 + (7 - r)^2 = r^2$; $14r = 50$; $r = \dfrac{25}{7}$. Vija rrethore e kërkuar: $(x+4)^2 + \left(y - \dfrac{25}{7}\right)^2 = \left(\dfrac{25}{7}\right)^2$.

13 (1) $\lambda = 0$. Barazimi i vijës rrethore të kërkuar është $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 14$. $\lambda = 1$, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Za $\lambda = 5$ barazimi nuk është barazimi i vijës rrethore. (2) $\lambda = 6$.

(3) $|p| = |q|$. Prej $p = -\dfrac{\lambda - 6}{2}$, $q = \dfrac{\lambda + 2}{2}$, vijon $\left|\dfrac{\lambda - 6}{2}\right| = \left|\dfrac{\lambda + 2}{2}\right|$; $\lambda = 2$.

(4) a) $C(3, -2)$, $r = \sqrt{5}$; b) $C(2, -1)$, $r = \sqrt{5}$; c) $C\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$, $r = \dfrac{3}{2}$; g) $C\left(0, \dfrac{5}{4}\right)$, $r = \dfrac{5}{2}$.

(5) $(x-2)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{2} + 2\right)^2 = \dfrac{81}{4}$. (6) Barazimi i kërkuar është $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Zgjidhja e sistemit $\begin{cases} 3^2 + 5^2 + 3a + 5b + c = 0 \\ 4^2 + 4b + c = 0 \\ 4 - 2b + c = 0 \end{cases}$ është $a = -12$, $b + -2$, $c = -8$.

Barazimi është $x^2 + y^2 - 12x - 2y - 8 = 0$.

7 a) Detyrën 6 e zgjidhim me zgjidhjen e sistemit të barazimeve. Këtë detyrë do ta zgjidhim duke shfrytëzuar vetinë se qendra e vijës rrethore është në prerjen e sismetraleve të brinjëve. Barazimi i vijës rrethore është $(x-2)^2+(y-3)^2=25$.

b) $(x-4)^2+(y-6)^2=25$. **8** $R^2=\frac{290}{36}; S=4\pi R^2=101{,}18; V=\frac{4}{3}\pi R^3=95{,}77$.

9 $x^2+y^2-8x-9y+30=0$. **10** $(x-4)^2+(y-6)^2=25$.

14 **1** a) $y=2x+5;\ x^2+(2x+5)^2=50.\ A(1,7);\ B(-5,-5)$; b) $A(2,-1),\ B(-1,-2)$.

2 a) $C(0,0),\ r=5;\ d=\left|\frac{Ap+Bq+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|;\ d=\left|\frac{1\cdot 0+3\cdot 0-15}{\sqrt{1^2+3^2}}\right|=\frac{15}{\sqrt{10}}<r$, drejtëza e prenë vijën rrethore.

b) $C(1,-2),\ r=\sqrt{5};\ d=\left|\frac{1\cdot 1-2\cdot(-2)-10}{\sqrt{1+4}}\right|=\sqrt{5}.\ d=r$, drejtëza e prek vijën rrethore.

c) $d=\frac{15\sqrt{2}}{2}>r$, drejtëza dhe vija rrethore nuk kanë pika të përbashkëta.

3 a) $C(5,0),\ r^2=18,\ r^2(A^2+B^2)=(Ap+Bq+C)^2,\ 18(1+B^2)=(5+1)^2,\ B=\pm 1$; b) $A=-3$.

4 a) $p=\pm 6$; b) $q\in\{8,-2\}$. **5** a) $t: y-y_1=k(x-x_1),\ y=kx+5k,\ r^2(k^2+1)=n^2$,

$9(k^2+1)=(5k)^2,\ k=\pm\frac{3}{4};\ t_1: 3x-4y+15=0,\ t_2: 3x+4y+15=0$. b) $C(-2,1),\ r=5$.

$t: y=kx+3k+6,\ r^2(k^2+1)=(kp-q+n)^2,\ 25(k^2+1)=(-2k-1+3k+6)^2,\ k=0;\ k=\frac{5}{12}$.

