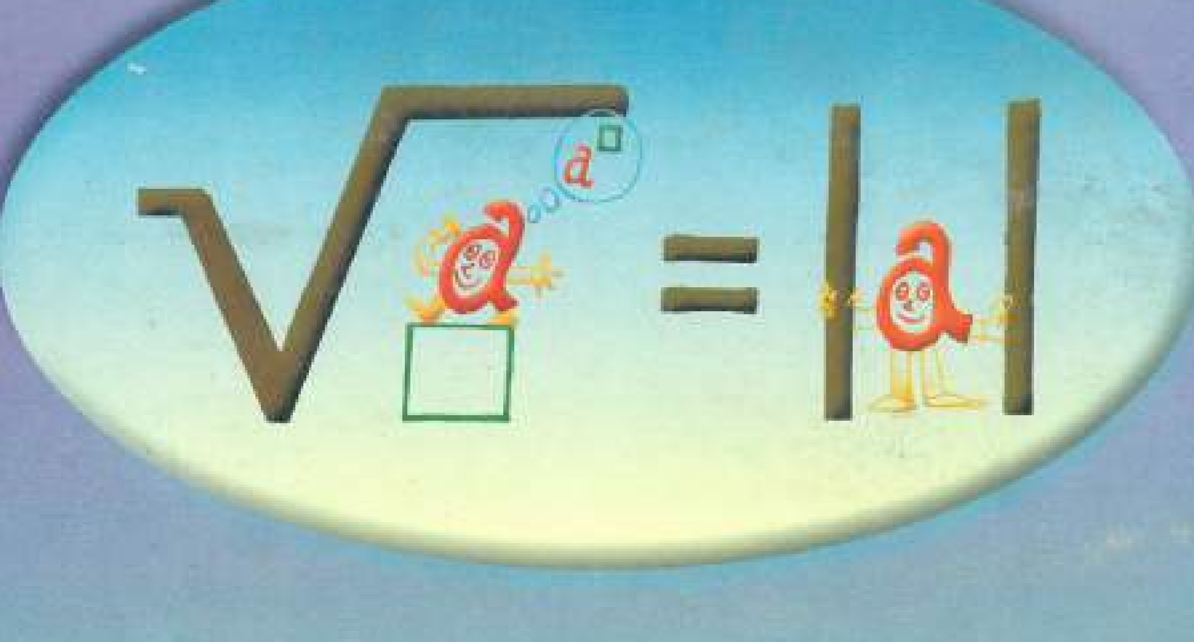
MATEMATIKA

VITI I



drejtimi i gimnazit

Borivoje Miladinoviq
Trajçe Gjorgjijevski
Nikola Petreski

MATEMATIKA

VITI I

DREJTIMI I GJIMNAZIT

2004

PARATHËNËJE

Libri të ndihmon për mësimin e matematikës në vitin e parë. Nëse je aktiv dhe i rregullt në punë, ai ndihmon që të përfitosh njohuri të cilat do të sjellin kënaqësi dhe sukses gjatë mësimit.

Libri është ndarë në nëntë njësi tematike. Njësitë tematike fillojnë me numërimin e koncepteve me të cilat do të ndeshesh gjatë përpunimit të temës , kurse njësitë mësimore janë të numëruara.

Vështroni shenjat në njësitë mësimore dhe mbani mend domethënien e tyre.

Kujtohu! Njësitë mësimore fillojnë me diçka të cilën e ke të njohur. Duhet të kujtohesh dhe t'i zgjidhish kërkesat e dhëna. Kjo do ta lehtëson të mësuarit e përmbajtjeve të tyre.

A, B, ... Me këto shenja njësia mësimore është e ndarë në pjesë të cilat u përgjigjen koncepteve përkatëse.

1, 2, 3, ... Me këto shenja janë shënuar aktivitetet, pyetjet dhe detyrat të cilat do t'i zgjidhish në orën mësimore vetë ose me ndihmën e arsimtarit tënd .

- Me shenjën rreth të është parashtrur pyetje të cilës duhet t'i japish përgjigje.

- Me këtë shenjë është dhënë informim për konceptit e ri.

Mbani mend! Kjo të sqaron çka është me rëndësi për konceptin e ri.

Vëreni: Këto dy porosi të vënë në dijeni se duhet tu kushtosh më shumë vëmendje.

Në përgjithësi:

***Detyra*:** Në secilën njësi mësimore janë dhënë detyra. Duke i zgjidhur këto detyra rregullish

1, 2, 3, ... dhe në mënyrë të pavarura më mirë do ta kuptosh pjesën e mësuar. Përgjigjet tuaja krahasoni me përgjigjet dhe zgjidhjet të cilat janë dhënë në fund të librit.

Ushtrime tematik konstrollues Në fund të çdo teme është dhënë ushtrim kontrollues me pyetje dhe detyra. Detyrat zgjidhi vetë , me çka do të kontrollosh njohuritë e tua nga tema e kaluar. Kur do të hasish në përmbajtje të cilat vështirë i kuptohen , mos u dorëzo, provo përsëri me këmbëngultësi.

Do të gëzohemi nëse ky libër të ndihmon të arrish sukses të shkëlqyeshëm.

Nga autorët

TEMA 1

MATEMATIKA LOGJIKE DHE BASHKËSITË

Nuk ka mjeshtri te atą shkenca te të cilat nuk përdoret matematika.

Leonardo da Vinçi (1452-1519)

Në këtë temë do të mësohen:

- gjykimi, vlera e vërtetësis së gjykimit;
- operacionet me gjykime, konjuksioni, disjunksioni, implikacioni, ekuivalenca;
- formula gjykimore, ligjet logjike, tautologjitë;
- aksioma, teorema, vërtetimi i teoremave;
- bashkësia, nënbashkësia, bashkësi ekuivalente;
- operacionet me bashkësi: unioni, prerja, diferenca;
- prodhimi i dekartit;
- vetitë e operacioneve me bashkësi.

1 KUPTIMI PËR GJYKIM. NEGACIONI

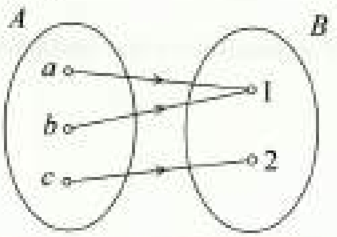
Kujtohu!

- Çfarë fjalish janë?
- B është bashkësi e fjalive rrëfyese (deklarative)

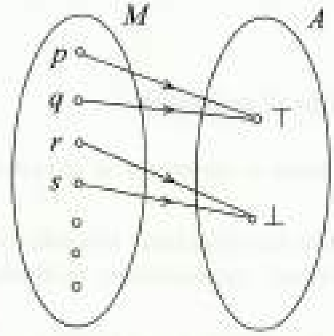
  C është bashkësi e fjalive pyetëse.

  D është bashkësi e fjalive të menduara.

  E është bashkësi e fjalive për të cilat ka kuptim të bëhet pyetje për vërtetësinë e tyre.
- Le të jetë A bashkësi prej dy elementeve: $\top$ (te) dhe $\bot$ (jo te).
- Shkruani bashkësinë A tabelarisht dhe me diagram të Venit.
- Prej çfarë fjalish është bashkësia përkatëse $B \cap D \cap E$?
- f është pasqyrim i A në B.



$\mathscr{A}$ Le të jetë $M = \{p, q, r, s, ...\}$ bashkësi e fjalive deklarative të menduara për të cilat ka vend pyetje për vërtetësi, kurse τ pasqyrim prej M në $A = \{\top, \bot\}$.



Elementet e M i quajmë gjykime.
Për shembull:

1. Fjalia p: Lumi Vardar kalon nëpër Manastir.

Me $\tau(p)$ e shënojmë vlerën logjike (vërtetësinë) të gjykimit p, në shembullin $\tau(p) = \bot$.

2. Fjalia q: „Trekëndëshat shkojnë në kinema ", nuk është gjykim sepse nuk është fjali me kuptim.

3. Fjalia r: „Matematika është lëndë interesante ", nuk është gjykim sepse $\tau(r) = \top$, kurse për ndonjë mundet $\tau(r) = \bot$.

4.Fjalitë:"Dua që $5^2 = 7$ "; "Mendoj se $2 + 3 > 4$ "; "Kam dëshirë që trekëndëshi të jetë barabrinjës ", nuk janë gjykime sepse nuk mund të bëhet fjalë për vërtetësinë e tyre.

1 Caktoni se cilat nga fjalitë janë gjykime:

a) Mendoj se $2 = 3$; b) $x + 2 = 5$ për $x = 1$; c) $7 > 3$; ç) A është $3 < 8$;
d) $2x + 3 = 1$; e) Trekëndëshi ka tre kulme.

2 Trego cili nga gjykimet është i vërtet:

a) $10 - 2 \cdot 3 = 4$; b) $x + 7 = 4$ për $x = -3$; c) 1 është numër i thjeshtë; d) $2^3 = 6$.

3 Cakto me çka është e barabartë:

a) $\tau(3 + 4 = 8)$; b) $\tau(2|8)$; c) τ(2 është numër i përbërë); d) $\tau(x + 1 = 1$ për $x = 0)$.

- a) $\tau(3 + 4 = 8) = \bot$.

Mbani mend!

Fjalia deklarative (rrëfyese) e cila ka kuptim dhe e cila është e vërtet ose jo e vërtetë quhet ***gjykim***.

Kujtohu!

- Le të jetë dhënë gjykimi p: Agimi shkruan me laps.
- Çka është gjykimi, Agimi nuk shkruan me laps.

$\mathscr{B}$ Le të jetë p gjykim. Gjykimi jo p quhet negacion i gjykimit p dhe e shënojmë me $\neg p$.

Nëse gjykimi p është i vërtet, atëherë gjykimi $\neg p$ është jo i vërtet dhe anasjelltas, nëse $\neg p$ është i vërtet, atëherë p është jo i vërtet.

4 Mohoni gjykimet që vijojnë:

a) Numri 7 është i thjeshtë; b) Shkupi është kryeqyteti i R M; c) Viti ka 10 muaj.

Duhet të dish!

Vlerat e vërtetësis së gjykimit p mund t'i paraqesim me tabelë

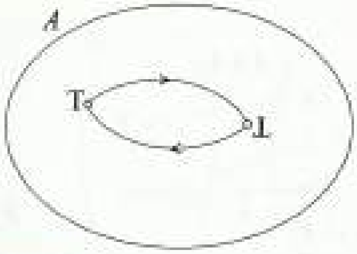
$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$
T	$\perp$
$\perp$	T

ose më shkurt

p	$\neg p$
T	$\perp$
$\perp$	T

, përkatësisht

si pasqyrim $\neg: A \to A = \{T, \perp\}$.



5 Shkruani negacionin e gjykimeve:

a) $2>0$; b) $5 \leq 1$.

- $\neg(2>0)$ mund të shkruhet $2 \leq 0$.

6 Caktoni vlerën e vërtetësis së gjykimeve:

a) Diagonalet e katrorit nuk janë të barabarta;

b) $x+5=3$ za $x=2$;

c) Numri π është më i vogël se 3,14.

Vëreni!

Negacioni i shenjës $>$ është $\leq$; e $\geq$ është $<$; e $<$ është $\geq$; e $\leq$ është $>$.

Detyra:

1 Caktoni cilat fjali janë gjykime:

a) Numri 82 është tek; b) Mirdita; c) $2|x$, $x \in \mathbb{N}$;

2 Shkruani negacionet e fjalive:

a) $\neg(9>3)$; b) $\neg(3+5=7)$; c) $\neg(4^3=30)$; d) $\neg(6\neq 9)$.

2 KONJUKSIONI. DISJUNKSIONI

Kujtohu!

- Le të jenë dhënë gjykimet
  p: 7 është numër i thjeshtë,
  q: 7 është numër çift.

Lidhi këto gjykime me lidhëzën "dhe ".

- Dyshes (2,3) korespondoi numrin:
  a) me operacionin +;
  b) me operacionin ·.

$\mathscr{A}$ Dy gjykime të lidhura me lidhëzen "dhe " përbëjnë gjykim i cili quhet ***konjuksion***.

Konjuksioni është i vërtet ,kur të dy gjykimet janë të vërtetë, kurse jo i vërtet në të gjitha rastet tjera.

Konjuksionin e gjykimeve p dhe q e shënojmë $p \wedge q$.

1 Le të jenë $p: 2|6$, $q: 3<2$ gjykime. Konjuksioni i gjykimeve p dhe q është: $p \wedge q$: $2|6 \wedge 3<2$.

Duhet të dish!

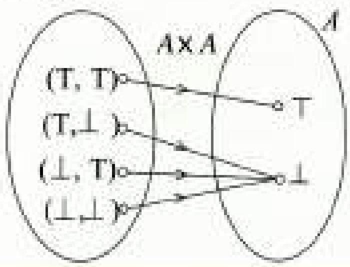
Vlera e vërtetësis së konjuksionit $p \wedge q$ varet nga vlerat e vërtetësis së gjykimeve p dhe q dhe atë varshmëri do ta paraqesim me tabelë:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Në tabelën $p, q, p \wedge q$, $\tau(p)$, $\tau(q)$ dhe $\tau(p \wedge q)$ shkurtimisht janë shënuar

Me operacionin $\wedge$ çdo dyshe gjykimesh (p,q) i përgjigjet gjykim i përbër $p \wedge q$ në mënyrën që vijon:

$\wedge: A \times A \to A$



2 Caktoni vlerën e vërtetësis për gjykimet:

a) Numri 8 pjesëtohet me 4 dhe 3 është pjesëtues i 6; b) $3>7$ dhe $5=7$; v) $2^3=6$ dhe $3^2=6$.

a) $\tau(p \wedge q) = \tau(p) \wedge \tau(q) = \mathrm{T} \wedge \mathrm{T} = \mathrm{T}$.

Kujtohu!

- Gjykimet $p: 5>3$, $q: 2|3$, lidhi me lidhëzën "ose ".
- A është i vërtet gjykimi i ri?

$\mathscr{B}$ Dy gjykime të lidhura me lidhëzën "ose " formojnë gjykim i cili quhet ***disjunksion***.

Disjunksionin e gjykimeve p dhe q e shënojmë me $p \vee q$.

Gjykimi $p \vee q$ është jo i vërtet vetëm nëse p dhe q janë jo të vërtet, kurse në të gjitha rastet tjera është i vërtet.

3 Le të jenë $p: 7<5$; $q: 2+3=5$ gjykime. Disjunksion i këtyre dy gjykimeve është:
$p \vee q: 7<5$ ose $2+3=5$.

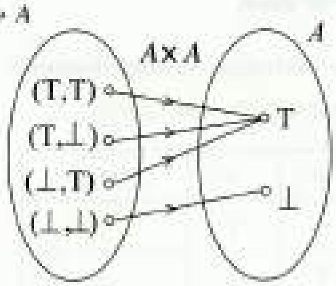
Duhet të dish!

Vlera e vërtetësisë së disjunksionit $p \vee q$ varet nga vlera e vërtetësis së p dhe q dhe atë varshmëri mund ta japim me tabelë:

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Në tabelën, $\tau(p)$, $\tau(q)$, $\tau(p \vee q)$ shkurtimisht janë shënuar me p, q, $p \vee q$.

$\vee: A \times A \to A$



Me operacionin $\vee$ çdo dyshes së rëditur gjykimesh (p,q) i korespondon gjykim i përbër $p \vee q$ në mënyrën që vijon:

4 Caktoni vlerën e vërtetësis për gjykimet:

a) Numri 72 është i pjestueshëm me 5 ose numri 25 pjesëtohet me 5; b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ ose $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$;

c) $2|7$ ose $2|5$.

Zgjidhje: b) $\tau(p \vee q)=\tau(p) \vee \tau(q)=\perp \vee \top=\top$.

Detyra:

1 Janë dhënë gjykimet $p: \frac{1}{2}>2$, $q: \frac{1}{3}<2$ dhe $r: 3>2$. Formoni gjykimet:

a) $p \wedge r$; b) $p \wedge q$; c) $q \wedge r$,

dhe pastaj caktoni vlerat e vërtetësis së tyre.

2 Janë dhënë gjykimet $p: 2 \geq 3$, $q: -2 \geq -3$ i $r: 23 \geq 32$. Caktoni vlerën e vërtetësis së gjykimit:

a) $p \vee q$; b) $p \vee r$; c) $q \vee p$.

3 Janë dhënë gjykimet $p: 3|9$, $q: 3|25$ i $r: 3|21$. Caktoni vlerën e vërtetësis për gjykimet:

a) $p \wedge q$; b) $p \vee q$; c) $p \wedge r$.

3 IMPLIKACIONI. EKUIVALENCA

Kujtohu!

Janë dhënë gjykimet $p: 3<7$ dhe $q: 4|2$.

Me fjalët "Nëse ..., atëherë ... " formo gjykim të përbërë me gjykimet e dhëna.

A është i vërtet gjykimi i fituar?

A Le të jetë p dhe q çfarëdo gjykime. Gjykimi „nëse p, atëherë q'' quhet ***implikacion*** të gjykimeve p dhe q.

Implikacioni i gjykimeve p dhe q e shënojmë me $p \Rightarrow q$, dhe ai është i pavërtetë nëse gjykimi i parë është i vërtetë, kurse i dyti i pavërtetë. Te rastet tjera gjykimi $p \Rightarrow q$ është i vërtetë.

1 Le të jenë $p: 2+3=5$ dhe $q: 3|7$.

Implikacioni i këtyre gjykimeve është $p \Rightarrow q$, d.m.th. nëse $2+3=5$, atëherë $3|7$.

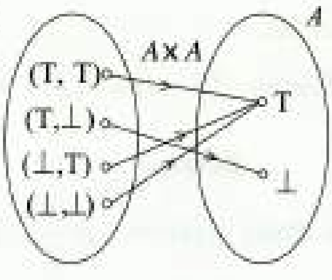
Duhet të dish!

Vlera e vërtetësis së implikacionit $p \Rightarrow q$ varet nga vlerat e vërtetësis së gjykimeve p dhe q të cilat mund t'i paraqesim me tabelë:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

Në tabelën, $\tau(p)$, $\tau(q)$ dhe $\tau(p \Rightarrow q)$ shkurt janë shënuar me p, q dhe $p \Rightarrow q$.

$\Rightarrow : A \times A \to A$



Me operacionin $\Rightarrow$ çdo dyshes së rënditur gjykimesh (p,q) i korespondojmë gjykim të përbërë $p \Rightarrow q$ në mënyrën që vijon:

Nëse në implikacionin $p \Rightarrow q$, $\tau(p)=\text{T}$, $\tau(q)=\text{T}$, atëherë $\tau(p \Rightarrow q)=\text{T}$.

Ky implikacion quhet ***rrjedhim logjik*** të cilin në vazhdim do ta përdorim për formulimin e teoremave në mënyrën e kushtëzuar.

Implikacionin $p \Rightarrow q$ mund ta lexojmë në mënyra të ndryshme, si p.sh.:

1) Nëse p atëherë q; 4) q është e nevojshme për p; 2) Nga p rrjedh q;
5) p është vetëm atëherë kur q; 3) p është e mjaftueshme për q; 6) Pa q nuk ka p.

2 Cakto vlerën e vërtetësis për gjykimet:

a) Nëse $2>5$, atëherë $3|7$; b) Nëse $\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$, atëherë $\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$ c) Nëse $3|12$, atëherë $3|7$.

a) $\tau(p \Rightarrow q)=\tau(p) \Rightarrow \tau(q)=\perp \Rightarrow \perp=\text{T}$.

Kujtohu!

- Janë dhënë gjykimet $p:2|7$ dhe $q:5>2$.
- Me fjalët "Atëherë dhe vetëm atëherë " formo gjykim të përbërë me gjykimet e dhëna.
- A është i vërtet gjykimi i fituar?

$\mathscr{B}$ Le të jenë p dhe q gjykime të dhëna. Gjykimi: p nëse dhe vetëm nëse q, quhet ***ekuivalencë*** e gjykimit p dhe gjykimit q.

Ekuivalencën e gjykimeve p dhe q e shënojmë me $p \Leftrightarrow q$, ajo është e vërtetë vetëm nëse gjykimet p dhe q kanë vlerë të njëjtë të vërtetësisë, kurse jo e vërtetë nëse p dhe q kanë vlera të ndryshme të vërtetësisë.

3 Le të jenë dhënë gjykimet $p:4|3$ dhe $q:2+4=8$. Ekuivalencë e këtyre gjykimeve është:

$$p \Leftrightarrow q:\ 4|3 \Leftrightarrow\ 2+4=8.$$

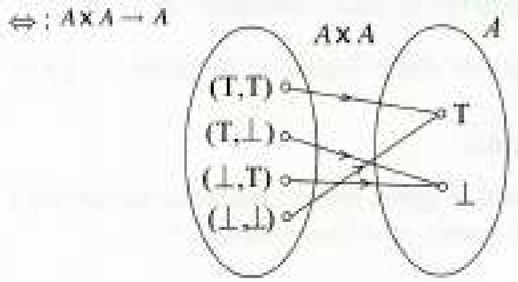
Duhet të dish!

- Vlera e vërtetësis për ekuivalencën $p \Leftrightarrow q$ varet nga vlerat e vërtetësis së gjykimeve p dhe q të cilat mund t'i paraqesim me tabelë:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

Në tabelë, $\tau(p)$, $\tau(q)$ dhe $\tau(p \Leftrightarrow q)$ shkurtë janë shënuar me p, q dhe $p \Leftrightarrow q$.

- Me operacionin $\Leftrightarrow$, dyshen e renditur të gjykimeve (p,q) ia korespondojmë gjykimit të ri të përbërë $p \Leftrightarrow q$. në mënyrën që vijon:



4 Cakto vlerën e vërtetësis për gjykimet:

a) $3>8$ nëse dhe vetëm nëse $2+3=7$;

b) $2|7$ nëse dhe vetëm nëse $2|14$; c) $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$ nëse dhe vetëm nëse $4-3=1$.

- a) $\tau(p \Leftrightarrow q)=\tau(p)\Leftrightarrow\tau(q)=\perp\Leftrightarrow\perp=$ T.

Detyra:

(1) Janë dhënë gjykimet $p:\frac{1}{5}<5$, $q:\frac{1}{4}>4$ dhe $r:\frac{1}{3}<3$. Formoni gjykimet:

a) $p \Rightarrow q$; b) $\rceil p \Leftrightarrow r$; c) $r \Rightarrow \rceil q$ dhe caktoni vlerën logjike.

(2) Janë dhënë gjykimet $p:3|7$, $q:3|9$ dhe $r:3|1$. Formi gjykimet:

a) $p \Leftrightarrow q$; ;b) $\rceil p \Leftrightarrow \rceil q$; c) $\rceil q \Rightarrow r$ dhe caktoni vlerën e tyre logjike.

4 FORMULAT GJYKIMORE

Kujtohu!

- $12-4:2\cdot 2$ është gjykim i përbërë matematikor.
- Formo gjykim tjetër të përbër matematikorë.
- Formo shprehje të përbërë logjike duke i përdorur ndryshoret gjykimore p, q, r,... dhe operacionet logjike

A **1** Caktoni vlerën e vërtetësis për gjykimin e përbërë nëse $p \Rightarrow (\neg p \wedge q)$, $\tau(p)=\top$, $\tau(q)=\bot$.

Vëreni zgjidhjen.

- Renditja e operacioneve është $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.
- $\top \Rightarrow (\neg\top \wedge \bot) = \top \Rightarrow (\bot \wedge \bot) = \top \Rightarrow \bot = \bot$.

2 Le të jetë dhënë gjykimi p. Caktoni vlerën e vërtetësisë për gjykimet: a) $p \wedge \top$; b) $p \wedge \bot$; c) $p \vee \top$; d) $p \vee \bot$; e) $p \Rightarrow \top$; f) $p \Rightarrow \bot$; h) $p \Leftrightarrow \top$; i) $p \Leftrightarrow \bot$.

Vëreni zgjidhjen:

- a) Gjykimi p mund të jetë i vërtet ose jo i vërtet, d.m.th. $p = \top \vee p = \bot$.

  1) Nëse $p = \top$, atëherë $p \wedge \top = \top \wedge \top = \top = p$;

  2) Nëse $p = \bot$, atëherë $p \wedge \bot = \bot \wedge \bot = \bot = p$.

- Nga tabela e vërtetësisë për implikacion rrjedh: v) $p \Rightarrow \bot \Leftrightarrow \neg p$.

Mbani mend!

Gjykimet elementare të shënuara me ndryshoret gjykimore p, q, r, ... simbolet T, $\bot$, të lidhura në mënyrë të lejuar me operacionet logjike , $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ formojnë gjykime të përbëra ose formula gjykimore të cilat i shënojmë F, G, H ...

3 Caktoni vlerën logjike të formulës F: $(p \Rightarrow \bot) \wedge (p \Leftrightarrow \bot) \Rightarrow p$.

Kujtohu!

- Shkruani të gjitha numrat treshifror me shifrat 1 dhe 2. Sa numra treshifror shkruajte?
- Sa treshe mund të formoni prej simboleve $\top$ dhe $\bot$?
- Janë dhënë formulat gjykimore: $F_1 : p \vee q$ dhe $F_2 : q \vee p$. Për formulën $H : F_1 \Leftrightarrow F_2$, tabela e vërtetësisë është:

F_1	F_2	H
T	T	T
T	$\bot$	T
$\bot$	T	T
$\bot$	$\bot$	T

4 Provoni vlerën logjike të formulës $H : p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, për të gjitha vlerat e vërtetësisë së ndryshoreve logjike.

Vëreni zgjidhjen:

- Vlerat logjike të formulës do t'i paraqesim me tabelë:

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	H
T	T	T	T	T
T	$\bot$	T	T	T
$\bot$	T	T	T	T
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	T

Duhet të dish!

- Formulat që kanë vlera vërtetësie të njëjta të ndryshoreve gjykimore quhen ***formula gjykimore***.

- Ekuivalenca e formulave ekuivalente është gjithmon e vërtet.
- Formulat gjykimore që janë gjithmon të vërteta quhen ***tautologji***.

5 Cakto me tabelë vërtetësie vlerën logjike të formulës $H: F_1 \Leftrightarrow F_2$, nëse

$F_1: \neg(p \vee q)$ i $F_2: \neg p \wedge \neg q$. Vëreni zgjidhjen:

- Formojmë tabela për F_1 dhe F_2.

p	q	$p \vee q$	F_1
T	T	T	⊥
T	⊥	T	⊥
⊥	T	T	⊥
⊥	⊥	⊥	T

p	q	$\neg p$	$\neg q$	F_2
T	T	⊥	⊥	⊥
T	⊥	⊥	T	⊥
⊥	T	T	⊥	⊥
⊥	⊥	T	T	T

- F_1 dhe F_2 janë logjikisht ekuivalente , çka domethënë se formula është tautologji.
- Në të njëjtin përfundim do të vijmë direkt me ndihmën e tabelës së vërtetësisë.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
T	T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
T	⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	T
⊥	T	T	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	⊥	T	T	⊥	T	T	T

6 Me tabelën e vërtetësisë trego a është formula $F: p \Rightarrow q \wedge \neg r$ tautologji?

- Vëreni se me simbolet $\top$ dhe $\perp$ mund të formohen tetë treshe.

p	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$p \Rightarrow q \wedge \neg r$
T	T	T	⊥	⊥	⊥
T	T	⊥	T	T	T
T	⊥	T	⊥	⊥	⊥
T	⊥	⊥	T	⊥	⊥
⊥	T	T	⊥	⊥	T
⊥	T	⊥	T	T	T
⊥	⊥	T	⊥	⊥	T
⊥	⊥	⊥	T	⊥	T

- Është e qartë se formula nuk është tautologji.

Kujtohu!

Për çfarëdo $a,b,c \in \mathbb{N}$, vlen barazimi $(a+b)+c=a+(b+c)$, d.m.th. vetia asociative.

Shkruani vetinë asociative për disjunksionin me gjykimet p,q dhe r.

7 Tregoni me tabelë vërtetësie se formula $F:(p\wedge q)\wedge r \Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$ është tautologji.

Me anë të tabelës u vërtetove se formula është tautologji.

Duhet të dish!

Tautologjitë janë formula gjykimore që janë me interes të veçantë dhe për atë quhen ligje logjike ose ligje të të menduarit. Disa nga këto ligje janë :

1. $p\vee q \Leftrightarrow q\vee p$
2. $p\wedge q \Leftrightarrow q\wedge p$ } Vetia komutative e disjunksionit dhe konjuksionit.
3. $(p\vee q)\vee r \Leftrightarrow p\vee(q\vee r)$
4. $(p\wedge q)\wedge r \Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$ } Vetia asociative e disjunksionit dhe konjuksionit.
5. $(p\wedge q)\vee r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$
6. $(p\vee q)\wedge r \Leftrightarrow (p\wedge r)\vee(q\wedge r)$ } Vetia distributive e disjunksionit ndaj konjuksionit dhe anasjelltas
7. $p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p$ Apsorpcioni i $\vee$ ndaj $\wedge$.
8. $p\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p$ Apsorpcioni i $\wedge$ ndaj $\vee$.
9. $p\vee \urcorner p$ Ligji i përjashtimit të së tretës.
10. $\urcorner(p\wedge \urcorner p)$ Ligji i jokundërthënies.
11. $\urcorner\urcorner p \Leftrightarrow p$ Ligji i negacionit të dyfishtë.
12. $p\Rightarrow q \Leftrightarrow \urcorner p\vee q$ Zëvendësimi për implikacion.
13. $p\Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
14. $p\Leftrightarrow q \Leftrightarrow (\urcorner p\vee q)\wedge(\urcorner q\vee p)$ } Zëvendësimi për ekuivalencë.
15. $\urcorner(p\wedge q)\Leftrightarrow \urcorner p\vee \urcorner q$
16. $\urcorner(p\wedge q)\Leftrightarrow \urcorner p\wedge \urcorner q$ } Ligjet e De Morganit.

Gjithashtu përdorim të madh kanë rregullat për nxjerrjen e përfundimeve:

1. $(p\Rightarrow q)\wedge p\Rightarrow q$ Modus ponens.
2. $(p\Rightarrow q)\wedge \urcorner q\Rightarrow \urcorner p$ Modus tolens.
3. $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ Silogjizmi hipotetik.
4. $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow \urcorner q\Rightarrow \urcorner p$ Rregulla për kontrapozicion.

8 Me ndihmën e tabelës trego se formulat 5, 8 dhe 14 janë tautologji.

Detyra:

1. Cakto vlerën logjike të formulës gjykimore:

   a) $F_1: p \Rightarrow q \wedge \urcorner p$;   b) $F_2: p \Rightarrow q \Rightarrow \urcorner p \wedge \perp$.

2. A janë ekuivalente formulat gjykimore :

   a) $F_1: p \vee p$ dhe $F_2: (p \wedge p)$;   b) $F_1: (p \vee q) \vee r$ dhe $F_2: p \vee (q \vee r)$?

3. Tregoni se formulat gjykimore 13 dhe 3 janë tautologji.

5 AKSIOMA DHE TEOREMA

Kujtohu!

- Çfarë pohimi ke të njohur?
- Pohimi: "Nëpër dy pika kalon një dhe vetëm një drejtëzë ", është pohim i thjeshtë.
- A është pohimi gjykim i vërtetë?
- A është pohimi: "Nëpër tre pika jokolineare kalon një dhe vetëm një rrafsh " i vërtetë?

A 1 Cakto vlerën e vërtetësisë për pohimin:

a) Nëse dy pika shtrihen në rrafsh , atëherë edhe drejtëza që kalon nëpër ato dy pika shtrihet në rrafsh;

b) $a+0=a$ për çdo $a \in \mathbb{Z}$;

c) Nëse një numër pjesëtohet me 3, atëherë ai mbaron me shifrën 3.

Pohimet a) dhe b) janë të vërtetë, kurse pohimi c) nuk është i vërtetë.

Mbani mend!

Pohimet matematikore të cilat merren të vërteta pa vërtetim quhen ***pohime elementare ose aksioma.***

2 Cilat nga pohimet janë aksioma?

a) Në çdo rrafsh shtrihen së paku tre pika jokolineare , kurse ka pika të cilat nuk i takojnë atij rrafshi.

b) Nëse dy rrafshe kanë një pikë të përbashkët , atëherë ato kanë së paku edhe një pikë tjetër të përbashkët.

c) Në hapsirë gjenden së paku katër pika që nuk i takojnë të njëjtit rrafsh.

ç) $a+(-a)=0$ për çdo $a \in \mathbb{Z}$.

d) $1 \cdot a = a$ për çdo $a \in \mathbb{Z}$.

e) Nëse $a+c=b+c$, atëherë $a=b$ për çdo $a,b,c \in \mathbb{Z}$.

Kujtohu!

Pohimi : "Nëpër çdo pikë kalon së paku një rrafsh, është pohim i nxjerrë.

Cili pohim elementar është shfrytëzuar në fjalinë e mëparshme?

$\mathscr{B}$ **3** Për pohimin " Secili barazim $x+a=b$ ka një zgjidhje në $\mathbb{Z}$ ", $x=b-a$ është pohim i nxjerrë.

Vëreni zgjidhjen:

- Në vërtetimin e vërtetësisë shfrytëzohen zakonishtë pohime elementare.
- Duke i shtuar anë për anë $+(-a)$ fitohet $x+a+(-a)=b+(-a)$.
- Shfrytëzohet vetia elementare $a+(-a)=0$ dhe fitohet $x=b-a$.

Mbani mend!

Pohimi matematikor i cili paraqet rrjedhim logjik të pohimeve tjera të vërteta (d.m. vërtetësia e të cilave vërtetohet) quhet pohim i nxjerrë ose teoremë.

4 Cilat nga pohimet e mëposhtme janë aksioma e cilat teorema?

a) Nëpër pikën e dhënë e cila nuk shtrihet në drejtëzën e dhënë kalon një dhe vetëm një drejtëzë paralele me drejtëzën e dhënë.

b) Nëse drejtëzat a, b dhe c shtrihen në të njëjtin rrafsh dhe nëse $a \parallel b \wedge c \cap a \neq \varnothing$, atëherë $c \cap b \neq \varnothing$.

c) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ për çdo $a,b,c \in \mathbb{Z}$. ç) $a\cdot 0 = 0$ për çdo $a \in \mathbb{Z}$.

Kujtohu!

Teorema: "Nëse trapezi është barakrahës, atëherë diagonalet i ka të barabarta ", mund të thuhet edhe në formën: "Te trapezi barakrahës diagonalet janë të barabarta ".

Teorema: " Nëse shumëkëndëshi është trekëndësh, atëherë shuma e këndeve të brendshme është 180^0 ", thuaje në formë tjetër.

$\mathscr{C}$ **5** Teorema "Nëse trekëndëshi është barakrahës , atëherë lartësitë e lëshuara në krahë janë të barabarta ", thuaje në formë tjetër.

Vëreni zgjidhjen:

Pohimi p është supozim ose kusht me të cilin është shqyrtue ndonjë objekt matematikor. Në këtë rast p: trekëndëshi është barakrahës.

Gjykimi q është përfundim i cili tregon çka është supozimi për atë objekt, d.m.th. cila veti e tij shqyrtohet. Në këtë rast përfundimi është q: Lartësitë e lëshuara në krah janë të barabarta.

Teorema në formën e pakushtëzuar do të jetë: "Lartësitë e lëshuara në krahë te trekëndëshi barakrahës janë të barabarta.

Kjo formë quhet kategorike.

6 Thuaje në formën e kushtëzuar dhe kategorike :

a)Teoremën e Pitagorës;

b)Teoremën e Talesit. Për këndin e drejtë mbi diametrin e rrethit.

Kujtohu!

- Kur i vëreni teoremat bëni pyetjen a vlen e anasjellta?
- Formuloni të anasjelltën e teoremës, "Nëse trekëndëshi është barakrahës , atëherë ai ka dy kënde të barabarta ".
- A është e anasjellta teoremë?

7 Është dhënë teorema: „Nëse një katërkëndësh është tetivial, atëherë këndet e tij të përballta janë suplementar''.

a) Cakto supozimin p dhe gjykimi q, i teoremës.

b) Shkruaje teoremën në formën kategorike.

c) Shkruaje teoremën e anasjelltë te forma kushtore.

ç) Caktoni supozimin dhe përfundimin në teoremën e anasjelltë.

d) Shkruani teoremën e anasjelltë në formën kategorike.

e) Shkruani të dyja teoremat bashkë me ekuivalencë.

Vëreni zgjidhjen:

a) p: katërkëndëshi është tetivial. q: Këndet përballë janë suplementarë.

b) Në katërkëndëshin tetivial , këndet e përballta janë suplementarë.

c) Nëse këndet e përballta te katërkëndëshi janë suplementarë , atëherë ai është tetivial

d) q: Këndet e përballta te katërkëndëshi janë suplementarë.

p: Katërkëndëshi është tetivial.

e) Këndet e përballta janë suplementarë te katërkëndëshi tetivial.

f) Katërkëndëshi është tetivial , nëse dhe vetëm nëse këndet e përballta janë suplementarë.

8 Është dhënë teorema: "Nëse trekëndëshi është barakrahës, atëherë vijat e rëndimit të lëshuara në krahë janë të barabarta ".

a) Shkruani teoremën në formën kategorike.

b) Shkruani të anasjelltën e teoremës në formën e kushtëzuar dhe kategorike.

Detyra:

1 a) Cilat pohime matematike janë themelore (aksioma)?

b) Cilat pohime janë të nxjerra (teorema)?

2 Shkruani nga dy aksioma dhe teorema.

3 A vlejnë të anasjelltat e teoremave:

a) $x|a \wedge x|b \Rightarrow x|(a+b)$;

b) Nëse trekëndëshi është barakrahës, atëherë vija e rëndimit dhe lartësia e bazës puthiten?

6 VËRTETIMI I TEOREMAVE

Kujtohu!

- Cilët pohime janë të nxjerra?
- A vërtetohen pohimet e nxjerra?

Teorema është shkruar në formën e kushtëzuar tani $p: 2 \mid x \wedge 3 \mid x$ dhe $q: 6 \mid x$.

Kërkojmë rrjedhim logjik prej $2 \mid x \wedge 3 \mid x$, që është pohimi $r_1: x = 2a \wedge x = 3b; a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\tau(p \Rightarrow r_1) = \top$$

Kërkojmë rrjedhim logjik prej gjykimit r_1, që është pohimi $r_2: 3x = 6a \wedge 2x = 6b$.

$$\tau(r_1 \Rightarrow r_2) = \top$$

Nëse r_2, atëherë $r_3: x = 6(a-b)$.

$$\tau(r_2 \Rightarrow r_3) = \top$$

Nëse r_3, atëherë $q: 6 \mid x$.

$$\tau(r_3 \Rightarrow q) = \top$$

Sipas rregullës së tranzitivitetit të implikacionit kemi $\tau(p \Rightarrow q) = \top$.

A **1** Vërtetoni teoremën:

Nëse $2 \mid x \wedge 3 \mid x$, atëherë $6 \mid x$.

Vëreni vërtetimin:

Më praktik është shënimi që vijon:

$$p: 2 \mid x \wedge 3 \mid x$$
$$\Downarrow$$
$$r_1: \begin{cases} x = 2a \\ x = 3b \end{cases}; \ a, b \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$r_2: \begin{cases} 3x = 6a \\ 2x = 6b \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$r_3: x = 6(a-b) = 6c, \ c \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$q: 6 \mid x.$$

Kjo menyrë e vërtetimit të teoremave quhet **metoda me përparim**.

Thelbi i kësaj metode të vërtetimit të teoremave është në atë se fillohet nga supozimi i teoremës dhe me disa rrjedhime logjike arrihet deri te përfundimi.

2 Vërtetoni teoremën : a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}; \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$.

b) Simetralet e këndeve të bazës te trekëndëshi barakrahës janë të barabarta.

Vëreni vërtetimin:

a) $p: \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ i $q: \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$

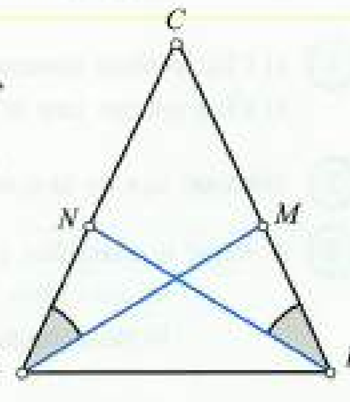
Od $p: \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

$$\Downarrow$$
$$r_1: \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$
$$\Downarrow$$
$$q: \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

b) $p: \Delta ABC$ është barakrahës dhe $q: \overline{AM} = \overline{BN}$.

Nga se $p: \Delta ABC$ është barakrahës.

$$\Downarrow$$
$$r_1: \begin{cases} \measuredangle ACM = \measuredangle BCN, \\ \overline{AC} = \overline{BC} \\ \measuredangle CAM = \measuredangle CBN \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$r_2: \Delta AMC \equiv \Delta BNC$$
$$\Downarrow$$
$$q: \overline{AM} = \overline{BN}.$$



Duhet të dish!

Dy teoremat e mëparshme i vërtetuam drejtpërdrejtë me mënyrën sintetike d.m.th. vërtetim me përparim.

3 Me metodën me përparim vërtetoni teoremat:

a) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ për $a, b, c, d\in R\setminus\{0\}$; b) $3|x\wedge 5|x\Rightarrow 15|x$;

c) Shuma e këndeve të jashtme të trekëndëshit është 360^0.

Kujtohu!

- A mundet implikacioni $p\Rightarrow q$ të shënohet në formën $q\Leftarrow p$?
- Çka domethënë ky shënim ?

B **4** Vëreto teoremën:

Nëse $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge a\cdot b>0$, atëherë $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

Vëre vërtetimin:

- $q:\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ është implikuar nga $a^2+b^2\geq 2ab$ kur pjesëtohet me ab.
- $S_1:a^2+b^2\geq 2ab$ është implikuar nga $a^2-2ab+b^2\geq 0$.
- $S_2:a^2-2ab+b^2\geq 0$ është implikuar nga $(a-b)^2\geq 0$.
- $S_3:(a-b)^2\geq 0$ është implikuar nga $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge a\cdot b>0$, d.m.th. $p:a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge a\cdot b>0$.

Sipas pjesës së lartëshënuar mund të shkruajmë:

$q:\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ .... kërkojmë kusht të mjaftueshëm S_1 për q.

$\Uparrow$

$S_1:a^2+b^2\geq 2ab$ .... kërkojmë kusht të mjaftueshëm S_2 për S_1.

$\Uparrow$

$S_2:a^2-2ab+b^2\geq 0$ .... kërkojmë kusht të mjaftueshëm S_3 për S_2.

$\Uparrow$

$S_3:(a-b)^2\geq 0$ .... kërkojmë kusht të mjaftueshëm p për S_3.

$\Uparrow$

$p:a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge a\cdot b>0$.

Duhet të dish!

Teorema e shembullit është vërtetuar direkt me vërtetim analitik , d.m.th. vërtetim me kthim.

5 Zbatoni vërtetimin me kthim në vërtetimin e teoremës: $a+\frac{1}{a}\geq 2$ për $a\in\mathbb{R}^+$.

Duhet të dish!

Përveç vërtetimeve direkte përdoren edhe metoda indirekte të vërtetimeve , e prej tyre do të shfrytëzojmë vetëm rregullën e kontrapozicionit.

Kujtohu!

Formulat gjykimore $F_1 : p \Rightarrow q$ dhe $F_2 : \rceil q \Rightarrow \rceil p$ janë logjikisht ekuivalente, Tani $F_1 \Leftrightarrow F_2$ që domethënë se F_1 mund të zëvendësohet me F_2.

Si quhet kjo tautologji?

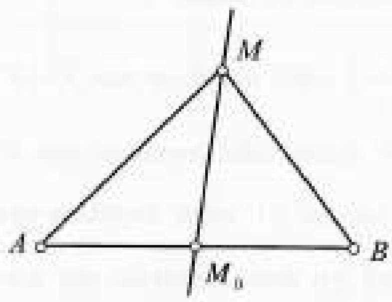
C **6** Teoremë. Çdo pikë e simetrales së segmentit është njëlloj e larguar nga skajet e segmentit.

Vërtetoni teoremën me metodën indirekte.

Vëreni vërtetimin:

$p : MM_0$ është simetrale e segmentit AB,

$q : \overline{AM} = \overline{BM}$.



$\rceil q : \overline{AM} \neq \overline{BM}$

$\Downarrow$

$t_1 : \Delta AM_0M \not\equiv \Delta BM_0M$

$\Downarrow$

$t_2 : \overline{AM_0} \neq \overline{BM_0} \vee \measuredangle MM_0A \neq \measuredangle MM_0B$

$\Downarrow$

$\rceil p : M_0M$ nuk është simetrale .

Domethënë, $\tau(\rceil q \Rightarrow \rceil p) = \top$, e sipas rregullës së kontrapozicionit rrjedh se $\tau(p \Rightarrow q) = \top$.

7 Sipas rregullës së kontrapozicionit vërtetoni teoremën: Këndet e bazës te trapezi barakrahës janë të barabartë.

8 Vërtetoni teoremën: Vija e rëndimit t_a është njëlloj e larguar nga kulmet B dhe C te trekëndëshi ABC, me :

a) vërtetim sintetik; b) vërtetim analitik; c) vërtetim indirekt me kundërpozicion.

Vëreni vërteimin.

$p : t_a = AA_1$; $q : \overline{CN} = \overline{BM}$.

Le të jenë $BM \perp AA_1$ dhe $CN \perp AA_1$.

a) $p : t_a = \overline{AA_1}$ (vija e rëndimit ΔABC).

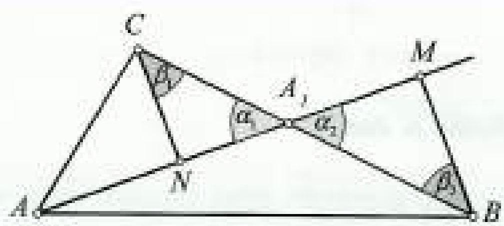
$$r_1 : \begin{cases} 1.\ \overline{CA_1} = \overline{BA_1} \\ 2.\ \alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{si kënde kryqëzor} \\ 3.\ \beta_1 = 90^0 - \alpha_1 = 90^0 - \alpha_2 = \beta_2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$r_2 : \Delta CNA_1 \equiv \Delta BMA_1$ sipas rregullës KBK

$\Downarrow$

$q : \overline{CN} = \overline{BM}$.



b) $q: \overline{CN} = \overline{BM}$

$\Uparrow$

$S_1: \Delta CNA_1 \equiv \Delta BMA_1$

$\Uparrow$

$$S_2: \begin{cases} \overline{CA_1} = \overline{BA_1};\ A_1 \text{ është mesi i } BC \\ \alpha_1 = \alpha_2 \text{ kënde kryqëzor} \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$$

$\Uparrow$

$p: t_a$ është vijë e rëndimit.

c) $\rceil q: \overline{CN} \neq \overline{BM}$

$\Downarrow$

$t_1: \Delta CNA_1 \not\equiv \Delta BMA_1$

$\Downarrow$

$t_2: \overline{CA_1} \neq \overline{BA_1} \vee \alpha_1 \neq \alpha_2 \vee \beta_1 \neq \beta_2$

$\Downarrow$

$\rceil p: t_a$ nuk është vijë e rëndimit.

Detyra:

1. Vërtetoni me përparim teoremën: Secila pikë e simetrales së këndit është njëlloj e larguar nga krahët e tij.

2. Duke zbatuar vërtetimin me kthim tregoni vërtetësinë e pohimit:
$$a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \wedge ab<0 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq 2.$$

3. Tetivat e rrethit të cilave u përgjigjen kënde qëndror të njëjtë janë të barabarta. Vërtetoni pohimin me kontrapozicion.

4. Vërtetoni teoremën: $2 \mid x \wedge 3 \mid x \wedge 5 \mid x \Rightarrow 30 \mid x,\ (x \in \mathbb{N})$.

5. Vërtetoni teoremën: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$, ku $a, b, c, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

6. Vija e mesme e trekëndëshit është paralele me brinjën me të cilën nuk ka pika të përbashkëte dhe është sa gjysma e asaj brinje. Vërtetoni!

7 BASHKËSI. NËNBASHKËSI. BASHKËSI TË BARABARTA, EKUIVALENTE

Kujtohu!

- Koncepti bashkësi është themelor dhe si i tillë nuk përkufizohet.
- Në sa forma mund të jepet një bashkësi.

A 1 Bashkësinë e ditëve të javës shkruani në formën:

a) tabelare;

b) përshkruese;

c) me diagram të Venit.

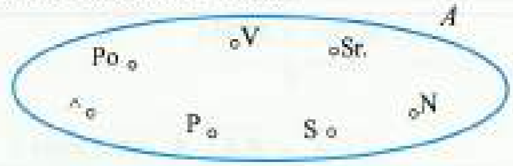
a) I numërojmë të gjitha elementet e bashkësisë dhe shkruajmë :

$A = \{$ e hënë, e martë, e mërkurë, e enjte, e premte, e shtunë, e dielë $\}$

b) $A = \{x | x$ është ditë e javës $\}$. Lexo:

A është bashkësia e të gjitha elementeve x, ashtu që x është ditë e javës.

c) Me diagram të Venit



2 Bashkësia e stinëve të vitit paraqite në formën : a) tabelare; b) përshkruese; c) me diagram të Venit.

Kujtohu!

Le të jetë B bashkësia e ditëve të javës që fillojnë me shkronjën M, d. m.th.

$B = \{$ martë, mërkurë $\}$.

A është bashkësia B pjesë e ndonjë bashkësie tjetër?

A e përmban bashkësia e ditëve të javës bashkësinë e ditëve që fillojnë M?

$\mathscr{B}$ **3** Le të jetë A bashkësia e muajve të vitit, B bashkësia e muajve, emri i të cilëve ka tre shkronja dhe le të jetë C bashkësia e muajve , emri i të cilëve fillon me shkronjën M.

Shkruani bashkësitë A, B dhe C tabelarisht dhe me diagram të Venit.

Çka vëreni?

Sigurisht shkruajte:

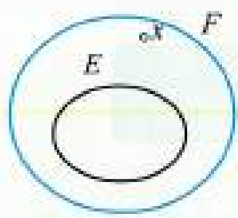
$A = \{$ janar, shkurt, mars, prill, maj, qershor , korrik, gusht, shtator, tetor, nëntor, dhjetor $\}$.

$B = \{$ maj $\}$.

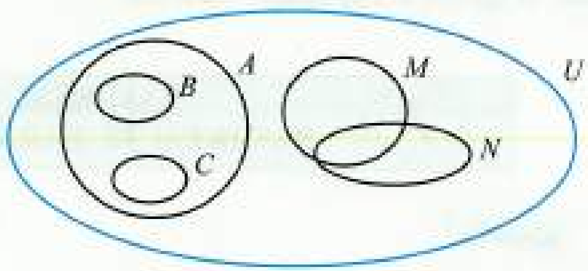
$C = \{$ maj, mars $\}$.

Mbani mend!

Për bashkësinë E elementet e së cilës i takojnë bashkësisë F themi se është nënbashkësi e F dhe shkurtimisht e shënojmë $E \subseteq F$. Nëse tani gjendet së paku një element nga F që nuk është element i E, atëherë për E themi se është nënbashkësi e vërtetë e bashkësisë F dhe shkurtimisht e shënojmë $E \subset F$.



$x \notin E \wedge x \in F$



Bashkësia e cila ka vetinë , çdo bashkësi është nënbashkësi e vërtetë e saj quhet bashkësi univerzale dhe e shënojmë me U..

Bashkësia B dhe C në shembullin janë nënbashkësi të vërteta të bashkësisë A, d.m.th.

$B \subset A, C \subset A$.

4 Le të jetë dhënë bashkësia $M=\{a,b,c\}$. Shkruani bashkësinë e cila i përfshin të gjitha nënbashkësitë e bashkësis M dhe shënoe me P_M.

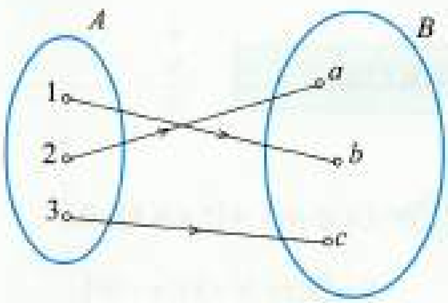
Me siguri do të fitoni $P_M=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

Vëreni dhe mbani mend!

Bashkësia e zbrazët është nënbashkësi e çdo bashkësie.
Çdo bashkësi është nënbashkësi e vetvetes.
Bashkësia e të gjitha nënbashkësive të bashkësis së dhënë quhet bashkësi *partitive*.

5 Shkruani të gjitha nënbashkësitë e bashkësisë $M=\{1,2,3,4\}$.

Kujtohu!



Vëreni se mes elementeve mund të vihet pasqyrim biektiv.

- Nga sa elemente kanë bashkësitë A dhe B ?
- Shkruani dy bashkësi me numër të njëjtë elementesh.

C **6** Le të jetë A bashkësia e nxënësve të një paralele, kurse B është nënbashkësi e fundme e bashkësisë $\mathbb{N}$.

Në cilin rast mes bashkësive A dhe B mund të vihet pasqyrim bijektiv ?

Vëreni përgjigjen:
Që të ketë pasqyrim biektiv mes dy bashkësive , duhet që ato të kenë numër të njëjtë elementesh.

Mbani mend!

Bashkësia A është ekuivalente me bashkësinë B, nëse dhe vetëm nëse gjendet një pasqyrim biektiv mes tyre, shkurtimisht e shënojmë $A\equiv B$.

7 Janë dhënë bashkësitë $A=\{x\,|\,x$ është numër i thjesht më i vogël se $11\}$ dhe $B=\{2,3,5,7\}$.
A janë bashkësitë e dhëna : a) ekuivalente; b) të barabarta ?
Me siguri vëreni se ato bashkësi janë ekuivalente , d.m.th. $A\cong B$, veç asaj edhe të barabarta $A=B$.

Mbani mend!

Dy bashkësi janë të barabarta , nëse i kanë elementet e njëjta.
Nëse $A=B$, atëherë $A\subseteq B\wedge B\subseteq A$.
Nëse $A\subseteq B\wedge B\subseteq A$, atëherë $A=B$.
Bashkësitë e barabarta , janë dhe ekuivalente, por e anasjellte nuk vlen.

8 Janë dhënë bashkësitë: $A=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge x$ është numër çift $\}$; $B=\{2,4,6,8\}$;

$C=\{x|x$ është stinë e vitit$\}$ dhe $D=\{$ vjeshta, pranvera, dimri, vera $\}$. Cilat nga bashkësitë e dhëna janë ekuivalente dhe cilat të barabarta?

***Detyra*:**

1. a) Bashkësia $A=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 3\le x<7\}$ shkruani tabelarisht dhe me diagram të Venit.

   b) Bashkësinë 

shkruani tabelarisht dhe përshkruese.

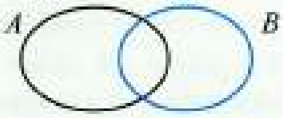
2. Shkruani bashkësinë partitive për bashkësinë $M=\{$ l, e, t, o $\}$.
3. Shkruani shembull te i cili vlen $A\subseteq B\wedge B\subseteq A$..

   Bashkësitë A dhe B a kanë numër të njëjtë të elementeve?

8 OPERACIONET ME BASHKËSI

Kujtohu!

- $\top\vee\top=\top$
  $\top\vee\bot=\top$
  $\bot\vee\top=\top$
  $\bot\vee\bot=\bot$
- Ngjyrosni $A\cup B$.



A **1** Le të jetë $A\{2,4,6,8\}$ dhe

$$B=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 3\le x<10\}.$$

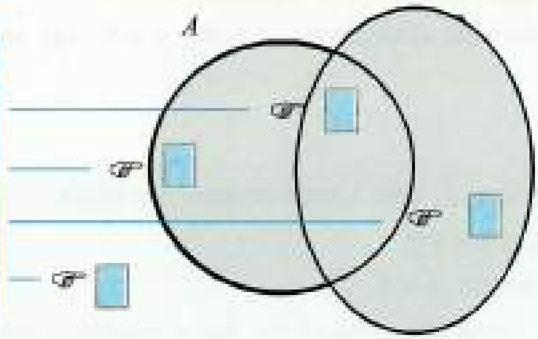
Caktoni $A\cup B$.

Me siguri vëreni se

$$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

2 Në vizatimin që vijon është dhënë tabela e vërtetësisë për disjunksion dhe bashkësitë A dhe B. Le të jenë $p: x\in A$ dhe $q: x\in B$ gjykime. Shqyrtoni lidhjen në mes tabelës dhe përkatësis së elementeve të bashkësive A dhe B.

p	q	$p\vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$



Vëreni se shënimet e mëposhtme përkojnë me unionin e dy bashkësive:

a) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

b) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

v) Unioni i dy bashkësive është bashkësi , elementet e së cilës i takojnë njërës ose tjetrës bashkësi.

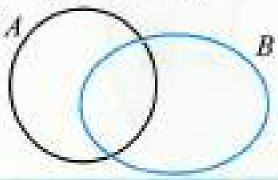
3 Caktoni unionin e bashkësive $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}, B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 8 \leq x \leq 15\}$ dhe

$C = \{1, 2, 3, \ldots, 13\}$.

Kujtohu!

$\top \wedge \top = \top$
$\top \wedge \bot = \bot$
$\bot \wedge \top = \bot$
$\bot \wedge \bot = \bot$

- Ngjyrosni $A \cap B$.



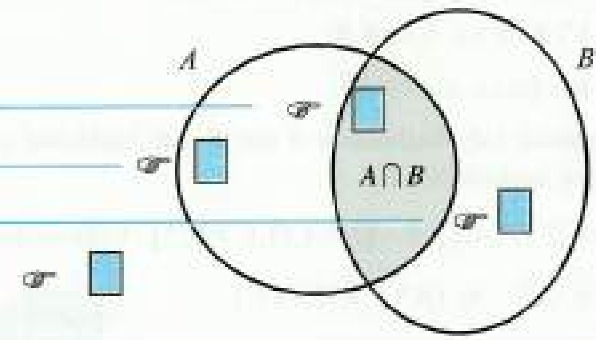
B **4** Le të jetë $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 6\}$ dhe $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq x < 8\}$. Cakto bashkësinë.

Me siguri fitove:

$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$.

5 Në vizatimin janë dhënë tabela e konjuksionit dhe bashkësitë A dhe B.
Le të jenë $p: x \in A, q: x \in B$. Vëreni lidhjen mes tabelës dhe përkatësis së elementeve në bashkësinë A dhe B.

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$



Kontrolloni ekuivalencën e shprehjeve të mëposhtme:

a) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

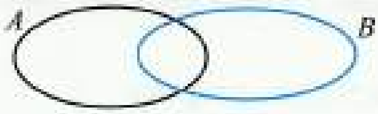
v) Prerja e dy bashkësive është bashkësi , elementet e së cilës i takojnë edhe njërës edhe bashkësisë tjetër.

6 Janë dhënë bashkësitë $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$.

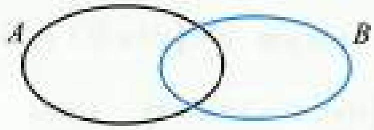
Caktoni prerjen e bashkësive të dhëna.

Kujtohu!

- Hijëzo $A \setminus B$.



- Hijëzo $B \setminus A$.



7 Nëse $A=\{1,2,3,4\}, B=\{4,5,6\}$.

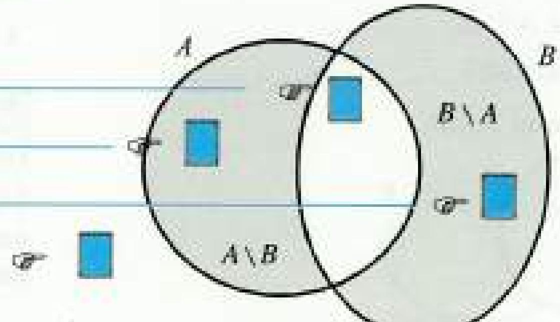
Cakto: a) $A \setminus B$; b) $B \setminus A$.

Me siguri fitove:

a) $A \setminus B=\{1,2,3\}$ dhe b) $B \setminus A=\{5,6\}$.

8 Sipas vizatimit caktoni lidhjen mes tabelës dhe përkatësis së elementeve në bashkësinë A dhe B, duke i shfrytëzuar gjykimet $p: x \in A$ dhe $q: x \in B$.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$



Shënimet i përkasin ndryshimit të dy bashkësive:

a) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

b) $A \setminus B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

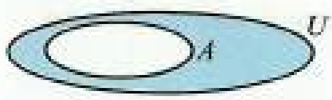
c) Ndryshimi i dy bashkësive A dhe B shtë bashkësia $A \setminus B$, elementet e së cilës i takojnë A, por nuk i takojnë bashkësisë B.

9 Nëse $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{2,3,4,5\}, C=\{1,5\}$. Caktoni bashkësitë:

a) $A \setminus B \setminus C$; b) $(B \setminus C) \cup (A \setminus C)$.

Kujtohu!

- Pjesa e ngjyrosur paraqet grafikisht ndryshimin $U \setminus A$.

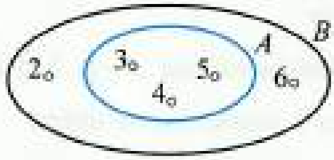


- Paraqiti me grafik bashkësinë $A \setminus B$, nëse $B \subset A$.

10 Le të jenë dhënë bashkësitë $A=\{3,4,5\}$ dhe $B=\{2,3,4,5,6\}$.

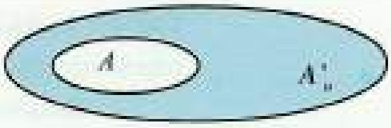
Caktoni bashkësitë $B \setminus A$ dhe paraqiti grafikisht.

Me siguri fitove $B \setminus A=\{2,6\}$, d.m.th..



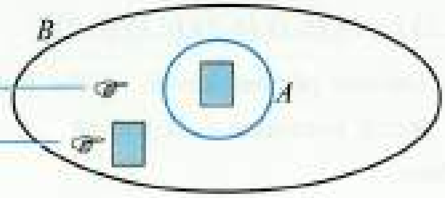
Nëse $A \subset B$, atëherë bashkësia $B \setminus A$ quhet komplement i bashkësisë A në lidhje me bashkësinë B dhe e shënojmë $A'_B = B \setminus A$.

Bashkësia e cila është komplement e bashkësisë A në lidhje me bashkësinë $\mathbb{U}$ e shënojmë me $A'_u = \mathbb{U} \setminus A$.



11 Në vizatim janë dhënë : tabela e negacionit dhe bashkësitë A dhe B. Le të jetë $p : x \in A$. Shqyrtoni lidhjen mes tabelës dhe përkatësis së elementeve në bashkësitë A dhe B.

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$



Vëreni se shprehjet e mëposhtme i përkasin komplementit të bashkësive:

a) $x \in A'_B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$.

b) $A'_B = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$.

c) Komplementi A' i bashkësis A në lidhje me bashkësinë B është bashkësia, elementet e së cilës i takojnë bashkësisë B, kurse nuk i takojnë bashkësisë A.

12 Le të jenë $M = \{1, 2, 3, ..., 100\}, A = \{1, 2, 3, ..., 10\}, B = \{50, 51, 52, ..., 100\}$. Caktoni bashkësitë:

a) A'_M; b) B'_M.

Është me vlerë të dish:

Le të jenë $p : x \in A$ dhe $q : x \in B$. Vëreni lidhjen:

Operacionet me gjykimet p dhe q	Operacionet përkatëse me bashkësitë A dhe B
$p \vee q$	$A \cup B$
$p \wedge q$	$A \cap B$
$p \wedge \neg q$	$A \setminus B$
$\neg p$	A'
$p \Rightarrow q$	$A_p \subseteq B_q$
$p \Leftrightarrow q$	$A_p = B_q$

Kujtohu!

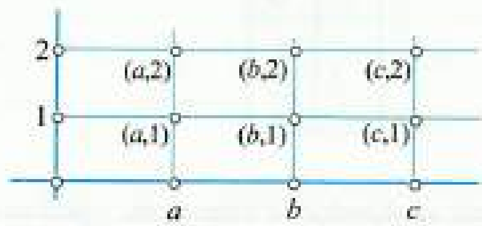
- Çka është dyshe e rënditur?
- A është $(a,b)=(b,a)$?
- A është $\{a,b\}=\{b,a\}$?

$\mathcal{D}$ **13** Le të jenë $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2\}$.

Caktoni bashkësinë $A\times B$ dhe shkruaji tabelarisht dhe me skemë kordinative .

Shiqoni zgjidhjen:

- $A\times B=\{(a,2),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$.
- Prodhimin e Dekartit për bashkësitë A dhe B e paraqesim me skemë kordinative sikurse në vizatimin djathtas.



Duhet të dish!

$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$, d.m.th. prodhim i Dekartit për bashkësinë A dhe B është bashkësia e të gjitha dysheve të renditura ashtu që komponenta e parë i takon bashkësisë A , kurse komponenta e dytë bashkësisë B.

14 Janë dhënë bashkësitë $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$ i $C=\{m,n,t\}$.

Cakto bashkësinë $(A\cap B)\times C$.

Detyra.

(1) Janë dhënë bashkësitë $A=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 1<x\leq 7\}$ dhe $B=\{-1,3,5,7,9\}$.

Caktoni bashkësitë: a) $A\cup B$; b) $A\cap B$; c) $A\setminus B$.

(2) Janë dhënë bashkësitë:

$A=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 2\leq x\leq 5\}$, $B=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 2\leq x<8\}$dhe $C=\{x|x\in\mathbb{Z}\wedge -6<x\leq 3\}$.

a) Shkruani unionin e bashkësive A, B dhe C.

b) A është $A\subset B$?

c) Cakto $A\cap B$.

(3) Janë dhënë bashkësitë $A=\{c,d,e\}, B=\{a,b,c\}$ dhe $C=\{b,c\}$.

Caktoni bashkësitë: a) $(A\times B)\cap(A\times C)$; b) $A\times((B\setminus C)\cup(A\setminus B))$.

9 DISA LIGJE PËR OPERACIONET ME BASHKËSI

Kujtohu!

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ tregon vetinë komutative të konjuksionit.

Shkruani vetinë komutative për mbledhjen në bashkësinë $\mathbb{N}$.

Mbani mend!

1 Janë dhënë bashkësitë:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ dhe $B = \{4,5,6,7,8\}$.

Caktoni $A \cup B$ dhe $B \cup A$. Çka përfundoni?

Me siguri fitove $A \cup B = \{1,2,...,8\}$ dhe $B \cup A = \{1,2,...,8\}$, d.m.th. $A \cup B = B \cup A$.

Për unionin e dy bashkësive vlen edhe ligji komutativ, d.m.th.

$$A \cup B = B \cup A.$$

Vërtetimin e vetisë komutative do ta bëjmë në tre mënyra:

a) Le të jetë $L = A \cup B$ dhe $D = B \cup A$.

Nga $x \in L \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$,

$\Rightarrow x \in B \vee x \in A \Rightarrow x \in B \cup A \Rightarrow x \in D$,

$\Rightarrow L \subseteq D$.

Tani nga $x \in D \Rightarrow x \in B \cup A \Rightarrow x \in B \vee x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in L \Rightarrow D \subseteq L$.

Nga $L \subseteq D$ dhe $D \subseteq L$ rrjedh $L = D$.

b) Duke e transformuar formulën gjykimjore kemi:

$$A \cup B = B \cup A \qquad \wedge \qquad p: x \in A, q: x \in B$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B \cup A \qquad \text{për çdo } x;$$

$$\Updownarrow$$

$$x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \qquad \text{për çdo } x;$$

$$\Updownarrow$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p.$$

c) Me tabelë për përkatësinë e elemntit në bashkësinë:

A	B	$A \cup B$	$B \cup A$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Dy kolonat e fundit të tabelës janë të njëjta, me çka tregohet teza e barazis së atyre bashkësive.

2 Vërtetoni në tre mënyra vetinë komutative të prerjes së dy bashkësive.

Është me rëndësi të dihet:

1. $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ .... vetia asociative e unionit;

2. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ .... vetia asociative e prerjes;

3. $A\cup(A\cap B) = A$ .... apsorpcioni i unionit ndaj prerjes;

4. $A\cap(A\cup B) = A$ .... apsorpcioni i prerjes ndaj unionit;

$$\left.\begin{array}{l}
5.\ (A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)\\[2mm]
6.\ (A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)\\[2mm]
7.\ (A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)\\[2mm]
8.\ (A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)
\end{array}\right\}\ \text{Vetia distributive.}$$

Detyra:

(1) Vërtetoni vetitë me numrin rëndor 2 dhe 3.

Ushtrime kontrolluese tematike

(1) Le të jenë dhënë gjykimet: $p: 2^3 = 6$ dhe $q: 6^3 = 216$. Shkruani gjykimet e përbëra:

a) $p\wedge q$; b) $p\vee q$; c) $\rceil p \Rightarrow q$ d) $\rceil p \Leftrightarrow \rceil q$.

Caktoni vlerën e tyre logjike.

(2) Kontrolloni a janë formulat $F_1: p\Rightarrow q$ dhe $F_2: p\wedge \rceil q \Rightarrow \rceil p$ logjikisht ekuivalente.

(3) Vërtetoni se formula $F: p\Rightarrow q \Leftrightarrow p\wedge\rceil q \Rightarrow q$ është tautologji.

(4) Vërtetoni se lartësia e lëshuar në hipotenuzë te trekëndëshi kënddrejtë është mes gjeometrik i proeksioneve të kateteve në hipotenuzë.

(5) Vërtetoni implikacionin $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ për çdo $a,b,c\in\mathbb{N}$.

(6) Janë dhë bashkësitë $A=\{1,2,3,57\}, B=\{1,2,48\}, C=\{1,3,5,7\}$. Caktoni bashkësitë:

a) $(A\cap B)\cup C$; b) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$; c) ;$(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$ ç) $(A\setminus B)\times(B\setminus A)$.

(7) Vërtetoni se $A\cap(A\cup B) = A$.

TEMA 2

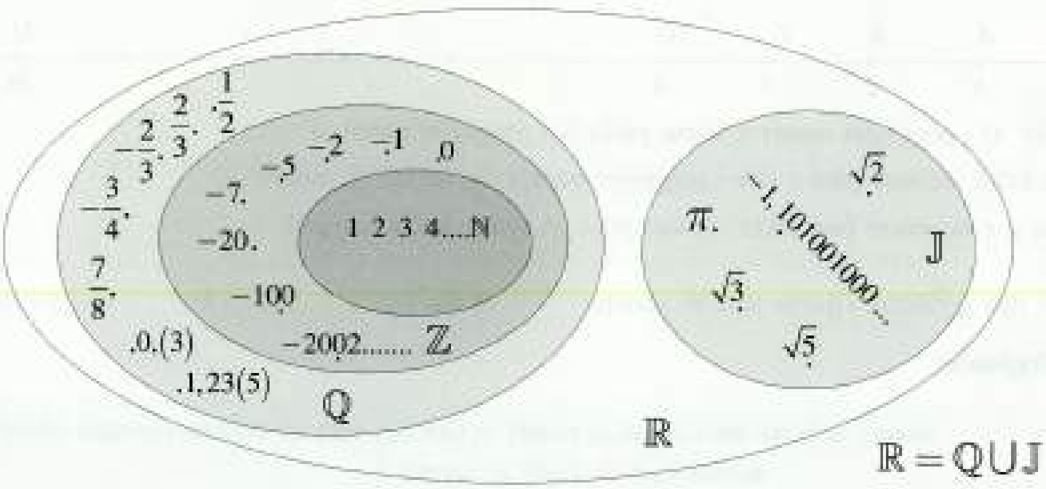
BASHKËSITË ELEMENTARE NUMERIKE

Matematika është mbretëresha e shkencave, kurse teorija e numrave është mbretëresha e matematikës.

K. F. Gausi (1777-1855)

Në këtë temë do të njihesh me:

- bashkësia e numrave natyrorë, të plotë, racionalë dhe numrat realë;
- operacionet në bashkësitë numerike dhe vetitë e tyre;
- Pjesëtimi i numrave natyrorë;
- paraqitja e numrave natyrorë në boshtin numerik;
- intervali i numrave realë;
- numrat e thjeshtë dhe të përbërë;
- PMP dhe SHVP i numrave;
- sistemi dekad dhe binar i numrave;
- operacionet në sistemin binar të numrave.



1 NUMRAT NATYRORË. OPERACIONET DHE VETITË E OPERACIONEVE NË BASHKËSINË E NUMRAVE NATYRORË

Kujtohu!

- Numrat natyrorë shkruhen me dhjetë shifra. Cilat janë ato?
- Shkruani numrat: dyqindë e pesë, pesëqindë e nëntë, njëmijë e tetëqindë e shtatë.

Numrat natyrorë janë : 1,2,3,4,...., kurse bashkësinë e numrave natyrorë e shënojmë me $\mathbb{N}$, d.m.th.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n-1, n, n+1, ...\}.$$

A **1** Në lidhje me vargun e numrave natyrorë, përgjigju:

- Cili është numri më i vogël natyror?
- Cili numër natyror është pasardhës i: numrit 2, numrit 97, numrit 501, numrit n?
- Cili numër natyror është pasardhës i : numrit 5, numrit 200, numrit n?

Mbani mend!

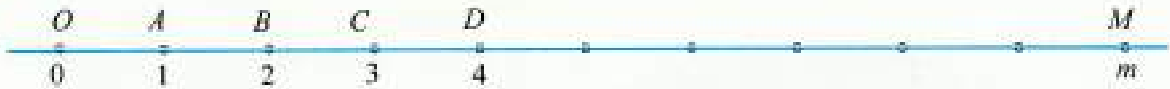
Secili numër natyror ka pasardhës. Nuk ekziston numri më i madh natyrorë. Bashkësia e numrave natyrorë është e pafundme.

2 A është i vërtet gjykimi: Secili numër natyrorë ka pasardhësin e vet.

Numri 0 nuk është numër natyror, d.m.th. $0 \notin \mathbb{N}$.

Bashkësinë e të gjitha numrave natyrorë dhe numrin 0 e shënojmë me $\mathbb{N}_0$, pra $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

3 Në vizatim është paraqitur drejtëza numerike a, me segment njësi $\overline{OA} = 1$.



Pikës O i përgjigjet numri 0, kurse pikës A i përgjigjet numri 1.

- Me çka është shënuar pika e cila i përgjigjet numrit 3; numrit 5; numrit m?

Drejtëza a e orjentuar prej pikës O kah pika A quhet bosht numerik.

4 Cilët nga gjykimet vijuese janë të vërteta: a) $5 < 7$; b) $4 > 5$; c) $25 < 26$?

Në përgjithësi:

Numri a është më i vogël se numri b, $(a < b)$, nëse në boshtin numerik numri a ndodhet në të majtë të numrit b.

5 Caktoni vërtetësinë e gjykimit $\rceil(0 \geq n)$ për çdo numër natyrorë n.

6 Cilët nga gjykimet e mëposhtme janë të vërteta

a) $12 < 18$; b) $5 \leq 8$; c) $\rceil(7 < 3)$; d) $\rceil(8 \geq 15)$; e) $\rceil(3 < 3)$?

Mbani mend!

Numrat natyrorë renditen sipas madhësisë, d.m.th.

$$1<2<3<4<...<n<n+1<...$$

Çdo numri natyrorë i përgjigjet një pikë në boshtin numerik.

B **7** Njehso:

- $23+35$;
- $(27+1023)+350$.

Dyshes së renditur të numrave natyrorë $(3,5)$ i korenspondojmë numrin 8, si shumë e tyre, d.m.th. $(3,5)\xrightarrow{+}3+5=8$.

8 Njehso:

- $27\cdot 15$;
- $(4\cdot 25)\cdot 13$.

Dyshes së renditur të numrave natyrorë $(3,5)$ ia korespondojmë numrin 15, si prodhim i tyre, d.m.th. $(3,5)\longrightarrow 15$.

Shuma dhe prodhimi i numrave natyrorë është rregull sipas së cilës çdo dysheje të renditur i përgjigjet vetëm një numër natyrorë, d.m.th. për çdo

$$a,b\in \mathbb{N},\ (a+b)\in \mathbb{N} \text{ dhe } (a\cdot b)\in \mathbb{N}.$$

Mbledhja dhe prodhimi i numrave natyrorë janë operacione të brendshme, kurse bashkësia e numrave natyrorë është e mbyllur në lidhje me këto operacione.

9 Kontrolloni vërtetësinë e barazimeve:

a) $12+13=13+12$; b) $(8+15)+12=8+(15+12)$; c) $8\cdot 9=9\cdot 8$;

d) $(7\cdot 5)\cdot 4=7\cdot (5\cdot 4)$; e) $(5+13)\cdot 8=5\cdot 8+13\cdot 8$; f) $8\cdot(5+13)=8\cdot 5+8\cdot 13$.

Për mbledhjen dhe prodhimin e numrave natyrorë a,b dhe c vlejnë vetitë:

Për mbledhjen

$a+b=b+a$

Vetia komutative

$(a+b)+c=a+(b+c)$

Vetia asociative

Për prodhimin

$a\cdot b=b\cdot a$

Vetia komutative

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

Vetia asociative

$c(a+b)=ca+cb$; $(a+b)c=ac+bc$

Prodhimi ka *vetinë distributive* në lidhje me mbledhjen.

10 Interpretoni këto shprehje me fjali.

11 Njehso: a) $2+6+8+4+7$; b) $5\cdot 3\cdot 8\cdot 2$; c) $1234+573+266+427$; d) $8\cdot 25\cdot 125\cdot 13\cdot 4$.

a) $2+6+8+4+7=(2+8)+(6+4)+7=10+10+7=27$;

b) $5\cdot 3\cdot 8\cdot 2=(5\cdot 2)\cdot(3\cdot 8)=10\cdot 24=240$.

Mbani mend!

Zbatimi i vetisë komutative dhe asociative mund të zgjerohet edhe në më shumë mbledhësa dhe shumëzuesa.

12 Me zbatimin e vetisë distributive, tregoni se është i vërtetë barazimi: $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$. (Udhëzim: $a+b$ ose $c+d$ zëvendësoni me m).

Kujtohu!

- Njehso:
  a) $8-5$; b) $120-90$.
- Caktoni x nga barazimi $x+5=18$.
- Mbledhësi i panjohur përcaktohet ashtu që nga shuma do të zbritet mbledhësi i njohur.

Ndryshimi i numrave natyrorë a dhe b është numri c, i cili kur mblidhet me numrin b na jep numrin a.

C

13 Njehso:

a) $73-65$; b) $23-25$.

Me siguri përfundove se ndryshimi $73-65$ është numër natyror, por ndryshimi $23-25$ nuk është numër natyrorë.

Qartë, ndryshimi është operacion i kushtëzuar (i pjesërishëm) në bashkësinë e numrave natyrorë.

Mbani mend!

Ndryshimi $a-b$ i numrave natyrorë a dhe b është numër natyrorë, vetëm nëse $a>b$.

14 Kontrolloni vërtetësinë e barazimeve:

a) $(25-13)\cdot 8=25\cdot 8-13\cdot 8$ dhe b) $8\cdot(25-13)=8\cdot 25-8\cdot 13$.

Vlen në përgjithësi: shumëzimi ka vetinë distributive në lidhje me zbritjen e numrave natyrorë, d.m.th. për çdo $a,b,c\in\mathbb{N}$ dhe $a>b$ vlen $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$ dhe $c\cdot(a-b)=c\cdot a-c\cdot b$.

15 Caktoni vlerën e vërtetësisë për gjykimet:

a) $15-8=8-15$ dhe b) $(15-8)-5=15-(8-5)$.

Për zbritjen e numrave natyrorë nuk vlen as vetia komutative e as ajo asociative.

Për $a=0$, barazimi $a=0$ është gjykim i vërtetë. Gjithashtu, për çdo numër natyrorë $a\in\mathbb{N}$ janë të vërtetë gjykimet $a+0=a$ dhe $a\cdot 0=0$.

