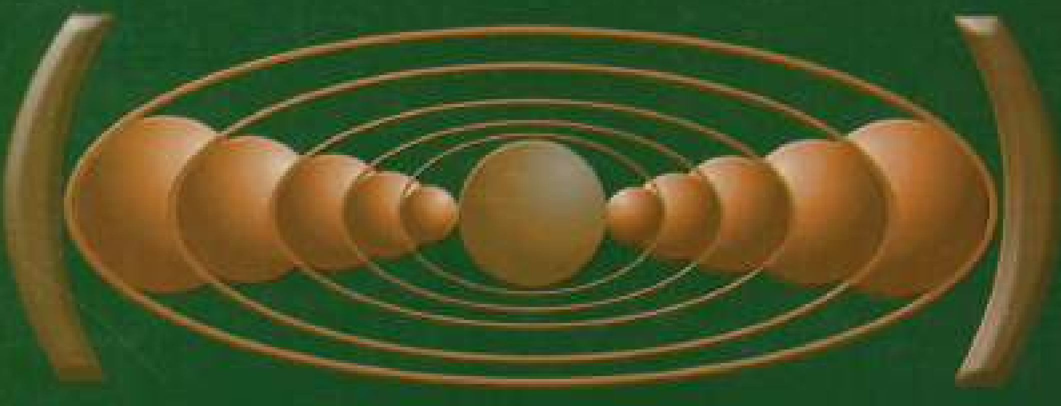
Верица Бакева
Боривоје Миладиновиќ

МАТЕМАТИКА

IV година



гимназиско образование

Верица Бакева
Боривоје Миладиновиќ

МАТЕМАТИКА

IV година

гимназиско образование

2020

ПРЕДГОВОР

Оваа книга ќе ти помогне при изучувањето на математиката во четврта година. Биди активен и редовен во работата, а тоа ќе ти помогне самостојно да стекнуваш знаења што ќе ти донесе задоволство и успех во учењето.

Книгата е поделена на пет тематски целини. Тие започнуваат со нивната содржина, а наставните единици се нумерирани.

Воочи ги ознаките на наставните единици и согледај ја нивната порака.

Потсети се! — Наставните единици почнуваат со нешто што ти е познато . Треба да се потсетиш и да ги решиш дадените барања. Тоа ќе го олесни изучувањето на нивните содржини.

А, Б, ... — Со овие ознаки наставната единица е поделена на делови (порции) што се однесуваат на новите поими.

1, 2, 3, ... — Со ваквите ознаки се означени активностите, прашањата и задачите што ќе ги решаваш на часот самостојно или со помош на твојот наставник, а тие се во лекцијата.

● Со ознаката крукче ти е упатено прашање на кое треба да дадеш одговор.

■ Со оваа ознака е дадена информација за објаснување на новиот поим.

Запомни! — Ова те упатува на тоа што е важно за новиот поим.

Воочи! — Оваа порака те упатува на што треба да посветиш поголемо внимание.

1, 2, 3, ... — По секоја наставна единица дадени се задачи. Со редовно и самостојно решавање на овие задачи подобро ќе го разбереш изученото. Твоите одговори спореди ги со одговорите и решенијата што се дадени на крајот од учебников.

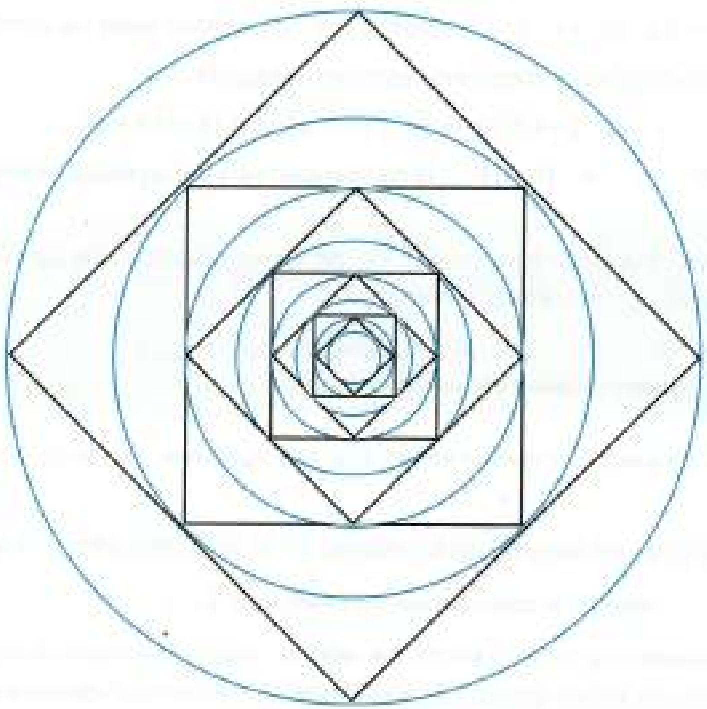
Кога ќе наидеш на тешкотии при изучувањето на одредени содржини, не се откажувај, обиди се повторно, биди упорен.

Ќе нѐ радува ако оваа книга ти овозможи да постигнеш солиден успех.

Од авторите

ТЕМА 1 НИЗИ И ПРОГРЕСИИ

Во оваа тема ќе учиш за:



1 НИЗА ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

Потсети се!

- Множеството $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,...,n-1,n,n+1,...\}$ се вика множество на природните броеви.
- Множеството што ги содржи сите дропки се вика множество на рационалните броеви, т.е.

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in \mathbb{Z}\wedge b\neq 0\right\}.$$

Секој бесконечен непериодичен децимален број се вика ирационален број.

- Множеството $\mathbb{J}$ од ирационалните броеви заедно со множеството $\mathbb{Q}$ од рационалните броеви го формираат множеството на реалните броеви, т.е. $\mathbb{R}=\mathbb{J}\cup\mathbb{Q}$.
- Множеството на природните броеви е подредено, т.е. $1<2<3<4<...<n<n+1<n+2<...$

A Во секојдневниот живот често се наметнува потребата некои предмети или објекти да ги подредиме, со што ќе се знае кој од нив е прв, втор, трет итн. Во тој случај се вели дека тие објекти се наредени во низа. На пример:

- буквите од нашата азбука се наредени во низа, бидејќи на прво место е буквата А, на второ место буквата Б, на трето В итн., па на тој начин на некои природни броеви им се придружени букви од азбуката. Така на пример, на бројот 1 му е придружена буквата А, и пишуваме $1\rightarrow$А, на бројот 2 – буквата Б, т.е. $2\rightarrow$Б, итн., на бројот 31 – буквата Ш, т.е. $31\rightarrow$Ш.
- Хемиските елементи H, He, Li,... се подредени според бројот на протони, при што $1\rightarrow \mathrm{H}$, $2\rightarrow \mathrm{He}$, $3\rightarrow \mathrm{Li}$,...$88\rightarrow \mathrm{Ra}$, $92\rightarrow \mathrm{U}$ итн., па затоа тие сочинуваат низа од хемиски елементи.
- Ако на секој природен број му е придружен неговиот квадрат, т.е.

$$1\rightarrow 1^2, 2\rightarrow 2^2, 3\rightarrow 3^2,...,n\rightarrow n^2,(n+1)\rightarrow(n+1)^2,...,$$

тогаш броевите $1^2, 2^2, 3^2,..., n^2, (n+1)^2,...$ја сочинуваат низата од квадратите на природните броеви.

Поопшто, ако на секој природен број $n=1,2,3,...$ по некое правило или закон му одговара по еден определен реален број a_n, тогаш за броевите

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n,...$$

велиме дека определуваат низа од реални броеви.

Броевите a_1, a_2, a_3, ... се викаат членови на низата; a_1 е прв член, a_2 е втор член, a_n е n – ти член или ***општ член*** на низата.

На тој начин е дефинирано пресликување (функција) $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$, при што $n\rightarrow a_n$, т.е. $f(n)=a_n$.

Низата a_1, a_2, a_3, ...,a_n,... кратко ја означуваме со симболот (a_n).

Секој член на низата зависи од своето место во низата , кое е означено со соодветниот индекс, што значи дека секој член од низата е функција од индексот n. . Низата е наполно определена ако се знае правилото со кое е определен n – тиот член од низата за произволен $n\in\mathbb{N}$.

1 Запиши ја низата за која правилото за добивање на a_n гласи:

а) членот a_n е реципрочна вредност на природниот број n;

б) членот a_n е n – ти степен од бројот 2.

Одговор:

- а) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$
- Колку е a_{100}?
- Колку е a_{1001}?

- б) $a_1 = 2^1$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 2^3 = 8, \ldots, a_n = 2^n$, па низата е: $2, 4, 8, \ldots, 2^n$.
- Колку е a_6?

Постојат и такви низи за чиј општ член не е познат аналитичкиот израз, но сепак е познато правилото по кое може да се пресмета кој било член од низата. Така на пример, со постапката за пресметување на $\sqrt{2}$ се добива низата

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

Членовите на оваа низа се помалите приближни децимални вредности на бројот $\sqrt{2}$ со точност до $1; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; \ldots$, соодветно.

2 Запиши ја низата чии членови се добиваат при претворање на $\frac{1}{3}$ во децимален број.

3 Запиши ја низата зададена со општиот член: а) $a_n = 2n-1$, $n \in \{1,2,3,4,\ldots,10\}$;

б) $b_n = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$. Колку членови има секоја од овие низи?

Согледај го одговорот:

а) $1, 3, 5, 7, \ldots, 19$;

б) $1, 3, 5, 7, \ldots, 19, \ldots$

- Низата (a_n) има 10 члена, т.е. конечен број членови.
- Низата (b_n) има бесконечно многу членови.

Дефиниција. Секое пресликување f од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{R}$ се вика ***бесконечна низа*** од реални броеви. Секое пресликување f од множеството $\{1,2,3,\ldots,k\} \subset \mathbb{N}$ во множеството $\mathbb{R}$ се вика ***конечна низа*** од реални броеви или k – члена низа.

Во математиката од посебен интерес се бесконечните низи. Натаму, ние ќе го употребуваме терминот "низа" наместо "бесконечна низа" од реални броеви.

Б Дадени се низите: $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots$; $2, 4, 6, 8, 0, 0, 0, \ldots$ и $2, 4, 6, 8, 1, 1, 1, \ldots$

- Дали една низа е еднозначно определена ако ги знаеме првите неколку нејзини членови? Согледај дека одговорот на ова прашање е негативен.

4 Претпоставувајќи дека правилото кое го воочуваме меѓу наведените членови на низата важи и за следните , запиши еден од можните изрази за општиот член на низата:

а) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$; б) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ в) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots$; г) $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

Одговор:

а) $a_n = 2n-1$; б) $a_n = n^2$; в) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; г) $a_n = (-1)^n$.

Многу често членовите на една низа може да бидат дадени и со рекурентна формула од видот

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

при што a_1 е непосредно даден, а сите останати членови ги одредуваме според дадената формула. На пример, ако е $a_{n+1} = a_n + 3$ и $a_1 = 1$, тогаш се добива низата $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13, \ldots$

5 Напиши ги првите десет члена на низата зададена со:

а) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n$;

б) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + n^2$;

в) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = n \cdot a_n$;

г) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3$.

B **6** Дадена е низата: а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$; б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ в) $3, 3, 3, \ldots$

Одреди го знакот на разликите: $a_1 - a_2,\ a_2 - a_3,\ a_3 - a_4, \ldots, a_n - a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$.

Решение:

а) $a_1 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6} < 0$. Значи, $a_1 - a_2 < 0$, т.е. $a_1 < a_2$.

$a_2 - a_3 = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{8-9}{12} = -\frac{1}{12} < 0$. Значи $a_2 - a_3 < 0$, т.е. $a_2 < a_3$.

$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$, од каде што заклучуваме дека

$a_n < a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$.

Од $a_1 < a_2,\ a_2 < a_3, \ldots,\ a_n < a_{n+1}$ следува $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$

За оваа низа велиме дека е растечка.

б) $a_1 - a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$, т.е. $a_1 > a_2$; $\quad a_2 - a_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} > 0$, т.е. $a_2 > a_3$;

$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, т.е. $a_n > a_{n+1}$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Од $a_1 > a_2,\ a_2 > a_3, \ldots,\ a_n > a_{n+1}$ за секој $n \in \mathbb{N}$ следува $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$

За оваа низа велиме дека е опаднувачка.

в) За оваа низа велиме дека е константна.

Дефиниција. За низата (a_n) велиме дека ***расте*** ако $a_n < a_{n+1}$ за секој $n \in \mathbb{N}$.
За низата (a_n) велиме дека ***опаѓа*** ако $a_n > a_{n+1}$ за секој $n \in \mathbb{N}$.
За низата (a_n) велиме дека е ***неопаднувачка*** ако $a_n \le a_{n+1}$ за секој $n \in \mathbb{N}$.
За низата (a_n) велиме дека е ***нерастечка*** ако $a_n \ge a_{n+1}$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Растечките и опаднувачките низи уште се викаат монотони низи во строга смисла на зборот, а неопаднувачките и нерастечките низи – монотони во широка смисла на зборот.

За да се утврди дали дадена низа (a_n) расте или опаѓа, наместо знакот на разликата $a_n - a_{n+1}$ може да се испита вредноста на количникот $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ при што:

ако $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ $(a_{n+1} > 0)$, тогаш низата (a_n) расте;

ако $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ $(a_{n+1} > 0)$, тогаш низата (a_n) опаѓа.

7 Докажи дека низата со општ член:

а) $a_n = \frac{3n}{3n+1}$ монотоно расте; б) $a_n = \frac{1}{2n-1}$ монотоно опаѓа.

Согледај го доказот:

а) Треба да докажеме дека за секој $n \in \mathbb{N}$ е точно неравенството $a_n < a_{n+1}$ т.е. $a_n - a_{n+1} < 0$ или $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ $(a_{n+1} > 0)$. Во овој случај имаме:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n}{3n+1} - \frac{3(n+1)}{3(n+1)+1} = \frac{-3}{(3n+1)(3n+4)} < 0 \text{ или}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{3n}{3n+1}}{\frac{3(n+1)}{3(n+1)+1}} = \frac{3n(3n+4)}{(3n+1)(3n+3)} = \frac{9n^2+12n+3-3}{9n^2+12n+3} = 1 - \frac{3}{9n^2+12n+3} < 1.$$

б) Треба да докажеме дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи: $a_n - a_{n+1} > 0$ или $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ $(a_{n+1} > 0)$.

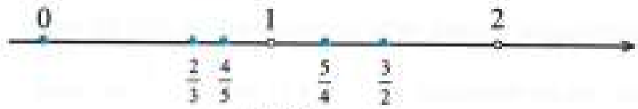
$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{4n^2-1} > 0 \text{ или}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}} = \frac{2n+1-1+1}{2n-1} = 1 + \frac{2}{2n-1} > 1.$$

8 Испитај ја монотоноста на низата чиј општ член е: а) $a_n = \frac{2n-1}{3n}$; б) $a_n = \frac{5}{n+1}$.

Постојат и низи кои не се монотони, т.е. ниту растат, ниту опаѓаат. Таква е, на пример, низата со општ член $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, чии членови $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ се наизменично распоредени од левата и десната страна на бројот 1.

Велиме дека членовите на низата осцилираат околу бројот 1 (црт. 1).



црт. 1

9 Општиот член на една низа е $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

а) Напиши ги првите 8 члена на низата и претстави ги на бројна оска.

б) Дали сите членови на низата припаѓаат на интервалот $(-2,2)$?

Согледај го решението:

а) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{8}$.

б) Да, сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $(-2,2)$. Тоа го запишуваме на следниот начин:

$$a_n \in (-2,2) \text{ за секој } n \in \mathbb{N}, \text{ т.е. } |a_n| < 2 \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Значи, секој член на оваа низа по апсолутна вредност е помал од бројот 2, па за низата велиме дека е ограничена.

Дефиниција. Низата (a_n) е ***ограничена***, ако секој нејзин член по апсолутна вредност е помал од некој позитивен број k, т.е. ако постои некој позитивен број k, таков што за секој $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq k$.

Низата што не е ограничена се вика ***неограничена низа***. На пример, низата на природните броеви е неограничена.

Воочи!

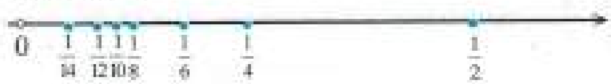
Поимот "неограничена низа" е различен од поимот "бесконечна низа". На пример, низата $\left(\frac{1}{n}\right)$ е бесконечна, т.е. има бесконечен број членови, но е ограничена бидејќи сите нејзини членови по апсолутна вредност не се поголеми од 1, т.е. му припаѓаат на интервалот $(0,1]$.

10 Која од следниве низи е ограничена: а) $a_n = \frac{1}{2n}$; б) $a_n = \frac{n}{n+1}$; в) $a_n = (-1)^n n$.

Согледај го решението:

а) Низата гласи: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}, \ldots$

Да ги претставиме првите неколку членови на бројна оска.



Очигледно е дека сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, т.е. $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ за секој $n \in \mathbb{N}$, што значи дека низата е ограничена.

б) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \ldots$

Сите членови на оваа низа се наоѓаат во интервалот $(0,1)$, т.е. $0 < a_n < 1$ за секој $n \in \mathbb{N}$, од каде заклучуваме дека низата е ограничена.

в) $a_1=-1,\ a_2=2,\ a_3=-3,\ a_4=4,\ a_5=-5,\ a_6=6,...$

За оваа низа не постои позитивен број k, таков што $|a_n|<k$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Значи, низата е неограничена.

Задачи:

1 Напиши ги првите пет члена на низата со општ член:

а) $a_n=\frac{n+1}{n^2-2}$; б) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n-1}$; в) $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$; г) $a_n=\frac{1}{n!}$.

2 Претпоставувајќи дека правилото кое го воочуваме меѓу наведените членови на низата важи и за следните, запиши еден од можните изрази за општиот член:

а) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{2^2},\ \frac{3}{2^3},\ \frac{4}{2^4},...$; б) $1,\ \frac{2}{101},\ \frac{4}{201},\ \frac{8}{301},...$;

в) $1,\ \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{3\sqrt{3}},\ \frac{1}{4\sqrt{4}},...$; г) $1,\ -2,\ -3,\ -4,...$

3 Напиши ги првите десет члена на низата зададена со:

а) $a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$; б) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$.

4 Напиши ги првите пет члена на низата од децималните приближувања со недостиг на бројот:

а) $\sqrt{3}$; б) π.

5 Во квадрат со страна 4 е впишан втор квадрат чии темиња се средините на страните на првиот, во вториот квадрат на ист начин е впишан трет квадрат итн. Напиши ја низата чии членови се:

а) должините на страните на квадратите; б) плоштините на квадратите.

6 Испитај ја монотоноста на низата со општ член:

а) $a_n=\frac{n}{3n+2}$; б) $a_n=1-n^2$.

7 Претпоставувајќи дека правилото кое го воочуваме меѓу наведените членови на низата важи и за следните, испитај ја монотоноста на низата: а) $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},...$; б) $\frac{1}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{7},\ \frac{7}{9},...$

8 Испитај ја монотоноста на низата зададена со општиот член:

а) $a_n=n$; б) $a_n=\frac{1}{n}$; в) $a_n=(-1)^n$; г) $a_n=\frac{1}{2^n}$.

9 Која од следниве низи е ограничена: а) $a_n=(-1)^n$; б) $a_n=\frac{2}{n!}$; в) $a_n=\frac{1}{2n}$;

г) $a_n=(-1)^n n^3$; д) $1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;...$

2 АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

Потсети се!

- Низата $-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots$ расте.
- Низата $10, 6, 2, -2, -6, \ldots$ опаѓа.
- Низата $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots$ ниту расте ниту опаѓа. Оваа низа не е монотона.

А Дадени се низите:

а) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

б) $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \ldots$

в) $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$

г) $6, 2, -2, -6, -10, \ldots$

Согледај дека во секоја од дадените низи разликата меѓу секој член (освен првиот) и неговиот претходник е константна и изнесува: а) 1; б) -1; в) 3; г) -4.

Дефиниција. Низа од броеви, такви што почнувајќи од вториот член разликата меѓу секој член и неговиот претходник е константна, т.е. $a_{n+1} - a_n = d$ за секој $n \in \mathbb{N}$ се вика аритметичка низа или ***аритметичка прогресија***. Таа е наполно определена ако се дадени првиот член и разликата.

Зборот прогресија потекнува од латинскиот збор *progressio* што значи напредување, а ознаката d е, всушност, почетната буква од латинскиот збор *differentia*, што значи разлика.

Ако $d > 0$, тогаш од $a_{n+1} - a_n = d$ следува $a_{n+1} > a_n$, што значи дека прогресијата расте.

Ако $d < 0$, тогаш $a_{n+1} < a_n$, т.е. прогресијата опаѓа.

Ако $d = 0$, сите членови на прогресијата се еднакви меѓу себе, т.е. (a_n) е константна низа.

1 Одреди која од следниве низи е аритметичка прогресија:

а) $5, 7, 9, 11, \ldots$

б) $3, -1, -5, -9, \ldots$

в) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$

г) $\frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{11}, \ldots$

д) $2a-b, 3a+2b, 4a+5b, 5a+8b, \ldots$

Б Нека е дадена аритметичката прогресија $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ Од дефиницијата за аритметичка прогресија следува

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$, од каде што

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d,$$

. . . .

. . . .

. . . .

Воочи дека кој било член на аритметичката прогресија (освен првиот) може да се одреди според формулата

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}\;;$$

таа се вика формула за $n-$тиот член на аритметичката прогресија.

2 Со примена на математичка индукција докажи ја формулата за n – тиот член на аритметичката прогресија.

Согледај го доказот:

- (i) Очигледно е дека формулата важи за $n=1$, т.е. $a_1=a_1$, а важи и за $n=2$, бидејќи по дефиниција $a_2=a_1+d$.

- (ii) Да претпоставиме дека формулата е точна до некој природен број k, т.е. нека важи $a_k=a_1+(k-1)d$.

- (iii) Ќе докажеме дека формулата е точна и за $n=k+1$. Бидејќи по дефиниција е $a_{k+1}=a_k+d$, а имајќи го предвид горното равенство, добиваме $a_{k+1}=a_1+(k-1)d+d=a_1+kd$, што требаше да се докаже.

3 Одреди го $31^{от}$ член на аритметичката прогресија $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,...$

Согледај го решението:

- За оваа прогресија $a_1=1$ и $d=5-3=2$, па $a_{31}=a_1+30d$, т.е. $a_{31}=1+30\cdot 2=61$.

4 Пресметај го n во аритметичката прогресија ако:

а) $a_n=25,\ d=2,\ a_1=3$; б) $a_n=-11,\ d=-\frac{1}{2},\ a_1=-3\frac{1}{2}$.

Согледај го решението:

- а) Дадените вредности ги заменуваме во формулата $a_n=a_1+(n-1)d$, т.е. $25=3+(n-1)\cdot 2$, од каде што $n=12$.

5 Кој член во аритметичката прогресија $3,\ 9,\ 15,...$ е еднаков на 117?

6 Напиши ги првите пет члена на аритметичката прогресија во којашто разликата меѓу третиот и првиот член е 16, а збирот на третиот и петтиот член е 144.

Согледај го решението:

- Од условот на задачата следува $\begin{cases} a_3-a_1=16 \\ a_3+a_5=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+2d-a_1=16 \\ a_1+2d+a_1+4d=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=8 \\ a_1=48. \end{cases}$

Првите пет члена на низата се: 48, 56, 64, 72, 80.

7 Одреди ја аритметичката прогресија, ако:

а) $a_3+a_7=38$ и $a_2+a_{12}=50$; б) $a_3+a_5+a_8=43$ и $a_4+a_7=30$.

8 Во прогресијата $43,\ 40,\ 37,\ ...$ одреди го првиот по ред член чија вредност е помала од 1.

Согледај го решението:

- Овде $a_1=43$ и $d=-3$, па бараниот индекс е најмалиот од сите индекси n кои ја задоволуваат неравенката $43-3(n-1)<1$, од каде $n-1>14$, т.е. $n>15$. Значи, бараниот индекс на членот е 16, па почнувајќи од $a_{16}=-2$ сите наредни членови се помали од 1.

● Во истата прогресија одреди ги членовите a_{15} и a_{17}.

9 Одреди го членот a_{17} на аритметичката прогресија чиј осми член е 8, а разликата е -2.

10 Збирот на три броја кои образуваат аритметичка прогресија е 24. Одреди ги тие броеви, ако се знае дека квадратот на третиот број е за 96 поголем од збирот на квадратите на првите два.

Согледај го решението:

Според условот на задачата имаме:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=24 \\ a_3^{\,2}=a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d=24 \\ (a_1+2d)^2=a_1^{\,2}+(a_1+d)^2+96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+d=8 \\ (a_1+d+d)^2=a_1^{\,2}+(a_1+d)^2+96 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1=8-d \\ (8+d)^2=(8-d)^2+8^2+96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=5 \\ a_1=8-5=3. \end{cases}$$ Бараните броеви се: $3,\ 8,\ 13.$

В **11** Меѓу броевите 7 и 61 интерполирај (вметни) 8 броеви кои со дадените образуваат аритметичка прогресија.

Согледај го решението:

Бидејќи $a_1=7$ и $a_{10}=61$, од $a_1+9d=61$ следува $d=\dfrac{61-7}{9}=6$, па бараната прогресија е

$7,\ 13,\ 19,\ 25,\ 31,\ 37,\ 43,\ 49,\ 55,\ 61.$

12 Меѓу броевите a_1 и a_n вметни нови броеви коишто со дадените броеви ќе образуваат аритметичка прогресија од n членови.

Согледај го решението:

Од $a_n=a_1+(n-1)d$ ја изразуваме разликата d и добиваме $d=\dfrac{a_n-a_1}{n-1}$. Помеѓу a_1 и a_n треба да вметнеме $n-2$ членови (зошто?), па бараната прогресија е

$$a_1,\ a_1+\frac{a_n-a_1}{n-1},\ a_1+2\cdot\frac{a_n-a_1}{n-1},\ a_1+3\cdot\frac{a_n-a_1}{n-1},\ldots,\ a_1+(n-2)\frac{a_n-a_1}{n-1},\ a_n.$$

13 а) Меѓу броевите 2 и 10 интерполирај 20 броеви кои со дадените образуваат аритметичка низа.

б) Меѓу броевите 0 и 1 интерполирај 99 броеви кои со дадените образуваат аритметичка низа.

Задачи:

1 Која од следните низи е аритметичка прогресија:

а) $3,\ 6,\ 9,\ldots,\ 3n,\ldots;$ б) $1,\ 8,\ 27,\ldots,\ n^3,\ldots;$ в) $1,\ 3,\ 7,\ldots,\ 2^n-1,\ldots;$ г) $5,\ 3,\ 1,\ldots,\ 7-2n,\ldots?$

2 Провери дали броевите:

а) $\sin^2 30^0$, $\sin^2 45^0$ и $\sin^2 60^0$; б) $\cos^2\dfrac{\pi}{3}$, $\cos^2\dfrac{\pi}{4}$ и $\cos^2\dfrac{\pi}{6}$;

образуваат аритметичка прогресија.

3 Ако во аритметичката прогресија $2,\ -1,\ -4,\ldots$ ги изоставиме членовите што стојат на парните места, тогаш и останатите членови образуваат аритметичка прогресија. Докажи.

4 Во низата на природните броеви одреди го:

а) стотиот парен број; б) $163^{\text{от}}$ непарен број.

5 Одреди го членот a_n во аритметичката прогресија ако:

а) $a_1 = 4,\ d = 3,\ n = 8$; б) $a_1 = -9,\ d = 5,\ n = 11$;

в) $a_1 = \dfrac{1}{2},\ d = -\dfrac{1}{4},\ n = 9$; г) $a_1 = a + b,\ d = a,\ n = 20$.

6 Напиши ги првите пет члена на аритметичката прогресија ако:

а) $a_1 = 3,\ a_7 = 9$; б) $a_6 = 17,\ d = 2$;

в) $a_{17} = -22,\ a_4 = -6$; г) $a_3 + a_7 = 38$ и $a_2 + a_{12} = 50$.

7 Меѓу броевите 18 и -12 вметни 8 броеви коишто заедно со дадените образуваат аритметичка прогресија.

8 Нека низата $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$ е аритметичка прогресија. Докажи дека е аритметичка прогресија и низата:

а) $a_1 + 2,\ a_2 + 2,\ a_3 + 2,\ldots$; б) $a_1 k,\ a_2 k,\ a_3 k,\ldots \quad (k \in \mathbb{R})$; в) $\dfrac{a_1}{k},\ \dfrac{a_2}{k},\ \dfrac{a_3}{k},\ldots \quad (k \neq 0)$.

3 ЗБИР НА ПРВИТЕ n ЧЛЕНОВИ НА АРИТМЕТИЧКАТА ПРОГРЕСИЈА

Потсети се!

- Аритметичка средина на реалните броеви a и b е бројот $\dfrac{a+b}{2}$.

- Аритметичка средина на броевите $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_n$ е бројот $\overline{a} = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$.

- Одреди ја аритметичката средина на броевите: а) 21 и -3; б) $\sqrt{3}$ и $5\sqrt{3}$; в) $1,\ 3,\ 5,\ 17,\ -6$ и 2.

А Ако ги разгледуваме само првите n – членови од дадена аритметичка прогресија (a_n), тогаш за $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ ќе велиме дека е конечна аритметичка прогресија.

Дадена е аритметичка прогресија со конечен број членови.

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots,\ 50,\ 51,\ldots,\ 96,\ 97,\ 98,\ 99,\ 100.$

За членовите 2 и 99, 3 и 98, 4 и 97, . . . , 50 и 51 велиме дека се еднакво оддалечени од крајните членови 1 и 100 соодветно.

Воочи дека

- $2 + 99 = 3 + 98 = 4 + 97 = \ldots = 50 + 51 = 1 + 100.$

1 Нека $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$ се првите n членови од една аритметичка прогресија со конечен број членови и разлика d.

- Определи ги паровите членови што се еднакво оддалечени од крајните членови a_1 и a_n.
- Одреди го збирот на индексите во секој од определените парови.

Сойледај іо одіоворой:

- Членовите a_2 и a_{n-1}, a_3 и a_{n-2},..., a_k и $a_{n-(k-1)}$ се еднакво оддалечени од крајните членови a_1 и a_n соодветно.
- Збирот на нивните индекси е $2+n-1=3+n-2=...=k+n-(k-1)=n+1$.

Теорема. Ако аритметичката прогресија има конечен број членови, тогаш збирот на кои било два члена што се еднакво оддалечени од крајните членови е еднаков со збирот на крајните членови на прогресијата, т.е.

$$a_k+a_{n-(k-1)}=a_1+a_n,\quad 2\le k\le n.$$

Доказ. Бидејќи $a_k=a_1+(k-1)d$ и $a_{n-(k-1)}=a_1+(n-k)d$, по собирањето на овие равенства добиваме

$$a_k+a_{n-(k-1)}=a_1+\underbrace{a_1+(n-1)d}_{a_n}=a_1+a_n.$$

Аритметичката прогресија $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\dots,\ 50,\ 51,\ 52,\dots,\ 100,\ 101$ содржи конечен непарен број членови, а според претходната теорема имаме

$$2+100=3+99=4+98=...=50+52=1+101.$$

Членот 51 е среден член, тој е еднакво оддалечен од крајните членови на прогресијата и за него важи равенството

$$2\cdot 51=1+101 \text{ или } 51=\frac{1+101}{2}.$$

Ова тврдење може да се воопшти, т.е. средниот член на една аритметичка прогресија со непарен број членови е еднаков на аритметичката средина од нејзините крајни членови.

2 Дадена е аритметичката прогресија:

а) $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\dots,2n,\dots$ б) $-5,\ -1,\ 3,\ 7,\ 11,\ 15,\dots$

Сойледај іо свойсйвойо:

а) $4=\frac{2+6}{2},\ 6=\frac{4+8}{2},\ 8=\frac{6+10}{2},\ 10=\frac{8+12}{2}$ итн. б) $-1=\frac{-5+3}{2},\ 3=\frac{-1+7}{2},\ 7=\frac{3+11}{2}$ итн.

Воочи дека секој член на прогресијата (освен првиот) е аритметичка средина од неговите соседни членови. Ова својство важи за која било аритметичка прогресија и е искажано со следната

Теорема. Секој член на аритметичката прогресија, освен првиот, е аритметичка средина од својот претходник и својот следбеник.

Доказ. Ако a_{k-1}, a_k и a_{k+1} се три последователни члена на аритметичката прогресија $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, тогаш за нив важи $a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$, т.е. $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, од каде што

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},\ k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Од ова својство потекнува и името аритметичка прогресија или аритметичка низа.

3 Дадена е аритметичката прогресија $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23\ldots$

а) Претходната теорема примени ја за членот 11.

б) Дали членот 11 може да се претстави како аритметичка средина и на други два членови од низата? Кои се тие членови?

Согледај го решението:

а) Според теоремата имаме $11 = \frac{9+13}{2}$.

б) Да, на следниот начин:

$$11 = \frac{7+15}{2} = \frac{5+17}{2} = \frac{3+19}{2} = \frac{1+21}{2}.$$

4 Докажи дека секој внатрешен член на аритметичката прогресија е аритметичка средина на секој пар членови од низата што се еднакво оддалечени од него, т.е.

$$a_k = \frac{1}{2}(a_{k-r} + a_{k+r}),\ \ 1 \le r < k.$$

Така за низата $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \boxed{7,}\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ldots$ имаме

$$7 = \frac{6+8}{2} \text{ или } 7 = \frac{5+9}{2} \text{ или } 7 = \frac{4+10}{2} \text{ итн, а } 9 = \frac{8+10}{2} \text{ или } 9 = \frac{7+11}{2} \text{ или } 9 = \frac{6+10}{2} \text{ итн.}$$

Следните конечни аритметички прогресии имаат непарен број членови:

а) $5,\ 7,\ \boxed{9,}\ 11,\ 13;$

б) $3,\ -1,\ \boxed{-5,}\ -9,\ -13;$

в) $-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \boxed{\frac{5}{2},}\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{11}{2}.$

Воочи дека:

$$\boxed{9} = \frac{5+7+11+13}{4};\qquad \boxed{-5} = \frac{3+(-1)+(-9)+(-13)}{4};\qquad \boxed{\frac{5}{2}} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}+\frac{9}{2}+\frac{11}{2}\right).$$

Теорема. Средниот член на конечна аритметичка прогресија со непарен број членови

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_n,\ \boxed{a_{n+1},}\ a_{n+2},\ldots,\ a_{2n+1}$$

е еднаков на аритметичката средина останатите членови во низата, т.е.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+2} + \ldots + a_{2n+1}).$$

5 Одреди го збирот на првите 100 члена на аритметичката прогресија ако $a_1 = 1,\ d = 1$.

Согледај го решението:

Дадената прогресија е $1, 2, 3, 4, \ldots, 100, 101, \ldots$ Бараниот збир ќе го означиме со S_{100} и имаме:

$$S_{100}=1+2+3+\ldots+98+99+100, \text{ т.е. } S_{100}=100+99+98+\ldots+3+2+1.$$

Со собирање на равенствата добиваме

$$2S_{100}=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(98+3)+(99+2)+(100+1)$$

Бидејќи $1+100=2+99=3+98=\ldots=98+3=99+2=100+1=101$

$$2S_{100}=100\cdot 101, \text{ т.е. } S_{100}=5050.$$

6 Одреди го збирот на првите n членови на аритметичката прогресија $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Согледај го решението:

Ги земаме првите n членови на прогресијата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ и го формираме збирот $S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$, т.е. $S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_3+a_2+a_1$. Ако овие две равенства ги собереме, добиваме

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\ldots+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)}_{n}.$$

Поради $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3=a_{n-2}=\ldots=a_{n-2}+a_3=a_{n-1}+a_2=a_n+a_1$ следува дека

$$S_n=\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_n).$$

Ако во оваа формула ја внесеме вредноста за $a_n=a_1+(n-1)d$, ја добиваме формулата

$$S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right].$$

7 Одреди го збирот на првите 10 члена на аритметичката прогресија $4, 6, 8, 10, \ldots$

Согледај го решението:

Воочи, $a_1=4$, $d=2$ и $n=10$, па $S_n=\frac{10}{2}\left[2\cdot 4+(10-1)\cdot 2\right]=130.$

8 Одреди го збирот на првите 30 члена на аритметичката прогресија $3, 5, 7, 9, \ldots$

9 Во една аритметичка прогресија со непарен број членови средниот член е 11, а збирот на сите членови е 77. Одреди го бројот на членовите.

Согледај го решението:

$\begin{cases} a_{sr}=11 \\ S_n=77 \end{cases}$, при што $\begin{cases} a_{sr}=\dfrac{a_1+a_n}{2} \\ S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)=n\cdot a_{sr}. \end{cases}$

Заменувајќи ги вредностите за S_n и a_{sr} добиваме $77=n\cdot 11$ од каде $n=7$.

Значи, во прогресијата има 7 члена.

10 Збирот на првите 20 члена на една аритметичка низа е 150, а седмиот член е 3. Одреди ја таа прогресија.

Согледај го решението:

$$\begin{cases} S_{20} = 10(2a_1 + 19d) \\ a_7 = a_1 + 6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 150 = 20a_1 + 190d \\ 3 = a_1 + 6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20(3-6d) + 190d = 150 \\ a_1 = 3 - 6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \dfrac{9}{7} \\ a_1 = -\dfrac{33}{7}. \end{cases}$$

Прогресијата гласи: $-\frac{33}{7}, -\frac{24}{7}, -\frac{15}{7}, \ldots$

11 Збирот на првите десет члена на една аритметичка прогресија е 0, а збирот на наредните осум члена е -32. Одреди ја прогресијата.

Согледај го решението:

$$\begin{cases} S_{10} = 0 \\ S_{18} - S_{10} = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{10} = 0 \\ S_{18} = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(2a_1 + 9d) = 0 \\ 9(2a_1 + 17d) = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 9d = 0 \\ 2a_1 + 17d = -\dfrac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = -\dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

Бараната прогресија е $2, \frac{14}{9}, \frac{10}{9}, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$

12 Збирот на првите седум члена на една аритметичка прогресија е 77, а збирот на првите десет е 65. Одреди ја прогресијата.

13 Во аритметичката прогресија со $a_1 = 30$ и $d = -3$ пресметај го членот што е еднаков на $\frac{1}{8}$ од збирот на сите претходни членови.

Согледај го решението:

Според условот на задачата имаме: $a_1 = 30,\ d = -3,\ a_n = \frac{1}{8}S_{n-1}$. Вредностите a_1 и d ги заменуваме во формулите $a_n = a_1 + (n-1)d$ и $S_{n-1} = \frac{n-1}{2}(2a_1 + (n-2)d)$ и добиваме

$a_n = 30 + (n-1)\cdot(-3) = 33 - 3n = 3(11-n)$, односно $S_{n-1} = \frac{n-1}{2}(2\cdot 30 + (n-2)(-3)) = \frac{3(n-1)}{2}(22-n)$.

Од условот $3(11-n) = \frac{1}{8}\cdot\frac{3(n-1)}{2}\cdot(22-n)$ следува равенката $n^2 - 39n + 198 = 0$, од каде што $n = 33$ или $n = 6$. Следствено, $a_{33} = -66,\ \ a_6 = 15$.

Задачи:

1 Пресметај ги n и S_n во аритметичката програсија, ако:

а) $a_1 = 4,\ \ d = 5,\ \ a_n = 49$; б) $a_1 = 3,\ \ d = -5,\ \ a_n = -72$.

2 Пресметај ги a_n и d во аритметичката прогресија, ако:

а) $a_1 = 8,\ \ S_8 = 148$; б) $a_1 = -35,\ \ S_{36} = 0$.