$t_1: y=6;\ t_2=\frac{5}{12}x+\frac{29}{4}$. **6** $C(2,3),\ r=5,\ k=\frac{4}{3},\ t: y=kx+n,\ r^2(k^2+1)=(kp-q+n)^2$,

$25\left(\frac{16}{9}+1\right)=\left(\frac{4}{3}\cdot 2-3+n\right)^2;\ \frac{625}{9}=\left(\frac{-1}{3}+n\right)^2;\ n-\frac{1}{3}=\pm\frac{25}{3};\ n=\pm\frac{25}{3}+\frac{1}{3},\ n_1=\frac{26}{2},\ n_2=-8$.

$t_1: y=\frac{4}{3}x+\frac{26}{3},\ t_2: y=\frac{4}{3}x-8$. **7** $C(0,0),\ r^2=5,\ k_p=\frac{1}{2},\ k_t=-2,\ r^2(k_t^2+1)=n^2,\ n=\pm 5$.

$t_1: y=-2x\pm 5$. **8** a) $C(0,4),\ r^2=16,\ t: y-4=k(x-8),\ y=kx-8k+4$.

$16(k^2+1)=(-4-8k+4)^2,\ k_1=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ k_2=\frac{\sqrt{3}}{3},\ t_1: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{8\sqrt{3}}{3}+4,\ t_2: y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{8\sqrt{3}}{3}+4$.

$tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3},\ \varphi=60^0$; b) $\varphi=90^0$. **9** $m=6,\ t: \frac{x}{6}+\frac{y}{n}=1;\ nx+6y-6n=0$.

$C(5,3),\ r^2=5.\ 5(n^2+6^2)=(5n+18-6n)^2;\ n_1=3,\ n_2=-12.\ t_1: x+2y-6=0;\ t_2: 2x+y-12=0$.

10 $x+2y+5=0$. ***Udhëzim:*** Shkruaji barazimet e tangjentave të tërhequra prej pikës P. Zgjidhe sistemin e barazimeve: çdo barazim i tangjentës me vijën rrethore, nëpër pikat e fituara që janë zgjidhje të sistemit shkruaje barazimin e drejtëzës.

11 $x^2+y^2+4x-2y-20=0$ dhe $(x-48)^2+(y-1)^2=35^2$. ***Udhëzim:*** Zgjidhe sistemin e barazimeve $r^2(3^2+4^2)=(3p-4+35)^2$ dhe $r^2(4^2+3^2)=(4p+3-20)^2$.

(12) $(x-1)^2+(y+2)^2=16$. ***Udhëzim.*** Zgjidhe sistemin e barazimeve $\begin{cases} 2p+q=0 \\ r^2\cdot 25=(4p-3q+10)^2 \\ r^2\cdot 25=(4p-3q-30)^2 \end{cases}$.

15 (1) a) $xx_1+yy_1=5$; $x-2y+5=0$; b) $3x+4y-19=0$; c) $p=-4$, $q=0$, $r^2=25$, $4x+3y+41=0$. (2) a) $(1+3)^2+(y-1)^2=20$, $(y-1)^2=4$, $y-1=\pm2$, $T(1,3)$, $2x+y-5=0$; b) $T(-3,-1)$, $3x+y+10=0$. (3) a) $T_1(1,3)$, $t_1:\ 2x+y-5=0$; $T_2(1,-1)$, $2x-y-3=0$. b) $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\dfrac{2+2}{1+2(-2)}=-\dfrac{4}{3}$, $\varphi=arctg\dfrac{4}{3}$. (4) Drejtëza e prenë vijën rrethore në pikat: $A(-5,0)$, $B(7,4)$. $t_1: 7x-y+35=0$; $t_2: x+y-11=0$. Tangjentat priten në $C(-3,14)$. $P_\Delta=97{,}5$.

(5) Pikëprerjet janë $A(5,0)$, $B(3,4)$, tangjentat janë $x=5$ dhe $3x+4y-25$, $\varphi=143^0$.