Operacionet: mbledhje, zbritje dhe prodhim në bashkësinë $\mathbb{N}_0$ definohen sikurse në bashkësinë $\mathbb{N}$.

16 Në çfarë varshmërie janë numrat a dhe b nëse $(a-b)\in\mathbb{N}_0$?

Kujtohu!

- Njehso $125:5$.
- Cakto x nga barazimi $4x = 24$.
- Herësi i numrave natyrorë a dhe b është numri natyrorë q, i cili kur shumëzohet me b fitohet numri a.

17 Nxënësit e një paralele, për ditëlindjen e shokut të klasës Agimit, vendosën t'i blejnë një dhuratë prej 2635 denarësh. Nga sa denarë duhet të japin shokët e klasës së Agimit nëse dihet se klasa numëron 32 nxënës?

18 Caktoni herësat: a) $221:13$ dhe b) $128:5$.

Me siguri përfundove se herësi i $128:5$ nuk është numër natyrorë. Domethënë , për çdo numër natyrorë $a,b \in \mathbb{N}$, herësi $a:b$ nuk është gjithmonë numër natyror.
Për shembull, për $a = 12$ dhe $b = 5$ nuk ekziston numri natyror q i cili do të plotësonte barazimin $a = b \cdot q$, d.m.th. $12 = 5 \cdot q$.

Mbani mend!

Pjesëtimi në bashkësinë e numrave natyrorë është operacion i pjesërishëm (i kushtëzuar).

Herësi $44:5$ nuk është numër natyrorë. Megjithatë, edhe në këtë rast pjesëtimi kryhet dhe quhet pjesëtim me mbetje.
Ashtu kemi: $44:5 = 8$ dhe mbetja 4, d.m.th. $44 = 5 \cdot 8 + 4$.

Mbani mend!

Për çfarëdo numrash të dhënë natyrorë a dhe b gjenden numrat $q, r \in \mathbb{N}_0$, ashtu që $a = b \cdot q + r$, $0 \le r < b$, prej nga q quhet herës , kurse r mbetje.

Gjatë pjesëtimit të numrave 13, 37, 30 dhe 4 me 5 , kemi : $13 = 2 \cdot 5 + 3$, $37 = 7 \cdot 5 + 2$, $30 = 6 \cdot 5 + 0$ dhe $4 = 0 \cdot 5 + 4$.

19 Verifikoni vërtetësinë e barazimeve:

a) $(12+9):3 = 12:3 + 9:3$ b) $(24-16):4 = 24:4 - 16:4$.

Për pjesëtimin vlen vetia distributive e anës së djathtë në lidhje me mbledhjen dhe zbritjen e numrave natyrorë, d.m.th. nëse

$$a,b,c \in \mathbb{N},\ (a:c) \in \mathbb{N},\ (b:c) \in \mathbb{N} \text{ dhe } a > b \text{ kemi:}$$

$$(a+b):c = a:c + b:c \text{ dhe } (a-b):c = a:c - b:c.$$

20 Logarit në dy mënyra vlerën e shprehjes $(a+b):c$ dhe $(a-b):c$ për $a = 36$, $b = 12$ dhe $c = 6$.

Detyra:

1. Shkruani në mënyrë tabelare bashkësitë:

a) $A=\{x \mid x\in \mathbb{N} \wedge x<2002\}$;

b) $B=\{x \mid x\in \mathbb{N} \wedge 25\le x<40\}$.

2. Caktoni vlerën e vërtetësisë për gjykimet:

a) $25<30$; b) $30\le 50$;

c) $\rceil(27\ge 26)$; g) $\rceil(15\ne 15)$.

3. Duke zbatuar vetinë komutative dhe asociative llogarit:

a) $43+32+17+48$; b) $47+41+23+19$;

c) $4\cdot 11\cdot 25$; d) $125\cdot 25\cdot 7\cdot 8\cdot 4$.

4. Njehso:

a) $(45+5)\cdot 8$; b) $(372-2)\cdot 4$;

c) $(3\cdot 81-43)\cdot 5$; d) $8+2\cdot(51\cdot 5-17\cdot 15)$.

5. Njehso:

a)	b)
	$1\cdot 9+2$
$9\cdot 9+7$	$12\cdot 9+3$
$98\cdot 9+6$	$123\cdot 9+4$
$987\cdot 9+5$	$1234\cdot 9+5$
$9876\cdot 9+4$	$12345\cdot 9+6$
$98765\cdot 9+3$	$123456\cdot 9+7$
$987654\cdot 9+2$	$1234567\cdot 9+8$
$9876543\cdot 9+1$	$12345678\cdot 9+9$

Llogarit vlerën e shprehjes në tre rreshtat e para dhe vështroni alegoritmin.

2 PJESËTIMI I NUMRAVE NATYRORË. NUMRAT E THJESHTË DHE TË PËRBËRË

Kujtohu!

Nëse q është herës i numrave a dhe b, kurse r është mbetja, atëherë

$$a=b\cdot q+r.$$

A 1 Caktoni herësin dhe mbetjen gjatë pjesëtimit të numrave:

a) 48 dhe 6; b) 69 dhe 7.

Nëse mbetja $r=0$, atëherë $a=bq$, në këtë rast themi se numri b është pjesëtues i numrit a (a pjesëtohet me b ose a është shumëfish i b), këtë shkurtimisht e shënojmë $b\mid a$.

Për shembull, $4\mid 24$, sepse $24=6\cdot 4$; $8\mid 96$, për arsye se $96=8\cdot 12$.

Numri 8 nuk është pjesëtues i numrit 50, këtë fakt shkurtimisht e shënojmë $8\nmid 50$.

Shpesh herë, në vend të "***b* është pjesëtues i *a***", thuhet "***a* është shumëfish i *b***".

2 Caktoni cili nga gjykimet është i vërtetë:

a) $7\mid 21$; b) $4\mid 2$; c) $8\nmid 16$; d) 32 është shumëfish i 4;

e) 3 është pjesëtues i 39; f) 7 nuk është pjesëtues i 35.

Për relacionin "është pjesëtues i ", të vërteta janë pohimet:

1. Nëse c është pjesëtues i numrave a dhe b, atëherë c është pjesëtues edhe i shumës së tyre, d.m. th. $(c|a \wedge c|b) \Rightarrow c|(a+b)$.

Ndiqni vërtetimin:

Nga supozimi $c|a$ dhe $c|b$ rrjedh se $a=m\cdot c$ dhe $b=n\cdot c$ prej nga $m,n\in\mathbb{N}$. Nga ku rrjedh $a+b=m\cdot c+n\cdot c=c\cdot(m+n)$. Pra, shuma $a+b$ është paraqitur si prodhim i numrave natyrorë c dhe $m+n$, dhe shuma $a+b$ është shumëfish i numrit c, d.m.th. $c|(a+b)$.

2. Nëse $m|a$ dhe $n|b$, atëherë $(m\cdot n)|(a\cdot b)$.

Ndiqni vërtetimin:

Nga $m|a \Rightarrow a=m\cdot k_1$ dhe nga $n|b \Rightarrow b=n\cdot k_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{N}$.

Sipas kësaj, $a\cdot b=(m\cdot k_1)\cdot(n\cdot k_2)=(m\cdot n)\cdot(k_1\cdot k_2)$, që d.m.th. se $(m\cdot n)|(a\cdot b)$.

3 Vërtetoni pohimin: Nëse $(m|a)\wedge(m|b)\wedge(a>b)\Rightarrow m|(a-b)$.

Kujtohu!

E dini se $a=1\cdot a$, d.m.th. $a|a$ dhe $1|a$.

B 4 Sa pjesëtues ka numri 7?

Sa pjesëtues ka numri 8?

Sa pjesëtues ka numri 1?

Mbani mend!

- Numrat që kanë dy pjesëtues janë numra të thjeshtë.
- Numrat që kanë më shumë se dy pjesëtues janë numra të përbërë.
- Numri 1 nuk është as numër i thjeshtë as numër i përbërë.

Mënyrën për caktimin e numrave të thjeshtë të një vargu të fundëm të numrave natyrorë e ka dhënë matematikani i greqisë antike Eratosteni (shek III, p.e.s) me të ashtuquajturën sita e Eratostenit e cila për 100 numrat e parë natyrorë duket kështu :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Ndërron ngjyra e numrit 1, ai nuk është as numër i thjeshtë as numër i përbërë.
- Numri 2 mbetet me ngjyrë të zezë, ai është numër i thjeshtë. Pas tij ndërron ngjyra e çdo numri çift.
- Numri i ardhshëm të cilit nuk i ndërron ngjyra është numri 3, si numër i thjeshtë. Pas tij ndërron ngjyra e çdo të tretit numër, të cilët janë të pjesëtueshëm me 3.
- Në mënyrë të ngjashme vazhdohet procedura për çdo numër i cili nuk e ka të ndërruar ngjyrën, që është i thjeshtë.
- Vëreni, bashkësia e numrave të thjeshtë është e pafundme.

5 Numrat 48; 62 dhe 52 paraqiti si shumë e dy numrave të thjeshtë.

Vëreni, $48=37+11; 62=57+5; 52=41+11$.

Mbani mend!

Secili numër çift më i madh se 2 mund të shkruhet si shumë e dy numrave të thjeshtë.

6 Numrat 18, 28, 36, 58 dhe 72 shkruani si shumë të dy numrave të thjeshtë.

7 Numrat 60, 152 dhe 167 zbërtheni në pjesëtues të thjeshtë.

$60=2\cdot30=2\cdot2\cdot15=2\cdot2\cdot3\cdot5=2^2\cdot3\cdot5$;

$152=2\cdot76=2\cdot2\cdot38=2\cdot2\cdot2\cdot19=2^3\cdot19$.

Është e qartë se, numri 167 nuk është shumëfish i 2, 3 dhe 5. Numrat e ardhshëm të thjeshtë janë 7 dhe 11, dhe me provë tregohet se numri 167 nuk është shumëfish i tyre. Numri 167 nuk është shumëfish as i numrit 13. Meqë $167<169=13\cdot13$, rrjedh se 167 nuk mund të ketë pjesëtues më të mëdhej se 13, d.m.th. ai është numër i thjeshtë.

Mbani mend!

Nëse numri natyrorë p nuk është shumëfish i asnjë numri të thjeshtë katrori i të cilit nuk është më i madh se p, atëherë numri p është i thjeshtë.

Sipas kësaj, secili numër natyror $a>1$ është ose numër i thjeshtë ose mund të paraqitet si prodhim i numrave të thjeshtë. Paraqitja e numrit si prodhim shumëzuesish të thjeshtë është e vetme, kurse rënditja e shumëzuesve nuk ka rëndësi.

8 Këto pohime nuk do t'i vërtetojmë.

Cakto a janë të thjeshtë ose të përbërë numrat: a) 127; b) 919.

9 Numrat 120 dhe 425 zbërtheni në shumëzues të thjeshtë duke shfrytëzuar tabelat vertikale. Ndiqni zgjidhjen:

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 120=2^3\cdot3\cdot5 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 425 & 5 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \quad 425=5^2\cdot17$$

Duhet të dish!

Cilët numra janë të thjeshtë?

Numri i dhënë të zbërthehet në shumëzues të thjeshtë.

Kujtohu!

- Pjesëtue të numrit 18 janë: 1, 2, 3, 6, 9 i 18.
- Caktoni të gjithë pjestuesit e numrit 24.
- Caktoni pjesëtuesit e përbashkët të numrave 18 dhe 24.

𝒞 **10** Janë dhënë dy tela, njëra e gjatë 16 *m*, kurse tjetra 12 *m*.

Caktoni gjatësinë më të madhe që telat e dhënë mund të ndahen në pjesë të barabarta.

Pjesëtuesit e përbashkët të numrave 16 dhe 12 janë 1, 2 dhe 4, kurse pjesëtuesi më i madh i përbashkët i tyre është numri 4, d.m.th.

$$\text{PMP}\ (12, 16) = 4.$$

Të dy telat duhet të prehen në pjesë me gjatësi nga 4 *m*.

Mbani mend!

Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i dy numrave natyrorë a dhe b është numri më i madh natyrorë i cili është pjesëtues i numrave a dhe b.

11 Caktoni pjesëtuesin më të madh të përbashkët të numrave 168 dhe 180. Vëreni:

$$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \text{ dhe}$$

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \text{, tani}$$

$$\text{PMP}\ (168,180) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Duhet të dish!

Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i dy numrave është i barabartë me prodhimin e të gjithë pjesëtuesve të përbashkët të atyre numrave.

Që të caktohet më lehtë pjesëtuesi më i madh i përbashkët do të përdorim tabelat vertikale.

12 Caktoni PMP (90, 135, 315), duke përdorur tabelat vertikale.

Ndiqni zgjidhjen:

$$\begin{array}{rrr|l} 90, & 135, & 315 & 3 \\ 30, & 45, & 105 & 3 \\ 10, & 15, & 35 & 5 \\ 2, & 3, & 7 & \end{array}$$

Vëreni se të gjithë numrat e dhënë i pjesëtojmë me numër të thjeshtë, duke filluar me më të voglin deri sa është e mundur.

Fitojmë, PMP $(90,135,315) = 3^2 \cdot 5 = 45$.

13 Caktoni PMP të numrave: a) 24 dhe 30; b) 72 dhe 90; c) 9 dhe 14.

Pasi të zgjidhim rastin c) vërejmë se PMP (9, 14) $=1$.

Mbani mend!

Nëse PMP $(a, b) = 1$, atëherë për numrat a dhe b themi se janë të thjeshtë dhe shënojmë

$$(a, b) = 1.$$

Ashtu për shembull, reciprokisht të thjeshtë janë numrat: a) 25 dhe 21; b) 10, 15 dhe 12; v) 27 dhe 35.

Kujtohu!

Shumëfish të numrit 3 janë:
3, 6, 9, 12, 15, ...

Caktoni bashkësinë e shumëfishave të numrit 5.

Caktoni bashkësinë e shumëfishave të përbashkët të numrave 3 dhe 5.

14 Prej një stacioni autobusësh në të njëjtën kohë nisen dy autobusa. Njëri kthehet çdo 12 minuta, kurse tjetri çdo 16 minuta .

Pas sa minutash të dy autobusat do të nisen përsëri bashkë nga stacioni?

Shumëfish të numrave 12 janë: 12, 24, 36, 48, ..., kurse të numrit 16 janë: 16, 32, 48, 64, ... Sipas kësaj shumëfishi më i vogël i përbashkët i tyre është numri 48, d.m.th. SHVP(12, 16) = 48.

Mbani mend!

Shumëfishi më i vogël i përbashkët (SHVP) i dy ose më shumë numrave të dhënë është numri më i vogël i cili është shumëfish i secilit nga numrat e dhënë. Për shembull, SHVP $(4, 6) = 12$; SHVP $(8, 6) = 24$.

15 Caktoni SHVP (18, 24). Numrat 18 dhe 24 i zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë:

$18 = 2\cdot 3\cdot 3 = 2\cdot 3^2$; $24 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = 2^3\cdot 3$. Pra, SHVP $(18, 24) = 2^3\cdot 3^2 = 72$.

Duhet të dish !

Shumëfishi më i vogël i përbashkët i dy ose më shumë numrave është i barabartë me prodhimin e të gjithë shumëzuesve të thjeshtë të marrë si fuqi me tregues më të madh.

16 Cakto SHVP (60, 72, 90), duke përdorur tabelën vertikale.

SHVP $(60, 72, 90) = 2^3\cdot 3^2\cdot 5 = 360$.

17 Cakto SHVP të numrave: a) 14 dhe 15; b) 20 dhe 40; c) 60, 90 dhe 12.

Me siguri vëreni se : SHVP$(14,15) = 14\cdot 15$; SHVP(20, 40) = 40.

Mbani mend!

Shumëfishi më i vogël i përbashkët i dy ose më shumë numrave reciprokisht të thjeshtë është prodhimi i tyre. Nëse numri a është shumëfish i numrit b, atëherë SHVP $(a, b) = a$.

Detyra:

1. Cilët prej këtyre gjykimeve janë të vërteta: a) $6|23$; b) $5|135$; c) $9|163$; d) $11|1111$?
2. Nëse $c|(a+b)$ dhe $c|b$, atëherë c është pjesëtues edhe i mbledhësit tjetër (a).Vërtetoni!
3. Me cilin numër pjesëtohet numri: a) $2n$; b) $3n$; c) $4n$; d) $7n$, ako $n\in \mathbb{N}$?
4. Nëse $c|a$, atëherë $c|a\cdot b$ për çdo $b\in \mathbb{N}$. Vërtetoni!
5. Për cilin numër më të vogël natyror n, numri a) 2^n-1, b) 2^n+1 është numër i thjeshtë?
6. Vërtetoni se për çdo $n\in \mathbb{N}$, shprehja a) $(n+1)^2-(n-1)^2$; b) $(n+1)(n-2)+(n+2)(n+3)$ është numër i përbërë.
7. Caktoni: a) SHVP (180, 96); b) SHVP (165, 45, 75); c) SHVP (180, 96); d) SHVP (18, 60, 75).
8. Sa paqeta të njëjta mund të formohen prej 48 çokolladave , 72 keksave dhe 720 bonboneve?

3 SISTEMI DEKAD DHE BINAR I NUMRAVE

Kujtohu!

Shkruani tabelarisht bashkësinë e të gjitha shifrave me të cilat shkruhen numrat natyrorë.

Si quhet sistemi i numrave te i cili i shkruan numrat?

A 1 Lexoje numrin 762354.

Çfarë vlere ka shifra 5, e çfarë vlere shifrat 3 dhe 2?

Sistemi i numrave në të cilin është shkruajtur numri 762354 quhet sistem dekad i numrave.
(Në evropë nga indija e kanë sjellë arapët në sherk. XII).

Sistemi dekad i numrave është pozicional , sepse vlera e çdo shifre në numrin e shënuar varet nga pozicioni (vendi) ku ajo ndodhet në numër.

Në sistemin dekad të numrave rol kryesor ka numrin 10 dhe ai është baza e sistemit. Prej këtu e merr edhe emrin dekadë (dhjetë në gjuhën latine është *deka*).

Në sistemin dekad të numrave çdo pozicion i shifrës duke u nisur prej të djathtës nga e majta, numri e ka vlerën e tij pozicionale e cila është dhjetë herë më e madhe nga pozicioni para tij.

Në numrin 762354, shifra 5 ka vlerë 5 dhjetëshe ose $5\cdot 10=50$ njësi; shifra 3 ka vlerën 3 qindëshe ose $3\cdot 10^2=300$ njësi, kurse shifra 2 ka vlerën 2 mijë ose $2\cdot 10^3=2000$ njësi .

Numrat $10;100=10^2;1000=10^3;...;10^n$ quhen *njësi dekade*.

Mbani mend!

Në shënimin dekad të numrave , secila shifër tregon numër të njësheve ose numër të dhjetësheve ose numër të qindëshevce etj. përkatësisht nga pozicioni ku është shkruar.

2 Caktoni vlerat e shifrës 5 te numri 5555.

3 Vëreni tabelën dhe numrin e shënuar në të.

KLASË											
MILIJARDË			MILIONË			MIJËSHE			NJËSHE		
QMi	DHMi	NjMi	QM	DhM	NjM	QM	DHM	NjM	Q	Dh	Nj
	3	4	1	5	0	1	0	6	0	1	1

Lexo numrin në tabelë. Cilat vlera i ka shifra 1, dhe cilat numri 0?

Njësia e parë nga e djathta ka vlerën 1 njësi, d.m.th. $1=1\cdot 10^0$. Njësia e dytë nga e djathta ka vlerën 10 njësi, d.m.th. $10=1\cdot 10^1$. Njësia e tretë nga e djathta ka vlerën 100000 njësi, d.m.th. $100000=1\cdot 10^5$ etj.

Zeroja e parë nga e djathta ka vlerën zero qindëshe, d.m.th. $0=0\cdot 10^2$, kurse zeroja e dytë nga e djathta ka vlerën zero dhjetëmijëshe, d.m.th. $0=0\cdot 10000=0\cdot 10^4$.

Mbani mend!

Zeroja si shifër përdoret për tu kujdesur për pozicionet e shifrave, vlera e të cilës është e ndryshme nga zeroja.

Nga tabela vërejmë se nga e djathta në të majtë ka grupe me nga tre pozicione në një klasë.

Gjatë leximit të numrave emërohen të gjitha klasët përveç klasës së njësheve, ashtu që numri i shkruar lexohet: tridhjetë e katër milijardë e njëqindë e pesëdhjetë milion e njëqindë e gjashtëdhjetë mijë e njëmbëdhjetë.

4 Shkruani numrin: dyqindë e shtatë mijë e njëqindë e pesë.

Te numri që e shënuam sa ka :

a) njëshe; b) dhjetëshe; c) dhjetëmijëshe; d) qindëmijëshe?

5 Numrat: a) 432; b) 1056; c) 3708602 shkruani në formë të zbërthyer d.m.th. në formën polinomiale.

Vëre: a) $432 = 400 + 30 + 2 = 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2$;

c) $3708602 = 3 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2$.

Le të jetë numri a i shënuar me $n+1$ shifra. Atëherë shënimi shkronjor pozicional i tij është në formën:

$$a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_3 a_2 a_1 a_0},$$, kurse forma polinomiale është:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + a_{n-3} \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

6 Pa i kryer operacionet , shkruaj në formë pozicionale numrat:

a) $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5$; b) $4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$; c) $6 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^3 + 5$.

Numri $4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$ është gjashtëshifrorë, që shihet nga treguesi më i madh i numrit 10. Te numri ka vetëm tre shifra që janë të ndryshme nga zero, këto janë shifrat në pozicionin e dytë, të katërt dhe të gjashtë , kurse të tjerat janë zero.

Sipas kësaj, $4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 = 403020$.

B Supozohet se njeriu shumë herët ka numëruar vetëm nga dy, kurse numri dy lidhet me organet e ndëgjimit dhe të pamurit , numrin e duarve , numrin e këmbëve etj.

Sistemi numerik ku rolin kryesor e ka numri dy quhet sistem binar i numrave (dy në gjuhën latine është bini).

Sistemi binar i numrave është pozicional dhe baza e tij është dy.

Formimi i sistemit dekad të numrave kryhet me grupimin nga 10, ashtu që 10 njësi formojnë një njësi të rendit më të lartë. Dhjetë dhjetëshe formojnë një qindëshe , 10 qindëshe formojnë një mijëshe etj.

Formimi i sistemit binar të numrave ndërtohet në mënyrë të ngjashme , vetëm se këtu grupimi bëhet nga dy , ashtu që çdo 2 njësi formojnë një njësi të një rendi më të lartë.

Numrat: $10_2; 100_2; 111_2; 1010110_2$ janë të shkruarë në sistemin binar të numrave.

Vëreni dhe mbani mend!

Sistemi binar i numrave është pozicional.
Numrat në sistemin binar të numrave shënohen vetëm me anë të dy shifrave, 0 dhe 1.
Baza 2 me çdo kusht shënohet.

Gjatë leximit të numrave kurdoherë lexohet baza dy. Ashtu për shembull, numri 1011_2 lexohet: një zero një , një me bazë dy.

Në sistemin binar të numrave , numrat mund të shkruhen edhe në formë polinomiale , ngjashëm sikurse në sistemin dekad të numrave , vetëm se këtu në vend të 10 do të kemi 2, d.m.th.

$$a=\left(\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}\right)_2 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 .$$

Shifrat $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ kanë vlerën 0 ose 1, kurse $a_n \neq 0$.

7 Numrat: 1101_2; 11_2; 10101_2 dhe 1111010_2 shkruani në formë polinomiale.

$1101_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1$; $11_2 = 1\cdot 2 + 1$; $1010111_2 = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1$.

8 Shkruani në formë pozicionale me bazë dy numrat:

a) $1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1$; b) $1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2$ c) $1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^3 + + 1\cdot 2 + 1$;

d) $1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^2$.

Numri $1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2$ është gjashtëshifror , shifrat e pozicionit të parë, të tretë dhe të katërt janë zero, pra $1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2 = 110010_2$.

9 Tregoni vërtetësinë e barazimeve:

a) $1101_2 = 13$; b) $111_2 = 7$; c) $11011_2 = 27$.

Numrat të cilët nuk kanë të shënuar bazën, janë të dhënë në sistemin dekad të numrave.

Vëre zgjidhjen:

a) $1101_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1 = 8 + 4 + 1 = 13$;

b) $111_2 = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$;

c) $11011_2 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2 + 1 = 16 + 8 + 2 + 1 = 27$.

Vëre dhe mbani mend!

Të shënohet numri nga sistemi binarë në atë dekad duhet ai të shkruhet në formën polinomiale dhe të kryhen operacionet e kërkuara në atë polinom.

10 Numri 35 të shkruhet në shënimin binar.

Për qartësi procedurën do ta tregojmë në mënyrën vijuese:

$35:2=17$ dhe mbetja 1
$17:2=8$ dhe mbetja 1
$8:2=4$ dhe mbetja 0
$4:2=2$ dhe mbetja 0
$2:2=1$ dhe mbetja 0
$1:2=0$ dhe mbetja 1

Sipas kësaj, $35 = 1\,0\,0\,0\,1\,1_2$

Detyra:

1 Cili numër është më i madh:

a) 1011_2 ose 1010_2; b) 1001_2 ose 10010_2?

3 Ktheni në sistemin dekad numrat:

a) 1111_2; b) 10001_2;

c) 10000_2; ç) 101010_2.

2 Shkruani në formën pozicionale numrat:

a) $2\cdot 10+1$; b) $3\cdot 10^3+1$;

c) $5\cdot 10^4+2\cdot 10^2+3$; d) $1\cdot 2^3+1\cdot 2+1$;

e) $1\cdot 2^6+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2$; f) $1\cdot 2^8+1\cdot 2^6+1\cdot 2$.

4 Ktheni në sistemin binarë numrat:

a) 8; b) 28; c) 100; d) 135.

4 OPERACIONET NË SISTEMIN BINAR TË NUMRAVE

Kujtohu!

$$\begin{array}{r} 3452 \\ +\ \ 673 \\ \hline \end{array}$$

Mblidhen njësitë e pozicioneve të njëjta. Nëse shuma e tyre është më e madhe ose e barabartë me 10 (baza e sistemit), atëherë merret njësi e një rendi më të lartë kurse mbetja shënohet në të njëjtin pozicion.

Mbledhja gjithmon fillohet nga pozicioni i parë.

A **1** Njehso shumën:

$1011_2 + 11101_2$.

Tabela për mbledhje në sistemin binar të numrave duket kështu:

+	0	1
0	0	1
1	1	10_2

Mbledhja më lehtë kryhet nëse numrat i shënojmë njërin nën tjetrin. Njësitë e vogla mbi mbledhësin e parë shënojnë numër të njësis së bartur të fituar gjatë mbledhjes së njësive nga pozicioni më i ulët.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\,1\,1\,1 \\ 1011_2 \\ +\ \ 11101_2 \\ \hline 101000_2 \end{array}$$

2 Njehso: $1110_2 + 11110_2 + 1010101_2$.

Vëre zgjidhjen:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,2\,2\,2\,1} \\ 1010101_2 \\ +\ \ 111110_2 \\ 1110_2 \\ \hline 10100001_2 \end{array}$$

3 Njehso:

a) $11011_2 + 12$; b) $10 + 10101_2 + 16$.

Kujdes, të gjithë mbledhësat nuk janë shënuar në të njëjtin sistem numrik.

B Zbritja në sistemin binar kryhet në të njëjtën mënyrë sikurse në sistemin dekadë . Zbriten njësitë në pozicionin e parë nëse është e mundur. Nëse zbritja e njësive të pozicionit të njëjtë nuk është e mundur , atëherë huazohet njësi nga pozicioni i parë i rangut më të lartë.

4 Njehsoni ndryshimin: a) $110111_2 - 10101_2$; b) $1110111_2 - 10111_2$; c) $110101_2 - 22$.

Zgjidhje:

a)
$$\begin{array}{r} 110111_2 \\ -\ \ 10101_2 \\ \hline 100010_2 \end{array}$$

c) $110101_2 - 22 = 110101_2 - 10110_2 = 11111_2$.

b)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,2\,2} \\ {\scriptstyle 0\,2\,\cdot\,0\,0} \\ {\scriptstyle 0\,0\,2\,0\,0\,2} \\ 1110110_2 \\ -\ \ 10111_2 \\ \hline 1011111_2 \end{array}$$

Pikat mbi shifrat e të zbritshmit tregojnë se nga ajo shifër është huazuar një njësi.

Shifrat e vogla mbi të zbritshmin tregojnë sa njësi kanë mbetur në atë pozicion pas huazimit ose sa njësi ka në pozicionin më të ulët pas huazimit .

5 Njehso vlerën e shprehjes

a) $110101101_2 - 110111_2$; b) $1110101_2 + 11011_2 - 111111_2$; c) $31 + 111011_2 - (13 + 1111_2)$.

C Njehso: $1203 \cdot 402$.

Shumëzimi i numrave në sitemin binar të numrave është i njëjtë sikurse në sistemin dekad të numrave.

6 Njehso prodhimin:

a) ;$101101_2 \cdot 101_2$; b) $1110_2 \cdot 25$.

Tabela e shumëzimit në sitemin binar duket kështu:

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Vëre zgjidhjen:

a) $101101_2 \cdot 101_2 = 11100001_2$

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ 000000_2 \\ 101101_2 \\ \hline 11100001_2 \end{array}$$

b) $1110_2 \cdot 25 = 1110_2 \cdot 11001_2 = 101011110_2$

$$\begin{array}{r} 1110_2 \\ 111000_2 \\ 1110_2 \\ \hline 101011110_2 \end{array}$$

Mbani mend!

Operacionet me numra kryhen nëse numrat janë dhënë në sistemin e njëjtë numerik.

***Detyra*:**

1. Njehso: a) $1110101_2 + 11010_2$; b) $1110101_2 - 101110_2$; c) $10101_2 \cdot 110_2$.

2. Njehso vlerën e shprehjes:

a) $1101_2 + 26 + 10101_2$; b) $37 - 1110_2 + 101_2$; c) $(32 + 1011_2) \cdot 10$; d) $(21 \cdot 1001_2 - 13 \cdot 100_2) \cdot 10_2$.

5 BASHKËSIA E NUMRAVE TË PLOTË DHE OPERACIONET NË BASHKËSINË E NUMRAVE TË PLOTË

Kujtohu!

- Zgjidhni barazimin:

  $x + 5 = 12$

- Ndryshimi $a - b$ i numrave natyrorë a dhe b është numër natyrorë nëse $a > b$.

A 1 Njehso:

a) $25 - 13$; b) $14 - 17$.

Ndryshimi $14 - 17$ nuk është numër natyrorë, për të qenë në rregull duhet që bashkësinë e numrave natyrorë ta zgjerojmë me numra të rinj.

Zgjerimi i parë i bashkësisë $\mathbb{N}$ është bërë me numrin 0, ashtu që për çdo $a \in \mathbb{N}, a - a = 0$. Numrat +1, +2, +3, ... quhen *numra të plotë pozitivë.*

Nëse numrave natyrorë 1, 2, 3, ... u korespondojmë shenjën "–" (minus), fitohet bashkësia *e numrave të plotë negativë*. Numri 0 nuk është as pozitivë e as negativë.

Mbani mend!

Bashkësia e cila i përfshin të gjitha numrat natyrorë , të gjithë numrat e plotë negativ dhe numrin 0, quhet bashkësia e numrave të plotë , të cilën e shënojmë me $\mathbb{Z}$,d.m.th.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

kujtohu!

- Numrat natyrorë i paraqitëm në pjesën pozitive të boshtit numerik.
- Numrat e plotë negativ në boshtin numerik janë simetrik me numrat natyrorë në lidhje me numrin zero.

- Numrat 1 dhe -1, 2 dhe -2, 5 dhe -5 quhen numra të kundërt.

Në përgjithësi për numrin a i kundërt është numri $-a$.

2 Cili është numri i kundërt i numrit: $10,\ -15,\ 23,\ -123$?

E ke të njohur se vlera apsolute e numrit të plotë a është vetë ai numër nëse ai është pozitiv ose zero, dhe i kundërti i a nëse ai është negativ, d.m.th.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ nëse} & a > 0 \\ 0, \text{ nëse} & a = 0 \\ -a, \text{ nëse} & a < 0 \end{cases}$$

Për shembull, $|+12| = 12$; $|-12| = 12$; $|0| = 0$. Me siguri vëreni se numrat e kundërt kanë vlera apsolute të barabarta, d.m.th. $|a| = |-a|$.

3 Caktoni vlerën apsolute të numrave: -5; 7; -20; +20.

Përmendëm se numri natyrorë a është më i vogël se numri natyror b, nëse në drejtëzën numerike a ndodhet në të majtë të numrit b. Për shembull, $5 < 7$; $7 < 12$; $1 > 0$.

E njëjta rregull vlen edhe për numrat e plotë.

Mbani mend!

Secili numër pozitiv është më i madh se secili numër i plotë negativ.
Numri zero është më i madh se secili numër i plotë negativ.

4 Caktoni vlerën e vërtetësisë së gjykimeve:

a) $-5 < 0$; b) $7 > 0$; c) $-7 > 0$; d) $-6 < 6$; e) $7 > -7$; f) $-5 < -1$; g) $-2 > -3$.

5 Thoni rregull për renditjen e dy numrave të njëpasnjëshëm të plotë negativ me ndihmën e vlerës së tyre apsolute.

6 Renditi sipas madhësisë numrat: 2; -3; 5; 1; 0; -6; -4; 8.

Mbani mend!

Bashkësia e numrave të plotë është e pafundme.
Në bashkësinë $\mathbb{Z}$ nuk ekziston as numri më i vogël e as numri më i madh.
Numrat e plotë renditen sipas madhësisë, d.m.th. $\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$.
Bashkësinë e numrave të plotë pozitivë e shënojmë me $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$, kurse bashkësinë e numrave të plotë negativë me $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$.

Kujtohu!

Për mbledhje dhe shumëzim të numrave të plotë kemi:

$(+5)+(+7)=+12$	$(+5)\cdot(+7)=+35$
$(-5)+(-7)=-12$	$(-5)\cdot(-7)=+35$
$(-5)+(+7)=+2$	$(-5)\cdot(+7)=-35$
$(+5)+(-7)=-2$	$(+5)\cdot(-7)=-35$

$\mathscr{B}$ ***Mbani mend!***

- Nëse $a, b \in \mathbb{Z}^+$, atëherë $(a+b) \in \mathbb{Z}^+$; $(a \cdot b) \in \mathbb{Z}^+$.
- Nëse $a, b \in \mathbb{Z}^-$, atëherë $(a+b) \in \mathbb{Z}^-$; $(a \cdot b) \in \mathbb{Z}^+$.
- Nëse $a \in \mathbb{Z}^+, b \in \mathbb{Z}^-$, atëherë $(a+b) \in \mathbb{Z}^+$ për $|a| > |b|$; $(a+b) \in \mathbb{Z}^-$ për $|a| < |b|$ dhe $(a \cdot b) \in \mathbb{Z}^-$.

7 Shkruani shprehjet e dhëna me fjali.

8 Njehso: a) $(-3)\cdot(-5)+(+6)\cdot(-2)+(-12)$; b) $(-4)+(-5)\cdot(+6)+(-3)\cdot(-7)$;

Krahasoni zgjidhjen tuaj me zgjidhjen e dhënë:

a) $(-3)\cdot(-5)+(+6)\cdot(-2)+(-12)=(+15)+(-12)+(-12)=(+3)+(-12)=-9$.

Si quhen numrat $(+8)$ dhe (-8) dhe sa është shuma e tyre?

Vëre!

Shuma e du numrave të plotë të kundërt është zero, d.m.th.

$$a+(-a)=(-a)+a=0.$$

9 Kontrolloni saktësinë e barazimit:

$$\big((-5)+(+3)\big)\cdot(+6)=(-5)\cdot(+6)+(+3)\cdot(+6).$$

Më herët u njohëm me vetitë e shumës dhe prodhimit të numrave natyrorë .Të gjitha ato veti vlejnë edhe për shumën dhe prodhimin e numrave të pkotë.

C Ndryshimi i numrave të plotë a dhe b është numri x, i cili kur mblidhet me numrin b e jep numrin a, d.m.th. $a-b=x$, nëse $a=x+b$.

Vëreni mënyrën:

Kemi: $a+(-b)=x+b+(-b)\Leftrightarrow a+(-b)=x+0\Leftrightarrow a+(-b)=x$. Nga $a-b=x$ i $a+(-b)=x$ rrjedh

$$a-b=a+(-b).$$

Mbani mend!

Nga numri i plotë a të zbritet numri i plotë b domethënë , numrit a t'i shtohet numri i kundërt i numrit b.

Për shembull: $(+7)-(+5)=(+7)+(-5)=2$; $(-10)-(-7)=(-10)+(+7)=-3$.

10 Njehso: a) $(+12)-(-7)-(-3)\cdot(-5)$; b) $(-5)\cdot(-3)-(-4)\cdot(+3)-(-10)$.

Ndiqni zgjidhjen:

a) $(-12)-(-7)-(-3)\cdot(-5)=(-12)+(+7)-(+15)=(-5)+(-15)=-20$.

Nga pjesa e kaluar është e qartë se shuma , prodhimi dhe ndryshimi i dy numrave të plotë është numër i plotë, pra themi se shuma , prodhimi dhe ndryshimi janë operacione të brendshme në bashkësinë e numrave të plotë ose bashkësia $\mathbb{Z}$ është e mbyllur në lidhje me këto operacione.

Pjesëtimi i numrave të plotë është operacionë i pjesshëm (i kushtëzuar) në bashkësinë $\mathbb{Z}$.

Herësi $a:b$ i numrave a dhe b është numër i plotë vetëm nëse $b\,|\,a$.

11 Njehso: a) $(+48):(+6)$; b) $(-48):(-6)$;

c) $(-48):(+6)$; d) $(+48):(-6)$.

Vëreni se herësi është pozitiv nëse i pjestueshmi dhe pjesëtuesi kanë shenja të njëjta, kurse është negativ nëse i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi kanë shenja të ndryshme.

12 Njehsoni vlerën e shprehjes:

a) $(+5)-(+6)\cdot(-4)-(-42):(-7)$;

b) $(-28)-(-45):(+9)+(-12)\cdot(+4)$.

Detyra:

(1) Caktoni vlerën e secilës shprehje: a) $|-3+5|+|-2\cdot(-3)-10|$;

b) $|x-2|+|3-x|-|5-x|$ za $x=-20$.

(2) Njehso: a) $(-10)+3\cdot(-2)$; b) $(-7)\cdot(-2)-10\cdot 2$; c) $(-24):(-6)+3\cdot(2-5)$.

(3) Njehso vlerën numerike të shprehjes:

a) $5-12:(-3)+15\cdot(-3)-24$; b) $-12\cdot(-2)+4(-13-15:(-5))$;

c) $4(-2)+(-3)(-9)-2(-3-4(2-5))$; d) $-6(-3+4)-2(18-3):(-5)$.

(4) Vërtetoni pohimin: a) $-(-x)=x$; b) $-(x+y)=(-x)+(-y)$;

c) $(-x)y=-(xy)$; d) $(-x)(-y)=xy$; e) $-(x-y)=-x+y$.

6 NUMRAT RACIONALË

Kujtohu!

Zgjidhi barazimet:

- $x\cdot 5=-35$;
- $x\cdot 7=-12$.

Barazimi $x\cdot b=a$ në bashkësinë $\mathbb{Z}$ ka zgjidhje vetëm për disa numra a dhe b.

A 1 Caktoni herësin:

a) $32:8$; b) $-4,5:5$; v) $17:8$.

Herësi $17:8$ nuk është numër i plotë. Për këtë arsye ka nevojë që bashkësia e numrave $\mathbb{Z}$ të zgjerohet me numra të rinj.

Nevoja për futjen e numrave të rinj paraqitet në lidhje me matjet e madhësive sepse rezultati i matjeve nuk mundet gjithmon të paraqitet me anë të numrave natyrorë.

Bashkësinë $\mathbb{Z}$ do ta zgjerojmë me numra të rinj të cilat quhen thyesa.

Secili herës $a:b$, $b\neq 0$ mund të shkruhet në formën $\frac{a}{b}$, d.m.th. $a:b=\frac{a}{b}$ e cila quhet thyesë.

Për shembull , thyesa janë: $\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{6}{5},\frac{8}{13},\frac{-7}{5},\frac{4}{-3}$ etj.

Mbani mend!

Bashkësia e cila i përmban të gjitha thyesat quhet bashkësia e numrave racional dhe shënohet me $\mathbb{Q}$, d.m.th. $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\middle| a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$.

2 A janë të gjithë numrat e plotë thyesa?

Numrat e plotë janë numra racionalë, përkatësisht thyesa.

Për shembull: $5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{-15}{-3}=...;-7=\frac{-7}{1}=\frac{14}{-2}=...;0=\frac{0}{1}=\frac{0}{3}=...$

Vëreni!

Shprehjet $\frac{2}{0}$; $\frac{-5}{0}$;... nuk janë të përcaktuara sepse pjesëtimi me zero nuk është i përkufizuar.

3 Caktoni vlerën e vërtetësisë për gjykimet:

a) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$; c) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$; d) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{N}$;d) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Z}$; e) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}^{+}$.

Kujtohu!

- $48:6=(48\cdot 2):(6\cdot 2)$;
- $48:6=(48:3):(6:3)$.

Herësi nuk ndërron nëse i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi shumëzohen ose pjesëtohen me një numër të njëjtë ndryshëm nga zero.

$\mathscr{B}$ **4** Herësat: $21:7=(21\cdot 3):(7\cdot 3)$ dhe $24:8=(24:4):(8:4)$ shkruani si thyesa.

Në përgjithësi:

$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k}$ i $\frac{a}{b}=\frac{a:k}{b:k}$ $(k\neq 0, b\neq 0)$.

Mbani mend!

Nëse numëruese dhe emëruesi i një thyese shumëzohet me një numër të njëjtë k, $k\neq 0$, fitohet thyesë e njëjtë me thyesën e dhënë. Ky veprim quhet *zgjerim* i thyesës .

Nëse numëruesi dhe emëruesi i një thyese pjesëtohen me një numër të njëjtë k, $k\neq 0$, fitohet thyesë e njëjtë me thyesën e dhënë. Ky veprim quhet *thjeshtim* i thyesës.

5 Thyesat $\frac{2}{3}$ dhe $\frac{4}{5}$ zgjeroni me : 2; 3; 4 i 5. Vëreni: $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{4}{6}$; $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{16}{20}$.

6 Thjeshtoni thyesat: $\frac{18}{24}$; $\frac{12}{42}$; $\frac{-9}{30}$ dhe $\frac{-162}{-189}$. Kemi: $\frac{18}{24}=\frac{18:2}{24:2}=\frac{9}{12}=\frac{9:3}{12:3}=\frac{3}{4}$.

Thyesa është e pathjeshtueshme nëse numëruesi dhe emëruesi nuk kanë pjesëtues tjetër përveç numrit 1,d.m.th. ato janë numra reciprokisht të thjeshtë.

7 Thyesat: $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$ dhe $\frac{7}{3}$ sillni në emërues të njëjtë.

Vëreni:

Thyesat do ti sjellim në emërues më të vogël të përbashkët . Nga ajo se SHVP (4, 6, 3) = 12, thyesën $\frac{3}{4}$ do ta zgjerojmë me 3 dhe do të fitojmë $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12}$.

Në mënyrë të ngjajshme i zgjerojmë edhe thyesat e tjera dhe fitojmë $\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{10}{12}$ dhe $\frac{7\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{28}{12}$.

8 Sillni në emërues më të vogël të përbashkët thyesat:

a) $\frac{5}{12}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$; b) $6\frac{3}{4}$; $7\frac{3}{8}$; $8\frac{4}{5}$; c) ; $\frac{-3}{4}$; $\frac{-7}{12}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{16}$.

Kujtohu!

- Renditi thyesat: a) $\frac{3}{6}$ dhe $\frac{4}{8}$; b) $\frac{3}{5}$ dhe $\frac{4}{7}$.

- Prej dy thyesave me emërues të njëjtë , më e madhe është thyesa e cila ka numërues më të madh.

Vëreni!

Për çdo dy numra racional $\frac{a}{b}$ dhe $\frac{c}{d}$ $(b \neq 0, d \neq 0)$ vlen vetëm njëri nga relacionet:

□ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, nëse $ad > bc$; □ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, nëse $ad = bc$ □ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, nëse $ad < bc$.

Për shembull: $\frac{3}{4} < \frac{5}{8}$, sepse $3 \cdot 5 < 4 \cdot 8$; $-\frac{2}{3} > -\frac{15}{4}$, sepse $-2 \cdot 4 > 3 \cdot (-15)$,d.m.th. $-8 > -45$.

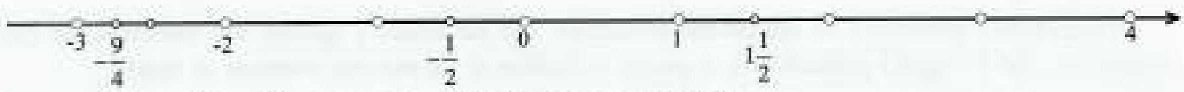
- Gjatë punës me thyesa mund të kufizohemi në thyesat me emërues pozitiv. Për shembull : $\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$, sepse $3 \cdot 4 = -3 \cdot (-4)$; ngjashëm, $\frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$. Nga tre arsye rrjedh se $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

9 Renditi sipas madhësive thyesat $\frac{3}{5}, \frac{-8}{9}, \frac{5}{3}, \frac{2}{-3}, 1$.

- Gjeni SHVP(5, 9), e pastaj kryeni zgjerimin me numrin përkatës.

- Përkatësisht nga zgjerimi i thyesave fitojmë: $-\frac{8}{9} < -\frac{2}{3} < \frac{3}{5} < 1 < \frac{5}{3}$.

10 Në boshtin numerik janë paraqitur disa numra racional.



Thyesat e paraqitura në boshtin numerik , renditi sipas madhësisë.

Nëpërgjithësi!

Nga dy numra racional më i madh është ai i cili ndodhet në anën e djathtë në boshtin numerik.

10 Paraqiti në bosht numerik numrat: $-4\frac{1}{2}, 3, \frac{-5}{2}, 2\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$.

Detyrë

1. Për cilat vlera të x shprehja nuk ka kuptim: a) $\frac{3}{x}$; b) $\frac{2}{x-1}$; c) $\frac{2x-1}{x+4}$; d) $\frac{x+2}{x^2-9}$.

2. Cakto vlerën e të panjohurës te thyesat , ashtu që të fitohet barazim numerik i vërtetë:

   a) $\frac{3}{5} = \frac{9}{a}$; b) $\frac{7}{9} = \frac{b}{45}$; c) $\frac{12}{16} = \frac{3}{c}$; d) $\frac{24}{36} = \frac{d}{12}$.

3. Renditi sipas madhësisë thyesat: a) $\frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{7}{12}$; b) $\frac{4}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{9}{27}; \frac{-7}{12}$; c) $5\frac{4}{5}; 5\frac{8}{15}; 4\frac{5}{6}$.

7 OPERACIONET NË BASHKËSINË E NUMRAVE RACIONAL

Kujtohu!

- $\frac{3}{4}+\frac{5}{4};\ \frac{8}{7}-\frac{5}{7}.$

Nëpërgjithësi:

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},(c\neq 0)$ dhe

$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},(c\neq 0).$

A **1** Një bujk ditën e parë lëvroi $\frac{7}{12}$ e arës , kurse ditën e dytë lëvroi $\frac{7}{18}$ e të njëjtës arë.

- Cilën pjesë të arës e ka lëvruar bujku për dy ditë?
- Cila pjesë e arës ka mbetur pa lëvruar?

Vëreni zgjidhjen.

Për dy ditë bujku lëvroi

$\frac{7}{12}+\frac{7}{18}$ pjesë të arës.

SHVP (12, 18) = 36, dhe kemi:

$$\frac{7}{12}+\frac{7}{18}=\frac{7\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{21+14}{36}=\frac{35}{36}.$$

Pjesa e pa lëvruar është:

$$1-\left(\frac{7}{12}+\frac{7}{18}\right)=1-\frac{35}{36}=\frac{1}{1}-\frac{35}{36}=$$

$$=\frac{36}{36}-\frac{35}{36}=\frac{36-35}{36}=\frac{1}{36}\text{ pjesë e arës.}$$

Mbani mend!

Thyesat me emëruesa të ndryshëm mblidhen kur në fillim i sjellim me emërues të përbashkët (shumëfishi më i vogël i përbashkët), e pastaj mblidhen si thyesa me emërues të njëjtë,

d.m.th. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$, për $b\neq 0$ dhe $d\neq 0$.

2 Llogaritni vlerën e shprehjes $2\frac{3}{8}-1\frac{7}{12}+\frac{1}{4}-1\frac{5}{6}$.

Vëreni mënyrën: SHVP (8, 12) = 24.

$$2\frac{3}{8}-1\frac{7}{12}+\frac{1}{4}-1\frac{5}{6}=\frac{19}{8}-\frac{19}{12}+\frac{1}{4}-\frac{11}{6}=\frac{57-38+6-44}{24}=-\frac{19}{24}.$$

3 Kontrolloni vërtetësinë e barazimit: a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$; b) $1\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}$.

- Çka vëreni?

Për mbledhjen dhe shumëzimin e thyesave vlen vetia komutative dhe asociative,

Tani për çdo $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, janë të vërteta barazimet:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\text{ dhe }\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{p}{q}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{p}{q}\right).$$

2 Njehso : a) $\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)$; b) $1\frac{1}{4}-1\frac{1}{4}$.

Thyesat $\frac{a}{b}$ dhe $-\frac{a}{b}$ janë të kundërta, pra $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}-\frac{a}{b}=\frac{a-a}{b}=\frac{0}{b}=0$.

Kujtohu!

Njehso: a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$; b) $1\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}$.

Nëpërgjithësi: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

B 5 Njehsoni vëllimin e kuadrit me dimensione: $3\frac{3}{4}$ cm, $1\frac{4}{5}$ cm, kurse lartësia është për $1cm$ më e gjatë se gjërësia.

Lartësia është $1+1\frac{4}{5}=2\frac{4}{5}$ cm.

Për vëllimin e kuadrit kemi:

$V=3\frac{3}{4}\cdot1\frac{4}{5}\cdot2\frac{4}{5}$ ose $V=\frac{15}{4}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}$, gjegjësisht $V=\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{1}\cdot\frac{7}{5}$, d.m.th. $V=\frac{189}{10}=18{,}9\ cm^3$.

Vëreni se gjatë shumëzimit numrat e përzier transformohen në thyesa jo të drejta.

6 Njehsoni në dy mënyra: a) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{6}\right)$; b) $\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$.

Vlen nëpërgjithësi: Shumëzimi i thyesave është operacion distributiv në lidhje me mbledhjen dhe zbritjen .

7 Shkruani këtë pohim me simbole.

8 Njehso: a) $\frac{3}{4}\cdot0$; b) $\frac{2}{3}\cdot1$; v) $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}$.

Mbani mend!

Nëse $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, $b\neq0, d\neq0, q\neq0$, atëherë

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$; $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}\right)$;

$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}+\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}$.

Kujtohu!

Për çdo thyesë $\frac{a}{b}$ vlenë: $\frac{a}{b}\cdot0=0$; $\frac{a}{b}\cdot1=\frac{a}{b}$ dhe $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$, nëse $\frac{a}{b}\neq0$.

Dy numra , prodhimi i të cilëve është 1 quhen numra reciprok.

Për shembull, thyesa $\frac{5}{6}$ është vlerë reciproke (ose numër reciprok) për thyesën $\frac{6}{5}$, për $-\frac{3}{4}$ numër reciprok është $-\frac{4}{3}$, kurse për 5 numër reciprok është $\frac{1}{5}$.

9 Cili numër është reciprok me numrin: $\frac{4}{7}$; $-1\frac{1}{3}$; -5; $3\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$?

Kujtohu!

- Njehso: a) $\frac{6}{5}:\frac{2}{5}$; b) $1\frac{1}{2}:\frac{4}{3}$.
- Zgjidhe barazimin $x\cdot\frac{4}{3}=\frac{5}{6}$.

Të pjesëtohet thyesa $\frac{a}{b}$ me thyesën $\frac{c}{d}, \frac{c}{d}\neq 0$, d.m.th. të caktohet thyesa $\frac{x}{y}$, ashtu që të plotësohet barazimi $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}\cdot\frac{c}{d}$.

C **10** Syprina e drejtkëndëshit është $6\frac{3}{5}\ m^2$, kurse njëra brinjë e tij është $3\frac{2}{3}\ m$. Caktoni gjatësinë e brinjës tjetër.

Nga , $S=a\cdot b$ rrjedh $6\frac{3}{5}=3\frac{2}{3}\cdot b$ prej nga

$b=6\frac{3}{5}:3\frac{2}{3}$ ose $b=\frac{33}{5}:\frac{11}{3}$, përkatësisht

$b=\frac{33}{5}\cdot\frac{3}{11}$, d.m.th. $b=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}\ m$.

Mbani mend!

Herësi i dy thyesave është i barabartë me prodhimin e të pjestueshmit dhe vlerës reciproke të pjesëtuesit , d.m.th. për çdo dy thyesa $\frac{a}{b}$ dhe $\frac{c}{d}$, $(b\neq 0,\ d\neq 0, c\neq 0)$ vlen $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

11 Njehso: a) $\frac{7}{8}:\left(-2\frac{3}{2}\right)$; b) $3\frac{3}{4}-2\frac{1}{4}:1\frac{1}{2}$.

Vëreni procedurën: a) $\frac{7}{8}:\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{7\cdot(-2)}{8\cdot 7}=-\frac{1}{4}$;

b) $3\frac{3}{4}-2\frac{1}{4}:1\frac{1}{2}=\frac{15}{4}-\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{15}{4}-\frac{3}{2}=2\frac{1}{4}$.

- Me çfarë renditje kryhen operacionet?

12 Herësat: $\frac{2}{3}:4$; $5:\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$ shkruani në formë të thyesave.

Vëreni zgjidhjen: $\frac{2}{3}:4=\frac{\frac{2}{3}}{4}$; $5:\frac{3}{4}=\frac{5}{\frac{3}{4}}$; $1\frac{1}{2}:\frac{4}{5}=\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}$.

Mbani mend!

Thyesa te e cila numëruesi ose emëruesi janë thyesa quhet thyesë e dyfishtë.

13 Thyesat e dyfishta: a) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$ b) $\frac{4}{\frac{3}{4}}$ c) $\frac{\frac{5}{6}}{4}$ d) $\frac{-1+\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{4}}$ ktheni në thyesa të thjeshta.

Vëreni zgjidhjen: a) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}=\frac{9}{10}$; b) $\frac{4}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{4}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\cdot 4}{3\cdot 1}=5\frac{1}{3}$.

Mbani mend!

Thyesa e dyfishtë kthehet në thyesë të thjeshtë ,ështu që prodhimi i anëtarëve të jashtëm është si numërues , kurse prodhimi i anëtarëve të brendshëm si emërues i thyesës.

14 Njehso: a) $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{\frac{8}{9}+\frac{5}{6}}$ b) $\dfrac{1\frac{1}{8}-2\frac{1}{6}}{2\frac{1}{4}-3}$ c) $\dfrac{1+2-\frac{4}{3}}{2-3+\frac{1}{2}}$.

Mbani mend!

Operacionet mbledhje , shumëzim dhe zbritje janë operacione të brendshme në bashkësinë e numrave $\mathbb{Q}$, d.m.th . $\mathbb{Q}$ është e mbyllur në lidhje me këto operacionet.

15 Caktoni gjysmëshumën e numrave: a) 5 dhe 7; b) $1\frac{4}{3}$ dhe 3; c) $2\frac{1}{2}$ dhe $3\frac{1}{3}$.

Vëreni zgjidhjen: c) $\dfrac{2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{\frac{5\cdot 3+10\cdot 2}{6}}{2}=2\dfrac{11}{12}$.

Mbani mend!

Mesi arithmetik i numrave a dhe b është numri $s=\dfrac{a+b}{2}$.

16 Për numrat: a) 5 dhe 9; b) $\frac{1}{2}$ dhe $2\frac{1}{3}$ cakto mesin arithmetik dhe krahasoe me numrat e dhënë.

Mesi arithmetik $s=\dfrac{a+b}{2}$ i numrave racional a dhe b $(a<b)$ është më i madh se numri a kurse më i vogël se numri b, d.m.th. $a<\dfrac{a+b}{z}<b$.

Vëreni zgjidhjen. Nga $a<b\Rightarrow a+a<b+a\Rightarrow 2a<b+a\Rightarrow a<\dfrac{b+a}{2}$.

Prej $a<b\Rightarrow a+b<b+b\Rightarrow a+b<2b\Rightarrow \dfrac{a+b}{2}<b$. Prej nga rrjedh: $a<\dfrac{a+b}{2}<b$.

17 Cakto më së paku pesë numra të cilët ndodhen mes numrave 5 dhe 7.

$s_1=\dfrac{5+7}{2}=6$, sepse $5<6<7$, rrjedh se $s_2=\dfrac{5+6}{2}=5{,}5$ dhe $s_3=\dfrac{6+7}{2}=6{,}5$, dhe kemi:

$5<5{,}5<6<6{,}5<7$. Vazhdoni procedurën në mënyrë të njëjtë.

Mbani mend!

Mes çdo dy numrave racionalë ndodhet numër racional , d.m.th.bashkësia e numrave racional është bashkësi e ngjeshur.

***Detyra*:**

1. Njehso: a) $\frac{5}{17}-\frac{8}{17}+\frac{12}{17}$; b) $4\frac{3}{5}-5\frac{1}{5}+1\frac{2}{5}$; c) $8\frac{1}{3}\cdot 3\frac{3}{5}$; ç) $\frac{4}{3}:12$.

2. Njehsoni vlerën e shprehjes: a) $\frac{3}{5}-\frac{4}{9}+\frac{7}{15}-\frac{1}{3}$; b) $5\frac{3}{4}-4\frac{4}{5}-2\frac{1}{2}$.

3. Caktoni vlerën e shprehjes:

a) $\frac{3}{2}-2\left(\frac{1}{3}-4\right)+\frac{7}{6}$; b) $\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{4}\right):\left(\frac{11}{16}-\frac{7}{8}\right)$; c) $16-\left(7\frac{1}{3}-3\frac{7}{12}\right)\cdot 1\frac{4}{5}$.

4. Njehso: a) $\dfrac{3-2\frac{1}{2}}{1+1\frac{1}{3}}$; b) $\dfrac{\frac{1}{4}+3}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}}$; c) $\dfrac{3-2\frac{1}{4}}{2\frac{1}{4}:3}-\dfrac{1\frac{1}{2}-2}{2-\frac{1}{3}}$.

5. Le të jenë $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ dhe $\frac{m}{n}$ numra të çfarëdoshëm racional. Tregoni se vlen barazimi:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}+\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}.$$

8 NUMRAT DHJETOR. OPERACIONET ME NUMRA DHJETORË

Kujtohu!

- Thyesat: $\frac{1}{10}$; $\frac{72}{100}$ dhe $\frac{6254}{1000}$ shkruani si numra dhjetor.
- Numrat dhjetorë: 2,6; 3,25 dhe 0,625 shkruani si thyesa.

A

1. Thyesat: a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{32}{5}$; v) $\frac{7}{8}$ shkruani si numra dhjetor.

Vëreni procedurën.

a) $\frac{7}{2}=\frac{7\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{35}{10}=3{,}5$.

Mbani mend!

Thyesa , emëruesi i së cilës është njësi dekade quhet thyesë dhjetore.
Thyesa dhjetore e shkruajtur pa emërues quhet numër dhjetor.

2. Shkruani si numra dhjetorë thyesat: $\frac{3}{4}$; $\frac{9}{8}$ dhe $\frac{7}{200}$.

Mbani mend!

Thyesa , emëruesi i së cilës është pjesëtues i njësis dhjetore mund të kthehet në numër dhjetor të fundëm.

3. Numrat dhjetor: a) 0,5; b) 2,35; c) 4,125 shkruani si thyesa.

Vëreni procedurën: b) $2{,}35=2\frac{35}{100}=2\frac{7}{20}$. (nëse lexon në rregull , në rregull shkruaj.)

Kujtohu!

Numrat dhjetorë shkruhen në sistemin dekad të numrave.

Si mblidhen dhe si zbriten numrat në sistemin dekad të numrave?

B **4** Llogaritni shumën dhe ndryshimin e numrave dhjetor 45,32 dhe 8,865.

$$\begin{array}{r} 45,320 \\ +\ \ 8,865 \\ \hline 54,185 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45,320 \\ -\ \ 8,865 \\ \hline 36,455 \end{array}$$

Mbani mend!

Mbledhja dhe zbritja gjithmonë fillohet me shifrat që janë në pozitën e parë nga e djathta e numrit. Pika dhjetore duhet të jetë në një vertikale.

5 Njehso: a) $23,5-42+0,325$; b) $3,125-6,25+4,0125$.

6 Njehso prodhimin dhe pjesëtimin e numrave: 5,84 dhe 2,5.

Vëreni:

$5,84 \cdot 2,5 = 14,6$

$$\begin{array}{r} 2920 \\ +\ 1168 \\ \hline 14,600 \end{array}$$

$5,84 : 2,5 = 58,4 : 25 = 2,336$

$$\begin{array}{r} -50 \\ \hline 84 \\ -75 \\ \hline 90 \\ -75 \\ \hline 150 \\ -150 \\ \hline 0 \end{array}$$

Mbani mend!

Numrat dhjetorë shumëzohen sikurse numrat natyrorë , por te prodhimi presja dhjetore vëndohet për aq vende dhjetore sa vende dhjetore kanë të dy numrat bashkarisht duke filluar nga e djathta.

Para se të bëhet pjesëtimi i numrave dhjetor , të pjesëtueshmin dhe pjesëtuesin do t'i shumëzojmë me njësi dekadeështu që pjesëtuesi të bëhet numër i plotë.

Pastaj pjesëtimi kryhet njëlloj sikurse me numrat natyrorë.

7 Njehso: a) $3,25 \cdot 1,5-4,5$; b) $56-2,875:2,3$.

Kujtohu!

Thyesat $\frac{5}{4}$ dhe $\frac{17}{5}$ shkruani si numra dhjetorë.

Cilat thyesa mund të shkruhen si numra dhjetorë të fundëm?

C **8** Thyesat $\frac{3}{8}$; $\frac{2}{3}$ dhe $\frac{7}{22}$ ktheni në numra dhjetorë.

Me ndihmën e rregullës për pjesëtim do të kemi:

$$\frac{3}{8}=0,375;\ \frac{2}{3}=0,666...;\ \frac{7}{22}=0,31818...$$

Mbani mend!

Çdo thyesë mund të shkruhet si numër i fundëm ose i pafundëm dhjetor.

Secilit numër dhjetorë mund t'i shtohen shifra zero nga e djathta dhe përsëri vlera e tij nuk ndryshon. Për shembull , $0,375 = 0,37500...$; $5 = 5,000...$

9 Shkruani si numra dhjetor thyesat: $\frac{14}{11}$; $\frac{23}{6}$; $\frac{5}{7}$.

$\frac{14}{11} = 1,272727...$; $\frac{23}{6} = 2,8333...$

Vëren se gjatë pjesëtimit ndonjë mbetje mund të përsëritet, kurse te herësi përsëritet një shifër ose grup shifrash me të njëjtën rënditje.

Mbetje të mundshme gjat pjesëtimit me 6 janë: 0, 1, 2, 3, 4 ose 5, kurse gjatë pjesëtimit me 11 janë : 0, 1, 2, ... ose 10.

Shifra ose grupi i shifrave që përsëriten , quhet periodë e numrit dhjetorë dhe shënohet:

$$1,2727... = 1,(27) \; ; \; 3,8333... = 3,8(3).$$

Mbani mend!

Çdo numër racional mund të shkruhet si numër dhjetor periodik.

Vëreni:

Le të jetë $\frac{a}{b}$, $b \in \mathbb{N}$, cilido numër racional. Atëherë, Gjatë pjesëtimit të a me b janë të mundshme këto mbetje: $0, 1, 2, 3, \ldots, b-1$. Pas më së shumti b-hapash në procedurën e pjesëtimit, ndonjëra nga këto mbetje doemos duhet të përsëritet. Në këtë rast te herësi do të përsëriten të njëjtat shifra me të njëjtën renditje. Me çka pohimi u vërtetua.

Për shembull, $\frac{12}{13} = 12:13$, mbetje të mundshme janë $0, 1, 2, 3, \ldots, 12$. Mund të presim përsëritje pas 13 hapash , megjithëatë këtu përsëritja fillon në hapin e shtatë , d.m.th. $12:13 = 0,(923076)$. Vlen edhe e anasjellta.

Secili numër periodik dhjetor , paraqet një thyesë, d.m.th numër racional.

10 Numrat periodik: a) $1,(5)$ dhe b) $0,2(3)$ shkruani si thyesa.

Vëreni:

a) $x = 1,(5) = 1,555...$

$10x = 15,(5) = 15,555...$

$10x - x = 15,555... - 1,555...$

$9x = 14$

$x = \frac{14}{9}$, d.m.th. $1,(5) = \frac{14}{9}$.

b) $x = 0,2(3) = 0,2333...$

$100x = 23,(3) = 23,333...$

$10x = 2,(3) = 2,333...$

$100x - 10x = 23 - 2 = 21$

$x = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$.

***Detyra*:**

1. Shkruani si numra dhjetorë thyesat: $\frac{7}{4}, \frac{17}{8}, \frac{-9}{5}, \frac{-32}{25}$.
2. Shkruani si thyesa të pathjeshtueshme numrat: $2{,}12$; $0{,}008$; $6{,}125$; $-5{,}75$.
3. Njehso: a) $(7{,}3-2{,}9)\cdot 0{,}5$; b) $(23{,}4+12{,}3):1{,}25$;
   c) $3{,}46+2{,}1\cdot(0{,}25-1{,}23)$; d) $30{,}25+2{,}5\cdot(3{,}02-4{,}1:0{,}25)$.
4. Paraqitni si numra dhjetor numrat: $\frac{8}{7}, \frac{11}{45}, \frac{13}{12}$.
5. Numrat dhjetor shkruani si thyesa :
   a) $0,(6)$; b) $2{,}3(15)$; c) $4{,}5(18)$; d) $2{,}3(4)$.

9 NUMRAT REALË

Kujtohu!

- Zgjidhni barazimin $x^2-4=0$.
- Brinja e katrorit është 3 cm. Njehsoni syprinën e tij.

A 1 Sa është brinja e katrorit, syprina e të cilit është:

a) 16 cm^2; b) 8 cm^2?

Vëreni zgjidhjen:

Nga $S=a^2$ rrjedh : a) $a^2=16$; $a=\sqrt{16}=4\,cm$.

b) $a^2=8$; $a=?$ A ekziston numër racional , katrori i të cilit është 8?

Vëreni se nuk ekziston numër racional i cili është numri matës i brinjës dhe katrori i tij të jetë $8cm^2$, sepse $a=\sqrt{8}=2{,}82842712...$

2 Zgjidhni barazimin: a) $x^2-9=0$; b) $x^2-3=0$; c) $x^2-15=0$.

Logaritni hipotenuzën e trekëndëshit barakrahës kënddrejt me katete 1 cm.

Vëreni se barazimi $x^2-3=0$ dhe $x^2-15=0$ nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave racional. Gjithashtu nuk ekziston numri racional c, numri matër i hipotenuzës që të plotësojë barazimin $c^2=2$. Ky dhe shumë probleme të tjera nuk mund të zgjidhen në bashkësinë e numrave racional $\mathbb{Q}$, për këtë arsye është e nevojshme që të bëhet zgjerimi edhe i kësaj bashkësie numrash me numra të rinj të cilët do t'i quajmë *numra iracional*.

Bashkësinë e numrave iracional do ta shënojmë me $\mathbb{J}$.

Numra iracional janë: $\sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{5}; -\sqrt{7}; ...$, numri $\pi=3{,}14159265...$ etj.

3 Me kalkulator llogarit: $\sqrt{2}=1{,}41421356...$; $\sqrt{3}=1{,}73205080...$

Vëreni se ato janë numra të pafundëm dhjetorë sepse nëse ndonjëri prej tyre është periodik atëherë ai do të jetë racional.

Numrat $0{,}121221222...$ dhe $2{,}7343443444...$ janë numra iracional.

Mbani mend!

Secili numër dhjetor i pafundëm është numër iracional.
Numrat iracional bashkë me ato racional e formojnë bashkësinë e numrave realë të cilën e shënojmë me $\mathbb{R}$, d.m. th . $\mathbb{R} = \mathbb{J} \cup \mathbb{Q}$.

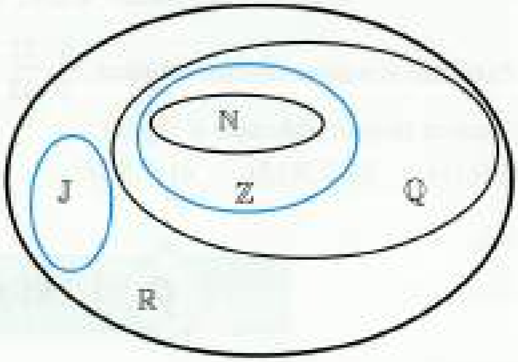
4 Në vizatim me diagram të Venit janë dhënë bashkësitë: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{J}$ i $\mathbb{R}$.

Caktoni vlerën e vërtetësisë për gjykimet:

a) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$;

v) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{J} = \varnothing$; g) $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Z}$;

d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{J}$.



5 Cili numër është më i madh: a) $\sqrt{2}$ ose $\frac{7}{5}$; b) $\sqrt{3}$ ose $\frac{9}{5}$; c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ose $\sqrt{2}$?

Vëreni zgjidhjen: a) $\frac{7}{5} = 1{,}4$; $\sqrt{2} = 1{,}414221356...$, rrjedh $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$.

Kujtohu!

Mes çdo dy numrave racional gjendet numër racional.

Bashkësia e numrave racional është bashkësi e ngjeshur.

A ka vend në boshtin numerik për numrat iracional?

B **6** Brinjët e drejtkëndëshit janë $a = 12\,cm$ i $b = 5\,cm$.

Cakto gjatësinë e dijagonales së tij.

Vëreni. Për ndonjë njësi matëse , gjatësia e çdo segmenti paraqitet me numër pozitiv në boshtin numerik . Vlen edhe e anasjellta , për çdo numër pozitiv , gjendet segmenti gjatësia e të cilit është ai numër.

Numrit $\sqrt{2}$ do ti korespondojmë segment i cili është hipotenuza e trekëndëshit kënddrejtë barakrahës me katete 1.

Në lidhje me pyetjen e dhënë në "kujtohu ", mund të përgjigjemi se në boshtin numerik ka vend për të gjithë numrat iracional.

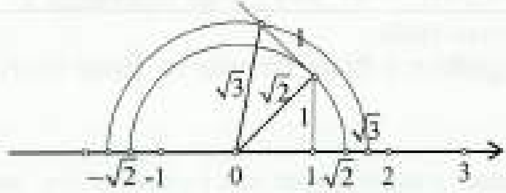
7 Cakto segment , gjatësia e të cilit është numri: a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{10}$?

8 Në drejtëzën numerike cakto pikën e cila i përgjigjet numrit iracional:

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$.

Puno sipas kërkesës:

- Në boshtin numerik konstrukto trekëndësh kënddrejt barakrahës me katete $\overline{OA} = 1$.
- Gjatësia e hipotenuzës sipas teoremës së Pitagorës është $\sqrt{2}$, të cilën paraqite në të dy anët e pikës O.



- Mbi segmentin $\sqrt{2}$, si katete, konstruktoni trekëndësh kënddrejt katete e dytë e të cilit është 1.

- Hipotenuza e trekëndëshit të fituar kënddrejt është $\sqrt{3}$.
- Vendose segmentin $\sqrt{3}$ me fillim në O majtas dhe djathtas pikës O.

- Kjo mënyrë e përcaktimit të pikave të cilat u përgjigjen numrave iracional në bosht numerik quhet "*konstruktim gjeometrik i numrave*".

Mbani mend!

Çdo pike në boshtin numerik i përgjigjet vetëm një numër real dhe anasjelltas çdo numri realë i përgjigjet vetëm një pikë në boshtin numerik, d.m.th. mes pikave të boshtit numerik dhe bashkësis së numrave realë mund të vendoset korespondencë biektive.

Sipas kësaj, pikën në boshtin numerik për numrin e dhënë iracional e caktojmë me gjatësinë e segmentit përkatës e cila i përgjigjet numrit iracional, majtas dhe djathtas nga O.

9 Njehso: $|-5| - \left|\frac{1}{2}\right| + |-2{,}5|$.

- Vlera apsolute e numrit real përkufizohet njëlloj sikurse për numrin e plotë, d.m.th për çdo numër realë a,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{për } a > 0, \\ 0 & \text{për } a = 0, \\ -a & \text{për } a < 0. \end{cases}$$

10 Nëse $a = -5$, $b = 2\frac{1}{2}$, provoni vërtetësinë e pohimeve vijuese:

a) $|-a| = |a|$; b) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; c) $\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|, b \neq 0$; d) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Kujtohu!

Zgjidhni jobarazimin:
a) $x-2<0$; b) $x+1\geq 0$ në bashkësinë e numrave realë.

Zgjidhjen e fituar shkruaje në formë intervali.

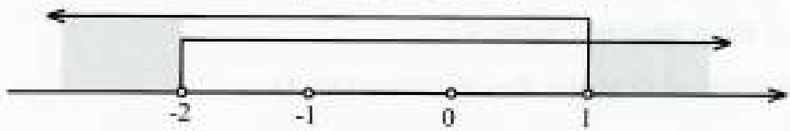
11. Janë dhënë numrat realë a dhe b, $a<b$.

Në boshtin numerik caktoi pikat që u përgjigjen numrave realë.

Në boshtin numerik caktoi numrat realë që ndodhen mes numrave a dhe b.

Nëse x është numër real i çfarëdoshëm, atëherë konjuksionin e $x>-2$ dhe $x<1$ mund ta shkruajmë: $-2<x<1$, d.m.th. se numrit x i përgjigjen të gjitha numrat realë të cilët ndodhen mes numrave -2 dhe 1.

Në boshtin numerik këtë e paraqesim kështu:



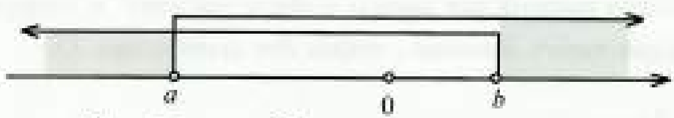
kurse e shënojmë: $\{x \mid x\in \mathbb{R}, -2<x<1\}$ ose $x\in(-2,\ 1)$.

12. Sa numra realë ka mes numrave -2 dhe 1?

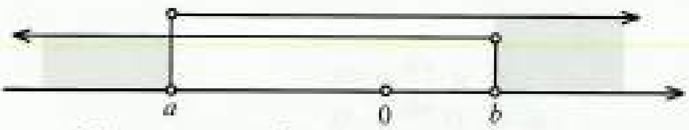
Kujtohu!

Bashkësia e të gjitha numrave realë të cilët ndodhen mes numrave a dhe b, $a<b$, quhet *interval*. Numrat a dhe b quhen skajet e intevalit.

Varësisht prej kësaj skajet e intervalit a i takojnë ose jo intervalit dallojmë tre lloje intervalesh:

1. 

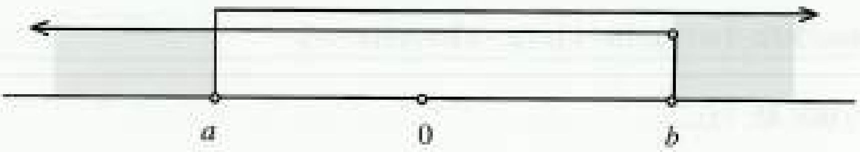
$\{x \mid x\in \mathbb{R}, a<x<b\}$ ose $x\in(a,b)$, interval i hapur.

2. 

$\{x \mid x\in \mathbb{R}, a\leq x\leq b\}$ ose $x\in[a,b]$, interval i mbyllur.

3. 

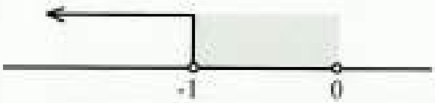
$\{x \mid x\in \mathbb{R}, a\leq x<b\}$ ose $x\in[a,b)$, interval gjysmë i hapur nga e djathta.

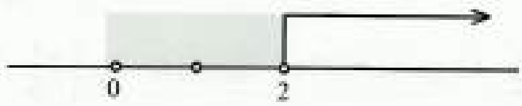
4. 

$\{x | x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$ ose $x \in (a,b]$, interval gjysmë i hapur nga e majta.

Nëse $x > a, a \in \mathbb{R}$, atëherë shënojmë $\{x | x \in \mathbb{R}, x > a\}$, ose $x \in (a, \infty)$. Intervali është i pafundëm nga e djathta. Nëse $x \le a, a \in \mathbb{R}$, atëherë shënojmë $\{x | x \in \mathbb{R}, x \le a\}$, ose $x \in (-\infty, a]$. Intervali është i pafundëm nga e majta.

13 Shkruani intervalin i cili është paraqitur në boshtin numerik.

a) 

b) 

14 Në boshtin numerik paraqite intervalin:

a) $(-5,1)$; b) $(-3,2]$; c) $[-1,3)$; d) $[0,4]$; e) $(-4,\infty)$.

Detyra.

1. Cilat nga gjykimet vijuese janë të vërteta:

   a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$; b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{J}$; d) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{J} = \varnothing$?

2. Cili numër është më i madh: a) π ose $\frac{22}{7}$; b) $\frac{306}{125}$ ose $\sqrt{6}$; c) $\frac{36}{25}$ ose $\sqrt{2}$?

3. Cakto në boshtin numerik pikë e cila i përgjigjet numrit: a) $\sqrt{5}$; b) $-\sqrt{5}$; c) $\sqrt{10}$; d) $\sqrt{15}$.

4. Paraqiti në boshtin numerik intervalet: a) $[-4,0]$; b) $(-2,2)$; c) $\left[\frac{1}{2},2\right)$; d) $(-\infty,3]$.

   Shkruani më shkurt intervalet:

   a) $\{x | x \in \mathbb{R}, -1 \le x < 3\}$; b) $\{x | x \in \mathbb{R}, 0 < x \le 10\}$; c) $\{x | x \in \mathbb{R}, x \ge -1\}$.

5. Në bosht numerik paraqite prerjen e intervaleve;

   a) $[-3,2)$ dhe $[1,3]$; b) $(-1,4]$ dhe $(2,6)$; c) $(-\infty,-1)$ dhe $[2,\infty)$.

6. Paraqite unionin e intervaleve:

   a) $(-5,4]$ dhe $(-1,5)$; b) $(0,5]$ dhe $[-6,1]$; c) $(-\infty,-3)$ dhe $[-1,\infty)$.

7. Paraqitni unionin e intervaleve:

   a) $(-5,4]$ dhe $(-1,5)$; b) $(0,5]$ dhe $[-6,1]$; c) $(-\infty,3)$ dhe $[-1,\infty)$.

Ushtrime kontrolluese tematike

1. Tregoni se vlen: Nëse $(m|a)\wedge(m|b)\wedge(a>b)\Rightarrow m|(a-b)$.

2. Cakto SHVP (165, 45, 75).

3. Numri 10101_2 paraqite në sistemin dekad të numrave.

4. Llogarite vlerën e shprehjes: $37+1110_2+101_2$.

5. Llogarite vlerën e shprehjes: $-6\cdot(3-4)-2\cdot(18-3):5$.

6. Renditi sipas madhësisë numrat: $\frac{-3}{4},\frac{-7}{12},\frac{5}{8},\frac{3}{16}$.

7. Llogarite vlerën e shprehjes: $16-\left(7\frac{1}{3}-3\frac{7}{12}\right)\cdot 1\frac{4}{5}$.

8. Numrin dhjetor 2,3(15) shkruani si thyesë.

9. Cilat nga gjykimet vijuese janë të vërteta:
   a) disa numra iracional janë numra të plotë;
   b) secili numër dhjetor i fundëm është iracional;
   c) ekziston numri real i cili është iracional.