(3) Пресметај ги a_1 и S_n во аритметичката прогресија, ако:

а) $a_{15}=9, \quad d=\frac{1}{3}$; б) $a_9=10a+8b, \quad d=a+b$.

(4) Одреди ја аритметичката прогресија за која важи:

а) $a_2+a_5=-4,\ S_7=-21$; б) $a_2+a_4+a_6=24,\ S_5=30$; в) $a_1+a_3=6,\ S_{14}-S_5=135$.

(5) Во една аритметичка прогресија со непарен број членови првиот член е 3, средниот член е 13, а збирот на сите членови е 143. Одреди ги n и d.

(6) Во аритметичката прогресија $18,\ 15,\ 12, \ldots$ одреди го членот што е еднаков на петтината од збирот на сите претходни членови.

(7) Во една аритметичка прогресија збирот на првите три члена е -3, а збирот на првите пет члена со парни индекси е 15. Одреди ги првиот член и разликата на прогресијата.

(8) Збирот на првите три члена на една растечка аритметичка прогресија е 27, а збирот на нивните квадрати е 275. Како гласи прогресијата?

(9) Збирот на три последователни членови на аритметичката прогресија е 150, а најголемиот од нив е четирипати поголем од најмалиот. Одреди ги тие членови.

(10) Реши ја равенката: а) $\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+\ldots+x=200$; б) $3^{1+3+5+\ldots+2x-1}=81$.

4 ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

А **1** Дадени се низите: а) $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32, \ldots$; б) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{18},\ \frac{1}{54},\ \frac{1}{162}, \ldots$;

в) $3,\ -6,\ 12,\ -24,\ 48,\ -96, \ldots$; г) $1024,\ 512,\ 256,\ 128,\ 64,\ 32, \ldots$

За секоја од нив пресметај го количникот од секој нејзин член (почнувајќи од вториот) и неговиот претходник.

Согледај го решението:

а) $4:2=8:4=\ldots=2$; б) $\frac{1}{6}:\frac{1}{2}=\frac{1}{18}:\frac{1}{6}=\ldots=\frac{1}{3}$; в) $-6:3=12:(-6)=\ldots=-2$; г) $512:1024=\ldots=\frac{1}{2}$.

Воочи дека за секоја низа тој количник е константен. Имено, за првата низа е 2, за втората $\frac{1}{3}$, за третата е -2, а за четвртата е $\frac{1}{2}$. Низите за коишто важи ова својство ги викаме геометриски низи или геометриски прогресии.

Дефиниција. За низата (a_n) велиме дека е ***геометриска низа*** или ***геометриска прогресија*** ако количникот од секој нејзин член и неговиот претходник, почнувајќи од вториот член е константен, т.е.

$$a_{n+1}:a_n=q, \text{ за секој } n\in\mathbb{N}, \text{ при што } a_1\neq 0,\ q\neq 0.$$

Ознаката q е, всушност, првата буква од латинскиот збор *quotiens*, што значи количник.

Б Ако за една геометриска прогресија е познат првиот член и количникот, тогаш вториот член е еднаков на производот од првиот член и количникот, третиот член е еднаков на производот од вториот член и количникот итн. Воопшто, секој нареден член е еднаков на производот од неговиот претходник и количникот.

2 Напиши ја геометриската прогресија ако се познати првиот член a_1 и количникот q:

а) $a_1 = 3,\ \ q = 3;$ б) $a_1 = 5,\ \ q = -\frac{1}{2};$ в) $a_1 = 192,\ \ q = \frac{1}{3}.$

Соīледај īо решението:

а) $a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot 3 = 3^2;\ \ a_3 = a_2 \cdot q = 3^2 \cdot 3 = 3^3;\ \ a_4 = 3^4;\ \ a_5 = 3^5$ итн. Бараната прогресија е

$$3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5, \ldots,\ 3^n, \ldots \quad n \in \mathbb{N}.$$

В Ако $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ се членови на геометриска прогресија, тогаш од дефиницијата не геометриска прогресија следува

$a_2 = a_1 \cdot q;\qquad a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q^2;\qquad a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^3; \ldots\ldots\ldots;\qquad a_n = a_{n-1} \cdot q$, т.е.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Со оваа формула се пресметува n-тиот член на геометриската прогресија. Нејзината точност ќе ја докажеме со методот на математичка индукција.

Соīледај īо доказоīт:

1) За $n = 1$ и $n = 2$ формулата е точна, т.е. $a_1 = a_1 q^0$ и $a_2 = a_1 q^1$.

2) Да претпоставиме дека таа е точна за $n = k$, т.е. $a_k = a_1 q^{k-1}$.

3) За $n = k + 1$ имаме:

$$a_{k+1} = a_k q = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1+1} = a_1 q^k,$$

а тоа значи дека дадената формула важи за секој природен број n.

Г Геометриската прогресија $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1}, \ldots$ монотоно расте, т.е. $a_n < a_{n+1}$ за секој $n \in \mathbb{N}$ ако:

$$1)\ a_1 > 0 \text{ и } q > 1 \qquad \text{или} \qquad 2)\ a_1 < 0 \text{ и } 0 < q < 1.$$

На пример, $1,\ 3,\ 9,\ 27, \ldots\ \ (a_1 = 1,\ q = 3)$ или $-2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}, \ldots\ \ \left(a_1 = -2,\ q = \frac{1}{2}\right)$.

Геометриската прогресија $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1}, \ldots$ монотоно опаѓа, т.е. $a_n > a_{n+1}$ за секој $n \in \mathbb{N}$ ако:

$$1)\ a_1 > 0 \text{ и } 0 < q < 1 \qquad \text{или} \qquad 2)\ a_1 < 0 \text{ и } q > 1.$$

На пример, $1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{25}, \ldots\ \left(a_1 = 1,\ q = \frac{1}{5}\right)$ или $-1,\ -2,\ -4,\ -8, \ldots\ \ (a_1 = -1,\ q = 2)$.

Воочи дека кај секоја од овие низи количникот q е позитивен број и секоја низа е монотона (растечка или опаднувачка).

3 Дадени се геометриските прогресии $(i)\ 1, -5, 25, -125,...$ и $(ii)\ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16},...$

За секоја од нив одреди: а) количникот q; б) дали низата е монотона;

в) како монотоноста на низата зависи од знакот на количникот q?

Согледај го одговорот:

а) $(i)\ q=-5<0,\quad (ii)\ q=-\frac{1}{2}<0$; б) Ниту една од низите не е монотона;

в) геометриската низа е монотона при $q>0$, а не е монотона при $q<0$.

4 Одреди го членот a_n во геометриската прогресија ако:

а) $a_1=2,\ q=-\frac{1}{2},\ n=7$; б) $a_1=1,\ q=-\frac{2}{3},\ n=5$; в) $a=-\frac{2}{3},\ q=\frac{3}{2},\ n=6.$

Согледај го решението:

а) $a_7=a_1\cdot q^6=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^6=2\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{32}$; б) $a_5=a_1\cdot q^4=1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}.$

5 Пресметај ги a_1 и q на геометриската прогресија ако:

а) $a_7=384,\ a_5=48$; б) $a_8=\frac{27}{4},\ a_3=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}.$

Согледај го решението:

а) Од $a_7=a_1\cdot q^6$ и $a_7=384$ следува $a_1\cdot q^6=384$. Од $a_5=a_1\cdot q^4$ и $a_5=48$ следува $a_1\cdot q^4=48$. Ако овие две равенства ги поделиме, добиваме:

$$\frac{a_1q^6}{a_1q^4}=\frac{384}{48},\text{ т.е. } q^2=8,\text{ од каде што } q=\pm2\sqrt{2}.$$

Од втората равенка имаме $a_1=\frac{48}{q^4}=\frac{48}{\left(2\sqrt{2}\right)^4}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}.$

Бидејќи $q=\pm2\sqrt{2}$, задачата има две решенија, т.е. постојат две такви низи, и тоа:

$$(i)\ \ a_1=\frac{3}{4},\ q=2\sqrt{2}\quad\text{и}\quad(ii)\ \ a_1=\frac{3}{4},\ q=-2\sqrt{2}.$$

6 Напиши неколку членови на геометриската прогресија ако:

а) $a_7+a_5=160,\ a_6+a_4=-80$; б) $a_4-a_2=18,\ a_5-a_3=36$; в) $a_2+a_5=78,\ a_3-a_2=13.$

Согледај го решението:

а) Од условот на задачата следува системот $\begin{cases}a_1q^6+a_1q^4=160\\ a_1q^5+a_1q^3=-80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1q^4\left(q^2+1\right)=160\\ a_1q^3\left(q^2+1\right)=-80.\end{cases}$

Со делење на равенките од последниот систем добиваме $q=-2$. Соодветната вредност на првиот член е $a_1=\frac{160}{2^4\left(2^2+1\right)}=2$, па бараната прогресија е $2,\ -4,\ 8,\ -16,\ 32,\ -64,...$

7 Нека $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_{15}$ е произволна геометриска прогресија. Докажи дека броевите $A_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, $A_2 = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ и $A_3 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}$ образуваат нова геометриска прогресија.

Согледај го доказот:

Според дефиницијата за геометриска прогресија треба да докажеме дека $\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2}$. За таа цел имаме

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5} = \frac{a_1 q^5 + a_1 q^6 + a_1 q^7 + a_1 q^8 + a_1 q^9}{a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4} = \frac{a_1 q^5 \left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)}{a_1 \left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)} = q^5$$ и

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{a_1 q^{10} \left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)}{a_1 q^5 \left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)} = q^5.$$ Оттука следува дека е точно тврдењето $\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2}$.

8 Ако броевите a, b и c образуваат геометриска прогресија, тогаш важи идентитетот $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$. Докажи.

9 Меѓу броевите 5 и 160 вметни (интерполирај) четири броеви коишто заедно со дадените образуваат геометриска прогресија.

Согледај го решението:

Познати се $a_1 = 5$ и $a_6 = 160$, па според формулата $a_n = a_1 q^{n-1}$ имаме $a_6 = a_1 q^5$ или $160 = 5 \cdot q^5$, од каде што $q = 2$. Бараната прогресија е $5,\ 10,\ 20,\ 40,\ 80,\ 160$.

10 Меѓу броевите 3 и 192 вметни пет броеви кои заедно со дадените образуваат геометриска прогресија.

11 Одреди четири броеви од кои првите три образуваат геометриска прогресија, а последните три аритметичка прогресија, ако збирот на крајните членови е 80, а збирот на средните членови е 60.

Согледај го решението:

Бараните броеви ги означуваме со: $a,\ aq,\ aq^2,\ a_4$, при што $a_4 = aq^2 + \underbrace{aq^2 - aq}_{d}$. Од условот на задачата имаме:

$$\begin{aligned} a + 2aq^2 - aq &= 80 \\ aq + aq^2 &= 60 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} a\left(2q^2 - q + 1\right) &= 80 \\ a\left(q^2 + q - 1\right) &= 60. \end{aligned}$$ Со делење на равенките имаме

$$\frac{2q^2 - q + 1}{q^2 + q} = \frac{80}{60},$$ од каде што се добива равенката $2q^2 - 7q + 3 = 0$, чии решенија се $q = 3$ или $q' = \frac{1}{2}$.

Соодветните вредности за првиот член се $a_1 = 5$ или $a_1' = 80$. Значи, задачата има две решенија, (i) 5, 15, 45, 75 или (ii) 80, 40, 20, 0.

12 Дадена е геометриска прогресија од четири члена. Ако членовите на таа прогресија соодветно се зголемат за 2, 4, 5, 4 се добива аритметичка прогресија. Одреди ја геометриската прогресија.

Задачи:

1. Провери која од дадените низи е геометриска прогресија:

а) $2, \ -4, \ 8, \ -16, \ 32, \ldots$ б) $3, \ 6, \ 12, \ 24, \ 48, \ldots$ в) $8, \ 4, \ 1, \ldots$

г) $-1, \ -\frac{1}{3}, \ -\frac{1}{9}, \ldots$ д) $\frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{5}{2}, \ \frac{7}{2}, \ldots$ ѓ) $-7, \ -5, \ -3, \ -1, \ 1, \ldots$

Напиши неколку членови на геометриската прогресија ако $(2-4)$:

2. а) $a_1 = 3, \ q = -2;$ б) $a_1 = -2, \ q = 3;$ в) $a_1 = 8, \ q = -\frac{1}{2}.$ г) $a_1 = 18, \ q = \frac{1}{3}.$

3. а) $a_1 = 3, \ a_2 = 9;$ б) $a_1 = 5, \ a_2 = \frac{10}{3}.$

4. а) $a_2 = 8, \ q = -4;$ б) $a_2 = 1, \ q = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

5. Првите три члена на една геометриска прогресија се 16, 8 и 4. Одреди го петтиот член.

6. Одреди ги количникот, десеттиот и n – тиот член на геометриската прогресија:

а) $2, \ 6, \ 18, \ldots;$ б) $192, \ 96, \ 48, \ldots;$ в) $3, \ -6, \ 12, \ldots;$

г) $3, \ -\frac{3}{2}, \ \frac{3}{4}, \ldots;$ д) $-2, \ -6, \ -18, \ldots;$ ѓ) $-1, \ -\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{4}, \ldots$

7. Одреди ја геометриската прогресија во којашто третиот член е 4, а десеттиот 512.

8. Бројот на бактериите во млекото се удвојува на секои три часа. Колку пати ќе се зголеми бројот на бактериите по 24 часа?

5 ЗБИР НА ПРВИТЕ n ЧЛЕНОВИ НА ГЕОМЕТРИСКАТА ПРОГРЕСИЈА

Потсети се!

- Нека a_1 и a_2 се позитивни реални броеви. Тогаш бројот $\sqrt{a_1 \cdot a_2}$ се вика геометриска средина на броевите a_1 и a_2.
- Одреди ја геометриската средина на броевите: а) 3 и 27; б) $1+\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}-1$.
- За позитивните реални броеви $a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots, a_n$ геометриска средина е бројот $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$.
- n – тиот член на геометриската прогресија се пресметува со формулата $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
- $1+q^2+q^4 = \left(1+q^2\right)^2 - q^2 = \left(1+q^2+q\right)\left(1+q^2-q\right).$

А Ако ги разгледуваме само првите n – членови на дадена геометриска прогресија (a_n), тогаш за $a_1, \ a_2, \ldots, \ a_n$ ќе велиме дека е конечна геометриска прогресија, или геометриска прогресија со конечен број члеови. Нека $a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots, \ a_{n-2}, \ a_{n-1}, \ a_n$ е геометриска прогресија со конечен број членови. И овде, за членовите: a_2 и a_{n-1}, a_3 и $a_{n-2}, \ldots, \ a_k$ и $a_{n-(k-1)}$ чиј збир на индекси е $n+1$ велиме дека се еднакво оддалечени, соодветно, од крајните членови a_1 и a_n.

На пример, во геометриската прогресија $\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32$ членовите $\frac{1}{2}$ и 16, 1 и 8, 2 и 4 се еднакво оддалечени од крајните членови $\frac{1}{4}$ и 32.

Воочи дека $\frac{1}{2}\cdot 16 = 1\cdot 8 = 2\cdot 4 = \frac{1}{4}\cdot 32$.

Ова својство важи за која било геометриска прогресија и е искажано со следнава

Теорема. Во геометриската прогресија со конечен број членови производот на секои два члена што се еднакво оддалечени од крајните членови е еднаков на производот на крајните члена, т.е.

$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot a_n, \qquad 2 \le k \le n.$$

Доказ. Бидејќи $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ и $a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot q^{n-k}$, со множење на соодветните страни на овие равенства добиваме

$$a_k \cdot a_{n-(k-1)} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q^{n-k} = a_1 \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_n} = a_1 \cdot a_n.$$

Дадена е геометриската прогресија 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.

Воочи дека: $4^2 = 2\cdot 8$, $8^2 = 4\cdot 16$, $16^2 = 8\cdot 32$, $32^2 = 16\cdot 64$ итн. Ова својство на геометриската прогресија ќе го искажеме со следнава

Теорема. Секој член на геометриската прогресија $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, освен крајните е геометриска средина од својот претходник и својот следбеник.

Доказ. Нека a_{k-1}, a_k и a_{k+1} се три последователни члена на геометриската прогресија $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Тогаш, според дефиницијата за геометриска прогресија имаме:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k}, \text{ од каде што } a_k^{\,2} = a_{k-1}\cdot a_{k+1}, \qquad k = 2,3,\dots,n-1,$$

што требаше да се докаже. Името геометриска прогресија потекнува токму од ова својство.

Според претходната теорема, во геометриската прогресија $64, 32, 16, 8, 4, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ бројот 4 е геометриска средина од неговите соседни членови 8 и 2, т.е. $4^2 = 8\cdot 2$.

Запиши го бројот 4 како геометриска средина од други два члена на дадената низа.

Воочи, $4^2 = 16\cdot 1$, $4^2 = 32\cdot\frac{1}{2}$, $4^2 = 64\cdot\frac{1}{4}$, при што: 16 и 1, 32 и $\frac{1}{2}$, 64 и $\frac{1}{4}$ се членови во прогресијата што се еднакво оддалечени од членот 4. Ова својство важи за која било геометриска прогресија и ќе го искажеме со следнава

Теорема. Секој внатрешен член на геометриската прогресија $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ е геометриска средина на двата члена во низата што се еднакво оддалечени од него.

Доказ. Членовите a_{k-r} и a_{k+r} $(1 \le r < k,\ k < n)$ се еднакво оддалечени од членот a_k. Од дефиницијата за геометриска прогресија следува $a_{k+r} = a_k \cdot q^r$, т.е. $a_k = \frac{a_{k+r}}{q^r}$. Од друга страна $a_k = a_{k-r} \cdot q^r$, па со множење на последните две равенства добиваме $a_k^2 = a_{k-r} \cdot a_{k+r}$, што и требаше да се докаже.

На сличен начин се докажува и следната теорема.

Теорема. Во геометриската прогресија $a_1,\ a_2, \dots, a_k,\ \ a_{k+1},\ \ a_{k+2}, \dots, a_{2k+1}$ со непарен број членови, средниот член a_{k+1} е еднаков на обопштената геометриска средина од останатите членови на прогресијата, т.е.

$$a_{k+1}^{2k} = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+2} \cdot \dots \cdot a_{2k+1}.$$

Обиди се оваа теорема да ја докажеш сам.

Ако теоремата ја примениме на геометриската прогресија $\frac{1}{4},\ \ \frac{1}{2},\ \ 1,\ \boxed{2,}\ \ 4,\ \ 8,\ \ 16$ ќе имаме:

$$2^6 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \quad \text{или} \quad \sqrt[6]{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16} = 2.$$

Б **1** Одреди го збирот S_n на првите n членови на геометриската прогресија $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_n, \dots$

Соīледај īо решението:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, т.е. $S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}$. Ако двете страни на ова равенство ги помножиме со количникот q, имаме $q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$, а ако од ова равенство го одземеме претходното равенство добиваме $q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$, т.е.

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},\ q \ne 1.$$

Со добиената формула се пресметува збирот на првите n членови на геометриската прогресија, а со методот на математичка индукција лесно се докажува дека формулата важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

2 Одреди го збирот на првите десет члена на геометриската прогресија $1,\ 2,\ 4,\ 8, \dots$

Соīледај īо решението:

Овде $a_1 = 1,\ \ q = 2$ и $n = 10$, па $S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023.$

3 Одреди го збирот на првите девет члена на геометриската прогресија $3,\ 6,\ 12, \dots$

4 Одреди ги првиот и седмиот член на геометриската прогресија чиј количник е 2, а збирот на првите седум члена е 635.

Решение:

Познати се $q=2$, $n=7$ и $S_7=635$. Од формулата за S_7 имаме $S_7=a_1\cdot\frac{q^7-1}{q-1}$, т.е. $635=a_1\cdot\frac{2^7-1}{2-1}$, од каде што $a_1=5$.

Од $a_7=a_1\cdot q^6$ добиваме $a_7=5\cdot 2^6$, т.е. $a_7=320$.

5 Во една геометриска прогресија $q=3$ и $S_{10}=59048$. Одреди го a_{10}.

6 Одреди ги n и S_n во геометриската прогресија ако:

а) $a_1=3,\ q=-2,\ a_n=-1536$; б) $a_1=\frac{1}{64},\ q=-\frac{4}{3},\ a_n=-\frac{16}{243}$.

Согледај го решението:

а) Од $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ имаме $-1536=3\cdot(-2)^{n-1}$, т.е. $(-2)^{n-1}=(-2)^9$, од каде што $n=10$, па $S_{10}=-1023$.

7 Збирот на првите четири члена на една прогресија е 15, а збирот на следните четири е 240. Која е таа прогресија?

Согледај го решението:

Од условот на задачата имаме

$$\begin{cases}S_4=15\\ S_8-S_4=240\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3=15\\ a_1q^4+a_1q^5+a_1q^6+a_1q^7=240\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3=15\\ q^4\underbrace{\left(a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3\right)}_{15}=240,\end{cases}$$ или $q^4\cdot 15=240$,

или $q^4=16$, т.е. $q=\pm 2$. Следствено, за $q=2$, од $S_4=a_1\frac{q^4-1}{q-1}$ имаме $15=a_1\frac{2^4-1}{2-1}$, т.е. $a_1=1$, па бараната прогресија е $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128$.

Ако $q=-2$, $a_1=-3$, па прогресијата е $-3,\ 6,\ -12,\ 24, ...,\ 384$.

8 Во геометриската прогресија со непарен број членови првиот член е 7, средниот е 56, а збирот на сите членови е 889. Одреди го количникот.

Согледај го решението:

Од $a_{ср}^2=a_1\cdot a_n$ следува $a_n=\frac{a_{ср}^2}{a_1}=\frac{56^2}{7}$, т.е. $a_n=448$. Ако двете страни на равенката $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ ги помножиме со $q\ (q\neq 0)$, добиваме $a_nq=a_1q^n$. Овој резултат ќе го искористиме во формулата за S_n, т.е. $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1}=\frac{a_nq-a_1}{q-1}$. Ако во равенството $S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}$ ги замениме вредностите за S_n, a_n и a_1 добиваме

$$889=\frac{448q-7}{q-1},$$ од каде што $q=2$.

9 Збирот на првите три члена на геометриската прогресија е 21, а збирот на нивните квадрати е 189. Одреди ги првиот член и количникот на прогресијата.

Согледај го решението:

Според условот на задачата го формираме системот

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 21 \\ a_1^2 + a_1^2q^2 + a_1^2q^4 = 189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\left(1+q+q^2\right) = 21 \\ a_1^2\left(1+q^2+q^4\right) = 189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{21}{1+q+q^2} \\ a_1^2\left(1+q^2+q^4\right) = 189. \end{cases}$$

Со соодветна замена во втората равенка добиваме

$\dfrac{21^2}{\left(1+q+q^2\right)^2}\left(1+q^2+q\right)\left(1+q^2-q\right) = 189$, т.е. $\dfrac{1+q^2-q}{1+q+q^2} = \dfrac{3}{7}$, од каде што ја добиваме равенката

$2q^2 - 5q + 2 = 0$ чии решенија се $q = \dfrac{1}{2}$ или $q' = 2$. Следствено, $a_1 = 12$, $a_1' = 3$.

10 Збирот на првите три члена на геометриска прогресија е 91. Ако кон тие членови додадеме последователно $25, 27$ и 1, ќе добиеме три броеви кои образуваат аритметичка прогресија. Одреди го седмиот член на геометриската прогресија.

Согледај го решението:

Нека a_1, a_1q и a_1q^2 се првите три члена на геометриската прогресија. Тогаш $a_1 + 25$, $a_1q + 27$ и $a_1q^2 + 1$ се членови на аритметичката прогресија. Според условот на задачата имаме:

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 91 \\ a_1q + 27 = \dfrac{a_1 + 25 + a_1q^2 + 1}{2} \end{cases}$$

(*Вториот член на аритметичката прогресија е аритметичка средина од претходникот и следбеникот*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1\left(1+q+q^2\right) = 91 \\ a_1\left(1-2q+q^2\right) = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{91}{1+q+q^2} \\ \dfrac{91}{1+q+q^2}\left(1-2q+q^2\right) = 28. \end{cases}$$

По средувањето на втората равенка во овој систем ја добиваме равенката $3q^2 - 10q + 3 = 0$, чии

решенија се $q_1 = 3$ или $q_2 = \dfrac{1}{3}$. Значи, постојат две такви прогресии, и тоа:

$$a_1 = \frac{91}{1+3+9} = \frac{91}{13} = 7 \quad \text{и} \quad a_1' = \frac{91}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = \frac{91}{\frac{13}{9}} = \frac{9\cdot 91}{13} = 63.$$

Според тоа, $a_7 = a_1 \cdot q_1^6 = 7\cdot 3^6 = 5103$ или $a_7' = a_1' \cdot q_2^6 = 63\cdot\dfrac{1}{3^6} = \dfrac{7}{3^4} = \dfrac{7}{81}$.

11 Од една бактерија со делење се добиваат две. Делењето се врши секој час. Колку бактерии ќе се развијат за 10 часа, а колку за 24 часа, под услов делењето да не се наруши?

Согледај го решението:

Развивањето на бактериите се врши по законот за геометриска прогресија во која првиот член е $a_1 = 1$ (на почетокот е само една бактерија), а количникот е $q = 2$ (секој нов член е два пати поголем од претходниот). По 10 часа вкупниот број на бактерии ќе биде

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1024.$$

На сличен начин добиваме $S_{24} = 2^{24} - 1$.

12 Реши ја равенката: а) $3 + 6 + 12 + \ldots + x = 189$; б) $1 - 3 + 9 - 27 + \ldots + x = 4921$.

Согледај го решението:

а) Воочи дека собироците на левата страна во равенката се, всушност, членови на геометриска прогресија во која $a_1 = 3$, $q = 2$, $a_n = x$ и $S_n = 189$.

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$189 = 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$63 = 2^n - 1$$

$$2^n = 64$$

$$n = 6.$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

$$189 = \frac{x \cdot 2 - 3}{2 - 1}, \; x = 96$$

или $x = a_6 = a_1 q^5 = 3 \cdot 2^5 = 96$.

Воочи!

Од $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ следува $a_1\left(q^n - 1\right) = (q - 1)S_n$, т.е. $q^n - 1 = (q - 1)\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right)$.

Ако означиме $q = \frac{a}{b}$, $(b \neq 0)$ добиваме

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Задачи:

1. Одреди го збирот на првите седум членови на прогресијата $2, \; -4, \; 8, \; -16, \ldots$

2. Пресметај ги q и S_n во геометриската прогресија ако:

   а) $a_1 = 7$, $a_6 = \frac{1701}{32}$; б) $a_1 = -16$, $a_{11} = -\frac{1}{64}$.

(3) Пресметај ги n и a_n во геометриската прогресија ако:

а) $a_1 = 7,\ \ q = 2,\ \ S_n = 1785;$ б) $a_1 = 2,\ \ q = -3,\ \ S_n = -364.$

(4) Пресметај ги q и n во геометриската прогресија ако:

а) $a_1 = 2,\ \ a_n = 2048,\ \ S_n = 2730;$ б) $a_1 = -9,\ \ a_n = -1125,\ \ S_n = -1404.$

(5) Збирот на првите пет члена на една геометриска прогресија е 93, а збирот на следните пет е 2976. Одреди ја прогресијата.

(6) Во една геометриска прогресија со непарен број членови првиот член е 3, средниот член е 48, а збирот на сите членови е 1533. Колку членови има низата?

(7) Збирот на три броја кои образуваат геометриска прогресија е 26, а збирот од нивните квадрати е 364. Кои се тие броеви?

(8) Некој човек продавал коњ на следниот начин: за првиот клинец од потковицата барал еден денар, за вториот два денари, за третиот 4 денари итн. Вкупно имало 32 клинци. Колкава била цената на коњот?

(9) Првиот член на една геометриска прогресија е корен на равенката $\sqrt[3]{a^{2x+3}} : \sqrt[4]{a^{x+1}} = a^{\frac{x-3}{2}}$. Како гласи прогресијата, ако збирот на првиот и четвртиот член е седум пати поголем од збирот на третиот и четвртиот член?

(10) Пресметај го збирот $1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$.

6 ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА НИЗА

Потсети се!

- Ако $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$, тогаш множеството од сите реални броеви меѓу a и b се вика ***интервал***, а броевите a и b – ***краеви*** на тој интервал.
- Постојат отворени, затворени и полуотворени интервали: (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$.
- На бројна оска претстави го интервалот:

а) $(-2,1)$; б) $[-2,1)$; в) $(-2,1]$; г) $[-2,1]$; д) $(-\infty,1)$; ѓ) $(-\infty,1]$; е) $(1,+\infty)$; ж) $[1,+\infty)$.

- Запиши го пократко интервалот:

а) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ 1 \le x < 3\}$; б) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < x \le 10\}$; в) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge -1\}$; г) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < 5\}$.

- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a;$ $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a.$

А ***Отворен интервал*** (a,b) е множеството од сите реални броеви x за кои важи $a < x < b$, т.е.

$$(a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}.$$

- Реалниот број $\dfrac{a+b}{2}$ се вика ***средина*** на интервалот (a,b), црт. 1.

црт. 1

1 Дадениот интервал претстави го на бројна оска и одреди ја неговата средина:

а) $(0,1)$; б) $(-4,0)$; в) $(-2,2)$; г) $\left(-\frac{1}{2},4\right)$; д) $(-5,-3)$.

Ако c е даден реален број и ε е даден позитивен реален број, тогаш интервалот $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ се вика ε - ***околина*** на бројот c, а ε се вика радиус на таа околина, црт. 2.

- Кои реални броеви x припаѓаат на ε – околината на бројот c?

црт. 2

- Очигледно е дека тоа се броевите за кои важи $c-\varepsilon < x < c+\varepsilon$, или ако се одземе c, т.е. $-\varepsilon < x-c < \varepsilon$, што може да се запише и на следниот начин $|x-c| < \varepsilon$.

Б **4** Дадена е низата со општ член $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, т.е. низата: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ (црт. 3).

црт. 3

Членовите на оваа низа со давање вредности за n од $\mathbb{N}$ се наизменично час помали, час поголеми од нула. Забележуваме дека тие се групираат (натрупуваат) околу нулата, и тоа: членовите со непарен индекс се доближуваат од лево, а оние со парен индекс од десно.

- За точката 0 се вели дека е *точка на натрупување* на дадената низа. Таа не е член на низата.

- Воочи дека оваа низа е ограничена, т.е. $|a_n| \leq 1$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција. Точката a се вика ***точка на натрупување*** на низата (a_n), ако во секоја нејзина ε – околина има безброј членови на низата, т.е. ако важи

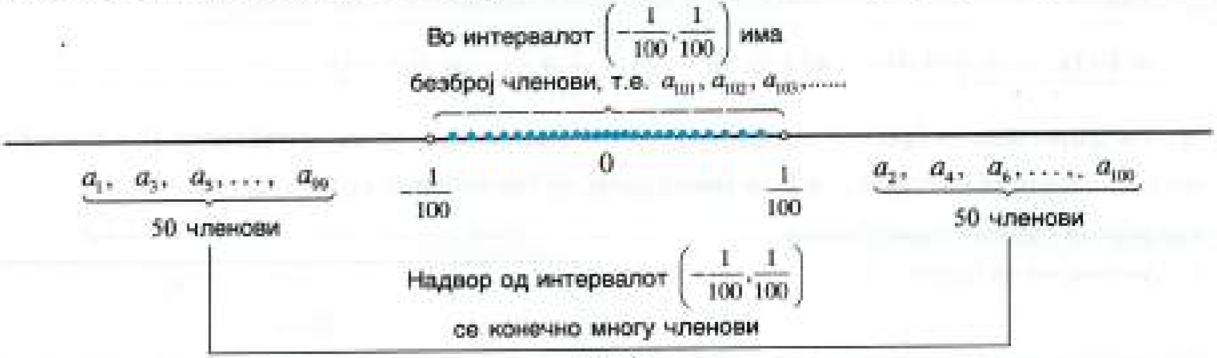
$$|a_n - a| < \varepsilon$$

за безброј вредности на n.

Надвор од интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ може да има бесконечно многу или конечно многу членови на низата.

Точката 0 е точка на натрупување на низата $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, бидејќи во произволна нејзина ε – околина има безброј членови на низата. Така на пример, ако $\varepsilon = 10^{-2}$, тогаш во интервалот $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon) = \left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ припаѓаат членовите $a_{101} = -\frac{1}{101}$, $a_{102} = \frac{1}{102}$, $a_{103}, \ldots$ итн. кои се бесконечно многу.

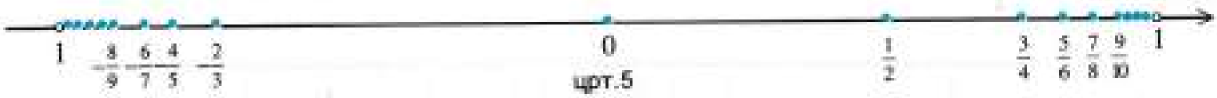
Надвор од овој интервал има конечен број членови од низата, а тие се $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots,\ a_{100}$ (црт. 4).



црт. 4

Една низа може да има повеќе точки на натрупување. Така на пример, низата со општ член:

а) $a_n=(-1)^n\frac{n-1}{n}$, т.е. $0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ -\frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\dots$ има две точки на натрупување: -1 и 1 (црт. 5).



црт.5

За произволно $\varepsilon>0$ во интервалот $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$ припаѓаат бесконечно многу членови на низата со парни индекси n, а во интервалот $(-1-\varepsilon,\ -1+\varepsilon)$ бесконечно многу членови со непарни индекси n. Поради тоа $+1$ и -1 се точки на натрупување на низата. Тие не се нејзини членови. Оваа низа е, исто така, ограничена, т.е. $|a_n|<1$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

б) $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$, т.е. $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\dots$, има три точки на натрупување: $1,\ 0$ и -1. И оваа низа е ограничена, т.е. $|a_n|\le 1$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

На прашањето дали една низа има или нема точка на натрупување одговор дава теоремата на Болцано - Вајерштрас:

Теорема. Секоја ограничена низа има барем една точка на натрупување.

Оваа теорема нема да ја докажеме.

Низите чии општи членови се: а) $a_n=n,\ n\in\mathbb{N}$; б) $a_n=-n,\ n\in\mathbb{N}$; в) $a_n=2n+1,\ n\in\mathbb{N}$; г) $a_n=n^2,\ n\in\mathbb{N}$ немаат точки на натрупување. Воочи дека секоја од овие низи е неограничена.

Во математиката, од посебна, важност се низите (a_n) од реални броеви со следново својство: Постои реален број a таков што во секоја околина на a има безброј многу членови од низата (a_n), а надвор од таа околина има само конечно многу. Во тој случја a велиме дека е гранична вредност на низата (a_n).

B

Дефиниција. Бројот a се вика ***гранична вредност*** или ***граница*** на низата (a_n), ако за секој произволно избран број $\varepsilon>0$ може да се определи број $n_0(\varepsilon)$, таков што за сите членови на низата (a_n) со индекс $n>n_0(\varepsilon)$ да важи

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

Тоа го запишуваме $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ или $a_n\to a,\ n\to\infty$.

а читаме: "лимес од a_n кога n се стреми кон бесконечност е еднаков на a" или "a_n се стреми кон a кога n се стреми кон бесконечност.

Од дефиницијата произлегува дека ако низата има гранична вредност, скоро сите нејзини членови, т.е. сите оние членови почнувајќи од $a_{n_0+1},\ a_{n_0+2},\ a_{n_0+3},...,a_{\infty}$ се наоѓаат во внатрешноста на интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, а само конечен број членови (првите n_0 на број) $a_1,\ a_2,......,\ a_{n_0}$ се надвор од овој интервал. Бројот a е истовремено и точка на натрупување на низата.

5 Користејќи ја дефиницијата за граница на низа докажи дека низата $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ има граница еднаква на нула.

Согледај го решението:

Низата со општ член $a_n = \frac{1}{n^2}$ гласи: $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{36},\ \frac{1}{49},...$ Нека ε е произволен цел позитивен број. Го разгледуваме неравенството $|a_n - a| = |\frac{1}{n^2} - 0| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$ кое е исполнето за $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Значи, за произволно $\varepsilon > 0$ постои природен број $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, таков што да важи неравенството $|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon$, т.е. дадената низа има граница еднаква на нула.

- (i) Ако $\varepsilon = 0{,}1$ тогаш имаме $n > \sqrt{10}$, па најмалиот природен број кој го задоволува последното неравенство е 4. Тоа значи дека почнувајќи од четвртиот член, сите останати членови на низата се наоѓаат во ε – околината на точката $a = 0$, односно во интервалот $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$.

Во овој случај $n_0(\varepsilon) = 3$, т.е. само првите три члена се надвор од тој интервал (црт. 6) .

црт. 6

(ii) Ако избереме $\varepsilon = \frac{1}{40}$, тогаш сите членови на низата, почнувајќи од седмиот го задоволуваат неравенството $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{40}$. Во овој случај $n_0(\varepsilon) = 6$.

- (iii) Ако $\varepsilon = 0{,}01$, тогаш $n_0(\varepsilon) = 10$.
- (iv) Ако $\varepsilon = 0{,}001$, тогаш $n_0(\varepsilon) = 31$ итн.

6 Користејќи ја дефиницијата за граница на низа, докажи дека низата со општ член $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ има граница еднаква на 2.

7 Докажи дека низата $0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;.......;0{,}33........3$ има граница $a = \frac{1}{3}$.

Согледај го решението:

Разликата $|a_n - a|$ во овој случај е $\left|0,33.......3-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{33.......3}{10^n}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{99.......9-10^n}{3\cdot 10^n}\right| = \left|\frac{-1}{3\cdot 10^n}\right| = \frac{1}{3\cdot 10^n}$,

па за секој $\varepsilon > 0$ од $\frac{1}{3\cdot 10^n} < \varepsilon$ следува $n > -\log 3\varepsilon$.

(i) Ако е $-\log 3\varepsilon > 0$ за $n_0(\varepsilon)$ се зема најголемиот природен број што не е поголем од $-\log 3\varepsilon$.

(ii) Ако е $-\log 3\varepsilon < 0$, тогаш $n_0 = 1$.

Значи, за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број $n_0(\varepsilon)$, таков што

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|0,33.........3-\frac{1}{3}\right| < \varepsilon,$$

што и требаше да се докаже.

Ако $\varepsilon = 0,0001$, тогаш $n_0(\varepsilon) = 3$, т.е. само првите три члена на низата се надвор од интервалот $\left(\frac{1}{3}-\varepsilon, \frac{1}{3}+\varepsilon\right)$, а сите останати членови се во тој интервал.

Задачи:

1. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа докажи дека: а) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{n+1} = 2$.

2. Докажи дека $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{3n-2} = \frac{2}{3}$, а потоа најди за кои вредности на n е исполнето неравенството $\left|a_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, ако: а) $\varepsilon = 0,01$; б) $\varepsilon = 10^{-4}$.

3. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа докажи дека е точно равенството:

   а) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2n^2-1} = \frac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2-2}{n^2+2} = 3$.

   Потоа за секоја низа одреди колку членови од низата се наоѓаат надвор од ε – околината на точката a, каде што a е граница на соодветната низа ако е $\varepsilon = 0,01$.

4. Дадена е низата: а) $0,1;\ 0,11;\ 0,111;.......$ б) $0,24;\ 0,2424;\ 0,242424;........$

   Одреди $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ и вредноста на n за којашто е исполнето неравенството $\left|a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right| \le 0,01$.

5. Дадена е низата со општ член $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

   а) Напиши ги првите шест члена на низата; б) Претстави ги тие членови на бројна оска.