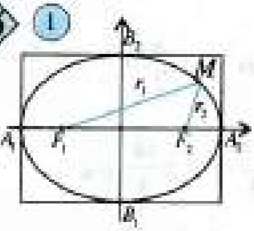
$$tg\,\varphi=\frac{k_p-k_t}{1+k_p\cdot k_t}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)}=1,\ \varphi=45^0.$$

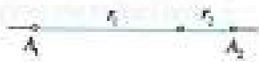
(6) $A(2,-1)$, $t: x+2y=0$.

(7) a) $A(2,\ 2)$, $B(2,\ -2)$; b) Nuk kanë pika të përbashkëta; c) preken në pikën $D(4,\ 7)$.

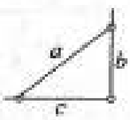
(8) a) 30^0; b) 60^0. ***Udhëzim:*** këndi ndërmjet dy vijave rrethore është këndi ndërmjet tangjentave të tyre të tërhequra në pikëprerjet.

16 (1)





$r_1+r_2=2a$



$b^2=a^2-c^2$

fig 11

Janë dhënë F_1, F_2 dhe pika M. Grafikisht e caktojmë boshtin e madh $2a=A_1A_2=r_1+r_2$. Konstruktojmë trekëndësh kënddrejtë me katete c dhe hipotenuzë a. Kateta e dytë është gjysmëboshti b, fig. 11.

(2) a) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{13}=1$; b) Prej $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ vijon $\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{c}{3}$, $c=\sqrt{5}$, pra $b^2=a^2-c^2$, $b^2=9-5=4$; c) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$. (3) $F\left(\pm4\sqrt{3},0\right)$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\pm\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

(4) Prej $\dfrac{25}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1$ dhe $18=a^2-b^2$ vijon $b^4-23b^2-288=0$, $b^2=32$, $a^2=50$; $\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{y^2}{32}=1$.

(5) a) $2x^2+3y^2=35$; b) $49x^2+100y^2=4900$. (6) $8+2=10=2a$; $8-2=6=2c$; $a=5$; $c=3$; $b=4$; $16x^2+25y^2=400$. (7) Pika A është në elipsë, B është në elipsë, C jashtë elipsës dhe D është në elipsë.

(8) $9x-40y-72=0$, $x-8=0$. (9) Të dy elipsat janë fokale nëse fokusët u puthiten. Barazimi i elipsës së kërkuar është $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{54}=1$.

(10) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1.$

17 (1) a) Prej elipsës vijon $a^2=40,\ b^2=24$, prej drejtëzës vijon $k=-1,\ n=8$. Prej kushtit $a^2k^2+b^2-n^2=40\cdot(-1)^2+24-8^2=0$, vijon se drejtëza e prek elipsën.
b) drejtëza e prenë elipsën; c) drejtëza dhe elipsa kanë pika të përbashkëta.

(2) a) $(3,-3);\left(\frac{69}{13},\frac{21}{13}\right)$; b) drejtëza dhe elipsa nuk kanë pika të përbashkëta.

(3) a) Prej drejtëzës vijon $k=-1$, prej elipsës $a^2=20,\ b^2=5$. Prej $a^2k^2+b^2-n^2>0$ vijon $20\cdot(-1)^2+5-n^2>0,\ 25-n^2>0,\ n\in(-5,5)$; b) $a^2k^2+b^2-n^2=0,\ n=\pm3$.
c) $n\in(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$. (4) $a^2A^2+b^2B^2-C^2=0,\ 20+5p^2-100=0,\ p=\pm4.$

(5) 90^0. ***Udhëzim:*** Shkruaji barazimet e të dy tangjentave të tërhequra prej pikës M.