10. Caktoni pikën në boshtin numerik e cila i përgjigjet numrit $\sqrt{5}$.

11. Renditi sipas madhësisë numrat:

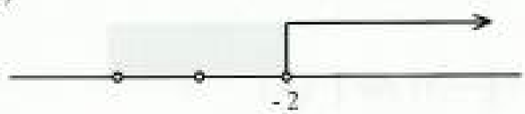
$\sqrt{2};\ -\sqrt{3};\ 2,(3);\ 2,3434...;\ -1\frac{1}{3};\ 0,1212...$

12. Caktoni prerjen e intervaleve:

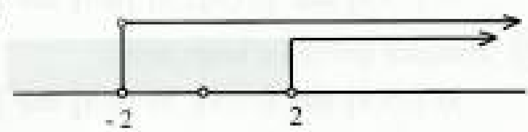
a) $[-3,4]$ dhe $[5,7]$; b) $(-3,4]$ dhe $[4,7)$ c) $\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$ dhe $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

13. Në boshtin numerik janë paraqitur bashkësi të numrave realë në formë të intervaleve. Shkruani intervalet.

a)



b)

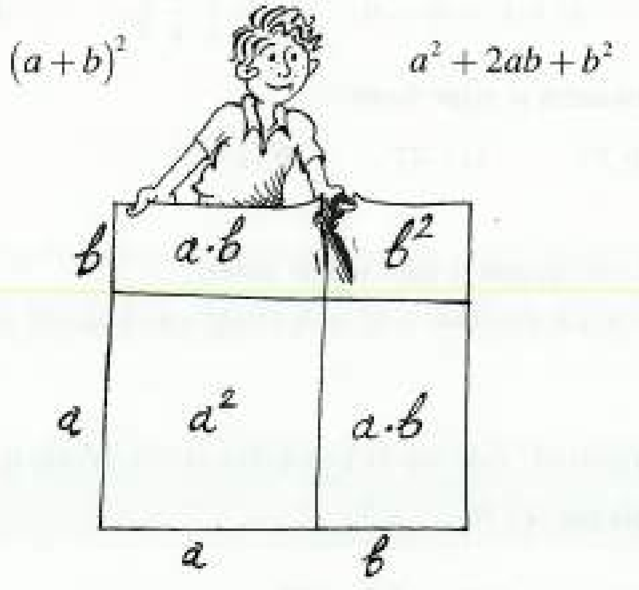


TEMA 3 — SHPREHJET RACIONALE ALGJEBRIKE

Më lehtë është të mësohet matematika sesa të punohet pa të.

H. Boas

- fuqia me tregues numër natyror dhe operacionet me fuqi;
- monomet, binomet, polinomet dhe operacionet me ta ;
- formulat për shumëzim të shkurtuar;
- zbërthimi i polinomit në faktorë;
- SHVP dhe PMP për dy dhe më shumë polinome;
- thyesat algjebrike, domeni, zgjerimi dhe thjeshtimi i thyesave;
- operacionet me thyesa algjebrike.



1 FUQIA. SHUMËZIMI, PJESËTIMI DHE FUQIZIMI I FUQISË

Kujtohu!

- Numri 9 mund të shkruhet edhe si
  $3 \cdot 3 = 3^2$.
- A mundet të gjithë numrat të shkruhen sikurse numri 9?
- Për shënimin 5^3 themi se është shënim i shkurtër i numrit $5 \cdot 5 \cdot 5$.
- Shkruani në formë të shkurtër numrin
  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

A Le të jetë a cilido numër real. Prodhimin $a \cdot a$ shkurt e shënojmë me simbolin a^2; prodhimin $a \cdot a \cdot a$ me simbolin a^3; etj.

- Shkruani shkurt prodhimin
  $a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a$, kur ka n shumëzues.

- Simbolin a^n e quajmë *fuqi* dhe paraqet shënim të shkurtuar të prodhimit të n shumëzuesash të njëjtë $a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a$.

- Për numrin real a themi se është baza e fuqisë a^n.
- Për numrin natyrorë $n \geq 2$ themi se është tregues i fuqisë, i cili tregon sa herë baza shumëzohet me vetveten.

Në përgjithësi $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n} = a^n$, për $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ dhe $n \geq 2$.

1 Paraqiti si fuqi prodhimet:

a) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$; b) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$; c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$; d) $(x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y)$.

2 Paraqiti si prodhim faktorësh të njëjtë fuqitë:

a) 3^5; b) $0,2^4$; c) $(-7)^4$; d) $(x-1)^3$.

Mbani mend!

Fuqia e numrit a me tregues 1 është vetë ai numër, d.m.th. $a^1 = a$, për shembull: $(-5)^1 = -5$; $(x-1)^1 = x-1$; $(a+b)^1 = a+b$.

Vëreni!

$(-1)^1 = -1$, $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$, $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$,..., $(-1)^{2k} = 1$ i $1^{2k-1} = -1$, për çdo $k \in \mathbb{N}$.

3 Caktoni vlerën e fuqisë: a) $(-1)^{2002}$; b) $(-1)^{2003}$.

Kujtohu!

- Numri a ka tregues të fuqisë 1.
- Sa është treguesi i fuqisë për numrin $a+b$?
- Prodhimi $a^2 \cdot a^3$ ka tregues të fuqisë 5.
- Sa është treguesi i fuqisë $a \cdot a^2 \cdot a^3$?
- Herësi $a^5 : a^2$ ka tregues të fuqisë 3, për $a \neq 0$.
- Sa është treguesi i fuqisë së shprehjes $a^{12} \cdot a^3 : a^8, (a \neq 0)$?

B Nëse i shumëzojmë fuqitë a^m dhe a^n, për $a \in \mathbb{R}$, kurse $m,n \in \mathbb{N}$,

Kemi:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m},\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n},$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n}, \text{ t.e.}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

4 Caktoni prodhimet:

a) $x^5 \cdot x^7 \cdot x^8$; b) $10^6 \cdot 10^{26}$; c) $(x-3)^4(x-3)^5$; d) $(-4)^3 \cdot (-4)^4$.

Mbani mend!

Barazimi $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ është i drejtë për shumëzimin e fuqive me baza të njëjta.

Për shembull, $a^5 = a^3 \cdot a^2 = a^4 \cdot a = a^2 \cdot a^3 = a \cdot a^4$.

5 Ngjashëm sikurse te shumëzimi, vërtetohu se vlen barazimi $a^m : a^n = a^{m-n}$, për çka duhet $m > n$?

6 Njehso: a) $\frac{x^6}{x^2}, x \neq 0$; b) $\frac{(a+3)^{11}}{(a+3)^8}, a+3 \neq 0$.

Mbani mend!

Barazimi $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ $(a \neq 0)$, nuk është i njëvlershëm.

Për shembull, $a^5 = a^{12-7} = \frac{a^{12}}{a^7}$ për $a \neq 0$. Për, a^5 mund të paraqitet në pafund mënyra si herës i dy fuqive.

Vërejtje *:. Në të gjitha rastet në vazhdim emëruesin e thyesës (pjesëtuesin) do ta marrim të ndryshëm nga zero, pa ndonjë shënim të veçantë.*

Kujtohu!

■ $A^3 = A\cdot A\cdot A$. Nëse $A=x^2$, fitojmë $\left(x^2\right)^3 = x^2\cdot x^2\cdot x^2 = x^6$.

● Në mënyrë të ngjashme cakto $\left(x^4\right)^3$.

7 Barazimi i fituar është i drejtë për fuqizimin e fuqisë.

Shprehjet që vijojnë paraqiti në formë të fuqisë me bazë x:

a) $\left(x^4\right)^5$; b) $\left(x^2x^3\right)^{10}$; v) $\dfrac{x^2\left(x^7x\right)^3}{x^8}$.

C E ke të njohur se : $a^m = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{m}$, sa është $\left(a^m\right)^n$?

Kemi: $\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{n}$. Atëherë

$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{mn}$, d.m.th. $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$.

Mbani mend!

Barazimi $a^{m\cdot n} = \left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m$ por nuk është i njëvlershëm.

Për shembull: $a^{12} = a^{4\cdot 3} = \left(a^4\right)^3 = \left(a^3\right)^4$; $a^{12} = \left(a^2\right)^6 = \left(a^6\right)^2$; $a^{12} = \left(a^{12}\right)^1 = \left(a^1\right)^{12}$.

Kujtohu!

■ $a^3 = a\cdot a\cdot a$,

$b^3 = b\cdot b\cdot b$,

$a^3b^3 = a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b = ab\cdot ab\cdot ab = \left(ab\right)^3$.

● Shumëzoni fuqitë $x^4\cdot y^4\cdot z^4$.

■ $\dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b} = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$.

● Herësi $\dfrac{x^5y^5}{z^5}$ shkruani si fuqi me bazë $\dfrac{xy}{z}$.

Ç Le të jetë $a^m = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m}$ dhe $b^m = \underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{m}$. Për prodhimin $a^m\cdot b^m$ kemi:

$a^m\cdot b^m = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{m} =$

$= \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{m} = (ab)^m$.

Ngjashëm, për $\dfrac{a^m}{b^m}$ kemi :

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{m}} = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

Domethënë, $a^m\cdot b^m = (ab)^m$ i $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$.

8 Thjeshtoni shprehjet:

a) $\dfrac{2^x6^x}{3^x}$; b) $\dfrac{3^{2x}4^{3x}}{2^{6x}}$; c) $\dfrac{2^5\cdot 3^5\cdot 4^5}{12^5}$.

9 Zbuloni cila rregull e konceptit fuqi është përdorur në secilin nga barazimet:

a) $2^2\cdot 2^2 = 4\cdot 4 = 16$; b) $2^2\cdot 2^2 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16$; c) $2^2\cdot 2^2 = 2^{2+2} = 2^4 = 16$;

d) $2^2\cdot 2^2 = \left(2\cdot 2\right)^2 = 4^2 = 16$; e) $2^2\cdot 2^2 = \left(2^2\right)^2 = 2^4 = 16$.

■ f) Është shfrytëzuar rregulla e shumëzimit të fuqisë me tregues të njëjtë.

Mbani mend!

Barazimet: $(ab)^n = a^n b^n$ dhe $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ janë rregullat e fuqizimit të herësit dhe prodhimit.

10 Kryeni fuqizimin: a) $\left(\frac{xy}{z}\right)^5$; b) $\left(\frac{x^3y^2}{z^5}\right)^8$; c) $\left(-\frac{2x^2y^3}{3a^4b^5}\right)^3$.

Detyra:

1. A është numri $5a^3$ fuqi?
2. Cilat nga pohimet janë të vërteta:
   a) $(-2)^7 < 0$; b) $(-3)^{40} < 0$. c) $a^4b^7 < 0$ për $a > 0, b < 0$; d) $a^7b^{20} > 0$ për $a < 0, b > 0$.?
3. Gjeni vlerë për x dhe y që të jenë të vërteta barazimet:
   a) $x^{2002} = 1$; b) $x^{2001} = -1$; c) $x^2 = -4$; d) $(-3)^x = -27$; e) $x^3 = y^3$; f) $2^x = 2^y$.
4. Numrat që vijojnë paraqiti si fuqi me bazë 10: a) 10000; b) 1000000;
5. Numrat që vijojnë paraqiti si prodhim të numrit natyror dhe fuqisë me bazë 10:

   a) 7000; b) 72000000; c) 34700.
6. Numrat shkruani si prodhim të numrit real dhe fuqisë 10^3.
   a) 3974; b) 0,5653; c) 35.
7. Paraqiti si fuqi me bazë x shprehjet: a) $x \cdot x^3 \cdot x^4 \cdot x^5$; b) $\frac{x^6x^7}{x^8}$; c) $x^8 : x^3 \cdot x^2$.
8. Kryeni fuqizimin: a) $\left(\left(a^2 \cdot a^3\right)^2 \cdot a^4\right)^3$; b) $\left(\left(a^2\right)^3\right)^4$.
9. Shkruani si fuqi me bazë a shprehjet: a) $\left(a^3 \cdot a^2\right)^3 : a^{10} \cdot a^2$; b) $\frac{\left(\left(a^2 \cdot a^3\right)^3\right)^6}{\left(a^8 \cdot a^7\right)^{10}}$.
10. Llogarit në mënyrë të thjeshtë a) $\frac{4^3 \cdot 12^3}{24^3}$; b) $\frac{3^3 \cdot 2^6 \cdot 125}{1000}$.
11. Cakto x që barazimet të jenë të vërteta:

    a) $a^x = a^3$, b) $\left(a^x\right)^2 = \left(a^4\right)^3$; c) $\left(a^x \cdot a^2\right)^5 = \left(a^7 \cdot a^3\right)^4$; d) $\left(a^2 \cdot a^x\right)^4 : a^4 = \frac{\left(\left(a^2\right)^3\right)^4}{a^{12}}$.

2 SHPREHJET RACIONALE. POLINOMET

Kujtohu!

Simbolet $2, \sqrt{2}, \frac{1}{2}, ...$ janë konstante.

Simbolet $a, b, x, y, ...$ janë ndryshore.

Si quhet bashkësia në të cilën ndryshon ndryshorja?

Cila ndryshore është reale?

A **1** Shkruani disa shprehje në të cilat konstantet dhe ndryshore janë të lidhura me operacionet mbledhje, zbritje dhe shumëzim si dhe fuqizim me tregues numër natyror.

$6a^2b^3 - \frac{3}{4}ab^2 - 3.$

Kjo shprehje quhet ***shprehje racionale algjebrike ose polinom***.

2 Shkruani disa shprehje të cilat janë prodhim i një numri konstantash dhe fuqish.

$-\frac{2}{3}a^2b^3c^4$. Shprehja e këtillë racionale algjebrike quhet *monom*.

3 Cilat nga shprehjet që vijojnë janë monome: a) $-3a^2b$; b) $3x^2y(-5xy^2)$;

c) $\frac{3x^2}{y}$; d) $\frac{3x^5}{5}$; e) $3x^2-4y$?

Kujtohu!

Monimi $3a^2b^3$ është në formën ***normale***.

A është shënuar monomi $3a^2b \cdot 2a$ në formënn normale?

Te monomi $5a^2b^3c^4$ numri 5 është ***koeficient***, $a^2b^3c^4$ është ***vlera kryesore***, kurse a^2, b^3, c^4 janë fuqi në vlerën kryesore.

Caktoni koeficientin dhe pjesën ktyesore te monomet: 3; a^2; $3a^2$; $\frac{3}{4}a^4b^3$.

Treguesi i monomit $3x^4y^5$ me ndryshore x dhe y është $4+5=9$.

Sa është treguesi i monomit $2x^4$; $3xy^3$; $2x$; , me ndryshore x dhe y?

Monomet $3a^2b^3$ dhe $-4a^2b^3$ janë të ngjashme, sepse kanë pjesë kryesore të njëjtë.

Mblidhen vetëm monomet e ngjashme, ashtu që mblidhen koeficientët e tyre, kurse pjesa kryesore përshkruhet.

B **4** Le të jenë dhënë monomet:
$A = 2x^3y^3, B = -3x^2y^2, C = -5xy, D = 7.$

Shprehja:

a) $A = 2x^3y^3$ është monom;

b) $A + B = 2x^3y^3 + (-3x^2y^2)$ është binom;

c) $A + B - C = 2x^3y^3 + (-3x^2y^2) - (-5xy)$ është trinom;

d) $A + B - C - D = 2x^3y^3 + (-3x^2y^2) - (-5xy) - 7$ është polinom.

Mbani mend!

Shuma e një numri të fundëm monomesh quhet shprehje e plotë racionale ose ***polinom***. (Monomet merren si polinome).

Vëreni:Shprehjet $\frac{y}{x+3}$ dhe $x^3 - xy + \frac{5}{x-5}$ nuk janë shprehje të të plota racionale dhe ato kanë kuptim për $x \neq -3$, përkatësisht $x \neq 5$.

Njehso vlerën numerike të shprehjeve

$x(x^2+5)$ i x^3+5x za: a) $x=0$; b) $x=3$; c) $x=-1$;

d) $x=2{,}5$. Çka vëren? Për $x=-1$ kemi:

$x(x^2+5) = -1 \cdot (1+5) = -6$ i $x^3+5x = -1-5 = -6.$

Mbani mend!

- Shprehjet të cilat kanë vlera numerike të njëjta për çdo vlerë të ndryshores nga bashkësia e definuar quhen ***shprehje identike racionale***.
- Barazimi i dy shprehjeve identike quhet ***identitet***.
- Fuqia e polinomit është fuqia e monomit me tregues më të madh.
- Polinomi është në formë normale nëse të gjitha monomet që e përbëjnë janë në formë normale.

6 Shkruani në formën normale polinomin $M = 7x^2y - 3xy \cdot y - 4x^2y + 2x \cdot x - 5x$.

Detyra:

1. Shkruani në formë normale monomet: a) $3x^2y \cdot xy$; ; b) $2xy^2 \cdot x^2y^3 \cdot xy$.
2. Caktoni : koeficientin, pjesën kryesoredhe treguesin e monomeve me ndryshore x dhe y.

   a) $3x^3y^4z$; b) $-\frac{2}{3}x^3y$; c) $3 \cdot \frac{1}{5}$.
3. Njehso vlerën numerike të shprehjeve:

   a) $3a^2b^3 - 4a^3b^4$ për $a = -2, b = -1$; b) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$ për $a = 2, b = -1$.
4. Kontrollo a janë identike barazimet:

   a) $2x^2(x+2) = 2x^3 + 4x^2, x \in \{-1, 0, 1\}$;

   b) $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 6xy + 9y^2; (x, y) \in \{(1,0), (0,1), (-1,1)\}$.
5. Polinomet e dhëna shkruani në formë normale dhe cakto treguesin e tyre:

   a) $2x^2 - x^3 + 3x - 5 + x^2 - 3x$; b) $2x^2y - 2xy^2 - 2xy + 3yx^2 - 5y^2x$.

3 MBLEDHJA DHE ZBRITJA E POLINOMEVE

Kujtohu!

Polinomet $M = a + b$ dhe $N = a - b$ i mbledhim ashtu që i mbledhim monomet e ngjashme, d.m.th.
$$M + N = a + b + a - b = 2a.$$

Mblidhni polinomet $A = 2a - b$ dhe $B = 3a + b$.

A 1 Caktoni polinomin $M - N + P$, nëse:
$$M = -2x^2 + 3x - 1,$$
$$N = 4x^2 - 5x + 3,$$
$$P = -3x^2 - 8x + 7.$$

Vëreni zgjidhjen.

- Shkruajmë: $M - N + P = -2x^2 + 3x - 1 - (4x^2 - 5x + 3) + (-3x^2 - 8x + 7)$.
- Drejtë lirohu nga kllapat $M - N + P = -2x^2 + 3x - 1 - 4x^2 + 5x - 3 - 3x^2 - 8x + 7$.
- Mblidhni monomet e ngjashme dhe do të fitosh:

$$M - N + P = -9x^2 + 3.$$

Duhet të dish!

$M = M(x)$ është polinom me ndryshore x;

$Q = Q(x, y)$ është polinom me ndryshore x dhe y;

$R(a,b,c)$ është polinom me ndryshore a, b dhe c.

2 Janë dhënë polinomet: $M(x) = -x^2 + 4x - 2$; $N(x) = 3x^2 - 4x + 5$; $P(x) = -2x^2 - 7x + 6$.

Caktoni polinomet:

a) $M(x) + N(x) - P(x)$; b) $M(x) - N(x) - P(x)$; c) $2M(x) - 3N(x) + P(x)$.

Kujtohu!

Monomi me monom shumëzohet ashtu që shumëzohen koeficientët sipas rregullës së shumëzimit të numrave realë , kurse pjesët kryesore sipas rregullave për shumëzimin e fuqive .

- Llogarit shumëzimin e monomeve $3x^2y^3$ i $-5x^3y^4$.

B **3** Llogarit shumëzimin e monomeve $-\frac{2}{3}x^3y^4$ dhe $-\frac{3}{4}x^4y^5z$.

Vëreni.

I shumëzojmë koeficientët dhe fitojmë:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

Shumëzimi i pjesëve kryesore është:

$$x^3y^4 \cdot x^4y^5z = x^7y^9z.$$

Prodhimi i monomeve është $\frac{1}{2}x^7y^9z$.

Në praktikë shkruajmë direkt: $-\frac{2}{3}x^3y^4 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^4y^5z\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}x^7y^9z = \frac{1}{2}x^7y^9z$.

4 Njehsoni prodhimet:

a) $-5a^2b^3c \cdot 3a^4b^2c^2$; b) $\frac{2}{3}a^5b^6 \cdot \left(-9a^4b\right)$; c) $\frac{3}{14}a^4b^4 \cdot \left(-7a^2b^3\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}ab\right)$.

Kujtohu!

Në barazimet $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ është zbatuar vetia distributive.

- Zbatoni vetinë distributive në shprehjen $(a+b-c)\cdot d$.

C **5** Polinomin $3x^2y^3 - 2xy^2 + 5xy$ shumëzoni me monomin $-2x^3y^3$.

Vëreni zgjidhjen:

Shkruajmë: $\left(3x^2y^3 - 2xy^2 + 5xy\right)\cdot\left(-2x^3y^3\right)$.

Sipas vetisë distributive kemi $3x^2y^3 \cdot \left(-2x^3y^3\right) - 2xy^2 \cdot \left(-2x^3y^3\right) + 5xy \cdot \left(-2x^3y^3\right)$.

Pasi të shumëzojmë monomet fitojmë: $-6x^5y^6 + 4x^4y^5 - 10x^4y^4$.

Në praktikë shkruajmë direkt: $\left(-3xy^4 + 5x^2y - 2\right)\cdot\left(-4x^2y\right) = 12x^3y^5 - 20x^4y^2 + 8x^2y$.

Duhet të dish!

Nëse A, B, C dhe D janë monome, atëherë $(A+B+C)\cdot D = A\cdot D + B\cdot D + C\cdot D$,

dhe $D\cdot(A+B+C) = D\cdot A + D\cdot B + D\cdot C$.

6 Caktoni prodhimet: a) $\left(3x^4y^3-5xy^6-2x^3y^3\right)\cdot\left(-4xy^2\right)$; b) $\frac{3}{4}x^3y^3\cdot\left(-8x^4y^3+4x^5y-12xy^3\right)$.

Kujtohu!

- Shumëzoni polinomin x^2+x+1 me polinomin $x+1$.

Udhëzim: shumëzoni x^2+x+1 me x, e pastaj x^2+x+1 me 1.

- Caktoni shumën e atyre prodhimeve.

C **7** Shumëzoni polinomet $2x^3-3x^2+5x-7$ dhe $x-4$.

Vëreni zgjidhjen

- Shëno $M=x-4$ dhe do të fitosh $\left(2x^3-3x^2+5x-7\right)\cdot M$.
- Zbato shumëzimin e polinomit me monom, d.m.th. . $2x^3\cdot M-3x^2\cdot M+5x\cdot M-7\cdot M$.
- Zëvendëso $M=x-4$ dhe do të fitosh:

$$2x^3(x-4)-3x^2(x-4)+5x(x-4)-7(x-4).$$

- Edhe një herë zbatojmë shumëzimin e polinomit me monom:

$$2x^4-8x^3-3x^3+12x^2+5x^2-20x-7x+28.$$

- E sjellim polinomin në formë normale dhe kemi:

$$2x^4-11x^3+17x^2-27x+28.$$

- Në praktikë shkruajmë sikurse në shembullin vijues:

$$(3x^2-2x+1)(-x+3)=$$
$$=-3x^3+9x^2+2x-6x-x+3=$$
$$=-3x^3+11x^2-7x+3.$$

8 Shumëzoni polinomet dhe prodhimin e fituar rendite sipas fuqive të monomeve për ndryshoren x

a) $\left(2x^2-3x^3+1\right)\left(-4x+5\right)$ b) $\left(x^2-x^3+5x-2\right)\left(-3+x^2-2x\right)$.

9 Caktoni numrat realë a, b dhe c, ashtu që polinomet $P(x)=2x^3-9x^2+13x-6$ i $Q(x)=(x-2)\left(ax^2+bx+c\right)$ të jenë identikisht të njëjtë.

Vëreni:

- Polinomi $P(x)$ është në formë normale, kurse polinomin $Q(x)$ e transformojmë në formën normale dhe fitojmë:

$$Q(x)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c=$$
$$=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c.$$

Dy polinome me ndryshore të njëjta janë të njëjtë nëse koeficientët pranë ndryshoreve përkatëse me tregues të njëjtë janë të njëjtë.

Sipas kësaj, $P(x)=Q(x)$ nëse:

$a=2$,

$b-2a=-9$, d.m.th $b=-5$,

$c-2b=13$, pra $c=3$.

Detyra:

(1) Njehsoni vlerën numerike të polinomit:

a) $5abc-\left(2a^2b-\left(3abc-\left(4ab^2-a^2b\right)\right)\right)$, për $a=-2, b=-1, c=3$;

b) $3x^2z-\left(xyz-\left(2xyz-x^2z\right)-4x^2z+3x^2z-\left(4xyz-5x^2z-3xyz\right)\right)$.

(2) Janë dhënë polinomet $P(x)=x^3+2x^2-1$ dhe $Q(x)=x^2+x+1$. Caktoni polinomet:

a) $P(x)+Q(x)$; b) $P(x)-Q(x)$; c) $P(x)\cdot Q(x)$.

(3) Caktoni numrat realë a, b dhe c, ashtu që polinomet $P(x)$ dhe $Q(x)$ të jenë identikisht të njëjtë:

a) $P(x)=6x^3-23x^2+29x-12$ i $Q(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$

b) $P(x)=2x^3-x^2+x+4$ i $Q(x)=\left(ax^2+bx+c\right)(x+2)$.

4 FORMULAT PËR SHUMËZIM TË SHKURTUAR

Kujtohu!

■ $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

● Cakto:

a) $(x+2)^2$; b) $(x+2)^3$.

A 1 Fuqizoni binomet:

a) $\left(2x^2+3y\right)^2$; b) $\left(3x^2-2y\right)^2$;

c) $\left(2x+y^2\right)^3$; d) $\left(x^2-2y^2\right)^3$.

■ Vëreni: $\left(2x^2+3y\right)^2=\left(2x^2+3y\right)\left(2x^2+3y\right)=2x^2\cdot 2x^2+2x^2\cdot 3y+2x^2\cdot 3y+3y\cdot 3y$, kemi

a) $4x^4+12x^2y+9y^2=\boxed{2x^2}^2+2\cdot\boxed{2x^2}\cdot 3y+(3y)^2$.

$$(\square+\triangle)^2=\square^2+2\cdot\square\cdot\triangle+\triangle^2$$

Nëse $\square=A$ dhe $\triangle=B$, atëherë $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ i $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$.

Në mënyrë të ngjashme vërejmë: $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+b^3$ i $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-b^3$.

Domethënë: b) $9x^4-12x^2y+4y^2$; c) $8x^3+12x^2y^2+6xy^4+y^6$; d) $8x^6-24x^4y^2+24x^2y^4-8y^6$.

Mbani mend!

Katër formulat e fituara janë të njohura si formula për shumëzim të shkurtuar dhe atë si katrori i binomit dhe katrori i kubit.

2 Fuqizoni binomet me ndihmën e formulave për shumëzim të shkurtuar:

a) $\left(2a^3b^4+3ab^3\right)^2$; b) $\left(3x^2y-2x^2y^3\right)^3$.

Vëreni zgjidhjen:

a) Duke zbatuar formulën $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ kemi:

$\left(2a^3b^4\right)^2+2\cdot 2a^3b^4\cdot 3ab^3+\left(3ab^3\right)^2$, dhe pas fuqizimit dhe shumëzimit kemi:

$4a^6b^8+12a^4b^7+9a^2b^6$.

Në praktikë veproni sikurse në shembullin e mëposhtëm:

$$\left(2a^5b^2-5ab^4\right)^2=\left(2a^5b^2\right)^2-2\cdot 2a^5b^2\cdot 5ab^4+\left(5ab^4\right)^2=$$
$$=4a^{10}b^4-20a^6b^6+25a^2b^8.$$

b) Zbatojmë $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$ dhe fitojmë:

$\left(3x^2y\right)^3-3\cdot\left(3x^2y\right)^2\cdot 2x^2y^3+3\cdot\left(3x^2y\right)\cdot\left(2x^2y^3\right)^2-\left(2x^2y^3\right)^3$, ose pas fuqizimit

$27x^6y^3-3\cdot 9x^4y^2\cdot 2x^2y^3+3\cdot 3x^2y\cdot 4x^4y^6-8x^6y^9$, dhe pas shumëzimit rrjedh

$27x^6y^3-54x^6y^5+36x^6y^7-8x^6y^9$.

Më praktik është të shkruhet sikurse në shembullin:

$$\left(2x^3y+3xy^2\right)^3=\left(2x^3y\right)^3+3\cdot\left(2x^3y\right)^2\cdot 3xy^2+3\cdot 2x^3y\cdot\left(3xy^2\right)^2=$$
$$=8x^9y^3+3\cdot 4x^6y^2\cdot 3xy^2+3\cdot 2x^3y\cdot 9x^2y^4+27x^3y^6=$$
$$=8x^9y^3+36x^7y^4+54x^5y^5+27x^3y^6.$$

3 Kryeni fuqizimin: a) $(2x-3y)^2$; b) $(-3x+5y)^2$; c) $\left(4x^7+7y^3\right)^2$; d) $\left(-3x^3-7y^2\right)^2$.

4 Fuqizo: a) $(3x-2y)^3$; b) $(-3x+5y)^3$; c) $\left(-2x^2-3y^3\right)^3$; d) $\left(3x^2y+5xy^2\right)^3$.

Është me vlerë të dish!

$(A+B)^0 \overset{def}{=} 1,\ A\neq 0,\ B\neq 0$ dhe shkruajmë............................1

$(A+B)^1=1A+1B$ dhe shkruajmë...1 1

$(A+B)^2=1A+2AB+1B$ dhe shkruajmë........................1 ...... 2 1

$(A+B)^3=1A^3+3A^2B+3AB^2+1B^3$ .... 1 .... 3 .... 3 1

Vëreni dhe mbani mend!

Treguesat e fuqive me bazë A zvogëlohen prej treguesit të binomit deri në zero.

Treguesat e fuqisë me bazë B rriten prej zeros deri në treguesin e binomit.

Në trekëndëshin (***trekëndëshi i Paskalit***) i ndërtuar prej koeficientëve të formës së zbërthyer të binomit, çdo rresht i ri fillon me 1 dhe mbaron me 1, kurse koeficientët e brendshëm paraqesin shumë të dy koeficientëve fqinj të rreshtit paraardhës.

5 Kryeni fuqizimin: a) $(A+B)^5$; b) $(A-B)^3$.

Vëreni zgjidhjen:

- a) E formuam trekëndëshin e Paskalit për $n=5$.
- Fuqitë me bazë A janë:

$A^5, A^4, A^3, A^2, A^1, A^0$; kurse fuqitë me bazë B janë $B^0, B^1, B^2, B^3, B^4, B^5$. Domethënë:

1
1..... 1
1 ... 2 ... 1
1 ... 3 .... 3 ... 1
1 ... 4 .. 6 ... 4 ... 1
1 ... 5 ...10 ...10 ...5 ... 1

$$(A+B)^5 = 1A^5B^0 + 5A^4B^1 + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5A^1B^4 + 1A^0B^5.$$

Në praktikë shkruajmë:

$$(A+B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5.$$

- b) Duke e përdorur trekëndëshin e Paskalit për $n=3$, fitojmë:

$(A+B)^3 = 1A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$, kur vendojmë $-B$ në vend të B fitojmë:

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3.$$

Duhet të dish!

Trekëndëshi i Paskalit për koeficientët e binomit mësohet edhe në klasët e larta, por tani e shfrytëzojmë që sa më lehtë të mbahen mend formulat për shumëzim të shkurtuar.

Kujtohu!

- $(x-1)\cdot(x+1)=$
$= x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1.$
- Kryeni shumëzimin:

a) $(x-2)\cdot(x+2)$; b) $(x-2)\cdot(x^2+2x+4)$;

v) $(x+2)\cdot(x^2-2x+4)$.

B **6** Njehso:

a) $(2x-3y)\cdot(2x+3y)$;

b) $(2x-3y)\cdot(4x^2+6xy+9y^2)$;

v) $(x^2+5y)\cdot(x^4-5x^2y+25y^2)$.

a) Pas kryerjes së shumëzimit mund të shkruash $4x^2-9y^2=\boxed{2x}^2-\triangle{3y}^2$.

Le të jetë $A=\square$ dhe $B=\triangle$, atëherë $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$.

b) Zgjidhjen e shkruajmë $8x^3-27y^3=\boxed{2x}^3-\triangle{3y}^3$, d.m.th.

$$\left(\boxed{2x}-\triangle{3y}\right)\cdot\left(\boxed{2x}^2+\boxed{2x}\cdot\triangle{3y}+\triangle{3y}^2\right).$$

Nëse $\square=A$ dhe $\triangle=B$, atëherë $(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$.

c) Ngjashëm sikurse në zgjidhjen e mëparshme fitojmë $(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$.

Duhet të dish!

Formulat që më sipër i fituam, janë poashtu formula për shumëzim të shkurtuar, të njohura si ndryshimi i katrorëve, ndryshimi i kubeve dhe shuma e kubeve.

Në praktikë puno sikurse në shembullin vijues:

$$\left(2x^3y-3xy^3\right)\left(4x^6y^2+6x^4y^4+9x^2y^6\right)=\left(2x^3y-3xy^3\right)\left(\left(2x^3y\right)^2+2x^3y\cdot3xy^3+\left(3xy^3\right)^2\right)=$$

$$=8x^9y^3-27x^3y^9.$$

7 Kryeni shumëzimet

a) $\left(2x^2y^3-3xy^3\right)\left(3xy^3+2x^2y^3\right)$; b) $\left(4xy-5x^2y^2\right)\left(16x^2y^2+20x^3y^3+25x^4y^4\right)$;

c) $\left(3x^3y^4+2xy\right)\left(9x^6y^8-6x^4y^5+x^2y^2\right)$.

Është me vlerë të dish!

Për çdo numrë natyror n vlen: $(A-B)\left(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\ldots+B^{n-1}\right)=A^n-B^n$.

Për çdo numër natyror tek n vlen: $(A+B)\left(A^{n-1}-A^{n-2}B+A^{n-3}B^2-\ldots+B^{n-1}\right)=A^n+B^n$.

Vëreni dhe mbani mend!

Për $n=5$, $(A-B)\left(A^4+A^3B+A^2B^2+AB^3+B^4\right)=A^5-B^5$.

Për $n=4$, $(A-B)\left(A^3+A^2B+AB^2+B^3\right)=A^4-B^4$.

Për $n=3$, $(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)=A^3-B^3$.

Për $n=2$, $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$.

Detyra

1. Fuqizoni binomet: a) $\left(3ab-\frac{2b^3}{3}\right)^2$; b) $\left(2x^2y+3xy^3\right)^3$; c) $\left(4x^2y-5x\right)^3$.

2. Fuqizoni binomet duke zbatuar trekëndëshin e Paskalit:

   a) $(a+1)^5$; b) $\left(a^2-1\right)^5$.

3. Fuqizoni trinomet $(a+b+c)^2$. Udhëzim: zëvendësoni $a+b=A$ dhe fiton $(A+c)^2$.

4. Shumëzoni polinomet me ndihmën e formulave për shumëzim të shkurtuar:

   a) $\left(\frac{2}{3}xy-\frac{4}{5}x^2y^3\right)\left(\frac{2}{3}xy+\frac{4}{5}x^2y^3\right)$; b) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{4}{9}y^2\right)$;

   c) $\left(\frac{2}{3}x^2y+\frac{3}{4}xy^2\right)\left(\frac{4}{9}x^4y^2-\frac{1}{2}x^3y^3+\frac{9}{16}x^2y^4\right)$.

5. Largoni kllapat dhe kryeni operacionet e duhura me monomet e ngjashme:

   a) $(2x-1)^2+(x-2)^2-(2x-1)(x-2)$; b) $\left(x^2-x+1\right)(x+1)-(x+1)^2+\left(x^2+x+1\right)(x-1)$;

   v) $(a-1)^2-4(a+1)^2-6(a+1)(a-1)$; g) $(a-b+c)^2+(a+b)^2-(a+c)^2$.

5 PJESËTIMI I POLINOMEVE

Kujtohu!

Monomi pjesëtohet me monom ashtu që koeficientët pjesëtohen sipas rregullës për pjesëtimin e numrave realë , kurse pjesët kryesore sipas rregullës së pjesëtimit të fuqive.

Njehsoni herësin:

$$10x^4y^3:5x^2y^2.$$

A 1 Njehso: $\left(-\frac{5}{6}x^5y^6\right):\left(\frac{5}{3}x^3y^3\right)$.

Vëreni zgjidhjen:

- $-\frac{5}{6}:\frac{5}{3}=-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{2}$.
- $x^5y^6:\left(x^3y^3\right)=x^2y^3,\ x\neq0,\ y\neq0.$

Domethënë herësi është $-\frac{1}{2}x^2y^3$.

Në praktikë veproni në këtë mënyrë:

$$\frac{7}{8}x^3y^4:\left(-\frac{7}{4}x^2y^2\right)=-\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{7}xy^2=-\frac{1}{2}xy^2.$$

2 Njehso: a) $\frac{2}{3}x^3y^4:\left(\frac{4}{3}xy^4\right)$; b) $-2\frac{1}{2}a^4b^5:\left(5a^4b^3\right)$; c) $-3\frac{2}{3}a^6b^7:\left(-\frac{11}{13}a^4b^4\right)$.

Kujtohu!

- $(A+B):C=A:C+B:C$, za $C\neq 0$.

Vetia distributive e djathtë e pjesëtimit ndaj mbledhjes.

- Njehso:

$$\left(2a^2b-8ab^3\right):(2ab);\ a\neq 0,\ b\neq 0.$$

B **3** Pjesëtoni polinomin : $4x^2y^3-8x^3y^4+12x^3y^3$ me monom $(-2xy)$. Për $x\neq 0$, $y\neq 0$.

Vëreni zgjidhjen:

- Duhet të llogarisish:

$$\left(4x^2y^3-8x^3y^4+12x^3y^3\right):(-2xy).$$

- Duke zbatuar vetinë distributive kemi: $4x^2y^3:(-2xy)-8x^3y^4:(-2xy)+12x^3y^3:(-2xy)$.
- E kryejmë pjesëtimin e monomeve dhe kemi $-2xy^2+4x^2y^3-12x^2y^2$.
- Më praktike është zgjidhja direkte. Për shembull:

$$\left(12x^4y^5-9x^5y^3-3x^2y^2\right):\left(-3x^2y^2\right)=-4x^2y^3+3x^3y+1.$$

Mbani mend!

Polinomi pjesëtohet me monom ashtu që secili anëtarë i polinomit pjesëtohet me monom sipas rregullës së pjesëtimit të monomeve , kurse herësat e fituara mblidhen.

4 Llogarit: a) $\left(20x^4y^5-30x^5y^6-10x^4y^4\right):\left(-10x^4y^4\right)$;

b) $\left(-2x^3y^3+3x^4y^4-5x^5y^5\right):\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right)$.

Kujtohu!

- $1584:12=132$

$$\begin{array}{l} -\underline{12}\\ \ \ \ 38\\ -\underline{36}\\ \ \ \ \ 24\\ -\underline{24}\\ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

- Caktoni herësin 381 : 12.
- A fitove mbetje?

C **5** Pjesëtoni polinomin $A(x)=6x^3-15x^2+10x-2$ me polinomin $B(x)=3x^2-6x+2$.

Vëreni zgjidhjen:

- $6x^3$ e pjesëtojmë me $3x^2$ dhe fitojmë $2x$.
- Polinomin $B(x)$ e shumëzojmë me $2x$ dhe fitojmë $6x^3-12x^2+4x$.
- Ndryshimi $A(x)-(6x^3-12x^2+4x)$ është $R_1(x)=-3x^2+6x-2$, kurse $R_1(x)$ është mbetja e parë.
- E pjesëtojmë $-3x^2$ me $3x^2$ dhe fitojmë -1.
- Me -1 e shumëzojmë polinomin $B(x)$ dhe prodhimin e fituare zbresim nga polinomi $R_1(x)$. Ndryshimi është zero.
- Herës është polinomi $Q(x)=2x-1$, kurse mbetje polinomi $R(x)=0$.

Pra , $\dfrac{A(x)}{B(x)}=Q(x)+\dfrac{R(x)}{B(x)}$, d.m.th. $A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$.

Në praktikë shkruajmë si mëposhtë:

$$\left(6x^3-15x^2+10x-2\right):\left(3x^2-6x+2\right)=2x-1$$

$$\begin{array}{l} \underline{\pm 6x^3 \mp 12x^2 \pm 4x} \\ \quad -3x^2+6x-2 \\ \quad \underline{\mp 3x^2 \pm 6x \mp 2} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Shenja e dytë tregon se zbritja kryhet duke vënduar polinom të kundërt.

6 Njehso $\left(10-7x^2+3x^3+9x\right):\left(5-3x+x^2\right)$.

Vëreni zgjidhjen:

Në fillim polinomet i renditim sipas treguesit të ndryshores x,dhe pastaj kemi:

$$\left(3x^3-7x^2+9x+10\right):\left(x^2-3x+5\right)=3x+2$$

$$\begin{array}{l} \underline{\pm 3x^3 \mp 9x^2 \pm 15x} \\ \quad 2x^2-6x+10 \\ \quad \underline{-2x^2 \mp 6x \pm 10} \\ \qquad 0 \end{array}$$

7 Polinomin $x^3+2x+10$ pjesëtoni me polinomin x^2-x+3.

Vëreni zgjidhjen:

$$\left(x^3+2x+10\right):\left(x^2-x+3\right)=x+1$$

$$\begin{array}{l} \underline{-x^3 \mp x^2 \pm 3x} \\ \quad x^2-x+10 \\ \quad \underline{-x^2 \mp x \pm 3} \\ \qquad 7 \end{array}$$

Mbetja është 7 dhe mund të shkruajmë:

$$x^3+2x+10=\left(x^2-x+3\right)\left(x+1\right)+7.$$

8 Kryeni pjesëtimin:

a) $\left(2x^2+x-3\right):\left(2x+3\right)$; b) $\left(2x^3+x^2+x-1\right):\left(x^2+x+1\right)$;

c) $\left(3x^2+x-7\right):\left(x+2\right)$; d) $\left(2x^3+7x+4+5x^2\right):\left(1+x\right)$.

9 Kryeni pjesëtimin e polinomit $x^2-2xy+y^2$ me polinom $x-y$.

Vëreni zgjidhjen:

$$\left(x^2-2xy+y^2\right):\left(x-y\right)=x-y$$

$$\begin{array}{l} \underline{-x^2 \mp xy} \\ \quad -xy+y^2 \\ \quad \underline{\mp xy \pm y^2} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Duke zbatuar formulën $\left(A-B\right)^2=A^2-2AB+B^2$ mund të përfundosh se $\left(x^2-2xy+y^2\right):\left(x-y\right)=x-y$, sepse $x^2-2xy+y^2=\left(x-y\right)^2$.

10 Caktoni herësin:

a) $\left(x^2+4x+4\right):(x+2)$; b) $\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right):(x+y)$;

c) $\left(x^2-y^2\right):(x-y)$; ç) $\left(x^3+y^3\right):\left(x^2-xy+y^2\right)$.

Duhet të dish!

Formulat për shumëzim të shkurtuar janë edhe formula për pjesëtim të shkurtuar, d.m.th.

$$\left(A^2-B^2\right):(A-B)=A+B; \qquad \left(A^2-2AB+B^2\right):(A-B)=A-B;$$

$$\left(A^3+B^3\right):(A+B)=A^2-AB+B^2; \qquad \left(A^3-B^3\right):\left(A^2+AB+B^2\right)=A-B;$$

$$\left(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3\right):(A+B)=A^2+2AB+B^2.$$

Detyra:

(1) Caktoni herësin e monomeve , për $x\neq 0, y\neq 0$.

a) $2x^3y^4:\left(-5x^2y^3\right)$; b) $\frac{2}{3}x^4y:\left(-\frac{4}{9}x^3y\right)$; v) $-2\frac{1}{2}x^5y^3:\left(-\frac{1}{2}x^3y\right)$.

(2) Cakto herësin e polinomit dhe monomit, nëse $x\neq 0, y\neq 0$.

a) $\left(2x^3y^5-3x^4y^4-5x^2y^2\right):7x^2y^2$; b) $\left(\frac{2}{3}x^4y^4-\frac{1}{3}x^5y^5+\frac{4}{3}x^6y^6\right):\left(-\frac{1}{9}x^3y^3\right)$.

(3) Kryeni pjesëtimin:

a) $\left(x^4+2x^2+5x-14\right):(x+2)$, za $x\neq -2$; b) $\left(2x^4-3x^3-4x+3x^2-5\right):(x-3)$, za $x\neq 3$;

c) $x^5:\left(x^2+1\right)$; d) $\left(x^5-1\right):(x-1)$, za $x\neq 1$.

6 ZBËRTHIMI I POLINOMIT NË SHUMËZUES TË THJESHTË DUKE NXJERRUR SHUMËZUESIN E PËRBASHKËT PARA KLLAPAVE

Kujtohu!

Në barazimin:

$A(B+C+D)=AB+AC+AD$ është përdorur ligji distributiv.

Përdorni lidgjin distributiv

$$3(x-2y+1).$$

Vlen: $AB+AC+AD=A(B+C+D)$

Në mënyrë të ngjashme përdorni ligjin distributiv te polinomi $3x-6y+3$.

A **1** Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomin $3x^3y-6x^2y^2-9x$.

Vëreni zgjidhjen:

Numri 3 është pjesëtuesi më i madh i koeficientëve.

Pjesëtues i përbashkët i pjesëve kryesore është x.

Monomi $3x$ është pjesëtues më i madh i përbashkët i të gjithë anëtarëve të polinomit.

Nëse polinomin $3x^3y-6x^2y^2-9x$ e pjesëtojmë me monomin $3x$, fitojmë x^2y-2xy^2-9x Sipas kësaj prodhimi i kërkuar është $3x\left(x^2y-2xy^2-3\right)$.

Në praktikë shkruajmë: $3x^3y-6x^2y^2-9x=3x\left(x^2y-2xy^2-3\right)$.

2 Zbërtheni në shumzues të thjeshtë polinomet:

a) $-5x^2y^2+10x^3y^3-15xy^4$; b) $3x^{n+1}-6x^{n+2}-12x^n$.

Kujtohu!

Nga $2(x+y)+a(x+y)$, me zëvendësimin $x+y=A$, fitojmë $2\cdot A+a\cdot A$.

$A-B=-(-A+B)=-(B-A)$;

$(A-B)^2=\left(-(B-A)\right)^2=(B-A)^2$.

A vlejnë: a) $(A-B)^3=-(B-A)^3$?

b) $(A-B)^4=(B-A)^4$?

B **3** Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomin $a(x-y)+b(y-x)$.

Vëreni zgjidhjen:

Zëvendësojmë $x-y=A, y-x=-A$ dhe fitojmë

$a\cdot A-b\cdot A$, t.e. $A(a-b)$.

Duke u kthyer te zavendësimi fitojmë

$(x-y)(a-b)$.

Në praktikë shkruajmë: $a(x-y)+b(y-x)=a(x-y)-b(x-y)=(x-y)(a-b)$.

4 Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomet:

a) $x(a+b)-y(a+b)$; b) $x(a+b-c)-y(a-b+c)$; v) $a(x+y-1)-b(x-1+y)$.

Kujtohu!

Me shumëzimin e polinomit $2+b$ dhe $x+y$ fitojmë $2x+2y+bx+by$.

$2x+2y=2(x+y)$;

$bx+by=b(x+y)$.

Mblidhni të dy barazimet e mësipërme. Çka fitove?

C **5** Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomin $ax+ay+bx+by$.

Vëreni zgjidhjen:

I grupojmë anëtarët të cilët kanë shumëzues të përbashkët dhe fitojmë:

$$ax+ay=a(x+y);$$
$$bx+by=b(x+y).$$

Në fund, $a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$.

I njëjti përfundim mund të arrihet edhe duke i grupuar ndryshe anëtarët.

Më praktike është që shënimi të kryhet si më poshtë:

$$ax+ay-bx-by=a(x+y)-b(x+y)=(x+y)(a-b).$$

6 Zbërtheni polinomin $ax+bx+cx-ay-by-cy$.

Vëreni zgjidhjen:

$$ax+bx+cx-ay-by-cy=a(x-y)+b(x-y)+c(x-y)=(x-y)(a+b+c).$$

Mundohu të kryesh grupimin e anëtarëve në formë tjetër . Ndihmë : një grup le të jetë me anëtarët të cilët e përmbajnë ndryshoren x e kështu me rradhë.

Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomet:

a) $ax-ay+by-bx$; b) $x^2-xy-2x+2y$; c) $ax^2-bx^2-bx+ax-a+b$.

Detyra:

Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomet:

1 a) $2x+2y$; b) $-15ax-20ay$; c) $4a^3-6a^2b$ d) $4x^3y^3-8x^2y^2$.

2 a) $5x^2-20xy-5y^2$; b) $3ab+9ac-12ad$.

3 a) $a(x+y)+7(x+y)$; b) $7q(p-q)+2p(q-p)$; c) $2m(x-3)-5n(3-x)$;

d) $2(a-b)^2-(a+b)\cdot(a-b)$.

4 a) $x^2+xy+ax+ay$; b) $a^2-ab-3a+3b$; c) $5ax^2-10ax-bx+2b-x+2$;

d) $xyz+x^2y^2+3x^4y^5+3x^3y^4z-xy-z$.

7 ZBËRTHIMI DUKE PËRDOR FORMULAT PËR SHUMËZIM TË SHKURTUAR

Kujtohu!

$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ është formulë për shumëzim të shkurtuar

A vlen barazimi

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)\ ?$$

A 1 Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomin x^2-4.

Vëreni zgjidhjen:

Në polinomin e dhënë , katrorë të plotë janë x^2 dhe 2^2.

Barazimi $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ është formulë për zbërthim. Nëse zëvendësojmë $A=x$, $B=2$ dhe e zbatojmë formulën, fitojmë: $x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)$.

Zakonisht shkruajmë: $16-9x^2=4^2-(3x)^2=(4-3x)(4+3x)$.

2 Shkruani në formë të prodhimit shprehjet: a) x^2-25; b) $4x^2-9y^2$; c) $-25x^2+1$.

3 Zbërtheni në shumëzues shprehjen $(a-b)^2-(c-d)^2$.

Vëreni zgjidhjen:

Duke e zbatuar formulën $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ dhe duke e zëvendësuar zëvendësimin $A=a-b$, $B=c-d$, kemi:

$$(a-b)^2-(c-d)^2=\left[(a-b)-(c-d)\right]\left[(a-b)+(c-d)\right]=$$
$$=(a-b-c+d)(a-b+c-d).$$

4 Shkruani në formë të prodhimit shprehjet:

a) $(a+b)^2-c^2$; b) $a^2-(b-c)^2$; v) $4(x+y)^2-y^2$; g) $16(x+y)^2-25(2x-y)^2$.

Kujtohu!

$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$ dhe

$(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$ janë formula

për shumëzim të shkurtuar.

Çka tregojnë barazimet:

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ i

$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$?

$\mathscr{B}$ 5 Shkruani në formë të prodhimit polinomet x^3-8 i x^3+125.

Vëreni zgjidhjen.

Barazimet

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ i

$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$ janë

formula për zbërthim.

Meqë $x^3-8=x^3-2^3$ dhe $x^3+125=x^3+5^3$, duke i zbatuar formulat e mësipërme për zbërthim, fitojmë:

$$x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4) \text{ dhe } x^3+125=x^3+5^3=(x+5)(x^2-5x+25).$$

6 Zbërtheni polinomet: a) x^3-1; b) $8x^3-y^3$; c) x^3+8y^3; ç) $64x^3+125y^3$.

7 Shkruani si prodhim shumëzuesish të thjeshtë polinomin $56x^3-7y^3$.

Vëreni zgjidhjen:

Anëtarët e polinomit $56x^3$, $7y^3$ nuk janë kube të plota, por me nxjerrjen e shumëzuesit të përbashkët para kllape fitojmë

$$7\left(8x^3-y^3\right).$$

Monomet brenda kllapave janë kube të plota, dhe me zbatimin e formulave për ndryshim të kubeve , kemi:

$$56x^3-7y^3=7\left(8x^3-y^3\right)=7\left[(2x)^3-y^3\right]=7(2x-y)\left(4x^2+2xy+y^2\right).$$

8 Zbërtheni në prodhim të shumëzuesish të thjeshtë polinomet $(a+b)x^2-ay^2-by^2$.

Vëreni :

Me grupimin e anëtarëve dhe nxjerrjen para kllapave shumëzuesin e përbashkët fitojmë:

$$(a+b)x^2-y^2(a+b).$$

Përsëri duke nxjerrë shumëzues të përbashkët para kllapave fitojmë:

$$(a+b)\left(x^2-y^2\right).$$

Shprehja në kllapat e dyta paraqet ndryshim të katrorëve , dhe përfundimisht fitojmë:

$$\begin{aligned}(a+b)x^2-ay^2-by^2&=(a+b)x^2-(a+b)y^2=\\&=(a+b)\left(x^2-y^2\right)=\\&=(a+b)(x-y)(x+y).\end{aligned}$$

9 Transformoni në prodhim shprehjet:

a) ax^2-ay^2; b) ax^3+a; c) $(a-b)x^3+(a-b)y^3$; d) $7x^4-7xy^3$.

Detyra:

Transformoni në prodhim të shumëzuesish të thjeshtë polinomet:

1 a) x^2y^2-16; b) $(a-b)^2-1$; v) $x^2-(x-y)^2$.

2 a) $8-a^3b^3$; b) $a^3b^3c^3+1$.

3 a) $ax^2-bx^2-ay^2+by^2$; b) $ax^3+bx^3-ay^3-by^3$.

8 ZBËRTHIMI ME PËRDORIMIN E FORMULËS, KATRORI I BIMOMIT

Kujtohu!

Barazimet $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ dhe $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ janë të njohura si formula për shumëzim të shkurtuar.

Çka paraqesin barazimet

$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$ dhe

$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$?

A **1** Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomin $x^2 + 4x + 4$.

Vëreni zgjidhjen:

Barazimi $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$ është formulë për zbërthim

Zëvendësojmë $A = x, B = 2$ dhe fitojmë:

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x+2)^2.$$

Pra, $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

Vëreni se:

- $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$;
- $x^2 - 8x + 4 \neq (x-2)^2$, sepse $-8x \neq -2 \cdot x \cdot 2$;
- $-x^2 + 4x - 4 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2$.

2 Shkruani në formë të binomit në katror polinomet:

a) $x^2 - 6x + 9$; b) $4x^2 + 20x + 25y^2$; c) $12xy - 4x^2 - 9y^2$.

3 Zbërtheni në shumëzues polinomin $ax^2 - 2axy + ay^2$.

Vëreni zgjidhjen:

- E nxjerrim shumëzuesin e përbashkët para kllape dhe fitojmë $a(x^2 - 2xy + y^2)$.
- Shprehja në kllapa është katror i binomit, d.m.th. $(x-y)^2$.

Pra, $ax^2 - 2axy + ay^2 = a(x^2 - 2xy + y^2) = a(x-y)^2$.

4 Bëni zbërthimin e polinomeve:

a) $2x^2 + 4xy + 2y^2$; b) $7x^3y + 28x^2y^2 + 28xy^3$; c) $9x^4y^2 - 18x^3y^3 + 9x^2y^4$.

5 Transformoni në formë të prodhimit polinomin $c^2 - a^2 - 2ab - b^2$.

Vëreni transformimin:

- Pas grupimit fitojmë $c^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$.
- Shprehja në kllapa është binom në katror dhe kemi $c^2 - (a+b)^2$.
- Zbatojmë formulën e ndryshimit të katrorëve dhe fitojmë $[c-(a+b)][c+(a+b)]$, d.m.th.

$$(c-a-b)(c+a+b).$$

Më praktik është të shkruhet sikurse në shembullin:

$$y^2-4x^2+4x-1=y^2-\left(4x^2-4x+1\right)=$$
$$=y^2-(2x-1)^2=$$
$$=\left[y-(2x-1)\right]\left[y+(2x-1)\right]=$$
$$=(y-2x+1)(y+2x-1).$$

6. Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomet:

a) $x^2-2xy+y^2-9$; b) $a^2b^2+c^2-2abc-25$; c) $x^2-1-2y-y^2$.

Detyra:

Zbërtheni polinomet.

1. a) $4x^2+4xy+y^2$; b) $25x^2-10xy+y^2$; c) $20xy-25x^2-4y^2$.
2. a) $7a^2+14ab+7b^2$; b) $8x^3y-8x^2y^2+2xy^3$; c) $50a^3+20a^2+2a$.
3. a) $x^2+y^2-z^2+2xy$; b) $4-p^2+2pq-q^2$; c) $16m^2-9x^2+12xy-4y^2$.

9 PJESËTUESI MË I MADH I PËRBASHKËT SHUMËFISHI MË I VOGËL I PËRBASHKËT

Kujtohu!

Pjesëtues të 12 janë: 1, 2, 3, 4, 6 dhe 12, kurse pjesëtues të 18 janë 1, 2, 3, 6, 9 dhe 18. Pjesëtues të përbashkët të tyre janë 1, 2, 3 dhe 6.

Qartë , pjesëtues më i madh i përbashkët (PMP) për 12 dhe 18 është numri 6.

Cakto PMP për polinomet

$6x^3y^2$ i $9x^2y^3$.

A 1. Cakto PMP për polinomet $ab(a-b)$ i $b(a-b)^2$.

Vëreni zgjidhjen :

Pjesëtues të $ab(a-b)$ janë:

$1, a, b, a-b, ab, a(a-b), b(a-b)$ dhe $ab(a-b)$.

Pjesëtues të $b(a-b)^2$ janë: $1, b, a-b,$

$(a-b)^2$, $b(a-b)$, $b(a-b)^2$.

Pjesëtues të përbashkët të dy polinomeve janë $1, b, a-b, b(a-b)$.

$\text{PMP}\left[ab(a-b), b(a-b)\right]=b(a-b)$.

Mbani mend!

PMP i dy ose më shumë polinomeve është polinomi i cili është prodhim i të gjithë pjestuesve të përbashkët të atyre polinomeve , ku secili prej tyre që paraqitet në zbërthim merret me tregues më të vogë . Nëse PMP për dy ose më shumë polinome është 1, atëherë themi se polinomet janë reciprokisht të thjeshtë.

2 Cakto PMP për polinomet $2a^2b-4ab^2$; a^2-4b^2 dhe $a^2-4ab+4b^2$.

Vëreni zgjidhjen:

Polinomet e dhëna i zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë dhe kemi:

$$2ab(a-2b);\ (a-2b)(a+2b);\ (a-2b)^2.$$

Vërejmë sePMP është $a-2b$.

3 Gjeni PMP për polinomet: a) $12x^3y^4$; $18x^5y^6z$; $30x^2y^5$. b) x^2-y^2; $x^2-2xy+y^2$.

c) $x^2y(x+2y)$; $x^3y^3(x+2y)$; $x^5y^2(x+2y)$. d) $2x^3-2y^3$; x^3y-xy^3; $x^3-2x^2y+xy^2$.

Kujtohu!

Numri 36 është pjestues me çdonjërin prej numrave: 1, 4, 6, 9, 12, 18 dhe 36. Themi se numri 36 është shumfish i atyre numrave.

Gjeni disa shumëfish për numrat 4, 6, 9 dhe 12.

$\mathscr{B}$ 4 Caktoni bashkësinë e shumëfishëve të përbashkët për polinomet $6x$ dhe $4(x+y)$.

Vëreni zgjidhjen:

Ja disa elemente të asaj bashkësie: $12x(x+y)$; $12x^2(x+y)^2$; $60x^{100}(x+y)^{2002}$;...

5 Caktoni PMP për polinomet: x^2-y^2; x^3-y^3; $x^2-2xy+y^2$.

Vëreni procedurën:

Polinomet e dhëna i zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë dhe fitojmë:

$(x-y)(x+y)$; $(x-y)(x^2+xy+y^2)$; $(x-y)^2$. Polinomi $(x+y)(x^2+xy+y^2)(x-y)^2$ është shumëfishi më i vogël i përbashkët për polinomet e dhëna.

Mbani mend!

SHVP është prodhim i të gjitha shumëzuesve të thjeshtë të cilët paraqiten në zbërthimin e polinomit, ku secili prej tyre merret me tregues më të madh .

6 Cakto SHVP për polinomet: a) $12x^3y$; $18x^4y^5$; $30x^5y^2$. b) a^2-4; a^2-4a+4.

c) x^2-9; x^2+6x+9; x^3+27. d) $3x^3-12x^2+12x$; $x^2y+4xy+4y$; $3x^2y-12y$.

Detyra:

1 Cakto SHVP për polinomet :

a) $a^3x^3y^2$; $28a^4x^2y^3$. b) $9a^2-36b^2$; $18a^2-72ab+72b^2$. c) a^2-1; a^2+2a+1; a^3+a^2+a+1.

2 Cakto SHVP për polinomet:

a) $4a^2x^3y^2$; $6a^4x^5y^7$. b) $x-2y$; $x+2y$; x^2-4y^2. c) $3a-6b$; $a^2-4ab+4b^2$; a^3-8b^3.

3 Cakto SHVP dhe PMP për polinomet:

a) a^2-5a; a^3-25a; $a^2-10a+25$. b) $3a-15$; a^2-25;$5-a$.

10 THYESAT ALGJEBRIKE.ZGJËRIMI DHE THJESHTIMI

Kujtohu!

$3:4=\frac{3}{4}$ është thyesë. Gjithashtu edhe shprehja $(x+2):(x-3)=\frac{x+2}{x-3}$ është thyesë

A mundet pjesëtuesi (emëruesi) të jetë zero?

A Le të jenë M dhe N pëlinome .

Shprehja $\frac{M}{N}$ $(N\neq 0)$ quhet thyesë algjebrike.

M është numëruesi, kurse N është emëruesi i thyesës.

1 Cili nga shprehjet algjebrike është thyesë algjebrike:

$$\frac{x}{y},\ y\neq 0;\ \frac{3}{5};\frac{a+b}{a-2},(a\neq 2);\ \frac{\sqrt{7}}{7};\ \frac{a+2b}{b},(b\neq 0)?$$

2 Caktoni vlerat e x për të cilat thyesat kanë kuptim $\frac{2x}{x-1}$ dhe $\frac{2x^2}{x^2-x}$.

Për cilat vlera të x thyesat janë identikisht të njëjta?

Vëreni zgjidhjen:

Për thuesën e parë vlera të tilla janë numrat realë për të cilat $x-1\neq 0$, d.m.th. $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$,kurse për thyesën e dytë janë numrat realë për të cilat $x^2-x\neq 0$, d.m.th. $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Thyesat $\frac{2x}{x-1}$ dhe $\frac{2x^2}{x^2-x}$ janë identikisht të njëjta nëse x ndryshon në bashkësinë $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Duhet të dish:

- Thyesat e thjeshta (pa ndryshore) janë thyesa algjebrike.
- Thyesa është e përkufizuar nëse ndryshorja merr vlera të lejuara (emëruesi të jetë i ndryshëm prej zeros).
- Thyesat algjebrike me ndryshore bëhen të thjeshta nëse zëvendësohet ndryshorja me vlera të lejuara dhe për këtë ato kanë të njëjtat veti dhe mundet të kryhen operacionet njëlloj sikurse te thyesat e thjeshta.

- Për thyesat identikisht të njëjta $\frac{M}{N}$ dhe $\frac{P}{Q}$ shkruajmë $\frac{M}{N}=\frac{P}{Q}$ ose

$$M\cdot Q=N\cdot P \text{ za } N\neq 0, Q\neq 0.$$

3 Caktoni vlerat e lejuara të ndryshores në thyesat:

a) $\frac{3x}{3-x}$; b) $\frac{3x}{2x+4}$; c) $\frac{3-x}{x(x-1)}$; d) $\frac{x^3+1}{(x-1)(x-3)(x-5)}$.

Kujtohu!

- Thyesën $\frac{2}{3}$ zgjeroni me 2. Fitove

$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{4}{6}$.

- Thyesën $\frac{x}{3}$ zgjeroe me $x, (x \neq 0)$.

$\mathscr{B}$ **4** Thyesën $\frac{x-1}{x-5}(x \neq 5)$ zgjeroe me polinomin $x+5$.

Vëreni zgjidhjen:

- Numeruesin dhe emëruesin i shumëzojmë me $x+5$, dhe shkruajmë:

$$\frac{x-1}{x-5}=\frac{(x-1)\cdot(x+5)}{(x-5)\cdot(x+5)}=\frac{x^2+4x-5}{x^2-25}.$$

Mbani vend!

Barazimi $\frac{M}{N}=\frac{M \cdot P}{N \cdot P}(N \neq 0, P \neq 0)$ tregon se thyesa $\frac{M}{N}$ është zgjeruar me polinomin P.

5 Sillni me emërues të njëjtë thyesat $\frac{y}{x^2-x}, \frac{x}{xy+y}, \frac{2}{x^2-1}$.

Vëreni procedurën:

- I zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë emëruesat e thyesave të dhëna dhe kemi:

$$x^2-x=x(x-1),$$
$$xy+y=y(x+1),$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$

- Caktojmë SHVP për emëruesat dhe kemi $xy(x-1)(x+1)$.
- Kryejmë zgjerimin te secila thyesë.
- Zgjerues i thyesës është shumëfishi prej SHVP i cili nuk përfshihet në emëruesin e asaj thyese.

- Për zgjerimin e thyesave shkruajmë:

$$\frac{y}{x^2-x}=\frac{y}{x(x-1)}\cdot\frac{y(x+1)}{y(x+1)}=\frac{y^2(x+1)}{xy(x-1)(x+1)};$$

$$\frac{x}{xy+y}=\frac{x}{y(x+1)}\cdot\frac{x(x-1)}{x(x-1)}=\frac{x^2(x-1)}{xy(x-1)(x+1)};$$

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{xy}{xy}=\frac{2xy}{xy(x-1)(x+1)}.$$

6 Sillni në emërues të përbashkët thyesat: a) $\frac{a}{4y^2}, \frac{b}{3xy^2}$; b) $\frac{m}{a^2-ab}, \frac{n}{ab-b^2}$.

Kujtohu!

Thyesa $\frac{15}{25}$ e thjeshtuar për 5 është

$$\frac{15:5}{25:5}=\frac{3}{5}.$$

Thjeshto me 2 thyesën $\frac{2}{4x}$.

C 7 Thjeshtoni thyesën

$$\frac{a^3-4a^2}{a^2-16}(a\neq 4, a\neq -4).$$

Vëreni zgjidhjen:

Emëruesin dhe numëruesin e thyesës i zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë dhe kemi:

$$a^3-4a^2=a^2(a-4) \text{ i}$$

$$a^2-16=(a-4)(a+4).$$

Numëruesin dhe emëruesin i pjesëtojmë me polinomin $a-4$ dhe fitojmë $\frac{a^2}{a+4}$.

Procedurën e thjeshtimit e shkruajmë në këtë mënyrë:

$$\frac{a^3-4a^2}{a^2-16}=\frac{a^2(a-4)}{(a-4)(a+4)}=\frac{a^2}{a+4}.$$

Duhet të dish!

Të thjeshtohet thyesa $\frac{M}{N}(N\neq 0)$ me polinomin $P\neq 0$, pra numeruesi dhe emëruesi të pjesëtohen me polinomin P = PMP (M, N).

Vëreni!

Në thjeshtimin $\frac{a^{20}b^{16}c^8}{a^7b^{17}c^{12}}=\frac{a^{13}}{bc^4}, (a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0)$ në mënyrë të qëlluar është zbatuar pjesëtimi i fuqive me baza të njëjta.

8 Thjeshtoni thyesat: a) $\frac{(x-1)^8(y+2)^{10}(z-4)^{12}}{(x-1)^3(y+2)^{11}(z-4)^{20}}, (x\neq 1, y\neq -2, z\neq 4)$; b) $\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}, (x\neq 2)$.

Detyra.

1. Caktoni vlerat e lejuara të ndryshores në thyesat algjebrike:

a) $\frac{3x-5}{x+1}$; b) $\frac{x+2}{(x-1)(x+4)}$; c) $\frac{x-5}{x^2y-9y}$; d) $\frac{2x+y}{x^4-xy^3}$.

2. Sillni në emërues të thjeshtë thyesat:

a) $\frac{a}{a^2-9b^2}, \frac{1}{a+3b}$; b) $\frac{1}{x^2-x}, \frac{2}{1-x^2}, \frac{1}{x^2+x}$.

3. Thjeshtoni thyesat:

a) $\frac{1-a^2}{a-1}$; b) $\frac{x^2-8x+16}{xy-4y}$; c) $\frac{x^3-x}{x^3+2x^2+x}$.

11 OPERACIONET ME THYESA ALGJEBRIKE

Kujtohu!

- $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$.
- Njehso: $\frac{3}{a}-\frac{x}{a}+\frac{5}{a}$ për $a\neq 0$.
- Si mblidhen thyesat me emëruesa të ndryshëm?

A **1** Gjeni shumën e thyesave:

$$\frac{2x-3}{x+2}+\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+5}{x+2},\ (x\neq -2).$$

Vëreni zgjidhjen:

$$\frac{2x-3}{x+2}+\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+5}{x+2}=\frac{2x-3+x+1-x-5}{x+2}=\frac{2x-7}{x+2}.$$

2 Gjeni shumën e thyesave $\frac{a}{ab-b^2}+\frac{b}{a^2-ab}-\frac{a+b}{ab}$, $(a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\neq b)$.

Vëreni zgjidhjen:

- Thyesat janë me emërues të thjeshtë.
- Me zbërthimin e emëruesave kemi: $ab-b^2=b(a-b);a^2-ab=a(a-b);ab.$
- SHVP për emëruesat është $ab(a-b)$.
- Thyesat i zgjerojmë dhe kemi: $\frac{a^2}{ab(a-b)}+\frac{b^2}{ab(a-b)}-\frac{(a+b)(a-b)}{ab(a-b)}$.
- Zbatojmë rregullën e mbledhjes së thyesave me emërues të njëjtë dhe kemi $\frac{a^2+b^2-a^2+b^2}{ab(a-b)}=\frac{2b^2}{ab(a-b)}$. Pas thjeshtimit fitojmë $\frac{2b}{a(a-b)}$.
- Më praktik është shënimi:

$$\frac{a}{ab-b^2}+\frac{b}{a^2-ab}-\frac{a+b}{ab}=\frac{a}{b(a-b)}+\frac{b}{a(a-b)}-\frac{a+b}{ab}=$$

$$=\frac{a\cdot a+b\cdot b-(a+b)(a-b)}{ab(a-b)}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-a^2+b^2}{ab(a-b)}=$$

$$=\frac{2b^2}{ab(a-b)}=\frac{2b}{a(a-b)}.$$

Mbani mend!

Me barazimin $\frac{M}{N}+\frac{P}{N}=\frac{M+P}{N},(N\neq 0)$ jepet rregulla e mbledhjes së thyesave me emërues të njëjtë.

3 Caktoni shumën e thyesave:

a) $\frac{2m-3p}{m^2p}-\frac{4m-5p}{mp^2}$; b) $\frac{a}{a^2-9b^2}-\frac{1}{a+3b}$; c) $\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{x^2}{xy-y^2}+\frac{y^2}{x^2-xy}$.

Kujtohu!

- $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$
- Logarit prodhimin:

a) $\frac{2}{3}\cdot 5$; b) $2\cdot\frac{3}{3}$; v) $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}$.

B 4 Shumëzoni thyesat:

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{a+1}\cdot\frac{a^2+a}{x^3-2x^2-x+2}\cdot\frac{x-2}{x+2}, \text{ za}$$

$$a\neq -1, x\neq -2, x\neq 2, x\neq 1, \neq -1.$$

Vëreni zgjidhjen:

- Numëruesin dhe emëruesin i thyesave të dhëna i zbërthejmë në shumëzues të thjeshtë:

$$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)=(x+2)(x-1)(x+1);$$

$$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x-2)(x^2-1)=(x-2)(x-1)(x+1);$$

$$a^2+a=a(a+1).$$

- Për prodhimin kemi: $\frac{(x+2)(x-1)(x+1)}{a+1}\cdot\frac{a(a+1)}{(x-2)(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x-2}{x+2}=a.$

- Më praktike është që zgjidhjen ta shkruajmë në mënyrën që vijon:

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{a+1}\cdot\frac{a^2+a}{x^3-2x^2-x+2}\cdot\frac{x-2}{x+2}=\frac{x^2(x+2)-(x+2)}{a+1}\cdot\frac{a(a+1)}{x^2(x-2)-(x-2)}\cdot\frac{x-2}{x+2}=$$

$$=\frac{(x+2)(x-1)(x+1)}{a+1}\cdot\frac{a(a+1)}{(x-2)(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x-2}{x+2}=a.$$

Mbani mend!

Prodhimi i dy ose më shumë thyesave është thyesë , ku numeruesi është prodhimi i numëruesve të atyre thyesave , kurse emëruesi është prodhimi i emëruesve të etyre thyesave.Thyesat që shumëzohen në shumë raste ka mundësi para se të shumëzohen të kryhet thjeshtimi , domethënë të largohen shumëzuesit e njëjtë në emërues dhe numërues.

5 Njehsoni prodhimint:

a) $\frac{1}{a-1}\cdot\frac{a^2-a}{a+1}, (a\neq 1, a\neq -1)$; b) $\frac{a^2-ab}{a^2+ab}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{ab}, (a\neq 0, b\neq 0, a\neq -b)$.

Kujtohu!

$\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}$.

Cakto herësin:

a) $\frac{3}{5}:\frac{9}{25}$; b) $\frac{3}{5}:7$; c) $3:\frac{5}{7}$.

Ç 6 Pjesëtoni thyesën $\frac{x^2-25}{x^2-3x}$ me thyesën $\frac{x^2+5x}{x^2-9}$ për $x\neq 0, x\neq 3, x\neq -3, x\neq -5$.

Vëreni zgjidhjen:

I zbërthejmë numëruesin dhe emëruesin e thyesës dhe kemi:

$$x^2-25=(x-5)(x+5);\quad x^2-9=(x-3)(x+3);\quad x^2-3x=x(x-3);\quad x^2+5x=x(x+5).$$

Thyesa që pjesëtohet shumëzohet me vlerën reciproke të thyesës pjesëtues , d.m..th.

$\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)}$, prej nga pas thjeshtimit fitojmë $\frac{(x-5)(x+3)}{x^2}$.

Në praktikë shkruajmë: $\frac{x^2-25}{x^2-3x}:\frac{x^2+5x}{x^2-9}=\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)}=\frac{(x-5)(x+3)}{x^2}$.

7 Cakto herësin:

a) $\frac{4x^2y^2}{15b^3c}:\frac{8x^3y^3}{5b^2c^2}$; b) $\frac{b^2-y^2}{3a^3-3y^3}:\frac{b-y}{a^2+ay+y^2}$.

Mbani mend!

Barazimet: $\frac{M}{N}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{M\cdot P}{N\cdot Q}$ dhe $\frac{M}{N}:\frac{P}{Q}=\frac{M}{N}\cdot\frac{Q}{P}$, $(N\neq 0,\ Q\neq 0,\ P\neq 0)$,

janë rregulla për shumëzim dhe pjesëtim të thyesave.

Kujtohu!

$$\frac{\;\frac{2}{3}\;}{\frac{5}{7}}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}.$$

Paraqiti si thyesa të thjeshta:

a) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{8}}$; b) $\frac{\frac{3}{7}}{5}$; c) $\frac{3}{\frac{5}{8}}$.

Ç 8 Transformoni thyesën e dyfishtë

$$\frac{1+a+\frac{1}{1-a}}{1+\frac{1}{1-a^2}},$$ për $a^2\neq 1,\ a\neq\pm 1$.

Vëreni zgjidhjen:

Në fillim i transformojmë numeruesin dhe emëruesin dhe kemi:

$$1+a+\frac{1}{1-a}=\frac{1-a^2+1}{1-a}=\frac{2-a^2}{1-a} \text{ dhe } 1+\frac{1}{1-a^2}=\frac{1-a^2+1}{1-a^2}=\frac{2-a^2}{(1-a)(1+a)}.$$

Rrjedh $\dfrac{\dfrac{2-a^2}{1-a}}{\dfrac{2-a^2}{(1-a)(1+a)}}=\dfrac{(2-a^2)(1-a)(1+a)}{(2-a^2)(1-a)}=1+a.$

Shkruajmë: $\dfrac{1+a+\dfrac{1}{1-a}}{1+\dfrac{1}{1-a^2}}=\dfrac{\dfrac{1-a^2+1}{1-a}}{\dfrac{1-a^2+1}{(1-a)(1+a)}}=\dfrac{\dfrac{2-a^2}{1-a}}{\dfrac{2-a^2}{(1-a)(1+a)}}=\dfrac{(2-a^2)(1-a)(1+a)}{(2-a^2)(1-a)}=1+a, 2-a^2\neq 0.$

Duhet të dish!

Thyesa e dyfishtë kthehet në thyesë të thjeshtë ashtu që prodhimi i anëtarëve të jashtëm shkruhet në numërues kurse prodhimi i anëtarëve të brendshëm shkruhet në emërues. Shumësuesit e jashtëm nëse janë të njëjtë me shumëzuesit e brendshëm atëherë ato mund të thjeshtohen.

9 Kryeni operacionet : $\left(\dfrac{3x}{x+y}+\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right):\dfrac{4xy}{x^2-y^2}.$

Vëreni zgjidhjen:

Sipas rregullave të njohura e llogarisim vlerën e shprehjes në kllapa dhe fitojmë:

$\dfrac{4x^2-4xy}{(x-y)(x+y)}$. Përfundimisht kemi $\dfrac{4x^2-4xy}{(x-y)(x+y)}\cdot\dfrac{(x-y)(x+y)}{4xy}=\dfrac{x-y}{y}$, për $y\neq 0, x\neq y, x\neq -y.$

Shkruajmë direkt: $\left(\dfrac{3x}{x+y}+\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right):\dfrac{4xy}{x^2-y^2}=$

$$=\frac{3x(x-y)+x(x+y)-2xy}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{4xy}=\frac{3x^2-3xy+x^2+xy-2xy}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{4xy}=$$

$$=\frac{4x(x-y)}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{4xy}=\frac{x-y}{y}.$$

10 Thjeshtoni shprehjet (kryeni operacionet e kërkuara):

a) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}};$ b) $\left(\dfrac{2x}{x^2+2xy}+\dfrac{4y}{x^2-4y^2}-\dfrac{y}{xy-2y^2}\right):\left(1-\dfrac{x^2-4y^2-2}{x^2-4y^2}\right).$

Detyra:

1. Njehso: a) $\frac{2x}{x-1}-\frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}$; b) $\frac{1}{x^2+10x+25}+\frac{1}{x^2-10x+25}+\frac{2}{x^2-25}$.

2. Shumëzoni , gjegjësisht pjesëtoni thyesat:

   a) $\frac{3a^3}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{a}$; b) $\frac{3x-3y}{2x+2y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$; c) $\frac{a^2-9x^2}{a^2-ax}:\frac{a^2-3ax}{a-x}$; g) $\frac{x^4+x^3+x+1}{x^3-x^2+x-1}:\frac{x^3+1}{2x^2+2}$.