   в) Провери дали низата е монотона. г) Провери дали низата е ограничена.

   д) За која вредност на n ќе биде точно неравенството $|a_n - a| < 0,001$?

   ѓ) На што е еднаква границата $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$?

7 КОНВЕРГЕНТНИ И ДИВЕРГЕНТНИ НИЗИ

Потсети се!

- За множествата A и B велиме дека се дисјунктни множества, ако $A \cap B = \varnothing$.

А

Дефиниција. Низа која има гранична вредност се вика ***конвергентна низа***.

Ако a е гранична вредност на низата (a_n), тогаш велиме дека низата конвергира кон a или се стреми кон a.

Дефиниција. Низа која нема гранична вредност се вика ***дивергентна низа***.

Да се испита природата на една низа, значи да се утврди дали таа е конвергентна или не е, и ако е, да се одреди нејзината гранична вредност.

Б

Ќе разгледаме некои поважни својства на конвергентните низи.

Теорема 1. Ако (a_n) е конвергентна низа, тогаш нејзината граница е еднозначно определена.

Проследи го доказот:

Да претпоставиме дека конвергентната низа (a_n) има две гранични вредности и нека се тоа броевите a и b, $a \neq b$. Да избереме дисјунктни ε – околини на броевите a и b. На пример, ако $\varepsilon = \frac{|b-a|}{4}$, тогаш $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \varnothing$. Бидејќи a е граница, постои природен број n_0, таков што сите членови a_n, $n > n_0$ се во избраната ε – околина на a, па во избраната ε – околина на b има само конечно многу членови од низата. Заради тоа, b не е граница. Значи, ако низата има граница, тогаш таа граница е единствена.

Теорема 2. Секоја конвергентна низа е ограничена.

Согледај го доказот:

Нека е $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ една ε – околина на точката a. Ако сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, тогаш низата е ограничена.

Ако, пак, има членови на низата надвор од тој интервал, тогаш нивниот број е конечен. Еден од тие членови е најоддалечен од точката a. Ако неговото растојание од точката a го означиме со d и $\alpha = d+1$, тогаш интервалот $(a-\alpha, a+\alpha)$ ќе ги содржи сите членови на низата, а тоа значи дека низата е ограничена.

На пример, низата со општ член $a_n = \frac{n}{n+1}$ има гранична вредност 1, што значи е конвергентна.

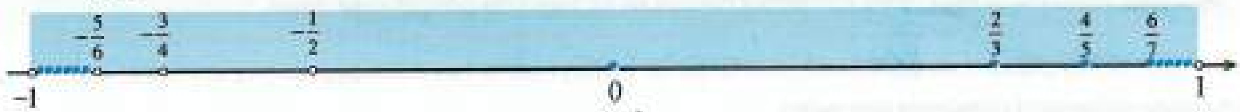
Сите членови на оваа низа припаѓаат на интервалот $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, па затоа е ограничена (црт. 1).

црт. 1

Обратното тврдење не важи, т.е. има ограничени низи што не се конвергентни. Така на пример, низата

$$-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ldots\ldots,(-1)^n\frac{n}{n+1},\ldots\ldots$$

е ограничена бидејќи сите нејзини членови припаѓаат на интервалот $(-1, 1)$. Оваа низа има две точки на натрупување, па не е конвергентна (црт. 2).



црт.2

Теорема 3. Секоја монотона и ограничена низа е конвергентна.

Ова својство нема да го докажеме, но ќе го илустрираме на конкретен пример.

На пример, членовите на низата $1;\ \ 1,4;\ \ 1,41;\ \ 1,414;$.......... се добиваат со продолжување на постапката на пресметување квадратен корен од 2 и тие постојано се зголемуваат, но остануваат помали од еден број, на пример $1,5$. Оваа низа има гранична вредност. Тоа е бројот $\sqrt{2}$.

1 Испитај дали низата со општ член $a_n=\frac{n-1}{n}$ е конвергентна.

Согледај го решението:

$a_n=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n},\ \ a_{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$. Бидејќи $1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}$ за секој $n\in\mathbb{N}$, заклучуваме дека низата монотоно расте. Од $0\le 1-\frac{1}{n}<1$ за секој $n\in\mathbb{N}$ следува дека низата е и ограничена, па според претходната теорема оваа низа е конвергентна.

2 Докажи дека низата со општ член $a_n=1+\frac{1}{n}$ е конвергентна.

3 Докажи дека низата со општ член $a_n=\frac{1}{n}$ е конвергентна и нејзината гранична вредност е нула.

Согледај го доказот:

Треба да докажеме дека $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Ако ја формираме разликата $|a_n-a|$, добиваме $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$.

Оваа разлика ќе биде помала од даден произволно мал позитивен број ε, ако е

$$\frac{1}{n}<\varepsilon, \text{ т.е. } n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Според тоа, за секој $n>n_0$, каде што n_0 е природен број поголем или еднаков на $\frac{1}{\varepsilon}$, важи

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Така на пример, ако $\varepsilon=10^{-2}$, тогаш за секој $n>n_0=\frac{1}{\varepsilon}=100$, $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<10^{-2}=\varepsilon$,

што значи дека членовите a_{101}, a_{102}, a_{103},....... од низата се наоѓаат во интервалот $\left(-\frac{1}{100},\frac{1}{100}\right)$, а само конечен број, т.е. првите 100 члена се надвор од тој интервал.

Ако, пак, $\varepsilon=10^{-7}$, тогаш за секој n, $n>n_0=\frac{1}{\varepsilon}=10^{-7}$, $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<10^{-7}=\varepsilon$.

Тоа значи дека само конечен број членови (првите $10\,000\,000$) се надвор од интервалот $\left(-10^{-7},10^{-7}\right)$, а бесконечно многу, т.е. сите останати членови се во тој интервал.

4 Докажи дека низата со општ член $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$ е конвергентна и нејзината гранична вредност е еднаква на нула.

5 Докажи дека низата со општ член $a_n=\frac{n}{n+1}$ е конвергентна и има гранична вредност 1.

Согледај го доказот:

Бидејќи $|a_n-a|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$, оваа разлика е помала од даден позитивен број ε кога $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, т.е. $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$. Според тоа, за секој $n>n_0$ е исполнето

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon, \text{ т.е. } \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Согледај дека: ако a е гранична вредност на низата (a_n), тогаш надвор од интервалот $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ може да има само конечно многу членови на низата, и тоа најмногу $n_0(\varepsilon)$, т.е. само членовите a_1, a_2,......,$a_{n_0(\varepsilon)}$, а тоа очигледно значи дека низата (a_n) мора да биде ограничена и да има само една точка на натрупување. И обратно: ако низата (a_n) е ограничена и ако a е единствена нејзина точка на натрупување, тогаш a е и нејзина гранична вредност.

Воочи дека:

– ако низата (a_n) е ограничена и има само една точка на натрупување, тогаш таа е конвергентна;
– ако низата (a_n) е ограничена и има барем две точки на натрупување, тогаш таа е дивергентна;
– ако низата (a_n) е неограничена, тогаш таа е дивергентна.

Така на пример, низата чиј општ член е:

а) $a_n=(-1)^n n$, т.е. низата $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\dots,(-1)^n n,\dots$ е дивергентна, бидејќи е неограничена.

б) $a_n=\frac{(-1)^n(n-1)}{n}$, т.е. низата $0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\dots$ е дивергентна, бидејќи има две точки на натрупување, -1 и 1.

Теорема 4. Ако низите (a_n) и (b_n) се конвергентни со иста гранична вредност a, тогаш и низата (c_n) со својството $a_n\le c_n\le b_n$ за секој $n\in\mathbb{N}$ е конвергентна и има иста гранична вредност a, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} c_n=a.$$

Согледај го решението:

Бидејќи низите (a_n) и (b_n) се конвергентни, за произволно избран позитивен број ε постојат природни броеви $n_1(\varepsilon)$ и $n_2(\varepsilon)$, такви што

$$|a_n-a|<\varepsilon \text{ за секој } n>n_1(\varepsilon),\ n\in\mathbb{N} \quad \text{и} \quad |b_n-a|<\varepsilon \text{ за секој } n>n_2(\varepsilon),\ n\in\mathbb{N}.$$

Ако $n_0(\varepsilon)=\max\left[n_1(\varepsilon),n_2(\varepsilon)\right]$, тогаш сите членови на низата (c_n) чиј индекс $n>n_0(\varepsilon)$ се наоѓаат во интервалот $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, т.е. $|c_n-a|<\varepsilon$ за секој $n>n_0(\varepsilon)$, $n\in\mathbb{N}$, а тоа значи дека

$$\lim_{n\to\infty} c_n=a.$$

Оваа теорема се вика ***теорема*** за ***сендвич*** - низа.

6 Определи ја границата на низата $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ споредувајќи ја со низите (0) и $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Согледај го решението:

Ако $(a_n)=(0)$, $(b_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ се конвергентни низи со иста гранична вредност 0, а $(c_n)=\left(\frac{1}{n^2}\right)$ е низа со својството $0\le\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{n}$ за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш според теоремата за сендвич - низа важи $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

Задачи:

1. Докажи дека низата со општ член $a_n=\frac{n}{n-1}$, $n=2,3,\dots$ е конвергентна.

2. Испитај ја конвергенцијата на низата со општ член: а) $a_n=(-1)^n\frac{2n+1}{n+1}$; б) $a_n=\frac{1-(-1)^n}{n+2}$.

3. Докажи дека низата со општ член $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}$ е конвергентна.

4. Нека $a_n=\frac{2n}{n+1}$, $b_n=\frac{2n+2}{n+1}$ и $c_n=\frac{2n}{n+1}$. Со примена на теорема за сендвич - низа докажи дека $\lim_{n\to\infty} c_n=2$.

5 Одреди: а) растечка; б) опаднувачка низа од рационални броеви, чија граница е 5.

6 Кои од следниве низи се конвергентни, а кои дивергентни:

а) $\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)$; б) $\left(n-(-1)^n\right)$; в) (a_n), $a_n=\begin{cases}1, \text{ за } n \text{ парен број}\\ \frac{1}{n}, \text{ за } n \text{ непарен број}\end{cases}$; г) $\left(5\left(-\frac{1}{n}\right)^n\right)$; д) $\left(\frac{2^n-1}{3^n-1}\right)$.

8 НЕКОИ КАРАКТЕРИСТИЧНИ НИЗИ

А Да ја разгледаме низата со општ член: а) $a_n=8n$; б) $a_n=1-n^2$; в) $a_n=(-3)^n$.

Согледај дека:

- а) Членовите на низата $8,\ 16,\ 24,\ 32,\ 40,...,800,...,\ 8000,...$ неограничено растат.

- Ако избереме колку и да било голем број $M>0$, секогаш може да се најде член од низата што е поголем од него. Така на пример, ако $M=4000$, тогаш за $n>n_0=500$ добиваме дека $a_n=8n>4000$. Значи, почнувајќи од $a_{501}=4008$ секој нареден член од низата е поголем од $M=4000$. За ваквата низа $(a_n)\equiv(8n)$ велиме дека е дивергентна и се стреми кон $+\infty$ кога $n\to\infty$.

Дефиниција. За низата (a_n) вèлиме дека ***се стреми*** кон $+\infty$, ако за секој реален број $M>0$ постои природен број n_0, таков што

$$n>n_0 \Rightarrow a_n>M.$$

Пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$.

- б) Членовите на низата $0,\ -3,\ -8,\ -15,\ -24,...,-9999,...,-999999,...$ неограничено опаѓаат.

- Ако избереме колку и да било мал број $M<0$, секогаш може да се најде член од низата што е помал од него. Така на пример, ако $M=-10000$, тогаш за $n>n_0=100$ добиваме дека $a_n=1-n^2<-10000$. Значи, почнувајќи од $a_{101}=-10200$ секој нареден член од низата е помал од избраниот број $M=-10000$. Оваа низа е, исто така, дивергентна и се стреми кон $-\infty$ кога $n\to\infty$.

Дефиниција. За низата (a_n) велиме дека ***се стреми*** кон $-\infty$, ако за секој реален број $M<0$ постои природен број n_0, таков што

$$n>n_0 \Rightarrow a_n<M.$$

Пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

- в) Членовите на низата $-3,\ 9,\ -27,\ 81,\ -243,...,6561,\ -19683,\ 59049,...$ или $-3,\ (-3)^2,\ (-3)^3,\ (-3)^4,\ (-3)^5,...,(-3)^8,\ (-3)^9,\ (-3)^{10},...$ неограничено растат по апсолутна вредност.

Ако избереме колку и да било голем број $M>0$, секогаш може да се најде член од низата што е по апсолутна вредност поголем од M. На пример, ако $M=6000$, тогаш за $n>n_0=7$ добиваме дека $|(-3)^n|>6000$.

Според тоа, почнувајќи од $a_8=6561$ секој нареден член од низата по апсолутна вредност е поголем од бројот $M=6000$.

Оваа низа (како и претходните две) е дивергентна и по апсолутна вредност се стреми кон ∞ кога $n\to\infty$.

Дефиниција. За низата (a_n) велиме дека ***неограничено расте по апсолутна вредност***, ако за секој реален број $M>0$ постои природен број n_0 така што

$$n>n_0 \Rightarrow |a_n|>M.$$

Пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

Низите чиишто членови неограничено растат се примери за т.н. ***бесконечно големи величини***. Наспроти нив, постојат низи чиишто гранични вредности се еднакви на 0, а нив ги викаме ***бесконечно мали величини*** или ***нула – низи***. Такви се, на пример, низите:

$$\left(\frac{2}{n}\right)=2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{6},\ldots; \qquad \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)=-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots;$$

$$\left(2^{-n}\right)=\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}\ldots$$

За нив имаме:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0;\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0;\ \lim\limits_{n\to\infty}2^{-n}=0$, т.е. за секоја од овие низи е $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Дефиниција. Низата (a_n) е ***нула – низа*** ако е $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, т.е. $|a_n|<\varepsilon$ за секој $n>n_0(\varepsilon)$.

Во математиката односот помеѓу бесконечно малите и бесконечно големите величини е од посебен интерес и е даден со следнава

Теорема. Нека (a_n) е низа таква што $a_n\neq 0$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

1°. Ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$. 2°. Ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$.

На пример, за низата $a_n=\frac{1}{n}$ имаме $a_n\to 0$ кога $n\to\infty$. Ако ја формираме низата $b_n=\frac{1}{a_n}$, добиваме дека $b_n=n\to\infty$ кога $n\to\infty$.

Б **1** Испитај ја конвергенцијата на низата (q^n), $q \in \mathbb{R}$ во зависност од бројот q.

Соѓледај ѓо решениешо:

Можни се три случаи, и тоа: 1^0. $|q|>1$; 2^0. $|q|<1$; 3^0. $|q|=1$.

1^0. Од $|q|>1$ следува $q>1$ или $q<-1$.

а) Ако $q>1$, тогаш од конкретни примери може да се заклучи дека $q^n \to +\infty$ кога $n \to \infty$. За да го докажеме ова тврдење, треба да покажеме дека за секој реален број $M>0$ постои природен број n_0, така што

$$n>n_0 \Rightarrow q^n > M.$$

Знаеме дека $q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+...+q+1)$. Заменувајќи го секој од n – те собироци во втората заграда со бројот 1, добиваме $q^n - 1 > (q-1)\underbrace{(1+1+1+...+1)}_{n\text{ единици}} = (q-1)\cdot n$, од каде што $q^n > (q-1)n+1$, а уште повеќе $q^n > (q-1)n$. Одовде и од импликацијата $n>n_0 \Rightarrow (q-1)n > (q-1)n_0$ добиваме дека $n>n_0 \Rightarrow q^n > (q-1)n_0$. Доволно е да земеме $(q-1)n_0 > M$, $M>0$, односно $n_0 > \dfrac{M}{q-1}$, па да добиеме дека $n>n_0 \Rightarrow q^n > M$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty, \text{ за } q>1.$$

Низата (q^n) е дивергентна за $q>1$.

б) Ако $q<-1$, тогаш членовите на низата ги менуваат наизменично знаците, а по апсолутна вредност се стремат кон $+\infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty, \text{ за } q<-1.$$

Низата (q^n) е дивергентна за $q<-1$.

2^0. $|q|<1$, т.е. $-1<q<1$.

а) Нека $0<q<1$. Ако ставиме $r=\dfrac{1}{q}$ добиваме дека $r>1$, па според 1^0 а) $r^n \to \infty$ кога $n\to\infty$, т.е. $q^n \to 0$ кога $n\to\infty$. Значи, низата (q^n) е конвергентна за $0<q<1$.

б) Ако е $-1<q<0$, членовите на низата наизменично ги менуваат знаците. Според 2^0 а) и теоремата заклучуваме дека

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

т.е. низата (q^n) е конвергентна за $-1<q<0$. Значи, низата (q^n) е конвергентна за $|q|<1$.

3^0. $|q|=1$, т.е. $q=1$ или $q=-1$.

а) Ако $q=1$, тогаш $q^n=1$ за секој $n\in\mathbb{N}$, значи низата е константа и $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$, т.е. низата е конвергентна.

б) Ако $q=-1$, тогаш $q^n=(-1)^n$, па низата има две точки на натрупување, -1 и 1. Значи, низата е дивергентна.

2 Определи ја граничната вредност на низата со општ член: а) $\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$; б) $\left(\frac{2^n+2^{-n}}{2^n-2^{-n}}\right)$.

Проследи го решението:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=3\cdot 0=0;$

б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+2^{-n}}{2^n-2^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+\frac{1}{2^n}}{2^n-\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{2n}+1}{2^n}}{\frac{2^{2n}-1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+1}{4^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\left(1+\frac{1}{4^n}\right)}{4^n\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}=\frac{1+0}{1-0}=1.$$

3 Докажи дека низата со општ член $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$ е конвергентна.

Согледај го решението:

Според биномната формула имаме

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$ т.е.

по кратење со n и делење на изразите во заградите со n, добиваме

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Сите собироци на десната страна се позитивни броеви. Преминувајќи во последното равенство од индексот n на индексот $n+1$ ќе забележиме дека неговата десна страна се зголемува, бидејќи содржи еден собирок повеќе и поради неравенството:

$1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}$, $1-\frac{2}{n}<1-\frac{2}{n+1}$, ..., $1-\frac{n-1}{n}<1-\frac{n-1}{n+1}$, од каде што следува дека

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, т.е. $a_n<a_{n+1}$, што значи дека низата монотоно расте.

Да покажеме дека низата е ограничена. Бидејќи $1-\frac{1}{n}<1$, $1-\frac{2}{n}<1,\ldots$, $1-\frac{n-1}{n}<1$ имаме

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Земајќи предвид дека $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}<\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}<\frac{1}{2^3}$,..., $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}}$ добиваме

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Збирот во заградата на десната страна ќе го пресметаме како збир на првите n членови на геометриска

прогресија $\left(a_1=1,\ q=\frac{1}{2}\right)$, па имаме $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3.$

Од развојот на биномот $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е очигледно дека $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge 2$, па заклучуваме дека $2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$,

што значи дека низата е ограничена. Докажавме дека низата е монотона и ограничена, т.е. низата е конвергентна. Нејзината гранична вредност се наоѓа меѓу броевите 2 и 3, а се означува со буквата e, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Бројот e не може да се запише во видот $\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}$, па затоа е ирационален број, т.е. бесконечен непериодичен децимален број. Неговата вредност е меѓу 2 и 3: $e=2,7182818284...$ Тој има посебно значење во математиката, бидејќи се користи како логаритамска основа. Логаритмите со основа e се викаат ***природни логаритми*** и се означуваат со $\ln$. Ознаката $\ln$ е кратенка од почетните букви на зборовите ***logaritmus naturalis***, што значи природни логаритми.

Следуваат неколку задачи со примена на граничната вредност $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

4 Одреди: а) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$; б) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$.

Согледај го решението:

а) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=e\cdot1=e;$

б) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5=e^5.$

5 Одреди: а) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}$; б) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

6 Одреди: а) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+1}$; б) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^n$.

Согледај ја постапката:

а) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n+1}\right)^{2n+1}=$

Воведуваме смена $2n+1=2m$, при што и $m\to\infty$ кога $n\to\infty$.

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2=e^2.$

Задачи:

1 Покажи дека низата со општ член а) $\left(\frac{1}{n}\right)$; б) $\left(\frac{1}{n^2}\right)$; в) $\frac{n-1}{n^2+1}$; г) $\left(2^{-n}\right)$ е нула – низа.

2 Која од следниве низи со општ член а) $a_n=n^2$; б) $a_n=(-1)^n$; в) $a_n=-n^3$; г) $a_n=(-1)^n n$ се стреми кон $+\infty$ или кон $-\infty$, а која осцилира?

3 Одреди ја граничната вредност на низата, ако: а) $a_n=\frac{1-3^{n+1}}{2+3^n}$; б) $a_n=\frac{2^{n+1}-4}{2^{n+1}}$.

4 Одреди ја границата: а) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+7^{n+2}}{5^n+7^{n+1}}$; б) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

5 Одреди:

а) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$; б) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$; в) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

6 Одреди ја граничната вредност на низата чиј општ член е:

а) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}$; б) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-3}$; в) $\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^n$.

7 а) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+5}$; б) $\left(\frac{n-3}{n-1}\right)^{n+1}$; в) $\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n+1}$.

9 ОПЕРАЦИИ СО КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

Потсети се!

- $|a+b| \le |a|+|b|$.
- $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$.
- Одреди: а) $3!$; б) $5!$.
- $a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
- $S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n) = \frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$ – збир на првите n членови на аритметичката прогресија.

1 Нека се дадени низите $(a_n)=\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ и $(b_n)=\left(\frac{n-3}{n}\right)$ при што $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Одреди:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ и $\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, $b_n \ne 0$.

Согледај го решението:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}+\frac{n-3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n-3}{n(n+1)}$

Броителот и именителот ги делиме со n^2, па добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-\overset{\nearrow 0}{\frac{2}{n}}-\overset{\nearrow 0}{\frac{3}{n^2}}}{1+\underset{\searrow 0}{\frac{1}{n}}} = 3$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2+1 = 3$. Десните страни на последните две равенки се еднакви, од каде што следува еднаквост и на нивните леви страни, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+3}{n^2+n} = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2-1 = 1$, значи: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\cdot\frac{n-3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{3}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 2$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{n} = 2\cdot 1 = 2$, па $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n+1}}{\frac{n-3}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-2n-3} = 2$; $\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{n}} = \frac{2}{1} = 2$, па $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Природно се поставува прашањето: дали заклучоците од а), б), в) и г) важат и општо?
Одговорот на ова прашање го дава следнава

Теорема. Ако (a_n) и (b_n) се конвергентни низи, при што $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогаш е конвергентна секоја од низите $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ и $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ при $b_n \neq 0$, $b \neq 0$.

Притоа:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Ако $a_n = c$, c - константа, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} c\,b_n = c \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c \cdot b$.

Ако $a_n = b_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(a_n^2\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 = a^2.$$

Ако $a_n = c$, c - константа, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{c}{b_n} = c\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = c\,\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{c}{b}.$$

Доказ: Од конвергенцијата на низите (a_n) и (b_n) следува дека за секој позитивен број ε, постојат природни броеви n_1 и n_2 такви што:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ кога } n > n_1; \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ кога } n > n_2.$$

Ако $n_0 = \max(n_1, n_2)$, тогаш $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ кога $n > n_0$.

Треба да докажеме дека: $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$ кога $n > n_0$.

$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ кога $n > n_0$, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, што и требаше да се докаже.

2 Нека се (a_n) и (b_n) низи добиени со "постапката за пресметување квадратен корен" од броевите $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$ соодветно, т.е. низите:

$1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ \ldots$

$2,2;\ 2,23;\ 2,236;\ \ldots$

Одреди: а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

Согледај го решението:

а) Членови на низата (a_n+b_n) се: $3,6;\ 3,64;\ 3,650;\ \ldots$

Според претходната теорема, гранична вредност на оваа низа е бројот $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

в) Членови на низата $(a_n\cdot b_n)$ се: $3,08;\ 3,1443;\ 3,161704;\ \ldots$, а нејзината граница е бројот $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$.

3 Пресметај ја граничната вредност на низата дадена со својот општ член:

а) $3+\frac{2}{n}$; б) $\frac{n+3}{5-n}$; в) $\frac{3n^2-4n+1}{5n^2+6n-2}$; г) $\frac{3n}{n+2}-\frac{n}{n-3}$.

Согледај го решението:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=3+0=3.$

б) Овде не можеме директно да ја примениме теоремата за граница од количник, бидејќи низите $(n+3)$ и $(5-n)$ се дивергентни. Затоа ќе ја користиме границата на нула-низа, т.е. и броителот и именителот ќе ги поделиме со n, па добиваме: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{5-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{\frac{5}{n}-1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}-1\right)}=-1$, бидејќи

$\lim\limits_{n\to\infty}1=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=3$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3\cdot0=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}=5$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=5\cdot0=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)=-1$.

в) Овде и броителот и именителот ќе ги поделиме со n^2, од исти причини како во б), т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n+1}{5n^2+6n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{6}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{6}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{3}{5}.$$

г) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2}-\frac{n}{n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n\cdot(n+3)-n\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n-3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+9n-n^2-2n}{n^2+2n-3n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+7n}{n^2-n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{7}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n}-\frac{6}{n}\right)}=\frac{2}{1}=2.$$

Пресметај ја граничната вредност на низата чиј општ член е:

4 а) $a_n=\dfrac{7n-4}{3n+5}$; б) $a_n=\dfrac{3+n+n^2}{2+3n+5n^2}$; в) $a_n=\dfrac{2n}{n-1}+\dfrac{n}{n+3}$; г) $a_n=\dfrac{(n-1)(n+2)}{n^2+5}$.

5 а) $a_n=\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$; б) $a_n=\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{n(10n+1)}$; в) $a_n=\dfrac{\sqrt{n^2-2n+5}}{3n+2}$; г) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Разгледај ја постапката на решавање:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)}{(n+2)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)n!}{(n+2)(n+1)n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(n+1)}{(n+2)(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{(n+2)(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$;

б) 2, 4, 6, . . ., $2n$ се првите n - членови на аритметичка прогресија, чиј збир $S_n=\dfrac{n}{2}(2+2n)=n(n+1)$, па

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n(10n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{10+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(10+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{10};$$

в) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-2n+5}}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{1}{3};$$

г) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

Задачи:

1 Користејќи ги теоремите за ковергентни низи, пресметај ги следните гранични вредности.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-5b_n)$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(8a_n\cdot b_n)$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{3}{2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-7}{2a_n+5}$, ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

Пресметај ги граничните вредности на низите дадени со својот општ член:

2 а) $\dfrac{an+b}{cn+d}$; б) $\dfrac{3n^2-4n+1}{5n^2+6n-2}$; в) $\dfrac{3^n}{3^n+3}$.

3 а) $\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$; б) $\dfrac{1+3+5+\ldots+2n-1}{(2n+1)(2n-1)}$.

Пресметај ги следните граници:

4 а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-\sqrt{n^2-5}}{3n-8}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n-1}+n}{\sqrt[3]{n^3+2n}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-6}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-3}}$.

5 а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+2)^2-(n-2)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{(n+1)^3-(n-1)^3}$.

6 а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{3n+1}-\dfrac{n}{6}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+3+5+\ldots+2n-1}{2n+5}-\dfrac{5n+2}{10}\right)$.

7 а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{5n^2+4n+2}-\sqrt{5n^2-2n}-1\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2}\right)$.

10 ЗБИР НА ЧЛЕНОВИТЕ НА БЕСКОНЕЧНА ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

Нека е дадена бесконечна геометриска прогресија $a,\ aq,\ aq^2,\ldots,aq^{n-1},\ldots$

Ја формираме низата: $s_1=a,\ s_2=a+aq,\ldots,s_n=a+aq+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$

Да претпоставиме дека низата (s_n) е конвергентна, т.е. нека $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$, каде што s е конечен (определен) број.

Дефиниција. Граничната вредност s на низата (s_n) се вика збир на бесконечната геометриска прогресија $a,\ aq,\ aq^2,\ldots$

Значи, ако $\lim s_n=s$ тогаш $s=a+aq+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$

Ќе разгледаме неколку случаи во зависност од количникот q.

1° $|q|=1$ т.е. $q=1$ или $q=-1$.

а) За $q=1$ добиваме $s_n=a\cdot n$, па $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\infty$;

б) За $q=-1$ ја добиваме низата $a, 0, a, 0\ldots,\ (a\neq 0)$, која има две точки на натрупување a и 0, па според тоа е дивергентна.

Значи за $|q|=1$, збирот S на бесконечната геометриска прогресија не постои.

2^0 $|q|<1.$ Бидејќи збирот на првите n членови на геометриската прогресија е

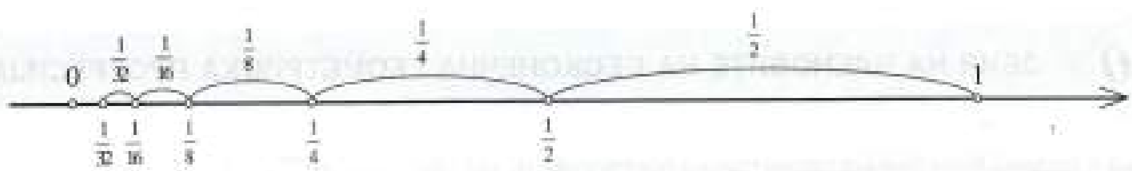
$$S_n = a\frac{q^n-1}{q-1}, \text{ т.е. } s_n = a\frac{q^n}{q-1} + a\frac{1}{1-q}.$$

Видовме, кога е $|q|<1$ дека $q^n \to 0$, па $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a\dfrac{0}{q-1} + a\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$, т.е. низата (s_n) е конвергентна, па може да напишеме $S = a + aq + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \dfrac{a}{1-q}$, $|q|<1$.

1 Да се определи збирот на прогресијата $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \ldots$

Соīледај īо решениеѿо:

Бидејќи $a=\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{1}{2}<1$, прогресијата има збир и тој е $S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots\dfrac{1}{2^n}+\ldots = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ (црт. 1).



црт. 1

3^0 Ако е $|q|>1$, тогаш $q^n \to \infty$ кога $n\to\infty$, па и $q^n \to \infty$, т.е. низата (s_n) дивергира.

Значи за $|q|>1$ збирот на бесконечната геометриска прогресија не постои, тој е "бесконечен".

2 Пресметај го збирот:

а) $\lg 2 + \lg\sqrt{2} + \lg\sqrt[4]{2} + \ldots$ б) $\lg 3 - \lg\sqrt{3} + \lg\sqrt[4]{3} - \lg\sqrt[8]{3} + \ldots$

Соīледај īо решениеѿо:

Овде $a=\lg 2$, а количникот $q=\dfrac{\lg\sqrt{2}}{\lg 2}=\dfrac{\lg 2^{\frac{1}{2}}}{\lg 2}=\dfrac{\frac{1}{2}\lg 2}{\lg 2}=\dfrac{1}{2}$, па

сумата S ќе биде: $s=\dfrac{\lg 2}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{\lg 2}{\frac{1}{2}}=2\lg 2=\lg 4.$

3 Одреди ја вредноста на изразот $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}}$.

Согледај го решението:

$$\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}}=\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{5}\sqrt{\sqrt{\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}}=5^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{4}}\cdot5^{\frac{1}{8}}\cdot5^{\frac{1}{16}}\ldots=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots}=5^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}=5$$

4 Одреди ја вредноста на изразот: а) $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$; б) $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\ldots}}}}$.

5 Бројот 0,5555... претстави го како збир на членови на бесконечна геометриска прогресија, а потоа пресметај го тој збир.

Согледај го решението:

$$0{,}5555\ldots=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{200}+\frac{1}{2000}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{5}{9}.$$

6 Бројот $0{,}3(2)$ претвори го во обична дропка.

Согледај го решението:

$$0{,}3(2)=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\ldots=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}+\frac{2}{100}\cdot\frac{10}{9}=\frac{29}{90}.$$

7 Во рамностран триаголник со страна a е впишан круг. Во тој круг е впишан нов рамностран триаголник, во тој триаголник пак круг итн. Пресметај го збирот од плоштините на тие кругови.

Согледај го решението:

Радиусот на првиот круг е $r_1=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Вториот триаголник е сличен со првиот (коефициентот на сличност е $\frac{1}{2}$), па $r_2=\frac{1}{2}r_1=\frac{a\sqrt{3}}{12}$, $r_3=\frac{1}{2}r_2=\frac{a\sqrt{3}}{24}$ итн. Збирот на плоштините на сите кругови е

$P=P_1+P_2+P_3+\ldots$, каде што $P_1=\pi r_1^2=\pi\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{a^2\pi}{12}$; $P_2=\pi r_2^2=\pi\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2=\frac{a^2\pi}{48}$; $P_3=\pi r_3^2=\pi\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{24}\right)^2=\frac{a^2\pi}{192}$;

$P=\frac{a^2\pi}{12}+\frac{a^2\pi}{48}+\frac{a^2\pi}{192}+\ldots$, т.е. $P=\frac{\pi r_1^2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{9}a^2\pi.$

Задачи:

1 Пресметај го збирот:

а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ б) $7+\frac{7}{4}+\frac{7}{16}+\ldots$

в) $1+\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ldots$ г) $4+7+\frac{8}{3}+\frac{35}{8}+\frac{16}{9}+\frac{175}{64}+\ldots$

д) $1+\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\ldots$ ѓ) $\lg 3-\lg\sqrt{3}+\lg\sqrt[4]{3}-\lg\sqrt[8]{3}+\ldots$

2 Докажи го равенството:

а) $3+\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\ldots=\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+\ldots$ б) $2+1,6+1,28+\ldots=15-\frac{15}{2}+\frac{15}{4}-\frac{15}{8}+\ldots$

3 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7\ldots}}}$; б) $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}$.

4 Бројот $1,535353\ldots$ претстави го како збир на членови на бесконечна геометриска прогресија, а потоа пресметај го тој збир.

5 Претвори го во обична дропка бројот: а) $3,25(4)$; б) $4,7(36)$.

6 Збирот од членовите на бесконечна геометриска прогресија е $\frac{10}{3}$, а вториот член $\frac{8}{15}$. Одреди го третиот член.

7 Реши ја равенката:

а) $\log_9 x+\log_9^2 x+\log_9^3 x+\ldots=1;\ (x<9)$; б) $\sqrt[x]{2}\cdot\sqrt[2x]{2}\cdot\sqrt[4x]{2}\cdot\ldots=4$.

8 Во кружница со радиус r е впишан рамностран триаголник, во триаголникот е впишана кружница, во кружницата рамностран триаголник итн...

Пресметај го:

а) збирот од периметрите на: *i*) сите кружници; *ii*) сите триаголници;

б) збирот од плоштините на: *i*) сите кругови; *ii*) сите триаголници.

9 Во рамностран триаголник со страна a е впишан рамностран триаголник чии темиња се средини на страните на првиот, во вториот на сличен начин е впишан трет итн.

Пресметај го:

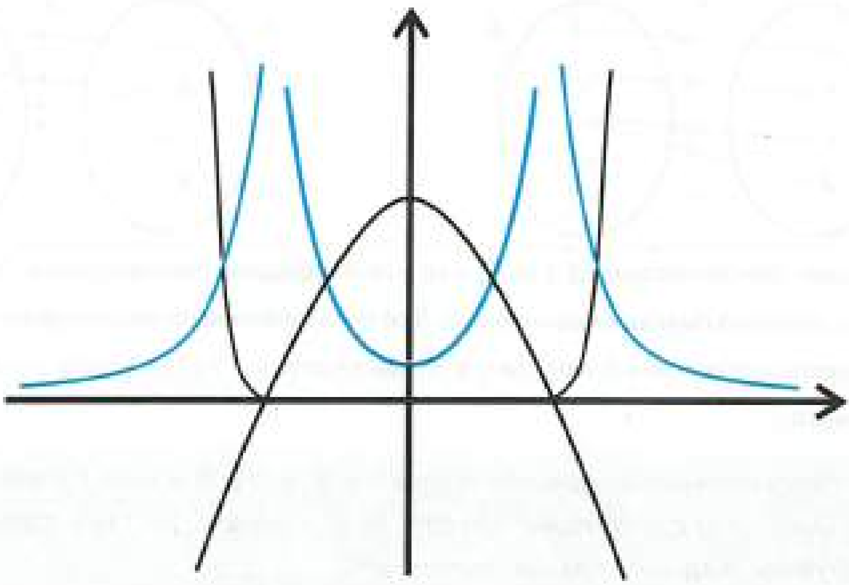
а) збирот од висините на сите триаголници;

б) збирот од периметрите на сите триаголници;

в) збирот од плоштините на сите триаголници.

ТЕМА 2 **ФУНКЦИИ И ГРАНИЧНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИИ**

Во оваа тема ќе учиш за:



1 ФУНКЦИЈА ОД РЕАЛЕН АРГУМЕНТ

Потсети се!

Во досегашното школување учеше за: линеарната функција $y = kx + n$, квадратната функција $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, експоненцијалната функција $y = a^x$ $(a > 0$ и $a \neq 1)$, логаритамската функција $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1$ и $x > 0)$. Ги изучуваше тригонометриските функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. За секоја од функциите ги изучуваше својствата и го црташе нејзиниот график. Поимот функција е еден од најзначајните поими во математиката, па од тие причини во овој дел ќе зборуваме општо за функција и ќе изучуваме некои својства на функциите.

Нека A и B се две непразни множества и нека на секој елемент $x \in A$ му е придружен, по некое правило f, еднозначно определен елемент $y \in B$, тогаш велиме дека е определено ***пресликување*** f од A во B и запишуваме

$$f : A \to B.$$

За y велиме дека е слика на x и пишуваме

$$y = f(x) \text{ или } f : x \mapsto y \text{ или } x \mapsto y.$$

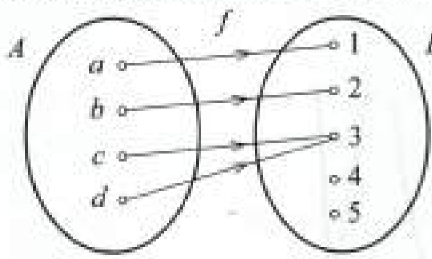
1 Нека $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и нека f и g се следниве правила на придружување:

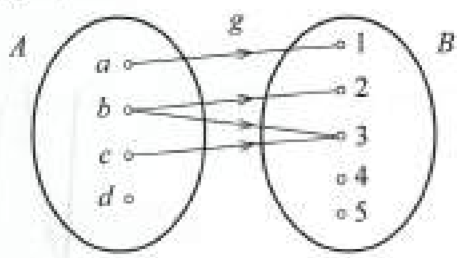
$f : a \to 1,\ b \to 2,\ c \to 3,\ d \to 3;$ $\qquad$ $g : a \to 1,\ b \to 2,\ c \to 3,\ b \to 3.$

Со кое придружување е одредено пресликување?

Согледај го решението:

Даденото придружување ќе го претставиме со следниве дијаграми:





Со f е одредено пресликување од A во B, а со g не е одредено пресликување. Зошто?

Множеството A се вика ***домен***, а множеството B се вика ***кодомен*** на пресликувањето f. Множеството $V_f = f(A)$ кое ги содржи сите елементи $y \in B$, такви што $y = f(x)$ за секој $x \in D$ се вика ***опсег*** на пресликувањето f.

Нека D е непразно множество од реални броеви, т.е. $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}$ и нека f е пресликување од D во $\mathbb{R}$, т.е. за секој $x \in D$ постои единствен број $y \in \mathbb{R}$, така што $y = f(x)$, тогаш велиме дека f е ***реална функција*** од ***една реална променлива***.