(6) Prej elipsës $a^2=30,\ b^2=24$. Prej drejtëzës $k_p=2$ pra $k_t=k_p=2$. Prej kushtit për prekje $n^2=a^2k^2+b^2$; $n^2=30\cdot2^2+24=144,\ n=\pm12\ \ t:\ y=2x\pm12.$

(7) $8x+3y+35=0;\ 8x+3y-35=0.$ (8) Le të jetë $y=kx+n$ tangjenta e kërkuar. Prej drejtëzës vijon $k_p=\frac{1}{5}$ dhe le të jetë $k=k_t$. Prej $tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k}$ vijon $tg\,45^0=1=\frac{k_t-\frac{1}{5}}{1+\frac{k_t}{5}}$,

$k_t=\frac{3}{2}$ ose $tg\,45^0=1=\frac{\frac{1}{5}-k_t}{1+\frac{k_t}{5}},\ k_t=-\frac{2}{3}$. Prej kushtit për prekje: për $k_t=\frac{3}{2}\ \ n^2=28\cdot\frac{9}{4}+\frac{28}{3}$

$n=\pm\sqrt{\frac{217}{3}}$ pra $t:y=\frac{3}{2}x\pm\sqrt{\frac{217}{3}}$. Për $k_t=-\frac{3}{2}\ \ n^2=28\cdot\frac{4}{9}+\frac{28}{3}\ \ \ n=\pm\frac{14}{3}$, pra

$t:y=-\frac{2}{3}x\pm\frac{14}{3}$. (9) Prej $2+4y-10=0,\ y=2$, pra $M(2,2)$. Prej $\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$ dhe $a^2A^2+b^2B^2=C^2$, vijon $a^2+16b^2=100$. Zgjidhja e sistemit është $a^2=20,\ b^2=5$. Barazimi e elipsës është $x^2+4y^2=20$.

(10) Prej kushtit $a^2A^2+b^2B^2=C^2$ vijon $a^2+b^2=64$ dhe $a^2+9b^2=256$. Zgjidhja është $a^2=40,\ b^2=24$, kurse barazimi i elipsës është $3x^2+5y^2=120$.

18 (1) $t:\ x+4y-10=0.$ (2) $T\left(3,\frac{12}{5}\right)$, $9x\cdot3+25\cdot y\cdot\frac{12}{5}=225;\ 9x+20y-75=0.$

(3) Barazimi i kërkuar është normalja e elipsës në pikën prekëse. Normalja e elipsës është drejtëz e elipsës që kalon nëpër pikën e dhënë të elipsës, por është normale në tangjentën e elipsës në pikën. Pika prekëse është $T(-5,2)$. Prej tangjentës vijon $k_t=\frac{1}{2}$, kurse prej kushtit për drejtëza normale vijon $k_n=-\frac{1}{k_t}$, t.e. $k_n=-2$, pra

$n: y-y_1=k_n(x-x_1);\ y-2=-2(x+5);\ 2x+y+8=0.$ 4 $A(4,-1),\ B(2,2).$

$t_1: x-y-5=0;\ t_2: x+y-10=0,\ t_1\cap t_2=C(7{,}5;\ 2{,}5).\ P_\Delta=6{,}25.$

5 $t_M: 3x+4y-24=0;\ t_N: 3x+4y+24=0.$ Tangjentat janë paralele.

6 $A(3,-1),\ B(1,2);\ t_A:\ 9x-8y-35=0,\ t_B:\ 3x+16y-35=0\ \ \varphi\approx 59^0.$

7 Nëse çdo normale kalon nëpër qendrën e elipsës, atëherë koordinatat e elipsës pika $O(0,0)$ e kënaq barazimin e çdo normale. Pra duke zëvendësuar në barazimin e normales prej këtu vijon $a^2=b^2$, d.m.th. elipsa është vijë rrethore.

$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1),\ k_n=-\frac{1}{k_1}$, kemi $0-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(0-x_1).$

8 Pika $M\left(2,\frac{2\sqrt{5}}{3}\right),\ t:\ 4x+3y\sqrt{5}-18=0.\ F_1\left(-\sqrt{5},0\right),\ F_2\left(\sqrt{5},0\right).$

Normalet e kërkuara kalojnë nëpër fokusët F_1 dhe F_2, por janë normale në tangjentat.