3. Kryeni operacionet e duhura:

   a) $\dfrac{1+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\dfrac{(a+b)^2-c^2}{4a^2b^2}}$; b) $\left(\frac{3}{a-1}-\frac{3a^2+3a+3}{a^2-1}:\frac{a^4-a}{a^3+1}\right)\cdot\frac{a-a^2}{3}$.

Ushtrime kontrolluese tematike

1. Shkruani shprehjen si fuqi me bazë a, e pastaj njehsoe vlerën e saj për

   $a=-2$. a) $\left(a\cdot a^3\right)^4:a^{15}\cdot a^2$; b) $\frac{\left(\left(a^2\cdot a^4\right)^5\right)^2}{\left(a^{20}\cdot a^9\right)^2}$.

2. Janë dhënë polinomet $P(x)=x^2-2x+1$, $Q(x)=x^2-3x+2$. Caktoni polinomet:

   a) $P(x)+Q(x)$; b) $P(x)-Q(x)$; c) $P(x)\cdot Q(x)$;

3. Sillni në formë normale polinomet: $(x-1)^2-(x-1)(x+1)-(x+1)^2$.

4. Caktoni herësin $\left(6x^3+5x^2-8x+2\right):(2x-1)$

5. Zbërtheni në shumëzues të thjeshtë polinomet:

   a) $x^3+3x^2-4x-12$; b) $4a^2x-4a^2x^2-a^2$; c) $2x^3-16$.

6. Caktoni PMP dhe SHVP për polinomet:

   a) $2x^2y^4$; $6xy^2$; $8x^4y$; b) x^2-4; x^2-4x-4; x^3-8.

7. Thjeshtoni thyesat: a) $\frac{x^2-8x+16}{xy-4y}$; b) $\frac{8+x^3}{8x-2x^3}$.

8. Thjeshtoni thyesën $\frac{ax+a}{x^2-x+1}:\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{x^3+1}\right)$.

TEMA 4

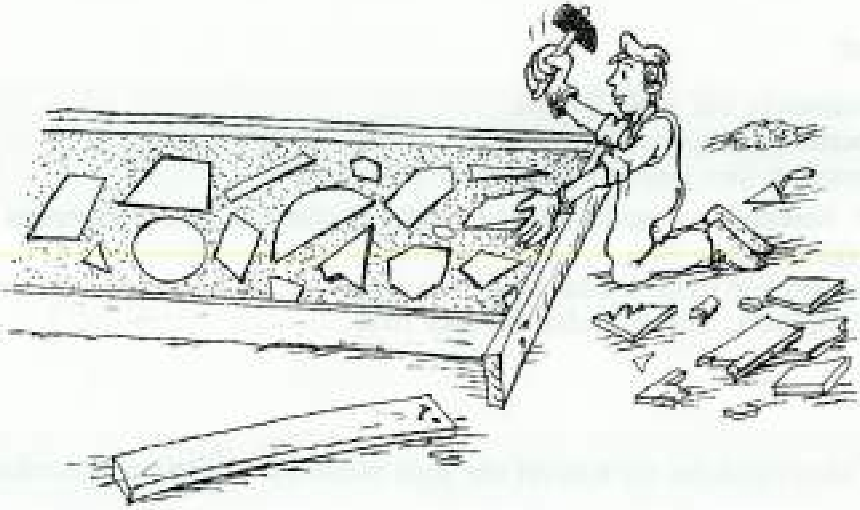
FIGURAT GJEOMETRIKE NË RRAFSH

Në gjeometri nuk ka rrugë mbretërore.

Euklid

Në këtë temë do të njihesh me :

- Konceptet themelore dhe të nxjerra;
- Pohime themelore dhe të nxjerra, aksioma dhe teorema;
- Figura themelore gjeometrike dhe pozita reciproke e tyre;
- vektorët kolinearë dhe të barabartë;
- operacionet me vektorë, mbledhja, zbritja dhe shumëzimi i vektorit me numër;
- Zbërthimi i vektorit në komponenta;
- zbatimi i vektorëve.



1 KONCEPTET THEMELORE DHE TË NXJERRA. GJYSMËDREJTËZA, SEGMENTI DHE GJYSMËRRAFSHI

A Çka është gjeometria?

Lëndët që na rrethojnë mundet ti klasifikojmë në shumë mënyra : sipas madhësisë sipas pozitës reciproke , sipas formës, përbërjes, ngjyrës, zbatimit etj.

Me hulumtimin e shumë vetive të lëndëve merren shumë shkenca të ndryshme : gjeometria, fizika, kimia etj.

Formën, madhësinë dhe pozitën e lëndëve, pa marrë parasysh vetitë e tjera të tyre , janë veti gjeometrike .Sipas kësaj:

Gjeometria është shkencë e cila i studion vetitë gjeometrike të sendeve.

Në varshmëri me atë se çfarë vetish gjeometrike studiohen , gjeometria ndahet në disa degë: planimetria, stereometria, trigonometria etj.

Planimetria është pjesë e gjeometrisë elementare e cila i studijon vetitë e figurave të rrafshta.

*Geometria në gjuhën greke domethënë matje e tokës . Emrin e ka marrë nga grekët e vjetër, të cilët me matjen e tokës në rrjedhën e lumit Nil filluan të mbledhin dhe të përdorin figurat gjeometrikei,lidhur me këtë në shek. VI p.e.s. filluan ta ndërtojnë gjeometrinë si shkencë.

B Konceptet themelore dhe të nxjerra

Në shkollimin e deritanishëm ke mësuar shumë koncepte nga gjeometria , për shembull: pika, drejtëza , trekëndëshi, katrori, rrethi, vija rrethore, kubi, topi etj.

Vëreni se disa koncepte përkufizohen dhe sqarohen me ndihmën e disa koncepteve të cilat tanimë kanë qenë të mësuara. Gjithashtu vëreni se disa koncepte nuk përkufizohen , por vetëm numërohen vetitë e tij të cilat janë vërtetuar që prej shekujsh, dhe duke u bazuar në ato , përkufizohen edhe koncepte tjera.

Mbani mend!

Konceptet themelore nuk përkufizohen.
Koncepte themelore në gjeometri janë: pika , drejtëza, rrafshi, largesa .
Të gjitha konceptet tjera janë të nxjerra ose të përkufizuara.

Për shembull: Bashkësia e të gjitha pikave në rrafsh të cilat janë njëlloj të larguara nga një pikë fikse e rrafshit quhet vijë rrethore.

Vëreni se koncepti vijë rrethore është sqaruar plotësisht me një fjali në të cilën logjikisht janë lidhur konceptet bashkësi pikash, largesë, rrafsh dhe pikë fikse..

Mbani mend!

Fjalia me të cilën mendohet një koncept dhe jepet përmbajtja e tij quhet ***përkufizim***.

E ke të njohur nga algjebra koncept themelor d.m.th. koncepti i cili nuk përkufizohet është bashkësi , elementet e së cilës janë objekte të cilat kanë një veti të përbashkët. Për shembull: bashkësi prej numrave realë , bashkësi prej nxënësish në shkollën tënde, bashkësi e librave të çantës tënde etj.

Në gjeometri do ta shqyrtojmë bashkësinë e pafundme pikash, që do ta shënojmë me $\mathbb{P}$,kurse elementet e saj d.m.th. pikat me A, B, C, ...

Pikat e A dhe B, zakonisht do të na paraqesin dy pika të ndryshme.

Nëse shkronjat A dhe B janë shenja për një pikë të njëjtë , do të shkruajmë $A \equiv B$.

Mbani mend!

Secila nënbashkësi e $\mathbb{P}$ quhet ***figurë gjeometrike*** ose vetëm ***figurë.***

Vetë bashkësia $\mathbb{P}$, sikurse secila bashkësi njëelementëshe $\{A\}$ prej $\mathbb{P}$ janë figura.

Figura $\mathbb{P}$ quhet hapsirë.

Drejtëza dhe rrafdhi, janë gjithashtu nënbashkësi të hapsirës $\mathbb{P}$, d.m.th. ato janë figura gjeometrike. Drejtëzat do t'i shënojmë me shkronja të vogla a, b, c, ..., kurse rrafshet me shkronjat greke $\pi, \alpha, \beta, \Omega$,... ose me tre pika jokolineare ABC.

C **Kujtohu!**

Në vizatim është dhënë drejtëza a dhe pika O e cila shtrihet në atë drejtëz.

Në sa pjesë drejtëza është ndarë me pikën O?

Mbani mend!

Secila bashkësi e pikave nga drejtëza a që është në njërën anë të pikës O, bashkë me atë pikë , formojnë figurë e cila quhet *gjysmëdrejtëz* me fillim në pikën O.
Njëra gjysmëdrejtëz në vizatim është OA, kurse tjetra OB.

Ç **Kujtohu!**

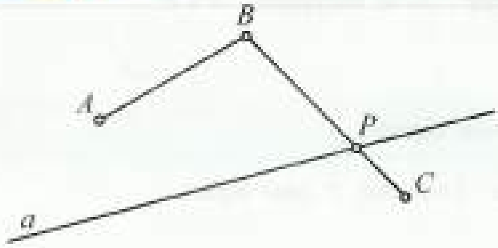
Cila nga pikat P dhe Q shtrihet mes pikave M dhe N?

Mbani mend!

Figura e cila i përmban pikat M *dhe* N dhe të gjitha pikat të cilat shtrihen mes tyre quhet segment.

Në vizatim është përcaktuar segmenti MN.
Pikat M dhe N quhen pika të skajshme të segmentit, kurse largesa prej pikës M deri te pika N quhet gjatësi e segmentit MN dhe shënohet me $\overline{MN}$.

Vëreni!

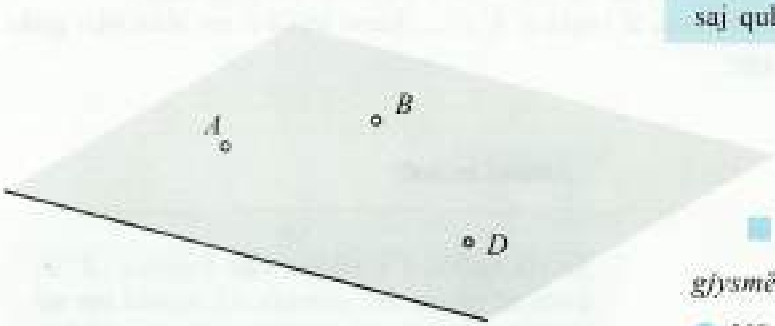


Segmenti BC dhe drejtëza a *kanë pikë të përbashkët* pikën P.

Cilat pika shtrihen në të njëjtën anë të drejtëzës a?

Mbani mend!

Figura e cila përbëhet prej një drejtëze dhe të gjitha pikat e rrafshit që janë në njërën anë të saj quhet ***gjysmërrafsh***.



Drejtëza a quhet *kufi ose teh i gjysmërrafshit*.

Në sa gjysmërrafshe drejtëza e ndan rrafshin?

Vëreni!

Konceptet gjysmëdrejtëz, segment dhe gjysmërrafsh janë koncepte të nxjerra.

***Detyra*:**

1. Koncepti kënd përkufizohet si figurë e cila përbëhet prej dy gjysmëdrejtëzave të cilat kanë pikë të fillimit të përbashkët.
   Cilat koncepte janë përdorë në përkufizimin e konceptit kënd?

2. Përkufizoni konceptin trekëndësh . Krijoni një varg përkufizimesh për konceptet e përkufizuara për konceptin trekëndësh , deri sa të arrish në koncept themelor.

3. A formojnë gjysmëdrejtëzat AB dhe BA të njëjtën bashkësi pikash?

4. Segmenti AB nuk ka pikë të përbashkët me drejtëzën a. Si është pozita e pikave A dhe B në lidhje me drejtëzën a?

2 POHIMET THEMELORE TË NXJERRA
POZITA RECIPROKE E PIKËS DHE DRETJËZËS, PIKA DHE RRAFSHI

A

Gjeometria ka për detyrë ti studioj vetitë e figurave gjeometrike dhe pozitat reciproke të tyre. Vetitë dhe pëozitat shpesh vërtetohen në forma të ndryshme, d.m.th. pohime të cilat vërtetohen në bazë të ligjeve logjike dhe pohimeve të cilat merren të vërtetë pa vërtetim.

Pohimi i cili vërtetohet quhet ***tezë***, kurse pohimet prej të cilave rrjedh teza quhen ***argument***. Vargui një numri përfundimesh të cilat shkojnë prej argumentit deri te teza quhet ***demonstrim***.

Argumentet, demonstrimi dhe teza e përbëjnë vërtetimin.

Në kryerjen e vërtetimit argumentet merren si pohime të vërteta ose si pohime vërtetësia e të cilëve është treguar më herët.

Mbani mend!

Pohimet të cilat i marrim si të vërteta pa vërtetim i quajmë ***pohime themelore ose aksioma***.
Të gjitha pohimet e tjera quhen të ***nxjerra*** ose ***teorema***, këto vërtetohen.

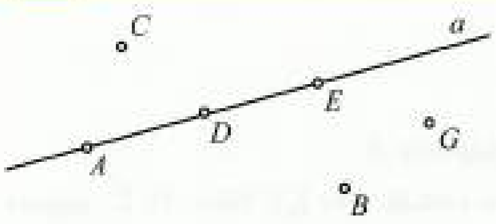
Teoremat shpesh jepen në formë të ***implikacijonit , forma e kushtëzuar***, ose forma ***kategorike***.

Për shembull: Nëse katërkëndëshi është romb atëherë diagonalet e tij janë reciprokisht normale. Teorema është thënë në formë të kushtëzuar. Teorema në formë kategorike do të jetë: Diagonalet e rombit janë reciprokisht normale.

Në çdo teoremë duhet të ketë:

1. Në cilat kushte shqyrtohet objekti , përbëjnë ***supozimin***
2. Çka është pohimi i atyre objekteve , e kjo është përfundimi i teoremës ose ***tezë.***

B ***Kujtohu!***



- Caktoni vërtetësinë e pohimeve:
  $A \in a$; $D \in a$; $B \in a$; $E \notin a$; $C \notin a$.
- Cilat pika janë kolineare?

Nëse A është një pëikë , a është një drejtëz, atëherë pika A mund t'i takoj drejtëzës $(A \in a)$ ose të mos i takoj drejtëzës a $(A \notin a)$.

Nëse $A \in a$, atëherë themi se "pika A shtrihet në drejtëzën a", ose "drejtëza a kalon nëpër pikën A".

Pozita reciproke e figurave themelore gjeometrike shpesh jepet me aksiomë..

Në shtjellimin e mëtutjeshëm aksiomat do t'i shënojmë me A1, A2,..., kurse teorem me T1, T2, ...

Aksioma 1. Në secilën drejtëz shtrihen pafund shumë pika, por ka edhe pika që nuk i takojnë asaj drejtëze.

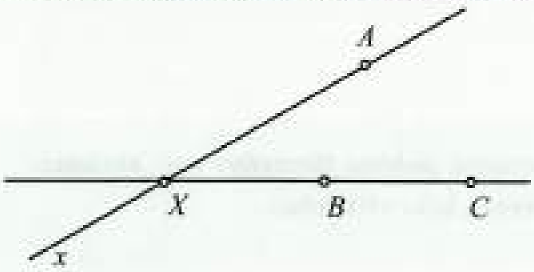
Aksioma 2. Nëpër dy pika të ndryshme kalon një dhe vetëm një drejtëzë.

Teorema 1. Në hapësirë gjenden së paku tri pika jokolineare.

Vërtetim. Le të jetë A dhe B dy pika të ndryshme dhe le të jetë a drejtëza që kalon nëpër ato dy pika. Sipas A1, gjendet pika C e cila nuk i takon drejtëzës a. Pra, pikat A, B dhe C nuk janë kolineare.

Teorema 2. Nëpër secilën pikë kalojnë pakufi shumë drejtëza.

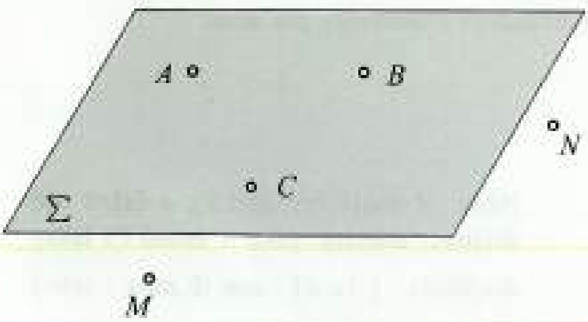
Vërtetim. Le të jetë A pikë e çfarëdoshme, kurse B dhe C pika jokolineare me pikën A.



Sipas A2, nëpër pikat B dhe C kalon vetëm një drejtëzë, për të cilën sipas A1, ka pakufi shumë pika. Nëpër secilën pikë X të drejtëzës BC dhe nëpër pikën A kalon vetëm një drejtëzë x.
Meqë në drejtëzën BC ka pakufij shumë pika, pra nëpër pikën A kalojnë pakufij shumë drejtëza.

Kujtohu!

Pikat që shtrihen në një drejtëz quhen pika ***kolineare***.



- Caktoni vlerën e vërtetësisë për gjykimet:

$A \in \Sigma$; $B \notin \Sigma$; $M \in \Sigma$; $N \in \Sigma$.

- Si quhen pikat të cilat shtrihen në një rrafsh?

Rrafshi ngjashëm sikurse drejtëza, është nënbashkësi e hapsirës $\mathbb{P}$.

Një pikë *A mund t'i takojë rrafshit* Σ $(A \in \Sigma)$ ose të mos i takojë $(A \notin \Sigma)$. Nëse $A \in \Sigma$, atëherë themi se "pika A shtrihet në rrafshin Σ" ose "rrafshi Σ kalon nëpër pikën A".

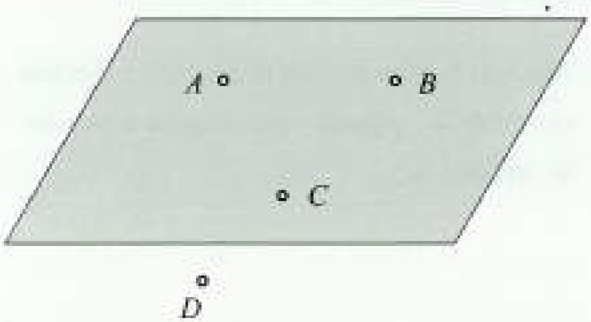
Pozitën reciproke të pikës dhe rrafshit e japin aksiomat:

Aksioma 3. Në secilin rrafsh shtrihen së paku tre pika kolineare, por gjendet pikë e cila nuk i takon atij rrafshi.

Aksioma 4. Nëpër tre pika kolineare kalon vetëm një rrafsh.

Nga këto aksioma rrjedh se drejtëza a dhe rrafshi Σ janë dy nënbashkësi të ndryshme të bashkësisë $\mathbb{P}$. Ato janë nënbashkësi të vërteta të $\mathbb{P}$.

Teorema 3. Në hapësirën $\mathbb{P}$ ekzistojnë katër pika që nuk i takojnë të njëjtit rrafsh.



Vërtetim: Sipas T1, në hapësirën $\mathbb{P}$ gjenden së paku tre pika jokolineare , dhe sipas A4 ato përcaktojnë vetëm një rrafsh Σ.
Sipas A3, gjendet pika D e cila nuk i takon rrafshit Σ.Pra, pikat A, B, C dhe D nuk shtrihen në të njëjtin rrafsh.

Teorema 4. Nëpër secilën pikë kalon së paku një rrafsh.

Vërtetim. Le të jetë A pikë e çfarëdoshme, dhe pikat B dhe C nëpër të cilat kalon drejtëza a.Sipas A1 gjenden pikat të cilat nuk i takojnë asaj drejtëze, le të jetë ajo pikë pika A.

Pikat A, B dhe C janë jokolineare, dhe sipas A4, nëpër ato kalon vetëm një rrafsh Σ, që d.m.th. nëpër pikën A kalon së paku një rrafsh.

Detyra:

1) Tregoni se nëpër katër pika të ndryshme kalojnë, një, katër ose gjashtë drejtëza.

2) Tregoni se nëpër pesë pika të ndryshme kalon një, pesë, tetë ose dhjetë drejtëza.

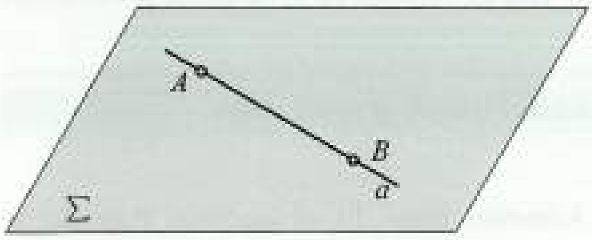
3) Le të jetë A pikë e çfarëdoshme . Tregoni se gjenden pikat B, C dhe D,ashtu që pikat A, B, C dhe D nuk i takojnë të njëjtit rrafsh.

4) Le të jenë A, B, C dhe D pika , ashtu që çdo tre prej tyre nuk janë kolineare, sa rrafshe përcaktojnë ato pika?

5) Le të jenë A, B, C, D dhe E pesë pikas , ashtu që çdo tre prej tyre nuk janë kolineare. Tregoni se ato përcaktojnë një , shtatë ose dhjetë rrafshe.

3 POZITA RECIPROKE E DREJTËZËS DHE RRAFSHIT DHE I DY RRAFSHEVE

Kujtohu!



- $A \in a$ dhe $A \in \Sigma$; $B \in a$ dhe $B \in \Sigma$.
- Si është pozita reciproke e drejtëzës a dhe rrafshit Σ?

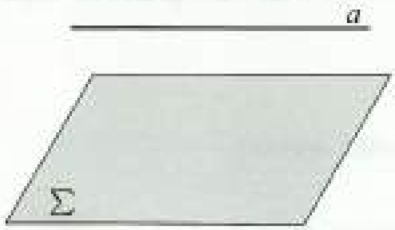
A Drejtëza dhe rrafshi janë bashkësi të ndryshme.

Nëse secila pikë X nga drejtëza a i takon edhe rrafshit Σ, atëherë themi se drejtëza a shtrihet në rrafshin Σ, ose rrafshi Σ kalon nëpër drejtëzën a.

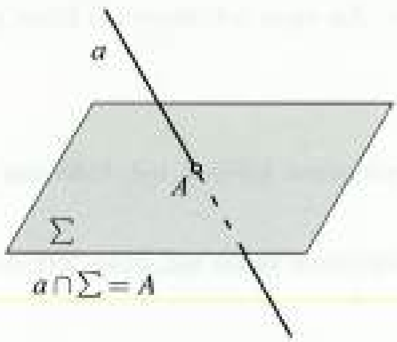
Aksioma 5. Nëse dy piak të drejtëzës a shtrihen në rrafsh Σ, atëherë edhe drejtëza a shtrihet në rrafshin Σ.

Sipas kësaj drejtëz a dhe rrafshi Σ mundet:

- ose të mos kenë pika të përbashkëta, d.m.th. $a \cap \Sigma = \varnothing$;
- ose të kenë një pikë të përbashkët, d.m.th. $a \cap \Sigma = \{A\}$;
- ose secila pikë e drejtëzës a të shtrihet në rrafsh , d.m.th. $a \cap \Sigma = a$.



$a \cap \Sigma = \varnothing$



$a \cap \Sigma = A$

$a \cap \Sigma = a$

Mbani mend!

Drejtëza a dhe rrafshi Σ që nuk kanë pika të përbashkëta , ose drejtëza a e cila shtrihet në rrafshin Σ janë paralele, d.m.th. $a \parallel \Sigma$.

Drejtëza a dhe rrafshi Σ që kanë pikë të përbashkët A priten, d.m.th. drejtëza a e depërton rrafshin Σ në pikën A.

Nga e njëjta aksiomë rrjedh:

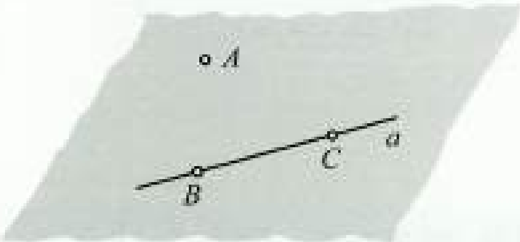
Teorema 5. Në secilin rrafsh Σ shtrihet së paku një drejtëzë.

Vërtetim. Sipas A3, në rrafshin Σ shtrihen së paku dy pika. Le të jenë ato pikat A dhe B.Sipas A2, nëpër pikat A dhe B kalon vetëm një pikë a. Pikat A dhe B shtrihen edhe në drejtëzën a edhe në rrafshin Σ, dhe sipas A5, drejtëza a shtrihet në rrafshin Σ.

Teorema 6. Nëse pika e cila nuk shtrihet në drejtëzën a, $A \notin a$, atëherë gjendet një dhe vetëm një rrafsh Σ i cili kalon nëpër pikën A dhe drejtëzën a.

Në teoremën e cila është formuluar në formën e ekuivalencës përfshihen dy teorema prej të cilave njërën e quajmë ***direkte***, kurse tjetrën ***kthyese të së parës***.

Vërtetim. Sipas A2, në drejtëzën a shtrihen së paku dy pika B dhe C. Pikat A, B dhe C nuk janë kolineare $A \notin a$, dhe sipas A4,ato përcaktojnë një rrafsh. Pra, nëpër pikën A dhe drejtëzën a



kalon së paku një rrafsh.

Le të jetë rrafshi Σ_1 i çfarëdoshëm ashtu që kalon nëpër pikën A dhe nëpër drejtëzën a. Meqë rrafshi Σ_1 kalon nëpër pikat A, B dhe C të cilat nuk janë kolineare, sipas A4, rrafshet Σ dhe Σ_1 puthiten.

$\mathscr{B}$ Nga T3 rrjedh:

Teorema 7. Gjenden së paku dy rrafshe të cilët kanë një drejtëzë të përbashkët.

Vërtetim. Sipas T3, në hapësirën $\mathbb{P}$ gjenden katër pika që nuk i takojnë të njëjtit rrafsh. Le të jenë pikat A,B,C dhe D. Sipas A4, rrafshi Σ_1 i përcaktuar me pikat A, B dhe C është i ndryshme nga rrafshi Σ_2 i përcaktuar me pikat A, B dhe D. Drejtëza AB, d.m.th. drejtëza a ka dy pika të përbashkëta me rrafshin Σ_1 dhe me rrafshin Σ_2, çka domethënë shtrihet në të dy rrafshet. Meqë rrafshi Σ_1 dhe Σ_2 janë të ndryshëm , sipas A4 ato nuk është e thënë të kenë pika tjera të përbashkëta , përveç pikave që shtrihen në drejtëzën a. Sipas kësaj , rrafshi Σ_1 dhe Σ_2 kanë drejtëzë të përbashkët d.m.th. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$.

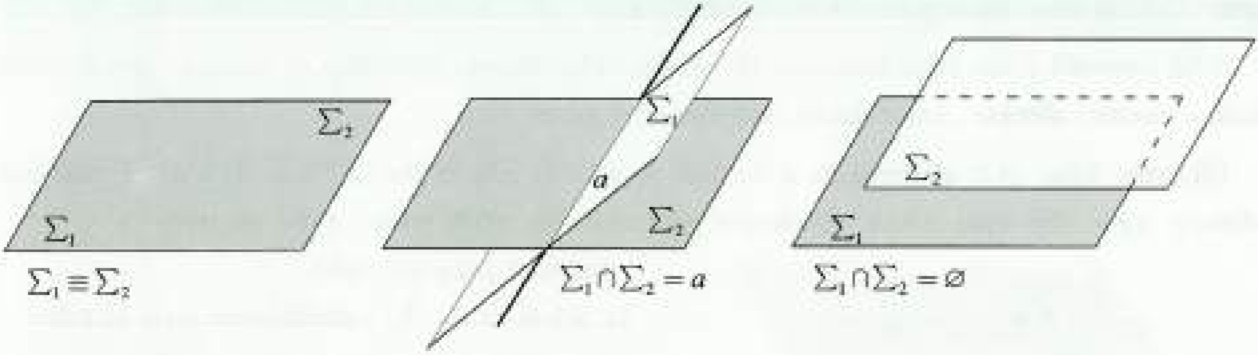
Për pozitën reciproke të dy rrafsheve është e vërtetë :

Aksioma 6. Nëse dy rrafshe kanë pikë të përbashkët , atëherë ato kanë së paku edhe një pikë tjetër të përbashkë.

-Sipas kësaj , dy rrafshe Σ_1 dhe Σ_2

- ose përputhen, d.m.th. $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$;
- ose kanë pikë të përbashkët, d.m.th. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$;
- ose nuk kanë pika të përbashkëta, d.m.th. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$.

Vëreni pozitën reciproke të dy rrafsheve në figurë.



Mbani mend!

Rrafshet Σ_1 dhe Σ_2 të cilët nuk kanë pika të përbashkëta janë paralele d.m.th. $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$.
Rrafshet të cilët kanë drejtëzë të përbashkët priten.

Detyra:

1. Në secilin rrafsh Σ shtrihet së paku një drejtëzë a dhe së paku një pikë A, ashtu që $A \notin a$. Vërteto!

2. Tregoni se për çdo rrafsh Σ gjendet së paku një drejtëzë a e cila e depërton rrafshin Σ .

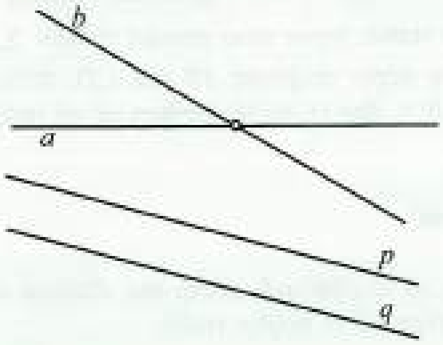
3. Tregoni se nëpër pikën A e cila shtrihet në rrafshin Σ kalojnë pafund shumë drejtëza që shtrihen në rrafshin Σ.

4. Le të jenë Σ_1 dhe Σ_2 dy rrafshe të ndryshëm $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing$. Tregoni se gjendet së paku një drejtëzë e cila i depërton të dy rrafshet.

5. Le të jetë a drejtëzë, kurse Σ ndonji rrafsh. A është e mundur $a \cap \Sigma = \Sigma$?

4 POZITA RECIPROKE E DY DREJTËZAVE

Kujtohu!



- Çfarë pozite reciproke kanë drejtëzat a dhe b?
- Në çfarë pozite reciproke janë drejtëzat p dhe q?

Dy drejtëza si bashkësi pikash mundet:
- të mos kenë asnjë pikë të përbashkët, d.m.th. $a \cap b = \varnothing$;
- të kenë vetëm një pikë të përbashkët, d.m.th. $a \cap b = \{A\}$;
- të kenë më shumë pika të përbashkëta, d.m.th. $a \cap b = \{A, B, C, ...\}$.

Pozita reciproke e dy drejtëzave jepet me anë të këtyre teoremave:

Teorema 8. Nëse dy drejtëza kanë së paku dy pika të përbashkëta, atëherë ato janë të njëjta si bashkësi pikash.

Vërtetim. Vërtetimi rrjedh nga A2.

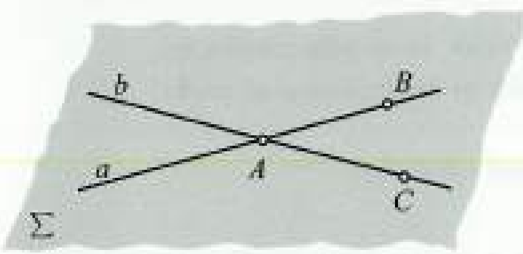
Teorema 9. Dy drejtëza të ndryshme nuk mund të kenë më shumë se një pikë të përbashkët.

Vërtetim. Nëse drejtëzat a dhe b kanë më shumë se një pikë të përbashkët, atëherë sipas T8 ato do të puthiten.

Pra, drejtëzat të cilat kanë një pikë të përbashkët priten.

Teorema 10. Dy drejtëza që priten, përcaktojnë një dhe vetëm një rrafsh.

Vërtetim. Drejtëzat a dhe b le të priten në pikën A. Sipas A2,në drejtëzën a përveç pikës A gjendet edhe pika B, kurse në drejtëzën b përveç pikës A gjendet edhe pika C.Pikat A, B dhe C janë jokolineare, dhe sipas A4 ato përcaktojnë vetëm një rrafsh. Nëse tani gjendet rrafshi Σ_1 i cili kalon nëpër pikat A, B i C, atëherë sipas A4, Σ_1 dhe rrafshi Σ janë e njëjta bashkësi d.m.th., d.m.th puthiten.



Vëreni!

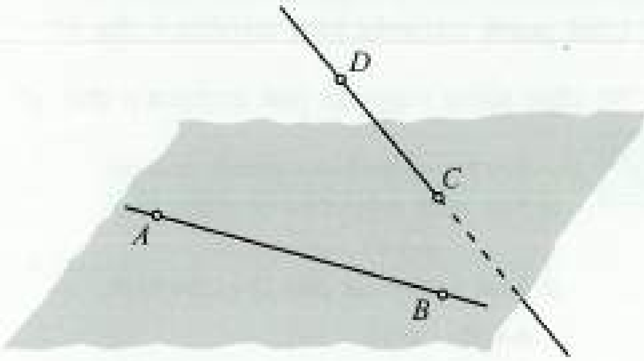
Drejtëzat që priten gjithmonë shtrihen në një rrafsh.

- Në çfarë pozite reciproke janë drejtëzat a dhe b, nëse $a \cap b = \varnothing$? A gjenden drejtëza të cilat nuk shtrihen në të njëjtin rrafsh?

Përgjigjen e puetjes do ta marrim nga:

Teorema 11. Ekzistojnë drejtëzat të cilat nuk shtrihen në të njëjtin rrafsh.

Vërtetim. Sipas T3, gjenden së paku katër pika A, B, C dhe D të cilat nuk i takojnë të njëjtit rrafsh.



Drejtëzat AB dhe CD me siguri nuk shtrihen në të njëjtin rrafsh, sepse nëse gjendet rrafshi Σ, i cili kalon nëpër drejtëzat AB dhe CD, atëherë pikat A, B, C dhe D do të shtrihen në atë rrafsh.

Vëreni!

Dy drejtëza të cilat nuk priten ose shtrihen ose nuk shtrihen në të njëjtin rrafsh.

Mbani mend!

Dy drejtëza të cilat nuk shtrihen në të njëjtin rrafsh janë ***drejtëza të kithta***.
Dy drejtëza a dhe b të cilat shtrihen në të njëjtin rrafsh dhe nuk kanë pika të përbashkëta quhen ***drejtëza paralele dhe i shënojmë me*** $a \parallel b$.
Drejtëzat të cilat puthiten janë drejtëza paralele, d.m.th. çdo drejtëzë është paralele me vetveten.

Vëreni!

Dy drejtëza ose priten ose janë paralele ose të kithta.

2 Nëpër secilën nga dy drejtëzat e kithta kalon së paku një rrafsh. A mundet ato rrafshe të:
a) priten; b) janë paralele; v) puthiten?

Detyra:

1. Sipas cilave teorema e aksioma është i përcaktuar një rrafsh: a) tre pika jokolineare; b) një drejtëzë dhe një pikë e cila nuk shtrihet në rrafsh b) dy drejtëzave që priten?

2. Tregoni se dy drejtëza të ndryshme paralele përcaktojnë një rrafsh.

3. Drejtëza a e depërton rrafshin Σ në pikën M. Drejtëza b shtrihet në rrafsh Σ, por nuk kalon nëpër pikën M. Caktoni pozitën reciproke të drejtëzave a dhe b.

4. Sa rrafshe janë përcaktuar me tre drejtëza të cilat kalojnë nëpër një pikë?

5. Sa rrafshe janë përcaktuar me një drejtëz dhe tre pikave kolineare prej të cilave asnjëra nuk i takon drejtëzës së dhënë?

5 KËNDI, VIJA E THYER, SHUMËKËNDËSHI

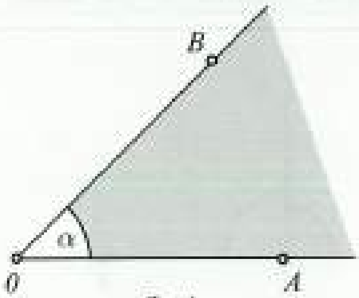


fig. 1

A Në figurën 1 janë tërhequr dy gjysmëdrejtëza me fillim të përbashkët.

- Cila figurë gjeometrike është paraqitur në figurë?
- Si quhen gjysmëdrejtëzat OA dhe OB ?
- Si quhet pika O ?

Mbani mend!

Figura gjeometrike e cila përbëhet prej dy gjusmëdrejtëzave me fillim të përbashkët dhe pjesa e rrafshit e kufizuar me ato dy gjysmëdrejtëza quhet ***kënd***.

Këndi shënohet me: $\measuredangle O$; $\measuredangle AOB$; $\measuredangle(a, b)$, ose me shkronja greke $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etj.,por ndonjëherë edhe me numra, $\measuredangle 1$, $\measuredangle 2$ etj.

Pjesa e rrafshit e cila është e kufizuar me krahër e këndit quhet pjesa e brendshme e këndit, kurse pjesa tjetër e rrafshit quhet pjesa e jashtme e këndit.

Këndi krahët e të cilit shtrihen në një drejtëzë quhet ***kënd i shtrirë***

Crte' 2

Këndet që kanë krahë të përbashkët, e nuk kanë pjesë të brendshme të përbashkët , quhen kënde *fqinj*.

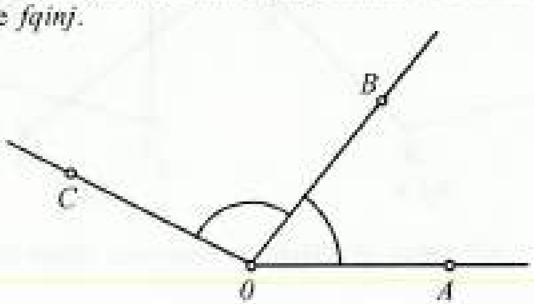


fig. 3

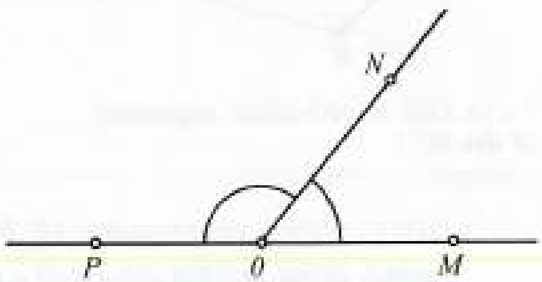


fig. 4

Këndet AOB dhe BOC janë kënde fqinj, kurse këndet MON dhe NOP formojnë kënd të shtrirë..

Mbani mend!

Dy kënde fqinj të cilët formojnë kënd të shtrirë quhen *kënde shtuese*.

Shuma e dy këndeve shtuese është 180^0.

Këndi i cili është i barabartë me këdin shtues quhet kënd i ***drejtë***.

Teorema 12. Të gjitha këndet e drejta janë të barabartë mes veti.

Vërteim. Çdo dy kënde shtuese plotësohen deri te këndi i shtrirë. Sipas përkufizimit për këndin e drejtë, d.m.th. dy kënde shtues të barabartë janë të drejtë, pra, këndet e drejta plotësohen deri në kënd të shtrirë.

Meqë të gjitha këndet e shtrira janë të barabarta mes veti (kanë nga 180^0), rrjedh se këndet e drejta janë të barabartë mes veti dhe kanë nga 90^0, figura djathtas.

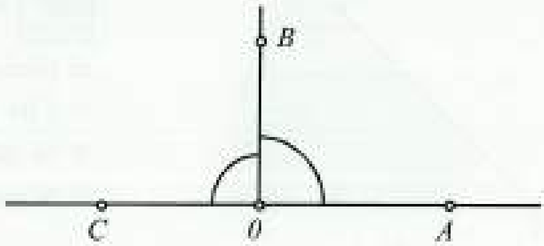


fig. 5

Mbani mend!

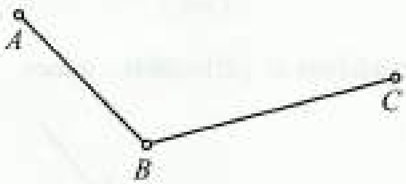
Këndi i cili është më i vogël se këndi i drejtë quhet ***kënd i ngushtë***.
Këndi i cili është më i madh se këndi i drejtë , por më i vogël se këndi i shtrirë quhet ***kënd i gjërë***.

Dy kënde shuma e të cilëve është 180^0 quhen kënde ***suplementarë***.

Dy kënde shuma e të cilëve është 90^0 quhen ***kënde komplementarë***.
Këndet shtuese janë kënde suplementarë, por dy kënde suplementarë nuk është e thënë të jenë shtues.

Kujtohu!

- Çka është segmenti?



- Çka kanë të përbashkët segmentet AB dhe BC ?

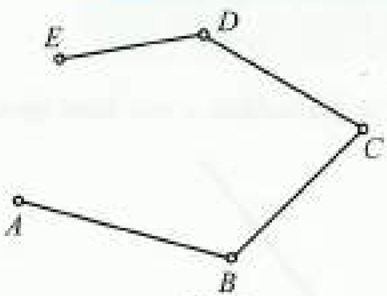


fig. 6

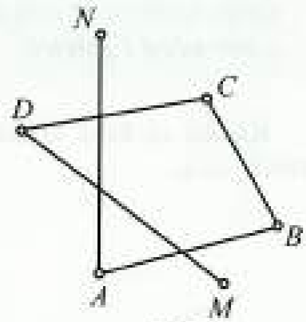


fig. 7

- Figura e përbërë nga segmentet AB, BC, CD, ..., NP, ashtu që cilëtdo dy segmente fqinjë të mos shtrihen në një drejtëzë quhet ***vijë e thyer***.
- Pikat A, B, C, D, ... quhen ***kulme***, kurse segmentet AB, BC, CD, ... brinjë të vijës së thyer.

- Vija e thyer është e ***mbyllur***, nëse pikat e skajshme përputhen.
- Vija e thyer është e ***hapur***, nëse pikat e skajshme nuk puthiten.
- Shuma e brinjëve te vija e thyer quhet ***perimetër i*** vijës së thyer, d.m.th.,

$$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + ...$$

Vija e thyer e mbyllur e cila nuk ka brinjë jofqinje që priten quhet ***vijë poligonale***.

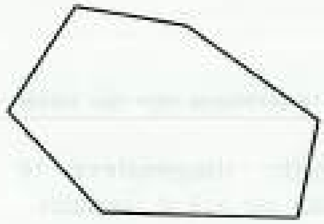


fig. 8

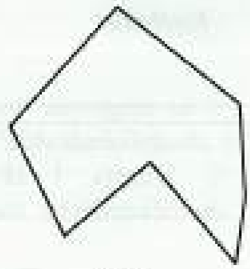


fig. 9

1 Në fig. 6, 7, 8 dhe 9 janë dhënë vija të thyera. Cila prej tyre është e mbyllur e cila poligonale?

C

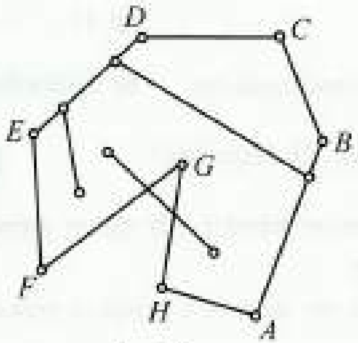


fig. 10

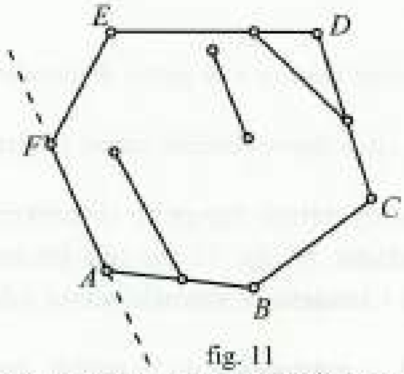


fig. 11

Pjesa e rrafshit e kufizuar me vijën e thyer të mbyllur quhet ***pjesë e brendshme*** kurse pjesa tjetër quhet ***pjesë e jashtme*** .

Vija poligonale bashkë me pjesën e brendshme paraqet figurë gjeometrike.

Mbani mend!

Figura gjeometrike e përbërë nga një vijë poligonale dhe pjesën e brendshme të saj quhet ***shumëkëndësh***.

Në çdo shumëkëndësh numri i brinjëve është i barabartë me numrin e kulmeve,e sipas këtij numri kemi shumëkëndësha të ndryshëm si p.sh. : ***trekëndësh, katërkëndësh, peskëndësh*** etj.
Nëse gjatësitë e brinjëve të shumëkëndëshit janë $a, b, c, d, ..., g$, atëherë perimetri i tij është

Vëreni!

$$P = a + bc + d + ... + g$$

Në fig. 11 të gjitha pikat e segmenteve skajet e të cilëve shtrihen në shumëkëndësh janë pika të atij shumëkëndëshi . Shumëkëndëshi i tillë quhet ***shumëkëndësh konveks***.

2 Në fig 8, 9, 10 dhe 11 janë dhënë shumëkëndësha. Cili prej tyre është konveks?

Në vazhdim do të bëjmë fjalë vetëm për shumëkëndëshat konveks.
Segmenti skajet e të cilit janë dy kulme jo fqinj të shumëkëndëshit qyhet ***diagonale e shumëkëndëshit***.

Kujtohu!

Sa diagonale mund të tërhiqen nga një kulm i shumëkëndëshit?

Numri i të gjitha diagonaleve të shumëkëndëshit caktohet me anë të formulës .

$$D_n = \frac{1}{2}n(n-3) .$$

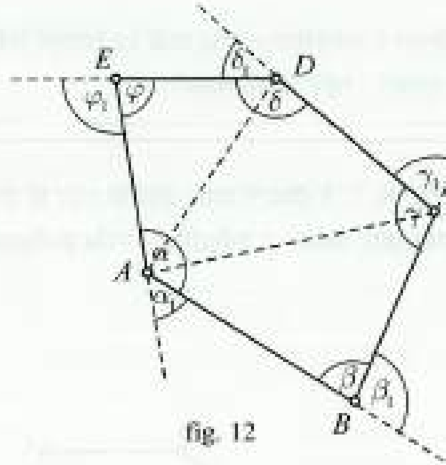


fig. 12

3 Caktoni numrin e të gjitha diagonaleve te : a) tetëkëndëshi; b) dymbëdhjetëkëndëshi.

4 Në cilin shumëkëndësh mund të tërhiqen saktësisht 35 diagonale?

Secilat dy brinjë fqinje të shumëkëndëshit formojnë kënd i cili quhet ***kënd i brendshëm*** i shumëkëndëshit. Në fig. 12 ato janë këndet: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$.

Numri i këndeve te shumëkëndëshi është i barabartë me numrin e brinjëve përkatësisht kulmeve.

Në sa trekëndësha do të ndahet shumëkëndëshi nëse tërhiqen të gjitha diagonalet nga një kulm i tij?

Shuma e këndeve të brendshme të një shumëkëndëshi llogaritet me formulën:

$$S_n = (n-2) \cdot 180^0 .$$

5 Caktoni shumën e këndeve të brendshem të : a) tetëkëndëshit; b) dhjetëkëndëshit.

Secili kënd i cili është shtues me këndin e brendshëm të trekëndëshit quhet *kën i jashtëm* i shumëkëndëshit . Në fig. 12 ashtu janë këndet: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varphi_1$.

Shuma e të gjitha këndeve të jashtme të shumëkëndëshit njehsohet me formulën:

$$n \cdot 180^0 - S_n = n \cdot 180^0 - (n-2) \cdot 180^0 = 360^0 .$$

Detyra:

1. Vizato dy kënde α dhe β , e pastaj vizato kënd: a) $\gamma = 2\alpha + \beta$; b) $\delta = 3\alpha - 2\beta$.
2. Është dhënë këndi $\alpha = 75^0$. Caktoni këndin e tij suplementarë dhe komplementarë.
3. Ndryshimi i dy këndeve shtuese është kënd i drejtë. Cakto ato kënde.
4. Nëse tërhiqet drejtëzë nëpër cilëtdo dy kulme fqinj të një shumëkëndëshi konveks , atëherë i tërë shumëkëndëshi shtrihet në të njëjtën anë të asaj drejtëze . A vlen e njëjta edhe për shumëkëndëshat të cilët nuk janë konveks?
5. Vija e thyer e mbyllur e përbërë prej tre brinjëve gjithmonë shtrihet në një rrafsh. Pse?
6. A ekziston shumëkëndëshi i cili ka aq diagonale sa edhe brinjë?

6 VIJA RRETHORE , RRETHI

Kujtohu!

- Çka është vija rrethore?
- Është dhënë vija rrethore $k(o,r)$.

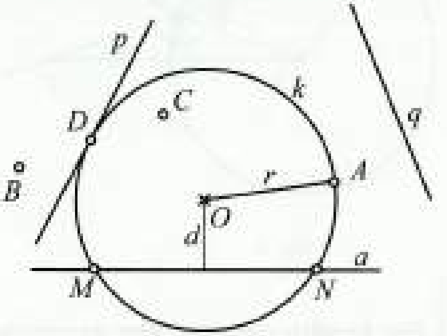


fig. 1

Caktoni vlerën e vërtetësisë për gjykimet:

a) $A \in k$; b) $B \notin k$; c) $C \in k$;

d) $a \cap k = \varnothing$; e) $p \cap k = \{D\}$; f) $q \cap k = \varnothing$.

A Bashkësia e të gjitha pikave në rrafsh të cilat janë njëlloj të largara nga një pikë fikse quhet ***vijë rrethore***.

Vijën rrethore me qendër në O dhe rreze r e shënojmë $k(O,r)$.

Vija rrethore e ndan rrafshin në dy pjesë, pjesën e brendshme dhe pjesën e jashtme.

Figura gjeometrike e cila është e përbërë nga vija rrethore dhe nga pjesa e brendshme e sajë quhet ***rreth***.

Largesën prej secilës pikë ose drejtëze prej qendrës së rrethit e quajmë largesë qendrore të cilë e shënojmë me d.

1 Le të jetë M pikë e cila shtrihet në rrafshin e vijës rrethore. Caktoni pozitën reciproke të pikës M në lidhje me vijën rrethore, nëse : $d > r, d = r, d < r$.

2 Le të jetë a drejtëzë e cila shtrihet në rrafshin e një vije rrethore. Caktoni pozitën e asaj drejtëze në lidhje me atë vijë rrethore, nëse: $d > r, d = r, d < r$.

- Drejtëza e cila ka dy pika të përbashkëta me vijën rrethore quhet ***sekantë***.
- Drejtëza e cila kalon nëpër një pikë A të vijës rrethore $k(O,r)$ quhet ***tangjentë*** e vijës rrethore.
- Tangjenta është normale në rrezen e vijës rrethore.

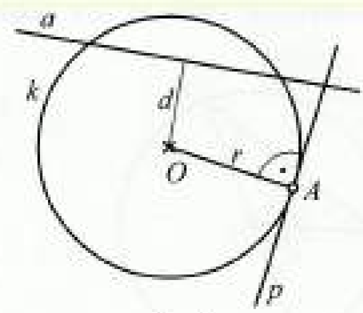


fig. 2

Teoremë 13. Një sekantë nuk numd të ketë më shumë se dy pika të përbashkët me vijë rrethore.

Vertetim. Të supozojmë se sekanta a ka tre pika të përbashkëta A, B dhe C me vijën rrethore $k(O,r)$, fig. 3.

Nga supozimi rrjedh se $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=r$, dhe trekëndëshat OAB, OAC dhe OBC janë barakrahës. Prej ku rrjedh se $\alpha=\beta_1$, $\alpha=\gamma$ i $\beta_2=\gamma$, d.m.th. $\beta_1=\beta_2$. Këndet β_1 dhe β_2 janë shtues, e sipas përkufizimit të këndit të drejtë, rrjedh se $\beta_1=\beta_2=90^0$, e kjo merr me vete se edhe $\alpha=\gamma=90^0$. Mirëpo në një trekëndësh nuk mund të ketë dy kënde të drejta. Pse? Për këtë arsye supozimi nuk është i vërtetë, d.m.th. teorema është e vërtetë.

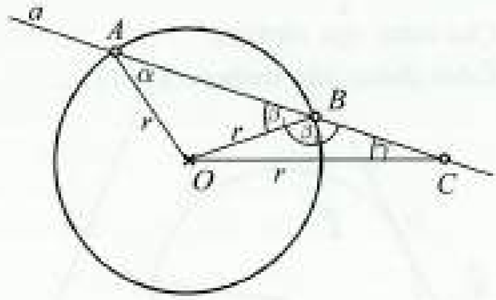


fig. 3

Kujtohu!

- Si quhet këndi α, e si këndi β?

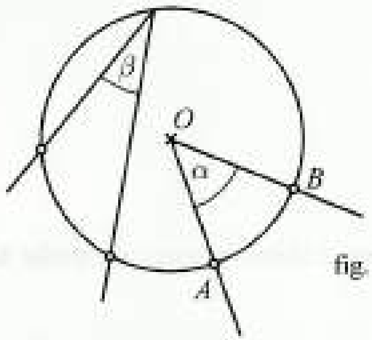


fig. 4

- Si janë dy kënde qëndrore të cilët u përgjigjen dy këndeve të njëjtë periferik?
A vlen edhe e anasjellta?

Për këndin qëndror dhe periferik të ndërtuar mbi të njëjtin hark te e njëjta vijë rrethore vlen:

Teoremë 14. Çdo kënd periferik është sa gjysma e këndit qëndror në të njëjtën vijë rrethore.

Vërtetim. Në vërtetimin e teoremës do të dallojmë tre raste fig 5, varësisht prej asaj a ndodhet qendra e vijës rrethore në pjesën e brendshme, në krah apo në pjesën e jashtme të këndit periferik.

Do ta vërtetojmë rastin b), kur qendra e rrethit ndodhet në pjesën e brendshme të këndit periferik.

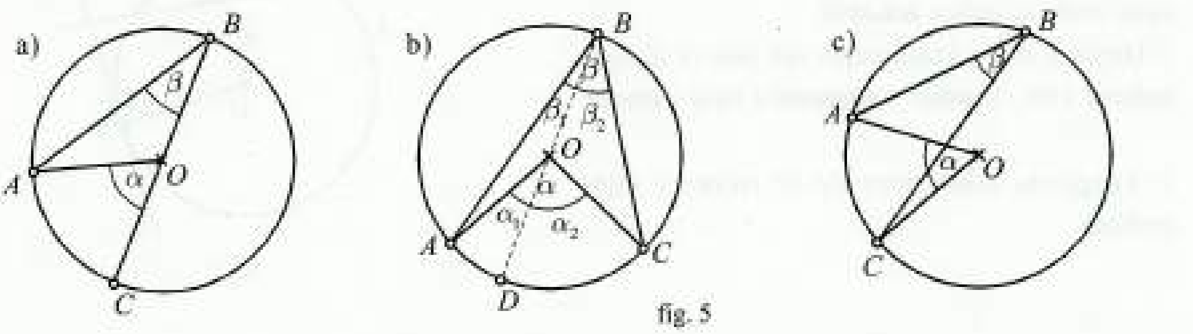


fig. 5

Meqë $\overline{OA}=\overline{OB}=r$ dhe $\overline{OC}=\overline{OB}=r$, rrjedh se trekëndëshat AOB dhe COB janë barakrahës me baza AB dhe CB, pra $\beta_1=\measuredangle BAO$ dhe $\beta_2=\measuredangle BCO$. Prej ku kemi, $\alpha_1=2\beta_1$ dhe $\alpha_2=2\beta_2$, si kënde të jashtëm të trekëndëshit. Sipas kësaj:

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2=2\beta_1+2\beta_2=2(\beta_1+\beta_2)=2\beta,\ \text{d.m.th. } \beta=\frac{1}{2}\alpha.$$

Rastet nën a) dhe b) vërtetoni vetë.

Nga teorema rrjedh:

- ***Të gjitha këndet periferike të ndërtuar mbi të njëjtin hark të vijës rrethore janë të njëjtë.***
- ***Secili kënd periferik i ndërtuar mbi diametrin e vijës rrethore është i drejtë.***
- Me cilin emër është i njohur pohimi i fundit?

Katërkëndëshi, brinjët e të cilit janë tetiva të vijës rrethore quhet ***katërkëndësh tetivial.***

3 Vërtetoni pohimin: Këndet e përballta te katërkëndëshi tetivial janë kënde suplementarë.

Udhëzim: Caktoni këndin prej ku shihet diagonalja e kulmeve të katërkëndëshit të cilat nuk i takojnë asaj diagonale.

4 Le të jetë S pikë ku priten dy tetiva të vijës rrethore.

a) Nëse pika S shtrihet në vijën rrethore, atëherë $\measuredangle ASD=\frac{1}{2}(\measuredangle AOB+\measuredangle BOC)$.

b) Nëse pika S është në pjesën e jashtme të vijës rrethore, atëherë

$\measuredangle ASD=\frac{1}{2}(\measuredangle AOB-\measuredangle DOC)$. Vërteto

Vërtetim: a) Nga T14 rrjedh:

$\measuredangle ABD=\frac{1}{2}\measuredangle AOD$ dhe $\measuredangle BDC=\frac{1}{2}\measuredangle BOC$.

Këndi ASD i jashtëm për trekëndëshin BSD, pra

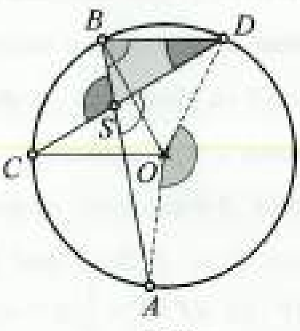


fig. 6

$$\measuredangle ASD=\measuredangle ABD+\measuredangle BDC=$$
$$=\frac{1}{2}\measuredangle AOD+\frac{1}{2}\measuredangle BOC=$$
$$=\frac{1}{2}(\measuredangle AOD+\measuredangle BOC),\ \text{fig. 6.}$$

b) Vërtetimin bëni vetë.

Teoremë 15. Këndi mes tetivës së vijës rrethore dhe tangjentes të tërhequr në ndonjërën nga pikat e skajshme të tetivës , është i barabartë me këndin periferik i cili i përgjigjet asaj tetive.

Vërtetim. Tangjentja t dhe tetiva AB formojnë dy kënde , njëri është i gjërë, kurse tjetri i ngushtë (fig. 7). Vërtetimin do ta bëjmë për këndin e ngushtë.

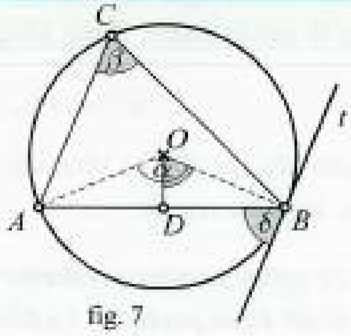


fig. 7

Trekëndëshi AOB është barakrahës$\left(\overline{AO}=\overline{OB}=r\right)$. Le të jetë OD lartësia e trekëndëshit AOB e tërhequr në brinjën AB.

Nga $\measuredangle DOB=\frac{1}{2}\alpha=\delta$ (kënde me krah normal) dhe $\beta=\frac{1}{2}\alpha$, rrjedh se $\beta=\delta$.

Le të jenë $k_1(O_1,r_1)$ dhe $k_2(O_2,r_2)$, $r_1<r_2$ dy vija rrethore. Largesa $d=\overline{O_1O_2}$ quhet largesë qëndrore e vijave rrethore k_1 dhe k_2.

Mbani mend!

1. Nëse $d>r_1+r_2$ ose $d<r_2-r_1$, atëherë ato dy vija rrethore nuk kanë pika të përbashkëta d.m.th njëra vijë rrethore është në pjesën e jashtme të tjetrës ose në pjesën e brendshme të tjetrës përkatësisht.
2. Nëse $d=r_1+r_2$ ose $d=r_2-r_1$, atëherë vijat rrethore kanë një pikë të përbashkët d.m.th vijat rrethore preken nga jashtë ose nga brenda në një pikë.
3. Nëse $r_2-r_1<d<r_1+r_2$, atëherë vijat rrethore kanë dy pika të përbashkëta d.m.th. ato priten.
4. Nëse $O_1=O_2$, ato dy vija rrethore janë koncentrike.

Këto pohime vërtetoni me konstruktimin e vizatimeve përkatëse.

Detyrë:

1 Nëse AB dhe CD janë diametra të një vije rrethore të njëjtë, atëherë $\overline{AC}=\overline{BD}$ dhe $AC\parallel BD$. Vërteto!

2 Vërtetoni se simetralja e secilës tetivë kalon nëpër qendrën e vijës rrethore.

3 Një tetivë ka gjatësi 16 cm dhe nga qendra e vijës rrethore është e larguar 15 cm. Caktoni rrezen e vijës rrethore.

4 Nga pika A e cila është në pjesën e jashtme të vijës rrethore $k(O,r)$, janë tërhequr dy tangjente në vijën rrethore. Nëse P dhe T janë pikat prekëse të tangjentave dhe vijës rrethore , tregoni se :
a) $\overline{AP}=\overline{AT}$; b) $\measuredangle PAT=\frac{1}{2}|\alpha_1-\alpha_2|$, ku α_1 dhe α_2 janë këndet qëndrore të cilët u përgjigjen harqeve të vijës rrethore të cilat shtrihen mes pikave prekëse të tangjentës dhe vijës rrethore.

5 Një katërkëndësh quhet tangjencial nëse brinjët e tij janë tangjente të një vije rrethore. Tregoni se shumat e brinjëve të përballta te trekëndëshi tangjencial janë të barabarta.

7 VEKTORË, VEKTORË KOLINEARË, VEKTORË TË BARABARTË

Kujtohu!

Pikat A dhe B janë pikat e skajshme të segmentit AB.

Cili nga pohimet është i vërtetë?

a) AB dhe BA janë shënime për të njëtin sement;

b) $\overline{AB} = \overline{BA}$; c) $\{A, B\} = \{B, A\}$;

d) $(A, B) = (B, A)$.

Çka është vektor?

Mbani mend!

Segmentet e orjentuar quhen ***vektorë***.
Në vizatim vektorët paraqiten si segment me shigjetë.

A Vëreni se shënimet AB dhe BA paraqesin të njëjtën bashkësi , d.m.th. të njëjtin segment.
Segmeti te i cili njëra pikë merret si pikë e fillimit kurse tjetra si pikë e mbarimit quhet ***segment i orjentuar***, fig. 1.

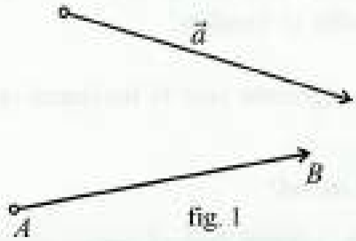


fig. 1

Shigjeta e përcakton kahjen e vektorit prej fillimit kah mbarimi. Vektori shënohet me $\overrightarrow{AB}$ ose $\vec{a}$.

Gjatësia e segmentit AB quhet ***gjatësi e vektorit*** $\overrightarrow{AB}$ dhe shënohet me $|\overrightarrow{AB}|$, d.m.th. $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$.

Nëse vektori shënohet me $\vec{a}$, atëherë intenziteti i tij do të jetë $|\vec{a}|$ ose vetëm a.

1 Në rrafsh janë dhënë tre pika të ndryshme A, B dhe C. Sa vektorë gjithsej mund të formohen me pikat e dhëna? Sa segmente gjithsej mund të fitohen prej atyre pikave?

Kujtohu!

Me sa pika është e përcaktuar drejtëza?

Kur themi se drejtëzat a dhe b janë paralele?

Drejtëza a shtrihet në rrafshin Σ .Sa drejtëza shtrihen në atë rrafsh që janë paralele me drejtëzën a?

B Bashkësia e të gjitha drejtëzave paralele të cilat shtrihen në një rrafsh paraqesin një drejtim në atë rrafsh.
Secila drejtëzë e asaj bashkësie merret si përfaqësuese e atij drejtimi.

Nëse pikat A dhe B janë të ndrysme , atëherë ato paraqein vetëm një drejtëzë, d.m.th është përcaktuar drejtimi p.

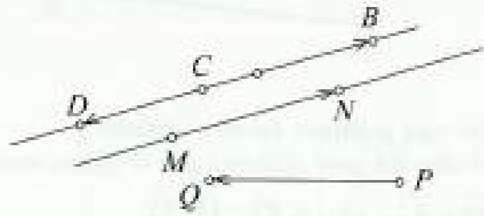
Për vektorin $\overline{AB}$ themi se shtrihet në drejtëzën p.

Mbani mend!

Vektorët të cilët shtrihen në të njëjtën drejtëzë ose në drejtëza të ndryshme paralele quhen ***vektorë kolinearë*** ose vektorë të cilët kanë një drejtim.
Vektorët të cilët nuk janë kolinearë quhen ***vektorë jokolinearë***.

2 Cilët vektorë janë paraqitur në fig. 2?

- Cilët vektorë janë kolinearë dhe cilët jokolinearë?
- Cilët vektorë janë të një kahje , e cilët kanë kahje të kundërt?



Crte' 2

C Dy segmente janë të barabartë (puthitshëm) nëse kanë gjatësi të njëjtë , pa marë parasysh pozitën e tyre .

Mbani mend!

Dy vektorë janë të barabartë nëse kanë gjatësi drejtim dhe kahje të njëjtë.

Vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ të dhëna në fig 3 a) janë të barabartë dhe i shënojmë $\vec{a}=\vec{b}$.

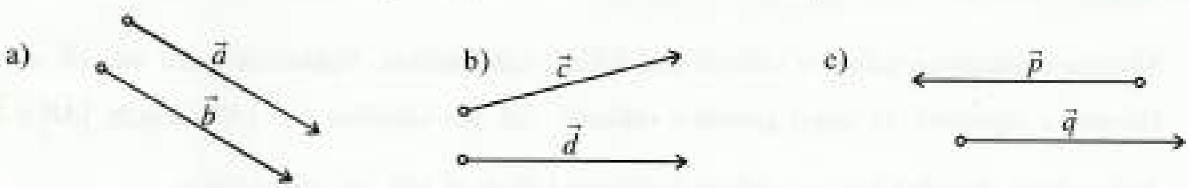


fig. 3

Vektorët të dhënë në fig. 3 b) dhe c) nuk janë të barabartë. Pse?

5 Cilët vektorë në fig. 3 janë të një kahjeje , e cilët me kahje të kundërt?
A mundet dy vektorë jokolinearë të jenë të barabartë?

6 Vizatoni dy vektorë kolinearë. Vektorët të cilët kanë gjatësi të njëjtë kanë:
a) kahje të njëjtë; b) kahje të kundërt.

7 Në brinjët e rombit $ABCD$, fig. 4, janë shënuar vektorët: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{AD}$.

- Cilët vektorë janë të barabartë?
- Cilët vektorë janë me kahje të kundërt?

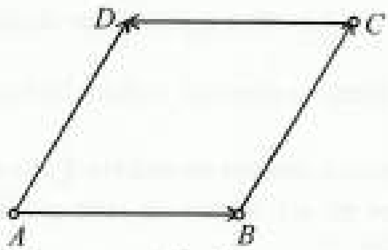


fig. 4

Vëreni!

Vektorët $\overline{AB}$ dhe $\overline{CD}$ kanë gjatësi të njëjtë $\overline{AB} = \overline{CD}$,kanë drejtim të njëjtë $AB \parallel CD$, por përsëri nuk janë të barabartë. Kajhet e tyre janë të kundërta.

Mbani mend!

Vektorët që kanë gjatësi të njëjtë , drejtim të njëjtë kurse kahje të kundërt quhen ***vektor të kundërt***.

Vektorin e kundërt me vektorin $\vec{a}$ e shënojmë me $-\vec{a}$, fig. 5.

fig. 5

Vektorët $\overline{AB}$ dhe $\overline{CD}$ në fig. 4 janë të kundërt, d.m.th.

$$\overline{AB} = -\overline{CD}.$$

8 Nëpër pikën e dhënë A e cila nuk shtrihet në drejtëzën e dhënë a, vizato drejtëzë p ashtu që të jetë paralele me drejtëzën a.

Vëreni zgjidhjen:

Në drejtëzën a zgjedhim dy pika të çfarëdoshme M dhe N. Pika B nëpër të cilën kalon drejtëza p, e caktojmë si kulm të katërt të katërkëndëshit $AMNB$, fig. 6.

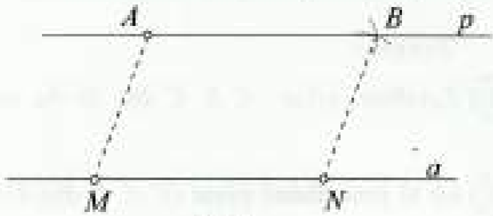


fig. 6

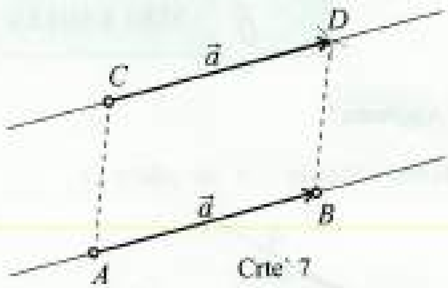
Drejtëza e kërkuar p është e vetme, sipas aksiomës së paralelevet,e cila thotë:

Aksioma 7. Nëpër pikën e dhënë , e cila nuk shtrihet në drejtëzën e dhënë , kalon një dhe vetëm një drejtëzë e cila është paralele me drejtëzën e dhënë.

9 Është dhënë vektori $\vec{a} = \overline{AB}$ dhe pika e çfarëdoshme C. Konstrukto vektor $\overline{CD}$ i cili është i barabartë me vektorin e dhënë .

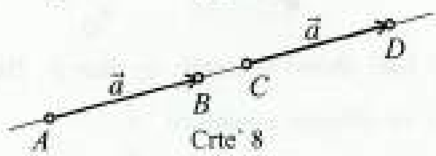
a) Nëse pika $C \notin AB$, atëherë zgjidhja është e njëjtë sikurse në detyrën para kësaj, fig. 7, d.m.th. $\overline{AB} = \overline{CD}$.

b) Nëse pika $C \in AB$, atëherë zgjidhja është në fig.8, $\overline{CD} = \overline{AB}$.



Crte` 7

Konstruktimi i vektorit $\overline{CD} = \vec{a}$ quhet bartje e vektorit $\vec{a}$ në pikën C.



Crte` 8

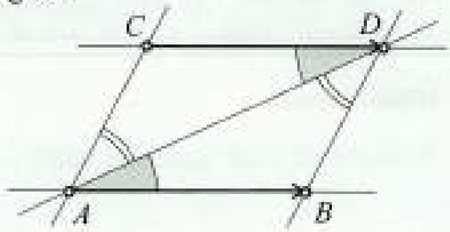
- Është dhënë vektori $\vec{a}$. Sa vektorë mund të konstruktohen ashtu që të jenë të njëjtë me vektorin e dhënë?

Duke e zgjidhur detyrën 8, mund të tregojmë se vlen:

Nëse katërkëndëshi $AMNB$ është paralelogram atëherë vektorët $\overline{AB}$ dhe $\overline{MN}$ janë të barabartë, d.m.th. $\overline{AB} = \overline{MN}$.

Vërtetimi i këtij pohimi rrjedh direkt nga përkufizimi i vektorëve të barabartë.

10 A vlenë edhe pohimi i kundërt, d.m.th. nëse vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{CD}$ janë të njëjtë dhe nuk shtrihen në të njëjtën drejtëz, atëherë katërkëndëshi $ABDC$ është paralelogram.



Vëreni zgjidhjen:
Nga $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ rrjedh: $\overline{AB}=\overline{CD}$ dhe $AB \parallel CD$, d.m.th. $\measuredangle BAD=\measuredangle CDA$. Sipas rregullës BKB, $\Delta ABD \cong \Delta ADC$. Nga kongruenca e trekëndëshave rrjedh se $\measuredangle CAD=\measuredangle BDA$, kurse meqë ato janë alternativë në tranzverzalen AD, rrjedh se drejtëzat AC dhe BD janë paralele. Pra, katërkëndëshi $ABDC$ është paralelogram.

Më këtë është vërtetuar koj:

Teoremë 16. Dy vektorë $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{CD}$, të cilët nuk shtrihen në të njëjtën drejtëzë, janë të barabartë nëse dhe vetëm nëse katërkëndëshi ABDC është paralelogram.

Detyra:

1. Zgjidhni pikat A, B, C dhe D. Sa vektorë dhe sa segmente mund të formohen prej atyre pikave?

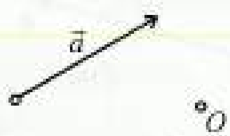
2. Le të jenë dhënë pikat O, A, B dhe C. Bartni vektorët $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$ dhe $\overrightarrow{CA}$ me fillim në pikën O.

3. Le të jetë $ABCD$ paralelogram dhe S pikprerja e diagonaleve të tij. Caktoni cilët nga dyshet vektorë janë të barabartë, cilët kolinearë e cilët nuk janë të barabartë:
   a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$; c) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$; d) $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}$; e) $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CS}$.

8 MBLEDHJA DHE ZBRITJA E VEKTORËVE

Kujtohu!

- Bartni vektorin $\vec{a}$ në pikën O.



- Janë dhënë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Barte vektorin $\vec{b}$ në fillimin e vektorit $\vec{a}$.

- Cilat veti vlejnë për mbledhjen e numrave realë?

A **1** Në të njëjtin rrafsh janë dhënë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ dhe pika O. Konstruktoni vektorët $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ dhe $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$.

Vëreni zgjidhjen:

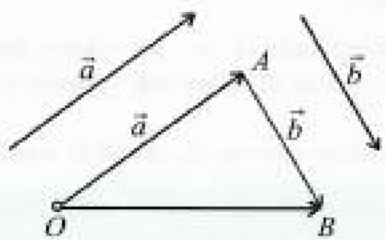


fig. 1

Vektori $\overrightarrow{OB}$ quhet shumë e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, d.m.th. $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$.

Shuma është fituar me lidhjen e vektorëve, d.m.th. në vektorin $\vec{a}$ është lidhur vektori $\vec{b}$.

Ky barazim quhet ***rregulla e tre pikave***, d.m.th. nëse A, B dhe C janë tre pika në rrafsh, atëherë, vlenë barazimi $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, fig. 2.

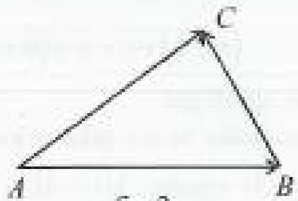


fig. 2

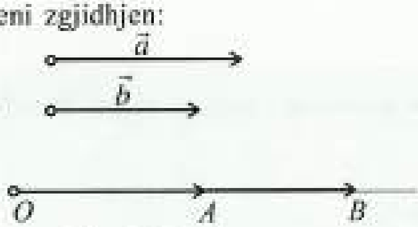
Mbani mend!

Shuma e dy vektorëve të lidhur është vektori i cili fillon në fillimin e vektorit të parë dhe mbaron në mbarimin e vektorit të dytë.

2 Gjeni shumën e dy vektorëve: a) me kahje të njëjtë; b) me kahje të kundërt.

Vëreni zgjidhjen:

a)

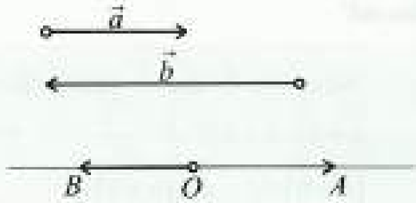


$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{x}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{x}+\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$.

b)



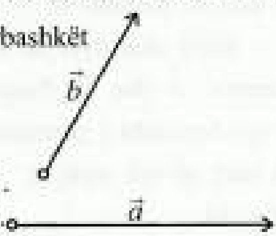
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$.

Vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{BA}$ janë vektorë të kundërt , dhe sipas rregullës së tre pikave kemi: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$. Vektori $\overrightarrow{AA}$ paraqet një pikë . Sipas përkufizimit të vektorit , $\overrightarrow{AA}$ nuk është vektor. Por në praktikë ky vektorë është treguar i përdorshëm dhe për këtë arsye $\overrightarrow{AA}$ llogaritet si "segment " i orientuar me gjatësi zero. Sipas kësaj , $\overrightarrow{AA}$ është vektor , fillimi dhe mbarimi i të cilit puthiten dhe quhet ***zero vektor*** të cilin e shënojmë $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. Intenziteti i zero vektorit është zero , d.m.th. $|\overrightarrow{AA}|=0$. Pra, shuma e dy vektorëve të kundërt është zero vektor, d.m.th. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$. Nëse $\vec{a}$ është cilido vektor, atëherë vlen barazimi $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$. Zero vektori është kolinearë me secilin vektor.

3 Janë dhënë vektorët jokolinearë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Caktoni shumën $\vec{a}+\vec{b}$ dhe $\vec{b}+\vec{a}$.

Vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ i bartim me fillim të përbashkët në pikën A, ashtu që $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.
Figura $ABCD$ është paralelogram (T16), pra
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$, d.m.th. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
E njëjta rregull vlen edhe për vektorë kolinearë.



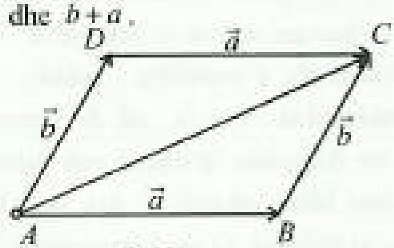


fig. 3

4 Është dhënë katërkëndëshi $ABCD$, fig. 4.Le të jetë $\overline{AB}=\vec{a}$; $\overline{BC}=\vec{b}$; $\overline{CD}=\vec{c}$; $\overline{AD}=\vec{d}$. Tregoni se

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$$

Vëreni zgjidhjen:

Sipas rregullës së tre pikave kemi:

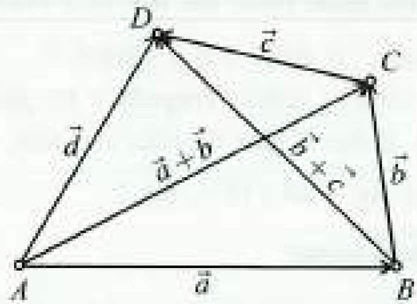
Nga ΔACD rrjedh: $\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}$,

sipas $\overline{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ dhe $\overline{CD}=\vec{c}$ fitojmë

$\overline{AD}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$.

Nga ΔABD rrjedh $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}$, meqë $\overline{AB}=\vec{a}$ dhe $\overline{BD}=\vec{b}+\vec{c}$ fitojmë $\overline{AD}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Prej nga



Crte` 4

Mbani mend!

Nëse $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$ janë vektorë të çfarëdoshëm kolineare , atëherë vlejnë barazimet

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ .... vetia komutative;

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ .... Vetia asociative.

Vetia asociative na mundëson të caktojmë shumën e më shumë se dy vektorëve duke i lidhur njërin pas tjetrit.

5 Caktoni shumën e vektorëve të dhënë në fig. 5.

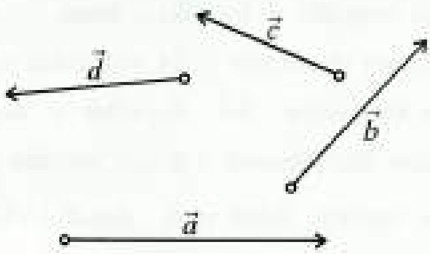


fig. 5

Vëreni zgjidhjen:

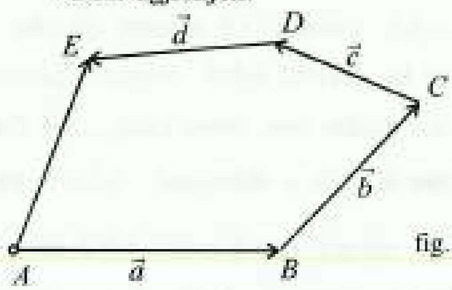


fig. 6

$$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}.$$

Sipas rregullës së paralelogramit (fig.7), vektori $\vec{c}$ paraqet shumë të vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Mundet të thuhet dhe e anasjellta , vektori $\vec{c}$ është zbërthyer në dy mbledhësa , d.m.th. në dy komponenta $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Paralelogrami me diagonale të dhënë nuk është njëvlerësisht i përcaktuar, sipas kësaj vektori $\vec{c}$ nuk mundet vetë në një mënyrë të zbërthehet në dy komponenta (fig. 8).