Множеството D се вика ***дефиниционо множество, домен*** или ***област на дефинираност*** на функцијата f. Наместо D, натаму често ќе пишуваме D_f, D_g,...

Множеството од сите слики $f(x)$ на елементите $x \in D$ се вика опсег или множество вредности на функцијата f и се означува со V_f или само V $(V_f \subseteq \mathbb{R})$.

Понатаму, кога се зборува за "функција", ако не е поинаку речено, ќе се подразбира "реална функција од една реална променлива".

На пример, со пресликувањето:

- $f: x \mapsto x+1$, $x \in \mathbb{R}$, дефинирана е реална функција од еден реален аргумент за којашто пишуваме $f(x)=x+1$ или $y=x+1$; за неа $D_f=\mathbb{R}$ и $V_f=\mathbb{R}$;
- $f: x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$ дефинирана е функцијата $f(x)=x^2$; за неа $D_f \in \mathbb{R}$ и $V_f=\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Запомни!

Функцијата f е наполно определена ако се познати: дефиниционото множество D_f и правилото f според кое се одредуваат вредностите на функцијата.

Во пракса, ако дадената функција е определена со некој аналитички израз без да биде назначен доменот ќе сметаме дека доменот се состои од сите реални броеви за коишто тој аналитички израз има смисла.

2 Доменот на функцијата:

а) $f(x)=\sqrt{x}$ е $[0,+\infty)$;

б) $f(x)=\sqrt{1-x}$ е $(-\infty,1]$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ е $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

г) $f(x)=2x^2+x$ е $(-\infty,+\infty)$;

д) $f(x)=\lg(x+2)$ е $(-2,+\infty)$.

3 Одреди го дефиниционото множество на функцијата:

а) $f(x)=3x^3-4x^2+2$;

б) $f(x)=\dfrac{2+x}{x^2-9}$;

в) $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$;

г) $f(x)=\lg(x^2-x)$.

Разгледај го решението:

$\sqrt{A}$ има смисла само ако $A \geq 0$; $\quad \dfrac{A}{B}$ – само за $B \neq 0$; $\quad \lg A$ – само за $A>0$.

а) $D_f:(-\infty,+\infty)$; $\qquad$ б) $x^2-9 \neq 0$, т.е. $x \neq 3$, $x \neq -3$, $D_f:(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$ или $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$;

в) $3x-x^2 \geq 0$, $x(3-x) \geq 0$, т.е. $\begin{cases} x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \leq 0 \\ 3-x \leq 0 \end{cases}$, па $D_f:[0,3]$;

г) $x^2-x>0$, $x(x-1)>0$, т.е. $\begin{cases} x>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<0 \\ x-1<0 \end{cases}$, па $D_f:(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

Воочи дека дефиниционото множество на функциите наведени под а) и г) е бесконечно множество кое може да биде запишано како интервал или сегмент (затворен интервал) или унија од интервали.

4 Одреди го дефиниционото множество на функцијата:

а) $f(x)=x^3-2x^4$; б) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x-4}$; в) $f(x)=\dfrac{3x-1}{\sqrt{2x-1}}$; г) $f(x)=\lg(x-5)$.

Одредувањето на множеството вредности на некои функции не е секогаш едноставно. На пример, множеството вредности на функцијата:

а) $f(x)=\sin x$ е $[-1,1]$; б) $f(x)=2x+1$ е $(-\infty,+\infty)$;

в) $f(x)=x^2-2x-3$ е $[-4,+\infty)$; г) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{за } x>0\\ 0 & \text{за } x=0\\ -1 & \text{за } x<0\end{cases}$ е $\{-1,0,1\}$.

Во дефиницијата на поимот функција во сите примери ја употребивме буквата x како замена за кој било број од доменот на соодветната функција. За неа велиме дека е ***независно променлива*** или ***аргумент***.

За дадената функција f често запишуваме и $f(x)$, што е исто со $f:x\mapsto f(x)$, а го користиме и записот $y=f(x)$, при што за означување на ***зависно променливата*** е употребена буквата y.

Понатаму, променливите (независни или зависни) ќе ги означуваме и со други букви: t, u, v, g, h итн. На пример, со:

$f(x)=2x^2-3x+1$, $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $h(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$, се означени различни функции од ист аргумент, додека, пак, со:

$f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+1}$, $f(t)=\dfrac{t^2-2t-1}{t^2+1}$, и $f(u)=\dfrac{u^2-2u-1}{u^2+1}$, е означена иста функција од различен аргумент.

Во претходната тема учеше дека со пресликувањето f од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{R}$ е дефинирана низа од реални броеви (a_n), т.е.

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \text{ или } f:n\mapsto a_n,\ n\in\mathbb{N}.$$

- На пример, со: $f:n\mapsto 2n$, $n\in\mathbb{N}$ е дефинирана функцијата $f(n)=2n$, т.е. на секој природен број му е придружен соодветен парен број: $1\to 2$, $2\to 4$, $3\to 6$, $4\to 8$ итн.

- Со $f:n\mapsto a_n$, $a_n=\dfrac{2n}{n+1}$ е дадена функцијата f од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{R}$ чие множество вредности е низата

$$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{8}{5},\ \frac{10}{6},\ldots$$

Ако функцијата f е зададена со формула или со зборови (описно), тогаш велиме дека функцијата е зададена ***аналитички***, или дека функцијата е зададена во ***експлицитен вид***.

На пример, функциите $f(x)=x^2+3$, $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $y=\frac{x}{x^2+1}$ и сите други функции што ги дадовме досега се зададени со формули, т.е. се зададени експлицитно.

Во задавањето на една функција описно или со формула нема суштинска разлика. На пример, $g(x)=\frac{1}{x}$ е исто што и " $g(x)$ е реципрочна вредност на бројот x".

Некои функции може да бидат зададени со два или повеќе изрази, на пример:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{за } x\le 0 \\ \sqrt{x} & \text{за } x>0 \end{cases}$; б) $g(x)=\begin{cases} x & \text{за } x>0 \\ 0 & \text{за } x=0 \\ -x-2 & \text{за } x<0. \end{cases}$

Често пати ќе се сретнуваме и со следните функции.

а) Функцијата $\operatorname{sgn} x$ дефинирана со

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & \text{за } x>0 \\ 0 & \text{за } x=0 \\ -1 & \text{за } x<0, \end{cases}$$

се вика ***сигнум од*** x или ***знак од*** x.

б) Функцијата f дефинирана со

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{за } x\in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{за } x\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

се вика ***функција на Дирихле***.

в) функцијата $[x]$ дефинирана со:

" $[x]$ е најголемиот цел број што не е поголем од x" се вика ***цел дел од*** x.

Значи: $x-1<[x]\le x$. На пример: $\left[3\frac{1}{2}\right]=3$, $[-2{,}5]=-3$, $[0{,}75]=0$.

г) Некои функции кои се зададени со еден аналитичен израз можеме да ги запишеме со два или повеќе изрази, како на пример:

$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{за } x>0 \\ 0 & \text{за } x=0; \\ -x & \text{за } x<0 \end{cases}$ $f(x)=x^2-6|x|=\begin{cases} x^2-6x & \text{за } x\ge 0 \\ x^2+6x & \text{за } x<0. \end{cases}$

д) Можно е и обратното, функции што се зададени со повеќе изрази да се претставаат со еден аналитичен израз. На пример:

$f(x)=\begin{cases} 2x-x^2 & \text{за } x\in(0,2) \\ x^2-2x & \text{за } x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty) \end{cases}=\left|2x-x^2\right|$; $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{за } x>0 \\ 2 & \text{за } x=0 \\ 2+x & \text{за } x<0 \end{cases}=2-|x|$.

Ако доменот на една функција е конечно множество, тогаш функцијата може да биде зададена таблично. На пример, ако за $f : x \to f(x)$ доменот е $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и

$$f(0)=1,\quad f(1)=3,\quad f(2)=2,\quad f(3)=1,\quad f(4)=3,$$

тогаш функцијата можеме да ја претставиме со таблицата:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	2	1	3

Табличното претставување на функциите ќе го користиме многу често и во случаите кога доменот е бесконечно множество, со тоа што таблицата ќе се состои од конечно многу вредности од доменот за да се добие претстава за текот на функцијата. Табличното претставување на функциите често се користи и во експерименталните науки: физика, хемија, технички науки и други.

Во наредната лекција ќе зборуваме за уште еден, многу значаен начин на претставување на функции: геометриско претставување со помош на нејзиниот график во координатната рамнина.

Функциите наоѓаат примена и во другите науки, а особено во природните науки. При изучувањето на разни природни појави обично се доаѓа до некои законитости коишто претставуваат зависност меѓу одредени величини. На пример:

а) Патот s при слободното паѓање зависи од времето t и се изразува со функцијата $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$, $D=\mathbb{R}^+$, g – Земјино забрзување $(g=9{,}81)$.

б) Патот s при рамномерно забрзано движење се изразува со формулата $s=V_0t+\frac{1}{2}at^2$, при што $t\ (t>0)$ е независно променлива величина, V_0 е почетна брзина, а a е забрзување.

в) Плоштината P на кругот зависи од неговиот радиус $r\ \left(P(r)=r^2\pi\right)$.

г) Јачината J на електричната струја во електричното коло со постојан напон U зависи од отпорот R $\left(J(R)=\frac{U}{R}\right)$.

При искажувањето на функционалната зависност во претходните примери треба да се има предвид областа на дефинираност на самата функција. Величините што се застапени во така запишаните функции имаат свои димензии изразени во мерни единици, меѓутоа во такви случаи ќе ги земаме само мерните броеви на тие димензии.

Задачи:

1 Дадена е функцијата $f(x)=2x^2-x+3$. Одреди ги вредностите: $f(2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(a)$.

2 Ако $f(x)=\begin{cases}1+x & \text{за } x\in(-\infty,0] \\ 2x & \text{за } x\in(0,+\infty)\end{cases}$, одреди ги вредностите: $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

3 Нека е дадена функцијата $\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & x\in(-1,0)\\ 2, & x\in[0,1)\\ x-1, & x\in[1,3].\end{cases}$ Одреди ги вредностите:

$\varphi(2),\ \varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi\left(-\frac{1}{2}\right),\ \varphi(3).$

4 Ако $f(x)=x^2$, определи: а) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; б) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

5 Ако $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, определи го изразот $\frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)}$.

6 Претстави ја со повеќе аналитични изрази функцијата:

а) $f(x)=x^2-2|x-1|$; б) $f(x)=(\operatorname{sgn} x)\cdot(x^2-1)$.

7 Определи ја функцијата $f(x)$:

а) $f(x)=ax+b$, ако $f(-1)=1$, $f(2)=-5$; б) $f(x)=ax^2+bx+3$, ако $f(-2)=-5$, $f(1)=4$.

8 Одреди ја функцијата $f(x)$ ако: а) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$; б) $f(x+1)=ax^2+bx+c$.

9 Одреди ја дефиниционата област на функцијата:

а) $y=\frac{2x}{x^2+4}$; б) $y=\frac{x-1}{x^2-4}$; в) $y=\sqrt[3]{2-3x}$; г) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$;

д) $y=\sqrt{1-\sin x}$; ѓ) $y=\ln(x^2-2x)+\sqrt{5-x}$.

10 Одреди го множеството $f(A)$ ако: а) $f(x)=x^2$, $A=[-2,-1]$; б) $f(x)=\frac{x}{1+x}$, $A=(0,1)$.

11 Запиши ја функционалната зависност на плоштината P и аголот при поголемата основа на рамнокрак трапез со основи $a=6$ и $b=4$. Одреди ги доменот и кодоменот на функцијата.

12 Изрази ја плоштината P на правоаголник впишан во круг со радиус R, како функција од една негова страна која има должина x.

2 ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА. НУЛИ НА ФУНКЦИЈА. ПАРНОСТ, НЕПАРНОСТ НА ФУНКЦИЈА

А Познато ти е дека една функција може да биде зададена аналитички, табеларно и графички.

Дефиниција. За дадената функција f со домен D_f множеството подредени парови

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in D_f,\ y = f(x)\}$$

се вика ***график*** на функцијата f.

На пример, за функцијата f зададена со таблицата доменот е $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$, а нејзиниот график е $\Gamma_f = \{(-2,3), (-1,2), (0,1), (1,-2), (3,-4)\}$.

x	-2	-1	0	1	3
$f(x)$	3	2	1	-2	-4

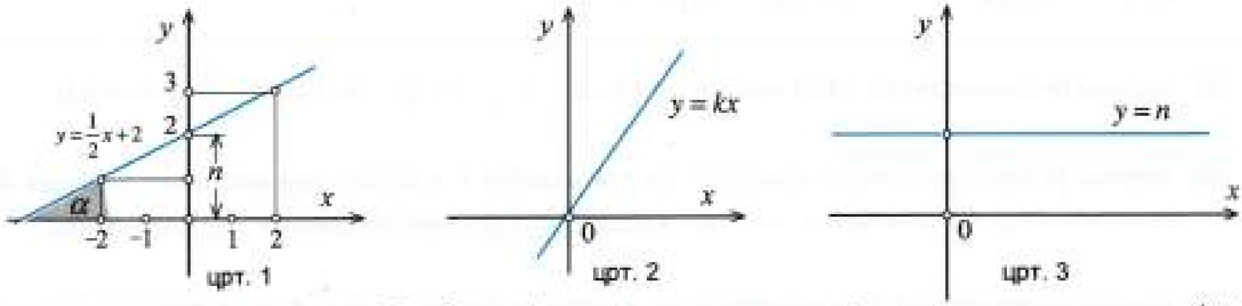
Графикот на функцијата $y = x^2$ е $\Gamma_f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$, а графикот на функцијата $y = \dfrac{1}{x}$ е $\Gamma_f = \left\{\left(x, \dfrac{1}{x}\right) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$.

Графикот Γ_f е бесконечно множество секогаш кога D_f е бесконечно множество, а конечно кога D_f е конечно. Може да се каже дека "Γ_f има толку елементи, колку што има D_f". Бидејќи секој подреден пар (a, b) од реални броеви претставува точка во координатната рамнина, значи графикот на функцијата може да се претстави геометриски, како множество од точки.

1 Нацртај го графикот на линеарната функција $y = \dfrac{1}{2}x + 2$.

Разгледај го решението:

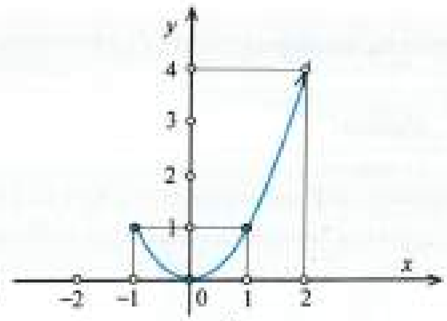
За цртање на графикот на една функција најчесто правиме таблица од вредности, т.е. определуваме неколку точки од графикот, ги претставуваме во координатната рамнина, па со нивно поврзување добиваме приближна претстава за графикот на таа функција, црт. 1.



црт. 1 црт. 2 црт. 3

Воопшто, графикот на ***линеарната функција*** $y = kx + n$ е права што ја сече y-оската во точка $(0, n)$ и чиј коефициент на правец е $k = \operatorname{tg}\alpha$. Ако $n = 0$, тогаш функцијата е $y = kx$ (функција на права пропорционалност), црт. 2. Ако $k = 0$, тогаш функцијата $y = n$ е константна, црт. 3.

График на функцијата $f(x)=x^2$ со домен $D=[-1,2)$ е претставен на црт. 4.



црт. 4

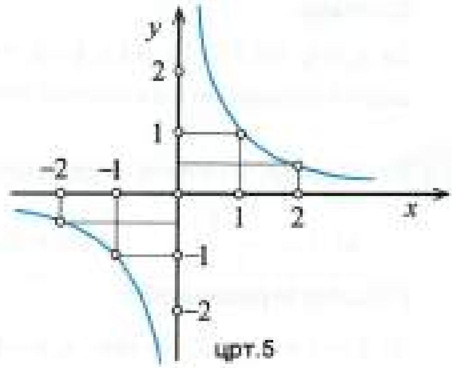
2 Нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{1}{x}$.

Разгледај го решението:

Функцијата $y=\dfrac{1}{x}$ се вика реципрочна вредност од x или функција на обратна пропорционалност (чиј коефициент на пропорционалност е 1). Нејзиниот домен $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, а $V_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Неколку точки од нејзиниот график (црт. 5) се дадени во табелата.

x	-2	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-3	3	1	$\frac{1}{2}$



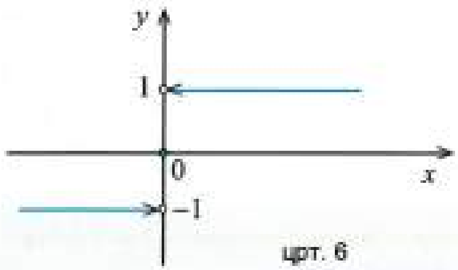
црт.5

3 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y=\operatorname{sgn} x$; б) $y=[x]$ – цел дел од x.

Разгледај го решението:

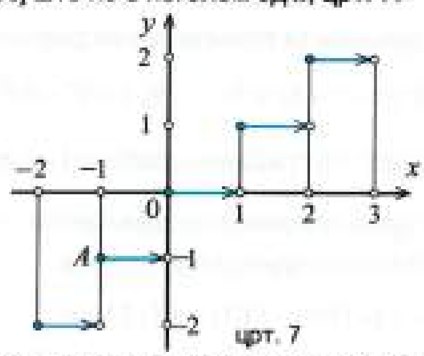
а) Од дефиницијата за функцијата следува

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{за } x>0\\ 0, & \text{за } x=0\\ -1, & \text{за } x<0,\end{cases}$$ црт. 6.



црт. 6

б) Според дефиницијата, цел дел од x е најголемиот цел број што не е поголем од x, црт. 7.



црт. 7

Стрелката означува дека крајната точка не припаѓа на графикот на функцијата.

Потсети се!

- Одреди ги $f(1)$ и $f(0)$ ако $f(x)=x-1$.
- Во правоаголен координатен систем претстави ги точките $A(-1,0), B(2,0)$ и $C(3,0)$.
- Реши ја равенката $2x^2-x-1=0$.
- Одреди ги нулите на полиномот $P(x)=x^2+4x-5$.

Б **4** Дадена е функцијата $f(x)=x^2-4$.

Одреди ги $f(2)$ и $f(-2)$. Што воочуваш?

Согледај го решението:

$f(2)=2^2-4=0$ и $f(-2)=(-2)^2-4=0$.

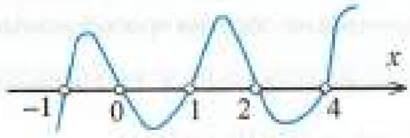
Воочуваш дека $f(2)=f(-2)=0$. Значи, за $x=2$ и $x=-2$ вредноста на функцијата е 0.

Нула на функцијата $y=f(x)$ се вика секој реален број $x_0 \in D_f$ за кој важи $f(x_0)=0$.

Воочи!

Нулите на функцијата $y=f(x)$ се решенијата на равенката $f(x)=0$.
Графички, нулите на функцијата се апсциси на пресечните точки на кривата со $x-$оската.

На пример, на црт. 8 е претставен график на некоја функција.
За $x_0 \in \{-1,0,1,2,4\}$, $f(x_0)=0$, т.е. нули на таа функција се елементите на множеството $\{-1,0,1,2,4\}$.



црт. 8

5 Одреди ги нулите на функцијата:

а) $y=\dfrac{x^2-1}{x}$; б) $y=x^3-x$; в) $y=xe^x$; г) $y=(x^2-4)\lg(x+5)$.

Согледај го решението:

а) $x^2-1=0 \Rightarrow x_1=1$ или $x_2=-1$;

б) $x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x_1=0 \vee x_2=-1 \vee x_3=1$;

в) $xe^x=0 \Rightarrow x=0$, бидејќи $e^x \neq 0$;

г) $x^2-4=0 \vee x+5=1 \Rightarrow x_1=2 \vee x_2=-2 \vee x_3=-4$.

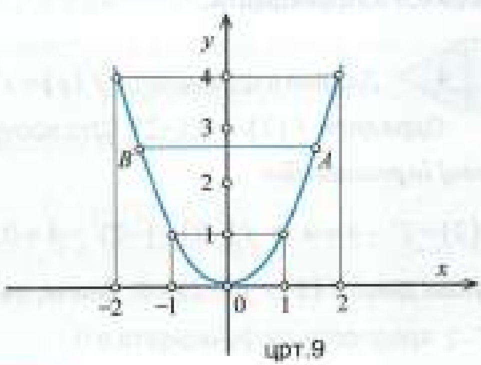
6 Определи ги точките во кои дадената функција има вредност нула:

а) $y=x^2-3x+2$; б) $y=x^4-5x^2+4$; в) $y=(x^2-1)(x^2-4)e^x$; г) $y=\lg(x-1)$.

В На црт. 9 е прикажан графикот на функцијата $y=x^2$.

- Воочи дека графикот на функцијата $y=x^2$ е симетричен во однос на $y-$оската.
- $f(1)=f(-1)=1$, $f(2)=f(-2)=4$.

Воопшто, $f(-x)=f(x)$.



црт.9

Функцијата f со домен D е ***парна функција*** ако:

1. D е симетрично множество во однос на координатниот почеток, т.е. $x \in D \Rightarrow -x \in D$.
2. За секој $x \in D$, $f(-x)=f(x)$.

Функцијата $f(x)=x^4-2x^2$ е парна, затоа што $D=\mathbb{R}$ е симетрично множество во однос на координатниот почеток и за секој $x\in\mathbb{R}$ имаме $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$. Парни се и функциите $f(x)=-x^2$, $f(x)=|x|$. Функцијата $f(x)=x^2$ со $D=[-1,2)$ не е парна, бидејќи дефиниционото множество не е симетрично во однос на координатниот почеток.

- Ако точката $A(x,f(x))$ лежи на графикот на функцијата $f(x)=x^2$, тогаш и точката $B(-x,f(-x))$, исто така, лежи на графикот на дадената функција, т.е. точките A и B се симетрични во однос на $y-$ оската.

7 Испитај ја парноста на функцијата:

а) $f(x)=3x^2-5$; б) $f(x)=2x^2-4,\ D_f=[0,\infty)$; в) $f(x)=\dfrac{x^2+x\sin x+1}{e^x+e^{-x}}$.

Разгледај го решението:

а) $D=\mathbb{R}$ е симетрично множество и $f(-x)=3(-x)^2-5=3x^2-5=f(x)$, па функцијата е парна.

б) Функцијата не е парна, бидејќи $D=[0,\infty)$ не е симетрично множество.

в) $D=\mathbb{R}$ е симетрично множество.

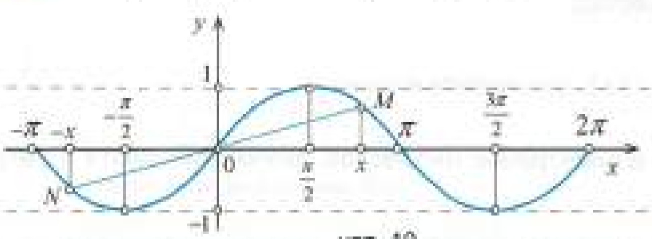
$$f(-x)=\frac{(-x)^2+(-x)\sin(-x)+1}{e^{-x}+e^{-(-x)}}=\frac{x^2-x(-\sin x)+1}{e^{-x}+e^x}=\frac{x^2+x\sin x+1}{e^x+e^{-x}}=f(x),$$ функцијата е парна.

8 Докажи дека функцијата е парна:

а) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{3x^2\cos x}{4-x^2}$; в) $f(x)=2^x+\dfrac{1}{2^x}$.

На црт. 10 е претставен графикот на функцијата $y=\sin x$.

- Воочи дека графикот на функцијата $y=\sin x$ е симетричен во однос на координатниот почеток.



црт. 10

- $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$, а $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, па

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

- Функцијата f со домен D е ***непарна функција*** ако:
1. D е симетрично множество во однос на координатниот почеток.
2. За секој $x\in D$, $f(-x)=-f(x)$.

- Точките $M(x,f(x))$ и $N(-x,f(-x))$ лежат на графикот на функцијата $y=\sin x$ и се симетрични во однос на координатниот почеток, бидејќи $M(x,\sin x)$ и $N(-x,-\sin x)$ лежат на правата MN што минува низ координатниот почеток и се еднакво оддалечени од него.

Запомни!

Функциите чии графици се симетрични во однос на $y-$ оската се викаат ***парни функции***.
Функциите чии графици се симетрични во однос на координатниот почеток се викаат ***непарни функции***.

6 Докажи дека функцијата е непарна:

а) $f(x)=-\frac{1}{x}$;   б) $f(x)=x^3-x$;   в) $f(x)=3x-\sin x$.

Согледај го решението:

а) $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ е симетрично множество, $f(-x)=-\frac{1}{(-x)}=-\left(-\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

б) $D=\mathbb{R}$ е симетрично множество и $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-(x^3-x)=-f(x)$.

в) $D=\mathbb{R}$, $f(-x)=3(-x)-\sin(-x)=-3x+\sin x=-(3x-\sin x)=-f(x)$.

7 Испитај која функција е парна, а која непарна, ако:

а) $y=\frac{4x}{1+x^2}$;   б) $y=(x-1)^2$;   в) $y=\frac{x\sin x}{1+\cos x}$;   г) $y=\sqrt{x^2+2x}$.

Воочи ја постапката на решавање:

а) $D=\mathbb{R}$ е симетрично множество и $f(-x)=\frac{4(-x)}{1+(-x)^2}=\frac{-4x}{1+x^2}=-\frac{4x}{1+x^2}=-f(x)$, функцијата е непарна.

б) $D=\mathbb{R}$ е симетрично множество. $f(-x)=(-x-1)^2=((-1)(x+1))^2=(x+1)^2\neq f(x)$, не е парна; $f(-x)=(x+1)^2\neq -f(x)$, не е непарна. Значи, функцијата е ниту парна ниту непарна.

в) $D=\mathbb{R}\setminus\{(1+2k)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ е симетрично множество.

$f(-x)=\frac{-x\cdot\sin(-x)}{1+\cos(-x)}=\frac{-x\cdot(-\sin x)}{1+\cos x}=\frac{x\sin x}{1+\cos x}=f(x)$, функцијата е парна.

г) $D: x^2+2x\geq 0$, т.е. $x\in(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$ не е симетрично множество, значи функцијата е ниту парна ниту непарна.

Ако доменот D на функцијата f е симетрично множество, тогаш f е и парна и непарна ако и само ако за секој $x\in D$, $f(x)=0$ (тоа својство го има само нултата функција дефинирана на D)

Задачи:

1. Нацртај го графикот на функцијата:

а) $y=-2x+3$;   б) $y=x^2-2x-3$;   в) $y=\frac{2}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Одреди ги реалните нули на функцијата:

2. а) $f(x)=-\frac{2}{3}x+1$;   б) $f(x)=\frac{3}{2}x-2$.

3 а) $f(x)=-2+3x-x^2$; б) $f(x)=x^5-5x^3+4x$.

4 а) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^3+8}$; б) $f(x)=\dfrac{x^4-17x^2+16}{x^2+2}$.

5 а) $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}$; б) $f(x)=\sqrt{\sin x+1}$.

6 а) $f(x)=3^{x^2-3}-3$; б) $f(x)=\log_2\left(x^2+2x\right)-3$.

7 Докажи дека функцијата е парна ако:

а) $f(x)=x^2\left|\sin x\right|$; б) $f(x)=\dfrac{3x^2}{4-x^2}$; в) $f(x)=\sqrt{\cos x}$.

8 Докажи дека функцијата е непарна ако:

а) $f(x)=2x^3-x^5-2x^7$; б) $f(x)=x^3+4\operatorname{tg} x$.

Утврди кои од следниве функции се парни, а кои непарни.

9 а) $f(x)=x^2-1-3\cos x$; б) $f(x)=x^2+2+\sin x$; в) $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$.

10 а) $f(x)=\dfrac{\sin x+\operatorname{tg} x-x^3}{\cos^2 x}$; б) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

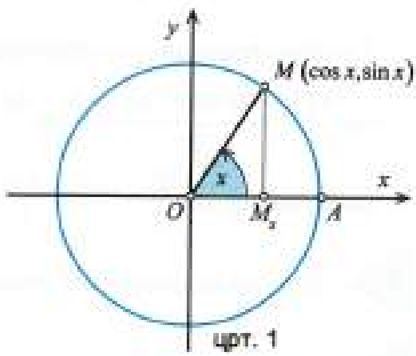
11 а) $f(x)=\dfrac{\left(1+a^x\right)^2}{a^x}$; б) $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

3 ПЕРИОДИЧНОСТ НА ФУНКЦИЈА. МОНОТОНОСТ НА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

Домен на тригонометриските функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ е множеството $\mathbb{R}$. Точката M (црт. 1), движејќи се по тригонометриската кружница (на пример во позитивна насока), ќе се најде во истата положба по едно цело завртување, т.е. за агол од 2π радијани. Според тоа, функциите синус и косинус ќе имаат соодветно иста вредност за аголот $x+2\pi$ како и за аголот x, за кој било $x\in\mathbb{R}$, т.е.

$$\sin(x+2\pi)=\sin x; \qquad \cos(x+2\pi)=\cos x.$$



црт. 1

Бидејќи за секој $x\in\mathbb{R}$ и за секој $k\in\mathbb{Z}$ важи

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \text{ и } \cos(x+2k\pi)=\cos x,$$

значи дека вредностите на $\sin x$ и $\cos x$ се повторуваат периодично по секоја промена на аргументот x за 2π (или за $2k\pi$), па поради тоа за функциите $y=\sin x$ и $y=\cos x$ велиме дека се ***периодични функции***, а за бројот 2π дека е ***најмал период***.

Периодични се и функциите $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$, а најмал период е π.

A Има и други функции, освен тригонометриските, што имаат својство на периодичност.

Дефиниција. Функцијата f со домен D е ***периодична***, ако постои позитивен реален број ω, таков што:

а) Ако $x \in D$, тогаш $x-\omega, x+\omega \in D$. б) За секој $x \in D$, $f(x+\omega)=f(x)$.

Бројот ω се вика ***период*** на функцијата f, а најмалиот од тие броеви, ако постои, се вика ***најмал*** или ***основен*** период на функцијата.

Од самата дефиниција следува точноста и на следниве тврдења:

а) Ако функцијата f со домен D е периодична со период ω, тогаш бројот $k\omega$, $k \in \mathbb{Z}$ е период на функцијата f, т.е. $f(x+k\omega)=f(x)$.

б) Ако функцијата $f(x)$ со домен D е периодична со период ω и ако a е реален број различен од нула, тогаш функцијата $F(x)=f(ax)$ со домен D_1, при што $x \in D_1 \Leftrightarrow ax \in D$ е периодична со период $\frac{\omega}{|a|}$.

Согледај го доказот на тврдењето:

Од $x \in D_1 \Rightarrow ax \in D \Rightarrow ax+\omega \in D \Rightarrow a\left(x+\frac{\omega}{a}\right) \in D \Rightarrow \left(x+\frac{\omega}{a}\right) \in D_1$, па

$$F\left(x+\frac{\omega}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right)=f(ax+\omega)=f(ax)=F(x).$$

Од претходното тврдење следува дека најмал период на функцијата $y=\sin 2x$ е $\frac{2\pi}{2}=\pi$, а на функцијата $y=\cos\frac{2x}{3}$ најмал период е $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$.

1 Одреди го најмалиот период на функцијата $y=a\sin(bx+c)$.

Разгледај го решението:

Нека ω е бараниот период. Од дефиницијата $a\sin(b(x+\omega)+c)=a\sin(bx+c)$ следува

$$\sin(b(x+\omega)+c)-\sin(bx+c)=0.$$

Со трансформација во производ добиваме:

$$2\cos\frac{b(x+\omega)+c+(bx+c)}{2}\sin\frac{b(x+\omega)+c-(bx+c)}{2}=0, \text{ т.е. } 2\cos\frac{2(bx+c)+b\omega}{2}\sin\frac{b\omega}{2}=0.$$

Оттука следува $\sin\frac{b\omega}{2}=0$ ако $\frac{b\omega}{2}=0$, т.е. $\omega=0$ или $\frac{b\omega}{2}=\pi$, т.е. $\omega=\frac{2\pi}{b}$, значи основниот период е $\omega=\frac{2\pi}{b}$.

2 Одреди го основниот период на функцијата: а) $y=a\operatorname{tg}(bx+c)$; б) $y=2\operatorname{ctg}\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$.

3 Одреди го основниот период на функцијата: а) $y=2\sin 3x$; б) $y=\frac{1}{3}\cos 4x$; в) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

4 Одреди го најмалиот период на функцијата: а) $y=\cos^2 x$; б) $y=\sin x\cos x$;

в) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$.

Разгледај го решението:

а) $y=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$. Значи $\omega=\pi$. б) $y=\sin x\cos=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$. Значи $\omega=\pi$.

в) Нека $y_1=\sin x,\ \omega_1=2\pi;\ \ y_2=\dfrac{1}{2}\sin 2x,\ \omega_2=\pi;\ \ y_3=\dfrac{1}{3}\sin 3x,\ \omega_3=\dfrac{2\pi}{3}$.

Најмалиот период $\omega=$ НЗС$(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$. Бидејќи $\omega_1=2\pi=\dfrac{6\pi}{3},\ \omega_2=\pi=\dfrac{3\pi}{3},\ \omega_3=\dfrac{2\pi}{3}$,

НЗС$\left(\dfrac{6\pi}{3},\ \dfrac{3\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{6\pi}{3}=2\pi$, значи, основниот период е $\omega=2\pi$.

5 Функцијата $f(x)=x-[x]$, $D=\mathbb{R}$ е периодична со периода 1. Докажи.

Разгледај го доказот:

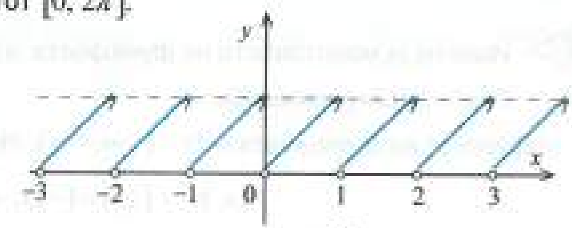
Функцијата $[x]$ е цел дел од x, т.е. најголемиот цел број што не е поголем од x, а функцијата $f(x)=x-[x]$ се вика дробен дел од x. Бидејќи $[x+1]=[x]+1$, имаме:

$$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-([x]+1)=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x).$$

Периодичноста, слично како парност и непарност на дадена функција, овозможува нејзиното изучување да се ограничи на едно подмножество на кое таа е дефинирана.

Ако функцијата $f(x)$ е периодична со период ω, за да ги изучиме нејзините својства доволно е да ги изучиме својствата само на еден сегмент $[a,b]$ со должина ω. На пример, графикот и својствата на функцијата $y=\sin x$, $y=\cos x$ ги изучуваме во сегментот $[0,2\pi]$.

Ако $x\in[0,1)$, тогаш $[x]=0$, па за $x\in[0,1)$ графикот на функцијата $f(x)=x-[x]$ се совпаѓа со графикот на $f_1(x)=x$. Бидејќи функцијата $f(x)=x-[x]$ е периодична со период 1, графикот ќе го добиеме така што графикот $f_1(x)=x$, за $x\in[0,1)$ ќе го транслатираме по x – оската лево и десно за 1, црт. 2.

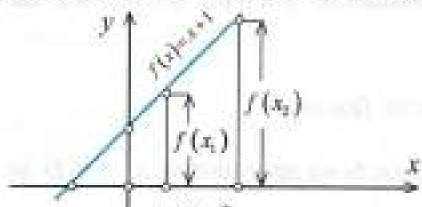


црт. 2

Потсети се!

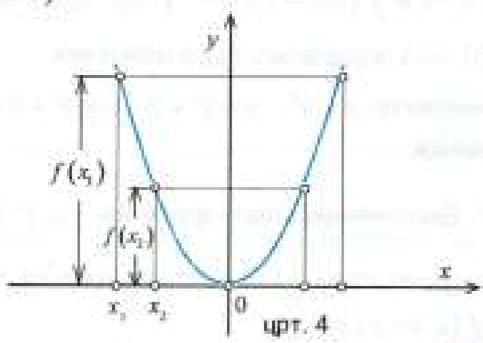
На црт. 3 е претставен графикот на функцијата $f(x)=x+1$ со домен $D=\mathbb{R}$.

Воочи дека за кои било две различни вредности x_1 и x_2 од доменот, на поголемата вредност на аргументот одговара поголема вредност на функцијата, т.е. функцијата расте во $(-\infty,+\infty)$.



црт. 3

На црт. 4 е претставена графички функцијата $f(x)=x^2$. Воочи дека функцијата ***опаѓа*** во интервалот $(-\infty,0)$, а ***расте*** во интервалот $(0,+\infty)$.



црт. 4

Б

Општо. За една функција $f(x)$ дефинирана во множеството D велиме дека во D:

а) ***расте*** (е ***растечка***), ако од $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) < f(x_2)$;

б) ***опаѓа*** (е ***опаднувачка***), ако од $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) > f(x_2)$;

в) ***не опаѓа*** (е ***неопаднувачка***), ако од $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) \leq f(x_2)$;

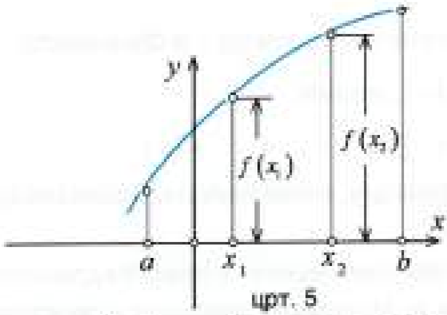
г) ***не расте*** (е ***нерастечка***), ако од $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) \geq f(x_2)$;

за кои било броеви $x_1, x_2 \in D$.

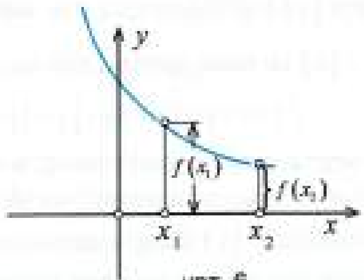
Функција што има некое од својствата од а) до г) се вика ***монотона функција***.

Функциите што само растат или само опаѓаат се викаат ***строго монотони функции***.

На црт. 5 е претставен график на функција што расте, а на црт. 6 график на функција што опаѓа.



црт. 5



црт. 6

Понатаму D најчесто ќе биде интервал, па монотоност на функција ќе разгледуваме во интервал.

6 Испитај ја монотоноста на функцијата: а) $f(x) = -2x+3$; б) $f(x) = 3x-2$; в) $f(x) = x^2$.

Разгледај го решението:

а) Доменот на функцијата е $D = (-\infty, +\infty)$. Нека $x_1, x_2 \in D$ и нека $x_1 < x_2$. Имаме:

$$f(x_1) - f(x_2) = (-2x_1+3) - (-2x_2+3) = -2(x_1 - x_2).$$

Од $x_1 < x_2$ следува $x_1 - x_2 < 0$, па

$$f(x_1) - f(x_2) = -2(x_1 - x_2) > 0, \text{ т.е. } f(x_1) > f(x_2).$$

Значи, функцијата $y = -2x+3$ опаѓа во интервалот $(-\infty, +\infty)$.

в) Функцијата $f(x) = x^2$ во $D = (-\infty, +\infty)$ не е монотона, бидејќи, на пример:

$-2 < -1$ и $f(-2) = 4 < 1 = f(-1)$; $-1 < 3$ и $f(-1) = 1 < 9 = f(3)$. Но, во секој од интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ поодделно, таа е монотона.