$n_1: 3\sqrt{5}x-4y+15=0;\ n_2: 3\sqrt{5}x-4y-15=0.$

19 1 a) Prej $b^2=c^2-a^2$ vijon $b^2=9$, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1;$ b) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1;$

c) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ose $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$ 2 $a^2=64,\ b^2=36.$ a) $a=8,\ b=6;$ b) $F(\pm10,0);$

c) $\varepsilon=\frac{5}{4};$ ç) $y=\pm\frac{3}{4}x.$ 3 $\frac{81}{a^2}-\frac{16}{2}=1,\ a^2=9,\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1.$ 4 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$

5 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1.$ 6 $3x^2-y^2=12.$ ***Udhëzim:*** $c=4$, për hiperbollën shfrytëzohet $c^2=a^2+b^2$ dhe

$\varepsilon=\frac{c}{a}.$ 7 Prej $\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ dhe $\frac{36}{a^2}-\frac{81}{b^2}1$, vijon $a=\frac{24}{5},\ b=12,$ pra barazimi i hiperbollës është

$\frac{25x^2}{576}-\frac{y^2}{144}=1.$ 8 a) $3x^2-8y^2=16;$ b) $4x^2-9y^2=63.$ 9 Le të jetë $M(x_1,y_1)$

pika e kërkuar e hiperbollës. Prej $7=\sqrt{(x_1+5)^2+y_1^2}$ dhe $\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{16}=1$, vijon

$x_1=6$ dhe $y_1=\pm4\sqrt{3}$, d.m.th. $M(-6,\pm4\sqrt{3})$. 10 $x^2-y^2=a^2,\ a^2=25-16=9;\ x^2-y^2=9.$

20 1 a) $A(3,0),\ B\left(\frac{51}{8},\frac{15}{2}\right);$ b) $A(6,2),\ B\left(\frac{14}{3},-\frac{2}{3}\right).$

2 a) $a^2=9, b^2=36, k=2, n=3$, pra $b^2+n^2-a^2k^2=36+9-9\cdot4=9>0.$ Drejtëza e prenë hiperbollën; b) e prek hiperbollën; c) drejtëza dhe hiperbolla nuk kanë pika të përbashkëta.

3 Prej $a^2=20, b^2=5$ dhe $n=-\frac{5}{2}$ vijon $20\cdot k^2-5=\frac{25}{4};\ k=\pm\frac{3}{4}.$ 4 $a^2\cdot2^2-16=64,$

$a^2=20;\ 4x^2-5y^2=80.$ 5 $t:\ y+4=k(x+1);\ y=k\cdot x+k-4.$ Prej $a^2k^2-b^2=n^2$ vijon

$25\cdot k^2-16=(k-4)^2,\ k_1=1,\ k_2=-\frac{4}{3}.$ Tangjentat e kërkuara janë $t_1:\ y=x-3,$

$t_2: 4x+3y+16=0.$

6 a) $k_t = k_p = -1$. Prej kushtit për prekje vijon $n^2 = a^2k^2 - b^2$;

$n^2 = 15\cdot(-1)^2 - 6 = 9$; $n = \pm 3$; $t:\ y = kx + n$; $y = -x \pm 3$; b) $t:\ y = -2x \pm 3\sqrt{6}$.

7 Prej $a^2k^2 - b^2 = m^2$, vijon $m = \pm 1$, pra

$t: x + y \pm 1 = 0$. 8 $A\left(\frac{25}{4}, 3\right)$; $B\left(-\frac{25}{4}, 3\right)$. Barazimi i normales është

$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$. Normalja në pikën A është $12x + 16y - 123 = 0$. Normalja në pikën B është

$12x - 16y + 123 = 0$. Normalet priten në pikën $C\left(0, \frac{123}{16}\right)$. $P_\Delta = \frac{1875}{32}$.

9 $c = 3$, prej $a^2 + b^2 = 9$ dhe $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$ vijon $a^2 + b^2 = 9$ dhe $a^2 + 4b^2 = 16$.