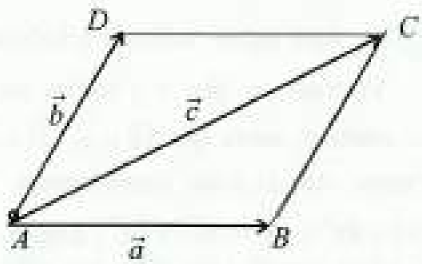


fig. 7

Nëse është dhënë vektori $\vec{c}$ dhe një komponentë e tij $\vec{a}$, atëherë komponenta e dytë $\vec{b}$ mundet të caktohet në mënyrë të njëvlerëshme, fig. 9.

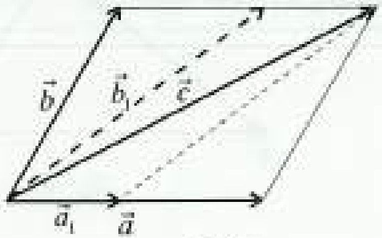


fig. 8

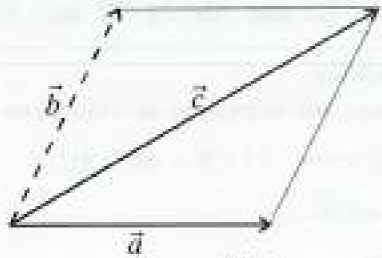
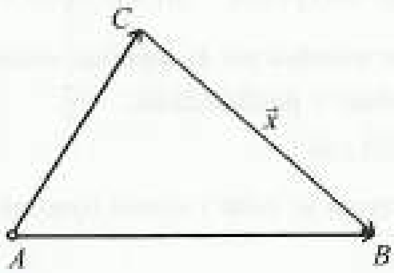


fig. 9

Këto njohuri shfrytëzohen në fizikë ku vërehet se sa është i vlefshëm vektori..

B 5 Le të jenë dhënë vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AC}$. Caktoni vektorin $\vec{x}$,ashtu që $\overrightarrow{AC}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}$.



Sipas rregullës së tre pikave ,fitojmë

$$\overrightarrow{AC}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}\cdot$$

Ndryshimi i dy vektorëve përkufizohet në mënyrë të ngjashmet sikurse ndryshimi i dy numrave realë d.m.th. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{x}$, ako $\overrightarrow{AB}=\vec{x}+\overrightarrow{AC}$.

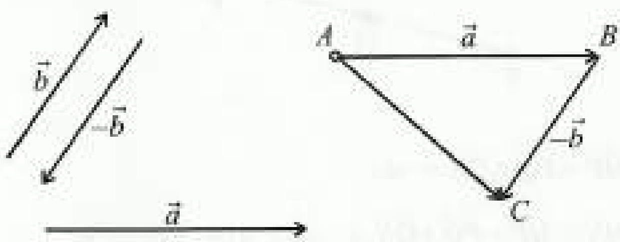
Mbani mend!

Ndryshimi $\vec{a}-\vec{b}$ i vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ të cilët kanë fillim të përbashkët është vektori $\vec{x}$, fillimi i të cilit është te mbarimi i vektorit zbritës , kurse mbarimi te vektori që zbritet, d.m.th. $\vec{x}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Është e njohur se për numrat real a dhe b vlen $a-b=a+(-b)$. E njëjta veti vlen edhe për vektorët d.m.th. $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Pra, në vend që të zbresim vektorë , është e mjaftueshme që vektorit të parë t'ia shtojmë vektorin e kundërt të vektorit të dytë.

6 Caktoni ndryshimin $\vec{a}-\vec{b}$, ashtu që vektorit që zbritet t'ia shtojmë vektorin e kundërt të vektorit zbritës.

Vëreni zgjidhjen:



$\overrightarrow{AB}=\vec{a};\overrightarrow{BC}=\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}\cdot$

7 Është dhënë trekëndëshi ABC, fig. 10. Shprehe vektorin:
a) $\overrightarrow{AC}$ me $\overrightarrow{BC}$ dhe $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{CB}$ me $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{BA}$ me $\overrightarrow{CA}$ dhe $\overrightarrow{CB}$.

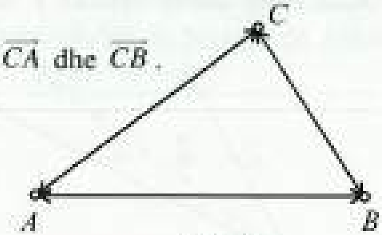


fig. 10

Vëreni zgjidhjen:
Sipas përkufizimit për ndryshim të vektorëve kemi:

a) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$;

c) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

Detyra:

(1) Janë dhënë tre vektorë $\vec{a}$, $\vec{b}$ dhe $\vec{c}$ me fillim të përbashkët O. Konstrukto shumën e tyrer.

(2) Diagonalet e paralelogramit $ABCD$ priten në pikën O. Thjeshtoni shprehjet:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$; b) $\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OC}$; c) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}\right)+\overrightarrow{OA}$; d) $\overrightarrow{DO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

(3) Është dhënë pesëkëndëshi $ABCDE$. Gjeni së paku katër mundësi për ta shprehur vektorin $\overrightarrow{AB}$ si shumë të vektorëve jozero, me fillim dhe mbarim në kulmet e pesëkëndëshit.

(4) Janë dhënë pikat A, B dhe C. Caktoni vektorin $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

(5) Pika O shtrihet në rrafshin e paralelogramit $ABCD$. Tregoni se është i vërtetë barazimi

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

9 SHUMËZIMI I VEKTORIT ME NUMËR

Kujtohu!

- Është dhënë vektori $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$;

  Konstruktoni vektorin

a) $\vec{a}+\vec{a}$; b) $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$.

- Cilat veti vlejnë në bashkësinë e numrave realë?

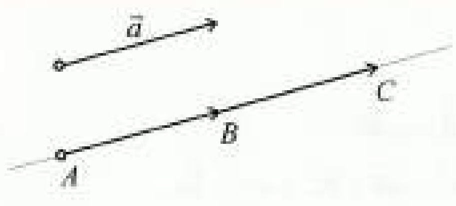
$\mathscr{A}$ **2** Është dhënë vektori $\vec{a}$. Konstruktoni vektorin:

a) $2\vec{a}$;

b) $-3\vec{a}$.

Vëreni zgjidhjen:

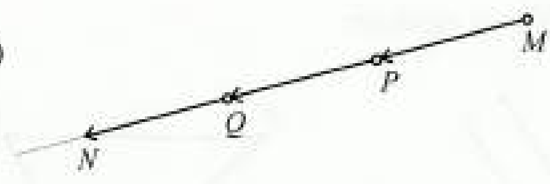
a)



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\vec{a}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$.

b)



$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QN}=-\vec{a}$;

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}=-\vec{a}+(-\vec{a})+(-\vec{a})=-3\vec{a}$.

Vëreni se vektorët $2\vec{a}$ dhe $-3\vec{a}$ janë kolineare me vektorin e dhënë $\vec{a}$.

Vektori $2\vec{a}$ ka kahje të njëjtë me vektorin $\vec{a}$, kurse vektori $-3\vec{a}$ ka kahje të kundërt me kahjen e vektorit $\vec{a}$.

Mbani mend!

Nëse $k \in \mathbb{R}$, atëherë $k \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot k$ është vektor me drejtim të njëjtë me vektorin $\vec{a}$ dhe gjatësi $|k| \cdot |\vec{a}|$, d.m.th. $|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

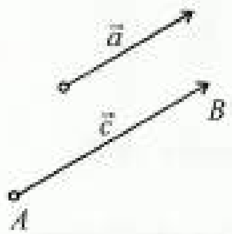
Vektori $k \cdot \vec{a}$ ka kahje të njëjtë me vektorin $\vec{a}$, nëse $k > 0$.

Vektori $k \cdot \vec{a}$ ka kahje të kundërt me vektorin $\vec{a}$, nëse $k < 0$.

Nëpërgjithësi nëse $k \in \mathbb{Z}$, atëherë $\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+...+\vec{a}}_{k} = k \cdot \vec{a}$.

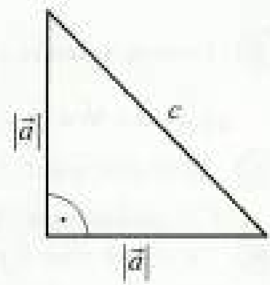
2. Le të jetë dhënë vektori $\vec{a}$. Konstruktoni vektorin: $-2\vec{a}$; $\frac{3}{2}\vec{a}$; $-\frac{2}{3}\vec{a}$; $\sqrt{2}\vec{a}$.

Vëreni zgjidhjen për konstruktimin e vektorit $\sqrt{2}\vec{a}$:



Konstrukto trekëndësh kënddrejtë me katete $|\vec{a}|$.

Hipotenuza e tij është $c = \sqrt{2} \cdot |\vec{a}|$.



B Shumëzimi i vektorit me numër ka të njëjtat veti sikurse shumëzimi i numrit me numër.

Për çdo vektor $\vec{a}$ janë të vërteta vektorët: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$; $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; $k \cdot \vec{0} = \vec{0}, k \in \mathbb{R}$.

Vërtetësia e këtyre pohimeve rrjedh menjëherë nga përkufizimi i vektorit me numër.

Gjithashtu, nëse $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë vektorë të çfarëdoshëm, kurse k dhe m cilëtdo numra realë, atëherë janë të vërteta barazimet:

1. $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ .... vetia asociative;
2. $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ .... vetia distributive e shumëzimit të shumës së numrave;
3. $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ .... vetia distributive e shumëzimit të shumës së vektorëve.

Vërtetimi i këtyre vetive këtu nuk do ta japim.

3 Është dhënë vektori $\vec{a}$. Konstruktoni vektorët: a) $2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\vec{a}$; b) $-3 \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a}\right)$; c) $\left(\frac{1}{2} - 2\right)\vec{a}$.

Udhëzim: Thjeshtoni shprehjen, duke i përdorur barazimet e mësipërme.

4 Janë dhënë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Konstruktoni vektorin $\vec{c}=2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

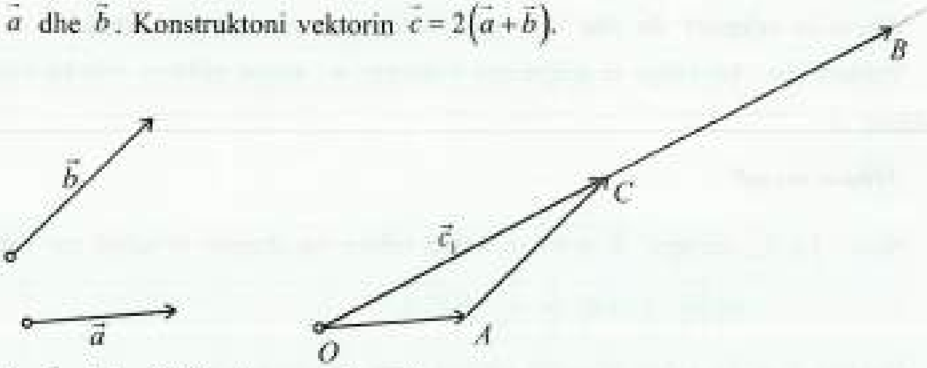
Vëreni zgjidhjen:

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,

$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

$\vec{c_1}=\vec{a}+\vec{b}$,

$\vec{c}=2\vec{c_1}=\overrightarrow{OB}$.



Konstruktoni vektorin $\vec{c}$, duke i shfrytëzuar vetitnë 3.

5 Thjeshtoni shprehjet:

a) $2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+3\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$; b) $3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-4\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$; c) $3\left(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\right)+2\vec{b}-\left(\vec{a}+\vec{b}-6\vec{c}\right)$.

Detyra:

1. Janë dhënë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Konstruktoni: a) $\vec{a}+2\vec{b}$; b) $\vec{a}-2\vec{b}$; c) $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.
2. Caktoni vektorin e panjohur $\vec{x}$: a) $2\vec{x}-\vec{a}+\vec{b}=2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{x}$; b) $3\vec{a}-\vec{b}-2\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{x}$; c) $\vec{a}-\vec{x}+3\vec{b}=2\vec{b}+\left(\vec{a}+\vec{x}\right)$.
3. Le të jenë pikat A, B, C dhe D kolineare, dhe le të jenë M dhe N meset e segmenteve AB dhe CD, përkatësisht. Tregoni se vlen $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.
4. Le të jetë pika S prerja e diagonaleve të paralelogramit $ABCD$, kurse O është pikë e çfarëdoshme. Vërtetoni se vlen $4\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.
5. Vërtetoni se meset e brinjëve të secilit katërkëndësh paraqesin kulme të një paralelogrami.

10 ZBATIMI I VEKTORËVE

Disa pohime matematikore mund të vërtetohen shumë lehtë duke e përdorur teorinë e vektorëve. Këtë do ta sqarojmë duke i zgjidhur detyrat.

1 Vija e mesme e trekëndëshit është paralele me brinjën me të cilën nuk ka pika të përbashkëta, kurse gjatësia e saj është sa gjysma e asaj brinje.

Ky pohim është vërtetuar me këto hapa:

- Nëpër A_1 tërheqim drejtëzë paralele me AC.
- Tregojmë se $\Delta C_1BA_1\equiv\Delta B_1A_1C$.
- Tregojmë se $AB\parallel B_1A_1$, si drejtëza të transverzales BC.

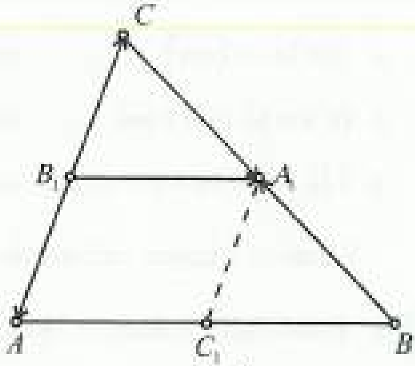


fig. 1

Mundohu të kryeni vërtetimin sipas hapave të përmendura.

Pohimin do ta vërtetojmë duke i zbatuar vektorët në këtë mënyrë, fig. 1.

Pikat A_1 dhe B_1 janë meset e segmenteve AC dhe BC të trekëndëshit ABC.

Sipas rregullës së tre pikave rrjedh: $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1}$. Duke e zbatuar rregullën e lidhjes së vektorëve fitojmë: $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$. Duke i mbledhur këto barazime kemi:

$$2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}; \quad 2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{B_1A}\right) + \left(\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{BA_1}\right);$$

$$\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \vec{0} + \vec{0}; \quad \overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Nga barazimi i fituar rrjedh $\left|\overrightarrow{B_1A_1}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$, e kjo tregon se vektorët janë kolinearë, d.m.th.

$\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ dhe $B_1A_1 \parallel AB$, çka duheshte të vërtetohet.

Krahasoni të dy vërtetimet dhe vlerësoni cili prej tyre është më efikas.

2 Vërtetoni se vija e mesme e trapezit është e barabartë me gjysmëshumën e bazave të trepezit dhe është paralele me ato. Udhëzim: shfrytëzoni zgjidhjen e detyrës paraprake.

3 Le të jetë M mes i segmentit AB, kurse O pikë e çfarëdoshme. Vërtetoni se $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. Vëreni zgjidhjen:

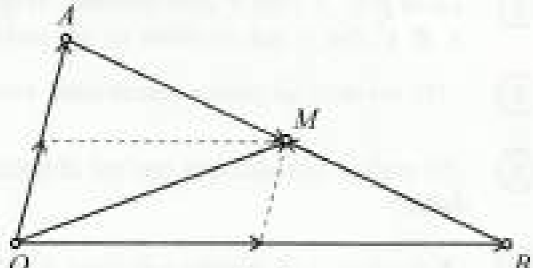


fig. 2

Sipas rregullës së tre pikave kemi:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$, fig. 2.

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\right)$,

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \vec{0}$, $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}$ janë vektorë të kundërt,

pra $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

4 Le të jenë A_1, B_1, C_1 meset e brinjëve të trekëndëshit ABC. Vërtetoni se : $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

Vëreni zgjidhjen.

Sipas zgjidhjes së detyrës së mësipërme kemi:

$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, pra

$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}\right)$, d.m.th.

$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\vec{0} + \frac{1}{2}\vec{0} + \frac{1}{2}\vec{0} = \vec{0}$.

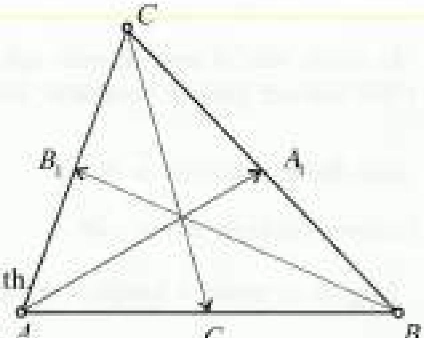


fig. 3

Detyra:

1. Le të jetë T qëndër e rëndimit për trekëndëshin ABC, kurse O pikë e çfarëdoshme.

   Tregoni se $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

2. Le të jetë T qendër e rëndimit të trekëndëshit ABC. Vërtetoni se $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$.

3. Nëse S_1 dhe S_2 janë meset e diagonaleve të trapezit $ABCD$, tregoni se $\overrightarrow{S_1S_2}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}\right)$.

4. Në vijën rrethore $k(O,r)$ është brendashkruar katërkëndëshi $ABCD$, diagonalet e të cilit janë reciprokisht normale dhe priten në pikën S. Vërtetoni se $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

5. Në vijë rrethore $k(O,r)$ është brendashkruar katërlçndëshi $ABCD$, diagonalet e të cilit janë reciprokisht normale dhe për të cilin vlen barazimi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
   Vërtetoni se katërkëndëshi është katrorë.

Ushtrim kontrollues tematik

1. Le të jetë A pikë e çfarëdoshme. Tregoni se gjenden pikat B,C dhe D, ashtu që pikat A, B, C dhe D nuk shtrihen në një rrafsh.

2. Dy drejtëza që priten përcaktojnë vetëm një rrafsh. Vërtetoni!

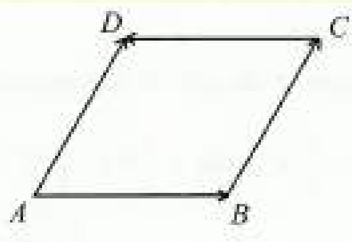
3. Sa rrafshe përcaktohen me një drejtëzë dhe tre pikave jokolineare të cilat nuk i takojnë drejtëzës së dhënë?

4. Ndryshimi i dy këndeve shtuese është kënd i drejtë. Caktoni këndet.

5. Caktoni numrin e diagonaleve në një dhjetëkëndësh.

6. Këndet e kundërta te katërkëndëshi tetivial janë suplementarë. Vërtetoni!

7. Te rombi $ABCD$ janë shënuar vektorët .
   Cilët vektorë janë të barabartë, dhe cilët të kundërt?



8. Janë dhënë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.
   Caktoni vektorin $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$.

9. Tregoni se meset e brinjëve të rombit janë kulme të një drejtkëndëshi.

10. Le të jetë T qendër e rendimit të trekëndëshit ABC . Vërtetoni se $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$.

TEMA 5

PROPORCIONI I MADHËSIVE

Thelbi i matematikës është në lirinë e saj.

G. Kantor (1779-1855)

Në këtë temë do të njihesh me:

- proporcioni i drejtë dhe i zhdrejtë i madhësive;
- rregullae thjeshtë e treshit;
- Llogaritja e përqindjes dhe e promilës;
- llogari e ndarë dhe llogari e përzierjes;
- llogari e kamatës, llogari e kamatës së thjeshtë.

I PËRPJESËTIMI, PROPORCIONI

Kujtohu!

Në hartën gjeografike ndodhet përpjesëtimi 1:50000; 1:25000.

Si është raporti i numrave:

a) 9 dhe 45; b) $\frac{2}{3}$ dhe $\frac{4}{5}$?

Në çfarë raporti priten vijat e rëndimit te trekëndëshi?

A **1** Caktoni vlerën e përpjesëtimit:

a) $16:4$; b) $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ c) $2,5:0,5$.

Vlera e përpjesëtimit quhet *koeficient i proporcionit* i cili shënohet me k.

2 Caktoni koeficientin e proporcionit te përpjesëtimet:

a) $100:25$ b) $\frac{9}{4}:\frac{3}{2}$ c) $100m:25m$ d) $6kg:12kg$

Vëreni se koeficieni i proporcionit është numër jo i emëruar.

Mbani mend!

Përpjesëtimi është herës i dy numrave të pa emëruar ose e numrave matës të dy madhësive të një lloji, të matura në të njëjtën njësi matëse.

3 Cilat nga herësat nuk paraqesin përpjesëtim:

a) 7 : 21; b) 35 : 5; c) 61 : 3 *cm;* d) 3 *kg* : 5 *km;* e) 25 ℓ : 18 ℓ; f) 25 ℓ : 18 *kg*?

Kujtohu!

Cilat nga përpjesëtimet janë të njëjtë?

a) 6 : 2; b) 15 : 10;
c) 4,5 : 3; d) 5 : 2.

B **4** Çfarë vlere kanë përpjesëtimet: 18 : 12 dhe 15 : 10?

Të dy përpjesëtimet kanë vlerë të njëjtë dhe mund ta shkruajmë barazimin

18 : 12 = 15 : 10, e cila quhet ***proporcion.***

5 Prej çfarë përpjesëtimesh përbëhet proporcioni:

a) 35 : 5 dhe 42 : 6; b) 15 : 3 dhe 18 : 6; c) 12 : 3 dhe 20 : 5

Mbani mend!

Proporcioni është barazim i dy përpjesëtimeve të njëjtë, d.m.th. nëse $a:b=k$ dhe $c:d=k$, atëherë

$$a:b=c:d.$$

6 Llogarit prodhimin e anëtarëve të jashtëm, përkatësisht e atyre të brendshëm në proporcionet:

a) 2 : 5 = 6 : 12; b) 35 : 5 = 28 : 4.

Mbani mend!

Prodhimi i anëtarëve të jashtëm është i barabartë me prodhimin e anëtarëve të brendshëm te proporcionet, d.m.th. nëse $a:b=c:d$, atëherë $a\cdot d=c\cdot b$.

7 Cili nga barazimet është proporcion:

a) 25 : 35 = 10 : 14; b) 17 : 12 = 7 : 2; c) 2,6 : 1,2 = 1,5 : 0,5; d) $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$?

8 Nga barazimet: a) $5\cdot 6=15\cdot 2$; b) $3\cdot 4=6\cdot 2$ shkruani proporcion.

Vëreni zgjidhjen: a) $5:2=15:6$ ili $5:15=6:2$ ose $6:2=15:5$.

Nëse anëtarët e jashtëm, përkatësisht anëtarët e brendshëm në proporcion i ndërrojnë vendet, atëherë barazimi nuk ndryshon.

9 Caktoni vlerën e të panjohurës x në proporcion $3:x=2:4$.

Vëreni zgjidhjen: $3\cdot 4=2\cdot x$, ose $x=6$.

Nëse a,b dhe x janë numra pozitivë, atëherë nga proporcioni $x:a=b:x$, rrjedh $x=\sqrt{a\cdot b}$, numri x është ***mes gjeometrik*** i numrave a dhe b.

10 Njehsoni mesin gjeometriki numrave: a) 9 dhe 16; b) 4 dhe 25.

Kujtohu!

A do të ndërrojë barazimi i dhënë nëse në anën e majtë dhe në anën e djathtë shtohet numër i njëjtë?

C 11 Në anën e majtë dhe të djathtë të barazimit $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ shtoni përkatësisht zbritni 1.

Vëreni zgjidhjen: nga $\frac{6}{4}+1=\frac{3}{2}+1$ fitojmë $\frac{6+4}{4}=\frac{3+2}{2}$ ose $(6+4):4=(3+2):2$. Nëse zbresim 1, kemi $(6-4):4=(3-2):2$.

Nëpërgjithësi, kur u shtojmë përkatësisht u zbresim të dy anëve numrin 1, barazimit $a:b=c:d$, fitojmë format e proporcionit,

$(a+b):b=(c+d):d$ ili $(a-b):b=(c-d):d$, të cilat quhen ***proporcione të nxjerra***.

12 Caktoni anëtarin e panjohur te proporcionet: a) $(3-x):x=3:2$; b) $(2+x):x=5:3$.

Vëreni zgjidhjen: b) $(2+x-x):x=(5-3):3$, përkatësisht $2:x=2:3$, d.m.th. $x=3$.

Në zgjidhje mundesh të arrish nga barazimi $(2+x)\cdot 3=5x$.

C 13 Caktoni vlerat e përpjesëtimit: $4:2$; $6:3$; $10:5$?

Të tre përpjesëtimet kanë vlerë të njëjtë dhe prej këtu rrjedh:

$$4:2=6:3=10:5=2 \text{ ose}$$

$$4:6:10=2:3:5.$$

Nëpërgjithësi nëse tre ose më shumë përojesëtime të njëjta i lidhim me shenjë "=", atëherë fitojmë barazim të ri i cili quhet ***proporcion i vazhduar***, d.m.th.

nga $a:a_1=b:b_1=c:c_1$, rrjedh $a:b:c=a_1:b_1:c_1$.

Nga proporcioni i vazhduar $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k$, rrjedh $a=a_1k$, $b=b_1k$ dhe $c=c_1k$.

14 Caktoni x, y dhe z nga proporcioni $x:y:x=2:3:4$, nëse shuma e tyre është 27.

Vëreni zgjidhjen: Nga $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$ dhe kushti $x+y+z=27$ fitojmë $2k+3k+4k=27$,

prej ku $k=3$, pra $x=6$, $y=9$ dhe $z=12$.

15 Shumën prej 15000 den. ndahe në tre pjesë, në raport $4:5:6$.

Në më shumë proporcione nëse të parët dhe të tretët janë anëtarë të njëjtë (ose sillen në të njëjtë), atëherë nga ata mund të formohet proporcion i vazhdueshëm. Tani, nga

$$a:b=x:y,\ a:c=x:z \text{ dhe } a:d=x:t, \text{ fitojmë } a:b:c:d=x:y:z:t.$$

16 Formoni proporcion të vazhdueshëm nga proporcionet:

$$a:b=4:3,\quad b:c=7:8 \text{ dhe } c:d=6:9.$$

Vëreni zgjidhjen: Nga $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$ dhe $\frac{b}{c}=\frac{7}{8}$ rrjedh $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{8}$, d.m.th. $\frac{a}{c}=\frac{7}{6}$.

Nga $\frac{a}{c}=\frac{7}{6}$ dhe $\frac{c}{d}=\frac{6}{9}$ rrjedh $\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{d}=\frac{7}{6}\cdot\frac{6}{9}$, d.m.th. $\frac{a}{d}=\frac{7}{9}$.

Nga $a:b=4:3$, $a:c=7:6$, $a:d=7:9$ rrjedh $a:b=28:21$, $a:c=28:24$, $a:d=28:36$, d.m.th. $a:b:c:d=28:21:24:36$.

Detyra:

1. Caktoni anëtarin e panjohur të proporcionit:
   a) $3:2=x:4$; b) $x:3=15:9$; c) $4:x=2:3$ dhe d) $3:5=6:x$.
2. Zgjidhni proporcionet:
   a) $(3-x):x=1:5$; b) $(5-x):(5+x)=1:2$.
3. Shuma prej 18000 den. të ndahet në raport $4:3:2$.
4. Formoni proporcion të vazhdueshëm nga proporcionet: $a:b=2:3$, $c:a=5:4$ dhe $d:b=7:3$.
5. Shuma prej 65000 den. të ndahet në katër punëtorë pjesët e të cilëve janë a, b, c dhe d, ashtu që për ato pjesë vlen: $a:b=5:2$, $b:c=3:4$ dhe $c:d=2:9$.

2 PROPORCION I DREJTË DHE I ZHDREJTË. RREGULLA E THJESHTË E TRESHIT

A 1 Një kilogram mollë kushton 20 den. Sa do të kushtojnë 2, 3, 4 kilogramë mollë?

Një traktor mund të lëvroj një arë për 8 ditë. Për sa orë të njëjtën arë do ta lëvrojnë për 2, 4, 8 traktorë?

Vëreni zgjidhjen:

Varësinë e madhësive do ta japim me tabelë:

a)

Sasia	1	2	3	4
Denarë	20	40	60	80

b)

Nr. trakt.	1	2	4	8
Ditë	8	4	2	1

Çka vëren për varësinë e tyre?

Për rastin a), vërejmë se , sa herë zmadhohet sasia e mollëve , aq herë zmadhohet shuma e të hollave.

Madhësitë të cilat e plotësojnë këtë veti quhen madhësi ***proporcionale të drejta.***

Për rastin b), vëren se sa herë zmadhohet numri i traktorëve , aq herë zvogëlohet numri i ditëve.

Madhësitë të cilët e plotësojnë këtë veti quhen madhësi ***proporcionale të zhdrejta.***

2 Një udhëtar për 6 orë kaloi 24 *km*.Llogarit sa kilometra kaloi udhëtari për 1, 2, 3 orë?

3 Një punëtor e mbaroi një punë për 16 ditë. Për sa ditë të njëjtën punë do ta kryejnë 2, 4, 8 punëtorë?

4 Në çfarë varësie janë :

a) brinja dhe perimetri i katrorit;

b) rrezja dhe perimetri i rrethit;

c) kohën dhe shpejtësinë te lëvizja e njëtrajtshme?

B 5 Në një shkollë gjithsej ka 600 nxënës të shpërndarë në 15 paralele me numër të njëjtë nxënësish. Sa nxënës ka në 8 paralele?

Vëreni zgjidhjen.

↑ 15 paralele	600 nxënës ↑
8 paralele	x nxënës

Rrjedh:
$$x:600=8:15$$
$$15x=8\cdot 600$$
$$x=320$$

Pra, në 8 paralele ka 320 nxënës.

6 Një punë 8 punëtorë e kryejnë për 35 ditë. Për sa ditë të njëjtën punë do ta mbarojnë 10 punëtorë?

Vëreni zgjidhjen.

↑ 8 punëtorë	35 ditë ↓
10 punëtorë	x ditë

Rrjedhë:
$$x:35=8:10$$
$$10x=8\cdot 35$$
$$x=28$$

Pra , 10 punëtorë do ta kryejnë punën për 28 ditë.

Mënyra për zgjidhjen e këtij lloji të detyrave është e njohur me emrin ***rregulla e thjeshtë e treshit*** e njëjta mund të spjegohet edhe kështu:

- Vërehet varësia e madhësive , nëse janë proporcion i drejtë , shigjetat janë të orientuara njëlloj, nëse proporcioni është i anasjelltë atëherë shigjetat janë orientuar në të kundërtën
- Formohet proporcioni dhe llogaritet anëtari i panjohur.
- Bëhet vlerësimi i rezultatit të fituar.

7 Një punë mund ta kryejnë 30 punëtorë për 60 ditë. Megjithatë , në punë dolën 20 punëtorë. Pas 10 ditëve në punë erdhën edhe 5 punëtorë. Për sa kohë do të mbarohet e tërë puna?

Vëreni zgjidhjen:

Zgjidhja e detyrës është ndarë në dy pjesë, në fillim caktojmë për sa kohë do ta kryejnë punën

- 20 punëtorë, dhe kemi:

$$\begin{array}{ll} \downarrow 30 \text{ punëtorë} & 60 \text{ ditë} \uparrow \\ 20 \text{ punëtorë} & x \text{ ditë} \end{array}$$

$$x:60=30:20,$$
$$x=90 \text{ ditë.}$$

Pra, 20 punëtorë të gjithë punën do ta kryejnë për $90-10=80$ ditë.

- Në pjesën e dytë , për sa ditë do ta mbarojnë punën 25 punëtorë dhe kemi:

$$\begin{array}{ll} \downarrow 20 \text{ punëtorë} & 80 \text{ ditë} \uparrow \\ 25 \text{ punëtorë} & x \text{ ditë} \end{array}$$

$$x:80=20:25,$$
$$x=64 \text{ ditë.}$$

E gjithë puna do të kryhet për $64+10=74$ ditë.

Detyra:

1. Për 2000 den. janë blerë 50 kg mollë. Sa kilogram mollë do të blihen për 1400 den.?
2. Nëse 40 punëtorë mundet të gropojnët 200 m^3 *dhe* për kohë të caktuar, atëherë sa punëtorë për të njëjtën kohë dhe në të njëjtat kushte për punë do të gropojnë 300 m^3 *dhe*?
3. Një punë mund të kryhet me 20 punëtorë për 288orë. Sa punëtorë duhet e njëjta punë të kryhet për 18 ditë?
4. Tetëdhjetë punëtorë për një kohë të caktuar bëjnë rrugë të gjat prej 600 *m*. Sa punëtorë për të njëjtën kohë dhe në kushte të njëjta do të bëjnë rrugë prej 10 *km*?
5. Sipas planit, 40 punëtorë duhet ta mbarojnë një punë për 27 ditë. Punën e kanë filluar 18 punëtorë dhe pas 27 ditëve në punë erdhën edhe 32 punëtorë. Për sa kohë do të jetë mbaruar puna e planifikuar?

3 LLOGARITJA E PËRQINDJES DHE PROMILËS

Kujtohu!

- E njëqindta pjesë e të plotës është një përqind, d.m.th. $\frac{1}{100}=1\%$.
- 20 përqind është 20 të njëqindtat pjesë të të plotës.
- Shënim i shkurtër për thyesën $\frac{25}{100}$ është 25%.
- E ke të njohur se $0{,}36=\frac{36}{100}$.

  Vëreni se $0{,}36=36\%$.
- Nëpërgjithësi, $p\%$ e A është $\frac{p}{100}A$.

A

1 Shkruani në formë të përqindjes:

a) $\frac{6}{100}$; $\frac{25}{100}$; $\frac{80}{100}$.

b) $0{,}15$; $0{,}6$; $0{,}02$.

c) 4; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$.

- Vëreni procedurën:

a) $\frac{8}{100}=\left(\frac{8}{100}\cdot 100\right)\%=8\%$;

b) $0{,}15=\frac{15}{100}=15\%$;

2 Në një shkollë ka 600 nxënës dhe prej tyre 450 janë pa nota të dobëta. Sa janë ato në përqindje?

3 Në një shitore ka 850 palë këpucë prej të cilëve 18% janë për fëmijë. Sa palë këpucë për fëmijë ka në atë shitore?

Vëreni zgjidhjen:

Nga		
	100 %	18 %
	850 palë	x palë

Me zbatimin e rregullës së thjeshtë të treshit kemi:

$$x:18=850:100$$
$$x=153$$

Në shitore ka 153 palë këpucë për fëmijë.

4 Një mall është shtrenjtuar për 120 den., e cila paraqet 8% e çmimit të vjetër. Caktoni çmimin e ri të mallit.

5 Nga gjithsej 450 nxënës në një shkollë, 120 nxënës mësojnë gjuhën gjermane .Sa përqind në atë shkollë mësojnë gjuhën gjermane?

Nga shembujt e mëparshëm , vërejte se në detyrat me përqindje përmenden këto madhësi:

- ***numri konstant*** 100, pra, pjesa e plotë është 100%;
- ***përqind***, e shënojmë me p $\left(p=\frac{p}{100}\right)$;
- ***themelore*** ose ***vlera kryesore***, e shënojmë me S;
- ***sasia e përqindjes***, e shënojmë me i.

Lidhje në mes këtyre madhësive më së miri e fitojmë nga shema:

Pjesa e plotë .... S i përgjigjet përqind 100

Pjes e të plotës .... i i përgjigjet përqind .... p

. Prej ku rrjedh

proporcioni $p:100 = i:S$, prej ku:

$$i = \frac{p \cdot S}{100}, \quad S = \frac{100 \cdot i}{p}, \quad p = \frac{100 \cdot i}{S}.$$

Rregulla me të cilën llogaritet cila do qoftë nga madhësitë e mësipërme quhet *llogaritje e përqindjes për njëqind.*

6 Para gjashtë vitesh në një fshat kishte 4200 banorë, kurse tani ka 8% më pak. Sa banorë ka tani në atë fshat ? Vëreni, janë dhënë $S = 4200$ dhe $p = 8$, e kërkohet i dhe $S - i$.

Kemi, $i = \frac{S \cdot p}{100} = \frac{4200 \cdot 8}{100} = 336$,e kjo domethënë në fshat ka $4200 - 336 = 3864$ banorë.

7 Në një zyrë , harxhimet e ndërmarrjes prej 3500 den. janë rritur për 490 den.Sa përqind është rritja ? Vëreni , janë dhënë $S = 3500$ dhe $i = 490$.

Rrjedh, $p = \frac{100 \cdot i}{S} = \frac{100 \cdot 490}{3500} = 14$. Pra, harxhimet janë rritur për 14%.

8 Norma në një fabrikë është tejkaluar për 15%, përkatësisht për 810 copë. Sa copë paraqet norma ? Vëreni se $i = 810$, $p = 15$, kurse kërkohet S, dhe $S = \frac{100 \cdot i}{p} = \frac{100 \cdot 810}{15} = 5400$. Sipas kësaj, norma është 5400 copë.

Kujtohu!

E njëmijta pjesë e të plotës është promila.

65 promili është e 65 mijë pjesë e të plotës.

Shënim i shkurtër i thyesës $\frac{65}{1000}$ është $65‰$.

Për shembull, $1‰$ e 3000 është $\frac{1}{1000} \cdot 3000 = 3$; $5‰$ e 3000 është $\frac{5}{1000} \cdot 3000 = 15$, ose në përgjithësi

$p‰$ *e* A *është* $\frac{p}{1000} \cdot A$.

B Fjala promil rrjesh nga fjala latine "promile", e cila në përkthim do të thotë "në njëmijë ".

Detyrat me të cilat punohet me promil janë detyra me llogaritje promile..

Në llogaritjen e promilës hase madhësitë
-numri konstant 1000, d.m.th pjesa e plotë paraqet a $1000‰$;
- promil, e shënuar me p;
- vlera themelore (kryesore),si S;
- vlera e promiles,e shënuar me i.

Ngjashëm sikurse me llogaritjen e përqindjes kemi

$$i = \frac{S \cdot p}{1000}; \quad S = \frac{1000 \cdot i}{p}; \quad p = \frac{1000 \cdot i}{S}.$$

9 Gjatë bartjes së 5500 *kg* domateve , $40‰$ të tyre janë të papërdorshme. Sa kilogram domate janë të papërdorshme?

Vëreni, $S = 5500$, $p = 40‰$, kurse kërkohet i, dhe $i = \frac{S \cdot p}{1000} = \frac{5500 \cdot 40}{1000} = 220$, d.m.th. 220 *kg* domate janë të papërdorshme.

10 Një agjencion për shumën prej 42000 evra ka dhënë 1260 evra provizion. Sa promila paraqet provizioni?

Meqë $S=42000$ dhe $i=1260$, $p=\frac{1000\cdot i}{S}=\frac{1000\cdot 1260}{42000}=30$. Provizioni i lërkuar është $30‰$.

Detyra:

1. Në një shkollë ka 850 nxënës. Prej tyre 18% janë të shkëlqyeshëm, 28% janë shumë mirë, 24% janë mirë, 22% mjaftueshëm, kurse të tjerët e përsëritën vitin. Caktoni numrin e nxënësve sipas suksesit dhe llogarit sa nxënës e kanë përsëritur vitin.
2. Çmimi i një prodhimi është zbritur për 7,5%, përkatësisht për 6,75 den. Caktoni çmimin e prodhimit para se të zbritet.
3. Çmimi i blerjes së një prodhimi është 3000 denarë, kurse çmimi i shitjes 3450 denarë. Sa përqindje është marzha?
4. Çmimi i një prodhimi është zvogëluar për 15%, e pastaj çmimi i fituar është rritur për 5% dhe çmimi tani është 1606,60 denarë. Caktoni çmimin e parë të prodhimit.
5. Pas provizionit $3‰$, janë përdorë 735786 denarë. Sa denarë paraqet provizioni?
6. Harxhimet e një fabrike janë zvogëluar për $7,5‰$ dhe tani janë 4255 denarë. Sa harxhime ka pasur fabrika në fillim, para se të zvogëlohen harxhimet?

4 LLOGARI E NDARË. LLOGARI E PËRZIERJES

Kujtohu!

$x:y:z=a:b:c=k$ ose $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$,

$x=ak$, $y=bk$ dhe $z=ck$.

A Për të zgjidhur problemin një madhësi të ndahet në disa pjesë të barabartë me të njëjtat kushte përdoret ***llogaria e ndarë***. Mënyrën e ndarjes do ta vërejmë në shembujt që vijnë.

1 Për tre vendet e para të fituar në një garë janë parapарë 35000 denarë, të cilat duhet të ndahen në raport $1:2:4$. Caktoni vlerat e shpërblimeve në denarë.

Vëreni zgjidhjen: Nga $x:y:z=1:2:4=k$, rrjedha $x=k$, $y=2k$ dhe $z=4k$.

Rrjedhimisht, $x+y+z=35000$, ose $k+2k+4k=35000$, përkatësisht $7k=35000$, d.m.th. $k=5000$.

Sipas kësaj, janë ndarë shpërblimet: 5000 den., 10000 den. dhe 20000 den.

2 Një tregëtarë ka shitur 8500 *kg* miell, 12400 *kg* sheqer, 34600 *kg* oriz dhe 90500 *kg* patate dhe për këto fitoi 18250 denarë marzhë. Nga sa marzhë ka fituar tregëtari për secillin lloj malli, nëse marzha e secilit mall është proporcionale me masën e secilit mall?

Vëreni zgjidhjen: Nëse me x, y, z dhe t i shënojmë marzhat e fituara për miell, sheqer, oriz dhe paptate përkatësisht, atëherë nga kushti i detyrës kemi:

$$x:y:z:t=8500:12400:34600:90500=k,\text{ dhe } x+y+z+t=18250,$$

përkatësisht $8500k+12400k+34600k+90500k=18250$, d.m.th. $k=0,125$.

Sipas kësaj marzhat e kërkuara janë: $x=1062,50$; $y=1550,00$; $z=4325,00$ dhe $t=11312,00$ denarë.

3 Shuma prej 3420 denarë duhet tu ndahet katër vetave, ashtu që pas të parit secili që vjen të fitojë 50 denarë më shumë se shoku para tij. Nga sa denarë do të fitojë secili prej tyre.

Nga kushti i detyrës rrjedh: $x+(x+50)+(x+100)+(x+150)=3420$, prej ku $x=780$.

Pra, shpërndarja sipas anëtarëve është: 780, 830, 880 dhe 930 denarë.

Kujtohu!

Sa litra ujë duhet t'i shtohet $100\,\ell$ alkoholi me 80%, që të fitohet alkohol prej 50%?

B

Në jetën praktike, veçanërisht në veprimtaritë ekonomike në praktikë shpesh përzihen lloje të ndryshme të mallrave, ose malll i të njëjtit lloj, me qëllim që të fitohet prodhim(përzierje) me çmim dhe kualitet të caktuar

Caktimin e çmimit, kualitetit dhe raportit të mallrave që ***përzihen kryhet me të ashtuquajturën llogari e përzierjeve .***

Gjatë zgjidhjes së detyrave me llogarinë e përzierjeve , duhet të ruhet principi themelorë: *vlera e përzierjes duhet të jetë e berabartë me shumën e vlerave tëç malllrave që janë pjesë përbërëse të përzierjes.*

Për caktimin e çmimit të përzierjes, duhet të dihen çmimet dhe sasitë e mallrave që përzihen. Çmimi i fituar i përzierjes quhet ***çmimi mesatar ose çmimi ponder***.

Le të jetë $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ çmimet e n mallrave që përzihen, $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n$ janë masat e tyre përkatëse dhe c është çmimi i përzierjes, sipas principit të përmendur kemi:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n=c(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n),\ \text{d.m.th.}$$

$$c=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}.$$

4 Në një shitore ka tre lloje të verës , dhe atë : $6\,\ell$ me çmim prej 125 den., $4\,\ell$ me çmim prej 105 den. dhe $10\,\ell$ me çmimi prej 130 denarë për $1\,\ell$. Sasitë e përmendura të verës janë përzier. Cakto çmimin e litrit të verës prej përzierjeve të fituara.

Për zgjidhjen kemi: Le të jetë $a_1=125$, $a_2=105$, $a_3=130$, $b_1=6$, $b_2=4$ dhe $b_3=10$ atëherë për çmimin e kërkuar fitojmë: $c=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{b_1+b_2+b_3}=\dfrac{125\cdot 6+105\cdot 4+130\cdot 10}{6+4+10}=123{,}5$ denarë.

Prova:

$6\,\ell$	me çmim 125 den. e ka vlerën	750 den.
$4\,\ell$	me çmim 105 den. e ka vlerën	420 den.
$10\,\ell$	me çmim 130 den. e ka vlerën	1300 den.
$20\,\ell$	me çmim 123,5 den. e ka vlerën	2470 den.

5 Prodhuesi i rakisë posedon $40\ l$ prej 80 *grad.*, $30\ l$ prej 70 *grad.* dhe $20\ l$ prej 60 *grad.* Sa litra ujë duhet prodhuesi të shtojë te rakija që e ka që të fitohet rakijë me fortësi 50 *grad.*?

Vëreni zgjidhjen:

$$40\cdot 80+30\cdot 70+20\cdot 60+x\cdot 0=(40+30+20+x)\cdot 50,\ (90+x)\cdot 50=6500,\ \text{d.m.th. } x=40.$$

Pra, nëse shtohen $40\,\ell$ ujë, do të fitohet raki me fortësi 50 *grad.*

Që të bëhet përzierje prej dy lloje të mallrave me kualitet të ndryshëm, me çmimi prej më parë të caktuar, duhet të dihet raporti i sasive të mallrave që përzihen. Sipas principit për llogarinë e përzierjeve kemi:

$$a_1b_1+a_2b_2=c(b_1+b_2),\ \text{ose}\ b_1(c-a_1)=b_2(a_2-c),\ \text{d.m.th.}\ b_1:b_2=(a_2-c):(c-a_1).$$

Prej proporcionit të fituar mund të formojmë shemë të quajtur ***llogaria e yllit***, d.m.th.

$$\begin{array}{cccccc} b_1 & a_1 & \searrow & & \nearrow & (a_2-c) \\ & & & c & & \\ b_2 & a_2 & \nearrow & & \searrow & (c-a_1) \end{array}$$

, prej të cilës vërehet se vlerat b_1 dhe b_2 janë proporcionale me vlerat (a_2-c) dhe $(c-a_1)$.

6 Në një shitore ka mallë me dy lloje të kualiteteve, çmimet e të cilëve janë 9 denarë dhe 11,5 denarë për kilogram. Në çfarë raporti duhet të përzihen të dy llojet e mallrave, që të fitohet përzierje me çmimi prej 10 denarë për kilogram?

Vëreni zgjidhjen: Janë të njohura: $a_1=9,\ a_2=11{,}5$ dhe $c=10$, kurse kërkohet raporti $b_1:b_2$.

E formojmë llogarinë e yllit, pra kemi:

$$\begin{array}{cccccc} b_1 & 9 & \searrow & & \nearrow & 1{,}5 \\ & & & 10 & & \\ b_2 & 11{,}5 & \nearrow & & \searrow & 1 \end{array}$$

, prej të cilës fitojmë: $b_1:b_2=1{,}5:1$, d.m.th. $b_1:b_2=3:2$, kurse kjo do të thotë se dy llojet e mallrave duhet të përzihen në raport $3:2$.

7 Në një shitore posedojnë dy lloje të grurit. Prej llojit të parë janë marrë 6 *kg* me çmim prej 12,63 denarë për kilogram. Lloji tjetër i grurit e ka çmimin 12.9 denarë për kilogram. Sa kilogram grurë duhet të merret prej llojit të dytë që të fitohet përzierje me çmimiprej 12,75 denarë për kilogram?

Vëre, $b_1=6,\ a_1=12{,}63,\ a_2=12{,}9$ dhe $c=12{,}75$.

$$\begin{array}{cccccccc} 6 & 12{,}63 & \searrow & & \nearrow & 0{,}15 & 15 & 5 \\ & & & 12{,}75 & & & & \\ b_2 & 12{,}9 & \nearrow & & \searrow & 0{,}12 & 12 & 4 \end{array}$$

Prej shemës fitojmë $6:b_2=5:4$. Prej këtu vijon $b_2=4{,}8$ kilogramë.

Duhet të dish!

□ Nëse $x:y:z=a:b:c$ ose $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$, atëherë $x=ak$, $y=bk$ dhe $z=ck$;

□ Nëse a_1, a_2, a_3,..... janë çmimet e mallrave , b_1, b_2, b_3,..... me masa përkatëse , atëherë çmimi i përzierjes së fituar është $c=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+...}{b_1+b_2+b_3+...}$.

□ Për caktimin e rapëortit të dy mallrave të përzier , e shfrytëzojmë shemën:

$$\begin{array}{ccccc} b_1 & a_1 & & & (a_2-c) \\ \downarrow & & c & & \downarrow \\ b_2 & a_2 & & & (c-a_1) \end{array}$$

Prej shemës vijon proporcioni

$b_1:b_2=(a_2-c):(c-a_1)$.

***Detyra*:**

1. Raporti i këndeve të brendshme të trekëndëshit është $2:3:4$. Cakto madhësitë e tyre.
2. Në ndërtimin e një rruge kanë marrë pjesë katër punëtorë dhe poashtu kanë punuar nga 24; 30; 38 dhe 40 ditë përkatësisht. Me punën e kryer kanë fituar gjithësej 66000 denarë dhe të njëjtat duhet t'i ndajnë proporcionalisht me ditët e punuara. Nga sa do të fiton çdo punëtor?
3. Për ndërtimin e një halle investitori ka dhënë 450000 denarë. Në ndërtimin e hallës kanë marrë pjesë tre brigada punuese , prej të cilave njëra ka punuar 3, e dyta 5, kurse e treta 7 ditë. Cakto fitimin e çdo brigade prorporcionalisht me ditët e punuara.
4. Janë përzier dy lloje të verës, ashtu që prej verës që e ka çmimin 36 denarë për litër janë marrë 200 *l*, kurse prej verës me çmim 45 denarë për litër janë marrë 100 *l*.Cakto çmimin e verës së përzier
5. Tregëtari prej fabrikës për lëngje kërkon 731 *l* lëng me çmim prej 23 denar për litër. Fabrika posedon lëngje me çmim prej 17; 21; 25 dhe 30 denarë për litër . Nga sa litra prej çdo lëngu duhet të përzihen që të kënaqet dëshira e blerësit?

5 LLOGARIA E KAMATËS SË THJESHTË

Kujtohu!

Për llogaritjen e përqindjes dhe madhësive të saj vlejnë formulat:

$$i=\frac{S\cdot p}{100};\ S=\frac{100\cdot i}{p};\ p=\frac{100\cdot i}{S},\ \text{ku}$$

p-përqindja; *i*-sasia e përqindjes;
S-vlera themelore.

A Për paret e deponuara në bankat , si dhe për kreditët e huazuara , njehsohet ***kamata*** e lejuar ose e obliguar.

Kamata paraqet sasinë e përqindjes së shumës së deponuar ose huazuar. Sinonim të kuptimit kamatë është : kuptimi interes.

Nëse kamata njehsohet vetëm për shumën fillestare (kapitali fillestar),atëherë ajo quhet *kamata e thjeshtë*, kurse pjesa e matematikës që merret me njehsimine kamatës së thjeshtë ose madhësive tjera që janë në lidhje me të, quhet *llogari e kamatës së thjeshtë*:

- vlera themelore ose kapitali K;
- përqindja e kamatës p;
- koha e kamatizmit t;
- kamata i.

Nëse kamata njehsohet në fillim të deponimit, atëherë thuhet kamata ***anticipative***; nëse, pra, ai njehsim kryhet në fund të periudhës, quhet kamata *dekurzive*.

Për njehsimin e kamatës vjetore do ta shfrytëzojmë formulën: $i=\frac{K\cdot p\cdot t}{100}$.

1 Sa është kamata e shumës së deponuar prej 5000 denarë për kohën prej 6 vjet me përqindje të kamatës prej 8%?

Domethënë, të njohura janë k=5000, t=6 dhe p=8, kurse kërkohet i. Kemi:

$$i=\frac{K\cdot p\cdot t}{100}=\frac{5000\cdot 8\cdot 6}{100}=2400$$, pra kamata e kërkuar është 2400 denarë.

2 Në bankë është deponuar shuma prej 6000 denarë, për kohën prej 5 vjet me përqindje të kamatës 6%. Njehso sasinë e kamatës.

Nëse koha e kamatizimit është dhënë në muaj ose ditë, atëherë për njehsimin e kamatës e shfrytëzojmë formulën: $i=\frac{K\cdot p\cdot t}{1200}$, përkatësisht $i=\frac{K\cdot p\cdot t}{36000}$.

3 Janë deponuar në bankë 10000 denarë me 6% përqindje të kamatës dhe për kohën prej 8 muaj. Sa kamatë duhet të paguan banka?

Pasi K=10000, p=6 dhe t=8, për madhësinë e kërkuar fitojmë: $i=\frac{K\cdot p\cdot t}{1200}=\frac{10000\cdot 6\cdot 8}{1200}=400$.

Domethënë banka duhet të paguan 400 denarë në emër të kamatës.

4 Është deponuar në bankë shuma prej 15000 denarë me përqindje të kamatës 8%, kurse për kohë prej 6 muaj. Sa kamatë duhet të paguan banka?

5 Një kursyes ka deponuar në bankë 12000 denarë për kohën prej 8 muaj dhe 24 ditë. Çfarë kamate do të marrë kursyesi, nëse përqindja e kamatës është 6%?

Vëre zgjidhjen: Sipas të dhënave kemi: $i=\frac{K\cdot p\cdot t}{36000}=\frac{12000\cdot 6\cdot 264}{36000}=528$,

kurse kjo do të thotë se banka do të paguan kamatë prej 528 denarë.

6 Sa kamatë prej bankës do të fiton kursyesi i shumës prej 18000 denarë, për kohën prej 6 muaj dhe 18 ditë nëse përqindja e kamatës është 8% ?

7 Në 10 shkurt në bankë janë deponuar 5000 denarë, kurse në 8 korrik është marrë kamata prej 150 denarë. Me çfarë përqindje të kamatës është njehsuar kamata. Vëre zgjidhjen:

Koha për të cilën është njehsuar kamata është: $18+31+30+31+30+8=148$ ditë, pra për p kemi:

$p=\frac{36000\cdot i}{K\cdot t}=\frac{36000\cdot 150}{5000\cdot 148}=7,3$. Prandaj, përqindja e kamatës është 7,3%.

Detyra

1. Kursyesi ka deponuar në bankë ndonjë shumë të parave me 7,5% përqindje të kamatës dhe për 7 muaj dhe 28 ditë ka fituar 3784 denarë kamatë. Cakto kapitalin e deponuar.
2. Shuma e deponuar prej 5600 denarë për 12 vjet e ka kamatën 4350 denarë. Sa është përqindja e kamatës?
3. Për cilën kohë shuma prej 50000 denarë me 6% përqindje të kamatës do të sjellë 1300 denarë kamatës?
4. Një njeri ka huazuar 260 denarë dhe është pajtuar pas 9 muaj ta kthen shumën e huazuar me kamatë në sasi të përgjithshme prej 275,6 denarë. Sa është përqindja e kamatës?

6 PUNA ME TË DHËNA. DIAGRAMI SEKTORIAL

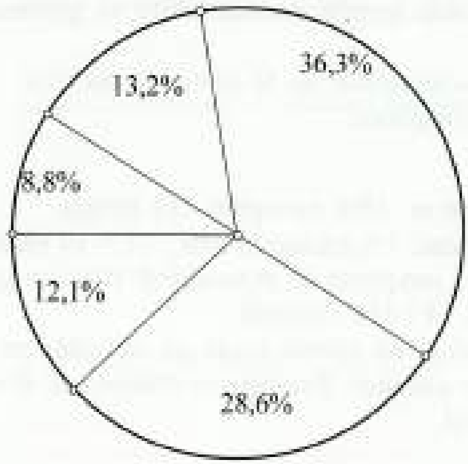
Kujtohu!

Të dhënat në përqindje ose si pjesë e të plotës, shpeshherë paraqitet me diagram sektorial.

A **1** Të dhënat për atë se si 90 nxënës shkojnë në shkollë janë dhënë në tabelën që vijon. Paraqiti ato me diagram sektorial.

Mënyra e udhëtimit	Këmbë	Biçikletë	Autobus	Taksi	Automobil
Numri i nxënësve	11	26	33	12	8

Diagrami sektorial



■ Rrethi ka 360^0. Të pjesëtuara me 90 (numri i nxënësve) është 4^0. Ky kënd (4^0.) është kënd i cili në diagramin e sektorit i përgjigjet 1 nxënës, kurse kjo është 100:90=1,1%.

■ Meqë 11 nxënës shkojnë në këmbë, atëherë $11 \cdot 4^0 = 44^0$ kurse këndi i cili i përgjigjet sektorit për në shkollë në këmbë, kjo është $11 \cdot 1,1 = 12,1\%$.

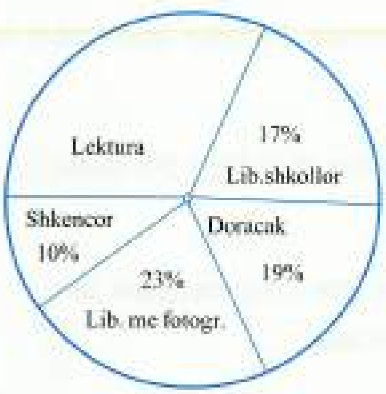
■ Në mënyrë të njëjtë përpunohen edhe të dhënat tjera.

2 Në tabelë janë dhënë vlera për kohën kur zgjohen 500 njerëz nga gjumi.

- Të dhënat paraqiti me diagram sektorial.

Koha e zgjuarjes	Numri i njerëxve
mes 5 dhe 6 orë	135
mes 6 dhe 7 orë	180
mes 7 dhe 8 orë	85
mes 8 dhe 9 orë	100
Gjithsej	500

3 Në një bibliotekë kishte 700 libra. Ato ishin grupue si : lektyra, shkencore, shkollore dhe libra me fotografi. Të dhënat janë paraqitur në diagram sektorësh.



- Cakto numrin e doracakëve , librave shkencorë dhe atyre me fotografi.
- Sa shkallë ka këndi i sektorit i cili i paraqet lektyrat?
- Sa është numri i lektyrave në bibliotekë?

4 Maturantët e anketuar prej gjimnazeve të qytetit të Shkupit që do të studiojnë. Për arkitekturë dhe ndërtimtari janë përcaktuar 210 nxënës.

- Vëre diagramin sektorial.
- Cakto numrin e maturantëve në gjimnaze.
- Sa maturantë do të studiojnë shkencat shoqërore?

Vëren se, 15% paraqesin 210 nxënës.
Domethënë, 1% paraqesin 210 : 15 = 14 nxënës.
Shkenca shoqërore do të studiojnë 31% ose gjithsej 31 nga 14 =434 studentë.
Të dhënat në tabelë tregojnë në cilën mënyrë ndoten oqeanet. Paraqiti të dhënat me diagram sektorial.

Ndotja e lumejve	54%
Ndotja e ajrit	33%
Prej peshqimit	12%
Prodhimi i naftës	1%

Ushtrim kontrollues tematik

1. Cakto vlerën e ndryshores x te proporcioni $(x+2):x=5:3$.

2. Cakto x, y dhe z prej proporcionit $x:y:z=2:3:4$, nëse $x+y+z=18$.

3. Një punë mund ta kryejnë 72 punëtorë për 45 ditë. Për sa ditë të njëjtën punë mund ta kryejnë 60 punëtorë?

4. Sa kamatë do të sjellë kapitali prej 50000 denarë, i deponuar në bankë për kohën prej 9 vjet me përqindje të kamatës 8%?

5. Një person, së bashku me 2,5‰ provizion, ka marrë 600 denarë. Në cilën shumë është njehsuar provizioni?

6. Shuma prej 770 denarë të ndahet në katër pjesë, në proporcion të zhdrejtë për shumat: a=200, b=300, c=400 dhe d=500.

7. Sa është çmimi mesatar i përzierjes të fituar me përzierje të 200 l verë me çmim 36 denarë për litër dhe 100 l verë me çmim prej 45 denarë për litër?

TEMA 6

FUNKSIONI LINEAR. BARAZIMI DHE JOBARAZIMI LINEAR

Mendja jonë e ndihmuar nga fuqia e zotit i zbulon ligjet e natyrës.

G. B. Lajbnici (1646-1716)

Në këtë temë do të njihesh me:

☞ sistemin këndrejt të Dekartit;

☞ largesa mes dy pikave;

☞ syprina e trekëndëshit të dhënë me kordinata të kulmeve;

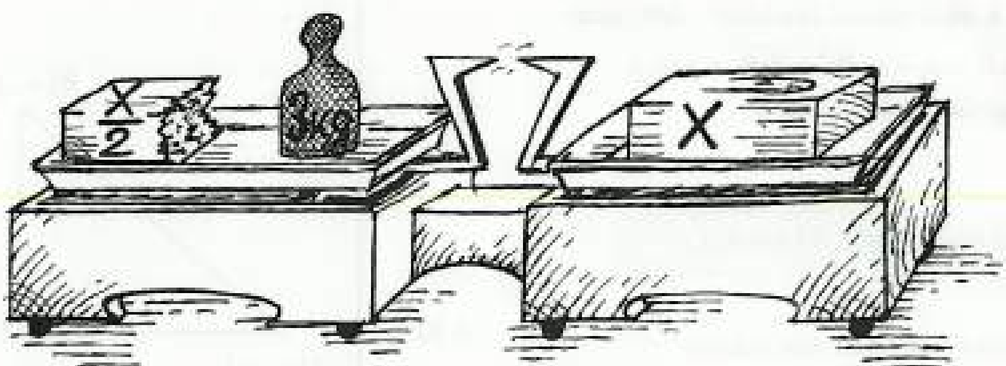
☞ funksioni linearë grafiku dhe vetitë e funksionit;

☞ barazimet lineare, ekuivalente dhe përcaktimi i zgjidhjes së barazimit;

☞ diskutimi i zgjidhjeve për barazimin linearë

☞ zgjidhja e problemeve praktike duke zbatua barazimet lineare;

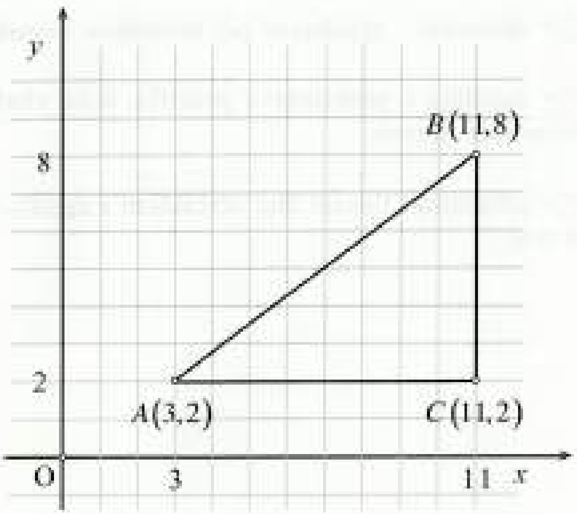
☞ jobarazimi linearë dhe përcaktimi i zgjidhjeve të tyre.



1 SISTEMI KORDINATIV KËNDDREJT, LARGESA MES DY PIKAVE

Kujtohu!

- Çka është sistemi këndrejt i Dekartit?
- Në sistemin kordinativ kënddrejt xOy paraqiti pikat $A(0,2), B(-3,0), C(-2,4)$.
- Caktoni largesën mes pikave $A(3,0)$ dhe $B(7,0)$.



Katetet e trekëndëshit kënddrejt ABC janë:
$\overline{AC} = \overline{A_1B_1} = x_2 - x_1; \overline{BC} = \overline{A_2B_2} = y_2 - y_1$.
Për largesën e kërkuar kemi:

$$d = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

3 Caktoni largesën mes pikave:

a) $A(2,3)$ dhe $B(6,0)$;

b) $M(-3,-2)$ dhe $N(5,4)$.

Vëreni zgjidhjen:

$$d = \sqrt{(5+3)^2 + (4+2)^2} = 10$$

A **1** Në sistemin kordinativ kënddrejt xOy paraqiti pikat $A(3,2)$ dhe $B(11,8)$.
Cakto largesën mes pikave A dhe B.

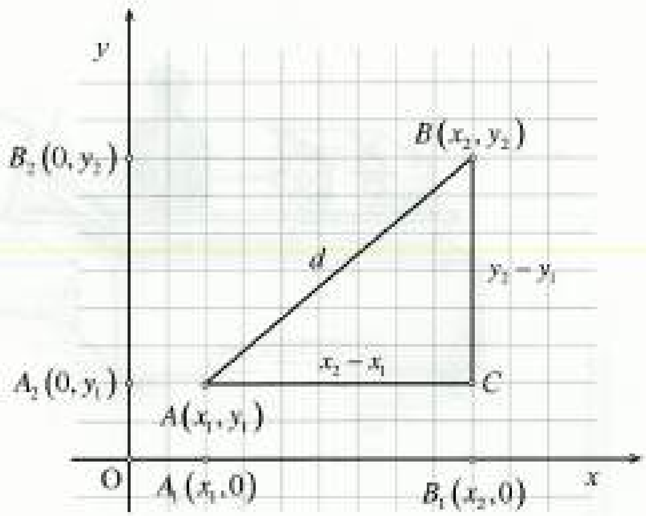
- Vëreni vizatimin:
- Nëpër pikat A dhe B tërheqim drejtëza paralele me boshtet kordinative.
- Caktoni kordinatat për pikën e fituar C.
- I cilit lloj është trekëndëshi ABC ? Caktoni gjatësitë e segmenteveAC dhe BC.Vëreni se:

$\overline{AC} = 11 - 3 = 8, \ \overline{BC} = 8 - 2 = 6$.

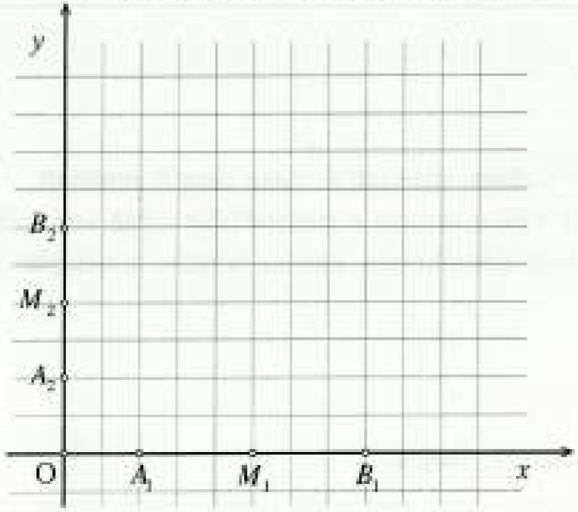
Sipas teoremës së Pitagorës kemi:

$$\overline{AB} = d = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

2 Caktoni largesën mes pikave $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$.
Vëreni zgjidhjen.



4 Janë dhënë pikat $A_1(2,0); B_1(8,0); A_2(0,2); B_2(0,6)$. Caktoni kordinatat e mesit të segmentit A_1B_1 dhe A_2B_2. Zgjidhje: Le të jenë M_1 dhe M_2 pika të mesit të segmenteve A_1B_1 dhe A_2B_2, përkatësisht.



Atëherë, $\overline{A_1M_1} = \overline{B_1M_1}$ dhe $\overline{A_2M_2} = \overline{B_2M_2}$.

Prej $\overline{A_1M_1} = x-2$ dhe $\overline{B_1M_1} = 8-x$, fitojmë

$x-2=8-x$ ose $2x=8+2$,

d.m.th. $x=\dfrac{8+2}{2}=5$.

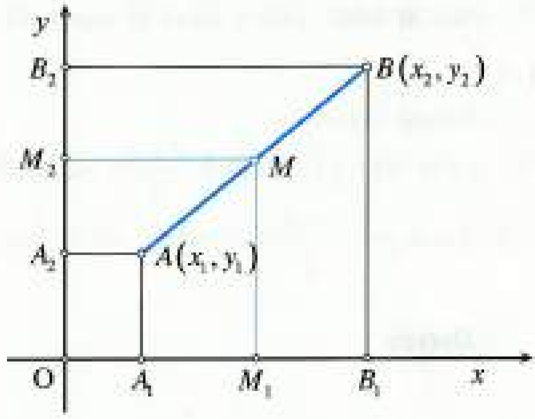
Nga arsyet e njëjta, $\overline{A_2M_2} = \overline{B_2M_2}$, përkatësisht

$y-2=6-y$, d.m.th. $y=\dfrac{6+2}{2}=4$.

Pra, pikat e mesme janë $M_1(5,0)$ dhe $M_2(0,4)$.

5 Pika M është mes i segmentit AB. Caktoni koordinatat e pikës M, nëse $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$.

Le të jenë $A_1, B_1, A_2, B_2, M_1, M_2$ projeksione ortogonale të pikave A, B dhe M në boshtet kordinative.



Është e qartë se pika M_1 është mes i segmentit A_1B_1, dhe apshisa e saj është $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

Analogjikisht, M_2 është pikë e mesit të segmentit A_2B_2 dhe ordinata e saj është $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

Sipas kësaj kordinatat e pikës së mesit $M(x,y)$ për segmentin AB janë:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ dhe } y=\frac{y_1+y_2}{2}, \text{ d.m.th. } M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

6 Caktoni kordinatat e mesit të segmentit AB, $A(-2,3)$ dhe $B(4,-2)$.

7 Është dhënë trekëndëshi ABC, $A(4,-3), B(2,3), C(0,1)$. Caktoni:

a) perimetërin e trekëndëshit të dhënë;

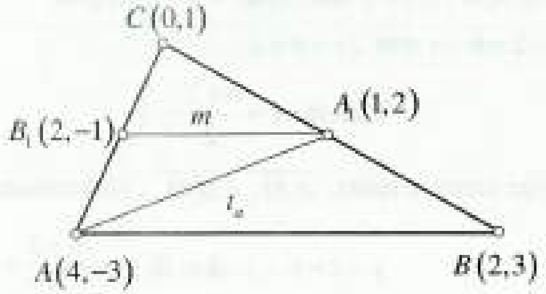
b) Gjatësitë e vijave të rendimit te trekëndëshi ;

c) gjatësitë e vijave të mesme te trekëndëshi.

Vëreni zgjidhjen:

b) Vija e rendimit është segment i cili bashkon kulmin e trekëndëshit dhe mesin e brinjës përball Në këtë rast, një vijë rendimi e trekëndëshit ABC është segmenti AA_1, dhe gjatësia e saj është largesa mes pikave $A(4,-3)$ dhe $A_1(1,2)$, përkatësisht

$$d=\overline{AA_1}=\sqrt{(1-4)^2+(2+3)^2}=\sqrt{34}$$



Caktoni gjatësitë e vijave tjera të rendimit.

c) Vijë e mesme e trekëndëshit është segmenti , skajet e të cilit janë meset e brinjëve të trekëndëshit.

Për gjatësinë e vijës së mesme $B_1A_1, B_1(2,-1), A_1(1,2)$, fitojmë:

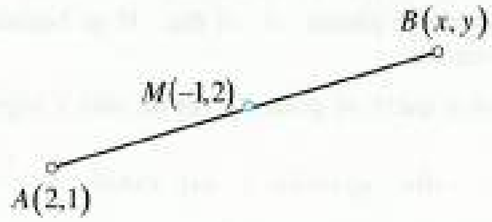
$$m=\overline{B_1A_1}=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}.$$

Cakto gjatësitë e vijave tjera të mesme.

8 Pika M është pikë e mesit të segemntit AB.Caktoni kordinatat e pikës B,nëse $A(2,1)$ dhe $M(-1,2)$.

Vëreni zgjidhjen:

Le të jetë $B(x,y)$. Atëherë $\frac{2+x}{2}=-1$ rrjedh $x=-4$, kurse prej $\frac{1+y}{2}=2$, rrjedh $y=3$. Pra, $B(-4,3)$.



Detyra.

1. Është dhënë pika $M(-3,7)$. Caktoni kordinatat e pikës e cila është simetrike me pikën e dhënë
   a) boshtin x; b) boshtin y; c)Origjinën e sistemit.

2. Pikat $A(3,-7)$ dhe $B(-1,4)$ janë dy pika fqinje të katrorit $ABCD$. Cakto perimetrin dhe syprinën e katrorit.

3. Në boshtin x caktoni pikën që është në largesë të njejtë prej pikave $A(-1,3)$ dhe $B(2,5)$.

4. Në boshtin y caktoni pikën e cila nga pika $M(4,-6)$ është e larguar 5 njësi.

5. Segmenti i dhënë AB me pikat $P(2,2)$ dhe $Q(1,5)$ është ndarë në tre pjesë të barabarta. Caktoni koordinatat e pikave të skajshme të segmentit të dhënë.

(6) Pikat $A(3,-5)$; $B(5,3)$; $C(-1,3)$ janë kulmet e paralelogramit $ABCD$. Caktoni kordinatat e kulmit të katërt.

(7) Janë dhënë dy kulme fqinj $A(3,-5)$ dhe $B(5,-3)$ të paralelogramit $ABCD$ dhe pikëprerja e diagonaleve pika $M(1,1)$. Caktoni kordinatat e kulmeve tjera.

2 SYPRINA E TREKËNDËSHIT

Kujtohu!

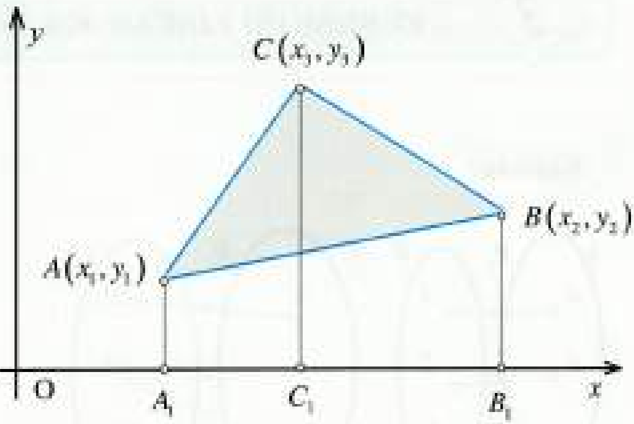
Syprina e trapezit me baza a dhe b, dhe lartësi h është:

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

Vëreni se katërkëndëshat : $AA_1C_1C; CC_1B_1B; AA_1B_1B$ janë trepeza, ku A_1, B_1, C_1 janë proeksionet ortogonale të kulmeve A, B dhe C në boshtin x.

A i dallon bazat dhe lartësitë e atyre trapezave?

A 1 Njehsoni syprinën e trekëndëshit $A(x_1,y_1)$; $B(x_2,y_2)$; $C(x_3,y_3)$.



Vëreni llogaritjen:

$$S_{AA_1C_1C}=\frac{y_1+y_3}{2}\{x_3-x_1\}=\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)$$

$$S_{OC_1B_1B}=\frac{1}{2}(y_3+y_2)(x_2-x_3)$$

$$S_{AA_1B_1B}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)$$

Për syprinën e trekëndëshit ABC kemi: $S_{ABC}=S_{AA_1C_1C}+S_{CC_1B_1}-S_{AA_1B_1B}$ dhe me zëvendësimin e shprehjeve të mësipërme fitojmë:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\{x_1(y_1-y_3)+x_2(y_3-y_2)+x_3(y_1-y_2)\}$$

Nga fakti se syprina është numër jonegativ, formula është nën shenjën e vlerës apsolute.

2 Caktoni syprinën e trekëndëshit ABC, nëseo $A(-3,-1), B(2,1)$ dhe $C(-1,3)$.

Detyra.

1. Caktoni syprinën e trekëndëshit me kulme $A(1,2)$; $B(3,-1)$ dhe $C(-2,-5)$.

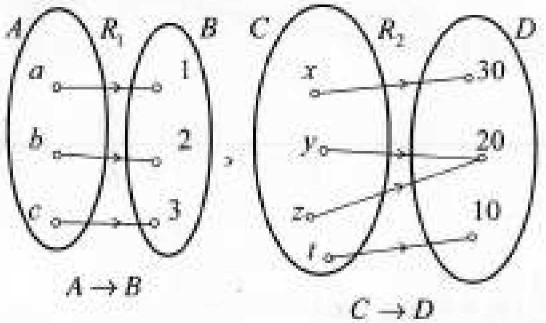
2. Janë dhënë kulmet e trekëndëshit: $A(3,6)$; $B(-1,3)$ dhe $C(2,-1)$. Caktoni gjatësinë e trekëndëshit të tërhequr nga kulmi C.

3. Dy kulme të trekëndëshit janë pikat $A(5,1)$ dhe $B(-2,2)$, kulmi i tretë shtrihet në boshtin x. Caktoni kordinatat e saj, nëse syprina e trekëndëshit është 10 njësi katrore.

4. Syprina e një paralelogrami është 12 njësi katrore. Dy kulme fqinj të së cilit janë pikat $A(-1,3)$ dhe $B(-2,4)$. Caktoni dy kulmet tjera të atij paralelogrami, nëse pika ku priten diagonalet ndodhet në boshtin x.

3 FUNKSIONI LINEAR .GRAFIKU I FUNKSIONIT LINEAR

Kujtohu!



Rregulla sipas së cilës çdo elementi të bashkësisë A i përgjigjet një dhe vetëm një element i bashkësis B quhet pasqyrim ose funksion.

A Koncepri funksion zë një nga vendet kryesore në matematikë. Funksionet me ndryshore reale paraqesin vetëm një rast në teorinë e funksioneve.

Le të jenë A dhe B dy bashkësi joboshes dhe secilit element x nga A i korespondojmë sipas ndonjë rregulle f, në mënyrë të njëvlershme një element y nga B. Në këtë mënyrë është përcaktuar pasqyrimi f prej A kah B të cilin e shënojmë $f: A \rightarrow B$. Për y themi se është pasqyra e x dhe e shënojmë

$$f: x \rightarrow y \text{ ose } y = f(x).$$

Bashkësia A quhet ***domen***, kurse bashkësia B quhet ***kodomen***.

Domenin zakonisht e shënojmë me D .Nëse domeni D është nënbashkësi e bashkësis së numrave $\mathbb{R}$ dhe nëse f është pasqyrim prej D në $\mathbb{R}$,atëherë themi se f është ***funksion real***. Domenin D ose D_f e quajmë ***fushë të përkufizimit*** të funksionit f , kurse bashkësinë e të gjitha pasqyrave të kodomenit e shënojmë me V_f e quajmë bashkësi të vlerave të funksionit përkatësisht:

$$V_f = \{y | y \in \mathbb{R}, y = f(x), x \in D_f\}.$$

Nëse gjatë dhënies së funksionit nuk është shënuar domeni D_f, do të marrim se domeni është bashkësia e të gjitha atyre numrave real për të cilat ai funksion ka kuptim.

Për shembull: funksioni $f(x) = 2x$ është definuar për çdo $x \in \mathbb{R}$ dhe $D_f = \mathbb{R}$,kurse funksioni $f(x) = \frac{1}{x}$ është përkufizuar për të gjithë numrat realë , përveç për $x = 0$, ose $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, d.m.th. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1 Le të jetë dhënë funksioni $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$. Cakto: a) D_f ; b) $f(1)$; $f(0)$; $f(-2)$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $x + 1 \neq 0$, $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ ose $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

b) $f(-2) = \frac{2 \cdot (-2) + 3}{-2 + 1} = 1$.

Kujtohu!