■ Функциите $y = x^3$, $y = x^3 + 2$, $y = x^5 + 1$ се растечки, а функциите $y = -x^3$, $y = -x^3 + 2$ се опаднувачки.

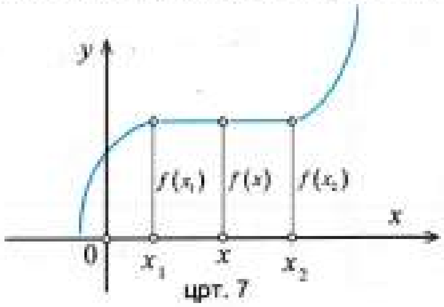
7 Експоненцијалната функција $y = 2^x$ строго монотоно расте. Докажи.

■ Ако функцијата $f(x)$ е неопаднувачка, тогаш за некои вредности на аргументот $x_1, x_2 \in D$ може да е $f(x_1) = f(x_2)$.

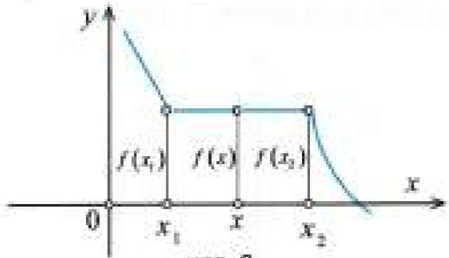
Да ги разгледаме сегментот $[x_1, x_2]$ и една произволна вредност на аргументот $x \in [x_1, x_2]$. Бидејќи функцијата е неопаднувачка и $x_1 < x < x_2$, следува дека

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \text{ т.е. } f(x) = f(x_1) = f(x_2),$$

што значи дека функцијата $f(x)$ е константна на сегментот $[x_1, x_2]$, црт. 7. Аналогно, до ист заклучок се доаѓа и ако функцијата е нерастечка, црт. 8.



црт. 7



црт. 8

8 Функцијата $f(x) = \begin{cases} x & \text{за } x \in (-\infty, 1) \\ 1 & \text{за } x \in [1, 3) \\ x+1 & \text{за } x \in [3, +\infty) \end{cases}$

е монотона што расте во делови, т.е. во интервалите $(-\infty, 1)$ и $[3, +\infty)$, а во интервалот $[1, 3)$ е константна.

Постојат функции што не се монотони во ниту еден интервал. На пример, таква е функцијата на Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{за } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{за } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Задачи:

Одреди го основниот период на функцијата:

1 а) $y = \sin \frac{4}{5} x$; б) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; в) $y = 2\cos 3x$.

2 а) $y = |\sin x|$; б) $y = \sin x + \cos x$; в) $y = \sin^2 \frac{x}{2}$.

3 а) $y = \sin \frac{3}{2} x + \cos \frac{2}{3} x$; б) $y = \cos 3x + \sin \frac{3x}{2}$.

Провери која од функциите е периодична:

4 а) $f(x) = x \sin x$; б) $f(x) = \sin 2x + \sin x$.

5 а) $f(x) = -2 + \sin x$; б) $f(x) = x + \cos x$.

6 Докажи дека функцијата: а) $f(x) = -\frac{2}{3} x + 1$ е опаднувачка; б) $f(x) = \frac{1}{2} x + 3$ е растечка.

7 Докажи дека функцијата:

а) $y = \log_2 x$ е растечка; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ е опаднувачка; в) $y = 3^{-x}$ е опаднувачка.

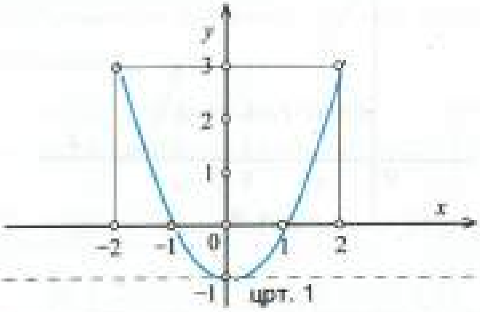
8 Која од функциите е растечка, а која опаднувачка на дадениот интервал:

а) $y = x^2 + 1$, $[0, \infty)$; б) $y = \frac{1}{x+1}$, $[0, 1]$; в) $y = \frac{1}{x^2+1}$, $[0, \infty)$?

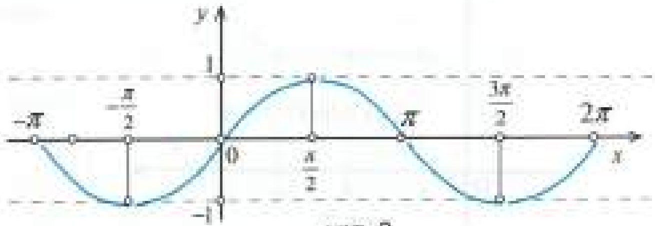
4 ОГРАНИЧЕНОСТ НА ФУНКЦИЈА. ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

На црт. 1 е прикажан графикот на функцијата $y=x^2-1$ со домен $D=\mathbb{R}$, а на црт. 2 графикот на функцијата $y=\sin x$ со домен $D=\mathbb{R}$.



црт. 1



црт. 2

- Воочи дека множеството вредности на функцијата $y=x^2-1$ е $V_f=[-1,+\infty)$.
- Функцијата има најмала вредност, т.е. е ограничена одоздола.
- Функцијата не е ограничена одозгора.
- Ако $x\in[0,2]$, тогаш $V_f=[-1,3]$.

- Воочи дека множеството вредности на функцијата $y=\sin x$ е $V_f=[-1,1]$, бидејќи $-1\le \sin x\le 1$.
- Функцијата има најголема вредност, т.е. е ограничена одозгора, но има и најмала вредност, па е ограничена одоздола. Значи, функцијата е ограничена.

A

Дефиниција. Функцијата f, со домен D е:

а) ограничена одоздола ако постои реален број m, така што $m\le f(x)$ за секој $x\in D$;

б) ограничена одозгора ако постои реален број M, така што $M\ge f(x)$ за секој $x\in D$;

в) ограничена ако постои реален број k, таков што $|f(x)|\le k$ за секој $x\in D$.

Со други зборови, $f(x)$ е: ограничена одоздола, ограничена одозгора, ограничена, ако тоа својство го има нејзиното множество вредности V_f.

Бројот M се вика ***горна меѓа***, а m ***долна меѓа*** на функцијата f.

За секоја функција што не го задоволува условот в) велиме дека е неограничена во D.

- Од дефиницијата за ограниченост на функција следува дека графикот на една ограничена функција $f(x)$ се наоѓа меѓу паралелните прави $y=-k$ и $y=k$, т.е. $-k\le f(x)\le k$.
- Функцијата $f(x)=\sin x$ (црт. 2) е ограничена, бидејќи за секој $x\in\mathbb{R}$, $|\sin x|\le 1$. Исто така, функцијата $y=\cos x$ е ограничена, т.е. $|\cos x|\le 1$ за секој $x\in\mathbb{R}$.
- Функцијата $f(x)=x^3$ е неограничена во множеството на реалните броеви, бидејќи колку и да е голем бројот k, секогаш може да се најде реален број x, таков што $|x|^3>k$.

Ако функцијата е ограничена одозгора, тогаш таа има бесконечно многу горни мeѓи.
На пример, функцијата $f(x)=-x^2+2$ е ограничена одозгора, т.е. $f(x)\le 2$. Горната меѓа на функцијата $f(x)=-x^2+2$ може да биде секој реален број $a\ge 2$.

Запомни!

Најмалата горна меѓа p на функцијата $f(x)$ се вика ***супремум*** на функцијата и се означува со $\sup(f(x))=p$.

Најголемата долна меѓа m на функцијата $f(x)$ се вика ***инфимум*** на функцијата и се означува со $\inf(f(x))=m$.

Супремумот и инфимумот може, но не мора да припаѓаат на множеството вредности V_f на функцијата.

Функцијата $f(x)=1+x^2$, $x\in\mathbb{R}$ е ограничена одоздола. Бројот 0, на пример, е една долна меѓа, а бројот 1 е инфимум на функцијата. Тој припаѓа на множеството V_f, бидејќи $f(0)=1$.

Функцијата $f(x)=2^x$, $x\in\mathbb{R}$ е ограничена одоздола. Бројот -1, на пример, е една долна меѓа, а инфимум е бројот 0. Тој не припаѓа на множеството вредности V_f на функцијата, бидејќи равенката $2^x=0$ нема решение во $\mathbb{R}$.

Функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$, $D=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ не е ограничена ниту оддолу ниту одгоре на D. Ако, пак, $f(x)=\frac{1}{x}$ ја разгледаме во некој интервал (a,b) од D, на пример во интервалот $(0,\infty)$, тогаш таа има долна граница и притоа $\inf(f(x))=0$, кој не припаѓа на множеството V_f, значи нема најмала вредност.

Во интервалот $(2,5)$ функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ е ограничена и притоа $\inf(f(x))=\frac{1}{5}$, а $\sup(f(x))=\frac{1}{2}$.

Функцијата нема ниту најголема ниту најмала вредност на интервалот $(2,5)$.

На интервалот $[2,5]$ функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ има најмала вредност $\frac{1}{5}$, а најголема вредност $\frac{1}{2}$.

1 Испитај дали функцијата $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, $D=\mathbb{R}$ е ограничена.

Согледај го решението:

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{x^2+1-1}{1+x^2}=\frac{x^2+1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}.$$

За секој $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\ge 0$, а $f(0)=0$.

За секој $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, функцијата $f(x)=1-\frac{1}{1+x^2}<1$, значи е ограничена, т.е. $0\le f(x)<1$, $\inf(f(x))=0$, а $\sup(f(x))=1$. Инфимумот припаѓа на множеството $V_f=[0,1)$, додека, пак, супремумот не припаѓа на множеството V_f, т.е. има најмала вредност, а нема најголема.

2 Испитај дали функцијата е ограничена: а) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{1+x^2}$; б) $f(x)=\dfrac{1+2x}{x}$, $D=\mathbb{R}^+$.

3 Испитај дали функцијата е ограничена: а) $y=x^2-4x+3$; б) $y=2x^2-3$.

Разгледај ја постапката:

а) $y=(x^2-4x+4)-4+3=(x-2)^2-1$. $(x-2)^2\geq 0$ за секој $x\in\mathbb{R}$, а за $x=2$, $f(2)=-1$.

Значи, функцијата е ограничена одоздола, $\inf(f(x))=-1\in V_f$, $V_f=[-1,\infty)$.

Функцијата има најмала вредност -1, за $x=2$.

Б

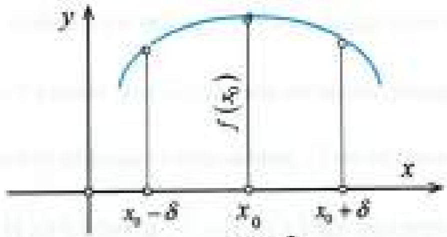
Дефиниција. Функцијата $f(x)$ со домен D во точката $x_0\in D$ има локален максимум, ако постои позитивен реален број δ, таков што $f(x_0)$ е најголемата вредност на функцијата $f(x)$ на множеството $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D$, т.е.

$$f(x)\leq f(x_0) \text{ за секој } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D.$$

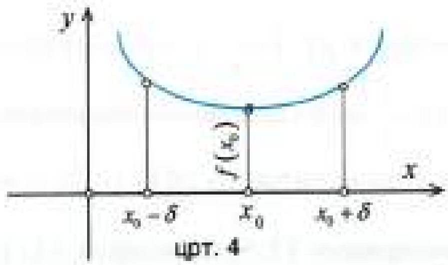
Бројот $f(x_0)$ се вика ***локален максимум*** на функцијата f, а x_0 се вика ***точка на локален максимум*** (црт. 3). Ако

$$f(x)<f(x_0) \text{ за секој } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

тогаш $f(x_0)$ се вика ***строг локален максимум***.



црт. 3



црт. 4

Дефиниција. Функцијата $f(x)$ со домен D во точката $x_0\in D$ има локален минимум, ако постои позитивен реален број δ, таков што $f(x_0)$ е најмалата вредност на функцијата $f(x)$ на множеството $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap D$, т.е.

$$f(x)\geq f(x_0) \text{ за секој } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

Бројот $f(x_0)$ се вика ***локален минимум*** на функцијата f, а x_0 се вика ***точка на локален минимум*** (црт. 4). Ако

$$f(x)>f(x_0) \text{ за секој } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

тогаш $f(x_0)$ се вика ***строг локален минимум***.

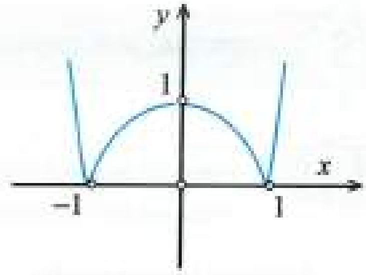
Запомни!

Локалниот максимум и локалниот минимум со заедничко име се викаат ***локални екстреми*** или само ***екстреми***.
Под екстрем ќе подразбираме строг локален екстрем ако не е поинаку речено.

4 Одреди ги екстремните вредности на функцијата $y=\left|1-x^2\right|$.

Проследи го решението:

$$y=\left|1-x^2\right|=\begin{cases}1-x^2, \text{ за } x\in[-1,1]\\ -\left(1-x^2\right), \text{ за } x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty).\end{cases}$$



црт. 5

Функцијата има локален максимум $f(0)=1$ за $x=0$, а локален минимум за $x_1=-1$ и $x_2=1$, т.е. $f(-1)=f(1)=0$, црт. 5.

Ако некој локален максимум или минимум е најголемата или најмалата вредност на функцијата f во доменот D, тогаш таа вредност се вика ***апсолутен максимум*** или ***апсолутен минимум***.

Воочи, функцијата $y=\left|1-x^2\right|$ има апсолутен минимум $f(-1)=f(1)=0$, а $x=-1$ и $x=1$ се точки на апсолутен минимум. Функцијата има локален максимум, а тоа е $f(0)=1$, а нема апсолутен максимум.

5 Одреди ги екстремните вредности на функцијата: а) $y=|x-2|$; б) $y=-2x^2+1$.

Задачи:

Испитај која од дадените функции е ограничена одоздола, која одозгора, а која е ограничена.

1 а) $y=2x^2+3$; б) $y=3-x^2$; в) $y=x^3-2$.

2 а) $y=x^2+5x-6$; б) $y=-2x^2-3x+2$.

3 а) $y=|x|+x+1$; б) $y=1-|x-1|$.

4 а) $y=3^{-x}+1$; б) $y=3^x+1$.

5 а) $y=\sin x\cos x$; б) $y=-3\cos 2x$.

6 За секоја од функциите во задачите $1-5$ одреди го множеството вредности V_f. Одреди ги: супремумот, инфимумот, најголемата и најмалата вредност на функцијата, ако постојат.

Одреди ги екстремите на функцијата $(7-9)$:

7 а) $y=x^2-2x$; б) $y=-x^2+3x-2$; в) $y=|x|$.

8 а) $y=\sin x,\ x\in(0,2\pi)$; б) $y=\cos x-1,\ x\in[0,2\pi]$.

9 а) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; б) $y=\dfrac{3x-2}{x}$.

10 Дадена е функцијата $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

а) Одреди го D_f на функцијата.
б) Одреди го V_f на функцијата.
в) Испитај ја ограниченоста на функцијата.
г) Одреди ги екстремите на функцијата.
д) Одреди ги интервалите на монотоност.
ѓ) Испитај ја парноста, непарноста на функцијата.
е) Испитај дали функцијата е периодична.

5 ОПЕРАЦИИ СО ФУНКЦИИ. СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА. ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

А **1** Нека се дадени полиномите $P_1(x)=x^2-x+1$ и $P_2(x)=x+2$. Одреди ги збирот, разликата, производот и количникот на дадените полиноми.

Согледај го решението:

$P_1(x)+P_2(x)=x^2-x+1+x+2=x^2+3$; $P_1(x)-P_2(x)=x^2-x+1-(x+2)=x^2-2x-1$;

$P_1(x)\cdot P_2(x)=(x^2-x+1)\cdot(x+2)=x^3+x^2-x+2$; $P_1(x):P_2(x)=(x^2-x+1):(x+2)=x-3$ и остаток 7.

Воочи: збирот, разликата и производот на два полиноми е пак полином, а количникот на два полиноми не е секогаш полином. Количникот на два полиноми можеме да го разгледаме и како дропка, односно

$P_1(x):P_2(x)=\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$, $P_2(x)\neq 0$, т.е. како дробно рационална функција.

Нека f и g се две функции со домен D_f и D_g, соодветно. Тогаш, ***збирот*** $f+g$, ***разликата*** $f-g$, ***производот*** $f\cdot g$ и ***количникот*** $\dfrac{f}{g}$ се функции дефинирани на следниот начин:

а) $f+g: x\mapsto f(x)+g(x)$; б) $f-g: x\mapsto f(x)-g(x)$; в) $f\cdot g: x\mapsto f(x)\cdot g(x)$; г) $\dfrac{f}{g}: x\mapsto\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Функциите а), б) и в) се определени за сите вредности на x за кои се определени f и g, т.е. за $x\in D=D_f\cap D_g$, а функцијата $\dfrac{f}{g}$ е определена за сите вредности на x за кои се определени функциите f и g, при што $g(x)\neq 0$, т.е. доменот е $D=D_f\cap D_g\setminus\{x\in D_g : g(x)=0\}$.

2 Нека $f(x)=2x+3$, $D_f=\mathbb{R}$ и $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$, $D_g=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Одреди ги:

$(f+g)(x)$; $(f-g)(x)$; $(f\cdot g)(x)$; $\dfrac{f}{g}(x)$ и нивните домени.

Согледај го решението:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x+3+\dfrac{x^2-1}{x+2}=\dfrac{3x^2+7x-5}{x+2}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$;

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=2x+3-\dfrac{x^2-1}{x+2}=\dfrac{x^2+7x+7}{x+2}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$;

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(2x+3)\cdot\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{2x^3+3x^2-2x-7}{x+2},\ D=\mathbb{R}\setminus\{-2\};$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x+3}{\frac{x^2-1}{x+2}}=\frac{(2x+3)\cdot(x+2)}{x^2-1}=\frac{2x^2+7x+6}{x^2-1},\ D=\mathbb{R}\setminus\{\{-2\}\cup\{-1,1\}\}=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,1\},$$

бидејќи за $x=1$ и $x=-1$, $g(x)=0$.

3 Нека $f(x)=\sqrt{x-2}$, $D_f=[2,\infty)$ и $g(x)=x^2-9$, $D_g=\mathbb{R}$. Одреди ги: $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ и нивните домени.

Операциите со две функции дефинирани со претходните правила може да се прошират на три и повеќе функции според истите правила.

Нека $f(x)=\sqrt{x-2}$, $D_f=[2,\infty)$ и $g(x)=\sqrt{1-x}$, $D_g=(-\infty,1]$. Тогаш $f(x)+g(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$.

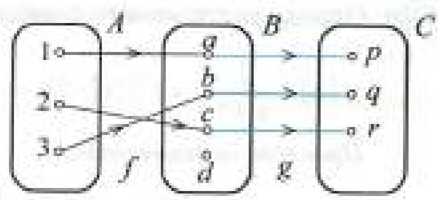
Доменот е $D_{f+g}=D_f\cap D_g=\varnothing$, т.е. D_{f+g} е празно множество. Во овој случај $(f+g):x\to f(x)+g(x)$ не претставува функција, бидејќи не ја задоволува дефиницијата за функција. За таквите "функции" запишани во аналитички вид велиме дека се ***празни***.

Воочи дека за дадените функции f и g, и "функциите" $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ и $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ се празни.

Нека f е пресликување од A во B, а g пресликување од B во C, т.е. $f:A\to B$, $g:B\to C$. Со пресликувањето f на секој елемент $x\in A$ му е придружен елемент $f(x)\in B$.

Со пресликувањето g на елементот $f(x)$ од множеството B му е придружен единствен елемент од множеството C, којшто го означуваме со $g(f(x))$.

На тој начин е одредено едно пресликување од A во C. Ова пресликување се вика состав или композиција од f и g, кое го означуваме со $g\circ f$.



Според тоа:

$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ или $x\mapsto f(x)\mapsto g(f(x))$, т.е. $(g\circ f):A\to C$.

Воочи дека сложеното пресликување $g\circ f$ е определено само ако множеството вредности на f му припаѓа на доменот на g, т.е. ако $V_f\subset D_g$.

Имајќи предвид дека функциите се специјален вид пресликување од $D\subseteq\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$, составот $g\circ f$ од две функции f и g е функција за која може да се искаже следнава

Дефиниција. Ако f и g се дадени функции, тогаш составот (или композицијата) на f и g означен со $g \circ f$ е функцијата

$$g \circ f : x \to g(f(x))$$

дефинирана за оние броеви x, за кои е определена дадената функција f и за кои бројот $f(x)$ му припаѓа на доменот на функцијата g. Значи, $g \circ f$ е функција за којашто важи:

1. $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f \ \wedge \ f(x) \in D_g$ и
2. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ за секој $x \in D_{g \circ f}$.

Функцијата $g \circ f$ претставува правило, при кое прво се применува f, а потоа g. Додека, пак, кај функцијата $f \circ g$ прво се применува g, а потоа f. Внимавај, $g \circ f$ не е исто што и производот $g f$.

4 Дадени се функциите $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = -3x + 2$. Одреди ги функциите: а) $g \circ f$; б) $f \circ g$.

Согледај го одговорот:

а) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -3(f(x)) + 2 = -3(x^2 + 1) + 2 = -3x^2 - 1$;

б) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = (-3x + 2)^2 + 1 = 9x^2 - 12x + 5$.

Воочи, за составот на функциите f и g не важи комутативното својство, т.е. $f \circ g \neq g \circ f$.

5 Нека $f(x) = \sqrt{x-2}$, $D_f = [2, \infty)$ и $g(x) = 11 - x^2$, $D_g = \mathbb{R}$. Одреди ги сложените функции $f \circ g$ и $g \circ f$ и нивните домени.

Разгледај го решението:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 2} = \sqrt{11 - x^2 - 2} = \sqrt{9 - x^2}$, $D_{f \circ g} = [-3, 3]$;

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 11 - (f(x))^2 = 11 - \left(\sqrt{x-2}\right)^2 = 13 - x$, $D_{g \circ f} = [2, \infty)$,

бидејќи $\left(\sqrt{x-2}\right)^2 = x - 2$, за $x \in [2, \infty)$.

6 Одреди ги сложените функции $h = g \circ f$ и $\varphi = f \circ g$ ако $f(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ и

$g(x) = \dfrac{1}{x+5}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Проследи го решението:

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{f(x) + 5} = \dfrac{1}{2(x+3)}$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$;

$\varphi(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot \dfrac{1}{x+5} + 1 = \dfrac{x+7}{x+5}$, $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

7 Нека функциите $f(x) = x + 1$, $g(x) = x + 2$ и $h(x) = x^2$ се дефинирани за секој $x \in \mathbb{R}$. Докажи дека важи асоцијативното својство

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Потсети се!

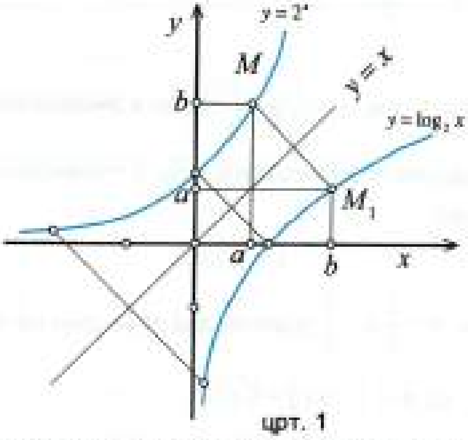
На црт. 1 се претставени графиците на функциите $y=2^x$ и $y=\log_2 x$.

Воочи:

- За експоненцијалната функција $y=2^x$ е:

$$D_f=\mathbb{R},\ V_f=\mathbb{R}^+.$$

- Графикот на функцијата $y=2^x$ е крива што минува низ точката $M(a,b)$.



црт. 1

- За логаритамската функција $y=\log_2 x$ е:

$$D_f=\mathbb{R}^+,\ V_f=\mathbb{R}.$$

- Графикот на функцијата $y=\log_2 x$ е кривата што минува низ точката $M_1(b,a)$.

- Графиците на двете функции имаат иста форма и се симетрични во однос на правата $y=x$, т.е. симетралата на првиот и третиот квадрант.
- Ако точката $M(a,b)$ припаѓа на графикот на функцијата $y=2^x$, тогаш точката $M_1(b,a)$ припаѓа на графикот на функцијата $y=\log_2 x$.
- Функциите $y=2^x$ и $y=\log_2 x$ се инверзни една на друга.

B Освен аритметичките операции и композицијата на функции, од интерес е и ***операцијата инверзија***.

Ако е дадена функцијата f со домен D_f и множество вредности V_f се поставува прашање дали постои функција g со домен $D_g=V_f$ и множество вредности $V_g=D_f$, таква што има обратно дејство, т.е.

$$g(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y, \text{ за секој } x\in D_f \text{ и } y\in V_f.$$

Функцијата g што ги задоволува претходните барања се вика инверзна функција (инверзија) на функцијата f.

Инверзната функција на f ќе ја означуваме со f^{-1}, т.е. ако g е инверзија на f, тогаш инверзната функција $g(x)=f^{-1}(x)$.

Дали за дадена функција f постои инверзија g, одговорот го дава следнава

Теорема. За дадена функција f постои инверзија g ако и само ако f го задоволува условот

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2, \text{ за секои } x_1,x_2\in D_f.$$

Во тој случај инверзијата g е еднозначно определена.

Ова тврдење нема да го докажеме, а во пракса не е неопходно да се проверува дали е исполнет бараниот услов, туку е доволно да се провери дали равенката $y=f(x)$ има еднозначно решение по x, при условот $y\in V_f$. Ако x е решение на таа равенка, тогаш $f^{-1}(y)=g(y)=x$ е инверзна функција на f.

8 Одреди ја инверзната функција на f, ако $D_f = V_f = \mathbb{R}$ и ако:

а) $y = 3x - 1$; б) $y = -\frac{1}{2}x + 2$; в) $y = x^3$.

Сограедај го решението:

а) Од $y = 3x - 1$ следува $3x = y + 1$, т.е. $x = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$. Значи, инверзната функција $f^{-1} = g(y) = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$.

Вообичаено, со x се означува независно променливата, а со y – зависно променливата. Затоа, инверзната функција g се запишува во обликот

$$y = g(x).$$

Според тоа, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ или $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ е инверзна функција на функцијата $y = 3x - 1$.

б) $y = f^{-1}(x) = -2x + 4$; в) $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

За функцијата $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ со домен $D = \mathbb{R}$ и $V_f = \mathbb{R}^+$ инверзна е функцијата $y = f^{-1}(x) = \log_a x$ со домен $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$ и $V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Воочи дека сите функции во задачата 8 се строго монотони, а нивните инверзни функции се, исто така, строго монотони, а тоа важи и општо, како што се тврди во следнава теорема.

Теорема. Секоја функција f што е строго монотона во доменот D_f има инверзна функција f^{-1} што е, исто така, строго монотона во множеството вредности V_f.
Притоа, f и f^{-1} имаат иста природа на монотоност, т.е. и двете се или растечки или опаднувачки.

Функција што е монотоно нерастечка или неопаднувачка нема своја инверзна функција.

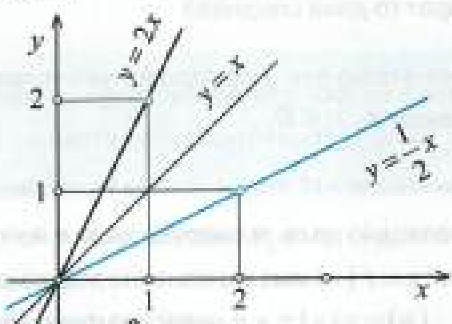
Ако $[a,b]$ е сегмент во којшто функцијата f има константна вредност, тогаш за секој

$$x \in [a,b],\ f(x) = f(a) = f(b) = c.$$

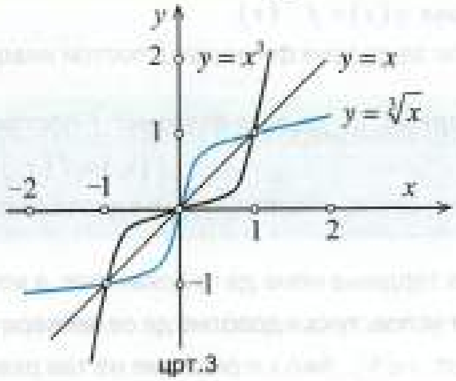
Обратно, на вредноста $y = c$ одговара не еден, туку множество вредности x, тоа е множеството на сите вредности за кои $y = c$, т.е. $x \in [a,b]$. Според тоа, не е можно да се дефинира инверзна функција.

Порано рековме дека графиците на функциите $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ се симетрични во однос на правата $y = x$ (симетралата на првиот и третиот квадрант).

На црт. 2 се претставени графиците на заемно инверзните функции $y = 2x$ и $y = \frac{1}{2}x$, а на црт. 3 графиците на функциите $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.



црт. 2



црт.3

Функциите $y=f(x)$ со домен D_f и $x=f^{-1}(y)$ со домен $D_{f^{-1}}=V_f$ се заемно инверзни, т.е.

$$f^{-1}(f(x))=x \text{ и } f\left(f^{-1}(y)\right)=y.$$

На пример, 2^x и $\log_2 x$ се заемно инверзни функции. За нив важи: $2^{\log_2 x}=x$ и $\log_2 2^x=x$.

9 Испитај дали функцијата $y=x^2$, $D_f=\mathbb{R}$, $V_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ има инверзна функција.

Сопледај го решението:

Дадената функција нема инверзна функција бидејќи $f(-2)=4=f(2)$, т.е. не е исполнет условот $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Меѓутоа, ако функцијата се разгледува посебно во областите $D_1=(-\infty,0]$ и $D_2=[0,+\infty)$, тогаш функцијата $y=x^2$ се разложува на две функции: $y_1=x^2$ со D_1 и $y_2=x^2$ со D_2, (кои се викаат ограничувања на функцијата f). Функцијата $f_1:D_1\to V_f$ има инверзна функција $y=-\sqrt{x}$, а функцијата $f_2:D_2\to V_f$ има инверзна функција $y=\sqrt{x}$. Но, добиените функции не се инверзни на функцијата $y=x^2$ со домен $D_f=\mathbb{R}$.

Ако е дадена функцијата $f(x)$ со домен D_f и кодомен V_f, тогаш инверзната функција $f^{-1}(x)$ е со домен $D_{f^{-1}}=V_f$ и кодомен $V_{f^{-1}}=D_f$. Инверзната функција f^{-1} на функцијата f овозможува многу полесно да се одреди множеството V_f на функцијата f.

10 Испитај ја ограниченоста на функцијата: а) $y=x^2-4x+5$; б) $y=-x^2+x$.

Разгледај го решението:

Ограниченоста на функцијата f е одредена од опсегот V_f, т.е. од дефиниционата област на инверзната функција.

а) $y=x^2-4x+5$; $x^2-4x+5-y=0$.

Функцијата $x=f^{-1}(y)$ е дефинирана за реалниот број y за којшто $D=b^2-4ac\ge 0$. Според тоа, $D=16-20+4y\ge 0$, т.е. $y\ge 1$. Значи, $V_f=[1,+\infty)$, па функцијата е ограничена одоздола.

б) Од $y=-x^2+x$ следува $x^2-x+y=0$, $D=1-4y\ge 0$, т.е. $y\le\frac{1}{4}$, па $V_f=\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$. Значи, функцијата е ограничена одозгора.

11 Одреди го множеството вредности на функцијата:

а) $y=\frac{x+1}{x-2}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$; б) $y=\frac{2x+5}{3x+4}$, $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

Проследи го решението:

а) Ја одредуваме инверзната функција на дадената и имаме:

$$y(x-2)=x+1,\quad x=f^{-1}(y)=\frac{2y+1}{y-1}.$$

Множеството вредности на дадената функција е дефиниционото множество на инверзната функција, т.е. $V_f=D_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Задачи:

1 Одреди ги $f+g$ и $f\cdot g$ и нивните домени ако:

а) $f(x)=2x+5,\ g(x)=3x^2-1$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x-1},\ g(x)=x-1$; в) $f(x)=\dfrac{1-x}{x+1},\ g(x)=3x^2-1$.

2 Нека $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{x}}$ и $g(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$. Одреди ги: а) $f+g$; б) $f\cdot g$ и нивните домени.

3 Ако $f(x)=2x+1$, одреди: а) $f+f$; б) $f\cdot f\cdot f$.

Одреди ги сложените функции $f\circ g$ и $g\circ f$ ако:

4 а) $f(x)=5x-4,\ x\in\mathbb{R}$ и $g(x)=2-3x,\ x\in\mathbb{R}$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x+2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ и $g(x)=2x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

5 $f(x)=1-x,\ x\in\mathbb{R}$ и $g(x)=\dfrac{x+3}{2x+4},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

6 $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,\infty),\ g(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R}$.

7 Ако $f(x)=\dfrac{1+3x}{x-3},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, докажи дека $f\circ f=x$.

8 Ако $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$, докажи дека $f(f(x))=x$.

9 Одреди ја инверзната функција на функцијата:

а) $y=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}x$; б) $y=\dfrac{2x+3}{x-2}$; в) $y=\sqrt[3]{x}+1$; г) $y=10^{x-2}+3$.

10 Докажи дека функцијата:

а) $y=\dfrac{1}{x}$; б) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ е инверзна сама на себе.

6 ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

А Во досегашното следење на наставата по математика се сретна со различни функции. Следните функции ги нарекуваме ***основни елементарни функции:***

1. c – константна функција (c е константа);
2. Степенска функција x^r, $r\in\mathbb{R}$;
3. Експоненцијална функција a^x, $a>0$, $a\neq 1$;
4. Логаритамска функција $\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$;
5. Тригонометриски функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$;
6. Инверзни функции на тригонометриските: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$;

Со помош на овие функции ќе ја дефинираме класата ***елементарни функции.***

Дефиниција. Секоја функција што може да се добие од основните елементарни функции со примена на аритметичките операции (собирање, одземање, множење и делење) и операцијата составување се вика елементарна функција.

На пример, функцијата $f(x)=\sqrt{x-1}+\sin^2 x$ е збир од функциите $\sqrt{x-1}$ со домен $D_1=[1,+\infty)$ и $\sin^2 x$ со домен $D_2=(-\infty,+\infty)$, па функцијата $f(x)$ е со домен $D=D_1\cap D_2=[1,+\infty)$.

Видови на елементарни функции се:

1. Полиномни (или цели рационални) функции

Пример: $P(x)=2x^4+3x^2-x+5$; $R(x)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}x^2-3x^3$ итн.

2. Дробно рационални функции

Пример: $g(x)=\frac{3x^2-4x+1}{x^2+1}$, $\varphi(x)=\frac{x-2}{x^2+4x+5}$ или општо $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, каде што $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми и притоа $Q(x)$ е ненулти полином.

Воочи дека рационалните функции се добиени од основните елементарни функции од видот 1. и 2. за $r\in\mathbb{N}$, а со примена на аритметичките операции и операцијата композиција.

Функцијата $f(x)$ се вика алгебарска ако е добиена од основните елементарни функции од видот 1. и 2. за $r\in\mathbb{N}$ со примена на аритметичките операции, операцијата состав и операцијата извлекување на корен, т.е. за $r=\frac{m}{n}$; $m,n\in\mathbb{N}$. Ако n е парен број, тогаш се работи со аритметичка вредност на коренот.

Запомни!

Секоја рационална функција (полиномна или дробна) е ***алгебарска*** функција.
Обратното не важи, т.е. секоја алгебарска функција не е рационална.

На пример, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt[3]{x+1}$ се алгебарски, но не се рационални.

3. Алгебарските функции што не се рационални се викаат **ирационални функции**.

Пример: $2\sqrt[3]{x}-3x+5$; $x+\sqrt{1+x^2}$; $|x|=(x^2)^{\frac{1}{2}}$; x^r, $r\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ итн.

4. Елементарните функции што не се алгебарски се викаат **трансцендентни функции.**
Такви се: експоненцијалната функција, логаритамската функција, тригонометриската функција итн.
Поделбата на елементарните функции е прикажана на следната табела.

1 Да ја разгледаме функцијата $f(x)=x^r,\ r\in\mathbb{R}$ којашто се вика ***степенска функција***.

Ако показателот r е рационален број, тогаш степенската функција е ***алгебарска***, а кога r е ирационален број, тогаш степенската функција е ***трансцендентна***.

Степенската функција ќе ја разгледаме во следниве случаи:

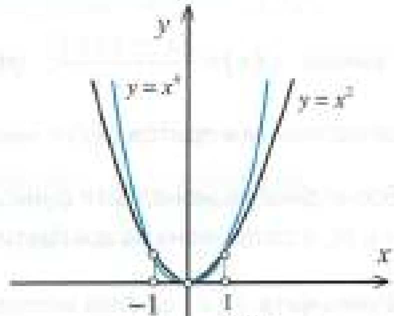
1. Показателот r е парен природен број; т.е. функцијата е од видот $f(x)=x^{2n},\ n\in\mathbb{N}$.

Некои својства на функцијата се:

1°. Доменот е $D_f=\mathbb{R}$. 2°. $V_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$.

3°. Функцијата е парна, $f(-x)=(-x)^{2n}=x^{2n}=f(x)$.

4°. Функцијата опаѓа во интервалот $(-\infty,0)$, а расте во интервалот $(0,\infty)$, црт. 1.



црт. 1

2. Показателот r е непарен природен број, т.е.

$$f(x)=x^{2n-1},\ n\in\mathbb{N}.$$

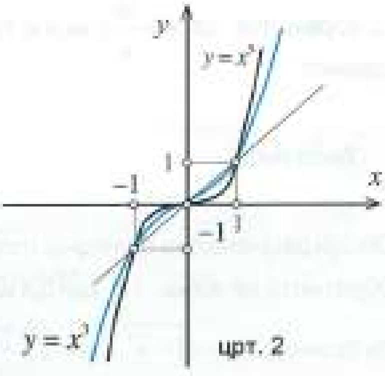
Својствата на функцијата се:

1°. Доменот е $D_f=\mathbb{R}$. 2°. $V_f=\mathbb{R}$.

3°. Функцијата е непарна, т.е.

$$f(-x)=(-x)^{2n-1}=-x^{2n-1}=-f(x).$$

4°. Функцијата е растечка, црт. 2.



црт. 2

3. Показателот r е цел негативен број:

а) $f(x)=x^{-2n}=\dfrac{1}{x^{2n}},\ n\in\mathbb{N}$.

Некои својства на функцијата се:

1°. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2°. $V_f=(0,+\infty)$.

3°. Функцијата е парна, т.е,.

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^{2n}}=\frac{1}{x^{2n}}=f(x).$$

б) $f(x)=x^{-(2n-1)}=\dfrac{1}{x^{2n-1}},\ n\in\mathbb{N}$.

Некои својства на функцијата се:

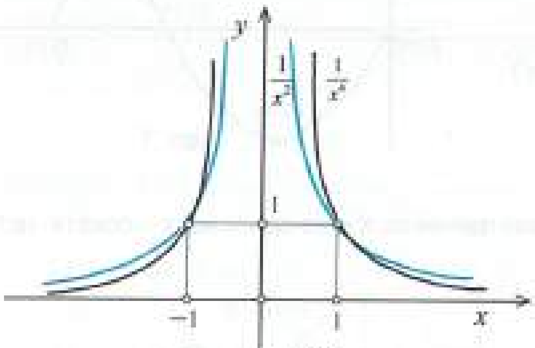
1°. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2°. $V_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

3°. Функцијата е непарна, т.е.