$a^2 = \frac{20}{3}$, $b^2 = \frac{7}{3}$, $\frac{3x^2}{20} - \frac{3y^2}{7} = 1$. 10 Le të jetë $t:\ y = kx + n$, $k_p = -\frac{1}{7}$. Prej $k = \frac{3}{4}$ ose

$1 = \dfrac{-\frac{1}{7} - k}{1 - \frac{k}{7}}$, $k = -\frac{4}{3}$. Prej $4\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2 = n^2$, $n = \pm\frac{1}{2}$, kurse prej $4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 2 = n^2$,

$n = \pm\frac{\sqrt{46}}{3}$. Barazimet e tangjentave janë $y = \frac{3}{4}x \pm \frac{1}{2}$ ose $y = -\frac{4}{3}x \pm \frac{\sqrt{46}}{3}$.

21 1 a) $y^2 = 2px$, pra $36 = 2\cdot p\cdot 9$, $p = 2$, $y^2 = 4x$ b) $x^2 = 2py$, $16 = 2\cdot p\cdot 8$, $p = 1$,

pra $x^2 = 2y$. 2 Parabolla është e formës $y^2 = -2px$, $p = 7$, pra barazimi është $y^2 = -14x$.

3 a) $y^2 = 4x$; b) $y^2 = -2x$; c) $y^2 = -18x$. 4 Prej $y^2 = 18x$ vijon $2p = 18$, $p = 9$.

$F\left(\frac{9}{2}, 0\right)$, $x = -\frac{9}{2}$. 5 Prej $6^2 = 9x$ vijon $x = 4$, pra $M(4,6)$, $F\left(\frac{9}{4}, 0\right)$.

$\overline{MF} = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 4\right)^2 + 6^2} = \frac{25}{4}$. 6 Le të jetë $M(x_1, y_1)$ pikë prej arabollës $y^2 = 16x$, vijon

$y_1^2 = 16x_1$, $F(4,0)$, pra $13^2 = (x_1 - 4)^2 + y_1^2$; $169 = x_1^2 - 8x_1 + 16 + 16x_1$;

$x_1^2 + 8x_1 - 153 = 0$, $x_1 = 9$, $x_1 = -17$. Për $x = 9$, $y^2 = 16\cdot 9$, $y = \pm 12$. $A(9,12)$, $B(9,-12)$. Për

$x_1 = -17$, $y \notin R$. 7 Prej $y^2 = 10x$, $p = 5$, $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $x = \frac{5}{2}$ dhe $y^2 = 10\cdot\frac{5}{2}$, $y = \pm 5$. $A\left(\frac{5}{2}, 5\right)$

$B\left(\frac{5}{2}, -5\right)$, $\overline{AB} = 10$. 8 Prej $y^2 = 8\cdot 4{,}5$ vijon $y = \pm 6$, pra $M(4{,}5;6)$ dhe $F(2,0)$. Drejtëza e

kërkuar është $MF:\ y - 6 = \frac{-6}{2 - 4{,}5}(x - 4{,}5)$; $12x - 5y - 30 = 0$.

(9) Prej kushtit vijon se kulmet e bazës së trekëndëshit barakrahas janë $A(4, 3)$, $B(4, -3)$ ose $A_1(-4, 3)$, $B_1(-4, -3)$, fig. 12. Parabollat janë $y^2 = \frac{9}{4}x$ ose

$y^2 = -\frac{9}{4}x$.

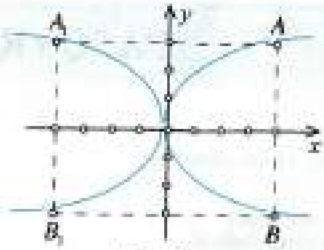


fig. 12

(10) Le të jenë $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_1, -y_1)$ kulmet e bazës së ΔAOB, atëherë $\overline{AB} = 2y_1$ është brinja e trekëndëshit. Prej $\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2y_1$, vijon $x_1^2 + y_1^2 = 4y_1^2$ dhe $y_1^2 = 6x_1^2$, d.m.th. $x_1^2 - 18x_1 = 0$ ose $x_1 = 18$ dhe $y_1 = 0$ ose $y_1 = \sqrt{108} = \pm 6\sqrt{3}$. Koordinatat e kulmeve të trekëndëshit janë $O(0,0)$, $A(18, 6\sqrt{3})$, $B(18, -6\sqrt{3})$.