Çfarë vartësie mes veti kanë

a) rruga dhe koha te lëvizja e njëtrajtshme, $S = V \cdot t$;

b) Rrezja dhe perimetri te rrethi, $L = 2r\pi$;

v) brinja dhe perimetri i katrorit, $L = 4a$?

Funksioni i formës $f(x) = ax + b$ ose $y = ax + b$, ku $a, b \in \mathbb{R}$ quhet funksion linear. Tani,

a - ***koeficient para ndryshores***, kurse

b - ***term i lirë***.

Për funksionin linear $y = ax + b$, kemi:

- a dhe b janë konstante (d.m.th. numra realë);
- domeni është bashkësia e numrave realë;
- grafiku i funksionit realë është bashkësia $G = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = ax + b\}$.

Kujtohu!

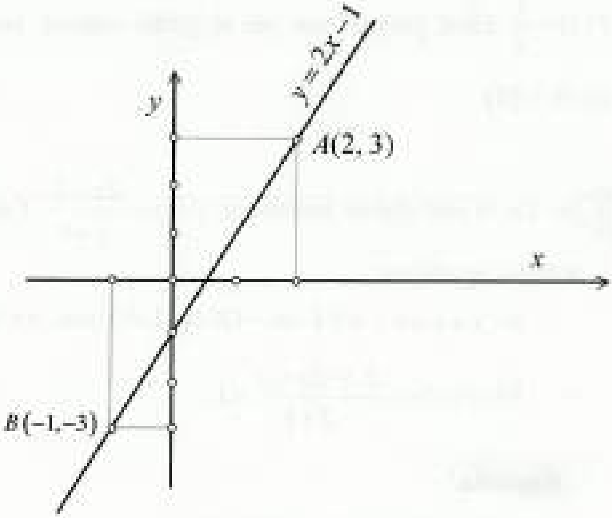
- Ku paraqitet grafiku i funksionit linearë?
- Çka është grafiku i funksionit linearë?
- Çka duhet të dish që të vizatosh grafikun e funksionit?

Grafikun e funksionit linearë e paraqesim në sistemin kënddrejt të Dekartit.

Është e njohur se grafiku i funksionit linearë është gjithmonë drejtëz. Sipas aksiomës për përcaktimin e drejtëzës është e mjaftueshme të gjenden dy pika të atij grafiku.

Në vizatim është paraqitur grafiku i funksionit $y=2x-1$.

Pikat $A(2,3)$ dhe $B(-1,-3)$ e përcaktojnë drejtëzën, sepse $(-1,-3)\in G$ dhe $(2,3)\in G$. Zakonisht thuhet se drejtëza e fituar është "***grafik i funksionit*** $y=2x-1$ ".



2 Në të njëjtin sistem kordinativ vizatoni drejtëzat për funksionet përkatëse $y=2x-3$ dhe $y=-x+2$.

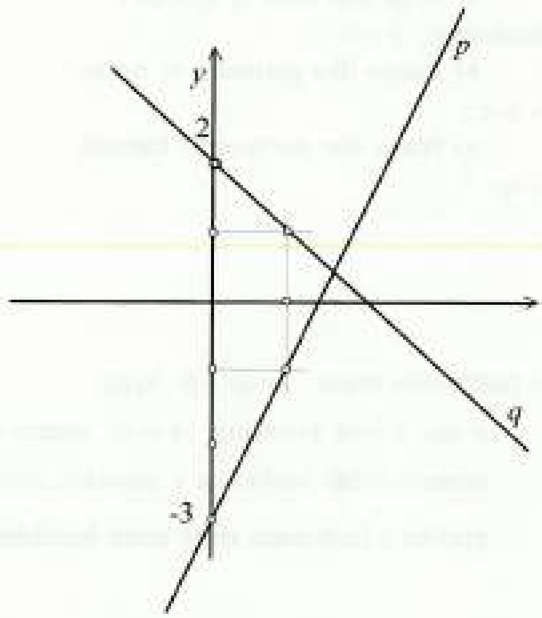
Funksionet e dhëna i paraqesim tabelarisht:

p: $y=2x-3$

x	y
0	-3
1	-1
2	1

q: $y=-x+2$

x	y
1	1
0	2
-1	3



3 Vizatoni drejtëzat me të cilat grafikisht paraqitet funksioni:

a) $y=x-3$; b) $y=-2x+1$; c) $y=\frac{1}{2}x-3$.

Detyra:

(1) Është dhënë funksioni $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$. Caktoni: a) D_f; b) $f(-1)$; c) $f(0)$; d) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

(2) Vizatoni grafikun e funksionit: a) $y=2x+3$; b) $y=-2x+3$; c) $y=\dfrac{1}{3}x-1$; d) $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

4 VETITË E FUNKSIONIT LINEAR

Kujtohu!

- Çka është grafik i funksionit linear?
- Si vizatohet grafiku i tij?
- Kontrolloni cila prej pikave $A(2,-1)$, $B(0,2)$ dhe $C(-1,-3)$ shtrihet në drejtëzë $y=3x+2$.

A 1 Në të njëjtin sistem kordinativ vizatoni grafikët e funksioneve:

a) $y=\dfrac{1}{2}x+2$; b) $y=\dfrac{1}{2}x$; c) $y=\dfrac{1}{2}x-3$.

- Çka vëreni?
- Çka mund të përfundosh?

Vëreni zgjidhjen: Funksionet e dhëna i paraqesim grafikisht dhe tabelarisht:

a) $y=\dfrac{1}{2}x+2$

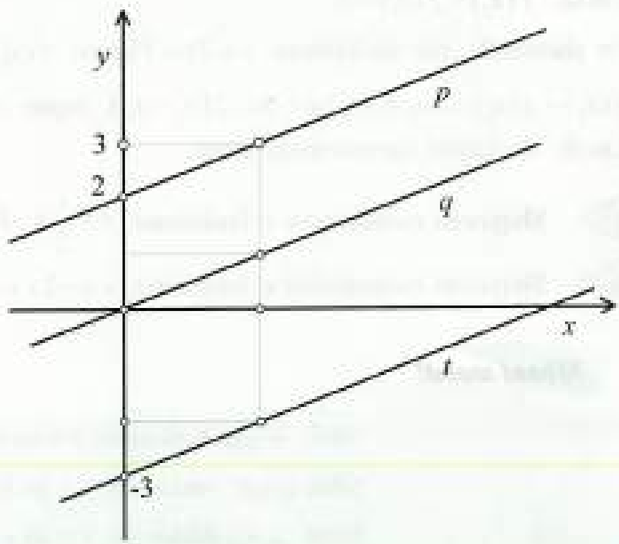
x	y
2	3
0	2
-2	0

b) $y=\dfrac{1}{2}x$

x	y
2	1
0	0
-2	-1

c) $y=\dfrac{1}{2}x-3$

x	y
2	-2
0	-3
-2	-4



Mbani mend!

Nëse kueficientët para argumentit te funksionet lineare janë të njëjtë , atëherë grafikët e tyre do të jenë drejtëza paralele.

Grafiku i funksionit linearë $y=ax+b$ e pret boshtin y në pikën me kordinata $(0,b)$.

Vlera e argumentit për të cilën funksioni bëhet zero, quhet **zero** e funksionit.

2 Janë dhënë funksionet: $y=-\frac{1}{2}x+2$ dhe $y=-\frac{1}{2}x-1$.

a) Çfarë pozite reciproke kanë grafikët e tyrei?

b) Caktoni pikëprerjet e grafiqeve të tyre me boshtet kordinative.

3 Caktoni parametrin k te funksionet $y=(k-1)x+3$ dhe $y=(2k+3)x$, ashtu që grafikët e tyre të jenë drejtëza paralele.

Koeficienti a i funksionit $y=ax+b$ quhet ***koeficient i drejtimit***, prej vlerës së tij varet ndryshimi i funksionit, d.m.th. a do të **rritet** ose **zvogëlohet** funksioni.

Nëse $a=0$, atëherë $y=0\cdot x+b$, d.m.th. $y=b$ funksioni është konstant dhe funksioni është drejtëzë paralele me boshtin x.

Nëse grafiku i funksionit linearë është drejtëz paralele me boshtin y atëherë është i formës $x=m$.

4 Në të njëjtin sistem kordinativ paraqiti grafikët e funksioneve $y=3$ dhe $x=2$.

Për monotoninë e funksionit linearë vlen:

Funksioni është ***monotono rritës*** nëse për çdo $x_1,x_2\in D_f$ dhe $x_2>x_1$, $f(x_2)>f(x_1)$, d.m.th.

$$f(x_2)-f(x_1)>0.$$

Funksioni është ***monotono zvogëlues nëse për çdo*** $x_1,x_2\in D_f$ dhe $x_2>x_1$, $f(x_2)<f(x_1)$, d.m.th. $f(x_2)-f(x_1)<0$.

Për shembull, për funksionin $y=2x+3$ kemi: $f(x_2)=2x_2+3$ dhe $f(x_1)=2x_1+3$, pra $f(x_2)-f(x_1)=2x_2+3-2x_1-3=2(x_2-x_1)$. Sepse $x_2>x_1$, d.m.th. $x_2-x_1>0$, rrjedh $f(x_2)-f(x_1)>0$, d.m.th. funksioni monotonisht rritet.

5 Shqyrtoni monotoninë e funksionit $y=\frac{1}{2}x-1$.

6 Shqyrtoni monotoninë e funksionit $y=-2x+1$.

Mbani mend!

Nëse $a>0$ funksioni $y=ax+b$ monotonisht rritet.

Nëse $a<0$ funksioni $y=ax+b$ monotonisht zvogëlohet.

Nëse $a=0$ funksioni $y=ax+b$ është konstant.

7 Për cilën vlerë të parametrit k, funksioni $y=(2k-1)x+3$ monotono:

a) rritet; b) zvogëlohet; c) është konstante?

Vëreni zgjidhjen:

b) Funksioni $y=(2k-1)x+3$ monoton zvogëlues nëse $2k-1<0$, d.m.th. nëse $k<\frac{1}{2}$.

8 Caktoni anëtarin e lirë b te funksioni $y=2x+b$, nëse grafiku i tij kalon nëpër pikën:

a) $A(-1,2)$; b) $B(2,-3)$. Pastaj për vlerën e fituar të b vizatoni grafikët e tyre.

Vëreni zgjidhjen:

a) Prej $2=2\cdot(-1)+b$, rrjedh $b=4$, dhe funksioni është $y=2x+4$.

9 Caktoni funksionin $y=ax+b$, nëse grafiku i tij kalon nëpër pikat $A(-1,0)$ dhe $B(2,3)$.

Vëreni zgjidhjen:

Kordinatat e pikave A dhe B e plotësojnë barazimin $y=ax+b$ dhe prej këtu fitohet sistemi i barazimeve:

$$\begin{cases}-a+b=0\\ 2a+b=3\end{cases}, \text{ prej ku } a=1 \text{ dhe } b-1.$$

Sipas kësaj, funksioni i kërkuar është $y=x+1$.

10 Caktoni funksionin $f(x)=ax+b$, grafiku i të cilit kalon nëpër pikat $A(-1,3)$ dhe e pret boshtin e abshisës në $x=4$.

11 Njehsoni syprinën e trekëndëshit i kufizuar me boshtet kordinative dhe me drejtëzën $y=2x+4$.

Detyra:

1. Paraqiti grafikisht funksionet: a) $y=x-2$; b) $y=2x+3$; c) $y=-2x+1$;

   d) $y=\frac{1}{2}x-1$; e) $y=-2$; f) $x=3$.

2. Caktoni pikat ku grafiku i funksionit : a) $y=x-1$; b) $y=2x-3$; c) $y=-3x+6$ i pret boshtet kordinative.

3. Caktoni funksionin linearë i cili kalon nëpër pikat:

   a) $A(2,-3)$ dhe $B(0,-1)$; b) $C(2,-4)$ dhe $D(-3,0)$;

4. Për cilën vlerë të parametrit k, grafiku i funksionit $y=(k-1)x+1$ është paralelë me boshtin e abshisës?

5. Për cilën vlerë të parametrit m, grafikët e funksioneve $y=mx+1$ dhe $y=(2m-3)x+1$ janë paralele?

6. Për cilën vlerë të parametirit k, grafiku i funksionit $y=(k+1)x-2$ është paralel me grafikun e funksionit $y=2x+1$?

5 BARAZIMI LINEAR ME NJË NDRYSHORE

Kujtohu!

Barazimet e formës: $2x-1=3$;

$3x-x+2+2x=0$; $\frac{x-2}{2}-\frac{x}{3}=1$ janë

barazime lineare me një ndryshore.

Caktoni zgjidhjet e barazimeve të dhëna.

A 1 Nëse M dhe N janë dy shprehje algjebrike dhe nëse vetëm njëri prej tyre përmban të panjohur, atëherë barazimi

$$M=N$$

quhet ***barazim algjebrik***.

Për shembull, për $M=x^2-2$ dhe $N=\frac{2x-1}{3}$, barazimi $x^2-2=\frac{2x-1}{3}$ është barazim algjebrik.

Nëse te barazimi i dhënë $M=N$ e panjohura zëvendësohet me një numër të përcaktuar real a dhe pas kësaj ai barazim bëhet barazim i vërtetë numerik , atëherë për numrin a themi se është zgjidhje ose rrënjë e barazimit të dhënë.

Të gjitha zgjidhjet e një barazimi e përbëjnë bashkësinë e zgjidhjeve të atij barazimi.

Disa barazime kanë më shumë zgjidhje , por ka barazime të cilat bashkësinë e zgjidhjeve e kanë bashkësi boshe.Për shembull, barazimi $x(x-1)(x+2)=0$ ka tre zgjidhje, dhe atë $x\in\{-2,1,0\}$, kurse barazimi $x^2+1=0$ në bashkësinë $\mathbb{R}$ nuk ka zgjidhje. (Pse?)

Caktoni bashkësitë e zgjidhjeve të barazimit: $x+2=\frac{1}{3}+2x$ dhe $3x-6x=-5$.

Vëreni zgjidhjen: $x-2x=\frac{1}{3}-2, x=1\frac{2}{3}$; $-3x=-5, x=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$.

Bashkësitë e zgjidhjeve të barazimeve të dhëna janë të njëjta, $x\in\left\{1\frac{2}{3}\right\}$. Pra, ato barazime janë ekuivalente

Kujtohu!

Dy barazime në një bashkësi të përkufizuar janë ekuivalente nëse bashkësitë e zgjidhjeve të tyre janë të barabarta.

Zgjidhni barazimet $2x+2=5-x$ dhe $4x+5=10-x$.

Vëreni se këto barazime kanë bashkësi zgjidhjesh të barabarta , çka domethënë se janë ekuivalente.

Disa veti të barazimeve ekuivalente:

1. Nëse në anën e majtë dhe të djathtë të barazimit $M=N$ shtojmë një numër të njëjtë ose shprehje p e cila është e definuar në të njëjtën bashkësi fitohet barazim ekuivalent me barazimin e dhënë.

2 Zgjidhni barazimin , $2x-2=4+x$. Shtoni në anën e majtë dhe të djathtë shprehjen $(-x+2)$.

Rrjedhim 1. Secili anëtarë i barazimit mund të kalojë prej njërës anë në tjetrën por me shenjë të kundërt.

Rrjedhimi 2. Nëse në të dy anët e barazimit ka anëtarë të njëjtë atëherë ato mund të largohen (të anulohen).

2. Nëse të dy anët e barazimit $M = N$ shumëzohen ose pjesëtohen me një numër të njëjtë $a \neq 0$, fitohet barazim ekuivalent me barazimin e dhënë.

3 Zgjidhe barazimin $5x = 2x + 9$.

Vëreni zgjidhjen:

$$5x = 2x + 9$$
$$5x - 2x = 9$$
$$3x = 9$$
$$x = \frac{9}{3}$$
$$x = 3.$$

Nëse pasi të rregullohet barazimi algjebrik $M = N$ fitohet barazim me vetëm një të panjohur të rendit të parë, atëherë ai barazim quhet *barazim linearë me një të panjohur.*

Çdo barazim linearë me një të panjohur mund të sillet në formën

$$ax = b, \quad \text{ku} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$\mathscr{B}$ 4 Zgjidhni barazimet: a) $2x - 3 = x + 6$; b) $2x - 1 = 3 + 2x$; c) $x - 3 = 2x - 3 - x$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $2x - 3 = x + 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x - x = 6 + 3$, d.m.th. $x = 9$

b) $2x - 1 = 3 + 2x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x - 2x = 3 + 1$ $\Leftrightarrow 0 \cdot x = 4$

c) $x - 3 = 2x - 3 - x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x - 2x + x = -3 + 3$ $\Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$

Vëreni se barazimi $2x - 3 = x + 6$ ka një zgjidhje, barazimi $2x - 1 = 3 + 2x$ nuk ka zgjuidhje, kurse barazimi $x - 3 = 2x - 3 - x$ ka pakufi shumë zgjidhje.

Varësisht nga vlerat e numrave realë a dhe b në barazimin $ax = b$, kemi:

1. Nëse $a \neq 0$, atëherë barazimi ka një zgjidhje $x = \frac{b}{a}$.
2. Nëse $a = 0 \wedge b \neq 0$, atëherë barazimi nuk ka zgjidhje d.m.th. është apstrakt.
3. Nëse $a = 0 \wedge b = 0$, atëherë barazimi është i formës $0 \cdot x = 0$, pra ka pakufi shumë zgjidhje.

5 Diskutoni zgjidhjet e barazimit $2x + 2ax = b$.

Vëreni zgjidhjen:

Barazimi i dhënë është ekuivalent me barazimin $2(1 + a)x = b$.

1. Për $a + 1 \neq 0$, d.m.th. $a \neq -1$, barazimi ka një zgjidhje $x = \frac{b}{2(a+1)}$.
2. Për $a = -1 \wedge b \neq 0$, barazimi është i formës $0 \cdot x = b$, çka domethënë se nuk ka zgjidhje.
3. Për $a = -1 \wedge b = 0$,, fitohet barazimi $0 \cdot x = 0$ i cili ka pafund shumë zgjidhje.

Detyra:

① Kontrolloni a janë barazimet ekuivalente:

a) $\frac{1+2x}{3}=\frac{4x-1}{5}$ dhe $10x-12x=-8$; b) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5x}{6}+1$ dhe $6x-5x=6$.

② Zgjidhni barazimet: a) $\frac{2x-1}{3}-\frac{1-x}{4}=\frac{x}{2}$; b) $\frac{5x+1}{8}+\frac{3x-1}{4}-\frac{4x-3}{3}-1=0$;

c) $(x+1)^2-(x-1)^2=4$; d) $(3x-1)^2+(4x+3)^2=(5x+4)^2$.

③ Diskutoni zgjidhjet e barazimit:

a) $ax+a+1+x=0$; b) $a(x+b)+b(x+a)=0$.

6 DETYRA QË KTHEHEN NË BARAZIME LINEARE

Disa lloje barazimesh , për shembull barazimet thyesore algjebrike , me transformime elementere mund të kthehen në formën $ax=b$.

1 Zgjidhni barazimin $\frac{x+2}{x}-\frac{x-2}{x+1}=\frac{9x}{x^2+x}$.

Vëreni zgjidhjen:

Duhet të caktohet bashkësia e përkufizimit për barazimin. Në këtë rast, për $x=0$ dhe $x=-1$ barazimi nuk ka kuptim, d.m.th. barazimi është i përkufizuar për $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$.

Pastaj të dy anët e barazimit i shumëzojmë me $\text{SHVP}\left(x,x+1,x^2+x\right)=x\cdot(x+1)$.

Fitojmë: $(x+2)\cdot(x+1)-x\cdot(x-2)=9x$. Prej ku rrjedh $x=\frac{1}{2}$ është zgjidhje e barazimit, sepse i takon bashkësis së përkufizimit të barazimit.

2 Zgjidhni barazimin $\frac{2x-5}{x+3}+\frac{1+3x}{x^2+6x+9}=2$.

Vëreni zgjidhjen:

Barazimi ka kuptim për $x+3\neq 0$, d.m.th. $x\neq -3$,

dhe barazimi $\frac{2x-5}{x+3}+\frac{1+3x}{(x+3)^2}=2\,\Big|\cdot(x+3)^2,\ x\neq -3$ është ekuivalent me barazimin

$$(2x-5)(x+3)+1+3x=2(x+3)^2.$$

Prej ku rrjedh $x=-4$ është zgjidhje e barazimit.

3 Caktoni rrënjët (zgjidhjet) e barazimit: $\dfrac{a-5}{x-3}+\dfrac{2a+3}{x+3}=\dfrac{x-3a}{x^2-9}$.

Vëreni zgjidhjen:

Sepse $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$, barazimin e dhënë e shumëzojmë me $\text{SHVP}\left(x-3,x+3,x^2-9\right)=x^2-9$, dhe fitojmë: $(a-5)(x+3)+(2a+3)(x-3)=x-3a$, t.e. $(a-1)x=8$.

Për $a\neq -1$ barazimi ka zgjidhje $x=\dfrac{8}{a-1}$.

Për $a=1$, barazimi ka formën $0\cdot x=8$, d.m.th. barazimi nuk ka zgjidhje.

4 Caktoni zgjidhjen e barazimit $\dfrac{8}{x^2-2x+1}+\dfrac{9x-37}{x^3-x^2-x+1}-\dfrac{7}{1-x^2}=0$.

Përcillni procedurën:

Që të caktojmë SHVP duhet secilin emërues ta zbërthejmë në shumëzues linearë:

$$A=x^2-2x+1=(x-1)(x-1),$$

$$B=x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x^2-1)(x-1)=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1),$$

$$C=x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Prej ku rrjedh se $\text{SHVP}(A,B,C)=(x-1)^2(x+1)$, dhe fitojmë:

$$\frac{8}{(x-1)^2}+\frac{9x-37}{(x-1)^2(x+1)}+\frac{7}{(x-1)(x+1)}=0\,\Big|\cdot(x-1)^2(x+1),\ x\notin\{-1,1\},\ \text{ose}$$

$$8(x+1)+9x-37+7(x-1)=0,\ \text{d.m.th. } x=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

Detyra:

Caktoni zgjidhjen e barazimit:

(1) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{5}{2x+2}=\dfrac{3}{2}$; (2) $\dfrac{4}{12x+15}-\dfrac{5}{8x+10}+\dfrac{7}{6}=0$; (3) $\dfrac{9}{5x}-\dfrac{8}{10x-5}=\dfrac{4x-1}{4x^2-1}$;

(4) $\dfrac{1}{2x-5}+\dfrac{4}{3x}-\dfrac{13}{6x^2-15x}=0$; (5) $\dfrac{4+a}{x-1}=3-a$.

7 ZBATIMI I BARAZIMEVE LINEARE

Në këtë pjesë do të vërejmë disa shembuj zgjidhja e të cilëve merret nga përpilimi i barazimeve lineare me një ndryshore .

1 Numri 48 të ndahet në dy pjesë , ashtu që njëra pjesë të jetë tre herë më e madhe se tjetra.

Vëreni zgjidhjen:

Le të jetë pjesa më e vogël x, atëherë pjesa më e madhe do të jetë $3x$. Prej këtu rrjedh barazimi $x+3x=48 \Leftrightarrow x=12$. Pra njëra pjesë është 12 ,kurse tjetra 36.

2 Një numër dyshifror është 6 herë më i madh se shifra e njësheve , kurse shuma e shifrave të tij është 6.Cili është ai numër?

Vëreni zgjidhjen:

Le të jetë $\overline{xy}=10x+y$ numri i kërkuar, ku x shifra e dhjetësheve , kurse y shifra e njësheve. Atëherë nga kushti i detyrës rrjedh se shifra e njësheve është $6-x$, barazimi është $10x+(6-x)=6(6-x)$, prej ku $x=2$ .Pra, numri i kërkuar është 24.

3 Babai tani ka 53 vjet, kurse i biri 17 vjet.

a) Pas sa vjetësh babai do të jetë tre herë më i vjetër si i biri?

b) Para sa vjetësh babai ishte dhjetë herë më i vjetër se i biri?

Vëreni zgjidhjen:

a) Pas x vjetësh babi do të jetë tre herë më i vjetër se i biri. Nga kushti i detyrës kemi :

	tani	*pas x vjetësh*
Babai	53	$53+x$
I biri	17	$17+x$

ose

$53+x=3(17+x)$, d.m.th. $x=1$. Pra, Pas një viti babai do të jetë tre herë më i vjetër se i biri.

4 Një gyp mundet vetë ta mbush pishinën për 20 orë. Nëse në të njëjtën kohë hapet edhe një gyp tjetër , atëherë pishina do të mbushet për 8 orë. Për sa kohë gypi i dytë vetë do ta mbush pishinën?

Vëreni zgjidhjen: Le të jetë x koha për të cilën gypi i dytë vetë do ta mbush pishinën.

Për një orë gypi i parë do ta mbush $\frac{1}{20}$ e pishinës, i dyti për $\frac{1}{x}$, kurse bashkarisht $\frac{1}{8}$ e pishinës. Sipas kësaj, kemi: $\frac{1}{20}+\frac{1}{x}=\frac{1}{8}\Big|\cdot 40x,\ x\neq 0$ ose $2x+40=5x$, d.m.th. $x=\frac{40}{3}$.

Sipas kësaj gypi i dytë vetë do ta mbush pishinën për 13 orë e 20 minuta.

5 Një udhëtar u nis për rrugë duke lëvizur me shpejtësi $30\ km$ në ditë. Pas 6 ditësh pas tij u nis një udhëtarë tjetër dhe pas 9 ditësh e arrin udhëtarin e parë. Me çfarë shpejtësie mesatare udhëtoi udhëtari i dytë?

Zgjidhje. Meqë të dy udhëtarët kanë kaluar rrugë të njëjtë , nga kushtet e detyrës fitojmë $S_1 = S_2$, ose $30\cdot(6+9) = V\cdot 9$, d.m.th. $V = 50$. Pra udhëtari i dytë lëvizte me shpejtësi mesatare prej $50\ km$ në ditë.

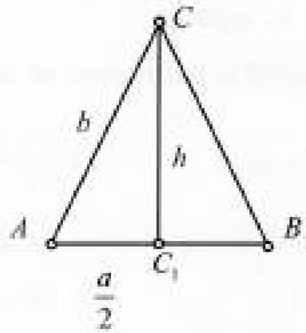
6 Një punëtorë vetë e kryen një punë për 12 ditë. Pasi punoi tre ditë , atë e ndihmoi edhe një punëtorë i cili vetë gjithë punën mund ta kryejë për 15 ditë. Pas sa ditësh do të kryhet puna?

Vëreni zgjidhjen: Punëtori i parë për tri diitët e para ka kryer $\frac{3}{12}$ e punës, kurse të dy punëtorët bashkarisht për një ditë kanë kryer $\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)$ e punës. Sipas kësaj, kemi:

$\frac{3}{12}+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)\cdot t = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{12}+\frac{9t}{60} = 1 \,|\cdot 60 \Leftrightarrow t = 5$, a kjo domethënë se puna do të kryhet për $5+3 = 8$ ditë.

7 Krahu i trekëndëshit barakrahës është për $6\ cm$ më i gjatë se gjatësia e lartësis së bazës. Caktoni gjatësinë e krahut nëse gjatësia e bazës është $36\ cm$.

Nga vizatimi djathtas kemi:



$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

$$b^2 = (b-6)^2 + 18^2;$$

$$b = 30.$$

Pra, krahu është $30\ cm$.

Detyra:

1. Numri 60 të ndahet në dy pjesë, ashtu që pas pjesëtimit të pjesës më të madhe me pjesën më të vogël fitohet herësi 2 dhe mbetja 3.
2. Djali është për 20 vjet më i vogël se babai , kurse para 5 vjetësh ishte 5 herë më i ri se ai. Nga sa vjet ka secili prej tyre?
3. Janë përzier $60\ l$ alkohol prej 72% dhe $70\ l$ prej 90%. Sa litra ujë duhet të shtohet ashtu që përzierja të ketë 46%?
4. Raporti i shpejtësive të dy biçikletistëve është $5:4$, kurse i pari për 4 orë kaloi rrugë për $12\ km$ më shumë se i dyti. Caktoni shpejtësitë e tyre mesatare.

8 JOBARAZIMET LINEARE ME NJË NDRYSHORE

Kujtohu!

- çka është jobarazim numerik?
- çka është intervali i numrave?
- Bashkësinë $\{x | x \in \mathbb{R} \wedge -2 < x < 3\}$ shkruani si interval.
- çka është zgjidhje e jobarazimit $x \geq 1$? Shkruani këtë zgjidhje me interval dhe grafikisht në drejtëzën numerike..

A **1** Të cilit lloj janë jobarazimet:

$3x - 2 < 3 - x$; $2x^2 - 4 > 0$; $\dfrac{(x-2)^2}{x+2} < 0$?

Nëse dy shprehje algjebrike M dhe N me një ndryshore, lidhen me ndonjërën nga shenjat $<, \leq, >$ ose $\geq$, për shembull $M < N$, fitohet *jobarazimi linearë me një ndryshore.*

Bashkësia e vlerave të ndryshores për të cilat jobarazimi $M < N$ kthehet në jobarazim numerik të vërtetë, quhet zgjidhje e jobarazimit.

Për shembull, bashkësia e zgjidhjeve të jobarazimit $x + 2 \geq 0$ është bashkësi e të gjitha numrave më të mëdhej ose të barabartë me (-2), përkatësisht $x \in [-2, \infty)$.

Zgjidhje e jobarazimit $x^2 + 2 > 0$ është bashkësia $\mathbb{R}$, d.m.th. $x \in (-\infty, \infty)$, prej nga jobarazimi a $x^2 + 2 < 0$ nuk ka zgjidhje.

2 A kanë zgjidhje jobarazimet në bashkësinë $\mathbb{R}$?

a) $2x^2 + 3 < 0$; b) $\dfrac{x^2+1}{x^2} \leq 0$; c) $(x-2)^2 + 3 < 0$.

3 Shkruani në formë të intervalit bashkësinë e zgjidhjeve të jobarazimeve:

a) $x \geq 3$; b) $x \leq -2$; c) $2x > 4$.

B Për dy jobarazime themi se janë ekuivalente, nëse kanë bashkësi zgjidhjesh të barabarta.

4 Zgjidhni jobarazimet:

a) $3x - 2 > 4 + x$; b) $2x - 1 < 3x - 4$.

Vëren se barazimet e dhëna kanë bashkësi zgjidhjesh të njëjta, çka domethënë se janë ekuivalente.

■ *Vetitë për ekuivalencë të jobarazimeve*

1. Nëse të dy anëve të jobarazimit $M < N$ u shtojmë një numër të njëjtë ose shprehje racionale P nga bashkësia e përkufizimit të të panjohurës, fitohet jobarazim ekuivalent me jobarazimin e dhënë.

5 Zgjidhni jobarazimin $4x-2<3x+3$.

Vëreni zgjidhjen:

■ $4x-2+(-3x+2)<3x+3+(-3x+2)$, gjegjësisht $x<5$, dhe zgjidhja është $x\in(3,\infty)$.

2. Nëse të dy anët e barazimit shumëzohen ose pjesëtohen me një numër të njëjtë $a>0$, fitohet jobarazim ekuivalent me jobarazimin e dhënë.

6 Zgjidhni jobarazimin $5x>4x+2$.

3. Nëse të dy anët e jobarazimit shumëzohen me një numër $a<0$, atëherë ndërron shenja e krahasimit.

7 Zgjidhni jobarazimin $2x-1>x+2$.

Rrjedhim 1. Secili anëtarë i jobarazimit mund të kaloj prej një ane në tjetrën por në anën tjetër e merr shenjën e kundërt.

Rrjedhim 2. Nëse në të dy anët e jobarazimit ka anëtarë të njëjtë, atëherë ato mund t'i largojmë (anulojmë).

8 Duke u bazuar në vetitë e mësipërme, kontrolloni ekuivalencën e jobarazimeve

$\frac{x-5}{2}-\frac{5x-3}{6}>3$ dhe $-12-2x>18$.

C ■ Secili jobarazim i cili mund të sillet në formën

$$ax>b \text{ ose } ax<b,$$

ku $a,b\in\mathbb{R}$, quhet *jobarazim linear me një ndryshore.*

9 Zgjidhni jobarazimin $\frac{x-4}{3}-\frac{x+3}{2}+\frac{17}{6}<0$.

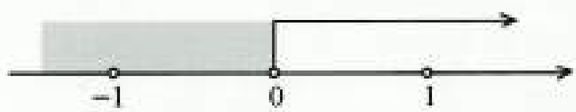
Vëreni zgjidhjen:

■ Duke i zbatuar vetitë e përmendura kemi:

$$\frac{x-4}{3}-\frac{x+3}{2}+\frac{17}{6}<0\ |\cdot 6 \Leftrightarrow 2(x-4)-3(x+3)+17<0.$$

Pasi të rregullojmë, fitojmë jobarazimin $-x<0$, d.m.th. $x>0$. Pra, zgjidhje e jobarazimit është intervali $x\in(0,\infty)$.

Në boshtin numerik është ngjyrosur pjesa e cila nuk i takon intervalit $x\in(0,\infty)$.



Detyra:

(1) Zgjidhni jobarazimet:

a) $2x+1>8-5x$;   b) $\frac{8x}{3}-\frac{7x}{2}+\frac{5}{2}<4-\frac{3x+7}{4}$;

c) $x-\frac{3x+1}{2}-\frac{4x-1}{3}<0$;   d) $\frac{x}{6}-\frac{1-x}{4}-\frac{1+x}{3}-\frac{x-2}{24}>0$.

(2) Zgjidhni jobarazimet: $\frac{x+1}{3}-2\cdot(x+3)<\frac{1}{2}$ në bashkësinë e numrave të plotë negativ.

(3) Caktoni të gjitha numrat realë për të cilat ndryshimi i shprehjeve $3x-1$ dhe $3x+2$ është më e vogël se ndryshimi i katrorëve të tyre.

Ushtrim kontrollues tematik

(1) Është dhënë trekëndëshi ABC, $A(2,3)$, $B(-2,4)$, $C(-4,4)$. Njehso:

a) Perimetrin,

b) syprinën e trekëndëshit të dhënë.

(2) Caktoni perimetrin e katërkëndëshit , kulmet e të cilit janë meset e brinjëve të katërkëndëshit $ABCD$. $A(2,0)$, $B(-2,4)$, $C(-4,0)$, $D(-2,-2)$.

(3) Caktoni fushën e përkufizimit të funksionit: $y=\frac{2}{x^2+x}$;

(4) Në të njëjtin sistem kordinativ vizatoni grafikët e funksioneve:

a) $y=2x-2$ dhe b) $y=-x+2$.

(5) Zgjidhni jobarazimin $\frac{x-7}{4}+1=\frac{3x-1}{5}-\frac{5x+1}{12}$.

(6) Caktoni zgjidhjen e jobarazimit $\frac{x-1}{2}-\frac{2-x}{3}>x-\frac{1}{2}$.

(7) Shuma e shifrave të një numri dyshifrorë është 9. Nëse ai numër rritet për 9, fitohet numër me të njëjtat shifra , por me renditje të kundërt . Cili është ai numër?

TEMA 7

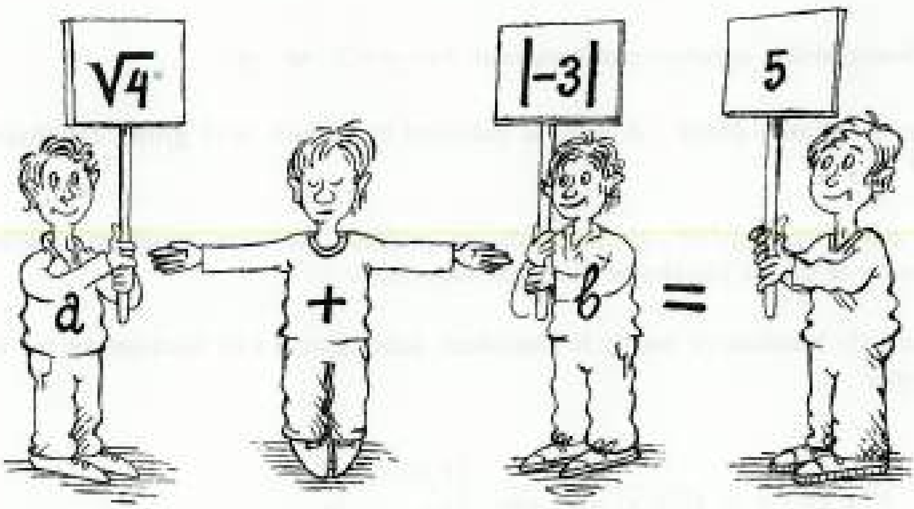
SISTEMET E BARAZIMEVE DHE JOBARAZIMEVE LINEARE

Nuk ka probleme të zgjidhura, ka vetëm probleme më pak ose më shumë të zgjidhura

H. Poenkare (1854-1912)

Në këtë temë do të njihesh me:

- sistemi i barazimeve lineare me dy të panjohura;
- Zgjidhjen e sistemit të barazimeve lineare me metodën e zëvendësimit , koeficientëve të kundërt dhe metogën grafike;
- determinanta e rendit të dytë dhe zgjidhja e sistemit të barazimeve me formulat e Kramerit;
- sistemi i jobarazimeve lineare me një të panjohur;
- zgjidhja e sisteimit të jobarazimeve lineare me një të panjohur;
- paraqitja grafike e zgjidhjes së sistemit të jobarazimeve lineare me një të panjohur;



1 SISTEMI I DY BARAZIMEVE LINEARE ME DY TË PANJOHURA

Kujtohu!

Barazimi $2x + y = 4$ në bashkësinë e numrave të plotë ka zgjidhjen $(1,2),(0,4)...$, caktoni edhe ndonjë zgjidhje tjetër.

Çka vëren?

A Në sistemin linearë me dy ndryshore $3x - 4y = 5$, 3 dhe -4 janë koeficientë para ndryshores x dhe y (përkatësisht), kurse 5 është anëtar i lirë.

Mbani mend!

Çdo barazim me dy të panjohura x dhe y, i cili mund të transformohet në formën $ax + by = c$, ku $a,b,c \in \mathbb{R}$ dhe $a \neq 0$ dhe $b \neq 0$ quhet barazim linearë me dy të panjohura.

Secila dyshe e renditur e numrave (x_0, y_0), për të cilën barazimi $ax + by = c$, bëhet gjykim i vërtet $ax_0 + by_0 = c$, quhet zgjidhje e barazimit.

1 Caktoni bashkësinë e zgjidhjeve të sistemit $2x + y = 5$, në bashkësinë e numrave natyrorë.
Vëreni zgjidhjen:

Nga barazimi rrjedh $y = 5 - 2x$. Sepse $y > 0$, atëherë shprehja $(5 - 2x)$ duhet të jetë pozitive .
Sipas kësaj dyshet $(1,3)$ dhe $(2,1)$ janë zgjidhje të vetme të barazimit.

2 Caktoni bashkësinë e zgjidhjeve të barazimit $3x - y = 2$, në $\mathbb{N}$.

Të zgjidhet barazimi i dhënë , d.m.th. të caktohet bashkësia e të gjitha zgjidhjeve në fushën e përkufizimit ***D*** .

B Shumë detyra në algjebër , gjeometri dhe në praktikë kërkojnë zgjidhjen e përbashkët të disa barazimeve të cilët i përmbajnë të njëjtat ndryshore.

Konjuksioni i dy barazimeve me dy të panjohura quhet sistem i dy barazimeve me dy të panjohura të cili e shënojmë:

$$F(x,y)=0 \wedge G(x,y)=0 \quad \text{ose} \quad \begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$$

Disjunksioni , $F(x,y)=0 \vee G(x,y)=0$ quhet bashkim i barazimeve dhe e shënojmë:

$$\left[\begin{array}{l}F(x,y)=0\\G(x,y)=0\end{array}\right.$$

3 Shuma e dy numrave është 5, kurse ndryshimi i tyre 1.Cilët janë ato numra?

Vëreni zgjidhjen:

Nëse x dhe y janë numrat e kërkuar atëherë konjuksionin $x+y=5 \wedge x-y=1$ plotësohet nga dyshja $(3,2)$.

4 Zgjidhe barazimin $(2x-1)(x+2)=0$.

Për zgjidhje kemi : Shprehja $(2x-1)(x+2)$ do të jetë zero, nëse plotësohet disjunksioni $2x-1=0 \vee x+2=0$, përkatësisht

$$\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\x+2=0\end{array}\right., \text{ d.m.th. } x=\frac{1}{2} \vee x=-2.$$

Secila dyshe e renditur numrash realë (x_0, y_0) për të cilët konjuksioni është gjykim i saktë përkatësisht për të cilat të dyja barazimet bëhen gjykime të vërteta paraqet ***zgjidhje të sistemit të barazimeve.***

5 Caktoni cila nga dyshet e renditura $(-1,2);(-1,1);(2,-3)$ është zgjidhje e sistemit të barazimeve

$$\begin{cases}2x-y^2=-3\\-x^2+2y=3\end{cases}.$$

Vëreni zgjidhjen: Me provë tregojmë se dyshja $(-1,1)$ është zgjidhje , gjegjësisht me zëvendësimin $x=-1$ dhe $y=1$, kemi:

$$\begin{cases}2(-1)-1^2=-3\\-1(-1)^2+2\cdot 1=3\end{cases} \text{ d.m.th. } \begin{cases}-3=-3\\3=3\end{cases}.$$

6 Cila nga dyshet e renditura $(0,-1);(1,2);(-2,-1);(-1,-1)$ është zgjidhje e sistemit të barazimeve

$$\begin{cases}x^2-2y=7\\2x+y=-7\end{cases} ?$$

Nëse të dyja barazimet e sistemit janë lineare me dy të panjohura, atëherë ai sistem ende quhet ***sistem linearë me dy të panjohura.***

Secili sistem linearë me dy të panjohura mund të sillet në formën e përgjithshme:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

ku x dhe y janë të panjohura, kurse $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ janë cilatdo numra realë ose shprehje të cilat nuk varen nga ndryshoret.

Numrat a_1, b_1, a_2, b_2 quhen ***koeficient*** para të panjohurave, kurse c_1 dhe c_2 ***terma të lirë*** të sistemit.

7 Sistemin $\begin{cases} 2x - \dfrac{x-y}{3} = 2 \\ \dfrac{x-1}{2} + 3y = 3 \end{cases}$ ktheni në formë të përgjithshme.

Vëreni zgjidhjen:

Nëse secilën nga barazimet e sistemit e sjellim në formën $ax + by = c$, përkatësisht të parën e shumëzojmë me 3, kurse të dytën me 2, i fitojmë barazimet $6x - x + y = 6$ dhe $x - 1 + 6y = 6$,prej ku e fitojmë sistemin:

$$\begin{cases} x + 6y = 7 \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

8 Paraqiti në formën e përgjithshme sistemet:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{y-3}{3} = x - 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} - 2y = 1 \\ x - 2y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

Detyra:

1. Caktoni bashkësinë e zgjidhjeve për barazimet a) $3x + y = 5$, b) $2x + y = 6$ në bashkësinë e numrave natyrorë.

2. Caktoni cila nga dyshet e renditura $(0,-1);(2,3);(1,-2)$ është zgjidhje e sistemit të barazimeve

$$\begin{cases} 3x - y^2 = -1 \\ -x^2 + 3y = -3. \end{cases}$$

3. Shkruani në formën e përgjithshme sistemin e barazimeve:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3} - 2x = \dfrac{x}{2} \\ 3(x-y) + 2x = -\dfrac{y}{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{3} + \dfrac{3y+1}{4} = x + y \\ \dfrac{7x-2}{6} - \dfrac{8y+1}{9} = x - y \end{cases}$.

2 ZGJIDHJA E SISTEMIT TË DY BARAZIMEVE LINEARE ME DY TË PANJOHURA

Kujtohu!

Kontrolloni a janë sistemet

$$\begin{cases}\frac{x+1}{2}-2y=x-1\\ 2x+y=1\end{cases} \quad \text{dhe} \quad \begin{cases}x+4y=3\\ 2x+y=1\end{cases}$$

ekuivalente.

Duke e rregulluar barazimin e parë në sistemin e parë e fitojmë sistemin e dytë , pra sistemet e dhëna janë ekuivalente.

Dy sisteme barazimesh janë ekuivalent në fushën e përkufizimit D, nëse ato kanë të njëjtat bashkësi zgjidhjesh.

Transformimet të cilat na sjellin në ekuivalencën e sistemeve të barazimeve i kryejmë duke u bazuar në teoremat për ekuivalencë të sistemeve të barazimeve (i marrim pa vërtetim):

T.1 Nëse cilido barazim i sistemit të dhënë zëvendësohet me barazim ekuivalent me të , fitohet sistem ekuivalent me sistemin e dhënë.

T.2 Sistemi i barazimeve $\begin{cases}y=f(x)\\ g(x,y)=0\end{cases}$ është ekuivalent me sistemin $\begin{cases}y=f(x)\\ g(x,f(x))=0\end{cases}$

Zgjidhje e sistemit të barazimeve me dy të panjohura duke e zbatuar **T.2** ***quhet metoda e zëvendësimit.*** Zgjidhjen e sistemit të barazimeve me dy të panjohura do ta përcjellim në shembujt vijues:

1 Zgjidhe sistemin e barazimeve $\begin{cases}3x-y=2\\ x-2y=-1\end{cases}$ me metodën e zëvendësimit.

Vëreni zgjidhjen:

Duke i përdorur teoremat për ekuivalencë kemi:

$$\begin{cases}3x-y=2\\ x-2y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-2\\ x-2y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-2\\ x-2(3x-2)=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-2\\ x-6x+4=-1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-2\\ -5x=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3x-2\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3\cdot 1-2\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$$

Sipas kësaj zgjidhja e sistemit është dyshja $(1,1)$.

2 Me metodën e zëvendësimit zgjidhni sistemet:

a) $\begin{cases}3x-y=-4\\ -2x+y=3\end{cases}$; b) $\begin{cases}\frac{x}{2}+2y=3\\ 3x-y=5\end{cases}$.

3 Zgjidhni sistemin e barazimeve $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x}-\dfrac{3}{y-1}=1 \\ \dfrac{x}{2(x-2)}+\dfrac{2}{y+2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Vëreni zgjidhjen:

Sistemi është i përkufizuar vetëm për ato vlera të së panjohurës për të cilat emëruesat e thyesave janë të ndryshme nga zero, d.m.th për $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$ dhe $y\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

Pasi të lirohemi nga emëruesat e të dy thyesave , kemi:

$$\begin{cases} (x+2)(y-1)-3x=x(y-1) \\ x(y+2)+4(x-2)=(x-2)(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y=2 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y=2 \\ y=2-2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2(2-2x)=2 \\ y=2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{7} \\ y=2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{7} \\ y=2-2\cdot\dfrac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{7} \\ y=\dfrac{10}{7} \end{cases}$$

Pra , zgjidhje e sistemit është dyshja $\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{10}{7}\right)$.

4 Zgjidhni sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{y+1}{y}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

Kujtohu!

Zgjidhni sistemin $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$.

Vëreni se koeficientët para ndryshores y janë të kundërt dhe pasi t'i mbledhim barazimet anë për anë , fitojmë : $2x=8$ ose $x=4$, kurse $y=3$.

B

Këtë mënyrë të zgjidhjes së sistemit na e mundëson pohimi që vijon:

T.3 Sistemi i barazimeve $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ është ekuivalent me sistemin $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)+f(x,y)=0 \end{cases}$

Zbatimi i kësaj teoreme na mundëson që barazimi $g(x,y)+f(x,y)=0$ të kalojë në barazim me një të panjohur. Ajo arrihet me transformim të njërit barazim ose të dyve ashtu që para të njëjtës ndryshore të bëhen koeficientët numra të kundërt .Tani duke i mbledhur anët përkatëse të barazimeve të sistemit ajo e panjohur do të eliminohet.

Zgjidhja e sistemit të barazimeve me këtë mënyrë quhet ***metoda e koeficientëve të kundërt.***

5 Zgjidhni sistemin e barazimeve $\begin{cases}3x-y=2\\x-2y=-1\end{cases}$ me metodën e koeficientëve të kundërt.

Vëreni zgjidhjen:

Barazimin e parë e shumëzojmë me -2, që koeficientët pranë ndryshores y të jenë të kundërt.

$$\begin{cases}3x-y=2/\cdot(-2)\\x-2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6x+2y=-4\\x-2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-6x+2y)+(x-2y)=-4-1\\x-2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-5x=-5\\x-2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\1-2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

Pra, zgjidhja e sistemit të barazimeve është dyshja (1,1).

6 Zgjidhni sistemin $\begin{cases}3x-2y=1\\2x+y=3\end{cases}$ me metodën e koeficientëve të kundërt.

7 Zgjidhni sistemin e barazimeve $\begin{cases}(x+1)^2-(y-2)^2=(x+2)^2-y^2\\\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=1\end{cases}$.

Vëreni zgjidhjen:

Sistemin e shkruajmë në formën e përgjithshme,

$$\begin{cases}(x+1)^2-(y-2)^2=(x+2)^2-y^2\\\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=1/\cdot6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+1-(y^2-4y+4)=x^2+4x+4-y^2\\3(x-1)+2(x+2)=6\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+4y=7\\3x+2y=5/(-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+4y=7\\-6x-4y=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+4y=7\\(-6x-4y)+(-2x+4y)=-10+7\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+4y=7\\-8x=-3/:(-8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\cdot\dfrac{3}{8}+4y=7\\x=\dfrac{3}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y=\dfrac{31}{4}\\x=\dfrac{3}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{31}{16}\\x=\dfrac{3}{8}\end{cases}$$

Zgjidhje është dyshja $\left(\dfrac{3}{8},\dfrac{31}{16}\right)$

8 Zgjidhni sistemin e barazimeve $\begin{cases}(x-1)^2-(y+3)^2=(x+1)^2-y^2\\\dfrac{x+2}{2}-\dfrac{y-1}{4}=1\end{cases}$.

Detyra:

1. $\begin{cases}3x-y=2\\2x+3y=5\end{cases}$

2. $\begin{cases}2{,}5x+0{,}4y=9{,}9\\0{,}5x-0{,}5y=-1{,}5\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{2x+y}{2}-\dfrac{x+3y}{3}=\dfrac{4}{3}\\\dfrac{x+y+1}{3}+\dfrac{2x+3y}{2}=3\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{6}{x+2}-\dfrac{5}{y-1}=8\\\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{6}{y-1}=\dfrac{17}{2}\end{cases}$

5. $\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2=(x-2)^2+y^2\\2x-y=0\end{cases}$

3 ZGJIDHJA GRAFIKE E SISTEMIT LINEAR ME DY TË PANJOHURA

E ke të njohur!

- Në të njëjtin sistem kordinativ vizatoni grafikët e funksioneve $y=-x+5$ dhe $y=3x-3$.
- Çka vëren për pozitën reciproke të tyre?

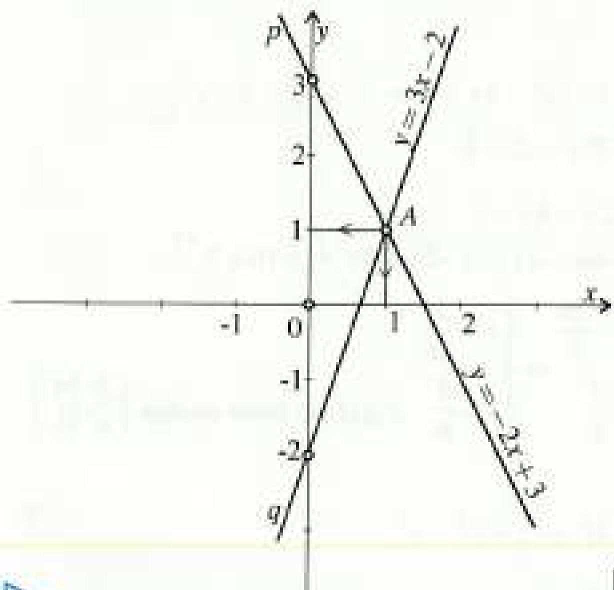
A Metoda për zgjidhjen grafike të sistemit të dy barazimeve lineare me dy të panjohura $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ bazohet në:

1. Vizatohen në një sistem kordinativ xOy grafikët e të dy barazimeve lineare ;
2. Caktohen kordinatat e pikëprerjes (nëse ekziston).

1 Zgjidhni grafikisht sistermin e barazimeve $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-y=2 \end{cases}$.

Vëreni zgjidhjen:

- I vizatojmë grafikët e funksioneve lineare $y=-2x+3, y=3x-2$ në një sistem kordinativ



x	y
0	3
1	1
-1	5

x	y
0	-2
1	1
-1	-5

Nga vizatimi vërejmë se drejtëzat p dhe q, priten në pikën $A(1,1)$.

Domethënë zgjidhja e sistemit të barazimeve lineare ëdhtë dyshja (1,1).

2 Grafikisht zgjidhni sistemin e barazimeve $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

Kujtohu!

- Çfarë pozite reciproke mund të kenë dy drejtëza të një rrafshi?
- Çka është grafiku i barazimit linearë me dy të panjohura?

Nga gjeometrija e kemi të njohur se dy drejtëza të një rrafshi mund të kenë këto pozita reciproke:

a) të priten , d.m.th. të kenë vetëm një pikë të përbashkët;
b) të jenë paralele , d.m.th. të mos kenë asnjë pikë të përbashkët;
v) të puthiten ,d.m.th. të i kenë të përbashkëta të gjitha pikat.

Përkatësisht nga pozita reciproke që mund të kenë dy drejtëza të një rrafshi , zgjidhjet e sistemit mund të jenë:

a) një zgjidhje e vetme;
b) të mos ketë zgjidhje;
v) të ketë numër të pakufundëm zgjidhjesh.

Grafikisht zgjidhi sistemet e barazimeve:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 4x+2y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y=2 \\ 3x+6y=6 \end{cases}$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $y=-x+3$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$; b) $y=-2x-1$, $y=-2x+\frac{3}{2}$; c) $y=-\frac{1}{2}x+1$.

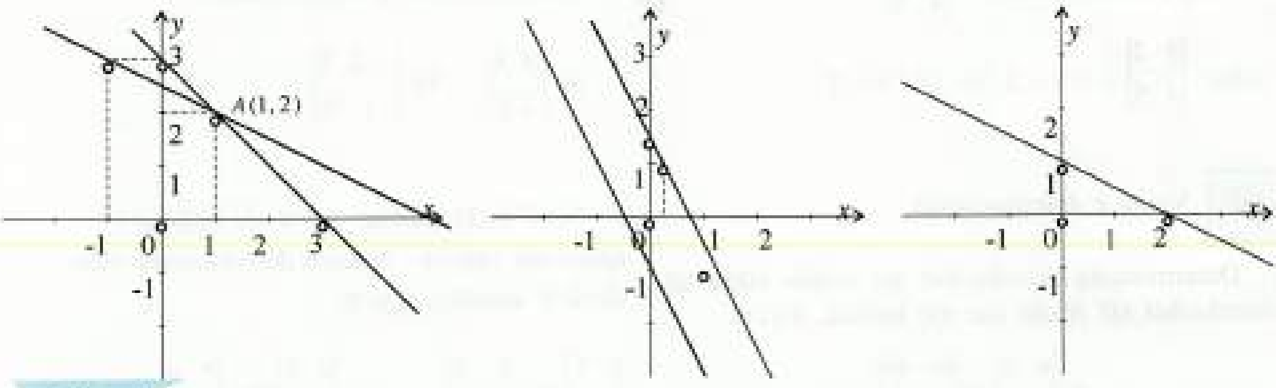
x	y
0	3
3	0
1	2

x	y
1	2
-1	3
3	1

x	y
0	-1
1	-3
-1	1

x	y
0	1,5
$\frac{1}{4}$	1

x	y
0	1
2	0



Vëreni!

a) Sistemi ka një zgjidhje (1,2);
b) Sistemi nuk ka zgjidhje (drejtëzat janë paralele);
c) Sistemi ka pafund zgjidhje (drejtëzat puthiten). Zgjidhje të sistemit në këtë rast janë të gjitha pikat e drejtëzës.

4 Grafikisht zgjidhi sistemet e mëposhtme:

a) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$.

Detyra:

1. Grafikisht zgjidhni sistemin:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{x}{2}-y=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$. d) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x-2y=-1 \end{cases}$;

4 DETERMINANTAT E RENDIT TË DYTË, RREGULLAT E KRAMERIT

A Skema katrore $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ quhet determinantë e rendit të dytë, kurse shprehja $ad-bc$ vlera e saj, d.m.th.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \stackrel{def}{=\!=} a\cdot d - b\cdot c,$$

ku a,b,c,d janë numra realë ose shprehje.

Numrat a,b,c,d quhen elemente të determinantës; ato janë renditur në dy rreshta ose kolona.

Vlera e determinantës $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

është: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 4\cdot 2 = 15-8=7$.

1 Caktoni vlerën e determinantës:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

B Vetitë e determinantës

1. Determinanta shumëzohet me numër ashtu që shumëzohet një rresht ose një kolonë, d.m.th.

$$k\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Për shembull: $3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ose $2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$

2. Nëse të dy rreshtat ose të dy kolonat i ndërrojnë vendet , atëherë determinanta merr vlerë të kundërt, d.m.th.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

Për shembull:

$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15+2=17$, $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-2-15) = -17$.

2 Caktoni vlerën e determinantës: a) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$.

Vëreni zgjidhjen:

Nëse anëtarët e një kolone (rreshti) janë zero ose nëse anëtarët e të dy kolonave (rreshtave) janë të njëjtë ose proporcional , atëherë vlera e determinantës është zero.

C **3** Të zgjidhet sistemi: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

Vëreni zgjidhjen:

Sistemin do ta zgjidhim me koeficient të kundërt:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \mid \cdot b_2 \\ a_2x+b_2y=c_2 \mid \cdot(-b_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2 \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=-c_2b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ (a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \end{cases}$$

Nëse $x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ zëvendësojmë te barazimi $a_1x+b_1y=c_1$, pasi të rregullohet do të fitojmë:

$$\begin{cases} (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \\ (a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \end{cases}$$

Vëreni se shprehjet në sistemin e fundit janë vlera të determinantit të rendit të dytë, të cilat do t'i shënojmë me :

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};\ \Delta x=c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix};\ \Delta y=a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Determinanta Δ quhet determinanta e sistemit.

Sistemi ka zgjidhje të vetme , atëherë dhe vetëm atëherë nëse determinanta e sistemit ëshë e ndryshme prej zeros, d.m.th. $\Delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

Mbani mend!

Zgjidhjet e sistemit $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ jepen me formulat

$x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}$ dhe $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}$, $\Delta\neq 0$, të cilat quhen ***rregullat e Kramerit.***

4 Zgjidhni sistemin e barazimeve $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases}$, duke i zbatuar rregullat e Kramerit.

Vëreni zgjidhjen:

Determinantat janë: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-6=-7$; $\Delta x=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-4-10=-14$; $\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=5-12=-7$.

Zgjidhje e sistemit është : $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{-14}{-7}=2$ dhe $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{-7}{-7}=1$, d.m.th. dyshja (2,1).

5 Duke i zbatuar rregullat e Kramerit zgjidhni sistemet:

a) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+y=16 \\ x+\frac{1}{4}y=14 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+\frac{3}{2}y=5 \\ 3x-y=4 \end{cases}$.

6 Caktoni zgjidhjen e sistemit $\begin{cases} 4x-2y=3 \\ ax+y=1 \end{cases}$.

Diskutoni zgjidhjen e sistemit në varësi nga parametri a.

Vëreni zgjidhjen:

Determinantet e sistemit janë

$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ a & 1 \end{vmatrix}=4+2a$, kurse $\Delta x=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3+2=5$, $\Delta y=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix}=4-3a$.

Nga kushti $\Delta \neq 0$ rrjedh për $a \neq -2$ zgjidhja e sistemit është $\left(\frac{5}{4+2a}, \frac{4-3a}{4+2a}\right)$.

Për $a=-2$ sistemi nuk ka zgjidhje, d.m.th. ai është i formës $\begin{cases} 0\cdot x=5 \\ 0\cdot y=10 \end{cases}$.

7 Zgjidhni sistemin $\begin{cases} 6x-3y=2 \\ kx+y=1 \end{cases}$. Diskutoni zgjidhjen e sistemit në vartësi të parametrit k.

Në vartësi nga ajo se a është determinanti i sistemit i ndryshëm nga zero ose zero , kemi:

1. Nëse $\Delta \neq 0$, ose $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ d.m.th. $a_1:a_2 \neq b_1:b_2$ sistemi ka zgjidhje të vetme.

2. Nëse $\Delta=0$ dhe sëpaku njëra nga determinantat Δx ose Δy nuk është e barabartë me zero atëherë sistemi nuk ka zgjidhje, d.m.th. është i pamundshëm ose apsurd.

Nga $\Delta=a_1b_2-a_2b_1=0$ dhe le të jetë $\Delta x=c_1b_2-c_2b_1 \neq 0$ rrjedh se $a_1:a_2=b_1:b_2 \neq c_1:c_2$.

3. Nëse të tre determinantet janë zero ,d.m.th. $\Delta=\Delta x=\Delta y=0$, atëherë sistemi ka zgjidhje të pafundme. Në këtë rast sistemi është i papërcaktuar. Nga kushti rrjedh:

$a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2$.

8 Pa e zgjidhur sistemin e barazimeve (duke i shqyrtuar koeficientët) tregoni cilin nga kushtet e mësipërme e plotëson sistemi i barazimeve:

a) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{y}{3}=1 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y=6 \\ x-\frac{y}{2}=3 \end{cases}$.

c) Vëreni, koeficientët e sistemit janë proporcional , d.m.th. $2:1=-1:-\frac{1}{2}=6:3$.

Pra, sistemi ka pafun shumë zgjidhje , d.m.th. sistemi është i papërcaktuar.

Detyra:

Duke zbatuar rregullat e Kramerit , zgjidhni sistemin e barazimeve:

① $\begin{cases}3x-y=9\\2x+y=1\end{cases}$; ② $\begin{cases}4(x-3y)=50-y\\5(x+2y)-3=x+5\end{cases}$; ③ $\begin{cases}\frac{2x}{3}-\frac{y}{4}=1\\\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=7\end{cases}$; ④ $\begin{cases}\frac{x+y}{3}-\frac{y-x}{4}=1\\\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{3}=8\end{cases}$;

⑤ Kontrollo a ka sistemi zgjidhje a) $\begin{cases}x-3y=-1\\\frac{x}{3}+y=1\end{cases}$; b) $\begin{cases}3x-y=6\\x-\frac{y}{3}=1\end{cases}$; c) $\begin{cases}x+3y=5\\2x+6y=10\end{cases}$

nëse po , atëherë caktoni atë.

⑥ Për cilën vlerë të parametrit a, sistemi i barazimeve $\begin{cases}2ax-y=1\\4x+y=2\end{cases}$

a) ka zgjidhje të vetme;
b) nuk ka zgjidhje?

⑦ Është dhënë sistemi i barazimeve $\begin{cases}2ax-y=b\\4x+y=1\end{cases}$.

Për cilat vlera të parametrit a dhe b sistemi i barazimeve:
a) ka zgjidhje të vetme;
b) nuk ka zgjidhje;
v) ka pakufi zgjidhje?

5 ZBATIMI I SITEMIT LINAER TË BARAZIMEVE ME DY TË PANJOHURA

Kujtohu!

- Shuma e dy numrave është 5, kurse ndryshimi i tyre është1. Cilët janë ato numra?

Këtë detyrë zgjidhe duke ndërtuar një barazim me një të panjohur. Pastaj zgjidhe duke ndërtuar një sistem me dy barazime me dy të panjohura.

- Cila mënyrë është më e thjeshtë?

A Në jetën e përditshme , në shkencë dhe teknik kërkohen të përcaktohet vlerat e një ose më shumë të panjohurave që domethënë numër sendesh , punëtorësh pjesë të ndonjë shume etj. Në detyra të tilla , varësisht nga të njohurat ose të panjohurat parashtrohet mundësia e përpilimit të barazimit ose të sistemit të barazimeve.

1 Shuma e dy numrave është 18. Nëse numrit të parë të shumëzuar me 4 i shtohet numri i dytë , i shumëzuar me 3 fitohet 61.Cilat janë ato numra?

Vëreni zgjidhjen:

Le të jetë x dhe y numrat e kërkuar. Nga kushti i detyrës , kemi: $\begin{cases}x+y=18\\4x+3y=61\end{cases}$

Duke zbatuar ndonjërën nga metodat për zgjidhjen e sistemeve fitojmë $x=7$ dhe $y=11$.
Pra , numrat e kërkuar janë 7 dhe 11.

2 Ndryshimi i dy numrave është 28.Nëse nga i pari i shumëzuar me 5 zbritet i dyti i shumëzuar me 6 fitohet numri 5. Cilat janë ato numra?

3 Shuma e shifrave të një numri dyshifror është 12.Nëse shifrat i ndërrojnë vendet fitohet numër i cili është për 54 më i madh se numri i kërkuar. Cili është ai numër?

Vëreni zgjidhjen:

Le të jetë numri i kërkuar dyshifror $10x+y$. Nga kushti i detyrës kemi:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ 10y+x=10x+y+54 \end{cases}$$

Zgjidhja e këtij sistemi është dyshja (3, 9), dhe numri i kërkuar është 39.

4 Shuma e shifrave të një numri dyshifrorë është numri 8. Nëse shifrat i ndërrojnë vendet , fitohet numri i cili është për 18 më i madh se numri i kërkuar. Cili është ai numër?

5 Nëna dhe e bija kanë bashkarisht 37 vjet. Para dy vitesh nëna ishte 10 herë më e vjetër se e bija.Sa vjet ka tani nëna e sa e bija?

Vëreni zgjidhjen:

Ngjashëm, si te barazimet lineare këtë formë të detyrës do ta zgjidhim me skemë:

	tani	*para*
Nëna:	x	x-2
bija	y	y-2

Nga kushti i detyrës kemi: $\begin{cases} x+y=37 \\ x-2=10(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=32 \\ y=5 \end{cases}$

Pra, tani nëna ka 32 vjet, kurse e bija 5 vjet.

6 Grua e burr bashkarisht kanë 73 vjet. Nëse vitet e burrit rriten dy herë atëherë dallimi i viteve do të jetë 41.Nga sa vjet ka secili prej tyre?

7 Nga vendi A kah vendi B të larguara 190 *km* u nis një kamion, kurse pas gjysmë ore prej B kah A u nis një autobus. Pas dy orësh prej nisjes së kamionit , autobusi dhe kamioni u takuan dhe vazhduan të udhëtojnë. Një orë pas takimit ata ularguan njëri prej tjetrit 110 *km*. Me çfarë shpejtësie lëviznin kamioni dhe autobusi?

Vëreni zgjidhjen:

Detyrën do ta zgjidhim parcialisht , pra:

a) Shpejtësitë e kamionit dhe autobusit do t'i shënojmë me V_1 dhe V_2 përkatësisht.

b) Kaluan rrugën $S=V\cdot t$ .Deri te pika e takimit kamioni ka lëvizur l 2 orë, dhe kaloi rrugë $S_1=2V_1$ km, kurse autobusi ka lëvizur l 1,5 orë dhe ka kaluar rrugë $S_2=1{,}5V_2$ km.

Pas pikës së takimit kamioni ka kaluar $1\cdot V_1$ km, kurse autobusi $1\cdot V_2$ km për një orë, tani $S_1+S_2=1\cdot V_1+1\cdot V_2=110$ km.

v) Sipas kësaj sistemi i barazimeve do të duket kështu: $\begin{cases} 2V_1+1{,}5V_2=190 \\ 1\cdot V_1+1\cdot V_2=110 \end{cases}$

g) Zgjidhje e sistemit është dyshja e renditur (50,60), përkatësisht kamioni ka lëvizur me shpejtësi 50*km* në orë , kurse avtobusi 60 *km* në orë.

8 Anija në drejtim të rrjedhës së ujit lëviz me shpejtësi 25 *km* në orë, kurse në drejtim të kundërt të rrjedhës së ujit rrjedh me shpejtësi 20 *km* në orë. Caktoni shpejtësinë e anijes dhe ujit.

9 Kemi dy lloje alkoholi , njëri prej 36%, kurse tjetri prej 96% . Nga sa litra duhet të përziejmë prej secilit të fitojmë përzierje 120 *l* nga 80%?

Vëreni zgjidhjen:

Nga kushi i detyrës kemi:

$$\begin{cases} x+y=120 \\ 36x+96y=120\cdot 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=120 \\ 3x+8y=800 \end{cases}, \text{ prej nga } x=32 \text{ dhe } y=88.$$

çka do me thënë , prej përzierjes 36% do të marrim 32 *l*, kurse prej përzierjes 96% do të marrim 88*l*.

10 Nëse përzien 8 *l* ujë të nxehtë me dy litra të ftohët , temperatura e ujit të fituar do të jetë 66^0, nëse përsëri , përzihen 7 *l* ujë të nxehtë me 3 *l* të ftohët , temperatura e ujit të përzier do të jetë 59^0.Sa është temperatura e ujit të nxehtë e sa e ujit të ftohtë?

Detyra:

1. Shuma e dy numrave është 19, kurse ndryshimi i tyre është 5.Cilët janë ato numra?

2. Shuma e dy numrave është 47, nëse më të madhin e pjesëtojmë me të voglin fitohet herësi 4 dhe mbetja 2. Cilat janë ato numra ?

3. Dy automobila në rrugë janë të larguar 360 *m*, Nëse lëvizin njëri kundrejt tjetrit ato do të takohen pas 10 sekondash. Nëse ato lëvizin njëri pas tjetrit automobili me shpejtësi më të madhe do ta arrijë automobilin tjetër pas 40 sekondash Sa janë shpejtësitë e automobilave?

4. Shuma e viteve të babës dhe birit është 46. Pas 10vitesh baba do të jetë dy herë më i vjetër se i biri . Nga sa vjet kanë tani ato?

5. Dy gypa, një pishinë e mbushin për $9\frac{3}{8}$ orë. Të dy gypat bashkarisht kanë qenë të lëshuar 5 orë , e pastaj gypi i dytë është mbyllur dhe gypi i parë vetë e ka mbushur pishinën për 7 orë. Për sa orë secila vetë do ta mbushte pishinën?

6. Në një kafaz ka lepuj dhe fazanë. Bashkarisht kishin 35 kokë dhe 94 këmbë. Sa është numri i fazanëve dhe lepujve?

6 SISTEMI I JOBARAZIMEVE LINEARE ME NJË TË PANJOHUR

Kujtohu!

- Caktoni bashkësinë e zgjidhjeve të jobarazimit:
a) $3x-2>2x-2$ dhe b) $x+1<4$.

- Në të njëjtin bosht numerik paraqiti grafikisht zgjidhjet e tyre.
- Çka vëren?

A ■ Konjuksioni i dy ose më shumë jobarazimeve lineare me një të panjohur quhet ***sistem i jobarazimeve lineare me një të panjohur***.

Secili sistem i dy jobarazimeve lineare me një të panjohur mund të shndërrohet në formën

$$\begin{cases} ax>b \\ a_1x>b_1, \end{cases} \quad (a,b,a_1,b_1 \in \mathbb{R})$$

1 Sistemin $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x}{3}>2 \\ 3x-2>x+4 \end{cases}$ shkruani në formën e përgjithshme.

■ Nëse në sistemin e dhënë të jobarazimeve secili jobarazim zëvendësohet me jobarazim i cili është ekuivalent me të , fitohet sistem i cili është ekuivalent me sistemin e dhënë të jobarazimeve.

Sipas kësaj kemi: $\begin{cases} 3(x-1)-2x>2\cdot 6 \\ 3x-x>4+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>15 \\ 2x>6. \end{cases}$

2 Tregoni se sistemi i jobarazimeve $\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}<2x+1 \\ x-\dfrac{1}{3}x-2>x-4 \end{cases}$ dhe $\begin{cases} 2x-4x<3 \\ x>6 \end{cases}$ janë ekuivalentë..

Mbani mend!

Bashkësia prej numrave realë e cila e kënaq një sistem jobarazimesh , quhet ***bashkësia e zgjidhjeve.***

■ Të zgjidhet një sistem jobarazimesh d.m.th të përcaktohet bashkësia e zgjidhjeve të tij.

Pra, nëse bashkësitë e zgjidhjeve të jobarazimeve të sistemit janë $M_1, M_2, M_3,...$ përkatësisht ,atëherë bashkësia e zgjidhjeve të sistemit do të jetë $M=M_1\cap M_2\cap M_3\cap ...$

■ Dy sisteme jabarazimesh të përkufizuara në të njëjtën bashkësi janë ekujvalente nëse kanë bashkësi të zgjidhjeve të njëjtë.

3 Zgjidhni sistemin e jobarazimeve:

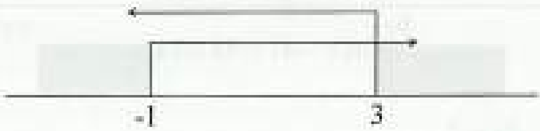
a) $\begin{cases} 4x-2>3x-3 \\ x+2<5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+2>1+2x \\ 2x+1<x+4 \end{cases}$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $\begin{cases} 4x-2>3x-3 \\ x+2<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3x>2-3 \\ x<5-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<3 \end{cases}$;

Zgjidhja e jobarazimit të parë është : $M_1=(-1,\infty)$, kurse e jobarazimit të dytë $M_2=(-\infty,3)$.

Zgjidhje e sistemit është $M=M_1\cap M_2=(-1,3)$, e cila shihet nga grafiku.



$x\in(-1,3)$

Zgjidhni sistemin b).

Vëreni si janë bashkësitë e zgjidhjeve të të dy sistemeve. Çka përfundon?

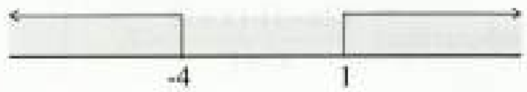
4 Kontrolloni ekuivalencën e sistemeve të jobarazimeve:

$$\begin{cases}2x+5>x+1\\ x+3<3x-1\end{cases} \text{ dhe } \begin{cases}3x-1>2x-3\\ 2x+1>x+3\end{cases}.$$

Nëse prerja e zgjidhjeve për dy jobarazime është bashkësi boshe , atëherë sistemi ***nuk ka zgjidhje***, d. m. th sistemi është ***apsurd***.

Për shembull: Sistemi i jobarazimeve $\begin{cases}x-3>2x+1\\ 2x+2>x+3\end{cases}$ nuk ka zgjidhje, sepse bashkësia e zgjidhjeve të jobarazimit të parë është $M_1=(-\infty,-4)$, kurse e të dytit $M_2=(1,+\infty)$, d.m.th.

$M_1\cap M_2=\varnothing$, ose grafikisht:



5 Zgjidhni sistemin e jobarazimeve: a) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{2-x}{3}>1\\ 2x-2>x-5\end{cases}$; b) $\begin{cases}5+y>-2(y-1)\\ \dfrac{y+1}{2}-\dfrac{y-1}{3}<1\end{cases}$.

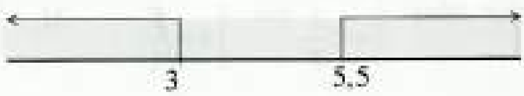
6 Zgjidhni sistemin e jobarazimeve: $\begin{cases}3(x-2)-5>3+x\\ 2(x-1)-3<2\\ 4x>3(x-1)\end{cases}$

Vëreni zgjidhjen:

Duke i përdorur rregullat për ekuivalencë të sistemit kemi:

$$\begin{cases}3(x-2)-5>3+x\\ 2(x-1)-3<2\\ 4x>3(x-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-6-5>3+x\\ 2x-2-3<2\\ 4x>3x-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-x>11\\ 2x<7\\ -x>-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x>11\\ 2x<7\\ x<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{11}{2}\\ \begin{rcases}x<\dfrac{7}{2}\\ x<3\end{rcases}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{11}{2}\\ x<3\end{cases}$$

Prej ku rrjedh $M_1=\left(\dfrac{11}{2},\infty\right)$, $M_2\left(-\infty,\dfrac{7}{2}\right)$, $M_3=(-\infty,3)$, $M_1\cap M_2\cap M_3=\varnothing$, pra, sistemi nuk ka zgjidhje, çka vëren edhe nga paraqitja gjeometrike e zgjidhjes.



7 Zgjidhni sistemin e jobarazimeve:

a) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} < \frac{3}{2}x - 1 \\ 4x - 5 > 2 - 5x \end{cases}$; b) $\begin{cases} 15x - \frac{1}{3} > 2(x+1) \\ 4(x-4) < 3x - 14 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{x-3}{3} - \frac{2x+1}{2} < 1 \\ x - \frac{x-1}{5} > 3x + 2(x-1) \end{cases}$.

8 Zgjidhni jobarazimin $\frac{2x-2}{x+1} > 1$.

Vëreni zgjidhjen:

$$\frac{2x-2}{x+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{x+1} - 1 > 0 \text{ ose } \frac{x-3}{x+1} > 0.$$

Kujtohu!

Kur prodhimi dhe herësi i dy numrave ose dy shprehjeve është pozitiv , e kur negativ?

Jobarazimi i fundit është ekuivalent me sistemin e jobarazimeve

$\begin{cases} x-3>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ ose $\begin{cases} x-3<0 \\ x+1<0 \end{cases}$, sepse herësi është pozitiv nëse edhe emëruesi edhe numëruesi janë pozitiv ose negativ njëkohësisht.

Sipas kësaj: $M_1 = (3,\infty) \cap (-1,\infty) = (3,\infty)$, kurse $M_2 = (-\infty,3) \cap (-\infty,-1) = (-\infty,-1)$.

Zgjidhja e jobarazimit: $M = M_1 \cup M_2 = (-\infty,-1) \cup (3,\infty)$.

9 Zgjidhni jobarazimin: $\frac{(2x-1)\cdot(x+1)}{x^2+1} < 2$.

Vëreni zgjidhjen:

$$\frac{2x^2+2x-x-1}{x^2+1} - 2 < 0; \quad \frac{2x^2+2x-x-1-2x^2-2}{x^2+1} < 0; \quad \frac{x-3}{x^2+1} < 0.$$

Herësi është negativ nëse i pjesëtueshmi dhe pjesëtuesi kanë shenja të ndryshme.

Pasi emëruesi i thyesës është pozitiv për çdo numër real x, domethënë shenja e thyesës varet nga numëruesi.

Sipas kësaj jobarazimi $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$, është ekuivalent me jobarazimin $x-3<0$.

Zgjidhje e jobarazimit $x-3<0$ është $x<3$.

Pra, zgjidhja e jobarazimit të dhënë është bashkësia $M = (-\infty,3)$.

10 Zgjidhni jobarazimin $2x^2 - 3x < 0$. Vëreni zgjidhjen:

$2x^2 - 3x = x(2x-3) < 0$. Jobarazimi është ekuivalent me sistemin $\begin{cases} x>0 \\ 2x-3<0 \end{cases}$ ose $\begin{cases} x<0 \\ 2x-3>0 \end{cases}$.

Zgjidhje është $\begin{cases} x>0 \\ x<\frac{3}{2} \end{cases}$ ose $\begin{cases} x<0 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}$ $M_1 = \left(0,\frac{3}{2}\right)$; $M_2 = \varnothing$; $M = \left(0,\frac{3}{2}\right) \cup \varnothing = \left(0,\frac{3}{2}\right)$.

11 Zgjidhni jobarazimin $(x-5)(x+7)<0$.

Vëreni zgjidhjen:

Jobarazimin mund ta zgjidhish duke përdorur vetinë " prodhimi është negativ , nëse shumëzuesit kanë shenja të ndryshme " , (sikurse e zgjidhëm detyrën 10).

E njëjta detyrë mund të zgjidhet me metodën e intervaleve, e cila bazohet në këtë:

Përcaktohen intervalet te i cili secili shumëzues është pozitiv ose negativ për ato vlera të ndryshores për të cilat është e përkufizuar jobarazimi.