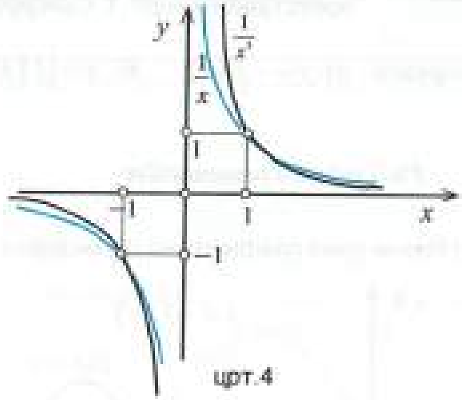
$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^{2n-1}}=-\frac{1}{x^{2n-1}}=-f(x).$$

4^0. Расте во интервалот $(-\infty,0)$, а опаѓа во интервалот $(0,+\infty)$, црт. 3.



црт.3

4^0. Функцијата опаѓа за секој $x \in D_f$, црт. 4



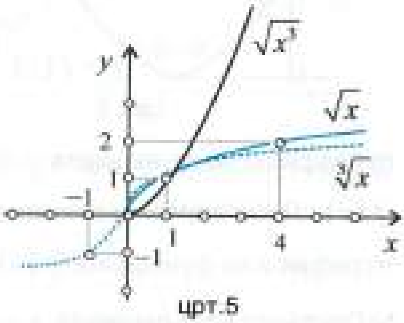
црт.4

4. Показателот r е позитивен рационален број, т.е. $r=\frac{m}{n}$, при што m и n се заемно прости броеви, па $f(x)=x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$.

- Ако n е парен број, тогаш $D_f=[0,+\infty)$, $V_f=[0,+\infty)$, $f(x)$ расте.
- Ако n е непарен број, тогаш $D_f=\mathbb{R}$, $V_f=\mathbb{R}$ и функцијата расте.

На црт. 5 се претставени графиците на функциите:

$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$, $y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ и $y=x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x^3}$.



црт.5

Задачи:

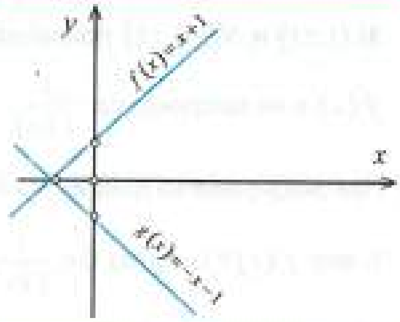
Нацртај го графикот на функцијата.

1. а) $y=x^6$, $y=x^{-5}$; б) $y=x^{\frac{1}{5}}$.
2. а) $y=5^x$; б) $y=0{,}2^x$; в) $y=\log_5 x$; г) $y=\log_{0,2} x$.
3. а) $y=2\sin x$; б) $y=\cos\frac{x}{2}$.

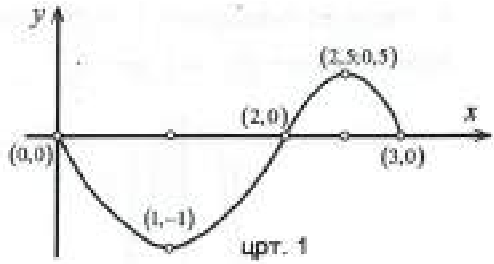
7 СКИЦИРАЊЕ ГРАФИЦИ НА НЕКОИ ФУНКЦИИ СО ПОМОШ НА ГРАФИЦИТЕ НА ЕЛЕМЕНТАРНИТЕ ФУНКЦИИ

Потсети се!

- Во ист координатен систем претставени се графиците на функциите $f(x)=x+1$ и $g(x)=-x-1$.
- Воочи, $g(x)=-f(x)$.
- Графиците на функциите $f(x)$ и $g(x)$ се симетрични во однос на x – оската.



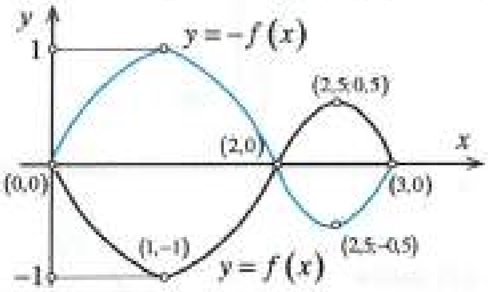
А **1** Графикот на некоја функција $f(x)$ е претставен на црт. 1. Скицирај го графикот на функцијата: а) $y=-f(x)$; б) $y=|f(x)|$; в) $y=\frac{1}{f(x)}$.



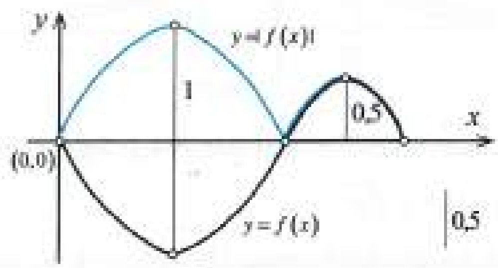
црт. 1

Разгледај го решението:

а) Воочи дека графикот на функцијата $y=-f(x)$ е симетричен со $f(x)$ во однос на x – оската, црт. 2.



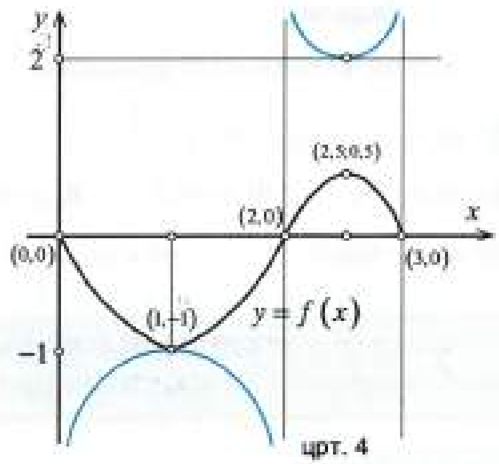
црт. 2



црт. 3

б) Графикот на функцијата $y=|f(x)|$ ќе го нацртаме така што делот од графикот на $f(x)$, при кој $f(x)<0$ ќе го пресликаме симетрично во однос на x – оската, а делот од графикот при кој $f(x)\geq 0$ е график и на функцијата $f(x)$, црт. 3.

в) Графикот на функцијата $y=\frac{1}{f(x)}$, која се вика реципрочна на функцијата $f(x)$, претставен е на црт. 4.



црт. 4

- Воочи дека функцијата $y=\frac{1}{f(x)}$ не е дефинирана за $x=0$, $x=2$ и $x=3$, т.е. правите $x=0$, $x=2$ и $x=3$ се вертикални асимптоти.

- Ако $f(x)=\pm1$, тогаш и $\frac{1}{f(x)}=\pm1$. Точките $M(1,\pm1)$ и $N(-1,\pm1)$ припаѓаат и на графикот од $f(x)$ и на графикот од $\frac{1}{f(x)}$.

- При скицирање на графикот на функцијата $\frac{1}{f(x)}$ треба да се има предвид следното:

1. ако $f(x)\geq1$, тогаш $0<\frac{1}{f(x)}\leq1$;
2. ако $0\leq f(x)\leq1$, тогаш $1\leq\frac{1}{f(x)}<+\infty$;
3. ако $-1\leq f(x)\leq0$, тогаш $-\infty<\frac{1}{f(x)}\leq-1$;
4. ако $f(x)\leq-1$, тогаш $-1\leq\frac{1}{f(x)}<0$.

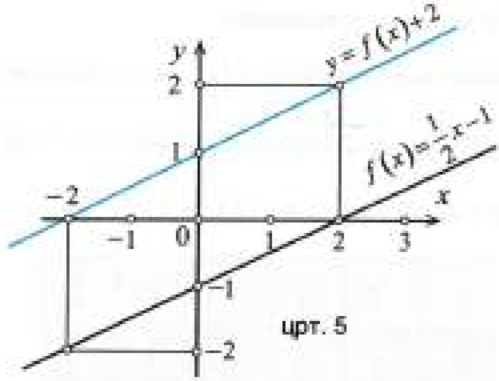
2 Дадена е функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x-1$. Скицирај го графикот на функцијата:

а) $y=f(x)+2$;   б) $y=|f(x)|$;   в) $y=\frac{1}{f(x)}$.

Разгледај ја постапката на решавањето:

а)

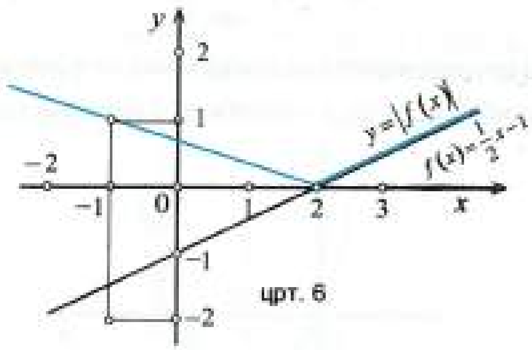
x	-2	0	2
$f(x)$	-2	-1	0
$f(x)+2$	0	1	2



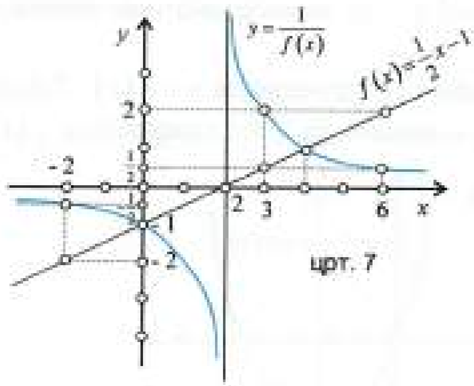
црт. 5

Воочи дека графикот на функцијата $f(x)+2$ е добиен така што ординатата на секоја точка на функцијата $f(x)$ е зголемена за 2, црт. 5.

б) Графикот на функцијата $y=|f(x)|$ е нацртан така што делот од графикот $f(x)$ при кој $f(x)<0$ е пресликан симетрично во однос на $x-$ оската, црт. 6, а другиот дел сам во себе.



црт. 6



црт. 7

в) Графикот на функцијата $y=\frac{1}{f(x)}$ е претставен на црт. 7.

Воочи дека доменот на $\frac{1}{f(x)}$ е $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$. Инверзната функција на $f(x)$ е

$x=\varphi^{-1}(y)=\frac{2(1+y)}{y}$. $D_{\varphi^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, па значи множество вредности $V_y=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Правата $x=2$ е вертикална асимптота, а правата $y=0$, т.е. $x-$ оската е хоризонтална асимптота.

Точките $(0,-1)$ и $(4,1)$ лежат на графикот на функцијата $\frac{1}{f(x)}$. Бидејќи $f(6)=2$, $\frac{1}{f(6)}=\frac{1}{2}$, а $\frac{1}{f(-2)}=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{0,5}=2$.

3 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y=|2^x-3|$;   б) $y=|\log_2 x|$.

4 Дадена е функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$. Скицирај го графикот на функцијата:

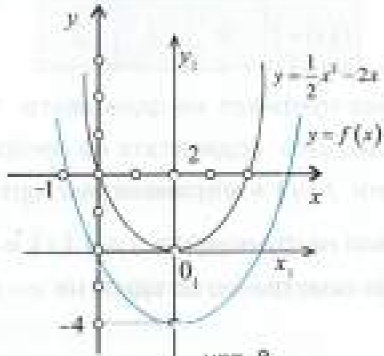
а) $y=f(x)-2$; б) $y=\left|f(x)\right|$; в) $y=\frac{1}{f(x)}$.

Проследи го решението:

Графикот на функцијата $f(x)$ ќе го нацртаме така што во помошен координатен систем $x_1O_1y_1$ ќе го претставиме графикот на функцијата x^2, каде што $O_1(\alpha,\beta)$, $\alpha=-\frac{b}{2a}$, $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

$\alpha=2$, $\beta=-2$, т.е. $O_1(2,-2)$.

x	-2	-1	0	1	2
$\frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

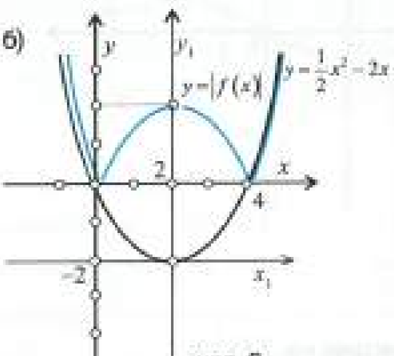


црт. 8

Добиениот график е график на функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$ во координатниот систем xOy.

а) Графикот на функцијата $y=f(x)-2$ е добиен така што ординатата на секоја точка на функцијата $f(x)$ е намален за 2, т.е. графикот на $f(x)$ е "спуштен" надолу по $y-$оската за 2 единици, црт. 8.

б)



црт. 9

Некои својства на функцијата $y=\left|f(x)\right|$ се:

1^0. $D_y=\mathbb{R}$. 2^0. $V_y=[0,+\infty)$.

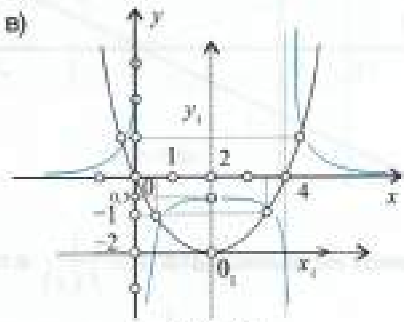
3^0. Функцијата не е ниту парна ниту непарна.

4^0. $y_{max}=2$ за $x=2$, $y_{min}=0$ за $x=0$ и $x=4$.

5^0. Нема апсолутен максимум, а има апсолутен минимум.

6^0. Расте за $x\in(0,2)\cup(4,+\infty)$, опаѓа за $x\in(-\infty,0)\cup(2,4)$, црт. 9.

в)



црт. 10

Некои својства на функцијата $y=\frac{1}{f(x)}$ се:

1^0. $D_y=(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$.

2^0. $V_y=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup(0,+\infty)$.

3^0. Расте за $x\in(-\infty,0)\cup(0,2)$, а опаѓа за $x\in(2,4)\cup(4,+\infty)$.

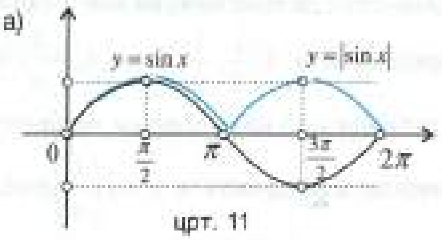
4^0. $y_{max}=-\frac{1}{2}$ за $x=2$. Нема апсолутен максимум ниту апсолутен минимум, црт. 10.

5 Дадена е функцијата $f(x)=\sin x,\ x\in[0,2\pi]$. Нацртај го графикот на функцијата:

а) $y=\left|f(x)\right|$; б) $y=\dfrac{1}{f(x)}$.

Проследи го решавањето:

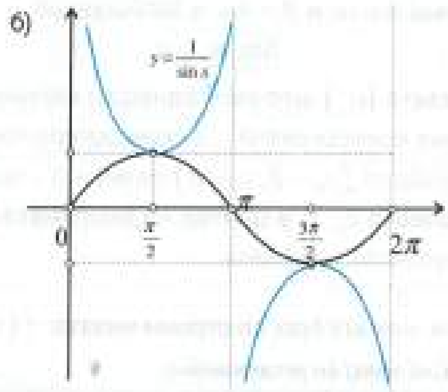
а) За $x=0$, $x=\pi$ и $x=2\pi$, $f(x)=0$. За $x=\dfrac{\pi}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, а за $x=\dfrac{3\pi}{2}$, $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$.



црт. 11

Делот од графикот на $f(x)$ при кој $f(x)<0$ ќе го пресликаме симетрично во однос на x – оската, а другиот дел сам во себе, црт. 11.

б) Воочи: 1^0. Правите $x=0$, $x=\pi$ и $x=2\pi$ се вертикални асимптоти.



црт. 12

2^0. $D_y=(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$. 3^0. $V_y=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

4^0. $y_{max}=-1$ за $x=\dfrac{3\pi}{2}$, $y_{min}=1$ за $x=\dfrac{\pi}{2}$. Нема апсолутен минимум и апсолутен максимум.

5^0. Расте во интервалот $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, а опаѓа во $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$, црт. 12.

Задачи:

Нацртај го графикот на функцијата:

1. а) $y=-x^3$; б) $y=-2^x$; в) $y=-\dfrac{1}{x}$.
2. а) $y=2^{x+1}-3$; б) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; в) $y=\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$.
3. а) $y=|x+2|-3$; б) $y=|1-x^2|$; в) $y=|\cos x|$.
4. а) $y=x^2+6|x|$; б) $y=\big||x|-1\big|$.
5. а) $y=\left|-x^2-3x\right|$; б) $y=\dfrac{1}{|x^2-3x|}$.
6. а) $y=|3-2x|$; б) $y=\dfrac{1}{|3-2x|}$; в) $y=\dfrac{1}{|\cos x|}$.
7. а) $y=\dfrac{|2x|}{x}$; б) $y=|x+2|+2x-3$.
8. а) $y=\dfrac{1}{x+2}$; б) $y=\dfrac{2}{|4-x^2|}$.

8 ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Бројот a е граница на низата $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ ако за секој позитивен број ε, постои природен број n_0 (n_0 зависи од ε), таков што $|a_n - a| < \varepsilon$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $n > n_0$, а запишуваме
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a.$$
- За низата (a_n) што има граница a велиме дека се вика конвергентна, т.е. конвергира кон a.
- Интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ се вика δ – околина на точката x_0, x_0 е центар на околината и δ е радиус на таа околина.

А 1 Дадена е функцијата
$$y = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$
Нека аргументот x се приближува кон 0, преку низата од вредностите $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$, т.е. $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Состави таблица што ќе ги содржи вредностите x_n на аргументот и вредностите $y_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, ...$, како и вредностите $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right|$, $n = 1, 2, 3, ...$

Воочи, кон кој број се стреми низата $f(x_n)$, а кон што се доближува разликата $|f(x_n) - 1|$.

Согледај го решението:

x_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{10}$	...	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{1000}$	...
$f(x_n)$	0,5	0,8	0,9	0,94	...	0,990099	...	0,9999	...	0,999999	...
$\|f(x_n) - 1\|$	0,5	0,2	0,1	0,06	...	0,009901	...	0,0001	...	0,000001	...

Од таблицата може да се воочи дека вредностите $f(x_n)$ на функцијата се доближуваат до 1, а разликата $|f(x_n) - 1|$ се доближува до нула кога аргументот x се стреми кон нула преку низата $\left(\frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, ...$

Ако земеме која било низа (x_n) што конвергира кон бројот 0, т.е. $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, можеме да се увериме дека соодветната низа од вредностите на функцијата $f(x_n) = \frac{1}{1+x_n^2}$ се стреми кон бројот 1, т.е. $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$.
Поради тоа велиме дека 1 е граничната вредност на функцијата во точката $x = a$.

Дефиниција 1. Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана во некоја околина на точката a, при што во точката a не мора да е дефинирана.
Бројот A се вика ***гранична вредност*** или ***граница*** на функцијата $f(x)$ во точката $x = a$, ако секоја низа (x_n), таква што $x_n \in D_f$, $x_n \neq a$ и $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, соодветната низа од вредностите на функцијата $f(x)$:
$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ... \text{ конвергира кон А, т.е. } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A.$$
Во тој случај запишуваме
$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \text{ (или } f(x) \to A \text{ кога } x \to a.)$$

2 Испитај дали функцијата $f(x)=3x-1$ има граница во точката $a=1$.

Согледај го решението:

Доменот на функцијата е $D_f=\mathbb{R}$, па $f(x)$ е дефинирана во (секоја) околина на точката 1, $1\in D_f$.

- Нека $x\to 1$ преку низата: $x_1=2, x_2=1+\frac{1}{2}, x_3=1+\frac{1}{3}, x_4=1+\frac{1}{4},\ldots, x_n=1+\frac{1}{n},\ldots$, т.е. се доближува кон 1 оддесно. Низата соодветни вредности на функцијата е $f(x_n)$:

$$f(x_1)=3\cdot 2-1=5;\ \ f(x_2)=3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)-1=2+\frac{3}{2};\ \ f(x_3)=3;\ \ f(x_4)=2+\frac{3}{4};\ldots,\ f(x_n)=2+\frac{3}{n};\ldots,$$

којашто се стреми кон 2 кога $n\to\infty$, т.е. кога $x\to 1$.

- Нека сега $x\to 1$ преку низата: $x_1=1-\frac{1}{2};\ x_2=1-\frac{1}{3};\ x_3=1-\frac{1}{4};\ x_4=1-\frac{1}{5};\ldots, x_n=1-\frac{1}{n+1},\ldots$, т.е. се доближува кон 1 одлево, тогаш

$$f(x_1)=\frac{1}{2};\ \ f(x_2)=1;\ \ f(x_3)=2-\frac{3}{4};\ \ f(x_4)=2-\frac{3}{5};\ldots,\ f(x_n)=2-\frac{3}{n+1},\ldots$$

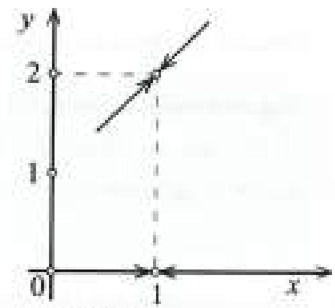
Очигледно, $f(x_n)\to 2$ кога $n\to\infty$, за $x_n=1+\frac{1}{n}$ и $x_n=1-\frac{1}{n}$.

Ако (x_n) е која било низа што конвергира кон 1, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$, тогаш:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(3\cdot(x_n)-1\right)=3\cdot\lim_{n\to\infty} x_n-1=3\cdot 1-1=2,$$ црт. 1.

Според тоа:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(3x-1)=3\cdot 1-1=2.$$



црт. 1

3 Одреди ја граничната вредност на функцијата $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ во точката $x=-2$.

Согледај го решението:

- Функцијата е дефинирана за $x+2\neq 0$, т.е. $x\neq -2$, па $D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$. И овде можеме да разгледуваме произволна низа (x_n) во околината на точката -2, иако $-2\notin D_f$ на функцијата $f(x)$.

Ако (x_n) е произволна низа така што $x_n\neq -2, x_n\in D_f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-2$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{\,2}-4}{x_n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-2)(x_n+2)}{x_n+2}=\lim_{n\to\infty}(x_n-2)=-2-2=-4,\ \text{ т.е. } \lim_{x\to -2} f(x)=-4.$$

Воочи дека дропката ја скративме со x_n+2, а кратењето е можно бидејќи $x_n\neq -2$, т.е. $x_n+2\neq 0$.
Според тоа,

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4.$$

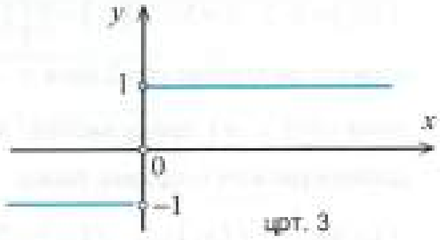
(И овде кратењето е можно, бидејќи $x\neq -2$, т.е. $x+2\neq 0$).

Да ја разгледаме разликата $|f(x_n)-1|$ од таблицата во задача 1. Можеме да забележиме дека разликата $|f(x_n)-1|$ се стреми кон 0 кога x се стреми кон $a=0$ преку низата $\left(\frac{1}{n}\right)$. Воочи, разликата $|f(x_n)-1|$ може да ја направиме произволно мала, т.е. помала од произволно позитивен број ε, само ако x_n се избере доволно блиску до $a=0$, т.е. ако разликата $|x_n-a|$ се направи доволно мала.

4 Испитај дали функцијата $f(x)=\frac{|x|}{x}, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ има граница во точката $x_0=0$.

Согледај го одговорот:

Бидејќи $|x|=\begin{cases}x, & \text{за } x>0\\ 0, & \text{за } x=0,\\ -x & \text{за } x<0\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}1, & \text{за } x>0\\ -1 & \text{за } x<0\end{cases}$, а нејзиниот график е на црт. 3.



црт. 3

Оваа функција нема граница во точката $x_0=0$, бидејќи ако $x_n\to 0$ одлево, тогаш $f(x_n)=-1$, а ако $x_n\to 0$ оддесно преку позитивните вредности, тогаш $f(x_n)=1$. Според тоа, не постои реален број A, така што разликата $|f(x)-A|$ може да се направи произволно мала за секој x што е блиску до 0, т.е. за секој $x\in(0-\delta, 0+\delta)$.

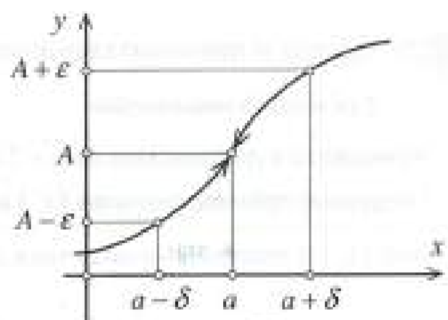
Поимот граница на функција можеме да го воведеме и со следната

Дефиниција 2. Бројот A е граница на функцијата $y=f(x)$ во точката a, која не мора да припаѓа на D_f, ако за секој $\varepsilon>0$, постои $\delta>0$, (δ зависи од ε) таков што за секој $x\in D_f$ што го задоволува условот $0<|x-a|<\delta$ е точно неравенството

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Двете дефиниции за гранична вредност на функцијата се еквивалентни, т.е. првата следува од втората и обратно. Доказот на ова тврдење нема да го изведуваме. Геометриската интерпретација на дефиницијата 2 е прикажана на црт. 2.

Бројот A е граница на функцијата $f(x)$ кога $x\to a$, ако за произволен $\varepsilon>0$ постои δ – околина $(a-\delta, a+\delta)$ на a, таква што за секој $x\in(a-\delta, a+\delta)$ вредноста на функцијата $f(x)$ е во интервалот $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, освен можеби само за точката a, ако a не припаѓа на D_f.



црт. 2

Задачи:

1. Одреди ја граничната вредност на функцијата во точката a, со помош на дефиницијата 1, ако:
   а) $f(x)=2x-3,\ a=1;$ б) $f(x)=2x+1,\ a=-1.$

2. Докажи дека функцијата $f(x)=\cos\frac{1}{x},\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, нема гранична вредност во точката 0.

Одреди ја граничната вредност $(3-6)$:

3 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+1}{2x}$.

4 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

5 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

6 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{|x|-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|}$;

9 ЛЕВА И ДЕСНА ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ. ПРОШИРУВАЊЕ НА ПОИМОТ ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ

A Испитувајќи ја функцијата $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ во претходната лекција, воочивме дека

$f(x)=\begin{cases}1, & \text{за } x>0\\ -1, & \text{за } x<0\end{cases}$, т.е. ако $x_n\to 0$ одлево преку низа од негативни броеви, тогаш $f(x_n)\to -1$, а ако $x_n\to 0$ оддесно преку низа од позитивни броеви, тогаш $f(x_n)\to 1$. Значи, функцијата нема граница кога $x\to 0$.

Овој пример ни укажува дека има смисла да зборуваме за лева и десна граница на функцијата $f(x)$ во точката $x=a$.

■ За бројот A_1 велиме дека е лева граница на функцијата $f(x)$ во точката $x=a$, ако за секоја низа (x_n), таква што $x_n\in D_f$, $x_n<a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, низата $f(x_1), f(x_2),\dots, f(x_n),\dots$ од вредностите на функцијата $f(x)$ е конвергентна и има граница A_1.

Во тој случај запишуваме:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=A_1.$$

■ На сличен начин се дефинира и десна граница на функцијата $f(x)$, само што во тој случај $x_n>a$, и кратко запишуваме:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=A_2.$$

1 Одреди ја границата на функцијата $f(x)=3+\sqrt{2-x}$ во точката $x=2$.

Разгледај го решението:

■ Функцијата е дефинирана за $2-x\geq 0$, т.е. $x\leq 2$, $D_f=(-\infty,2]$, па x може да се стреми кон 2 само од лева страна, т.е. можеме да бараме само лева граница.

Нека x се стреми кон 2 преку низата

$$(x_n): x_1=2-1,\ \ x_2=2-\frac{1}{2},\ \ x_3=2-\frac{1}{3},\ \ x_4=2-\frac{1}{4},\dots,\ \ x_n=2-\frac{1}{n},$$

а соодветната низа $f(x_n)$ е:

$$f(x_1)=3+\sqrt{2-1}=4;\quad f(x_2)=3+\sqrt{2-\left(2-\frac{1}{2}\right)}=3+\sqrt{\frac{1}{2}};\dots,\quad f(x_n)=3+\sqrt{2-\left(2-\frac{1}{n}\right)}=3+\sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Бидејќи $\sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$ кога $n \to \infty$, следува дека $f(x_n) \to 3$ кога $n \to \infty$.

Нека (x_n) е која било низа, така што $x_n \in D_f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 3 + \sqrt{2 - \lim_{n\to\infty} x_n} = 3 + \sqrt{2-2} = 3,$$

а тоа го запишуваме:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(3 + \sqrt{2-x}\right) = 3.$$

Вообичаено, при одредувањето на лева и десна граница, т.е. кога $x \to a^+$ или $x \to a^-$ ја воведуваме смената $x = a + h$ или $x = a - h, (h > 0)$, така што $h \to 0$ кога $x \to a^+$ или $x \to a^-$.

Применувајќи ја оваа смена во претходната задача имаме:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2-h} \left(3 + \sqrt{2-x}\right) = \lim_{h\to 0} \left(3 + \sqrt{2-(2-h)}\right) = 3.$$

2 Одреди ја граничната вредност на функцијата $f(x) = 5 - \sqrt{x-3}$ во точката $x = 3$.

Проследи го решението:

Функцијата е дефинирана за $x - 3 \geq 0$, т.е. $x \geq 3$, па $D_f = [3, +\infty)$.

Бидејќи x може да се стреми кон 3 само од десната страна, па може да бараме само десна граница

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(5 - \sqrt{x-3}\right) = \lim_{x\to 3+h} \left(5 - \sqrt{x-3}\right) = \lim_{h\to 0} \left(5 - \sqrt{3+h-3}\right) = 5.$$

3 Одреди ја граничната вредност на функцијата $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x-1}$ во точката $x = 1$.

Согледај го решението:

Функцијата е дефинирана за $x - 1 \neq 0$, т.е. $x \neq 1$, па $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Ако (x_n) е произволна низа, така што $x_n \neq 1, x_n \in D_f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 4x_n + 3}{x_n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - 1)(x_n - 3)}{x_n - 1} = \lim_{n\to\infty} (x_n - 3) = \lim_{n\to\infty} x_n - 3 = 1 - 3 = -2.$$

Воочи дека скратувањето на дропката со $x_n - 1$ е можно, бидејќи $x_n \neq 1$, т.е. $x_n - 1 \neq 0$.

При решавањето постапуваме на следниот начин.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x-3) = -2.$$

(Скративме со $x - 1$, бидејќи $x \neq 1$, т.е. $x - 1 \neq 0$.)

При одредувањето на лева и десна граница на функцијата во точката $x = 1, 1 \notin D_f$, имаме:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1-h} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1-h} (x-3) = \lim_{h\to 0} (1-h-3) = -2,$$ односно

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1+h} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1+h} (x-3) = \lim_{h\to 0} (1+h-3) = -2.$$

Воочи: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Запомни!

Ако функцијата $y=f(x)$ е дефинирана во некоја околина на точката $x=a$ (освен можеби во а) и во точката $x=a$ има гранична вредност, тогаш таа има лева и десна гранична вредност и притоа

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x).$$

Обратно, ако функцијата $y=f(x)$ во точката $x=a$ има лева и десна гранична вредност и ако $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$, тогаш функцијата $f(x)$ во таа точка има гранична вредност и притоа важи равенството

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a} f(x).$$

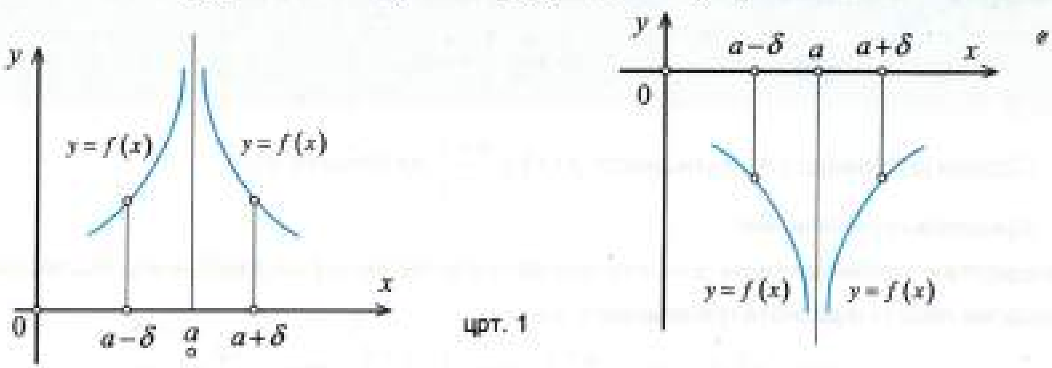
4 Одреди ги левата и десната гранична вредност на функцијата $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ за } x>-1 \\ x, \text{ за } x<-1 \end{cases}$ во точката $x=-1$.

Б Во понатамошното излагање ќе разгледаме неколку воопштувања на поимот граница на функција.

1. Бескрајна граница

Нека е дадена функцијата $f(x)$ со домен D_f. Ако за секоја низа (x_n), таква што $x_n\in D_f$, $x_n\neq a$ и $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, соодветна низа $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$,..., $f(x_n)$,... од вредностите на функцијата $f(x)$ неограничено расте (опаѓа), односно $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$ $\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)=-\infty\right)$, тогаш велиме функцијата $f(x)$ се стреми кон $+\infty$ (односно $-\infty$), кога x се стреми кон a, и во тој случај запишуваме:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \ \left(\text{односно } \lim_{x\to a} f(x)=-\infty\right), \text{ црт. 1.}$$



црт. 1

Нека е дадена функцијата $f(x)$ со домен D_f. Ако за секоја низа (x_n), таква што $x_n\in D_f$, $x_n\neq a$ и $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, соодветната низа $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$,... од вредностите на функцијата $f(x)$ неограничено расте по апсолутна вредност, односно $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$, тогаш функцијата $f(x)$ се стреми кон ∞ кога x се стреми кон a, т.е. ***функцијата $f(x)$ има бесконечна граница***, во тој случај запишуваме:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

5 Покажи дека функцијата $f(x)=\dfrac{1}{x}$ има бесконечна граница кога $x\to 0$. .

Согледај го решението:

- Доменот на функцијата е $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Нека $x\to 0$ преку низата $x_1=1, x_2=\dfrac{1}{2}, x_3=\dfrac{1}{3},\dots, x_n=\dfrac{1}{n},\dots,$

т.е. x се доближува кон 0 оддесно. Тогаш соодветната низа на вредностите на функцијата е

$$f(x_1)=\frac{1}{1}=1, f(x_2)=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2, f(x_3)=3,\dots, f(x_n)=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n,\dots$$

Очигледно, низата $f(x_n)\to+\infty$ кога $n\to\infty$, па $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

- Ако $x\to 0$ преку низата $x_1=-1,\ x_2=-\dfrac{1}{2},\ x_3=-\dfrac{1}{3},\dots,\ x_n=-\dfrac{1}{n},\dots$, т.е. x се доближува кон 0 одлево,

тогаш соодветната низа на вредностите на функцијата $f(x)$ е

$$f(x_1)=\frac{1}{-1}=-1,\ f(x_2)=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2,\ f(x_3)=-3,\dots,\ f(x_n)=-n,\dots$$ па $\dfrac{1}{x}\to-\infty$ кога $x\to 0^-$, т.е.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Запомни!

Функцијата $\dfrac{1}{x}$ неограничено расте по апсолутна вредност во точката $x=0$, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

6 Одреди ја границата на функцијата $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ во точката $x=1$.

Проследи го решението:

- Функцијата е дефинирана за $x-1\neq 0$, т.е. за $x\neq 1$, па $D_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Од тие причини ќе ги одредиме левата и десната граница кога $x\to 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1-h}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{1-h+1}{1-h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{2-h}{-h}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1+h}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h+1}{1+h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{2+h}{h}=+\infty.$$

Значи, функцијата нема гранична вредност кога $x\to 1$, а има лева бесоконечна и десна бесконечна (тие не се еднакви). Функцијата неограничено расте по апсолутна вредност во точката $x=1$, т.е.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty.$$

2. Граница во бескрајна точка

Нека доменот D_f на функцијата $f(x)$ е неограничено множество и нека (x_n) е низа, таква што $x_n \in D_f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ $\left(\text{или } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty, \text{ или } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty\right)$. Ако за секоја низа (x_n) што го има претходното својство, соодветната низа $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ е конвергентна и има граница A, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A,$$

велиме дека $f(x)$ се стреми кон A кога x се стреми кон ∞ (или $-\infty$, или $+\infty$), т.е. ***функцијата $f(x)$ има граница во бескрајна точка*** и пишуваме

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \left(\text{или } \lim_{x\to-\infty} f(x) = A, \text{ или } \lim_{x\to+\infty} f(x) = A,\right).$$

7 Докажи дека: а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-3}{x+1} = 2$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+2}{2x^2-3} = \dfrac{3}{2}$.

Согледај го решението:

а) Соодветната низа од вредностите на функцијата $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$, за низата $(x_n), x_n \in D_f$ и

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ има општ член $f(x_n) = \dfrac{2x_n - 3}{x_n + 1}$.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n - 3}{x_n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x_n}}{1 + \frac{1}{x_n}} = 2.$$ Според тоа, $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2.$$

3. Бескрајна граница во бескрајна точка

Нека доменот D_f на функцијата $f(x)$ е неограничено множество и нека (x_n) е низа, таква што $x_n \in D_f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Ако за секоја низа (x_n) што ги има овие својства соодветната низа

$f(x_1),\ f(x_2), \dots,\ f(x_n), \dots$ неограничено расте по апсолутна вредност, велиме дека функцијата $f(x)$ се стреми кон ∞ (или $-\infty$, или $+\infty$) кога x се стреми кон ∞, т.е. функцијата $f(x)$ има ***бескрајна граница во бескрајна точка*** и пишуваме:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Аналогно, се дефинираат и: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$,

8 Покажи дека $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

Согледај го решението:

Нека $x \to \infty$ преку низата $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ таква што $x_n \in D_f$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Низата соодветни вредности на функцијата $f(x_n)$ е $f(x_1) = x_1^2, f(x_2) = x_2^2, f(x_3) = x_3^2, \dots, f(x_n) = x_n^2, \dots$ Очигледно, низата $f(x_n) \to \infty$ кога $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty.$$

9 Докажи дека $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x-1}{x+1}=\infty$.

Воочи го решението:

Нека (x_n) е низата, така што $x_n \in D_f$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\infty$. Тогаш $f(x_n)=\dfrac{x_n^{\ 2}-2x_n-1}{x_n+1}$, а

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^{\ 2}-2x_n-1}{x_n+1}=\lim_{n\to\infty} \frac{x_n-2-\frac{1}{x_n}}{1+\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty} (x_n-2)=+\infty, \text{ бидејќи } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0.$$

Според тоа,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=+\infty.$$

Задачи:

Пресметај ја левата и десната гранична вредност на функцијата $f(x)$ во точката a, ако:

1 а) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$, $a=-1$; б) $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$, $a=1$.

2 а) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$, $a=-1$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $a=1$.

3 Одреди ја границата: а) $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{3}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{3}{x-2}$.

Пресметај ги границите:

4 а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+3}{x-2}$.

5 а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x^2+4}$; в) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^2+4}$.

6 а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4}{x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4}{x+1}$.