Brinja e trekëndëshit $a = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$, kurse ,

$S = \frac{(12\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3}$, fig. 13.

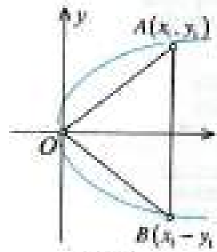


fig. 13

22 (1) a) $A(4, -4)$, $B(1, 2)$; b) $A(3, -4)$, $B\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. (2) Prej kushtit $pB^2 = 2A \cdot C$ vijon $10 \cdot 2^2 = 2 \cdot 5 \cdot n$, $n = 4$. (3) a) $t: y - 8 = k(x-6)$, $y = kx - 6k + 8$. Prej $p = 2kn$, vijon $t_1: y = x + 2$, $t_2: x - 3y + 18 = 0$; b) $x - 2y - 9 = 0$.

(4) a) $t: y + 2 = k(x+2)$; $y = kx + 2k - 2$. Prej $p = 2kn$; $8 = 2k(2k-2)$. $8 = 4k^2 - 4k$, $k^2 - k - 2 = 0$. $k_1 = 2$, $k_2 = -1$. $t_1: y = 2x + 2$; $t_2: y = -x - 4$; b) 71^0. (5) a) $y = 3x + 1$; b) $x - 2y + 12 = 0$; c) ose $x - 3y + 27 = 0$.

(6) Normalja e parabollës është drejtëz e cila kalon nëpër pikën e dhënë prej parabollës dhe normales në tangjentën e parabollës në atë pikë.

$t: yy_1 = p(x + x_1)$; $t: 3x + 2y + 3 = 0$, $k_t = -\frac{3}{2}$, $k_n = \frac{2}{3}$, $n: y + 3 = \frac{2}{3}(x - 1)$;

$n: 2x - 3y - 11 = 0$.

PASQYRA E KONCEPTEVE

PËRMBAJTJA

Autorë: Borivoe Miladinoviq, Nikolla Petreski

Recensentë:

d-r Boro Piperevski - profesor në fakulltetin elektroteknik - Shkup
Pavlina Tojtovska - profesoreshë në ShShAM „Braqa Miladinovci'' - Shkup
Lidija Kostova - profesoreshë, ShShAM „Orce Nikollov''-Shkup

Konsulltantë profesional: Trajçe Gjorgjievski,
Katica Spasovska - Binçeva

Redaktor kryesor: Biljana Angelova

Me vendim të Ministrit të Ministrisë për arsim dhe shkencë të Republikës së Maqedonisë 07-5822/1 prej 23.09.2003 ky libër lejohet për përdorim në arsimin e gjimnazit

"ALBI" DOO Shkup, Rr. Dame Gruev nr.7-7/2 Shkup
Vendi dhe viti i botimit të parë: Shkup 2003

Botues:
SHOQËRIA PËR VEPRIMATRI BOTUESE
"ALBI" d.o.o. Shkup
Rr. "Dame Gruev" Nr. 7-7/2 Shkup
Drejtor: Aleksandar Stefanovski

Borivoe Miladinoviq, Nikolla Petreski

MATEMATIKA

për vitin III të arsimit të gjimnazit

Përktheu: Muzafer Beqiri

Përpunimi Kompjuterik: Dragan Shopkoski, Millço Avramoski

Korrekturë: Përkthyesi

Botimi i korrigjuar XVIII
Sasia 290 faqe, format 17x23 cm
Tirazhi 181 kopje
Botuar në shtypshkronjën "Shtypshkronjën Naumovski" DOOEL - Shkup
Rr. Pekljane nr.71 Shkup
Shkup 2020

CIP - Katalogizacija vo publikacija na Narodna i univerzitetska biblioteka "Sv. Kliment Ohridski" - Skopje
51(075.3)

MILADINOVIÇ, Borivoje
Matematika : za III godina, gimnazisko obrazovanie / Borivoje Miladinoviç, Nikola Petreski - Skopje : Albi, 2003 - 290 str. : ilustr. ; 23 cm
ISBN 9989 - 919 - 96 - 8
1. Petreski, Nikola