Përcaktimi i shenjës për çdo shumëzues do ta paraqesim me anë të tabelës:

$x\in$ $-\infty$	-7		5	∞
$x-5$	$-$	$-$	0	$+$
$x+7$	$-$	0 $+$		$+$
$(x-5)\cdot(x+7)$	$+$	$-$		$+$

Vëreni se në cilin interval shumëzuesit $x-5$ dhe $x+7$ janë negativ përkatësisht pozitiv ,

Prodhimi i shumëzuesve është negativ nëse $x\in(-7,5)$.

Pra, zgjidhje e jobarazimit të dhënë është $M=(-7,5)$.

Detyra:

(1) Zgjidhni sistemin e jobarazimeve:

a) $\begin{cases}2x+3>5\\ x-3<2\end{cases}$; b) $\begin{cases}2(x+1)>-4\\ 2x-1>2-x\end{cases}$; c) $\begin{cases}1-\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+2}{3}>5x\\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+2}{3}<10\end{cases}$; d) $\begin{cases}2x-3>x+1\\ x-2\le 10-x\\ 3x+2>x+4\end{cases}$.

(2) Zgjidhi jobarazimet :

a) $\dfrac{3x-1}{2x+2}<1$; b) $\dfrac{x-1}{2x+1}>\dfrac{1}{2}$; c) $(x-2)(x+3)>0$; d) $5x-3x^2<0$.

(3) Zgjidhi jobarazimet me metodën e intervaleve:

a) $(x-2)(x+3)(x-1)>0$; b) $(x+1)(x-2)(x+4)(x+3)<0$.

Ushtrim tematik kontrollues

(1) Kontrollo cili prej dysheve të renditura $(-1,0)$ dhe $(2,-1)$ është zgjidhje e sistemit të barazimeve $\begin{cases} 3x-y^2=5 \\ x-y=3 \end{cases}$.

(2) Sillni në formë të përgjithshme sistemin e barazimeve: a) $\begin{cases} \frac{x}{2}-y=3 \\ 2x-\frac{1-y}{3}=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}-\frac{2-y}{2}=1 \\ 3x-\frac{y-1}{3}=\frac{1}{2} \end{cases}$.

(3) Zgjidhni sistemin e barazimeve $\begin{cases} \frac{x}{2}-y=0 \\ 3x+y=7 \end{cases}$ me metodën e zëvendësimin.

(4) Zgjidhni sistemin e barazimeve $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+y=1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ me metodën e kueficientëve të kundërt.

(5) Zgjidhni sistemin e barazimeve $\begin{cases} x-\frac{y-1}{2}=1 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ duke i zbatuar rregullat e Kramerit.

(6) Grafikisht zgjidhni sistemin e barazimeve $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=4 \end{cases}$.

(7) Diskutoni zgjidhjen e sistemit të barazimeve $\begin{cases} kx+2y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$.

(8) Zgjidhni sistemin e barazimeve lineare $\begin{cases} (x+2)^2-3>x(x+2) \\ 2x(x-1)-x(2x-1)<4 \end{cases}$.

(9) Zgjidhni jobarazimin $\frac{2x-1}{x-1}>1$.

(10) Nëse një numër dyshifror , shuma e shifrave të së cilit është 9, rritet për 9, fitohet numër i shkruar me shifra të njëjta , por me renditje të kundërt. Cili është ai numër?

TEMA 8

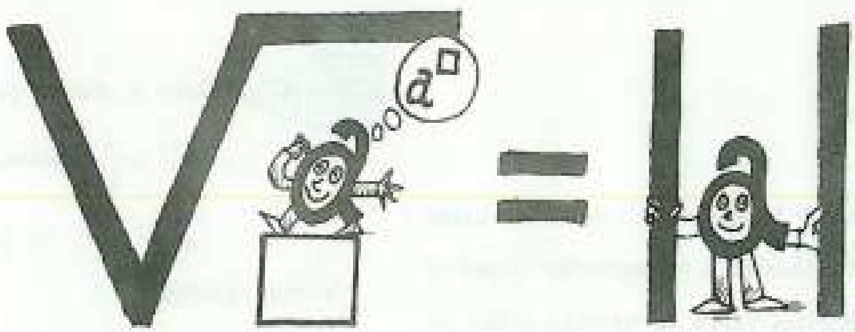
FUQIZIMI DHE RRËNJËZIMI

Njohja e matematikës i jep jetë mendjes dhe e çliron nga paragjykimi, besnikëria, pavarësia.

D. ZH. Arbtnot

Në këtë temë do të njihesh me:

- fuqi me tregues zero dhe numër i plotë negativ;
- Kuptimin për rrënjën e n-të , vetitë e rrënjës;
- transformimi i rrënjës, rrënjëzimi i prodhimit dhe herësit, forma normale, rrënjë të ngjashme;
- operacionet me rrënjë, mbledhja, shumëzimi, pjesëtimi , fuqizimi dhe rrënjëzimi i rrënjës;
- fuqia me tregues numër racional;
- racionalizimi i emëruesit të thyesës;



1 FUQIA ME TREGUES ZERO DHE NUMËR TË PLOTË NEGATIV

Kujtohu!

- Njehso:
- $a^2 \cdot a^3$; $x^5 : x^3$; $a^n : a^n$.

- Si përkufizohet:

a^n, $a \in R$ dhe $n \in N$?

A 1 Zbatoni rregullën e pjesëtimit të fuqive me baza të njëjta në shembullin:

a) $a^5 : a^5$; b) $x^3 : x^7$.

- Duke e zgjidhur detyrën do të fitosh:

a) $a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0$; b) $x^3 : x^7 = x^{3-7} = x^{-4}$.

Për fyqitë a^0 dhe a^{-4} nuk mund të përdirim përkufizimin për fuqinë $a^n, n \in N$ .Për këto fuqi vlen përkufizimi:

$$a^0 \stackrel{def}{=} 1 \text{dhe } a^{-n} \stackrel{def}{=} \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0;$$

2 Njehso: a) 2^0; b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$; c) $(a+2)^0$, $(a \neq -2)$; d) $\left(\sqrt{2}\right)^0$.

3 Njehso: a) 3^{-2}; b) $(-5)^{-2}$; c) $(-2a)^{-3}(a \neq 0)$.

Vëreni zgjidhjen:

- a) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; b) $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$; c) $(-2a)^{-3} = \frac{1}{(-2a)^3} = \frac{1}{(-2)^3 a^3} = -\frac{1}{8a^3}$.

- Vëreni: a^{-n} dhe $a^n (a \neq 0)$, janë numra reciprok.

Kujtohu!

- Në zgjerimin e bashkësive numerike kemi theksuar se në bashkësinë e re numerike vlejnë të gjitha ligjet të cilat ishin të vërteta edhe në bashkësinë para saj.

B 4 Duke e zbatuar përkufizimin

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ njehso:

a) $a^{-2} \cdot a^{-3}$; b) $\left(a^{-2}\right)^3$.

Vëreni zgjidhjen:

- a) $a^{-2} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^{2+3}} = a^{-(2+3)} = a^{-2+(-3)}$.

- Çka mund të përfunosh?

Kështu zgjerimi i kuptimit për fuqi është arsyetuar , nëse për të vlejnë të njëjtat ligje që ishin të vërteta edhe për fuqinë me tregues numër natyror, d.m.th janë të vërteta pohimet që vijojnë:

$$1.\ a^m\cdot a^n=a^{m+n};\quad 2.\ a^m:a^n=a^{m-n};\quad 3.\ \left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n};$$

$$4.\ (a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m;\quad 5.\ \left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}\ (a\neq 0, b\neq 0; m,n\in\mathbb{Z}).$$

Do ta vërtetojmë pohimin $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$:

Për $m=0$ kemi $(a\cdot b)^0=a^0\cdot b^0$ sepse $(a\cdot b)^0=1$ dhe $a^0\cdot b^0=1\cdot 1=1$, rrjedh $(a\cdot b)^0=a^0\cdot b^0$.

Për $m=-p\ \ (p>0)$ kemi: $(ab)^m=(ab)^{-p}=\dfrac{1}{(ab)^p}=\dfrac{1}{a^p\cdot b^p}=\dfrac{1}{a^p}\cdot\dfrac{1}{b^p}=a^{-p}\cdot b^{-p}=a^mb^m$.

Për $n=-p\ \ (p>0)$, për pohimin 1 kemi:

$$a^m\cdot a^n=a^m\cdot a^{-p}=a^m\cdot\frac{1}{a^p}=\frac{a^m}{a^p}=a^{m-p}=a^{m+(-p)}=a^{m+n}.$$

Pohimet tjera vërtetohen në të njëjtën mënyrë.

5 Kontrolloni vërtetësino e këtyre barazimeve : a) $a^5\cdot a^{-3}=a^2$; b) $a^3:a^{-2}=a^5$; c) $\left(a^{-3}\right)^{-2}=a^6$.

Mbani mend!

Opercionet me fuqi, treguesi i të cilave është zero ose numër i plotë negativ kryhen sipas të njëjtave rregulla të cilat vlenin edhe për fuqitë me tregues numër natyror.

6 Kryeni operacionet me fuqi:

a) $x^{-2}\cdot x^{-4}:x^{-6}$; b) $x^{-3}y\cdot xy^{-2}:\left(x^2y^{-3}\right)$; c) $\dfrac{\left(a^4\right)^{-2}\cdot a^3}{a^5}$.

Vëreni zgjidhjen:

b) $x^{-3}y\cdot xy^{-2}:\left(x^2y^{-3}\right)=x^{-3+1}\cdot y^{1+(-2)}:\left(x^2\cdot y^{-3}\right)=x^{-2}y^{-1}:\left(x^2y^{-3}\right)=x^{-2-2}y^{-1-(-3)}=x^{-4}y^2$.

7 Njehsoni vlerën e shprehjes: a) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$; b) $2^{-4}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}$; c) $1^{-1}+2^{-1}+3^{-1}$;

Vëreni zgjidhjen: a) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{\dfrac{(-2)^2}{3^2}}=\dfrac{3^2}{(-2)^2}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$.

Vëreni!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\left(\frac{b}{a}\right)^n,\ (a\neq, b\neq 0).$$

8 Lirohu nga treguesi negativ në shprehjet:

a) $3x^{-4}y$; b) $\frac{3a^{-2}b^{-1}}{4^{-1}a^{-3}bc^{-2}}$; c) $\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$.

Vëreni zgjidhjen:

c) $$\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}=\frac{xy(y-x)}{(y-x)(y+x)}=\frac{xy}{y+x},\ \text{për } x\neq 0,\ y\neq 0.$$

Detyra:

1 Lirohu nga treguesi negativ :

a) $x^{-2}y$; b) $-2^{-2}a^{-2}bc^{-4}$; c) $\frac{2x^{-2}y}{3^{-1}xy^{-2}}$.

2 Llogarit vlerën e shprehjes: a) $2^{-2}-1^{-1}-4^{-1}+4^{-2}$; b) $\frac{3^{-2}+2\left(1-\frac{3}{2}\right)^0}{1^{-1}-4\cdot 2^{-1}}$.

3 Shkruani thyesat me emërues 1: a) $\frac{x^2y^{-2}}{a^{-2}b^3}$; b) $\frac{5x^{-2}b^3}{c^{-2}}$; c) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$.

4 Thyesat shkruani me emërues 1: a) $\frac{4^{-1}x^2}{3y^{-2}}$; b) $\frac{(2a-3)^0a^{-2}}{a^4b^{-1}}$; c) $\frac{3a^{-2}}{1-a^{-2}}$.

5 Numrat shkruani në formën $a\cdot 10^k$; $a,k\in\mathbb{Z}$.

a) 3,5; b) −0,006; c) Diametri i atomit të hidrogjenit është $0{,}0000000053cm$.

2 FUQIA ME TREGUES NUMËR RACIONAL

Kujtohu!

- Nëse $r\in\mathbb{Q}$, atëherë $r=\frac{m}{n}=m\cdot\frac{1}{n}$, $(m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N})$
- $(a^m)^n=a^{mn}$, $(m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N})$

A 1 Të vërejmë çka paraqesin shprehjet:

$4^{\frac{3}{2}}$; $27^{\frac{1}{3}}$.

- Çfarë numrash janë treguesit e numrave 4 dhe 27?

Shprehja $4^{\frac{3}{2}}$ dhe $27^{\frac{1}{3}}$ ose nëpërgjithësi $a^{\frac{m}{n}}, (a>0, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N})$ quhet fuqi me tregues numër racional.

Le të jetë $4^{\frac{3}{2}}=x$. Nëse barazimin e fuqizojmë me 2 e pastaj e zbatojmë rregullën për fuqizimin e fuqis me tregues numër natyror, do të fitojmë:

Nga $4^{\frac{3}{2}}=x$ rrjedh $\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2=x^2$;

$$\left(4^{3\cdot\frac{1}{2}}\right)^2=x^2;$$

$$4^{\left(3\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot 2}=x^2;$$

$$4^{3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)}=x^2;$$

$$4^3=x^2.$$

Pasi $4^3=64=8^2$, pra, vlera e fuqisë $4^{\frac{3}{2}}$ është numër pozitiv x vlera e së cilës është e barabartë me 4^3, d.m.th. $4^{\frac{3}{2}}=8$.

$27^{\frac{1}{3}}=3$, sepse $27^1=3^3$

Mbani mend!

Vlera e fuqisë $a^{\frac{m}{n}}, (a>0, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N})$ është numër pozitiv të cilin nëse e fuqizojmë me n do të fitojmë a^m.

Nga përkufizimi rrjedh se $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=\left(\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n=a^m$

2 Njehso: a) $8^{\frac{2}{3}}$; b) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$; c) $81^{-0,5}$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $8^{\frac{2}{3}}=\left(8^2\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\left(2^3\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}=2^2=4$; b) $81^{-0,5}=81^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{81^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\left(9^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{9}$.

Vëreni se: $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, (a>0,\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N})$

3 Njehso: a) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-0,5}$; b) $0,027^{-\frac{1}{3}}$.

Në këtë mënyrë është kryer edhe një zgjerim i kuptimit fuqi.

Kështu zgjerimi i kuptimit për fuqi është i arsyeshëm nëse për të vlejnë pohimet e mëposhtme:

1. $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$; 2. $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$; 3. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$;

4. $(a\cdot b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}$; 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}, (a,b\in\mathbb{R}; m,p\in\mathbb{Z}; q\in\mathbb{N})$.

4 Provoni vërtetësinë e pohimeve:

$$\text{a) } 16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}; \qquad \text{b) } 16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}; \qquad \text{c) } \left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}.$$

Vëreni zgjidhjen:

$$\text{a) } 16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}; \qquad \text{b) } \left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}};$$

$$\left(4^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}; \qquad \left(\left(8^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}};$$

$$4 \cdot 2 = 2^3; \quad 8 = 8. \qquad 8^{\frac{1}{3}} = 2^{6\cdot\frac{1}{6}}; \ \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^1; \ 2 = 2.$$

Sipas kësaj për operacionet ku treguesi është numër racional vlejnë të njëjtat rregulla të cilat ishin të vërteta edhe te fuqitë me tregues numër natyror dhe të plotë.

Më tutje kur është fjala për fuqi me tregues numër racional për bazën do të marrim se ajo është gjithmonë numër pozitiv edhe pse nuk do ta përmendim.

2 Kryeni operacionet :

$$\text{a) } a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}; \qquad \text{b) } x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}} : x^{-1,5}; \qquad \text{c) } \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}; \qquad \text{d) } \left(x^{\frac{3}{4}} : x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vëreni zgjidhjen:

$$\text{d) } \left(x^{\frac{3}{4}} : x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{1}{12}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{24}}$$

Detyra:

1. Caktoni vlerën e fuqive: a) $9^{\frac{3}{2}}$; b) $4^{-\frac{1}{2}}$; c) $49^{\frac{1}{2}}$.

2. Njehso: a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2\frac{1}{4}\right)^{0,5} - \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ b) $36^{0,5} + 81^{0,25} - 16^{\frac{3}{4}} - 5,6^0$.

3. Njehso: a) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{1\frac{1}{3}}$; b) $b^{\frac{1}{2}} : \left(b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-1}\right)$; c) $\left(\left(x : x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} : x^{-\frac{4}{3}}$.

4. Kryeni operacionet:

a) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2$; b) $\left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{2}}\right)$; c) $\left(a^{\frac{2}{3}} + (ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$.

3 RRËNJA, ZGJERIMI DHE THJESHTIMI I RRËNJËS

Kujtohu!

Për $a=2, n\in\{-2,-1,0,1,2\}$ caktoni vlerën e x, nëse $x=a^n$.

Me cilin operacion caktohet vlera e x?

A

1. Suprina e katrorit është $16cm^2$. Caktoni gjatësinë e brinjës së katrorit.

2. Vëllimi i kubit është $125cm^3$. Caktoni gjatësinë e brinjës së kubit.

Të njehsosh brinjën e katrorit dhe kubit, përkatësisht duhet të zgjidhish barazimin

$$a^2=16 \text{ dhe } a^3=125.$$

Për shembull, zgjidhje e barazimit $x^2=4$ janë numrat 2 dhe -2, sepse $2^2=4$ dhe $(-2)^2=4$.

Zgjidhje e barazimit $x^3=8$ është 2, kurse e barazimit $x^3=-8$ është -2. Zgjidhjet e barazimit $x^2=4$, quhen rrënjë e dytë (katrore) e 4, kurse e barazimeve $x^3=8$, $x^3=-8$ quhen rrënja e tretë e 8, përkatësisht -8.

Mbani mend!

Nëse a është real dhe n numër natyror, atëherë çdo zgjidhje e barazimit $x^n=a$ në bashkësinë $\mathbb{R}$, nëse ekziston, quhet rrënjë e n-të e numrit a dhe shënohet me $x=\sqrt[n]{a}$.

Numri n quhet treguesi i rrënjës, $n\geq 2$, numri a-shprehja nën rrënjë, kurse $\sqrt{}$ -shenja për rrënjë. Mënyra sipas së cilës caktohet $\sqrt[n]{a}$ quhet ***rrënjëzim***.

Nëse n=2, atëherë treguesi nuk shkruhet, d.m.th. $\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$, $a\geq0$, lexohet rrënjë katrore e a.

Në mësimin e mësipërm përkufizuam fuqinë me tregues numër racional d.m.th. $27^{\frac{1}{3}}=3$, sepse $27^1=3^3$ dhe $\sqrt[3]{27}=3$ sepse $3^3=27$. Nëse i krahasojmë rezultatet kemi: $27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}$ dhe $4^{\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3}=\sqrt{64}$, ose në përgjithësi prej $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^m$ rrjedh $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Mbani mend!

Nëse a është numër real pozitiv, kurse m dhe n numra natyrorë, atëherë $a^{\frac{m}{n}} \underline{\underline{\overset{def}{}}} \sqrt[n]{a^m}$.

Për shembull: $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}$; $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}$; $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$.

3. Shkruani si rrënjë fuqitë: a) $5^{\frac{2}{3}}$; b) $(ab)^{\frac{1}{3}}$; c) $(a+b)^{-\frac{1}{2}}$; d) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}$.

4 Shkruani si fuqi rrënjët: a) $\sqrt[3]{x}$; b) $\sqrt[4]{ab^3}$; c) $\sqrt{a^2+b^2}$; d) $\sqrt[3]{a^{-1}b^{-2}}$.

Vëreni zgjidhjen:

c) $\sqrt{a^2+b^2} = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Vlera e fuqisë $a^{\frac{m}{n}}\,(a>0)$ është numër pozitivj, pra edhe $\sqrt[n]{a^m}$ është numër pozitiv. Këtë na e tregon edhe teorema për rrënjë, të cilën do ta japim pa vërtetim.

T. Për çdo numër real $(a>0)$ dhe çdo numër natyror n gjendet numri i vetëm real pozitiv *x që është zgjidhje e barazimit* $x^n = a$.

Cilat janë zgjidhjet e barazimit?

a) $x^3 = 27$ i b) $x^3 = -8$.

Nëse n është numër tek , atëherë barazimi $x^n = a$ ka vetëm një zgjidhje në $\mathbb{R}$, d.m.th . gjithmonë gjendet rrënja e n-të e numrit a dhe atë vetëm një dhe e shënojmë $\sqrt[n]{a}$.

Për vlerën e rrënjës $\sqrt[n]{a} = x(a>0)$ teorema nuk e përjashton mundësinë për ekzistimin e relacionit $x^n = a$ në bashkësinë e numrave negativ.

Cilat numra janë zgjidhje e barazimit?

a) $x^2 = 9$ dhe b) $x^4 = 16$.

Nëse n është numër çift dhe $(a>0)$,barazimi $x^n = a$ ka vetëm dy zgjidhje në $\mathbb{R}$, të cilët janë numra të kundërt. Pra, gjenden dy numra të kundërt të cilët paraqiten si rrënjë të n-të të a. Rrënjën pozitive e

shënojmë me $\sqrt[n]{a}$, kurse rrënjën negative e shënojmë me $-\sqrt[n]{a}$. Nëse a=0, atëherë $\sqrt[n]{0} = 0$.

Vlerën jonegative të rrënjës e quajmë ***rrënjë arithmetike*** dhe në vazhdim do të punojmë me rrënjë arithmetike.

A ka barazimi a) $x^2 = -4$; b) $x^4 = -81$; zgjidhje në bashkësinë $\mathbb{R}$?

Sepse $x^2 \geq 0$ dhe $x^4 \geq 0$ për çdo numër real , domethënë barazimet nuk kanë zgjidhje në $\mathbb{R}$, d.m.th. $\sqrt{-4}$ dhe $\sqrt[4]{-81}$ nuk janë të përkufizuara në $\mathbb{R}$, për më tepër themi se ato nuk kanë kuptim.

Mbani mend!

Rrënjëzimi i rrënjës me tregues numër çift i numrave realë negativ nuk është i përkufizuar.

5 Caktoni se cilat nga shprehjet kanë kuptim: a) $\sqrt[8]{-8}$; b) $\sqrt[12]{0}$; c) $\sqrt[10]{-256}$; d) $\sqrt[4]{-16}$.

6 Sa është: a) $\sqrt[5]{2^5}$; b) $\sqrt[3]{2^3}$; c) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; d) $\sqrt{(-2)^2}$?

Vëreni zgjidhjen:

a) 2; b) 2; c) -2. pse? d) $\sqrt{(-2)^2}$ është numër pozitiv, pra $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

sepse $(-2)^2 = 2^2$ rrjedh $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$. për arsye të njëjta dhe $\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{3^4} = 3$, $\sqrt{(-5)^2} = 5$ etj.

Sipas kësaj : $\sqrt{(-2)^2} = |-2|$; $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3|$ dhe $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$.

Pra $\sqrt{a^2} = |a|$ ose në përgjithësi nëse n është numër çift atëherë $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

Mbani mend!

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{nëse } n \text{ është numër tek} \\ |a|, & \text{nëse } n \text{ është numër çift} \end{cases}$$

7 Caktoni vlerën e shprehjeve: a) $\sqrt[5]{(-7)^5}$; b) $\sqrt[3]{9^3}$; c) $\sqrt[4]{(-4)^4}$; d) $\sqrt[6]{3^6}$.

Sa është: $\left(\sqrt{3}\right)^2$; $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$? Sipas përkufizimit vlera e rrënjës është 3, përkatësisht 5.

Në përgjithësi $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, nën kushtin që $\sqrt[n]{a}$ ka kuptim.

Për shembull, $\left(\sqrt{-3}\right)^2 \neq -3$, sepse $\sqrt{-3}$ nuk ka kuptim.

Kujtohu!

$\dfrac{m}{n} = \dfrac{m \cdot k}{n \cdot k}, k \neq 0$

$\dfrac{m}{n} = \dfrac{m : k}{n : k}, k \neq 0$

ℬ 6 Renditi vlerat e rrënjëve $\sqrt[3]{8}$ dhe $\sqrt[6]{64}$.

Rrënjët kanë vlerë të njëjtë. I vërtetë është edhe barazimi $\sqrt[3]{2^5} = \sqrt[9]{2^{15}}$.

Si janë fituar treguesit në anën e majtë të barazimit?
Në përgjithësi vlen pohimi

Nëse $a > 0$ dhe m, n dhe $k \in \mathbb{N}$ atëherë $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$.

Kjo veti quhet ***zgjerim i rrënjës.***

Vëreni vërtetimin : $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$.

8 Thuani teoremën me fjali.

9 Rrënjët : a) $\sqrt[3]{a^2}$; b) $\sqrt[4]{ab^3}$, zgjeroni me 4.

10 Rrënjët: $\sqrt[3]{2x^2}$ dhe $\sqrt[4]{ab}$ sillni në shumëfish më të vogël të përbashkët.

11 Rrënjët: a) $\sqrt{a^3b}$; b) $\sqrt[3]{ab^2}$; c) $\sqrt[4]{ab}$, sillni në tregues rrënjor të njëjtë:

Vëreni zgjidhjen: SHVP (2,3,4)=12;

$$\sqrt{a^3b}=\sqrt[12]{(a^3b)^6}=\sqrt[12]{a^{18}b^6}\ ;\ \sqrt[3]{ab^2}=\sqrt[12]{(ab^2)^4}=\sqrt[12]{a^4b^8}\ ;\ \sqrt[4]{ab}=\sqrt[12]{(ab)^3}=\sqrt[12]{a^3b^3};\quad (a>0,b>0).$$

C

12 Renditi vlerat e rrënjëve

$\sqrt[9]{8^6}$ dhe $\sqrt[3]{8^2}$.

- Rrënjët kanë vlerë të njëjtë.
- Si janë fituar treguesat e rrënjës së dytë?

Në përgjithësi është i vërtetë pohimi:

> Nëse $a>0, m, n$ dhe $k\in\mathbb{N}$, atëherë
> $$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$$

Kjo veti quhet ***thjeshtim i rrënjës.***

Vëreni zgjidhjen:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mk}{nk}}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$$

13 Tregoni teoremën me fjalë.

14 Shkurtoni thyesën:

a) $\sqrt[6]{16}$; b) $\sqrt[8]{100}$; c) $\sqrt[6]{\frac{a^4b^2}{c^2}}$.

Të merremi vesht:

Në vazhdim do të konsiderojmë se ndryshoret në shprehjen nën rrënjë janë pozitive, dhe shprehja nën rrënjë është pozitive,kurse rrënja ka vlerë arithmetike.

Detyra:

1. Cilat nga gjykimet janë të vërteta:

   a) $\sqrt{3^2}=3$; b) $\sqrt{(-3)^2}=-3$; v) $\sqrt{(-3)^2}=3$?

2. Njehso:

   a) $\sqrt[3]{-1}$; b) $\sqrt[5]{(-3)^5}$; v) $\sqrt{169}-\sqrt[3]{125}-\sqrt[4]{16}$.

3. Shkruani si rrënjë fuqitë:

   a) $x^{\frac{1}{4}}$; b) $2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$; v) $3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$.

4. Shkruani si fuqi , rrënjët:

   a) $\sqrt[4]{a^3}$; b) $\sqrt[4]{2a^2b^3}$; c) $\sqrt[3]{b^2\sqrt{a}}$; d) $a^2+\sqrt[3]{a^2}$.

5. Sillni në tregues të njëjtë rrënjët:

   a) $\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[4]{2}$; b) $\sqrt{a},\sqrt[3]{a^2}$;

   v) $\sqrt{abc},\sqrt[3]{a^2b},\sqrt[4]{abc^2}$.

6. Thjeshtoni rrënjët:

   a) $\sqrt[4]{36}$; b) $\sqrt[4]{25a^2}$; v) $\sqrt[8]{36a^4b^2}$.

4 TRANSFORMIMI I RRËNJËS

Kujtohu!

- Rrënjën $\sqrt[3]{a^2}$ shkruani në formë të fuqisë me tregues numër racional.
- Fuqizoni: a) $(a\cdot b)^2$; b) $(a:b)^2$;

  c) $(a\cdot b)^{\frac{2}{3}}$; d) $(a:b)^{\frac{3}{4}}$.

A

1 Provoni vërtetësinë e barazimeve:

a) $\sqrt{64\cdot 25}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{25}$.

b) $\sqrt{\frac{100}{25}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}$.

Vëreni se rrënja katrore e prodhimit dhe herësit të numrave pozitiv është e barabartë me prodhimin përkatësisht herësin e rrënjëve katrore të atyre numrave.

E njëjta rregull vlen edhe për çfarëdo rrënjë.

Mbani mend!

$$\sqrt[n]{ab}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\,;\qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ a\geq 0, b>0, n\in\mathbb{N},$$

rregullat për rrënjëzimin e prodhimit dhe herësit.

2 Njehso: a) $\sqrt[3]{8\cdot 64}$; b) $\sqrt[3]{\frac{8}{64}}$.

3 Njehso:

a) $\sqrt[3]{27\cdot(-64)\cdot 125}$; b) $\sqrt[5]{\frac{-32}{243}}$.

4 Thjeshtoni shprehjen:

a) $\sqrt[3]{x^9y^6z^3}$; b) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b}{27x^6y^3}}$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $\sqrt[3]{x^9y^6z^3}=\sqrt[3]{x^9}\sqrt[3]{y^6}\sqrt[3]{z^3}=x^3y^2z$;

Mbani mend!

Rrënja e prodhimit të dy ose më shumë shumëzuesish pozitiv është sa prodhimi i rrënjëve të atyre shumëzuesve. Rrënja e herësit pozitiv është e barabartë me herësinë e rrënjës së numeruesit dhe rrënjës së emëruesit.

5 Për cilat vlera të ndryshores x janë të vërteta barazimet?

a) $\sqrt[3]{x(x+2)}=\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+2}$; b) $\sqrt[4]{\frac{x}{x^2+1}}=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^2+1}}$.

B **6** Thjeshtoni shprehjet:

a) $\sqrt{16a^2b}$; b) $\sqrt[5]{\frac{x^5y^3}{32}}$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $\sqrt{16a^2b}=\sqrt{16}\sqrt{a^2}\sqrt{b}=4a\sqrt{b}$;

b) $\sqrt[5]{\frac{x^5y^3}{32}}=\frac{\sqrt[5]{x^5}\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{x}{2}\sqrt[5]{y^3}$.

Ky transformim i rrënjëve quhet ***nxjerrja e shumëzuesit para shenjës së rrënjës.***

7 Nxirrni shumësues para shenjës së rrënjës:

a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt[3]{192}$; c) $\sqrt[4]{a^{11}}$;

d) $\sqrt[3]{72a^7b^5}$; e) $\sqrt{4a^2+16}$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}\sqrt{2^2\cdot 2}=2\sqrt{2}$;

c) $\sqrt[4]{a^{11}}=\sqrt[4]{a^8\cdot a^3}=a^2\sqrt[4]{a^3}$;

e) $\sqrt{4a^2+16}=\sqrt{4(a^2+4)}=2\sqrt{a^2+4}$.

Në përgjithësi!

$$\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{\alpha^n\beta}=\sqrt[n]{\alpha^n}\sqrt[n]{\beta}=\alpha\sqrt[n]{\beta}\,,(\alpha>0,\beta>0).$$

Kujde!

Para shenjës së rrënjës nxirren vetëm shumëzues të shprehjes nën rrënjë.

- Cilët shumëzues mund të nxirren para shenjës së rrënjës?

Le të jetë dhënë $\sqrt[n]{a^m}$, ose $m > n$, atëherë $m = np + r$, pra $a^m = a^{np+r} = a^{np} \cdot a^r$.

Prej nga kemi: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{np} \cdot a^r} = a^p \sqrt[n]{a^r}$.

8 Nxirrni shumëzuesit para shenjës së rrënjës: a) $\sqrt[4]{a^{35}}$; b) $\sqrt[3]{x^7 y^{14}}$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $\sqrt[4]{a^{35}} = a^8 \sqrt[4]{a^3}$; sepse $35 = 8 \cdot 4 + 3$.

9 Vëreni barazimin $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ nga e djathta në të majtë.

Vëreni:

$2\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$. Ky transformim i rrënjës quhet ***futja e shumëzuesit nën shenjën e rrënjës***.

Në përgjithësi: $\alpha\sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha^n \beta}$, $(\alpha > 0, \beta > 0)$

10 Futni shumëzuesit nën shenjën e rrënjës: a) $x\sqrt[3]{x^2}$; b) $\dfrac{a}{b}\sqrt[4]{\dfrac{b^2}{a}}$; c) $3a\sqrt[3]{\dfrac{1}{9a}}$; d) $\dfrac{2x}{3}\sqrt{\dfrac{27a}{4x}}$.

Vëreni zgjidhjen: d) $\dfrac{2x}{3}\sqrt{\dfrac{27a}{4x}} = \sqrt{\dfrac{4x^2}{9} \cdot \dfrac{27a}{4x}} = \sqrt{3ax}$.

Mbani mend!

Shumëzuesi futet nën shenjën e e rrënjës , ashtu që ai fuqizohet me treguesin e rrënjës dhe ashtu shumëzuesi i fituar shumëzohet me shprehjen nën rrënjë.

11 Vëreni zgjidhjen e detyrës: a) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; b) $\dfrac{2x}{3}\sqrt{\dfrac{27a}{4x}} = \sqrt{3ax}$.

Me disa transformime rrënjët mund të thjeshtohen. Kjo formë e thjeshtuar e rrënjës quhet ***forma normale e rrënjës.***

Për shembull rrënjët: $2\sqrt{2}$; $\sqrt{3ax}$; $\sqrt[3]{4a^2b}$; $\dfrac{2}{3}\sqrt[5]{a^4}$ janë në formë normale.

Mbani mend!

Rrënja është në formë normale , nëse shprehja nën rrënjë:
1. Nuk përmban emërues të ndryshëm nga 1.
2. Nuk përmban as shumëzues që mund të nxirren jashtë shenjës së rrënjës.
3. Treguesit e rrënjës dhe shprehjes nën rrënjë të mos kenë pjesëtues të përbashkët.

12 Pse rrënjët: $\sqrt{18}$; $3a\sqrt{\dfrac{1}{a}}$; $2a\sqrt[4]{a^2b^2}$ nuk janë në formë normale?

13 Rrënjët: a) $\sqrt{48}$; b) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; c) $2x\sqrt{\frac{3}{x}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{2ab^3}{3c^2d}}$, sillni në formë normale.

Vëreni zgjidhjen:

a) $\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot3}=4\sqrt{3}$;

c) $2x\sqrt{\frac{3}{x}}=2x\sqrt{\frac{3}{x}\cdot\frac{x}{x}}=2x\sqrt{\frac{3x}{x^2}}=2x\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}}=2\sqrt{3x}$;

■ e shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin me x që të fitojmë $\sqrt{x^2}=x$.

d) $\sqrt[3]{\frac{2ab^3}{3c^2d}}=\sqrt[3]{\frac{2ab^3}{3c^2d}\cdot\frac{3^2cd^2}{3^2cd^2}}=$

$=\sqrt[3]{\frac{b^3}{3^3c^3d^3}}\sqrt[3]{18acd^2}=\frac{b}{3cd}\sqrt[3]{18acd^2}$.

Detyra :

1. Njehso: a) $\sqrt{16\cdot121}$;

b) $\sqrt[3]{8\cdot(-27)\cdot64}$; c) $\sqrt{85^2-84^2}$; d) $\sqrt[4]{7\frac{19}{32}}$.

2. Njehso:

a) $\sqrt{x^2y^4}$; b) $\sqrt[4]{81x^8y^{12}}$; c) $\sqrt[5]{\frac{-32x^{15}}{y^{10}}}$.

3. Nxirrni shumëzuesit para shenjës së rrënjës:

a) $\sqrt{108}$; b) $\sqrt[3]{54x^5y^4}$; c) $\sqrt{\frac{12a^3b^5}{c^4}}$.

4. Futni shumëzuesit nën shenjën e rrënjës:

a) $3\sqrt{2}$; b) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$; c) $a\sqrt{\frac{1}{a}}$; d) $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$.

5. Sillni rrënjët në formën normale:

a) $\sqrt{5\frac{1}{3}}$; b) $\sqrt[3]{54}$; c) $\sqrt{3a^2b^3}$; d) $ab\sqrt{\frac{12}{ab}}$;

e) $2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{7}}$; f) $\sqrt{4a^3-8a^2}$ g) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}}$.

5 MBLEDHJA DHE ZBRITJA E RRËNJËVE

Kujtohu!

- Cilat monome janë të ngjashme?
- Çka është kueficienti i monomit:

$2a^2b;\ -xy;\ 0,25y^2$?

- Si mblidhen monomet?

A **1** Paraqitni rrënjët:

a) $\sqrt{8}$; b) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; c) $\sqrt{50a^2}$ në formë normale .

Vëreni zgjidhjen:

■ a) $2\sqrt{2}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; c) $5a\sqrt{2}$.

- Çka mund të përfundosh nga rezultati i fituar?
- Shumëzuesi racional para shenjës së rrënjës quhet ***koeficient i rrënjës***.

Mbani mend!

Dy ose më shumë rrënjë në formë normale janë të ngjashme , nëse kanë treguesin e rrënjës të njëjtë dhe shprehje nën rrënjë të njëjtë.

2 A janë të ngjashëm rrënjët: a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ i $\sqrt{\frac{1}{24}}$; b) $\frac{3}{a}\sqrt{a^3b}$ dhe $ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$?

Vëreni zgjidhjen:

b) $\frac{3}{a}\sqrt{a^3b}=\frac{3}{a}a\sqrt{ab}=3\sqrt{ab}$ dhe $ab\sqrt{\frac{1}{ab}}=ab\sqrt{\frac{ab}{(ab)^2}}=ab\frac{1}{ab}\sqrt{ab}=\sqrt{ab}$. Pra, rrënjët janë të ngjashme.

3 Tregoni se rrënjët janë të ngjashme: a) $\sqrt[3]{16}$ dhe $\sqrt[3]{54}$; b) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$ dhe $\sqrt{\frac{8}{9}-\frac{1}{3}}$; c) $\sqrt{\frac{x}{y}}$ dhe $\sqrt{\frac{y}{x}}$.

Kujtohu!

- Shkruani ligjin distributiv të shumëzimit në lidhje me mbledhjen në bashkësinë $\mathbb{R}$.
- Rregulloni polinomin

$2ab-\frac{1}{2}ab+1\frac{1}{2}ab$.

B **4** Thjeshtoni shprehjen:

$2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Vëreni zgjidhjen:

$2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+1\frac{1}{2}\sqrt{3}=\left(2-3+1\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$.

Mbani mend!

Mblidhen dhe zbriten vetëm rrënjët e ngjashme.

5 Njehsoni mbledhjen: a) $5\sqrt{5}+7\sqrt{20}-2\sqrt{45}$; b) $3\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{8a}-\sqrt[3]{27a}$.

Vëreni zgjidhjen: b) $3\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{8a}-\sqrt[3]{27a}=$

Rrënjët nuk janë në formë normale.

$=3\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{2^3a}-\sqrt[3]{3^3a}=3\sqrt[3]{a}+5\cdot2\sqrt[3]{a}-3\sqrt[3]{a}=$

Zbatoni ligjin distributiv. $=(3+10-3)\sqrt[3]{a}=10\sqrt[3]{a}$.

6 Thjeshtoni shprehjet: a) $\frac{3}{a}\sqrt{a^3}-\frac{4}{b}\sqrt{b^3}$; b) $3xy\sqrt{\frac{4}{xy}}-\frac{4}{x}\sqrt{x^3y}+3y\sqrt{\frac{x}{y}}$;

Vëreni zgjidhjen: b) $3xy\sqrt{\frac{4}{xy}}-\frac{4}{x}\sqrt{x^3y}+3y\sqrt{\frac{x}{y}}=3xy\cdot\frac{2}{xy}\sqrt{xy}-\frac{4}{x}x\sqrt{xy}+3y\cdot\frac{1}{y}\sqrt{xy}=$

$=6\sqrt{xy}-4\sqrt{xy}+3\sqrt{xy}=5\sqrt{xy}$.

Detyra:

1. Cilët rrënjë janë të ngjashme: a) $\sqrt{2}$ dhe $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{18}$; $\sqrt{50}$ dhe $\sqrt{98}$; c) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$; $\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}$ dhe $\sqrt[3]{x^{-2}y^{-2}}$.

2. Kryeni mbledhjen: a) $8\sqrt{2}-6\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{18}$; b) $25\sqrt{0,2}+2\sqrt{1\frac{1}{4}}-3\sqrt{20}$; c) $4\sqrt[6]{4}-2\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{8}$.

3. Kryeni mbledhjen: a) $2\sqrt{36a}-3\sqrt{25a}+2\sqrt{9a}$; b) $2a\sqrt[3]{a^4b}-3a\sqrt[3]{ab^4}-a^2\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}}+2b^3\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$.

6 SHUMËZIMI , PJESËTIMI , FUQIZIMI DHE RRËNJËZIMI I RRËNJËS

Në transformimin e rrënjës treguam si rrënjëzohet prodhimi dhe herësi .
A vlen e kundërta?

A Provo vërtetësinë e barazimit:

1 $\sqrt{64}\cdot\sqrt{25}=\sqrt{64\cdot 25}$;

2 $\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}=\sqrt{\dfrac{100}{25}}$.

Vëreni se barazimet janë të vërteta. E njëjta veti vlen edhe për çdo rrënjë, d.m.th.

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab}$;

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

Në përgjithësi të vërteta janë pohimet:

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$, $a\geq 0,\ b\geq 0,\ n\in\mathbb{N}$;

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $a\geq 0,\ b>0,\ n\in\mathbb{N}$.

Interpretoni teoremat me fjalë.

3 Njehso: a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$; b) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x}$; c) $\sqrt[3]{x^3y^2}:\sqrt[3]{x^2y}$.

Vëreni zgjidhjen:

c) $\sqrt[3]{x^3y^2}:\sqrt[3]{x^2y}=\sqrt[3]{x^3y^2:\left(x^2y\right)}=\sqrt[3]{xy}$.

Mbani mend!

Shumëzohen dhe pjesëtohen rrënjët me të njëjtin tregues, ashtu që prodhimi , herësi i pjesës nën rrënjë rrënjëzohet me të njëjtin tregues të rrënjës .

4 Njehso:

a) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$; b) $2\sqrt[3]{25a^2}\cdot 3\sqrt[3]{15a}$; c) $\sqrt{48}:\sqrt{3}$;

d) $\sqrt[4]{27a^3}:\sqrt[4]{\dfrac{a^3}{3}}$; e) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

5 Njehso:

a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}$; b) $\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[4]{2x}\cdot\sqrt{2x}$; c) $\sqrt{a}:\sqrt[3]{a^2}$; d) $2a^3b\sqrt[3]{a^2b^3}:ab\sqrt{a^3b^2}$.

Vëreni zgjidhjen:

Rrënjet janë me tregues të ndryshëm:

b) $\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[4]{2x}\cdot\sqrt{2x}=\sqrt[12]{(2x)^4}\cdot\sqrt[12]{(2x)^3}\cdot\sqrt[12]{(2x)^6}=\sqrt[12]{(2x)^{4+3+6}}=\sqrt[12]{(2x)^{13}}=2x\sqrt[12]{2x}$.

d) $2a^3b\sqrt[3]{a^2b^3}:\left(ab\sqrt{a^3b^2}\right)=2a^3b:(ab)\sqrt[6]{\left(a^2b^3\right)^2:\left(a^3b^2\right)^3}=$

$$=2a^2\sqrt[6]{\frac{a^4b^6}{a^9b^6}}=2a^2\sqrt[6]{\frac{1}{a^5}}=2a^2\sqrt[6]{\frac{a}{a^6}}=2a^2\frac{1}{a}\sqrt[6]{a}=2a\sqrt[6]{a}.$$

- Si shumëzohen dhe pjesëtohen rrënjët me tregues të ndryshëm?

6 Njehso: a) $\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{15}$; b) $9\cdot\sqrt{\frac{2}{45}}:\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$; c) $a^2\sqrt{2x}:\frac{1}{a}\sqrt[3]{4x}$; d) $\sqrt[3]{4a^2}:\sqrt[6]{2a^3}$.

B **7** Njehso: a) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$; b) $\left(\sqrt{a^2b}\right)^3$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\cdot 2}=\sqrt[3]{2^2}$; b) $\left(\sqrt{a^2b}\right)^3=\left[\left(a^2b\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3=\left(a^2b\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(a^2b\right)^3}=\sqrt{a^6b^3}=a^3b\sqrt{b}$.

Mbani mend!

Në përgjithësi : $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{1}{n}\cdot m}=\sqrt[n]{a^m}$.

Rrënja fuqizohet ashtu që fuqizohet shprehja nën rrënjë dhe fuqia e fituar rrënjëzohet me treguesin e njëjtë të rrënjës, d.m.th. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$, $(a>0; m,n\in\mathbb{N})$.

8 Njehso: a) $\left(\sqrt{5}\right)^2$; b) $\left(\sqrt[3]{3x^2}\right)^2$; c) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{ab}\right)^3$.

C **9** Provo vërtetësinë e barazimeve $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}$.

10 Njehso: a) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; b) $\sqrt{\sqrt[4]{ab^3}}$.

Vëreni zgjidhjen:

b) $\sqrt{\sqrt[4]{ab^3}}=\left(\sqrt[4]{ab^3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\left(ab^3\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left(ab^3\right)^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{ab^3}$.

Në përgjithësi: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{m\cdot n}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$.

Mbani mend!

Rrënja rrënjëzohet ashtu që shprehja nën rrënjë rrënjëzohet me prodhimin e treguesve të rrënjëve, d.m.th. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$, $(a>0; m,n\in\mathbb{N})$.

11 Njehso: a) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$; b) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2x^3y^4}}$; c) $\sqrt{x\sqrt[3]{2x}}$.

Vëreni zgjidhjen:

b) $\sqrt{x\sqrt[3]{2x}}=\sqrt{\sqrt[3]{x^3 2x}}=\sqrt{\sqrt[3]{2x^4}}=\sqrt[6]{2x^4}$.

Pas kryerjes së operacioneve, rezultati i fituar nëse është rrënjë gjithmonë shkruhet në formën normale.

12 Thjeshtoni shprehjet:

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; b) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a}}$; d) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$.

Detyra:

1. Kryeni operacionet:

a) $2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{21}$; b) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)$;

c) $\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}\sqrt{x^2-4}$; d) $3a^2\sqrt[3]{a^2b^{-1}}\cdot 2a^{-1}b\sqrt{a^{-5}b^4}$.

2. Njehso: a) $4,8\sqrt{xy}:0,6\sqrt{\frac{1}{xy}}$; b) $\left(2\sqrt{6}+\sqrt{18}-\sqrt{24}\right):\sqrt{2}$; c) $\sqrt[3]{2a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[6]{a^5}$.

3. Kryeni operacionet:

a) $\sqrt[8]{\left(a^2b^3\right)^7}$; b) $\left(\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\right)^4$; c) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{ab}\right)^3\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^5$; d) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$.

4. Presmetaj: a) $\sqrt{\sqrt{3\sqrt{3}}}$; b) $\sqrt{a\sqrt[4]{a}}$; c) $\sqrt{x\sqrt[3]{xy}}:\sqrt{y\sqrt{xy}}$

7 RACIONALIZIMI I EMËRUESIT TË THYESËS

Kujtohu!

- $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot n}{n\cdot k},(k\neq 0)$
- $\sqrt{a}\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a,(a>0)$
- $\sqrt[n]{a^n}=a,(a>0)$

A **1** Llogaritni vlerën e $\frac{10}{\sqrt{2}}$ dhe $5\cdot\sqrt{2}$ me saktësi deri në katër dhjetore.

Me ndihmën e kalkulatorit njehso

$10:1,41421=7,071085...$, kurse $5\cdot 1,41421=7,07105$.

Me cilin operacion më lehtë do të vish deri te rezultati nëse punon pa kalkulator?

Vëreni se $\frac{10}{\sqrt{2}}=5\cdot\sqrt{2}$, d.m.th me një numër transformimesh, pjesëtimi me numër iracional kalon në shumëzim i cili gjithmonë është operacion më i thjeshtë.

Mbani mend!

Transformimi i shprehjeve ku emëruesin nga forma iracionale e kthejmë në formë racionale quhet ***racionalizim i emëruesit të thyesës***

2 Racionalizoni emëruesin e thyesës: a) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{12}{\sqrt[3]{4}}$; c) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$;

b) Sepse $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}$, që të largojmë rrënjën nga emëruesi duhet të zgjerojmë me $\sqrt[3]{2^1}$, dhe të përdorim $\sqrt[n]{a^n}=a$.

c) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}}=$

Sepse: $\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}=\left(\sqrt{a+b}\right)^2$.

$=\frac{(a^2-b^2)\sqrt{a+b}}{\left(\sqrt{a+b}\right)^2}=(a-b)\left(\sqrt{a+b}\right)$, sepse $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

3 Racionalizoni emëruesin e thyesës: $\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}, (n>m), A$ është numër ose shprehje, kurse B është numër pozitiv ose shprehje e cila fiton vetëm vlera pozitive.

Vëreni zgjidhjen:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}=\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{m+n-m}}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{B}.$$

Nëse $n<m$, atëherë rrënjën sillni në formë normale, dhe pastaj zbatoni rregullat.

4 Racionalizoni emëruesin e thyesës:

a) $\frac{5}{3\sqrt{2}}$; b) $\frac{5}{\sqrt[3]{49}}$; c) $\frac{4a^2-b^2}{\sqrt[3]{2a-b}}$; d) $\frac{4}{\sqrt[3]{16}}$.

Kujtohu!

Njehsoni prodhimin:

$(a-b)(a+b)$; $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)$; $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

5 Racionalizoni emëruesin e thyesës: a) $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$; b) $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Vëreni zgjidhjen:

a) $\frac{2}{3+\sqrt{2}}=\frac{2}{3+\sqrt{2}}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{2\left(3-\sqrt{2}\right)}{9-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}$;

b) $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{5\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}$.

6 Racionalizoni emëruesin e thyesës:

a) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$.

Vëreni zgjidhjen:

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}\cdot\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}=$

Numëruesin dhe emëruesin e thyesës i shumëzojmë me $4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$, sepse,

$$\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)=\left(4\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2,$$

$$=\frac{8\sqrt{6}-6\sqrt{9}+4\sqrt{4}-3\sqrt{6}}{\left(4\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{6}-18+8}{4^2\left(\sqrt{2}\right)^2-3^2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\left(\sqrt{6}-2\right)}{32-27}=\sqrt{6}-2.$$

7 Racionalizoni emëruesin e thyesës:

a) $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$; b) $\frac{11\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$; c) $\frac{a}{a-\sqrt{a}}$; d) $\frac{a^2-4b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}$

Detyra:

1 Racionalizoni emëruesin e thyesës:

a) $\frac{20}{3\sqrt{5}}$; b) $\frac{5}{\sqrt{8}}$; c) $\frac{2b}{\sqrt[5]{b^2}}$; d) $\frac{1-b}{\sqrt{1-b}}$; e) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2-b^2}}$.

2 Të racionalizohet emëruesi i thyesës:

a) $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$; b) $\frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; c) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; d) $\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

8 SHPREHJET IRACIONALE

Kujtohu!

- Cilat shprehje quhen algjebrike iracionale?
- Cilat operacione i përmendëm te shprehjet algjebrike racionale?
- Si quhen numrat $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}$?

Mbani mend!

A 1. Janë dhënë shprehjet:

a) $\frac{1}{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $x^2 - 4y$; d) $2+\sqrt{a}$;

e) $\frac{3x-y}{xy}$; f) $\frac{4}{\sqrt{5}}$; g) $5a^{-2}bc^{\frac{1}{3}}$.

Cilat nga shprehjet janë shprehje racionale algjebrike?

Shprehjet te të cilat përfshihen përveç operacioneve themelore edhe operacioni i rrënjëzimit ose fuqizimit me tregues numër racional quhen ***shprehje iracionale.***

Në detyrën 1 shprehje iracionale janë: b); d); f) dhe g).

Shprehjet racionale dhe iracionale quhen ***shprehje algjebrike.***

Shprehjet iracionale me ndryshore do t'i marrim parasysh vetëm për vlera për të cilat ato shprehje kanë kuptim.

2. Për cilën vlerë të ndryshores shprehja ka kuptim:

a) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x-2}$; b) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x}$; c) $\sqrt{x+1} - (x+1)^{\frac{1}{3}}$?

Vëreni zgjidhjen:

a) $\sqrt{x^2}$ ka kuptim për çdo numër real, d.m.th. $x \in (-\infty, \infty)$, $\sqrt{x-2}$ ka kuptim për $x-2 \geq 0, x \geq 2$ d.m.th. $x \in [2, \infty)$, sipas kësaj $x \in (-\infty, \infty) \cap [2, \infty) = [2, \infty)$.

c) $\sqrt{x+1}$ ka kuptim edhe për $x+1 \geq 0$; $x \geq -1$, a $(x+1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+1}$ ka kuptim për çdo numër relë. Sipas kësaj $x \in [-1, \infty)$.

3. Caktoni vlerën për të cilën shprehjet nuk kanë kuptim.

a) $x - \sqrt{x}$; b) $\sqrt{3-x} - \sqrt[3]{x}$; c) $\frac{x-2}{\sqrt{x+3}}$.

(Kujdes, pjesëtimi me zero nuk ka kuptim.)

Në shtjellimin e mëtutjeshëm nëse nuk është e theksuar do të nënkuptojmë se ***rrënjët kanë kuptim.***

4. Caktoni vlerën e : a) $\sqrt[4]{81}$; b) $\sqrt[5]{32}$; c) $7\sqrt{4}$.

Pasi të kryhen operacionet , disa shprehje iracionale kthehen në shprehje racionale: $\sqrt[5]{32}=2\,;7\sqrt{4}=14$. Shprehjet që përmbajnë ndryshore , për disa vlera të ndryshores janë racionale , kurse për disa janë iracionale.

5 Caktoni disa vlera të x dhe y për të cilat shprehja iracionale $\sqrt{x+2y}$ të bëhet racionale.

Disa shprehje iracionale me transformime mund të kthehen në shprehje racionale ose i njejti të thjeshtohet.Transformimet kryhen në bazë të rregullave për operacione me rrënjë si dhe vetive që vlejnë për rrënjët:

6 Të thjeshtohen shprehjet a) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$;

c) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; d) $\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{a}}-\dfrac{2\sqrt{a}}{1-a}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+1\right)$.

Vëreni zgjidhjen:

$$b)\ \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2+\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}+1+\sqrt{5}+2\sqrt{5}+1}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1}=\frac{12}{5-1}=3$$

$$d)\ \left(\frac{1}{1-\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{1-a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+1\right)=\left(\frac{1+\sqrt{a}}{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}-\frac{2\sqrt{a}}{1-a}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{a}-2\sqrt{a}}{1-a}\cdot\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}{(1-a)\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Detyra:

Thjeshtoni shprehjet:

1 a) $\dfrac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}-\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}+\dfrac{6}{4+\sqrt{10}}$; b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}-\sqrt{1+a}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}-1\right)$;

c) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; d) $\left(\dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x}{x-1}\right):\dfrac{2\sqrt{x}}{x-1}$.

Ushtrime kontrolluese tematike

1. Caktoni me çka është e barabartë:

   a) $\sqrt[3]{(-4)^3}$; b) $\sqrt[4]{(-3)^4}$.

2. Sillni në tregues të përbashkët rrënjët:

   a) $\sqrt[3]{2}$ i $\sqrt[4]{2}$; b) $\sqrt[4]{a^2b^3}$ dhe $\sqrt[6]{x^4y^5}$.

3. Njehso:

   a) $\sqrt{81\cdot169\cdot144}$; b) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}}$.

4. Shkruani në formë normale rrënjët:

   a) $\sqrt[3]{8a^5b^8}$; b) $a\sqrt[4]{\dfrac{2x^5y}{a^3}}$.

5. Kryeni rrënjëzimin

   $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}$.

6. Paraqitni në formë të rrënjës shprehjen $(3a-2b)^{-\frac{3}{4}}$.

7. Njehso $64^{-\frac{1}{6}}$.

8. Kryeni operacionet :

   $\sqrt[3]{2}-\sqrt{8}+\sqrt[3]{54}+\sqrt{200}$.

9. Kryeni operacionet:

   a) $\sqrt[3]{xy^2}\cdot\sqrt[6]{x^2y^3}$; b) $\sqrt[4]{a^2b^3}:\sqrt{ab}$.

10. Kryeni operacionet:

    a) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{2}$; b) $\left(\sqrt[3]{x^3y^4}-\sqrt[3]{x^4y^3}\right):\sqrt[3]{x^2y^2}$.

11. Racionalizoni emëruesin e thyesës:

    a) $\dfrac{26}{4-\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

12. Caktoni cilët nga shprehjet janë iracionale:

    a) $1-\sqrt{2}$; b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}-5=0$; c) x^2+3x+1; d) $\sqrt[3]{x^2}+5$.

TEMA 9

PËRPUNIMI I TË DHËNAVE

Libri i madh i natyrës është shkruar me gjuhën e matematikës

Galileo Galilej (1564-1642)

Në këtë temë do të njihesh me:

- populacionin, shënimet statistikore, shembuj statistikorë;
- Paraqitja grafike e të dhënave me tabelë, poligon dhe histogram;
- frekuenca dhe frekuenca kumulative;
- mesi arithmetikor;
- tendencat qëndrore : moda dhe median.

1 LËNDA E STATISTIKËS. POPULLACIONI DHE MODELI

A Statistika në fillim kishte për detyrë studimin e paraqitjeve masovike në shoqëri, që kishin interes të shtetit , siç janë : tatimet, pasuritë, marrëdhëniet e të hollave dhe borxhet, fondi i mallit, pozitat e ndryshme të vendbanimeve, nataliteti dhe mortaliteti , popullimi etj.

Emri *S T A T I S T I K Ë* rrjedh nga fjala latine *STATUS*, që do me thënë *pozitë* përkatësisht qëndrim në kuptimin e përgjithshëm.

Me zhvillimin e marëdhënieve shoqërore, fuqitë prodhuese dhe shkenca, u paraqit nevoja për shqyrtimin edhe të dukurive tjera masive. Ashtu që shqyrtimin e dukurive meteorologjike dhe seizmologjike, shqyrtimin e mendimit publik të njerëzve, prodhimin e llojeve të ndryshme të mallit, organizimin e udhëtimit të udhëtarëve në qytetet e mëdha, këto nuk mund të mendohen pa përdorimin e metodave statistikore.

Statistika paraqet metodë shkencore e cila përfshin , përpunimin dhe analizimin e të dhënave , paraqet metod e cila përfshin mbledhjen , përpunimin dhe analizën e të dhënave të fituara gjatë shqyrtimit të paraqitjeve masive.

Kërkimet statistikore i përmbajnë edhe fazat vijuese:

1. ***Mbledhjen e të dhënave;***
2. ***Grupimi dhe paraqitja e të dhënave;***
3. ***Analiza e të dhënave;***
4. ***Përfundimi statistikor.***

Statistika mund të ndahet në ***përshkruese dhe matematike.***

Statistika përshkruese i përfshin metodat statistikore të cilaty merren me mbledhjen , përpunimin dhe analizën e të dhënave statistike. Statistika përshkruese merret me : statikën e vendbanimeve dhe aktivitetet shoqërore, statistikën ekonomike dhe statistikën finansiare.

Statistika matematike i shqyrton ligjet e përgjithshme që vlejnë në shqyrtimin paraqitjeve masive. Në procesin e shqyrtimit të këtyre paraqitjeve përdoren metoda të ndryshme. Nga plani i hartuar më parë, mblidhen të dhënat për paraqitjen e caktuar , në mënyrë të : regjistrimit , anketave konstatimeve matjeve përshkrimeve etj. Të dhënat përpunohen edhe në bazë të rezultateve të fituara sillet përfundim për të sjellurit e asaj dukurie edhe në të ardhmen.

Statistika matematike është pjesë e matematikës aplikative, e cila në përgjithësi bazohet në teorinë e gjasës.

Ajo përfshin:

1. ***Teorinë e vlerësimit statik;***
2. ***Teorinë e përfundimeve statike.***

B Karakteristikë e paraqitjeve natyrore është se ato janë masive . Në secilën paraqitje natyrore marrin pjesë një numër i madhë pjesëtarësh , të cilët mes veti janë të lidhur ngusht sipas ndonjë drejtimi . Shënimet e tyre dallohen prej njëri tjetrit në paraqitjet masive.

Bashkësia e të gjitha elementeve të një paraqitje masive që është lëndë e kërkimeve statistikore quhet ***bashkësi statistike ose masë statistike ose populacion.***

1 Bashkësia statistike ose populacioni janë : nxënësit e një shkolle , ; banorët e qytetit të Shkupit, drurët e mollës në kopësht , pulat në një farmë pularie etj.

Elementet e një bashkësie statistike paraqesin ***njësi statistike***.

Vëreni: njësitë statistike nuk janë të njëjta.

2 Caktoni njësitë statistike në çdo populacion në detyën e paraprake.

Shënimet e përbashkëta të njësive statistike të të njëjtit lloj quhen ***shënime statistike***.

Shënimet statistike ndahen në ***kualitative dhe kuantitative***.

Shënimet kualitative i shqyrtojnë vetitë kualitative të elementeve statike dhe ato jepen me shkrim.

Shënimet kualitative në detyrën 1 janë: gjinia e nxënësve (mashkull, femër), përgatitja për vitin shkollor të banorëve të Shkupit (fillore, të mesme, të lartë dhe fakultete), drurët e mollëve ose të pulave në farmë etj.

Shënimet kuantitative paraqiten me numra realë. Shënime kuantitative të nxënësve janë : lartësia masa ; për banorët e qytetit të Shkupit mund të merret si shënim kuantitativ struktura e vjetërsisë . Për drurët e mollës mund të merret prodhimi në kilogram për mollë, kurse te pulat numri i tyre , numri i vezëve etj.

Shënimet kuantitative mund të jenë ***të ndërprera ose diskrete dhe të vazhdueshme***.

Shënimi statistikë është i ndërprerë (diskretë), nëse mund të pranojë numër të fundëm vlerash ose numër të numërueshëm vlerash. Pra, vlerat e shënimit të ndërprerë dallohen për ndonjë vlerë të fundme e cila zakonisht paraqitet me numra të plotë.

Shënimet e ndërprera në detyrën 1 janë: numri i nxënësve , numri i drurëve , numri i pulave , numri i vezëve për një muaj etj.

Shënimi statistik është i vazhdueshëm nëse mundet të marrë vlera të çfarëdoshme për një interval të caktuar ose të pacaktuar.

Në detyrën 1 shënim i pandërprerë është prodhimi i mollëve në kilogram , mollë për çdo pemë. Pra , prodhimi i një druri të mollës mund të jetë $0kg$, i tjetrit $20,6kg$;i të tretit $0,2kg$; i ndonjërës $50kg$ dhe kështu me rradhë

Pesha dhe lartësia e nxënësve në detyrën 1 është gjithashtu shënim i pandërprerë.

Shënimet statistike do t'i shënojmë me $X, Y, Z, \ldots$, kurse vlerat e tyre me $x, y, z, \ldots$

C Shqyrtimi i populacionit i cili ka numër të madh të elementeve është i pamundshëm nga shumë shkaqe. Tani, ky shqyrtim mund të jetë shumë i shtrejntë , të zgjasë shumë ,etj. Nga këto shkaqe shpesh shqyrtohet vetëm një pjesë e populacionit i quajtur ***model***, dhe në bazë të rezultateve të modelit arrihen përfundimet për tërë populacionin.

Përfundimet për populacion të arrira nga modeli do të jenë të sakta nëse modeli është ***reprezentativ***. Për një model themi se është reprezentativë nëse ai me vetitë dhe karakteristikat e tij është i ngjashëm me tërë populacionin dhe i zgjedhur rastësisht. Zgjidhje e rastësishme e secilit anëtarë ,do me thënë se ato kanë të njëjtat veti për tu zgjedhur.

Për shembull, zgjedhje e rastësishme e 5 nxënësve nga paralelja me 30 nxënës mund të kryhet në këtë mënyrë: I shkruajmë nëpër letra emrat e nxënësve dhe i përziejmë në kuti, dhe pastaj nxjerrim pes prej tyre. Nxënësit letrat e të cilëve janë tërhequr paraqesin model të paraleles.

Duhet të dish!

Çka është populacioni dhe çka modeli?
Të vlerësosh a është modeli reprezentativ për populacionin.
Çka është shënim statistik dhe a është i ndërprerë apo i vazhdueshme?

Detyra:

1) Përmendi disa bashkësi statistikore.

2) Nga 1000 copë të prodhuar për një ditë , për vlerësim nga masa e tyre janë marrë 50 copë.

a) Çka është te ky shembull populacion e çka model?
b) Sa elemente ka populacioni e sa modeli?
v) A është modeli reprezentativ , nëse për vlerësim merren 50 copat e para?
g) Si duhet të zgjidhen prodhimet , që modeli të jetë reprezentativ?

3) Cilat nga këto shënime janë kualitative e cilat kuantitative; ngjyra e automobilit; numri i nxënësve të paraleles?

Cilat nga shënimet e përmendura janë të ndërprera , e cilat të vazhdueshme?

4) Njeriu ndiheshte i pafuqishëm dhe shkoi te mjeku. Mjeku e udhëzoi në laboratori të bëjë analizat e gjakut.

Çka është populacion, e çka model në këtë kërkim?
Cilat shënime statistike do të hulumtohen?

2 PARAQITJA E TË DHËNAVE ME TABEL

Kujtohu!

- Cilat faza i përfshin hulumtimi statistikor?
- Në cilën mënyrë mund të mblidhen të dhënat?

Vëreni!

Nxënësit e paraleles paraqesin populacion. Suksesi i tyre në matematikë është një shënim statistik X, kurse $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ janë vlerat e tyrei (notat e nxënësve).

A 1 Në fund të vitit shkollor , arsimtari i matematikës shkruajti në tabelë notat e nxënësve të një paralele në këtë mënyrë:

4	3	5	1	2	3	5	4	2	1
5	2	4	3	1	2	4	3	3	2
1	1	2	4	1	5	1	3	3	3

Shënimi statistik është diskret, d.m.th. i ndërprerë.

Renditni shënimet staistikore sipas madhësis d.m.th. në vargje rritëse.

Vëreni:

1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5

Ky varg quhet ***varg statistik***.

Të dhënat e vargut statistik paraqiti në tabelë.

Numrin e njësive statistikore që kanë të njëjtat vlera të bashkësisë është nënbashkësi e populacionit dhe quhet ***klasë*** (***grup***) i shënimit. Vëreni se shënimi statistikor i përmendur ka 5 klasë (grupe).

Vlerat e shënimit X	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$	$x_5 = 5$	
Numri i njësive statistike që përsëritet në klasë	7	5	8	6	4	$\sum = 30$

Kjo tabelë quhet tabelë ***statistike***.

Pra, 7 nxënës kanë notë 1, 5 nxënës kanë notë 2 etj, dhe gjithsej 30 nxënës janë njësi statistike që e përbëjnë populacionin .

Diferenca mes vlerës më të madhe dhe më të vogël të shënimit quhet ***rang*** i shënimit.

Numrat $f_1 = 7; f_2 = 5; f_3 = 8; f_4 = 6; f_5 = 4$ paraqesin numër të njësisë statistike të cilat përsëriten në klasën përkatëse dhe quhen ***frekvencë*** (***e shpeshtë***) të vlerave x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 të shënimit X.

Vëreni: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 30$.

Mbani mend!

Numrat pozitiv $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \ldots f_n$ quhen frekuenca të vlerave $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots x_n$ të shënimit X, kurse $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + \ldots f_n = N$ është numri i përgjithshëm njësive statistike në populacion i cili hulumtohet.

2. Në 24 familje bujqish është vlerësuar aftësia punuese e anëtarëve të saj. Pas vlerësimit janë fituar të dhënat:

2	3	5	2	1	6	7	2
1	3	5	4	2	1	3	2
6	4	2	3	2	1	6	4

Kryeni shpërndarjen e frekuencave dhe përpilo tabelë statistikore.

Vëreni zgjidhjen:

Vargu statistikorë është:

1	1	1	1	2	2	2	2
2	2	2	3	3	3	3	4
4	4	5	5	6	6	6	7

Në popullacion ka 7 grupe, kurse shpërndarja e frekuencave është :

$$f_1 = 4; f_2 = 7; f_3 = 4; f_4 = 3; f_5 = 2; f_6 = 3; f_7 = 1.$$

Vëreni: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 = 4+7+4+3+2+3+1 = 24.$

Tabela statistike është:

Vlerat e X	1	2	3	4	5	6	7	
Frekuencat f	4	7	4	3	2	3	1	$\sum = 24$

3 Në 25 familje është hulumtuar harxhimi mujor i vajit për ushqim, i shprehur në litra.

Pas hulumtimit janë fituar të dhënat : 4, 2, 2, 3, 2, 5, 4, 6, 3, 3, 2, 4, 5, 4, 6, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 4, 1, 5, 3.

Kryeni shpërndarjen e frekuencave dhe formoni tabelë statistikore.

$\mathscr{B}$ Nëse shënimi statistik është i vazhdueshëm , atëherë grupimi i vlerave të shënimit kryhet gjithashtu në klasë të cilat i quajmë ***grupe intervalesh*** . Në praktikë grupet e intervaleve merren me të njëjtën gjatësi por numërim të ndryshëm. Numri i grupeve të intervaleve duhet të jetë ashtu që prej tij të vërehet karakteri i ndryshimit në shënim. Përvoja tregon se numri i grupeve të intervaleve duhet të jetë mes 5 dhe 20, në vartësi nga ajo se çfarë shënimi hulumtohet dhe sa është popullacioni.

4 Në 20 familje është hulumtuar harxhimi vjetor i pemëve të konzervuara të shprehura në kilogram. Janë fituar këto rezultate: 10,3; 17,2; 18,3; 4,3; 16,5; 19,8; 22,5; 12,4; 13,4; 11,5; 14,1; 4,1; 20,6; 7,6; 9,2; 28,0; 23,4; 8,7; 15,7; 15,5.

Ndërtoni tabelë statistike në grup intervalesh me gjatësi 4.

Vëreni zgjidhjen:

Popullacioni ka 20 njësi statistike (familje). Shënimi statistikë (harxhimi i pemëve të konzervuar) është e vazhdueshme. Vargu statistik është:

4,1	4,3	7,6	8,2	9,2
10,3	11,5	12,4	13,4	14,1
15,5	15,7	16,5	17,2	18,3
19,8	20,6	22,5	23,4	28,0

Rangu është $x_{max} - x_{min} = 28,0 - 4,1 = 23,9$. sepse gjatësia e intervalit është 4, të dhënat do të jenë grupuar në $23,9 : 4 = 6$ grupe intervalesh.

Intervali i parë është $(4{,}0-8{,}0]$, kurse i fundit $(24{,}0-28{,}0]$. Intervalet janë gjysmë të mbyllur nga e djathta. Shpërndarja e frekuencave shihet nga tabela.

Intervalet e shënimit X, (harxhimi vjetor)	4,0-8,0	8,0-12,0	12,0-16,0	16,0-20,0	20,0-24,0	24,0-28,0	
Frekuenca f (numri i familjeve)	3	4	5	4	3	1	$\sum=20$

Në çfarë përfundimesh mund të arrihet nga një hulumtim statistikor?
Përgjigjen do ta shohim nga detyra e kaluar.

Supozojmë se një fabrikë prodhon pemë të konzervuara dhe i shpërndan në vendet ku ka populacion, për shembull, 10000 familje. Nëse 20 familjet e përmendura paraqesin model reprezentativ, atëherë fabrika mund ta vlerësojë prodhimin vjetorë të pemëve të konzervuara. Ky hulumtim sillet në llojin e pemëve të cilat më shumë i përdorin familjet. Nga të dhënat e fituara , fabrika konkludon sa prodhim duhet të prodhohet prej secilit lloj. Nëse vlerëson se nuk ka mall të mjaftueshëm atëherë duhet të kërkojë burime të tjera të pemëve që do të ishin të mjaftueshme për prodhim. Nëse përsëri ka të dhëna se ka më shumë prodhim se sa i nevojitet për nevojat e populacionit , atëherë fabrika duhet të kërkojë tregje të reja . Të dhënat e hulumtimit mund të sjellin në njohuri të reja për të cilat këtu nuk do të bëhet fjalë.

5. Për lartësinë e nxënësve të një paralele i fitojmë këto të dhëna:
158, 184, 152, 164, 145, 169, 166, 178, 160, 156, 168, 172, 188, 146, 196, 183, 139, 185, 193, 167, 155, 160, 155, 181, 165, 162, 170, 176, 165, 148, në *cm*.

a) Caktoni numrin e njësive në popullacion.

b) Ndërtoni tabelë statistike në grupe intervalesh me gjatësi 8 .

C 6. Shpërndarja e frekuencave të një shënimi janë të dhënë me tabelë;

Shënim X		4	5	8	9	11	15	20
f	3	4	3	8	4	6	2	

Caktoni numrin e njësive statistikore në bashkësinë me vlera:

a) Më të vegjël ose të barabartë se 8; b) më të vegjël se 15.

Vëreni zgjidhjen: a) Qartë, numri i njësive statistike vlera e të cilave është më e vogël se 8 është $3+4+3=10$. Vlerae fituar kështu quhet ***frekuencë kumulative***.

Frekuanca kumulative e shënimit x_1 është f_1;e x_2 është f_1+f_2; e x_3 është $f_1+f_2+f_3$; e shënimit x_4 është $f_1+f_2+f_3+f_4$ etj.

Shënimi X	4	5	8	9	11	15	20
f	3	4	3	8	4	6	2
Kumulativa f	3	$\xrightarrow{+\downarrow}$ 7	$\xrightarrow{+\downarrow}$ 10	$\xrightarrow{+\downarrow}$ 18	$\xrightarrow{+\downarrow}$ 22	$\xrightarrow{+\downarrow}$ 28	$\xrightarrow{+\downarrow}$ 30

b) Ka 22 njësi statistike shënimet e të cilave janë më vogla se 15.

Në të njëjtën mënyrë caktohet frekuenca kumulative nëse shënimi statistikorë është i dhënë në grup intervalesh.

7 Shpërndarja e frekuencave të një shënimi X është i dhënë me tabelë:

Grup intervalesh të shënimit X	$(30-40]$	$(40-50]$	$(50-60]$	$(60-70]$	$(70-80]$	$(80-90]$	$(90-100]$
Frekuenca f	12	23	58	72	45	38	16

Caktoni tabelën e frekuencave kumulative , caktoni sa elemente ka nga popullacioni me vlerë të shënimit më të vogël ose të barabartë me 80.

Duhet të dish!

Si grumbullohen të dhënat?

Si formohet tabelë statistikore, nëse shënimi është i ndërprerë dhe si nëse i vazhdueshëm?

çka është frekuenca, e çka frekuenca kumulative?

Detyra.

(1) Në 16 familje bujqësore janë hulumtuar prodhimet për drurët e mollëve në kopshtet e tyre. Janë fituar këto të dhëna:, 26, 12, 17, 12, 15, 26, 20, 10, 10, 15, 17, 12, 10, 26, 19.
Ndërtoni tabelë statistikore për këto të dhëna.

(2) Në 24 kombinate bujqësore prodhimi i grurit për hektarë është : 40,3; 30,5; 31,6; 42,1; 43,4; 45,2; 35,1; 40,6; 45,7; 44,8; 33,2; 50,7; 55,0; 36,3; 48,6; 37,5; 44,5; 49,9; 46,3; 47,5; 44,3; 54,6; 8,5; 53,4, në *mc*.

Kryeni shpërndarjen e frekuencave në grup intervalesh me gjatësi 5.

(3) Nxënësi Agim në kohën e lirë vendosi të luajë . Mori 15 monedha dhe filloi ti hudhë. Pas çdo hudhje numëronte në sa monedha ishte stema. Hudhjen e përsëriti 1000 herë dhe vërejti se në 38 herë nuk u paraqit asnjë monedhë me stemë; në 144 hudhje stema u paraqit një herë; në 432 hudhje stema u paraqit tre herë; katër stema u paraqitën në 164 hudhje dhe pesë stema u paraqitën në 25 hudhje.

Formoni tabelë statistike të shënimeve .

(4) Është dhënë shpërndarja e frekuencave në tabelat vijuese:

a)

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	13	6	9	18	4	11	2	10	7

б)

X	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
f	1	2	3	5	4	2

Për secilën tabelë formoni tabela me frekuencat kumulative.

3 PARAQITJA GRAFIKE E TË DHËNAVE

A 1 Të vështrojmë tabelën statistike.

Vlerat e shënimit X	1	2	3	4	5
Frekuenca f: e shpërndarjes	7	5	8	6	4

Vëreni se për çdo vlere të shënimit statistikorë i është koresponduar frekuenca përkatëse e shpërndarjes, dhe i kemi dyshet e renditura: $(1,7);(2,5);(3,8);(4,6)$ dhe $(5,4)$. Nëse çdo çifti të renditur i korespondojmë pikë me kordinata në planin xOy, ashtu që në boshtin x i vendosim vlerat e shënimit kurse në boshtin y frekuencat, do të fitojmë ***dijagram të frekuencave***, fig.1 . Nëse çdo dy pika fqinje i bashkojmë me segemnt , fitojmë vijë të thyer e cila quhet ***poligon i frekuencave***, fig. 2. Për arsye të qartësisë , segmentet njësi në të dy boshtet duhet të jenë të njëjtë.

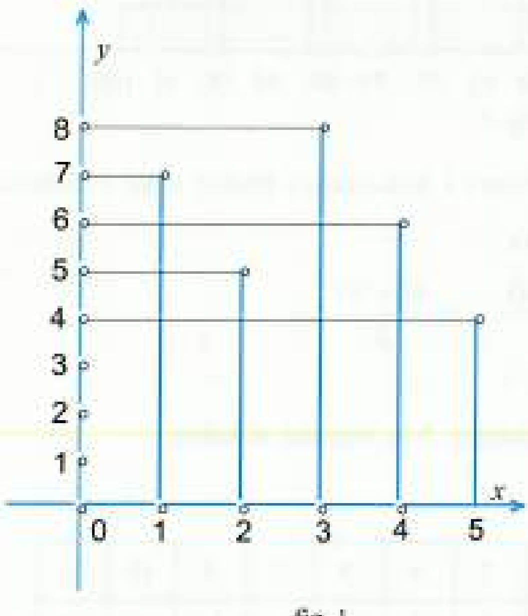


fig. 1

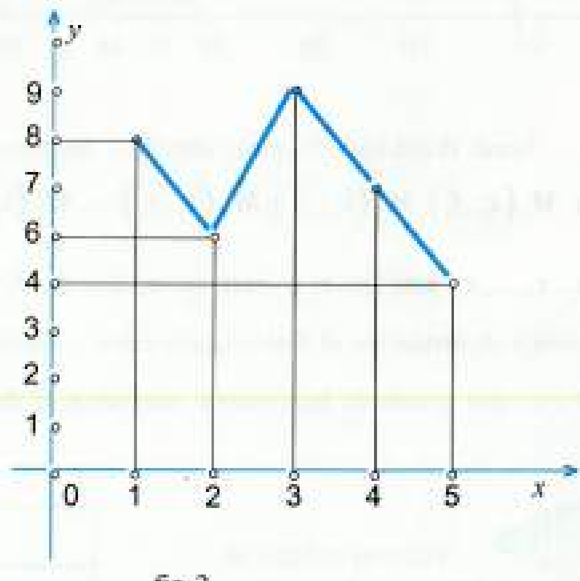


fig. 2

2 Vizatoni dijagramin dhe poligonin e frekuencave të hulumtimit statistik në detyrën 3 të mësimit ë kaluar.

3 Në një garë të matematikës marrin pjesë 120 nxënës . Janë arritur këto rezultate:

Interval n ë poena	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
Numri I nxënësve	2	5	10	21	43	30	9

Të paraqitet grafikisht shpërndarja e frekuencave.