7 Одреди ја граничната вредност на функцијата $f(x)$ во точката a, ако:

а) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$, $a=3$; б) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x}$, $a=0$;

в) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-4}$, $a=\pm2$; г) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{(x-1)^2}$, $a=1$.

10 ОПЕРАЦИИ СО ГРАНИЧНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИИТЕ

Потсети се!

Ако (a_n) и (b_n) се конвергентни низи, при што $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогаш конвергентни се и низите $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ и $a_n \cdot b_n$, а ако $b_n \neq 0$ и $b \neq 0$, тогаш и низата $\dfrac{a_n}{b_n}$ е конвергентна и притоа:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Нека f и g се две функции со домен D_f и D_g, соодветно. Тогаш, ***збирот*** $f+g$, ***разликата*** $f-g$, ***производот*** $f \cdot g$ и ***количникот*** $\dfrac{f}{g}$ се функции дефинирани на следниот начин:

а) $f+g : x \mapsto f(x) + g(x)$;

б) $f-g : x \mapsto f(x) - g(x)$;

в) $f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$;

г) $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Функциите а), б) и в) се определени за сите вредности на x за кои се определени f и g, т.е. за $x \in D = D_f \cap D_g$, а функцијата $\dfrac{f}{g}$ е определена за сите вредности на x за кои се определени функциите f и g, при што $g(x) \neq 0$, т.е. доменот е $D = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g, g(x) = 0\}$.

Одредувањето на гранична вредност на функција по дефиниција често е сложена работа. Со помош на претходните својства на конвергентните низи може да се докажат и соодветните својства за граница на функциите и со нивна помош да се олесни наоѓањето на граници на некои функции.

Теорема. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се дефинирани во околината на некоја точка a, при што во точката a не мора да се дефинирани. Ако постојат границите $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, тогаш

1) $\lim\limits_{x\to a} c = c$;

2) $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \cdot A$;

3) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$. Ако уште $B \neq 0$, тогаш

5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Доказ на 3). Ако (x_n) е произволна низа која конвергира кон a, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, при што $x_n \in D_f \cap D_g, x_n \neq a$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$, па од својството на конвергентни низи имаме $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[f(x_n) \pm g(x_n)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A \pm B$.

Останатите делови од теоремата докажи ги сам

Треба да знаеш!

Граничната вредност на полиномот $P(x)$ во точката $x = a$ е еднаква на вредноста на полиномот во таа точка, т.е.

$$\lim_{x\to a} P_n(x) = P(a).$$

4 Со примена на теоремата одреди ги граничните вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 3x + 4)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x - 3 - \dfrac{3}{x-2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -2}(3x+2)\cdot 2^x$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-4}{\sqrt{x^2-3}}$.

Согледај го решението:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2 - 3x + 4) = \lim\limits_{x\to 1} 2x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 3x + \lim\limits_{x\to 1} 4 = 2\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 3\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 4 = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 4 = 3$;

Врз основа на тврдењето за гранична вредност на полином директно можеме да запишеме:

$$\lim_{x\to 1}(2x^2 - 3x + 4) = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 4 = 3.$$

5 Одреди ги границите: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1}{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$.

Согледај го решението:

Ако $f(x)$ е дробно рационална функција и ако $a \in D_f$, тогаш $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)} = f(a)$.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1}{x+2} = \dfrac{1^2-3\cdot 1+1}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9} = \dfrac{-3+3}{(-3)^2-9} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$.

По извршената замена добивме бесмислен израз "$\dfrac{0}{0}$". Затоа треба да извршиме трансформации на изразот кои ќе овозможат определување на границата.

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9} = \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to -3}\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6}.$$

Овде извршивме скратување со $x+3$, а тоа е дозволено бидејќи $x \neq -3$ или $x+3 \neq 0$.

в) Бидејќи $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6} = \dfrac{3^2-4\cdot 3+3}{2\cdot 3-6}$ е бесмислен израз "$\dfrac{0}{0}$", броителот ќе го разложиме како квадратен трином $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, т.е. $x^2-4x+3 = (x-3)(x-2)$, каде што $x_1 = 3$ или $x_2 = 1$ се корени на равенката $x^2-4x+3 = 0$. Оттука имаме:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{2(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-1}{2} = 1.$$

г)Бидејќи $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ е бесмислен израз „$\frac{0}{0}$", во овој случај вршиме рационализација на броителот и имаме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$ (кратевме со x, бидејќи $x\neq 0$).

6 Одреди ги границите: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-2x^2+x-1\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2+x-1}$.

Проследи го решението:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-2x^2+x-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$, бидејќи $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0.$

б) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2+x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=-\infty.$$

7 Одреди ги граничните вредности: а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$.

Согледај го решението:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{2x}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}{2\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}=\lim\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}=\lim\frac{1}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}.$

Ако $f(x)=\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$, тогаш $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)}{\lim\limits_{x\to a}\beta(x)}$ е бесмислениот израз „$\frac{0}{0}$".

Ако, пак, $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$, тогаш $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ е изразот $\frac{\infty}{\infty}$, чија вредност, исто така, не може да се определи. Во вакви случаи вршиме одредени трансформации на функцијата $f(x)$, кои ќе овозможат одредување на границата.

Постојат и други неопределени изрази, како на пример: $\infty-\infty$, ∞^0, 0^∞, 0^0, 1^∞ итн. Да напомнеме дека овде со симболите $0, 1, \infty, +\infty$ не се означуваат броеви, туку со нивна помош искажуваме соодветни гранични процеси. На пример, запишувајќи 1^∞ (во точката a) за функцијата $h=f^g$ имаме дека $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Изразот 1^∞ е неопределен, па во зависност од функциите f и g границата $\lim\limits_{x\to a}h(x)$ може да постои или да не постои.

Одреди ги следниве гранични вредности:

1 а) $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3-5x-7\right)$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^4-2x^3+x-1\right)$.

2 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-4}{2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt[3]{4x^2-3}-\sqrt{2x+6}\right)$.

3 а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x}{x^3-x^2}$.

4 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}$.

5 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3-4x+1}{2x^3-x+1}$.

6 а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{2x-2}-\dfrac{2-x}{x^2-1}\right)$.

7 а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{2\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 2x)^2}{1-\cos 2x}$.

8 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

11 НЕКОИ КАРАКТЕРИСТИЧНИ ГРАНИЦИ

Овде ќе ги одредиме граничните вредности на некои функции кои ќе ги применуваме при пресметувањето на граничните вредности на други функции.

А **1** Одреди ја граничната вредност $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$.

Согледај го решението:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x}{x\cos x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Воочи дека $\dfrac{\sin x}{x}$ неопределен израз „$\dfrac{0}{0}$".

За да ја одредиме граничната вредност, без доказ ќе ја прифатиме следната

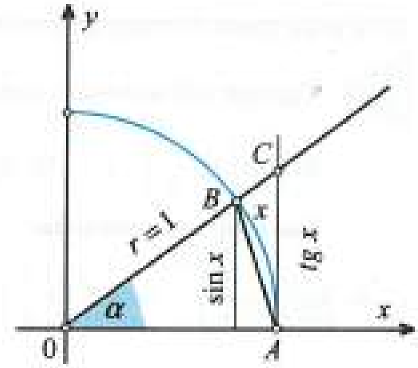
Теорема. Ако постои ε околина на точката a, така што $f(x)\le h(x)\le g(x)$ за секој $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ и ако $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$, тогаш

$$\lim_{x\to a}h(x)=A.$$

2 Дадена е функцијата $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Докажи дека $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Согледај го доказот:

Функцијата $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ е дефинирана за секој x од околината на точката $x=0$, освен за самата точка $x=0$. На цртежот е претставена кружница со радиус r и е означен кружен исечок со централен агол AOB. Да ги споредиме плоштините на триаголниците OAB и OAC и плоштината на кружниот исечок OAB. Воочуваме:



$$P_{\Delta OAB}<P_{\text{ки}}<P_{\Delta OAC},\ \text{односно}\ \frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,\ \text{т.е.}$$

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x.$$

Бидејќи за секој $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x>0$, имаме:

$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$, односно $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$ (бидејќи од $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ следува $a>b$), т.е. $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

Ова неравенство е точно и ако $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$, бидејќи $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$, значи е точно за секој $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}$. Според тоа, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x<\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}<\lim\limits_{x\to 0}1$, т.е. $1<\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}<1$. Според претходната теорема следува

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

Оваа формула можеме да ја воопштиме, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\quad\text{или}\quad\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin kx}=\frac{1}{k},\ k\neq 0.}$$

3 Одреди ги граничните вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-3x}{\sin x}$.

Согледај го решението:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\cdot\frac{1}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{3\cdot\sin 3x}=\frac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$;

Воопшто: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}$, $m\neq 0, n\neq 0$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sin x}-\frac{3x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-3\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=-2.$

Б Без доказ ќе ги наведеме границите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ и $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ кои ќе ги користиме за пресметување на неопределеноста од видот 1^{∞}.

4 Одреди ја граничната вредност:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

Согледај го решението:

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}=e\cdot 1^{2}=e;$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{3}=e^{3};$$

Воочи!

Претходните формули може да се обопштат, т.е.

$$\lim_{\substack{f(x)\to\infty\\ \text{кога } x\to\infty}}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{f(x)\to 0\\ \text{кога } x\to\infty}}\left(1+f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}=e.$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}(-6)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right)^{-6}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right)^{-6}=e^{-6};$$

г) $$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+(-2x))^{\frac{3}{x}\cdot\frac{-2}{-2}}=\lim_{x\to 0}(1+(-2x))^{\frac{-6}{-2x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+(-2x))^{-\frac{1}{2x}}\right)^{-6}=\left(\lim_{x\to 0}(1+(-2x))^{-\frac{1}{2x}}\right)^{-6}=e^{-6}.$$

Задачи:

Одреди ги граничните вредности $(1-8)$:

1 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^{2}}$.

2 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

3 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

4 а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}$.

5 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{x}$.

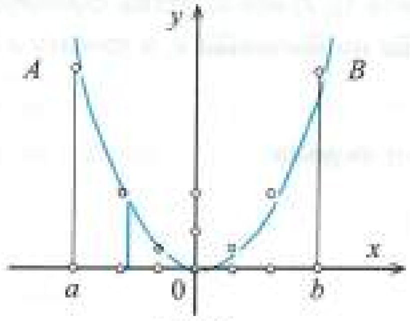
6 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{x+2}$.

7 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.

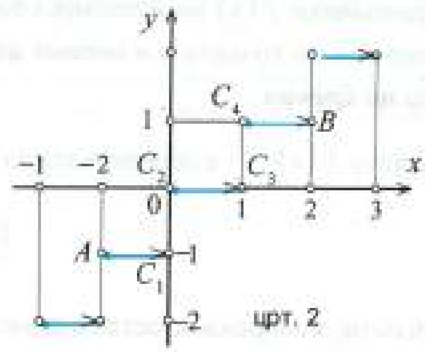
8 а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-3x}$.

12 НЕПРЕКИНАТОСТ НА ФУНКЦИИ

На црт. 1 претставен е графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}x^2$, а на црт. 2 графикот на функцијата $y=[x], x\in\mathbb{R}$.



црт. 1



црт. 2

Воочи дека графикот на функцијата на црт. 1 може да се нацрта "без кревање на моливот" од A до B. За да се нацрта графикот на функцијата на црт. 2 моливот мора да се "поткрене" за да се дојде од точката C_1 до точката C_2 и од точката C_3 до точката C_4. Значи, функцијата $y=\frac{1}{2}x^2$ е непрекината во интервалот (a,b), додека, пак, функцијата $y=[x]$ е прекината во точките C_1 и C_3.

Функцијата $y=\frac{1}{2}x^2$ во секоја точка $x\in\mathbb{R}$ има определена вредност. Истото важи и за функцијата $y=[x]$. За функцијата $y=[x]$ имаме:

ако $0\le x<1$, тогаш $[x]=0$ и $\lim\limits_{x\to1^-}[x]=0$, а ако $1\le x<2$, тогаш $[x]=1$, па $\lim\limits_{x\to1^+}[x]=1$.

Значи, функцијата $y=[x]$ нема граница во точката $x=1$.

Поимот непрекинатост на функцијата $f(x)$ во дадена точка a е тесно поврзан со граничната вредност на функцијата во дадената точка a.

Дефиниција. Функцијата $f(x)$ е непрекината во точката a ако:

1) $a\in D_f$, т.е. $f(a)$ постои;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ постои, т.е. $f(x)$ има гранична вредност за $x=a$;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

1 Нека е дадена функцијата $f(x)=\frac{2x}{x-1},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Испитај дали $f(x)$ е непрекината во точката:

а) $a=3$; б) $a=1$.

Решение:

а) Бидејќи $3\in D_f$ и $\lim\limits_{x\to3} f(x)=f(3)=3$, следува дека функцијата е непрекината во точката $x=3$.

б) Бидејќи $1 \notin D_f$ следува дека $f(x)$ не е непрекината во таа точка (т.е. $f(x)$ е ***прекинаша*** во 1 и 1 е точка на прекин за функцијата $f(x)$)

- Ако функцијата $f(x)$, $x \in (a,b)$ е непрекината во секоја точка од интервалот (a,b), тогаш велиме дека таа е ***нейрекинаша во инійервалой*** (a,b).
- Ако функцијата $f(x)$ не исполнува барем еден од условите 1), 2) или 3), тогаш функцијата не е непрекината во точката a и велиме дека таа е ***прекинаша во шочкаша а***, а точката a се вика ***шочка на прекин***.

Функцијата $f(x)=\dfrac{1}{x}$ е непрекината во која било точка $a \neq 0$, бидејќи

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}, \text{ за } a \neq 0.$$

2 Испитај ја непрекинатоста на функцијата:

а) $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{x+2}$ во точката $x=1$;

б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{за } x>0 \\ x, & \text{за } x \leq 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$;

в) $f(x)=[x]$ во точката $x=2$;

г) $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ во точката $x=1$.

Согледај го решението:

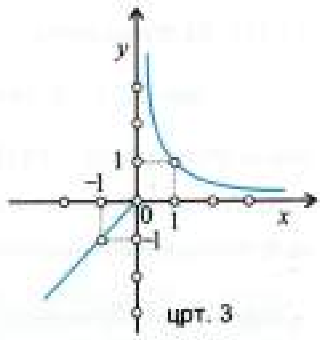
а) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $1 \in D_f$ и $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=-1=f(1)$, значи функцијата е непрекината во точката 1.

б) Бидејќи $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=+\infty$ и $f(0)=0$, следува дека функцијата е прекината во точката $x=0$, црт. 3.

в) Функцијата f е прекината во точката $x=2$, бидејќи

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 2^-}[x]=1$, а $\lim\limits_{x \to 2^+}[x]=2$, значи функцијата нема гранична вредност во точката $x=2$.

г) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, па бидејќи $1 \notin D_f$ следува дека функцијата $f(x)$ е прекината во точката $x=1$.



црт. 3

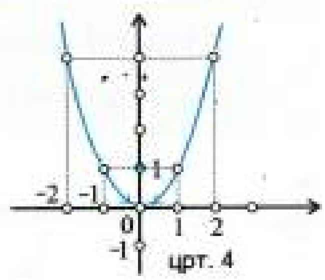
3 Испитај ја непрекинатоста на функцијата: а) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, за $x=0$;

б) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{зД } x \neq 0 \\ 1, & \text{зД } x=0 \end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{за } x \neq 2 \\ 2, & \text{за } x=2. \end{cases}$

Согледај го решението:

б) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)=0$, а $f(0) \neq 0$, значи точката $x=0$ е точка на прекин, бидејќи условот $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$, не е исполнет црт. 4.



црт. 4

Непрекинатоста на функциите е еден важен поим, па докажувањето на непрекинатост на функција следува по следнава

Теорема. Ако функциите $f(x), x \in D_f$ и $g(x), x \in D_g$ се непрекинати во точката $a, a \in D_f \cap D_g$, тогаш во точката a се непрекинати и функциите:

а) $y = f(x) \pm g(x)$; б) $y = f(x) \cdot g(x)$; в) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $(g(a) \neq 0)$.

Доказ. Од непрекинатоста на функциите $f(x)$ и $g(x)$ во точката a имаме

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ и } \lim_{x \to a} g(x) = g(a),$$

а од својството за гранична вредност на збир на функции имаме

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a),$$

т.е. $f + g$ е непрекината функција во точката $x = a$.

Останатите тврдења докажи ги сам.

Од теоремата следува:

- Секоја цела рационална функција, (т.е. секој полином) $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ е непрекината во секоја точка $a \in \mathbb{R}$, бидејќи е дефинирана во а, постои граница во а и $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- Дробно рационалната функција $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, каде што $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми е непрекината во секоја точка $x = a$ во која $Q(a) \neq 0$.

4 Одреди во кои точки е прекината функцијата:

а) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$; б) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$; в) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{зД } x \neq 0 \\ -2, & \text{зД } x = 0 \end{cases}$; г) $y = \operatorname{tg} x$.

Одговор:

б) $x^2 - 4 = 0$; во $x = 2$ и $x = -2$ $f(x)$ е прекината.

5 Во кој интервал е непрекината функцијата:

а) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$; б) $y = \dfrac{x+2}{x^2+4}$; в) $y = \dfrac{5x-1}{x^2+2x-3}$?

- Непрекинати се и функциите:

$y = a^x$, $a > 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$; $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, за секој $x \in \mathbb{R}^+$;

$y = \sin x$, за секој $x \in \mathbb{R}$; $y = \cos x$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

Задачи:

1. Испитај ја непрекинатоста на функциите:

а) $y = 2x + 1$, во точката $x = 2$; б) $y = \dfrac{1}{x}$, во точката $x = 0$.

2. Докажи дека функцијата $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ е прекината во точката $x = 0$.

3. Докажи дека функцијата $f(x)=x\cdot\operatorname{sgn}x$ е непрекината во точката $x=0$.

4. Докажи дека функцијата $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 2, & x=1\\ 4-x, & x>1\end{cases}$ е прекината во точката $x=1$.

5. Испитај ја непрекинатоста на функцијата $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{за } x\neq 0\\ A, & \text{за } x=0.\end{cases}$

Кој број треба да биде A, па $f(x)$ да биде непрекината во $x=0$?

6. Испитај ја непрекинатоста на функцијата $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{за } x<0\\ x, & \text{за } x\ge 0\end{cases}, \ x\in\mathbb{R}$.

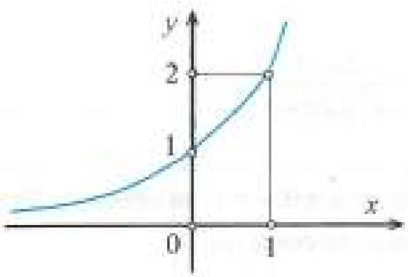
7. Дадена е функцијата $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{2(x^2-1)}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Докажи дека функцијата е непрекината за секој $x\neq 1$. Може ли оваа функција да биде определена за $x=1$, така што да биде непрекината во точката $x=1$?

8. Докажи дека функцијата $y=\sin x$ е непрекината во точката $x=a\in\mathbb{R}$.

13 АСИМПТОТИ НА ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА

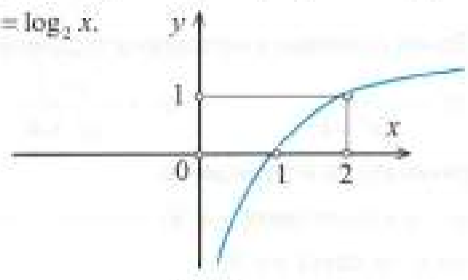
Потсети се!

- На црт. 1 е претставен графикот на функцијата $y=2^x$.



црт. 1

- На црт. 2 е претставен графикот на функцијата $y=\log_2 x$.



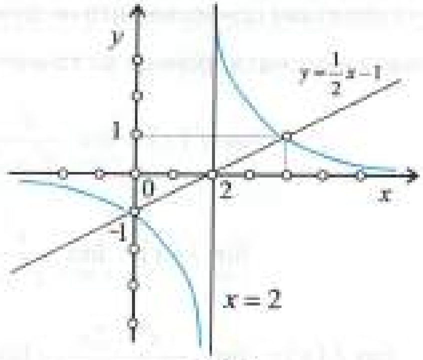
црт. 2

- x – оската, т.е. правата $y=0$ е хоризонтална асимптота на графикот на функцијата, кога
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x=0$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x=\infty$.
- y – оската, т.е. правата $x=0$ е вертикална асимптота на графикот на функцијата.
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_2 x=-\infty$.
- Кои прави се вертикални асимптоти на функцијата $y=tg\,x$?

1 Дадена е функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x-1$. Скицирај го графикот на функцијата $y=\frac{1}{f(x)}$.

Разгледај го решението:

Графикот на функцијата е претставен на црт. 3 (види задача 2в) во лекција 7 на оваа тема).



црт. 3

Воочи дека точките од правите $x=2$ и $y=0$ стануваат поблиски до соодветните гранки на графикот доколку тие се оддалечуваат од координатниот почеток.

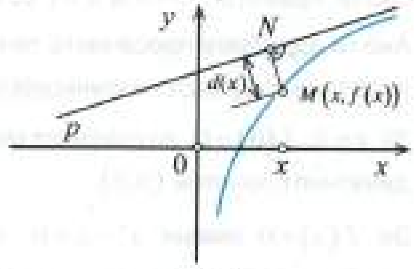
Ваквите прави се викаат ***асимптоти***.

Нека се дадени права p, график на функцијата $f(x)$ и променлива точка $M(x,f(x))$, црт. 4.

Дефиниција. Ако растојанието d од променливата точка $M(x,f(x))$ што лежи на кривата $y=f(x)$ до определена права p се стреми кон нула кога M бескрајно се оддалечува од координатниот почеток, т.е.

$$\lim_{OM\to\infty} d(x)=0,$$

тогаш правата p се вика ***асимптота*** на кривата.



црт. 4

За неа велиме дека е:

1. ***вертикална асимптота*** ако е паралелна со $y-$оската;
2. ***хоризонтална асимптота*** ако е паралелна со $x-$оската;
3. ***коса асимптота*** ако не е паралелна со ниту една од координатните оски.

Запомни!

Нека е дадена функцијата $f(x)$. Ако:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, тогаш правата $x=a$ е вертикална асимптота;

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=n$, тогаш правата $y=n$ е хоризонтална асимптота;

Ознаката $x\to\pm\infty$ значи дека треба да се разгледа границата кога $x\to+\infty$ и кога $x\to-\infty$.

2 Дадена е функцијата $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}$.

а) Одреди ги хоризонталната и вертикалната асимптота на графикот на дадената функција.

б) Скицирај го графикот на функцијата.

Воочи ја постапката:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}$, а $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=1$, значи правата $y=1$

е хоризонтална асимптота.

Точките на прекинот се решенијата на равенката $x^2+2x-3=0$, па тие се $x=1$ и $x=3$.

зе го испитаме однесувањето на функцијата во околината на точките 1 и -3, а за таа цел ќе ги одредиме левата и десната граница во точките 1 и -3.

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1-h}\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}=\lim_{h\to0}\frac{(1-h)^2-2(1-h)}{(1-h)^2+2(1-h)-3}=\lim_{h\to0}\frac{-1+h^2}{-4h+h^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1+h}\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2-2(1+h)}{(1+h)^2+2(1+h)-3}=\lim_{h\to0}\frac{-1+h^2}{4h+h^2}=-\infty,$$

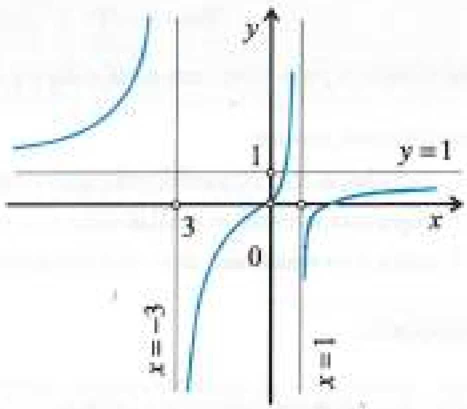
$$\lim_{x\to-3^-} f(x)=\lim_{x\to-3-h}\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}=\lim_{h\to0}\frac{15+8h}{4h+h^2}=+\infty,\ \lim_{x\to-3^+} f(x)=\lim_{x\to-3-h}\frac{x^2-2x}{x^2+2x-3}=\lim_{h\to0}\frac{15-8h}{-4h+h^2}=-\infty.$$

Значи, правите $x=-3$ и $x=1$ се вертикални асимптоти.

Ако ги одредиме пресечните точки на графикот со координатните оски, ќе можеме полесно да го нацртаме графикот на функцијата .

За $x=0$, $f(0)=0$, па графикот минува низ координатниот почеток $(0,0)$.

За $f(x)=0$ имаме $x^2-x=0$, т.е. $x=0$ или $x=2$, значи графикот ја сече $x-$оската во точките $O(0,0)$ и $A(2,0)$. Графикот е прикажан на црт. 5.



црт. 5

За правата $x=a$ да биде вертикална асимптота на кривата $f(x)$, доволно е да биде бесконечна само една од двете еднострани (лева или десна) граници во точката a.

На пример, за задачата 2 б) од претходната лекција имаме:

$$x=0 \text{ ако } \lim_{x\to0^+} f(x)=\infty, \text{ а } \lim_{x\to0^-} f(x)=0.$$

3 Одреди ги хоризонталната и вертикалната асимптота на кривата $y=\dfrac{2x^2+3}{x^2-1}$, а потоа скицирај го графикот на функцијата.

Во границите со кои ги одредуваме асимптотите што се паралелни на коодинатните оски не се содржи граница од видот

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty.$$

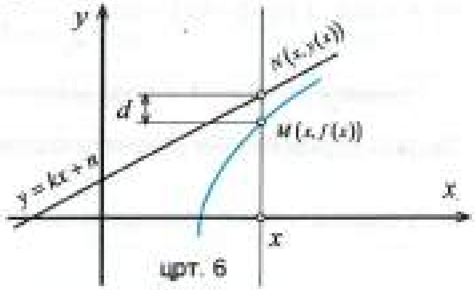
Ако за дадена функција $f(x)$ постои граница $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, тогаш можно е, но не мора, да постои права од видот $y=kx+n$ која е асимптота на графикот на функцијата $y=f(x)$.

Нека се дадени правата $y = kx + n$ и графикот на функцијата $f(x)$, црт. 6.

Ако точката $N(x, y(x))$ е од правата, а точката $M(x, f(x))$ од графикот на $f(x)$, тогаш правата $y = kx + n$ е ***коса асимптота*** на кривата f, ако растојанието

$$d = \overline{MN} = f(x) - y(x)$$

се стреми кон нула кога x се стреми ко бескрајност, односно ако постои барем една од границите:



црт. 6

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(kx+n)\right]=0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(kx+n)\right]=0.$$

Ако $k = 0$, тогаш правата $y = n$ е хоризонтална асимптота.

Ако правата $y = kx + n$ е коса асимптота, тогаш k и n ќе ги одредиме на следниот начин:

Претходното равенство го делиме со x, $x \neq 0$ и добиваме

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)-(kx+n)}{x}=0, \text{ па } \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{n}{x}\right)=0, \text{ т.е. } k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \text{ бидејќи } \lim_{x\to\pm\infty}\frac{n}{x}=0.$$

Од равенството $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(kx+n)\right)=0$ следува $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$

Ако постојат претходните граници кога $x \to +\infty$, тогаш имаме ***десна коса асимптота***, а ако постојат тие граници кога $x \to -\infty$, тогаш имаме ***лева коса асимптота***. На сличен начин се дефинираат ***десна*** и ***лева*** хоризонтална, односно ***горна*** и ***долна*** вертикална асимптота.

4 Одреди ги асимптотите на кривата $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Согледај го решението:

а) Хоризонтална асимптота:

$y=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x+2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x+2}=-\infty$, што значи дека функцијата нема хоризонтална асимптота.

б) Вертикална асимптота:

$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2+h}\dfrac{2x^2}{x+2}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2(-2+h)^2}{-2+h+2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2+h}\dfrac{2x^2}{x+2}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2(-2-h)^2}{-2-h+2}=-\infty$, значи правата $x=-2$ е вертикална асимптота.

в) Коса асимптота $y = kx + n$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x^2}{x+2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2+2x}=2.$$

■ $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x+2}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-2x^2-4x}{x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-4x}{x+2}=-4.$

Правата $y=2x-4$ е коса асимптота на дадената крива.

За да ја одредиме меѓусебната положба на кривата и косата асимптота, ќе ја разгледаме разликата меѓу ординатите на соодветните точки од нивните графици, т.е. $f(x)-y=\dfrac{2x^2}{x+2}-(2x-4)=\dfrac{8}{x+2}.$

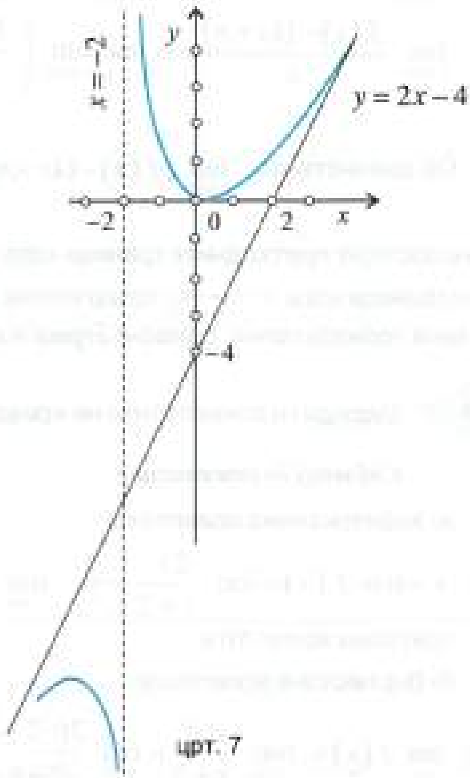
■ $f(x)-y>0$, ако $\dfrac{8}{x+2}>0$, т.е. ако $x>-2$.

Значи, за $x>-2$, $f(x)>y$, па графикот на функцијата $f(x)$ е над асимптотата $y=2x-4$.

■ $f(x)-y<0$ ако $\dfrac{8}{x+2}<0$, т.е. $x<-2$.

Значи, за $x<-2$, $f(x)<y$, па графикот на функцијата $f(x)$ е под асимптотата $y=2x-4$.

Графикот е претставен на црт. 7.



црт. 7

Задачи:

Одреди ги асимптотите на кривата:

1 а) $y=\dfrac{x}{x-2}$;   б) $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$.

2 а) $y=x+1+\dfrac{1}{x^2}$;   б) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

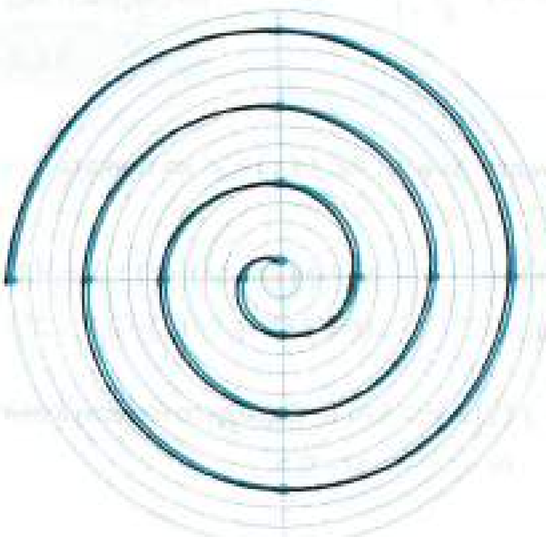
3 а) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$;   б) $y=\dfrac{x^3}{2\left(1+x^2\right)}$.

4 а) $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$;   б) $y=x\cdot e^{-x}$.

ТЕМА 3

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ

Во оваа тема ќе учиш за:



1 НАРАСНУВАЊЕ НА ФУНКЦИЈА. ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА

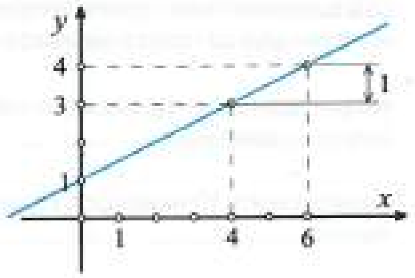
Потсети се!

Ако аргументот x во функцијата $y=0{,}5x+1$ добие вредност 4, тогаш вредноста на функцијата е 3.

За колку ќе нарасне функцијата ако аргументот x нарасне од 4 на 6?

Решение:

$(0{,}5\cdot 6+1)-(0{,}5\cdot 4+1)=1$



Функцијата $y=f(x)$ е непрекината во точката $x=a$, ако и само ако $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Провери дали функцијата $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ е непрекината за $x=2$.

А Нека функцијата f е определена на интервалот (a,b) и нека $x_0, x\in(a,b)$.

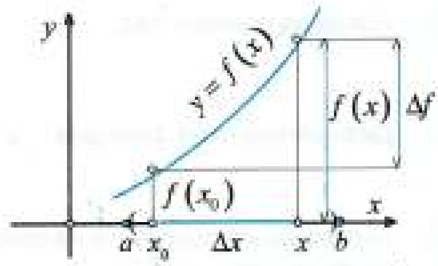
Соодветните вредности на функцијата f за x и x_0 се $f(x)$ и $f(x_0)$.

Разликата $x-x_0$ се вика ***нараснување*** на аргументот и се означува со Δx, т.е. $\Delta x=x-x_0$.

Разликата на соодветните вредности на функцијата $f(x)-f(x_0)$ се вика ***нараснување на функцијата*** и се означува со Δf, т.е.

$$\Delta f=f(x)-f(x_0).$$

Ако функцијата е зададена со равенката $y=f(x)$, тогаш $\Delta y=f(x)-f(x_0)$.



Од $x-x_0=\Delta x$ следува дека $x=x_0+\Delta x$, па нараснувањето на функцијата може да се запише во следниот вид

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

1 Одреди ги нараснувањата Δx и Δf на $f(x)=x^2$ во точката $x_0=2$, ако: а) $x=1{,}9$; б) $x=2{,}1$.

Решение:

а) $\Delta x=x-x_0=1{,}9-2=-0{,}1$; $\quad\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(2-0{,}1)-f(2)=1{,}9^2-2^2=-0{,}39$.

б) $\Delta x=x-x_0=2{,}1-2=0{,}1$; $\quad\Delta f=f(2{,}1)-f(2)=2{,}1^2-2^2=0{,}41$.

2 Дадена е функцијата $f(x)=x^2-5x+6$. Одреди го нараснувањето Δf на функцијата f ако:

а) $x_0=3,\ \Delta x=1$. $\qquad$ б) $x_0=-1,\ \Delta x=0{,}5$.

Решение:

а) $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(3+1)-f(3)=f(4)-f(3)=(4^2-5\cdot 4+6)-(3^2-5\cdot 3+6)=2-0=2.$

До истиот резултат ќе дојдеме и поинаку. Прво го одредуваме нараснувањето Δf за произволни вредности на аргументот x и Δx, а потоа ги заменуваме нивните вредности.

■ $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - 5(x+\Delta x) + 6 - (x - 5x + 6) = (2x-5)\Delta x + (\Delta x)^2.$

■ За $x = x_0 = 3$ и $\Delta x = 1$ имаме: $\Delta f = (2\cdot 3 - 5)\cdot 1 + 1^2 = 2.$

3 Одреди го нараснувањето на функцијата $y = \dfrac{x}{x+1}$ ако: а) $x_0 = -3,\ \Delta x = 1$; б) $x_0 = 3,\ \Delta x = -0{,}5.$

Согледај го решението:

■ $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \dfrac{x+\Delta x}{(x+\Delta x)+1} - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{\Delta x}{(x+1)(x+\Delta x+1)}.$

■ а) За $x = x_0 = -3$ и $\Delta x = 1$, $\Delta y = \dfrac{1}{(-3+1)(-3+1+1)} = \dfrac{1}{2}.$

4 Одреди го нараснувањето на функцијата:

а) $f(x) = x^2 - 2x$, ако $x_0 = 2$ и $\Delta x = -1$;   б) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, ако $x_0 = -2$ и $\Delta x = 0{,}5.$

Б **5** Функцијата $f(x) = x^2 + 1$ е дефинирана за секој реален број.

а) Одреди го нараснувањето Δf на функцијата f во произволна точка x.

б) Одреди го количникот од нараснувањето на функцијата и нараснувањето на аргументот, т.е. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

в) Одреди ја граничната вредност на количникот $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, кога $\Delta x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Одреди ја граничната вредност ако $x = 3$.

Решение:

■ а)
$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$\Delta f = \left((x+\Delta x)^2 + 1\right) - (x^2 + 1)$$
$$\Delta f = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 1 - x^2 - 1$$
$$\Delta f = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x + \Delta x);$$

■ б) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$

■ в) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim (2x + \Delta x) = 2x.$

За $x = 3$, имаме $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2x = 2\cdot 3 = 6.$

Воочи дека $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, во точката $x = 3$ има вредност 6. За бројот 6 велиме дека е извод на функцијата $f(x) = x^2 + 1$ во точката $x = 3$.

Дефиниција. Ако постои гранична вредност на количникот од нараснувањето на функцијата $y = f(x)$ и нараснувањето на аргументот во точката $x_0 \in D_f$, кога нараснувањето на аргументот се стреми кон нула, тогаш тој број се вика ***извод на функцијата $f(x)$ во точката x_0*** и се означува со

$$f'(x_0) \text{ или } y'(x_0).$$

Според тоа:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Бидејќи x_0 може да биде која било точка од D_f, тогаш за извод на функцијата $f(x)$ во произволна точка $x\in D_f$ имаме:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Ако функцијата $f(x)$ е дадена со равенката $y=f(x),\ x\in D_f$, тогаш изводот го означуваме и со y'.

6 Одреди го изводот на функцијата:

а) $y=x^2-3x$ во точките: $x_0=-2;\ x_0=1{,}5;\ x_0=3{,}5.$

б) $y=(x+2)^2$, во произволна точка $x\in\mathbb{R}$.

Решение:

- а) Го одредуваме Δy, т.е.

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\left((x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)\right)-\left(x^2-3x\right)=\Delta x(2x-3+\Delta x).$$

- Го одредуваме количникот $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x-3+\Delta x)}{\Delta x}=2x-3+\Delta x.$

- Одредуваме $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т.е. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x-3+\Delta x)=2x-3.$

За $x=x_0$, $y'(x_0)=2x_0-3$. За $x_0=-2$, $y'(-2)=2\cdot(-2)-3=-7.$

За $x_0=1{,}5$, $y'(1{,}5)=2\cdot 1{,}5-3=0$ итн.

7 Одреди го изводот на функцијата: а) $y=\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; б) $y=\frac{x}{x-1},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Воочи ја постапката:

- а) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)\cdot x}.$

- $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)\cdot x}}{\Delta x}=-\frac{1}{(x+\Delta x)\cdot x}.$

- $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{(x+\Delta x)\cdot x}=-\frac{1}{x^2}$. Значи $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$

За функцијата $f(x)=\sqrt{x},\ (x\ge 0)$ во точката $x=0$ имаме:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{0+\Delta x}-\sqrt{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}.$$

- Функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ нема извод во точката $x=0$, иако е дефинирана во таа точка, затоа што не постои $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}.$

Теорема. Ако функцијата $f(x)$ има извод во точката x_0, тогаш таа е непрекината во таа точка.

Доказ. Треба да докажеме дека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Да претпоставиме дека $f'(x_0)$ постои. Тогаш

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Од $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0$, следува $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, што значи дека функцијата $f(x)$ е непрекината во точката x_0.

Обратното тврдење не мора да е точно, т.е. ако функцијата $f(x)$, $x\in D_f$ е непрекината во точката $x_0\in D_f$, тогаш таа не мора да е диференцијабилна во точката x_0. Ова ќе го покажеме на функцијата $f(x)=|x|$, која е непрекината за секој $x\in\mathbb{R}$, но во точката $x_0=0$ не е диференцијабилна.