Vëreni zgjidhjen:

Shënimi statistikor i vazhdueshëm i cili është i dhënë në grupe intervalesh , grafikisht paraqitet me ***histogram.***

Histogrami është drejtëkëndësh ku njëra brinjë shtrihet në boshtin x dhe është e barabartë me gjatësinë e intervalit të shpërndarjes , kurse brinja tjetër është e barabartë me madhësinë e frekuencave për intervalin përkatës fig' 3.

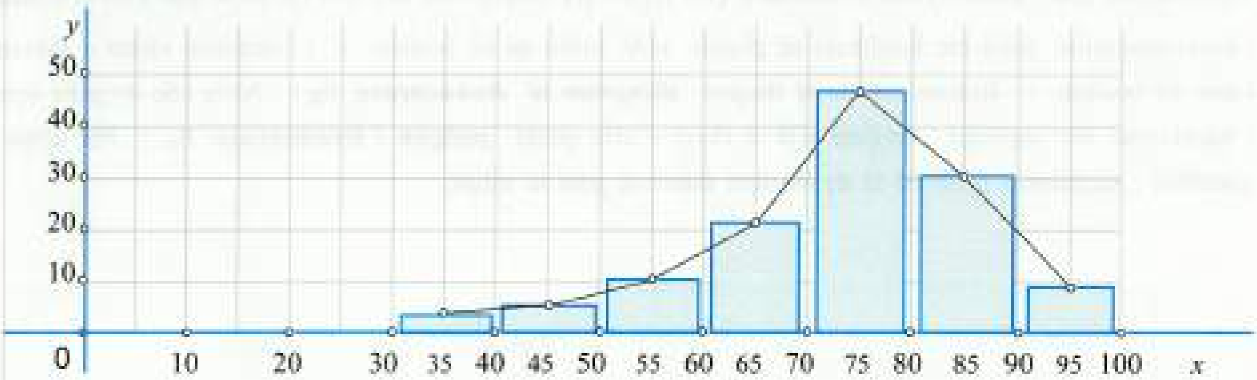


fig. 3

Secili drejtkëndësh quhet shtyllë e histogramit. Poligoni i frekuencave fitohet duke i bashkuar pikat $M_1\left(x_1^{'}, f_1\right), M_2\left(x_2^{'}, f_2\right), M_3\left(x_3^{'}, f_3\right), ..., M_k\left(x_k^{'}, f_k\right)$, ku

$x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}, ..., x_k^{'}$ janë meset e intervaleve, d.m.th. $x_1^{'} = \dfrac{30+40}{2}, x_2^{'} = \dfrac{40+50}{2}$ etj.

Poligoni i shpërndarjes së frekuencave është i dhënë në fig. 3.

4 Paraqite grafikisht hulumtimin statistikor të dhënë në detyrën 5 të mësimit të kaluar .

5 Vizatoni poligon të frekuencave kumulative të shënimit statistikor të dhënë me tabelë:

X	2	4	5	7	8	10	11
f	3	5	4	8	10	9	7
Kumulat. f	3	8	12	20	30	39	46

Poligon të frekuencave kumulative të shënimit të ndërprerë është vija e thyer , kulmet e së cilës janë pikat:

$$M_1(x_1, f_1), M_2(x_2, f_1+f_2), M_3(x_3, f_1+f_2+f_3), ..., M_k(x_k, f_1+f_2+...+f_k).$$

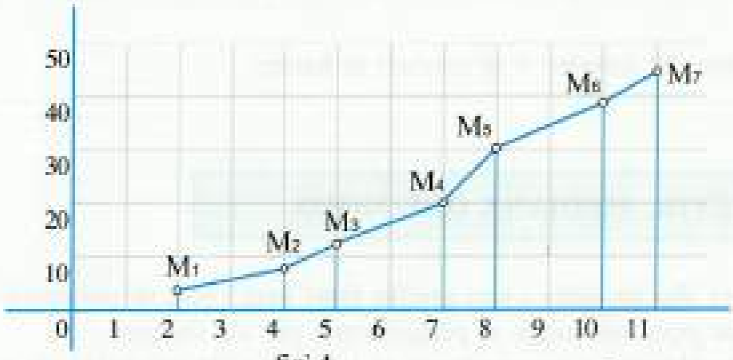


fig 4

Në detyrë janë pikat:
$M_1(2,3), M_2(4,8), M_3(5,12),$
$M_4(7,20), M_5(8,30), M_6(10,39)$
dhe $M_7(11,46)$, fig. 4.

6 Vizato poligonin e frekuencave kumulative të shënimit në detyrën 2.

7 Vizato poligonin e frekuencave kumulative sipas të dhënave në tabelën:

Intervalet e pik ëve	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
Frekuenca	2	5	10	21	43	30	9
Kumulat. f	2	7	17	38	81	111	120

Poligoni i frekuencave kumulative të shënimit të vazhdueshëm është vija e thyer me kulme $M_3(a_3, f_1+f_2+f_3)$ ku $a_0, a_1, a_2, ...$janë kufijtë e grupit të intervaleve.

Këtu ato pika janë: $M_0(30,0), M_1(40,2), M_2(50,7),$
$M_3(60,17), M_4(70,38), M_5(80,81), M_6(90,111),$
$M_7(100,120)$, fig. 5.

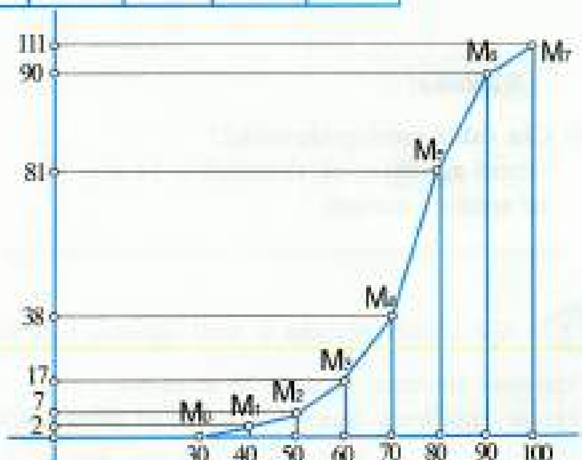


fig. 5

8 Vizato poligonin e frekuencave kumulative të shënimeve të shëna në detyrën 4 .

Duhet të dish!

Çka është diagram? çka është histogram? Çka është poligon i frekuencave?
çka është poligon i frekuencave kumulative?

Detyra:

(1) Vizato diagram dhe poligon të frekuencave në shpërndarjen e detyrës a)1 dhe b) 3 të mësimit paraprak.

(2) Vizato histogram dhe poligon të frekuencave në shpërndarjen e detyrës 2 nga mësimi i kaluar.

(3) Vizato poligon të frekuencave kumulative tëë detyrën 4 të mësimit të kaluar.

4 MESI ARITHMETIK. MEDIANA DHE MODA

Formimi i shpërndarjes së frekuencave dhe paraqitja e tyre grafike është hapi i parë në përpunimin dhe analizën e të dhënave statistikore të cilat japin një pamje të përgjithshme për ato shënime .

Studimi i mëtutjeshëm kërkon përcaktimin e parametrave të tjerë të cilët më saktë do t'i konkretizojnë karakteristikat kryesore të shënimit , d.m.th. shpërndarjen e frekuencave.

Ato parametra mund të ndahen në dy grupe.

Njërin grup e përbëjnë vlera mesatare si masë për tendencë qëndrore të shpërndarjes , d.m.th. vlerë rreth së cilës grupohen vlerat në shënim.

Në grupin tjetër bëjnë pjesë një numër karakteristikash që shërbejnë si masë e ndryshueshmërisë dhe tregojnë shkallë të mënjanimit të vlerave nga vlera mesatare.

Vlerat e mesme ndahen në llogaritëse dhe pozicionale . Vlerat e mesme llogaritëse paraqesin mese të ndryshme.

Në meset pozicionale bëjnë pjesë ***medijana*** dhe ***moda***.

Kujtoha!

- Çka është mesi arithmetikë?
  Vëreni zgjidhjen në shembullin 14 dhe 15 në temën 7 mësimi 2.

A Karakteristika më kryesore e një vargu statistikor është ***vlera mesatare arithmetike*** ose vlera mesatare e të gjitha vlerave në shënimin statistikor.

1 Një nxënës në fund të vitit shkollor i ka nëpër lëndë këto nota : 3, 4, 4, 5, 4, 5, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5.
Njehsoni suksesin mesatar të nxënësit.
Vëreni zgjidhjen: Suksesi i nxënësit është shënimi X, kurse notat nëpër lëndë janë vlera të shënimit .

Sipas kësaj, $\overline{X}=\dfrac{3+4+4+5+4+5+3+4+4+5+5+5+5}{13}$, d.m.th.

$\overline{X}=\dfrac{56}{13}=4,307.$ Pra, suksesi mesatar është 4,307, d.m.th. shumë mirë. Deri te zgjidhja mund të vihet me anë të grupimit d.m.th.

X	3	4	5
f	2	5	6

, prej nga $\overline{X}=\dfrac{3\cdot2+4\cdot5+5\cdot6}{2+5+6}=4,307.$

Mbani mend!

Nëse $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ janë vlera të një shënimi të ndërprerë X, kurse $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ janë frekuencat përkatëse , atëherë mesi arithmetik është

$$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + ... + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n}.$$

Meqë $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n = N$ është numër i njësive statistike në popullacion , atëherë

$$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + ... + x_n \cdot f_n}{N}.$$

Nëse ndryshoret $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ paraqiten vetëm një herë , d.m.th. $f_1 = f_2 = f_3 = ... = f_n = 1$,

$$\text{atëherë } \overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{N}.$$

2 Në provimin me shkrim nga matematika në një paralele është arritur ky sukses: notë 5 kanë pasur 4 nxënës, notë 4 morën 7 nxënës, notë 3 kanë marrë 7 nxënës , notë 2 morën 8 nxënës dhe notë 1 kanë marrë 6 nxënës.

Caktoni notën mesatare të paraleles në provimin me shkrim nga matematika.

3 Lartësitë e nxënësve të një paralele , të matura në cm, është dhënë me tabelë:

Shënim X	125-134	134-143	143-152	152-161	161-170	170-179
f	4	8	12	6	2	3
mesatare	129,5	138,5	147,5	156,5	165,5	174,5

Caktoni vlerën mesatare të lartësisë së nxënësve në atë paralele.

Vëreni zgjidhjen:

Shënimi është dhënë me grupimin e intervaleve , pra

$$\overline{X} = \frac{x_1' f_1 + x_2' f_2 + ... + x_n' f_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}, \text{ ku}$$

$x_1', x_2', x_3', ..., x_n'$ janë meset e grupit të intervaleve. Rrjedhimisht,

$$\overline{X} = \frac{129,5 \cdot 4 + 138,5 \cdot 8 + 147,5 \cdot 12 + 156,5 \cdot 6 + 165,5 \cdot 2 + 174,5 \cdot 3}{4 + 8 + 12 + 6 + 2 + 3},$$

$$\overline{X} = \frac{518 + 1108 + 1770 + 939 + 331 + 523,5}{35} = 148,27 cm.$$

4 Rezultatet e matjeve të masës së nxënësve të vitit të parë në një gjimnaz janë dhënë me tabelë:

Intervali i masës në kg	60 - 62	62 - 64	64 - 66	66 - 68	68 - 70
Numri i nxënësve x	5	18	42	27	8

Llogarit masën mesatare të atyre nxënësve.

Disa veti të mesit arithmetik:

1. Mesi arithmetik është më e madhe se vlera më e vogël, kurse më e vogël se vlera më e madhe e shënimit, d.m.th. $x_1 < \overline{X} < x_n$.

Vëreni zgjidhjen:

Le të radhiten vlerat sipas madhësisë, d.m.th. $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$. Nëse vlerat $x_2, x_3, ... x_n$ i zëvendësojmë me x_1, kemi: $\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} > \frac{x_1 + x_1 + x_1 + ... + x_1}{n} = \frac{n \cdot x_1}{n} = x_1$;

nëse, prap, vlerat $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}$ i zëvendësojmë me x_n, kemi:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} < \frac{x_n + x_n + x_n + ... + x_n}{n} = \frac{n \cdot x_n}{n} = x_n, \text{ d.m.th. } x_1 < \overline{X} < x_n.$$

2. Dallimet $x_1 - \overline{X}, x_2 - \overline{X}, x_3 - \overline{X}, ..., x_n - \overline{X}$ quhen mënjanime të vlerës së shënimit X prej vlerës mesatare. Për ato vlen barazimi:

$$\left(x_1 - \overline{X}\right) f_1 + \left(x_2 - \overline{X}\right) f_2 + \left(x_3 - \overline{X}\right) f_3 + ... + \left(x_n - \overline{X}\right) f_n = 0.$$

Meqë $\overline{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_n f_n}{N}$ dhe $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n = N$, pas rregullimit fitojmë:

$$\left(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + ... + x_n f_n\right) - \overline{X}\left(f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n\right) = \overline{X} \cdot N - \overline{X} \cdot N = 0.$$

3. Mesi arithmetik mund të jetë masë e ndonjë njësie e cila nuk ndodhet në popullacion. Në atë rast themi se $\overline{X}$ është vlerë apstrakte e cila e paraqet bashkësinë e vlerave $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Për shembull lartësia mesatare në detyrën 3 është 148,27 cm, dhe asnjë nxënës nuk e ka atë lartësi.

4. Mesi arithmetik mund të jetë joreal nëse modeli nuk është reprezentativ.

5 Në 10 vende në detin e zi është matur numri i midjeve. Rezultatet e arritura janë dhënë në tabelë.

Vendet matëse	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numri i midjeve	1	4	8	14	24	30	48	143	5291	57235

Një vend i matur është rreth $1000m^2$, dhe për mesin arithmetik fitojmë:

$\overline{X}=\dfrac{1+4+8+14+24+30+48+143+5291+57235}{10}=6780$. Pra, në çdo vend të matur mesatarisht ka nga 6780 midje. Qartë rezultatet nuk janë reale, dhe arsye për këtë është numri i midjeve në vendin e 10 -të. Vihet në përfundim se në momentin e matjeve rastësisht në atë vend janë gjetur një numër i madh i midjeve , kurse këto paraqitje janë shumë të rralla.

B 6 Një nxënës në fund të vitit shkollor i ka këto nota : 3, 4, 4, 5, 4, 5, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5. Vargu statistik i suksesit është: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4 , 5, 5, 5, 5, 5, 5.

Mbani mend!

Vlera e shënimit X që është mesi i vargun statistikorë quhet ***median*** dhe e shënojmë me $Me(x)$.

Vlera e shënimit e cila më së shumti paraqitet në vargun statistikorë quhet ***modë***, dhe e shënojmë me $Mo(x)$.

Në detyrë $Me(x)=4$, kurse $Mo(x)=5$. Në shumë raste , mediana është e ndryshme nga mesi arithmetik. Nëse vargu ka numër tek të anëtarëve , atëherë mediana është e njëjtë me vlerën e anëtarit të mesëm të vargut. Nëse vargu ka numër çift të anëtarëve , ajo nuk ka anëtarë të mesit , pra mediana është mesi arithmetik i dy anëtarëve të mesit .

Mediana dhe moda janë vlera mesatare pozicionale kurse vlera e tyre varet nga pozicioni që e marrin në vargun statistikor.

7 Një shënim statistikorë i ka vlerat: 2, 3, 4, 2, 3, 5, 2, 2, 1, 4, 5, 1, 3, 3, 4, 1, 1, 3, 2, 2.

Cakto mesin arithmetik, medianën dhe modën e shënimit.

Vëreni zgjidhjen:

Vargu statistikor 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, kurse mesi arithmetikor është

$\overline{X}=\dfrac{1\cdot4+2\cdot5+3\cdot5+4\cdot3+5\cdot2}{20}=\dfrac{51}{20}=2,55$. Vargu ka numër çift të anëtarëve , dhe mediana është

$Me(x)=\dfrac{2+3}{2}=2,5$. Për modën kemi $Mo(x)=2$. Mund të ndodh shënimi X të mos ketë modë kurse të ketë më shumë vlera modale. Ashtu , për shembull, shënimi me vlera 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 13, 15 ka modë $Mo(x)=9$; shënimi me vlera 4, 5, 6, 7, 11, 12 nuk ka modë, ndërsa shënimi me vlerat 1, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10 ka dy moda, $Mo(x)=4$ dhe $Mo(x)=8$.

8 Caktoni medianën e shënimit X shpërndarja e të cilit është dhënë me tabelë

x	36	37	38	39	40	41	42	43
f	1	1	5	8	17	21	18	8

Vëreni zgjidhjen:

Vargu ka numër tek të anëtarëve $1+1+5+8+17+21+18+8=79$, pra, ajo ka anëtarë të mesit . Duhet të gjejmë grupin në të cilin ndodhet anëtari i mesit.

Meqë $1+1+5+8+17=23$, grupi i ardhshëm që ka vlerë 41 paraqitet 21 herë. Pra, anëtari i mesit ndodhet në grupin me vlera 41, pra $Me(x)=41$.

Duhet të dish!

Çka është mes arithmetik dhe si caktohet?
Çka është mediana dhe çka moda dhe si caktohen ato?

Detyra:

1. Në provimin me shkrim nga matematika 15 nxënës kanë marrë notën 3, 6 nxënës notën 2, 8 nxënës notën 1, 43 nxënës notën 4 dhe 5 nxënës notën 5. Gjeni notën mesatare të provimit me shkrim nga matematika.

2. Për një kopshtar janë marrë këto të dhëna të shprehura në *kg* për një dru molle:

Vlera në *kg*	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100	100 - 110
Numri i drurëve f	30	25	10	12	8	25

Caktoni mesataren për një dru molle.

3. Caktoni medianën e shënimit X, shpërndarja e frekuencave të së cilës është dhënë në tabelë:

a)

X	2	5	6	7	9	12	16	19	20	22
f	8	12	3	17	10	7	13	5	15	10

b)

X	3,5 - 4, 5	4,5 - 5, 5	5, 5 - 6, 5	6, 5 - 7, 5	7, 5 - 8, 5	8, 5 - 9, 5	9, 5 - 10, 5
f	3	5	6	10	8	6	2

Ushtrim kontrollues tematik

1. Në 16 familje bujqësore , është hulumtuar numri i drurëve të mollës nëpër kopshtet e tyre. Janë fituar këto të dhëna: 10, 26, 12, 17, 12, 15, 26, 20, 10 , 10, 15, 17, 12, 10, 26, 19.

a) Përpiloni tabelë statistikore. b) Caktoni shpërndarjen e frekuencave.

v) Caktoni frekuencat kumulative. g) Vizatoni poligonin për shpërndarjen e frekuencave dhe frekuecave kumulative.

2. Shpërndarjet e frekuencave në një shënim X janë dhënë në tabelë:

Grup intervalesh të shënimit X	$(30-40]$	$(40-50]$	$(50-60]$	$(60-70]$	$(70-80]$	$(80-90]$	$(90-100]$
Frekuenca f	12	23	58	72	45	38	16

Vizatoni histogram, poligon të frekuencave për shpërndarjen, poligon të frekuencave kumulative dhe cakto mesin arithmetik të shënimit X.

TEMA 1 **MATEMATIKA LOGJIKE DHE BASHKËSITË**

1 1 a) po; b) jo; c) jo. 2 a) $9 \leq 3$; b) $3+5 \neq 7$; c) $4^3 \neq 30$; d) $6=9$.

2 1 a) $\tau\left(\frac{1}{2}>2 \wedge 3>2\right)=\perp \wedge \top=\perp$; b) $\tau\left(\frac{1}{2}>2 \wedge \frac{1}{3}<2\right)=\perp \wedge \top=\perp$;
c) $\tau\left(\frac{1}{3} \geq 2 \wedge 3 \leq 2\right)=\perp \wedge \top=\perp$. 2 a) $\tau(2 \geq 3 \vee -2 \geq -3)=\perp \vee \top=\top$; b) $\tau(2 \geq 3 \vee 2^3 \geq 3^2)=\perp \vee \perp=\perp$;
c) $\tau(-2<-3 \vee 2^3<3^2)=\perp \vee \top=\top$. 3 a) $\tau(3|9 \wedge 3|25)=\top \wedge \perp=\perp$; b) $\tau(3|9 \vee 3|25)=\top \vee \perp=\top$;
c) $\tau(3 \nmid 9 \wedge 3|21)=\perp \wedge \top=\perp$.

3 1 a) $\tau\left(\frac{1}{5}<5 \Rightarrow \frac{1}{4}>4\right)=\top \Rightarrow \perp=\perp$; b) $\tau\left(\frac{1}{5} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<3\right)=\perp \Leftrightarrow \top=\perp$; c) $\tau\left(\frac{1}{3}<3 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq 4\right)=\top \Rightarrow \top=\top$.
2 a) $\tau(3|7 \Leftrightarrow 3|9)=\perp \Leftrightarrow \top=\perp$; b) $\tau(3 \nmid 7 \Leftrightarrow 3 \nmid 1)=\top \Leftrightarrow \top=\top$; c) $\tau(3 \nmid 9 \Rightarrow 3|1)=\perp \Rightarrow \perp=\top$.

4 1 a) nuk është tautologji; b) nuk është tautologji. 2 a) po; b) po.

7 1 a) $A=\{3,4,5,6\}$; 

b) $A=\{1,2,4,5,6,7\}$; $A=\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 7\}$.
2 $P_M = \{\varnothing,\{n\},\{e\},\{r\},\{o\},\{n,e\},\{n,r\},\{n,o\},\{e,r\},\{e,o\},\{r,o\},\{n,e,r\},\{n,e,o\},\{n,r,o\},\{e,r,o\},\{n,e,r,o\}\}$.

8 1 $A \cup B=\{-1,2,3,4,5,6,7,9\}$; b) $A \cap B=\{3,5,7\}$; v) $A \setminus B=\{2,4,6\}$. 2 $A \cup B \cup C=\{-5,-4,\ldots,7,8\}$;
b) $A \subset B$; v) $A \cap B=\{3,4,5\}$. 3 a) $\{(c,b),(c,c),(d,b),(d,c),(e,b),(e,c)\}$;
b) $\{(c,a),(c,d),(c,e),(d,a),(d,d),(d,e),(e,a),(e,d),(e,e)\}$.

TEMA 2 **BASHËSITË THEMELORE NUMERIKE**

1 1 a) $A=\{1,2,3,\ldots,2001\}$; b) $B=\{25,26,27,\ldots,39\}$. 2 a) $\top$; b) $\top$; c) $\perp$; d) $\top$.
3 a) $(43+17)+(32+18)=110$; c) $(125 \cdot 8) \cdot (25 \cdot 4) \cdot 7=700000$. 4 a) 400; b) 1480; c) 1000; d) 8.
5 a) 88; 888;...; 88888888; b) .11; 111;...; 111111111;

2 1 b); d). 2 Nga $c|(a+b) \Rightarrow a+b=m \cdot c$, od $c|b$ rrjedh $b=nc$,
pra $a+b=a+nc=mc \Rightarrow a=mc-nc \Rightarrow a=c(m-n) \Rightarrow c|a$. 3 a) me 2; b) 3; c) 4; d) 7.
4 Shihni zgjidhjen në shembullin 2 në 2.2. 5 a) $n=2$; b) $n=1$.
6 a) Pas rr egullimit shprehja e merr formën $4n$, dhe ky është i përbërë;
b) $2(n^2+2n+2)$, përbërë sepse pjesëtohet me 2.
7 a) 12; b) 15; c) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$; d) 900. 8 Gjeni SPMP (48, 72, 120), 24 paketa. Në secilën ka nga 2 çokollada, 3 keksa dhe 5 bonbone.

3 ① a) 1011 > 1010; b) 1001 < 1101; c) 1011 > 1001. ② a) 21; b) 3001; c) 50203; d) 1011; e) 1001100; f) 101000010. ③ a) 31; b) 17; c) 16; d) 42. ④ a) 1000_2; b) 11100_2; c) 1100100_2; 10000111_2.

4 ① a) 10001111_2; b) 1000111_2; c) 1111110_2. ② a) 11010111_2; b) 11100_2; c) 110101110_2; d) 100010010_2.

5 ① a) 6; b) 20. ② a) -16; b) -6; c) -5. ③ a) -60; b) -16; c) 1; d) 0. ④ Për vërtetimin e këtyre barazimeve shpesh përdoret: $a+(-a)=(-a)+a=0$ dhe $a=a+0$.

a) $-(-x)=-(-x)+0=-(-x)+(-x)+x=(-(-x)+(-x)+x=0+x=x$;

b) $-(x+y)=-(x+y)+0=-(x+y)+x+(-x)+y+(-y)=(-(x+y)+(x+y))+(-x)+(-y)=0+(-x)+(-y)$;

d) $(-x)(-y)=(-x)(-y)+0=(-x)(-y)+(-x)y+xy=(-x)((-y)+y)+xy=-x\cdot 0+xy=0+xy=xy$.

6 ① a) $x=0$; b) $x=1$; c) $x=-4$; d) $x=\pm 3$. ② a) $a=15$; b) $b=35$; c) $c=4$; d) $d=8$.

③ a) $\frac{9}{16}<\frac{24}{48}<\frac{28}{48}<\frac{30}{48}$, d.m.th. $\frac{3}{16}<\frac{3}{4}<\frac{7}{12}<\frac{5}{8}$; b) $-\frac{2}{3}<-\frac{7}{12}<\frac{8}{27}<\frac{4}{9}$; c) $5\frac{4}{5}>5\frac{8}{15}>4\frac{5}{6}$.

7 ① a) $\frac{9}{17}$; b) $\frac{4}{5}$; c) 30. ② a) $\frac{13}{45}$; b); $-\frac{31}{20}$. ③ a) 10; b) $4\frac{2}{3}$; c) $9\frac{1}{4}$.

④ a) $\frac{3}{14}$; b) 2; c) $1\frac{3}{10}$. ⑤ $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{bd}\cdot\frac{m}{n}=\frac{(ad+bc)m}{(bd)n}=\frac{(ad)m+(bc)m}{(bd)n}=$

$=\frac{adm}{bdn}+\frac{cbm}{bdn}=\frac{am}{bn}+\frac{cm}{dn}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}+\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}$.

8 ① 1,75; 2,125; -1,8; -1,28. ② $2\frac{3}{25}$; $\frac{1}{125}$; $6\frac{1}{8}$; $-5\frac{3}{4}$. ③ a) 2,2; b) 28,56; c) 1,402; d) -3,2.

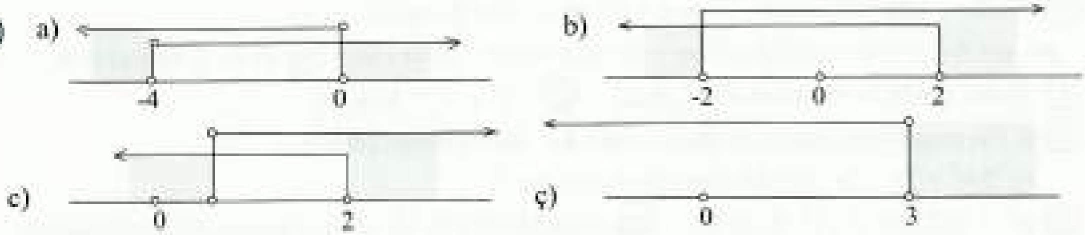
④ 1,(142857); 0,2(4); 1,08(3). ⑤ a) $\frac{2}{3}$; b) $2\frac{52}{165}$; c) $4\frac{57}{110}$; d) $2\frac{31}{90}$.

9 ① a) ⊤; b) ⊤; c) ⊥; d) ⊤. ② a) $\pi<\frac{22}{7}$; b) $\frac{306}{125}<56$; d) $\frac{36}{25}>\sqrt{2}$.

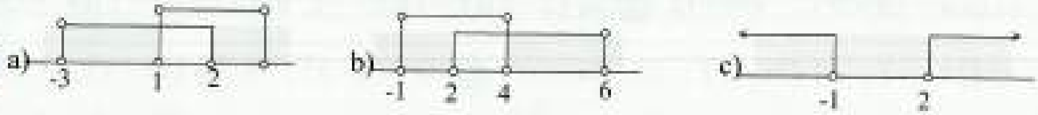
③ a) Konstrukto trekëndësh kënddrejt me katete 2 dhe 1, $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$;

b) $\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1^2}$; c) $\sqrt{15}=\sqrt{4^2-1^2}$, konstrukto trekëndësh kënddrejt me hipotenuz 4 dhe një katete 1.

④



(5) a) $x \in [-1,3)$; b) $x \in (0,10]$; c) $x \in [-1,\infty)$.

(6) 

$x \in [1,2)$ $x \in (2,4]$ $x \in \varnothing$.

(7) a) $(-5,4] \cup (-1,5) = (-5,5)$; b) $(0,5] \cup [-6,1) = [-6,5]$; c) $(-\infty,-3) \cup [-1,\infty)$.

TEMA 3 — SHPREHJET RACIONALE ALGJEBRIKE

1 (1) Jo, sepse nuk është prodhim prej shumëzuesish të njëjtë. (2) Të vërtetë janë a) dhe c).
(3) a) $x=1$; ose $x=-1$. b) $x=-1$; c) $x=-4$; d) $x=3$; e) $x=y$; f) $x=y$. (4) a) 10^4; b) 10^6;
(5) a) $7\cdot 10^3$; b) $77\cdot 10^6$; c) $347\cdot 10^2$. (6) a) $3{,}974\cdot 10^3$; b) $0{,}0005635\cdot 10^3$; c) $0{,}035\cdot 10^3$.
(7) a) x^{13}; b) x^5; c) x^7. (8) a) a^{42}; b) a^{24}. (9) a) a^{52}; b) 1. (10) a) 8; b) 216. (11) a) $x=3$;
b) $x=6$; c) $x=5$; d) $x=2$.

2 (1) a) $3x^2y^2$; b) $2x^4y^6$. (2) a) 3; x^3y^4z; 8. b) $-\frac{2}{3}$;x^3y;4. c) $\frac{3}{5}$;1;0. (3) a) 20; b) 3.
(4) a) po; b) jo. (5) a) $-x^3+3x^2-5$; - polinomi është i rendit të tretë
b) $5x^2y-7xy^2-2xy$; - polinomi është i rendit të tretë.

3 (1) a) 60; b) 18. (2) a) x^3+3x^2+x; b) x^3+x^2-x-2; c) $x^5+3x^4+3x^3+x^2-x-1$.
(3) a) $a=6, b=-17, c=12$; b) Polinom i atillë nuk ekziston.

4 (1) a) $9a^2b^2-4ab^4+\frac{4}{9}b^6$; b) $8x^6y^3+36x^5y^5+54x^4y^7+27x^3y^9$;
c) $64x^6y^3-240x^5y^2+300x^4y-125x^3$.
(2) a) $a^5+5a^4+10a^3+10a^2+5a+1$; b) $a^{10}-5a^8+10a^6-10a^4+5a^2-1$.
(3) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. (4) a) $\frac{4}{9}x^2y^2-\frac{16}{25}x^4y^6$; b) $\frac{1}{8}x^3-\frac{8}{27}y^3$; c) $\frac{8}{27}x^6y^3+\frac{27}{64}x^3y^6$.
(5) a) $x^3-4x^2+13x-9$; b) x^2+2x+3; v) $3-10a+9a^2$; g) a^2+2b^2-2bc.

5 (1) a) $-\frac{2}{5}xy$; b) $-\frac{3}{2}x$; v) $5y^2$. (2) a) $\frac{2}{7}xy^3-\frac{3}{7}x^2y^2-\frac{5}{7}$; b) $-6xy+3x^2y^2-12x^3y^3$.
(3) a) x^3-2x^2+6x-7; b) herësi është $2x^3+3x^2+12x+32$, kurse mbetja 91;
c) herësi është x^3-x ,kurse mbetja x; d) $x^4+x^3+x^2+x+1$.

6 (1) a) $2(x+y)$; b) $-5a(3x+4y)$; c) $2a^2(2a-3b)$; d) $4x^2y^2(xy-2)$.
(2) a) $5(x^2-4xy-y^2)$; b) $3a(b+3c-4d)$.
(3) a) $(x+y)(a+7)$; b) $(p-2)(7q-2p)$; c) $(x-3)(2m+5n)$; d) $(a-b)(2a-3b)$.
(4) a) $(x+y)(x+a)$; b) $(a-b)(a-3)$; c) $(x-2)(5ax-b-1)$; d) $(xy+z)(xy+3x^3y^4-1)$.

7 ① a) $(xy-4)(xy+4)$; b) $(a-b-1)(a-b+1)$; c) $y(2x-y)$. ② a) $(2-ab)(4+2ab+a^2b^2)$; b) $(abc+1)(a^2b^2c^2-abc+1)$. ③ a) $(a-b)(x-y)(x+y)$; b) $(a+b)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

8 ① a) $(2x+y)^2$; b) $(5x-y)^2$; c) $-(5x-2y)^2$. ② a) $7(a+b)^2$; b) $2xy(2x-y)^2$; c) $2a(5a+1)^2$.
③ a) $(x+y-z)(x+y+z)$; b) $(2-p+q)(2+p-q)$; c) $(4m-3x+2y)(4m+3x-2y)$.

9 ① a) $a^4x^2y^2$; b) $9(a-2b)$; c) $a+1$. ② a) $12a^3x^5y^7$; b) x^2-4y^2; c) $3(a-2b)^2(a^2+2ab+4b^2)$.
③ a) PMP = $a-5$; SHVP = $a(a-5)^2(a+5)$; b) PMP = $a-5$; SHVP = $-3(a-5)(a+5)$;

10 ① a) $x\neq-1$; b) $x\neq1, x\neq-4$; c) $y\neq0, x\neq3; x\neq-3$; d) $x\neq0, x\neq y$.

② a) $\frac{a}{(a-3b)(a+3b)}$; $\frac{a-3b}{(a-3b)(a+3b)}$; b) $\frac{x+1}{x(x-1)(x+1)}$; $\frac{-2x}{x(x-1)(x+1)}$; $\frac{x-1}{x(x-1)(x+1)}$.

③ a) $-(1+a), a\neq1$; b) $\frac{x-y}{y}, x\neq4$; c) $\frac{x-1}{x+1}, x\neq0, x\neq-1$.

11 ① a) 2, $x\neq1$; b) $\frac{4x^2}{(x-5)^2(x+5)^2}$. ② a) $\frac{3a^2}{x-1}, a\neq0, x\neq-1$; b) $\frac{3}{2}, x\neq y, x\neq-y$;
c) $\frac{a+3x}{a^2}; a\neq3x; a\neq x$. d) $\frac{2(x+1)}{x-1}, x\neq-1$; ③ a) $2ab, a\neq0, b\neq0$; dhe $a+b+c\neq0; a+b-c\neq0$.
b) $\frac{1}{a-1}; a\neq0; a\neq1; a\neq-1$.

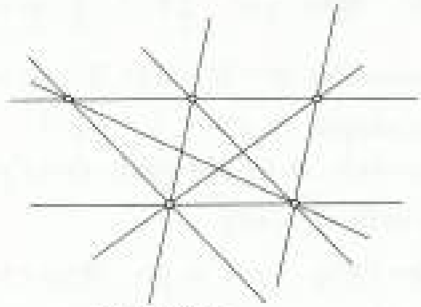
TEMA 4 FIGURA GJEOMETRIKE NË RRAFSH

1 ① Është përdor kuptimi gjysmëdrejtëz dhe dy gjysmëdrejtëza ME keni fillim të përbashkët.
② Çdo shumëkëndësh me tre brinjë quhet trekëndësh. shumëkëndësh, vija e thyer e mbyllur, vijë e thyer, segment, dy pika dhe relacioni mes tyre.
③ Jo, vizatim jo i drejtë. ④ Pikat janë nga e njëjta anë.

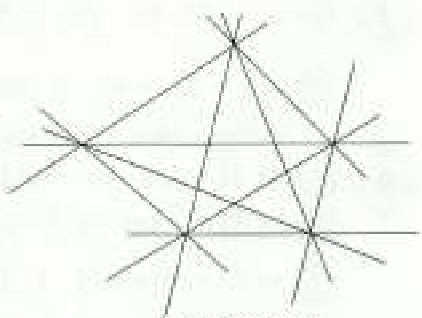
2 ① Një drejtëz, nëse të gjitha pikat janë kolineare; katër drejtëza nëse prej katër pikave tre janë kolineare ; Katër drejtëza nëse pikat janë kulmet e një katërkëndëshi.

②

gjashtëdrejtëza



tetë drejtëza



dhjetë drejtëza

(3) Nëse A është pikë e çfarëdoshme, ekzistojnë B dhe C,ashtu që pikat A, B, C nuk janë kolineare dhe përcaktojnë rrafsh. Për rrafshin $\sum$ ekziston pika D (A3), ashtu që $D \notin \sum$. Pikat A, B, C, D nuk shtrihen në të njëjtin rrafsh.

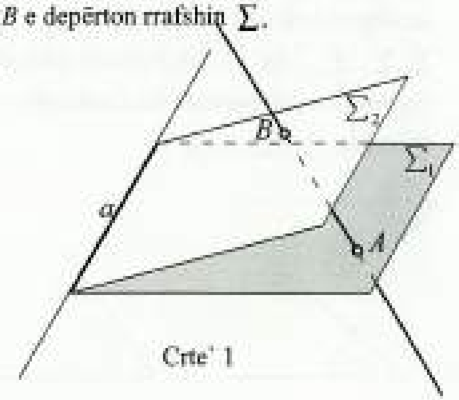
(3) Mundet ose të gjitha pikat të shtrihen në një rrafsh (përcaktojnë një rrafsh),ose , po të mos shtrihen në të njëjtin rrafsh. Në këtë rast përcaktojnë katër rrafshe: ABC, ABD, ACD, BCD.

(3) Për pikat të mundshme janë rastet: a) Të gjitha pes pikat të shtrihen në rrafsh;
b)katër pika të shtrihen në të njëjtin rrafsh. ($ABCD$); ABE, ACE, ADE, BCE, BDE, CDE.;c) përcaktojnë rrafsh , nëse cilatdo katër pika prej tyre mos shtrihen në një rrafsh. Cilat do tre pika prej atyre pesë të dhëna përcaktojnë një rrafsh. Rrafshe janë: ABC, ABD, ABE, ACE, ACD, BCE, BCD, CDE, ADE, BDE.

3 (1) Sipas A3 në rrafshin $\sum$ shtrihen sëpaku tre pika jokolineare A, B, C. Drejtëza $a = AB$ shtrihet edhe në rrafshin $\sum$ (A5) dhe poashtu $A \notin a$.

(2) Sipas A3 gjendet pika $A \notin \sum$. Le të jetë pika $B \in \sum$, atëherë drejtëza AB e depërton rrafshin $\sum$.

(3) Sipas A3 në rrafshin $\sum$ gjenden tre pika A, B, C që nuk janë kolinearei. Në drejtëzën $a = BC$ ka pafund pika (A1) që shtrihen në rrafsh $\sum$, $A \notin a$. Secila drejtëz që kalon nëpër pikën A dhe cilado pikë e drejtëzës a shtrihet në rrafshin $\sum$.



Crte' 1

(4) Nga kushti $\sum_1 \cap \sum_2 \neq \varnothing$ rrjedh se rrafshet priten sipas një drejtëze a (fig. 1) .Sipas A4 ekziston pikat $A \in \sum_1, B \in \sum_2$, që nuk shtrihen në drejtëz a, $A \notin a, B \notin a$. Drejtëza AB i depërton rrafshet $\sum_1$ dhe $\sum_2$.

(5) Nuk është e mundur , sepse rrafshi $\sum$ përmban pika që nuk i takojnë drejtëzës a.

4 (1) a) A4; b) T6; c) T10. (2) Le të jenë drejtëzat a dhe b paralele . Sipas A2 në drejtëzën a me siguri shtrihen pikat A dhe B, ashtu që $A \notin b, B \notin b$. Në drejtëzën b me siguri shtrihet pika C, ashtu

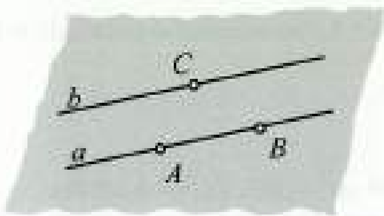


fig. 2

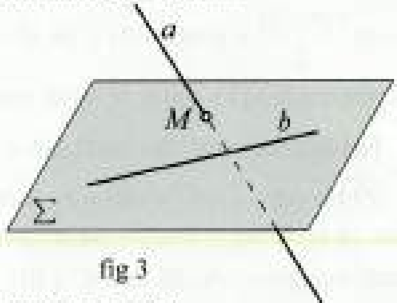


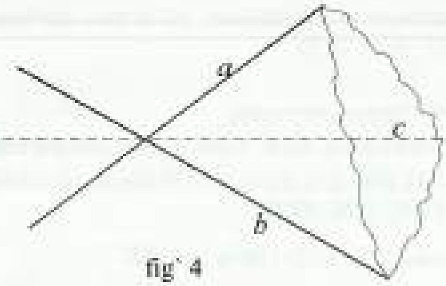
fig 3

që $C \notin a$. Pikat A, B, C janë jokolineare, dhe sipas A4 ato përcaktojnë vetëm një rrafsh.

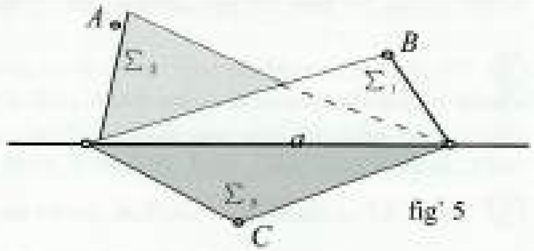
(3) Drejtëzat a dhe b janë të kithta . Sipas kushtit drejtëzat a dhe b nuk kanë pika të përbashkëta, ato janë ose paralele ose të kithta.Drejtëzat nuk mund të jenë paralele. Nëse drejtëzat a dhe b janë paralele , atëherë ato do të shtrihen në të njëjtin rrafsh $\sum_1$ i cili kalon nëpër pikat M $(M \in a)$ që nuk është e mundur sepse $M \notin b$. Pra, drejtëzat a dhe b janë të kithta, fig. 3.

(4) Ka dy mundësi: a) drejtëzat të shtrihen në një rrafsh ; b) drejtëzat të mos shtrihen në një rrafsh. Atëherë janë përcaktuar tre rrafshe (a, b), (a, c) dhe (b, c), sipas T10, fig.` 4.

(5) Sipas T6 drejtëza dhe pika e cila nuk shtrihet në atë drejtëz përcaktojnë vetëm një rrafsh.
Le të jetë dhënë drejtëza a dhe pikat A, B, C. Meqë çdo dy pika përcaktojnë drejtëz që nuk është paralele me drejtëzën

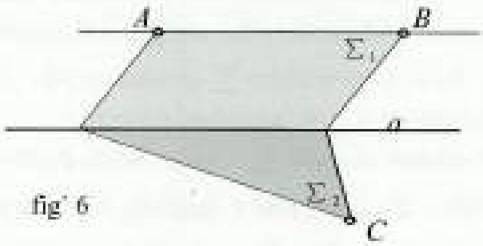


fig` 4



fig` 5

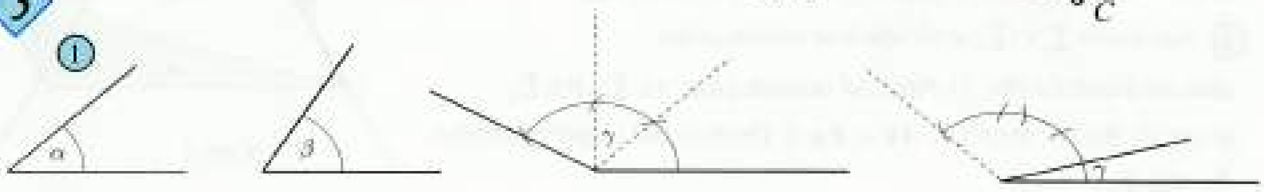
a, atëherë janë përcaktuar tre rrafshe $\sum_1, \sum_2, \sum_3$, fig.` 5. Nëse çdo dy pika përcaktojnë drejtëz që është paralele me drejtëzën a ,atëherë janë përcaktuar dy rrafshe $\sum_1, \sum_2$, fig.` 6.



fig` 6

5

(1)



a) $\gamma = 2\alpha + \beta$ $\qquad \gamma = 3\alpha - 2\beta$

(2) Këndi suplementer është $180^0 - 75^0 = 105^0$, kurse këndi komplementar $90^0 - 75^0 = 15^0$.

(3) $135^0; 45^0$. (4) Nuk vlen, kontrolloni atë në fig. 10 në mësimin me tërheqjen e drejtëzës FG ose HG.

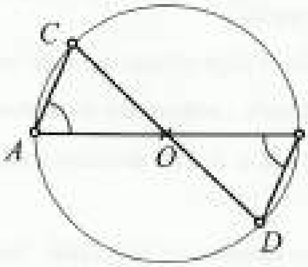
(5) Sipas A4, rrafshi është përcaktuar me tri pika jokolineare.

(6) $D_n = n; \dfrac{n(n-3)}{2} = n; n(n-3) = 2n; n^2 - 5 = 0$ ose $n = 0$, t.e. $n = 5$. Nuk ekziston shumëkëndëshi ka zero kulme , pra pesëkëndëshi ka numër të njëjtë brinjësh dhe diagonalesh.

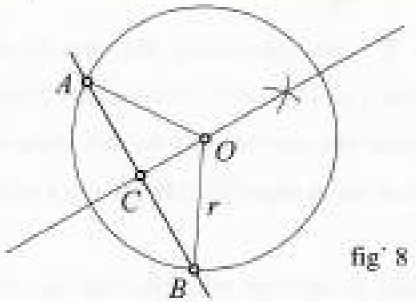
6 (1) Trekëndëshat AOC dhe BOD janë të puthitshëm.

$(\overline{OA} = \overline{OB} = r; \overline{OC} = \overline{OD} = r;\ \measuredangle AOC = \measuredangle BOD)$, rrjedh $\overline{AC} = \overline{BD}, \measuredangle CAB = \measuredangle DBA$.

Diametri AB është tranzverzale e drejtëzave AC dhe BD. Sepse këndet CAB dhe DBA janë të njëjtëse, rrhjedh se $AC \parallel BD$., fig. 7.



fig` 7



fig` 8

(2) Nga vetia e simetrales së segmentit rrjedh se në simetrale gjendet pika e cila nga pikat A dhe B është e larguar në distancë r. Ajo pikë pikërisht është qendre e rrethit.

③ Nga fig.` 8 rrjedh se trekëndëshi ACO është kënddrejt, dhe $r^2=\left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2+\overline{OC}^2=8^2+15^2; r=17cm.$

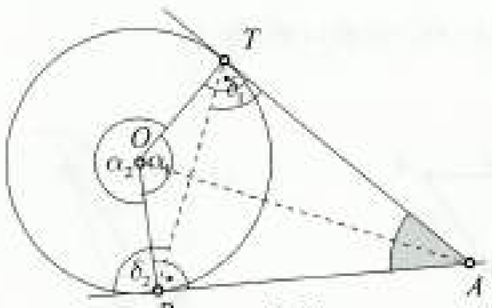
④ a) Trekëndëshat AOP dhe AOT janë kënddrejtë dhe kongruentë $\left(\measuredangle P=\measuredangle T=90^0; \overline{OA}=\overline{OA}; \overline{OP}=\overline{OT}=r\right)$.

Prej ku rrjedh $\overline{AP}=\overline{AT}$. b)SipasT15 rrjedh $\delta_1=\frac{1}{2}\alpha_1; \delta_2=\frac{1}{2}\alpha_2$. Sepse δ_2 është kënd i jashtëm i trekëndëshit PAT, rrjedh $\delta_2=\delta_1+\measuredangle PAT$, d.m.th. $\measuredangle PAT=\left|\delta_2-\delta_1\right|=\left|\frac{1}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1\right|=\frac{1}{2}\left|\alpha_2-\alpha_1\right|$. (fig. 9)

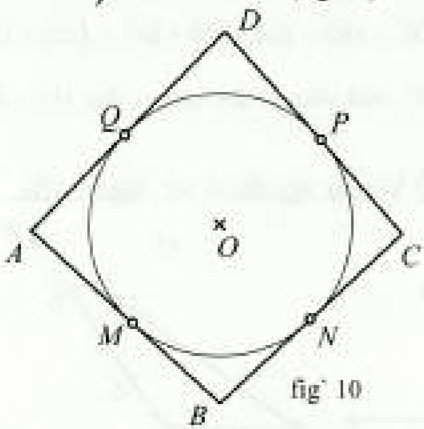
⑤ Ngjashëm me detyrën e mësipërme:

$\overline{AM}=\overline{AQ}; \overline{CN}=\overline{CP}$; $\overline{BM}=\overline{BN}; \overline{DP}=\overline{DQ}$; $\overline{AB}+\overline{CD}=\left(\overline{AM}+\overline{MB}\right)+\left(\overline{CP}+\overline{PD}\right)=$

$=\left(\overline{AQ}+\overline{BN}\right)+\left(\overline{CN}+\overline{DQ}\right)=\left(\overline{AQ}+\overline{DQ}\right)+\left(\overline{BN}+\overline{CN}\right)=\overline{AD}+\overline{BC}$. (fig. 10)



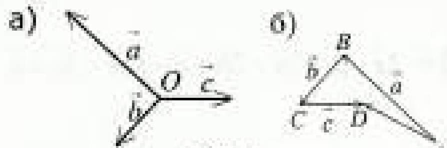
fig` 9



fig` 10

7 ① Mund të formohen 12 vektorë dhe 6 segmente. 3 Vektorë të njëjtë janë: b) dhe d). Vektorë kolinearë janë: a); b); c); d). Nuk janë të barabartë vektorët: a); c); d).

8 ① Le të jenë dhënë vektorët $\vec{a}; \vec{b}$ i $\vec{c}$, si në fig. 11.a. Shuma e tyre është si në fig. 11.b:



fig` 11

$\overline{AB}=\vec{a}; \overline{BC}=\vec{b}; \overline{CD}=\vec{c}$

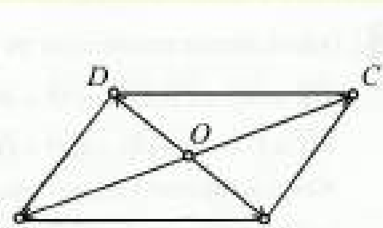
$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$

② a) $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right)+\left(\overline{OB}+\overline{OD}\right)=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$;

b) $\left(\overline{BC}+\overline{OA}\right)+\overline{OC}=\overline{BC}+\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right)=\overline{BC}+\vec{0}=\overline{BC}$.

c) $\left(\overline{AB}+\overline{DO}\right)+\overline{OA}=\overline{AB}+\left(\overline{DO}+\overline{OA}\right)=\overline{AB}+\overline{DA}=\overline{DA}+\overline{AB}=\overline{DB}$.

d) $\overline{DO}+\left(\overline{OA}+\overline{BC}\right)=\left(\overline{DO}+\overline{OA}\right)+\overline{BC}=\overline{DA}+\overline{BC}=\vec{0}$. (fig. 12)



fig` 12

3

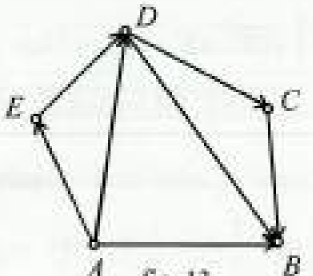


fig. 13

$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{ED} + \overline{DC} + \overline{CB}$,
$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$,
etj., fig. 13.

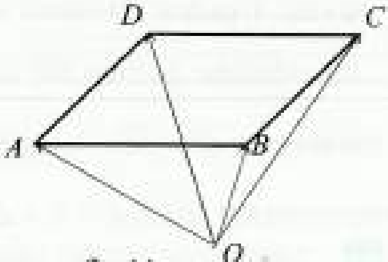


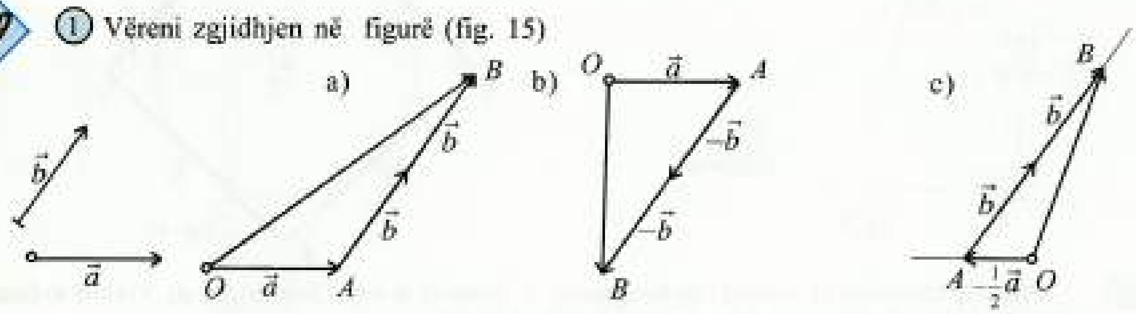
fig. 14

4 $\overline{AB} + \overline{CA} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AA} = \vec{0}$.

5 Sipas rregullës të tre pikave vijon: $\overline{OA} = \overline{OD} + \overline{DA}$ i $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC}$.

$\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DA} + \overline{OB} + \overline{BC} = \left(\overline{OB} + \overline{OD}\right) + \left(\overline{DA} + \overline{BC}\right)$. Sepse $ABCD$ është paralelogram, rrjedh se $\overline{DA}$ dhe $\overline{BC}$ janë vektorë të kundërti, dhe $\overline{DA} + \overline{BC} = \vec{0}$. Pra, $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$, fig. 14.

9 1 Vëreni zgjidhjen në figurë (fig. 15)



$\overline{OB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ $\qquad$ $\overline{OB} = \vec{a} + (-2\vec{b})$ $\qquad$ $\overline{OB} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

fig. 15

2 a) $2\vec{x} - \vec{x} = 2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{a} - \vec{b}; \vec{x} = 3\vec{a} + \vec{b}$. b) $3\vec{x} - 2\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{a} + \vec{b}; \vec{x} = -\vec{a} + \vec{b}$. c) $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b}$.

3

$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CD}$.

$2\overline{MN} = \overline{AB} + 2\overline{BC} + \overline{CD} = \left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}\right) + \overline{BC}$; $2\overline{MN} = \overline{AD} + \overline{BC}$; $2\overline{MN} = \left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) + \left(\overline{BC} + \overline{CD}\right) = \overline{AC} + \overline{BD}$.

4 Duke e zbatuar rregullën për tre pika kemi;

$\overline{OS} = \overline{OC} + \overline{CB}; \overline{OS} = \overline{OB} + \overline{BS}$
$\overline{OS} = \overline{OA} + \overline{AS}; \overline{OS} = \overline{OD} + \overline{DS}$. ,fig. 15.

Nëse i bashkojmë katër barazimet fitojmë:

$4\overline{OS} = \left(\overline{OC} + \overline{CS}\right) + \left(\overline{OB} + \overline{BS}\right) + \left(\overline{OA} + \overline{AS}\right) + \left(\overline{OD} + \overline{DS}\right)$,

$4\overline{OS} = \left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right) + \left(\overline{CS} + \overline{AS}\right) + \left(\overline{BS} + \overline{DS}\right)$,
$4\overline{OS} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \vec{0} + \vec{0}$, d.m.th. $4\overline{OS} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}$.

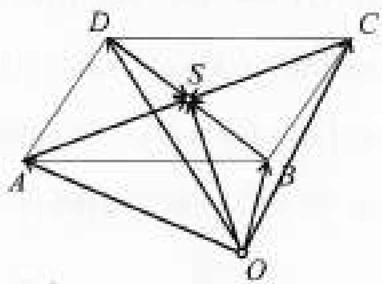


fig. 15

⑤ Nga ΔMBN rrjedh:

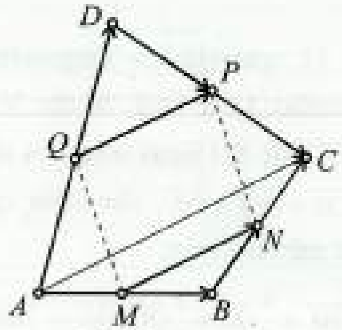


fig. 16

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Prej ΔQDP rrjedh:

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Nga $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ rrjedh se, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$,

dhe sipas teoremës për paralelogram , rrjedh se katërkëndëshi $MNPQ$ është paralelogram, fig. 16.

10 ① Me zbatimin e rregullës për tre pika rrjedh:

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BT};\ \overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AT};\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CT}.$$

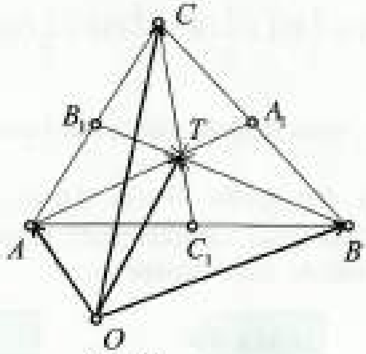


fig. 17

Kur i mbledhim marrim:

$3\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{CT}$. Nga vetia e qendrës së trekëndëshit rrjedh, (fig. 17.)

$$\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1};\quad \overrightarrow{BT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1};\quad \overrightarrow{CT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1},$$

pa $\quad 3\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right).$

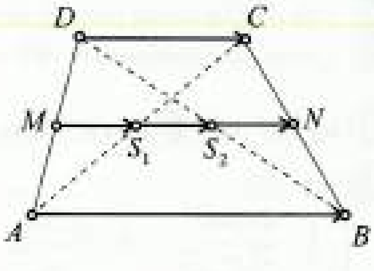
$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. Sipas zgjidhjes së detyrës 4 nga mësimi i kaluar

$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}.$

② Udhëzim: $\overrightarrow{TA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1},\ \overrightarrow{TB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{B_1B}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{TC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}.$

③ Nga kushti rrjedh se S_1 dhe S_2 shtrihen

në vijën e mesme të trapezit.



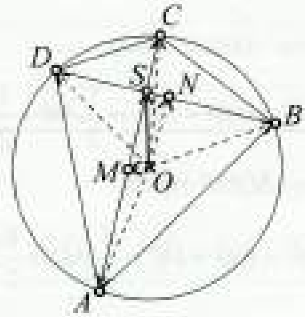
$\overrightarrow{S_1S_2}=\overrightarrow{MN}-\left(\overrightarrow{MS_1}+\overrightarrow{S_2N}\right)$. Sipas zgjidhjes së

detyrës 1 dhe 2 të mësimit rrjedh:

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right),\overrightarrow{MS_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\overrightarrow{S_2N}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, pa

$\overrightarrow{S_1S_2}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\right).$

4 Të supozojmë se diagonalet nuk kalojnë nëpër qendrën e rrethit. Le të jenë M dhe N meset e diagonaleve AC dhe BD. Sipas rregullës së paralelogramit rrjedh $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$; dhe sipas zgjidhjes së detyrës 3 të mësimit kemi:



$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC};\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$. Me zëvendësimin në barazimin e parë fitojmë:

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$$

5 Sipas detyrës para kësaj kemi $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$. Nga kushti i detyrës $\overrightarrow{OS}=\vec{0}$, dhe rrjedh $O\equiv S$, d.m.th. diagonalet janë të njëjta dhe përgjysmohen në pikëprerje

Sipas kësaj katërkëndëshi është katërkëndësh, dhe meqë diagonalet janë reciprokisht normale, katërkëndëshi është katror.

TEMA 5 MADHËSITË PROPORCIONALE

1 1 a) 6; b) 5; c) 6; d) 10. 2 a) $\frac{5}{2}$; b) $\frac{5}{3}$; 3 8000, 6000, 4000. Upatstvo. $x=4k, y=3k, z=2k$.

4 $a:b:c:d=4:6:5:14$. Udhëzim. $a:b=2:3, a:c=4:5, a:d=2:7$.

5 1500, 600, 800, 3600. Udhëzim. $a:b:c:d=15:6:8:36; k=100$.

2 1 35 kg. 2 60 punëtorë. 3 16 punëtorë. Udhëzim. Ditët ktheni në orë dhe anasjelltas.

4 120 punëtorë. Udhëzim. Metrat ktheni në kilometra dhe anasjelltas.

5 38,88 ditë.

3 1 53 shkëlqyeshëm, 238 sh. mirë, 204 mirë, 187 mjaftueshëm dhe 68 përsëritën.

2 Para zbritjes çmimi ishte 90 den. 3 15% marzha

4 Çmimi para zbritjes ishte 1800 den. 5 2214. 6 4600 den.

4 1 $40^0; 60^0; 80^0$. 2 12000, 15000, 19000, 2000. Udhëzim. $132k=66000$. 3 9000, 15000, 21000 4 9den.

5

Nëse k është pjesa e matur, atëherë $7k+2k+2k+6k=731, k=43$.

Pra, prej secili lloj do të merret: $7\cdot 43$; $2\cdot 43$; $2\cdot 43$; $6\cdot 43$.

Zgjidhja është:

301, 86, 86, 258 litra.

5 1 $k=76315,97$ den. 2 6,47%. 3 156 dena. 4 6%.

TEMA 6

FUNKSIONI LINEAR. BARAZIMET DHE JOBARAZIMET LINEARE

1 ① a) ; $M_1(-3,-7)$; b) $M_2(3,7)$; c) $M_3(3,-7)$. ② $L = 4\cdot\sqrt{137}$; $P = 137$ nj. kat.. ③ $M\left(\frac{19}{6},0\right)$.

④ $M_1(0,-3)$ dhe $M_2(0,-9)$. ⑤ $A(3,-1)$ dhe $B(0,8)$. ⑥ $D(-3,1)$. Udhëzim. Caktoni mesin S të segmentit AC (diagonalja e paralelogramit). Pika D është simetrike me B në lidhje me S (pse?).

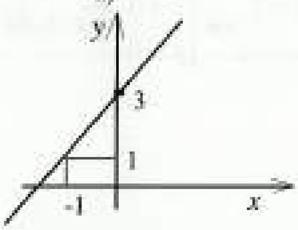
⑦ $C(5,-31), D(1,-5)$. Shfrytëzoni udhëzimin e detyrës para kësaj.

2 ① $P=11{,}5$. ② $h_c = 5$. Udhëzim.Shfrytëzoi $h_c = \frac{2P}{c}$. ③ $C_1(32,0), C_2(-8,0)$.

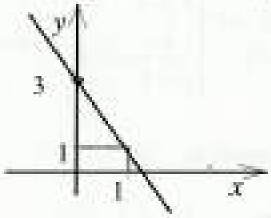
④ $C_1(-7,-3)$, $D_1(-8,0)$ ose $C_2(17,-3)$, $D_2(18,-4)$.

3 ① a) $x\in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$; b) -4; c) $-\frac{1}{2}$; d) 0.

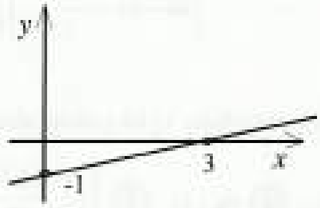
a)



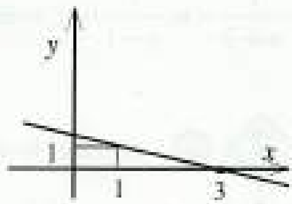
b)



c)

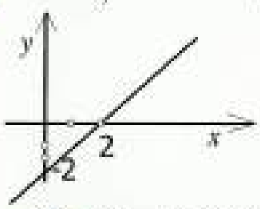


d)

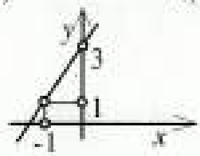


4 ① Veti të funksionit linearë

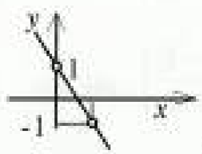
a)



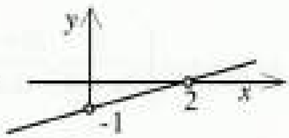
b)

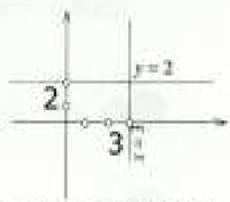


c)



d)





② a) $(0,-1),(1,0)$; b) $(0,-3),(1{,}5;0)$; c) $(0,6),(2;0)$. ③ a) $x+y+1=0$; b) $4x+5y+12=0$.

④ $k=1$. ⑤ $m=3$. ⑥ $k=1$.

5 ① a) po; b) jo. ② a) 7/5; b) 3; c) 1. d) -3/11. ③ Za $a\neq -1$ zgjidhje është $x=-1$, kurse për $a=-1$ zgjidhjej është secili numër realë ; b)për $a+b\neq 0, x=\frac{-2ab}{a+b}$; nëse $a+b=0$, atëherë për $a=-b$ barazimi nuk ka zgjidhje; nëse $a+b=0$, për $a=b=0$, barazimi është i formës $0\cdot x=0$, d.m.th. është i papërcaktuar.

6 ① $\frac{4}{3}$. ② -1. Udhëzim. SHVP $[3(4x+5), 2(4x+5), 6] = 6(4x+5)$.

③ -3. Udhëzim. SHVP$(\ldots) = 5x(2x-1)(2x+1)$. ④ 3.

⑤ Për $a\neq 3$, $x=\frac{7}{3-a}$, për $a=3$ barazimi nuk ka zgjidhje.

7 (1) 41 dhe 19.Udhëzim. $x=2(60-x)+3$. (2) 10 dhe 30 (3) 110 l. (4) 15 km/h i 12 km/h. Udhëzim $4x=4\cdot\frac{4}{5}x+12$

8 (1) a) $(1,\infty)$; b) $(3,\infty)$; c) $\left(-\frac{1}{11},\infty\right)$; d) $(12,\infty)$. (2) $x\in\{-3,-2,-1\}$ (3) $x<0$.

TEMA 7 SISTEMI I BARAZIMEVE DHE JOBARAZIMEVE LINEARE

1 (1) a) (1,2). Udhëzim $y=(5-3x)\in\mathbb{N}$
b) (1,4) i (2,2); (2) (0,-1). (3) a) $\begin{cases}11x+2y=0\\2x-y=0\end{cases}$; b) $\begin{cases}8x-3y=13\\3x+2y=8\end{cases}$

2 (1) (1,1); (2) (3,6); (3) (3,6); (4) (0,0). Udhëzim: marrim ndryshore të reja:

$\frac{1}{x+2}=u, \frac{1}{y-1}=v$, sistemi është: $\begin{cases}6u-5v=8\\5u-6v=\frac{17}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{2}\\v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\\\frac{1}{y-1}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=2\\y-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ (5) (-1,-2).

3 (1) a) (1,2); b) nuk ka zgjidhje; c) ka pafund shumë zgjidhje; g) (1,1).

4 (1) (2,-3). (2) (7,-2). (3) (6,12). (4) $\left(\frac{6}{17},\frac{162}{17}\right)$. (5) a) $\left(1,\frac{2}{3}\right)$. b) nuk ka zgjidhje; c) ka pafund shumë zgjidhje sepse $y=\frac{5-x}{3}$, zgjidhja e sistemit është: $(x,y)=\left(x,\frac{5-x}{3}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

(6) Za $a\neq-2$ ka zgjidhje $\left(\frac{3}{2a+4},\frac{2(a-1)}{a+2}\right)$; për $a=-2$ nuk ka zgjidhje.

(7) a) Za $a\neq-2$ ka zgjidhje $x=\frac{1+b}{2(a+2)}$, $y=\frac{a-2b}{a+2}$; b)për $a=-2$ dhe $b\neq-1$ nuk ka zgjidhje;

c) za $a=-2$ dhe $b=-1$ ka zgjidhje të pafundme.

5 (1) 12 dhe 7. (2) 38 dhe 9. (3) 35,5m/sek dhe 26,5m/sek. (4) 34 vit.dhe 12 vit. (5) 15 orë dhe 25 orë

(6) 12 lepuj dhe 23 fazanë.

6 (1) a) (1, 5); b) $(1,\infty)$; c) $\left(-\frac{67}{4},-\frac{1}{35}\right)$; d) $(4,6)$. (2) a) $(-1,3)$; b) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$; c) $(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$;

d) $(-\infty,0)\cup\left(\frac{5}{3},\infty\right)$. (3) a) $(-3,1)\cup(2,\infty)$; b) $(-\infty,-4)\cup(-3,1)\cup(2,\infty)$.

TEMA 8

FUQIZIMI DHE RRËNJËZIMI

1 (1) a) $\frac{y}{x^2}$; b) $-\frac{b}{4a^2c^4}$; c) $\frac{6y^3}{x^3}$. (2) a) $-\frac{15}{16}$; b) $-2\frac{1}{9}$. (3) a) $\frac{1}{a^{-2}b^3x^{-2}y^2}$; b) $\frac{1}{5^{-1}x^2c^{-2}b^{-3}}$;

c) $\frac{xy}{y-x}=\frac{1}{(xy)^{-1}(y-x)}$ Udhëzim: vëreni zgjidhjen e detyrës (det. 5).

(4) a) $12^{-1}x^2y^2$; b) $a^{-6}b$; c) $3(a^2-1)^{-1}$. (5) a) $35\cdot10^{-1}$; b) $-6\cdot10^{-3}$; c) $53\cdot10^{-10}$.

2 (1) a) 27; b) $\frac{1}{2}$; c) 7. (2) a) $-\frac{1}{4}$; b) 0; (3) a) $a^{\frac{5}{3}}$; b) $b^{\frac{7}{6}}$; c) x.

(4) a) $x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$ b) $a-4b$; c) $a-b$;

3 (1) a) $\top$; b) $\perp$; c) $\top$; (2) a) -1; b) -3; c) 6. (3) a) $\sqrt[4]{x}$; b) $2\sqrt{a}\sqrt[3]{b}$; c) $\frac{3\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}}$. (4) a) $a^{\frac{3}{4}}$;

b) $(2a^2b^3)^{\frac{1}{4}}$; c) $b^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$; d) $a^2+a^{\frac{2}{3}}$. (5) a) $\sqrt[12]{2^6},\sqrt[12]{2^4},\sqrt[12]{2^3}$; b) $\sqrt[6]{a^3}$ dhe $\sqrt[6]{a^4}$;

c) $\sqrt[24]{(abc)^{12}}$; $\sqrt[24]{a^8b^4}$; $\sqrt[24]{a^3b^3c^6}$. (6) a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt{5a}$; v) $\sqrt[4]{6a^2b}$.

4 (1) a) 44; b) -24; c) 13, përdore formulën $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; d) $1\frac{1}{2}$. (2) a) xy^2;

b) $3x^2y^3$; c) $\frac{-2x^3}{y^2}$. (3) a) $6\sqrt{3}$; b) $3xy\sqrt[3]{2x^2y}$; c) $\frac{2ab^2}{c^2}\sqrt{3ab}$. (4) a) $\sqrt{18}$; b) $\sqrt[4]{\frac{8}{27}}$; c) $\sqrt{a}$; d) $\sqrt{x^2-y^2}$.

(5) a) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; b) $3\sqrt[3]{2}$; c) $ab^2\sqrt{3b}$; d) $2\sqrt{3ab}$; e) $\frac{3}{7}\cdot\sqrt{14}$; f) $2a\sqrt{a-2}$; g) $\frac{1}{b}\sqrt{a^2-b}$.

5 (1) a) da; b) da; c) $\frac{1}{y}\sqrt[3]{xy}$; $\frac{1}{x}\sqrt[3]{xy}$; $\frac{1}{xy}\sqrt[3]{xy}$. (2) a) $\sqrt{2}$; b) 0; v) $\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}$. (3) a) $3\sqrt{a}$;

b) $2(a-b)^2\cdot\sqrt[3]{ab}$.

6 (1) a) $42\sqrt{3}$; b) $6+14\sqrt{6}$; c) $|x^2-4|$; d) $6b^2\sqrt[6]{ab^4}$. (2) a) $8xy$; b) 3; c) $\sqrt[12]{16a^3}$.

(3) a) $ab^2\sqrt[8]{a^6b^5}$; b) $\frac{8}{27}$; c) a^2b; d) $5+2\sqrt{6}$. (4) a) $\sqrt[8]{27}$; b) $\sqrt[8]{a^5}$; c) $\frac{1}{y}\sqrt[12]{x^5y^5}$.

7 (1) a) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$; b) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$; c) $2\sqrt[3]{b^2}$; d) $\sqrt{1-b}$; e) $\frac{\sqrt[3]{(a^2-b^2)^2}}{a+b}$. (2) a) $2+\sqrt{2}$; b) $\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

c) $5+2\sqrt{6}$; d) $\sqrt{xy}$.

8 (1) a) 1; b) $\sqrt{1+a}$; c) $\frac{4\sqrt{ab}}{b-a}$; d) 4.

PËRPUNIMI I TË DHËNAVE

1 ① a) Të gjithë nxënësit e një gjimnazi në R.e Maqedonisë; b) numri i nxënësve në një çerdhe; c) prodhimi i qumshtit në R. e Maqedonisë.

② a) Prodhimi ditor është populacion, kurse ekzemplar është 50 artikuj; b) 1000 dhe 50 elemente; c) jo; g) për shembull çdo i njëzeti artikull.

③ Vetëm ngjyra e automobilit është shenjë kualitative. Vetëm numri i nxënësve në paralele është shenjë e ndërprerë.

④ Populacioni është e gjithë sasia e gjakut të njeriut. Mostër është gjaku i marrur prej gishtit ose prej venave. Shënime statistike janë: numri i rruzave të kuqe dhe të bardha, leukocitet, eritrocitet, sasia e sheqerit në gjak etj.

2 ① Vargu statistikor është: 10, 10, 10, 10, 12, 12, 12, 15, 15, 17, 17, 19, 20, 26, 26, 26, a tabelë statistikore është:

X	10	12	15	17	19	20	26
f	4	3	2	2	1	1	3

② Rangu është $x_{max} - x_{min} = 55 - 30,5 = 24,5$. Numri i intervaleve është $24,5 : 5 \approx 5$.
Tabelë është:

X	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55
f	3	4	7	7	3

③

X	0	1	2	3	4	5
f	38	144	342	287	164	25

④ a)

Shënimi X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frekuenca f	13	6	9	18	4	11	2	10	7
Kumulativa	13	19	28	46	50	61	63	73	80

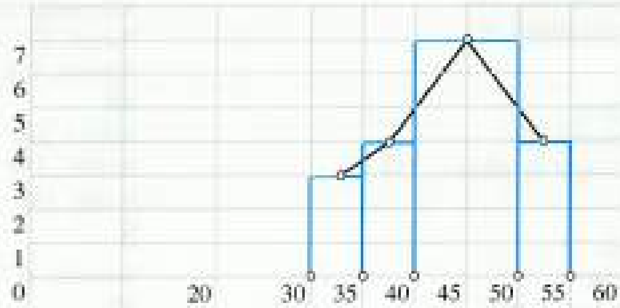
b)

Shënimi X	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
Frekuenca f	1	2	3	5	4	2
Kumulativa f	1	3	6	11	15	17

3 ① a) Pikat janë me kordinata: $(10,4),(12,3),(15,2),(17,2),(19,1),(20,1),(26,3)$.

b) Pikat kanë kordinata: $(0,38),(1,144),(2,342),(3,287),(4,164),(5,25)$.

②



③ a) Pikat janë me kordinata:

$M_1(1,13), M_2(2,19), M_3(3,28), M_4(4,46), M_5(5,50), M_6(6,61), M_7(2,63), M_8(8,73), M_9(9,80)$.

b) Pikat janë me kordinata:

$M_1(12,5;1), M_2(17,5;3), M_3(22,5;6), M_4(27,5;11), M_5(32,5;15), M_6(37,5;17)$.

4 ①

X	1	2	3	4	5
f	8	6	15	43	8

$$\overline{X}=\frac{1\cdot 8+2\cdot 6+3\cdot 15+4\cdot 43+5\cdot 8}{80}=\frac{281}{80}=3{,}51.$$

② Vlerat mesatare të intervaleve janë: 55, 65, 75, 85, 95, 105, kurse

$$\overline{X}=\frac{55\cdot 30+65\cdot 25+75\cdot 10+85\cdot 12+95\cdot 8+105\cdot 25}{110}=\frac{11730}{110}=106{,}6kg.$$

③ a) Popullacioni ka numër çift të anëtarëve, pra anëtari i mesit në varg nuk ekziston. 50 anëtarët e parë të vargut janë në grupe vlerat e së cilëve nuk janë më të mëdhaja se 12, kurse 50 anëtarët tjerë me rradhë janë në grupe vlerat e të cilëve janë prej 16 deri 22. Sipas kësaj , mediana është mes arithmetik mes grupeve vlerat e të cilëve janë prej 12 dhe 16, d.m.th. $Me(x)=\frac{12+16}{2}=14.$

b) Popullacioni ka numër çift të anëtarëve , dhe nuk ka anëtarë të mesit. Mediana është mes arithmetik i anëtarëve të cilët ndodhen në intervalin prej 6,5 deri 7, 5. Sipas kësaj , $Me(x)=\frac{6{,}5+7{,}5}{2}=7.$

Konceptet

PËRMBAJTJA

TEMA 1 **MATEMATIKA LOGJIKE DHE BASHKËSITË**

TEMA 2 **BASHKËSITË THEMELORE NUMERIKE**

TEMA 3 **SHPREHJET RACIOINALE ALGJEBRIKE**

TEMA 4 **FIGURAT GJEOMETRIKE NË RRAFSH**

TEMA 5 PROPORCIONI I MADHËSIVE

TEMA 6 FUNKSIONI LINEARË.BARAZIMI DHE JOBARAZIMI JOLENEARË

TEMA 7 SISTEMI I BARAZIMEVE LINEARE DHE JOLINEARE

TEMA 8 FUQIZIMI DHE RRËNJËZIMI

TEMA 9 PËRPUMIMI I TË DHËNAVE

Autorë: Borivoje Miladinoviç,
Trajçe Gjorgjievski,
Nikola Petreski

Recenzentë: **d-r Nikola Pandevski** - profesor i rregullt në FSHM-Shkup
Katica Spasovska Binçeva - profesor në SHMSH, gjimnazi "R. J. Korçagin" Shkup
Dragan Gjorgjievski - profesor SMSH, gjimnazi "J. B. Tito"-Shkup

Redaktor: **Jovo Stefanovski**

Me vendim të Ministrit të Ministrisë së arsimit të Republikës së Maqedonisë nr. 10-1774/1 prej datës 19.07.2002 ky libër lejohet të përdoret në arsimin e mesëm të gjimnazit.

CIP - Katalogizacija vo publikacija na Narodna i univerzitetska
biblioteka "Sv. Kliment Ohridski" - Skopje
51 (075.3)=18

MILADINOVIÇ, Borivoje
Matematika: për vitin I: (drejtimi ntyroro - matematikor) /
Borivoje Miladinoviç, Trajce Gjorgievski, Nikola Petreski;
[përkthyes Muzafer Beqiri] - Skopje : Albi, 2002. - 240 str.:
ilustr.: 26 cm

ISBN 9989 - 919 - 27 - 5
1. Gjorrijevski, Trajce 2. Petreski, Nikola

Botues

SHOQATA PËR VEPRIMTARI BOTUESE

"A l b i" Biljana dhe të tjerë Sh.p.k. Shkup

rr. „Oslo'' nr. 19, Shkup

Drejtor: Biljana Stefanovska

★

Borivoje Miladinoviq, Trajçe Gjorgjievski, Nikola Petreski

MATEMATIKA

viti I arsimi i gjimnazit

★

Përktheu

Xhevahir Beqiri

★

Përpunimi kompjuterik

Milço Avramoski, Dejan Kërstevski, Blazhee Tofilovski dhe Xhevahir Beqiri

★

Korrektura

Xhevahir Beqiri

★

Dorëshkrimi është dorëzuar në muajin gusht të vitit 2004.

Shtypi është krye në muajin gusht të vitit 2004.

Madhësia 240 faqe, formati 17 x 23 cm

Tirazhi: 5000 ekzemplarë.

Shtypur në „ABAKUS KOMERC'' Shkup