Функцијата $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ е непрекината во точката $x_0=0$, бидејќи

$\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, а тоа значи дека функцијата е непрекината за секој $x\in\mathbb{R}$.

Ќе покажеме дека функцијата $f(x)=|x|$ во точката $x_0=0$ нема извод.

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0.\end{cases}$$

Значи, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не постои, т.е. $f'(0)$ не постои.

Постапката со која се доаѓа до изводот $f'(x)$ на функцијата $f(x)$ се вика ***диференцирање*** на таа функција.

Делот од математиката што ги изучува изводите и нивната примена се вика ***диференцијално сметање***.

В Слично на поимите лева и десна гранична вредност, за функцијата $f(x)$ може да се дефинира лев и десен извод.

Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана за $x=x_0$. Ако постои $\lim\limits_{\Delta x\to +}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'_+(x_0)$ и ако тој е конечен, тогаш него го викаме ***десен извод*** на функцијата $f(x)$ во точката x_0, а го означуваме $f'_+(x_0)$.

Аналогно, ако постои $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'_-(x_0)$, тогаш него го викаме ***лев извод*** на функцијата $f(x)$ во точката x_0 и го означуваме $f'_-(x_0)$. Левиот и десниот извод на функцијата $f(x)$ со заедничко име ги викаме ***еднострани изводи***.

Воочи, функцијата $f(x)=|x|$ во точката $x=0$ има лев и десен извод, но тие се различни, т.е. $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, па според тоа функцијата $f(x)=|x|$ нема извод во точката $x=0$.

Запомни!

Ако $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ и $f(x)$ е непрекината во точката x_0, тогаш функцијата има извод во точката и

$$f'_-(x_0)=f'(x)=f'_+(x_0).$$

Функцијата $f(x)$ велиме дека е ***диференцијабилна*** во точката $x_0\in D_f$, ако постои изводот $f'(x_0)$. Ако $f'(x_0)$ не постои, тогаш функцијата $f(x)$ не е диференцијабилна во точката x_0.

Секоја диференцијабилна функција е секогаш непрекината, но има непрекинати функции што не се диференцијабилни.

- Функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во интервалот (a,b), ако е диференцијабилна во секоја точка од интервалот.

8 Испитај ја диференцијабилноста на функцијата $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$, во точката $x_0=1$.

Решение:

- За $0\le x\le 1$ и $x_0=1$ имаме: $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1+\Delta x-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1.$
- За $x>1$ и $x_0=1$ имаме:

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2.$$

Бидејќи $f'_-(1)\ne f'_+(1)$, функцијата не е диференцијабилна во точката $x_0=1$. Воочи дека функцијата $f(x)$ има прекин во точката $x_0=1$.

Множеството од сите вредности на аргументот x од областа на определеност на функцијата f, во кои таа е диференцијабилна се вика ***област на диференцијабилност*** D'_f на функцијата f. Притоа секогаш D'_f е подмножество на D_f.

На пример, за $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2, & x\ge 0\end{cases}, D_f=\mathbb{R}$, во точката $x_0=0$ имаме $f'_-(0)=-1$, а $f'_+(0)=0$.

Значи $f'(0)$ не постои, па е $D'_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}\ne D_f=\mathbb{R}$, т.е. $D'_f\subset D_f$.

Запомни!

Ако функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во секоја точка x_0 од интервалот (a,b), тогаш изводот $f'(x)$ е функција дефинирана во тој интервал.

Воочи!

При одредување извод по дефиниција на функцијата $f(x),\ x\in D_f$ постапуваме на следниот начин:

1. Го одредуваме нараснувањето на функцијата $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)$;
2. Го одредуваме $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;
3. Го пресметуваме $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Задачи:

1 Страните на правоаголникот се $15m$ и $20m$. Одреди ги нараснувањето на периметарот и нараснувањето на плоштината на правоаголникот ако:

а) помалата страна се зголеми за $0,11m$; б) поголемата страна се зголеми за $0,2m$.

2 Радиусот на кругот е еднаков на $2cm$. Одреди ја грешката при пресметувањето на неговата плоштина ако грешката при мерењето на должината на радиусот е:

а) Δr; б) $0,2cm$; в) $0,1cm$.

3 Одреди го нараснувањето на функцијата $f(x)$ во точката x_0, ако:

а) $f(x)=-\dfrac{2}{x},\ x_0=-2,\ \Delta x=0,2$; б) $f(x)=2x^2-3,\ x_0=3,\ \Delta x=-0,2$;

в) $f(x)=3x+1,\ x_0=5,\ \Delta x=0,01$; г) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2,\ x_0=2,\ \Delta x=0,1$.

4 Одреди ги нараснувањата Δx и Δy во точката x_0, ако:

а) $f(x)=4x-x^2,\ x_0=2,5;\ x=2,6$; б) $f(x)=\sqrt{2x-1},\ x_0=1,22;\ x=1,345$;

в) $f(x)=\cos^2 x,\ x_0=\dfrac{2\pi}{3};\ x=\dfrac{3\pi}{4}$; г) $f(x)=tg\,x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4};\ x=\dfrac{\pi}{3}$.

5 Одреди го изводот на функцијата:

а) $y=x+2$, во точката $x_0=3$; б) $y=x^2-3$, во точката $x_0=2$;

в) $y=x^3$, во точката $x_0=-1$; г) $y=\dfrac{x^2-1}{x}$, во точката $x_0=1$.

6 Одреди лев и десен извод на функцијата:

а) $y=|x+1|$, во точката $x=-1$; б) $y=|x-1|$, во точката $x=1$;

в) $y=x^{\frac{3}{2}}$, во точката $x=0$.

7 Испитај ја диференцијабилноста на функцијата:

а) $f(x)=x^{\frac{3}{2}},\ x\in\mathbb{R}^+$; б) $f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x\le 1\\ x^2-x, & x>1\end{cases}$, во точката $x_0=1$;

в) $f(x)=\begin{cases} x, & -\infty< x<1\\ 1-x, & x\ge 1\end{cases}$, во точката $x_0=1$.

2 ИЗВОД НА НЕКОИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

Потсети се!

- Кои се основните елементарни, а кои елементарни функции?

- $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n}b^n$.
- $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.
- $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.
- $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.
- $\log A-\log B=\log\frac{A}{B},\ A>0,B>0$.
- $n\log A=\log A^n,\ A>0$.

Одредувањето на извод по дефиниција од некоја функција често пати е долготрајна и сложена работа. Овде ќе ги одредиме по дефиниција изводите на некои функции, кои треба да ги знаеме како "таблица за множење". Натаму ќе го имаме предвид следново:

- Ако функцијата е зададена со некој аналитички израз, без да биде назначен нејзиниот домен, ќе сметаме дека доменот се состои од сите реални броеви за кои тој аналитички израз има смисла.

1. *Извод од константа*

- Нека $f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$. Тогаш $f(x+\Delta x)=c$, па $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{c-c}{\Delta x}=0$, т.е.

$$c'=0.$$

2. *Извод од функцијата* $f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N}$

Нараснувањето $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$, т.е. $\Delta f=(x+\Delta x)^n-x^n$.

Ако $(x+\Delta x)^n$ го развиеме според биномната формула, имаме:

$$(x+\Delta x)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+\binom{n}{n}(\Delta x)^n$$

$$(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n$$

$$\Delta f=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta x\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}\right)}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}\right)=nx^{n-1},\text{ т.е.}$$

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$$

1 Со примена на претходната формула одреди го изводот на функцијата:

а) $f(x)=x$; б) $f(x)=x^2$; в) $f(x)=x^5$.

Решение:

а) $f'(x)=x'=1\cdot x^{1-1}=1\cdot x^0=1$; б) $f'(x)=2\cdot x^{2-1}=2x$; в) $f'(x)=2\cdot x^{5-1}=5x^4$.

Функцијата $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$ се вика ***степенска функција***, а формулата $\left(x^n\right)'=n\,x^{n-1}$ важи за секој реален број. Ова тврдење нема да го докажуваме, а неговата примена ќе ја воочиме на следниве примери.

2 Одреди го изводот на функцијата: а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}$; в) $y=\dfrac{1}{x}$; г) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Проследи го решението:

а) $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

в) $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-1\cdot x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}$; г) $f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}-1}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$.

3. *Извод од експоненцијалната функција* $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)$$

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$. Бидејќи $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a$ имаме

$f'(x)=a^x\cdot\ln a$, т.е. $\boxed{\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a.}$ Ако $a=e$, тогаш $\boxed{\left(e^x\right)'=e^x.}$

4. *Извод од логаритамската функција* $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$.

$$\Delta y=f(x+\Delta x)=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{x}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

$y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)=\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$. Бидејќи $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\log_a e$

следува дека $y'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\log_a e$, т.е. $\boxed{\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e.}$ Ако $a=e$, тогаш $\boxed{\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}.}$

5. *Извод од тригонометриската функција* $y=\sin x$.

$$\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x},\text{ а } f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Бидејќи $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$ имаме $f'(x)=\cos x$, т.е. $\boxed{(\sin x)'=\cos x.}$

3 Покажи дека $(\cos x)'=-\sin x$.

Изводите на некои функции ќе ги претставиме во следната табела

1	$(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	5	$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$
2	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	6	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
3	$(a^x)'=a^x\ln a$	7	$(\sin x)'=\cos x$
4	$(e^x)'=e^x$	8	$(\cos x)'=-\sin x$

Задачи:

1. Со примена на соодветната формула одреди го изводот на функцијата:

   а) $y=x^6$; б) $y=x\sqrt{x}$; в) $y=\frac{1}{x^{10}}$.

2. Одреди го по дефиниција изводот на функцијата: а) $y=\frac{1}{x}$; б) $y=\sqrt{x}$; в) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

   г) $y=2x^2+3x-4$; д) $y=\frac{x-1}{2x+1}$.

3. Одреди ги точките во кои функциите $y=x+2$ и $y=2x^2-3x+4$ имаат еднаков извод.

4. Одреди ги точките во кои изводот на функцијата $y=\sin x$ е еднаков на 1.

5. Одреди ги точките во кои изводот на функцијата $y=\cos x$ е еднаков на 0.

6. Одреди ги точките во кои изводот на функцијата $y=\sin x$ е еднаков на изводот на функцијата $y=\cos x$.

3 ОСНОВНИ ПРАВИЛА ЗА ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ

Досега одредувавме извод на некои елементарни функции. Во практиката ќе се сретнеме со разни комбинации од овие функции добиени со некои од аритметичките операции. Одредувањето извод на така добиените функции по дефиниција обично е долго и сложено. За одредување извод на такви функции постојат одредени правила кои овозможуваат многу полесно наоѓање на изводот.

1. *Извод од производ на константа и функција*

Теорема. Ако $f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот (a,b) и c е константа, тогаш

$$(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x).$$

Доказ. Нека $g(x)=c\cdot f(x)$, тогаш $g(x+\Delta x)=c\cdot f(x+\Delta x)$, па $g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot f(x+\Delta x)-c\cdot f(x)}{\Delta x}=c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=c\cdot f'(x).$$

1 Одреди го изводот на функцијата:

а) $f(x)=-5x^4$; б) $f(x)=3ax^5$; в) $f(x)=3\sin x$; г) $f(x)=\dfrac{2}{5}\ln x$.

Решение:

а) $f'(x)=(-5x^4)'=-5(x^4)'=-5\cdot 4x^3=-20x^3$;

б) $f'(x)=(3ax^5)'=3a(x^5)'=3a\cdot 5x^4=15ax^4$;

в) $f'(x)=(3\sin x)'=3(\sin x)'=3\cos x$;

г) $f'(x)=\left(\dfrac{2}{3}\ln x\right)'=\dfrac{2}{3}(\ln x)'=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{3x}$.

2 Одреди го изводот на функцијата: а) $y=\dfrac{3}{4}x^4$; б) $y=2\cos x$; в) $y=2\sqrt{x}$; г) $y=4a^x$.

2. *Извод од збир на функции*

Теорема. Ако $u=u(x)$, $v=v(x)$ се диференцијабилни функции во интервалот (a,b), тогаш и функцијата $u(x)+v(x)$ е диференцијабилна во истиот интервал и притоа

$$(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x),\ \text{т.е.}\ (u+v)'=u'+v'.$$

Доказ. Ако Δx е нараснување на аргументот x, тогаш $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$ и $\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)$ се соодветните нараснувања на функциите $u(x)$ и $v(x)$. Нека $f(x)=u(x)+v(x)$, тогаш

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x),$$

т.е. $\Delta f=\Delta u+\Delta v$, а

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x},\ \text{па}\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x},\ \text{т.е.}\ f'(x)=u'(x)+v'(x).$$

Значи, $(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x)$, т.е. $(u+v)'=u'+v'$.

3 Одреди го изводот на функцијата: а) $f(x)=2x^2-3x$; б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$; в) $f(x)=2x+\cos x$.

Решение:

а) $f'(x)=\left(2x^2\right)'-(3x)'=2\cdot 2x-3\cdot 1=4x-3$; б) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=x^2-x$.

Ова правило важи за збир на три и повеќе диференцијабилни функции во ист интервал (a,b), т.е.

$$(u+v+w)'=u'+v'+w'.$$

4 Одреди го изводот на функцијата: а) $f(x)=3x^2+4x^3-\frac{2}{3}x^6$; б) $y=2x-3x^2-4x^5$;

в) $y=3\ln x+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}$; г) $f(x)=3\sin x+2\cos x-x^2$.

Решение:

- При решавањето на задачите користи ги досега изучените формули за извод на функции.
- а) $f'(x)=\left(3x^2\right)'+\left(4x^3\right)'-\left(\frac{2}{3}x^6\right)'=3\cdot 2x+4\cdot 3x^2-\frac{2}{3}\cdot 6x^5=6x+12x^2-4x^5$;
- в) $y'=(3\ln x)'+\left(\sqrt{x}\right)'-\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{3}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{3}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

5 Одреди го изводот на функцијата: а) $f(x)=3x^2-2\sin x+3\cdot 2^x$; б) $y=2\cos x+\frac{1}{x}-\log_3 x$.

3. *Извод од производ на функции*

Теорема. Ако $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се диференцијабилни функции во интервалот (a,b), тогаш и функцијата $u(x)\cdot v(x)$ е диференцијабилна во истиот интервал и притоа

$$(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x),\ \text{т.е. } (u\cdot v)'=u'v+uv'.$$

Доказ. Нека $f(x)=u(x)\cdot v(x)$, тогаш $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)$.

Понатаму ќе ги користиме ознаките $u(x)=u$, $u(x+\Delta x)=u+\Delta u$, $v(x)=v$ и $v(x+\Delta x)=v+\Delta v$, при што

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0.$$

Според тоа:

$$\Delta f=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)-u\cdot v.$$

$$\Delta f=u\cdot v+\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x},$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\right)=$$

$$=u'\cdot v+u\cdot v'+u'\cdot 0=u'\cdot v+u\cdot v',\ \text{т.е.}$$

$$\boxed{(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'.}$$

6 Одреди го изводот на функцијата: а) $f(x)=(2x^2-3)(x^4-3x^2+5)$;

б) $f(x)=x^2\cdot\sin x$; в) $y=(2x^2-3x)\cdot\ln x,\ x>0$; г) $y=(1+\sin x)\cdot\cos x$.

Спореди го твоето решение со даденово:

а) Нека $u(x)=2x^2-3$ и $v(x)=x^4-3x^2+5$.

Според формулата имаме:

$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$, т.е.

$f'(x)=(2x^2-3)'(x^4-3x^2+5)+(2x^2-3)(x^4-3x^2+5)'$

$f'(x)=4x(x^4-3x^2+5)+(2x^2-3)(4x^3-6x)$

$f'(x)=4x^5-12x^3+20x+8x^5-12x^3-12x^3+18x$

$f'(x)=12x^5-36x^3+38x$.

г) $y'=(1+\sin x)'\cdot\cos x+(1+\sin x)\cdot(\cos x)'$

$y'=\cos x\cdot\cos x+(1+\sin x)\cdot(-\sin x)$

$y'=\cos^2 x-\sin x-\sin^2 x$

$y'=\cos 2x-\sin x$.

7 Одреди го изводот на функцијата:

а) $y=x^2(x^3-1)$; б) $y=2x\sqrt{x},\ x>0$; в) $y=(x^2+a^2)(x^2-a^2)$; г) $y=x-\sin x\cos x$.

Теоремата за извод на производ на диференцијабилни функции може да се воопшти за извод на производ од три и повеќе, но конечен број диференцијабилни функции, во ист интервал (a,b). Ако $y=u\cdot v\cdot w$ е производ на диференцијабилните функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ и $w=w(x)$, тогаш $y=(u\cdot v)\cdot w$, па $y'=(u\cdot v)'\cdot w+(u\cdot v)\cdot(w)'$ или $y'=(u'\cdot v+u\cdot v')\cdot w+(u\cdot v)\cdot(w)'$, т.е.

$$y'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'.$$

На сличен начин може да се одреди извод на производ од четири и повеќе функции.

8 Одреди го изводот на функцијата: а) $y=x^2\cdot e^x\cdot\sin x$; б) $y=e^x\sin x\cos x$.

Решение:

а) $y'=(x^2)'\cdot e^x\sin x+x^2(e^x)'\sin x+x^2\cdot e^x\cdot(\sin x)'$; $y'=2xe^x\sin x+x^2e^x\sin x+x^2e^x\cos x$;

$$y'=xe^x(2\sin x+x\sin x+x\cos x).$$

4. Извод од количник на функции

Теорема. Ако $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се диференцијабилни функции во интервалот (a,b), при што за $v(x)\neq 0$ за секој $x\in(a,b)$, тогаш функцијата $\frac{u(x)}{v(x)}$ е диференцијабилна во истиот интервал и притоа

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)},\ \text{т.е.}\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

Доказ. Нека $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, тогаш $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Според претходно воведените ознаки имаме:

$$\Delta f=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{(u+\Delta u)\cdot v-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}=\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot u-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v(v+\Delta v)}.$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v(v+\Delta v)}=(u'v-uv')\cdot\frac{1}{v^2},$$ бидејќи $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$, т.е.

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.}$$

9 Одреди го изводот на функцијата: а) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$; б) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2}$; в) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Согледај го решението:

а) Со примена на формулата $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, каде што $u=2x$, а $v=1-x^2$ имаме:

$$y'=\frac{(2x)'(1-x^2)-2x(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}.$$

10 Одреди го изводот на функцијата: а) $y=\operatorname{tg}x,\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $y=\operatorname{ctg}x,\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Решение:

а) Бидејќи $tg\,x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ имаме

$$y'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$ т.е.

$$\boxed{(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.}$$

б) Докажи дека $\boxed{(\operatorname{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}.}$

Овие формули може да се додадат во табелата на изводите на крајот од лекцијата 2.

11 Одреди го изводот на функцијата: а) $y=\dfrac{1}{\cos x}$; б) $y=\dfrac{\sin x}{\sin x-\cos x}$; в) $y=\dfrac{x\cdot e^x}{\sin x}$.

Разгледај го решението:

в) $y'=\dfrac{\left(x\cdot e^x\right)'\sin x-xe^x\left(\sin x\right)'}{\sin^2 x}=\dfrac{\left(x'\cdot e^x+x\cdot\left(e^x\right)'\right)\sin x-xe^x\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{e^x\left(\sin x+x\sin x-x\cos x\right)}{\sin^2 x}$.

12 Пресметај $f'(x_0)$ ако:

а) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$; б) $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$, $x_0=0$; в) $y=\dfrac{\ln x}{x+1}$, $x_0=1$; г) $y=e^x\sin x+\dfrac{1}{e^x}$, $x_0=0$.

Задачи:

Со примена на формулите пресметај ги изводите на функциите.

1. а) $y=0,5x^2$; б) $y=-x^3$; в) $y=-4\sqrt[4]{x}$; г) $y=mx+n$.

2. а) $y=2x^2-3x+5$; б) $y=x\sqrt{2}-3x^2-4$;
   в) $y=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{4}x^4$; г) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}$.

3. а) $y=x^{\frac{1}{3}}$; б) $y=x^{-\frac{2}{5}}$; в) $y=\sqrt[3]{x^2}$; г) $y=4\sqrt[4]{x}-3\sqrt[3]{x}$.

4. а) $y=\sin x-2\cos x$; б) $y=x^5-e^x+\ln x$; в) $y=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$.

5. а) $y=\left(x^2-3x\right)(1-2x)$; б) $y=(3x+2)\left(x^2-4x-1\right)$; в) $y=x^2\left(x^2+1\right)(x-1)$.

6. а) $y=\sin x\cos x$; б) $y=\sin x\cdot\operatorname{tg} x$; в) $y=\cos x\cdot\operatorname{ctg} x$.

7. а) $y=x^3\ln x$; б) $y=x^2\cdot e^x$; в) $y=x\cdot e^x\cdot\ln x$.

8. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; б) $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+1}$; в) $y=\dfrac{1}{\sin x}$; г) $y=\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$.

9. а) $y=\dfrac{\ln x-1}{\ln x+1}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$; в) $y=\dfrac{x}{e^x}$.

10. За функцијата $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ одреди $f'(0)$ и $f'(1)$. Докажи дека $f'(1)=f'(-1)$.

4 ИЗВОД НА СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА

Нека $f(x)=3x,\ x\in\mathbb{R}$ и $g(x)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$. Да ги формираме функциите $f(g(x))$ и $g(f(x))$.

Имаме: $f(g(x))=3\cdot g(x)=3(x^2+1)=3x^2+3$ и $g(f(x))=g\cdot(3x)=(3x)^2+1=9x^2+1.$

Воочи дека $f(g(x))\neq g(f(x))$.

Функцијата $f(g(x))$ се вика ***сложена функција*** или ***композиција*** од $f(x)$ и $g(x)$.

Потсети се!

- Функцијата $y=\sqrt{1+x^2}$ можеме да ја разгледаме како сложена функција, па таа може да се запише со помош на функцијата $u(x)=1+x^2$, т.е. $y=\sqrt{u}$.
- Функцијата $u(x)$ често се вика ***посредна функција***.
- Функцијата $y=(x^2-1)^2$ е сложена функција. Посредна функција е $u(x)=x^2-1$, па $y=u^2$, $u(x)=x^2-1$. Посредната функција $u(x)$ не е секогаш еднозначно определена.

1 Дадени се сложените функции:

а) $y=\sqrt{\sin x}$; б) $y=e^{2x-3}$; в) $y=\ln^2 x$; г) $y=\cos 3x$; д) $y=\ln(x^2-x+2)$.

Одреди ја функцијата $u(x)$ и функцијата $y=f(u)$.

Согледај го одговорот:

- а) $u(x)=\sin x,\ y=\sqrt{u}$;
- в) $u(x)=\ln x,\ y=u^2$;
- г) $u(x)=3x,\ y=\cos u$;
- д) $u(x)=x^2-x+2,\ y=\ln u$.

2 Одреди ја функцијата $u(x)$ ако:

а) $y=e^{x^2}$; б) $y=\ln(\sin x)$; в) $y=(x+2)^{14}+3$; г) $y=\sin(3x-2)$.

Правилото за одредување на изводот на сложена функција е дадено со следнава

Теорема. Нека функцијата $u(x)$ определена во интервалот (a,b) е диференцијабилна во точката $x_0\in(a,b)$, а функцијата $f(x)$ определена во интервалот што го содржи множеството вредности на $u(x)$ е диференцијабилна во точката $u_0=u(x_0)$. Тогаш сложената функција $h(x)=f(u(x))$ е диференцијабилна во точката x_0, при што:

$$h'(x_0)=f'(u(x_0))\cdot u'(x_0).$$

Доказ. Нека $u(x_0+\Delta x)-u(x_0)=k$ е нараснување на функцијата $u(x)$. Оттука следува

$$u(x_0+\Delta x)=u(x_0)+k=u_0+k.$$

Бидејќи $u(x)$ е диференцијабилна функција во точката x_0, таа е непрекината во таа точка, па нејзиното нараснување во x_0 се стреми кон 0 кога $\Delta x\to 0$.

$$h'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u(x_0+\Delta x))-f(u(x_0))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u_0+k)-f(u_0)}{\Delta x}.$$

Ако броителот и именителот ги помножиме со k, бидејќи $k=u(x_0+\Delta x)-u(x_0)$, имаме

$$h'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u_0+k)-f(u_0)}{\Delta x}\cdot\frac{k}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(u_0+k)-f(u_0)}{k}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}=$$

$$f'(u_0)\cdot u'(x_0)=f'(u(x_0))\cdot u'(x_0).$$

При практичната примена на теоремата, функцијата ја обележуваме со $y=f(u(x))$, а изводот на функција во точката $x\in D_f$ е

$$y'=f'(u)\cdot u'(x).$$

3 Одреди го изводот на функцијата: а) $y=(2x-3)^5$; б) $y=\sqrt{x^2+3}$; в) $y=(4x+3)^{\frac{2}{3}}$.

Воочи ја постапката:

а) Посредната функција $u=2x-3$, па $y=u^5$, а нејзиниот извод е

$$y'=5u^4\cdot u'(x);$$

$$y'=5(2x-3)^4\cdot(2x-3)';$$

$$y'=5(2x-3)^4\cdot 2=10(2x-3)^4.$$

б) $u=x^2+3$, $y=\sqrt{u}$; $y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'(x)$;

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot(x^2+3)';$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

4 Одреди го изводот на функцијата:

а) $y=e^{-x^2}$; б) $y=e^{x^2-x+1}$; в) $y=\ln^2 x,\ x>0$; г) $y=\ln(x^2-2x+3)$.

Спореди го твоето решение со даденово:

а) $y=e^{-x^2}$; $u(x)=-x^2$, па $y=e^u$, а $y'=e^u\cdot u'(x)=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$.

в) $y=\ln^2 x$; $u(x)=\ln x$, па $y=u^2$, а $y'=2u\cdot u'(x)=2\ln x\cdot(\ln x)'=\frac{2\ln x}{x}$.

5 Одреди го изводот на функцијата:

а) $y=\sin^2 x$; б) $y=\cos 2x$; в) $y=\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x$.

Разгледај го решението:

а) $y=\sin^2 x$; $u=\sin x$, па $y=u^2$, а $y'=2u\cdot u'(x)=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$;

б) $y'=(\cos u)'\cdot u'(x)=-\sin 2x\cdot(2x)'=-2\sin 2x$;

в) $y'=3\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x)'-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{\cos^2 x}$.

На крајот на втората лекција во табела дадовме изводи на некои елементарни функции. Овде ќе дадеме таблица за изводи на сложени функции, каде што $u=u(x)$ е посредна функција:

1	$(u^{\alpha})'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$	6	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
2	$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	7	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
3	$(a^{u})'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$	8	$(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
4	$(e^{u})'=e^{u}\cdot u'$	9	$(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
5	$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$	10	$(\log_a u)'=\frac{1}{u}\cdot u'\cdot\log_a e$

6 Одреди го изводот на функцијата:

а) $y=\sin x^3$; б) $y=\ln\frac{x-1}{x+1}$; в) $y=\sqrt{x}\cos^2 x$; г) $y=\ln\sin\sqrt{x}$.

Согледај го решението:

а) $y'=\cos x^3\cdot\left(x^3\right)'=3x^2\cos x^3$;

б) $y'=\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)'\cdot(x+1)-(x-1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{x^2-1}$;

в) $y'=\left(\sqrt{x}\right)'\cos^2 x+\sqrt{x}\left(\cos^2 x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos^2 x+\sqrt{x}\cdot 2\cos x(\cos x)'=\frac{\cos^2 x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cdot 2\cos x(-\sin x)=\frac{\cos^2 x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\sin 2x$;

г) $y'=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\left(\sin\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{x}$.

7 Одреди го изводот на функцијата:

а) $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2+1}$; б) $f(x)=e^{\operatorname{tg} x}$;

в) $f(x)=x^2e^{-2x}$; г) $f(x)=\sin\sqrt{1-x^2}$.

8 Одреди го изводот на функцијата $y = y(x)$ определена со равенката:

а) $x^2 + y^2 - 1 = 0$; б) $x^3 + y^3 - 3x^2 - x = 0$;

в) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} = 1$; г) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

Воочи ја постапката:

Функцијата $y = y(x)$ е дадена во имплицитен вид, па за одредување на изводот $y' = y'(x)$ дадената равенка ќе ја решиме по y, т.е. ќе ја запишеме во експлицитен вид, водејќи сметка за дефиниционото множество на добиената функција.

а) Од дадената равенка имаме:

$$y^2 = 1 - x^2, \text{ т.е. } y = \sqrt{1-x^2} \text{ или } y = -\sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1], \text{ па}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ или } y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ т.е. } y' = \pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

б) $y^3 = x + 3x^2 - x^3$, т.е. $y = \sqrt[3]{x+3x^2-x^3}$, $x \in \mathbb{R}$, па

$$y' = \frac{(x+3x^2-x^3)'}{3\sqrt[3]{x+3x^2-x^3}} = \frac{1+6x-3x^2}{3\sqrt[3]{x+3x^2-x^3}}.$$

г) $\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$, т.е. $y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2$, $x \geq 0$, па

$$y' = 2\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}}.$$

9 Одреди ја вредноста на изводот на функцијата дадена со равенката во точката x, ако:

а) $x^2 + xy - 3x + y + 2 = 0$, $x = -2$; б) $e^x - x^2 + yx + 2y = 0$, $x = 0$.

Разгледај го решението:

а) $y = \frac{3x-2-x^2}{x+1}$, $y' = \frac{5-2x-x^2}{(x+1)^2}$; $y'(-2) = 5$;

б) $y = \frac{x^2 - e^x}{x+2}$, $y' = \frac{x^2+4x-xe^x-e^x}{(x+2)^2}$; $y'(0) = -\frac{1}{4}$.

Задачи:

Одреди го изводот на функцијата:

1 а) $y=\left(3x^2+5x-1\right)^4$; б) $y=\left(5-3x^4\right)^{11}$; в) $y=(a+bx)^2$; г) $y=\left(a-bx^3\right)^5$.

2 а) $y=(2x-3)^7(x-3)$; б) $y=(3x-2)^7\left(x^2+3x-4\right)^3$.

3 а) $y=\sqrt{x^2-2}$; б) $y=\sqrt[3]{4+2ax^3}$.

4 а) $y=2x+\sqrt{1-4x^2}$; б) $y=x^2+1-\sqrt{9-x^2}$.

5 а) $y=x\sqrt{2x^2+1}$; б) $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

6 Дадени се функциите $f(x)=3-2x$, $g(x)=x^2$ и $p(x)=\sin x$.
Формирај ја сложената функција $h(x)$, ако:
а) $h(x)=f(g(x))$; б) $h(x)=g(p(x))$; в) $h(x)=g(f(x))$; г) $h(x)=p(f(x))$.
Одреди го изводот на функцијата $h(x)$.

7 Дадени се функциите $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\cos x$ и $p(x)=\sqrt{x}$. Формирај ја сложената функција $h(x)$, ако: а) $h(x)=f(g(x))$; б) $h(x)=f(p(x))$; в) $h(x)=p(g(x))$; г) $h(x)=p(f(x))$.
Одреди ја дефиниционата област на функцијата $h(x)$. Одреди го изводот на функцијата $h(x)$.

8 Одреди го изводот на функцијата:

а) $y=e^{2x-3}$; б) $y=\ln\left(x^2-3x\right)$; в) $y=\ln\sin x$.

9 Одреди го изводот на функцијата:

а) $y=\sin 3x$; б) $y=\sin^3 x$; в) $y=\cos\dfrac{x}{2}$.

10 Одреди го изводот на функцијата:

а) $y=\cos\sqrt{ax}$; б) $y=\cos 2x\cdot\mathrm{tg}^2 x$.

11 Одреди го изводот на функцијата $y=y(x)$ определена со равенката:

а) $x^3+y^3-x=0$; б) $y^2-x=0$;
в) $x^2+y^2-4x+3=0$; г) $2x^2-xy-x+y=0$.

5 ИЗВОД ОД ПОВИСОК РЕД

Потсети се!

- Како се одредува извод на дадена функција по дефиниција?
- Ако $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$, тогаш нејзиниот извод е $y' = 6x^2 - 6x + 4$.

1 Дадена е функцијата $f(x) = x^2 + x$. Одреди го изводот на функцијата $f'(x)$.

Решение:

- Изводот на функцијата $f(x)$ е $f'(x) = 2x + 1$, а изводот на функцијата $f'(x)$ е

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f'}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)+1-(2x+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$$

Изводот на функцијата $f'(x_0)$ во точката $x_0 \in D'_f$, ако постои, се вика ***втор извод*** или ***извод од втор ред*** и се означува $f''(x)$ (се чита *f* секундум). Во таа смисла $f'(x)$ се вика ***прв извод*** или ***извод од прв ред***. Според тоа, втор извод на функцијата $f(x)$ е изводот на функцијата $f'(x)$, т.е.

$$(f'(x))' = f''(x).$$

- За дадената задача имаме: $(x^2 + x)'' = 2$.

Со понатамошно диференцирање на функцијата $f''(x)$ се добива трет извод, т.е. $(f'')' = f'''$, а $(f''')' = f^{(4)}, (f^{(4)})' = f^{(5)}$ итн. се додека е исполнета претпоставката за постоење на следниот извод.

Запомни!

Функцијата f која има n – ти извод се вика n пати диференцијабилна функција.

- За функцијата $f(x) = x^4$ имаме:

$f'(x) = 4x^3$; $f''(x) = 12x^2$; $f'''(x) = 24x$; $f^{(4)}(x) = 24$; $f^{(5)}(x) = 0$ и секој нареден извод е еднаков на нула.

2 Одреди го третиот извод на функцијата $f(x) = x \cdot e^x$.

Решение:

$f'(x) = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = (1+x)e^x$; $f''(x) = (1+x)' \cdot e^x + (1+x) \cdot (e^x)' = (2+x)e^x$;

$f'''(x) = (2+x)' \cdot e^x + (2+x) \cdot (e^x)' = (3+x) \cdot e^x$.

3 Одреди го четвртиот извод на функцијата: а) $y=\sin x$; б) $y=\cos x$.

Согледај го решението:

а) $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$, $f^{(5)}(x)=\cos x$;

б) $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, $f'''(x)=\sin x$, $f^{(4)}(x)=\cos x$, $f^{(5)}(x)=-\sin x$.

Продолжи со барање на извод од повисок ред на функциите. Што воочуваш?

Воочи, двете функции се произволен број пати диференцијабилни во $\mathbb{R}$, па за овие функции важи равенството $f^{(n)}_{(x)}=f^{(n+4)}_{(x)}$, $n\in\mathbb{N}$.

4 Одреди го вториот извод на функцијата: а) $y=xe^{-x}$; б) $y=x^2\cdot\ln x$; в) $y=\sqrt{x^2+1}$.

Решение:

в) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

$$y''=\frac{(x)'\sqrt{x^2+1}-x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

5 Докажи дека функцијата $y=\sin x+\cos x$ ја задоволува равенката $y'''+y''+y'+y=0$.

Задачи:

Одреди го вториот извод на функцијата $(1-5)$:

1 а) $y=5x^2-3x+4$; б) $y=\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{7}{6}x^3+\dfrac{9}{5}$.

2 а) $y=\dfrac{4x}{1+x^2}$; б) $y=\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$.

3 а) $y=x\cdot\ln x$; б) $y=x\cdot e^{2x}$.

4 а) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$; б) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; в) $y=x\cdot e^{\sin x}$.

5 а) $x^2+y^2=25$; б) $y-xy-x^2=1$.

6 Одреди ја вредноста на вториот извод на функцијата во дадената точка:

а) $y=x^3-3x^2-9x+10$, $x=-1$; б) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$, $x=4$.

7 Одреди ги коефициентите a, b и c на функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$, ако $f(-1)=7$, $f'(3)=9$ и $f''(x)=4$.

8 Докажи дека функцијата $y=e^x\cdot\sin x$ ја задоволува равенката $y''-2y'+2y=0$.

9 Докажи дека функцијата $y=\dfrac{x-2}{x+3}$ ја задоволува равенката $(x-2)y''+2y\,y'=0$.

10 Докажи дека функцијата $y=e^{4x}+2e^{-x}$ ја задоволува равенката $y'''-13y'-12y=0$.

6 ДИФЕРЕНЦИЈАЛ НА ФУНКЦИЈА

Да претпоставиме дека функцијата $f(x)$ е дефинирана во интервалот (a,b) и има извод во точката $x_0 \in (a,b)$. Тогаш за секое Δx, такво што $x+\Delta x \in (a,b)$ и $\Delta x \neq 0$ е дефинирана разликата

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon,$$

каде што ε е функција од Δx, т.е. $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$, и притоа $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. За да биде $\varepsilon(\Delta x)$ дефинирано, ќе ставиме $\varepsilon(0)=0$.

Од претходното равенство го добиваме равенството $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$, познато како ***формула за конечно нараснување***. Формулата е точна и за $\Delta x = 0$, независно од тоа како е дефинирано ε.

Според тоа, нараснувањето на функцијата $f(x)$ претставува збир од два собироци,

$$f'(x_0)\cdot \Delta x \text{ и } \varepsilon \cdot \Delta x.$$

Првиот собирок $f'(x_0)\Delta x$ се вика ***диференцијал на функцијата*** $f(x)$ во точката x_0 и се означува со $df(x_0)$ или df.

Диференцијалот на функцијата $y=x$ е $dy=(x)'\Delta x = 1\cdot \Delta x = \Delta x$, т.е. $dx = \Delta x$.

Според тоа:

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \quad \text{или} \quad dy = f'(x_0)dx.$$

Дефиниција. Диференцијал на функцијата $f(x)$ во точката $x \in D_f$ е производот од изводот на функцијата $f(x)$ во таа точка и диференцијалот на аргументот, т.е.

$$df = f'(x)dx \quad \text{или} \quad dy = f'(x)dx.$$

1 Одреди го диференцијалот на функцијата:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; б) $y = \sin x$; в) $y = x\cdot e^x$; г) $y = \sqrt{a^2+x^2}$.

Спореди го твоето решение со даденово:

а) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, па

$dy = f'(x)dx$, т.е.

$dy = (3x^2 - 6x + 3)dx$;

г) $y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, па

$$dy = \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Воочи, од $dy = f'(x)dx$ следува $\boxed{f'(x) = \dfrac{dy}{dx},}$ па $\dfrac{dy}{dx}$ е уште една ознака за извод на функцијата $f(x)$.

Од равенството $\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x$ имаме $\Delta f(x_0)=df(x_0)+\varepsilon dx$, т.е. $\Delta f(x_0)-df(x_0)=\varepsilon dx$, притоа, кога $\Delta x\to 0$, тогаш $\varepsilon dx\to 0$. Значи, за доволно мало Δx може да се каже дека

$$\Delta f(x_0)-df(x_0)=0, \quad \text{т.е.} \quad \Delta f(x_0)\approx df(x_0).$$

2 Одреди ја разликата $\Delta f-df$ на функцијата $f(x)=x^2$ во точката $x=2$, ако $dx=\Delta x=0{,}1$.

Решение:

$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=(2x+\Delta x)\Delta x$; $\quad df=f'(x)dx=2x\,dx$.

За $x=2$ и $dx=0{,}1$, $\Delta f=(2\cdot 2+0{,}1)\cdot 0{,}1=0{,}41$, а

$$df=2\cdot 2\cdot 0{,}1=0{,}4, \quad \text{па} \quad \Delta f-df=0{,}41-0{,}4=0{,}01.$$

3 Пресметај го диференцијалот на функцијата $f(x)=x^3-2x-1$ во точката $x=2$ и одреди ја грешката ако Δy се замени со dy: а) $dx=\Delta x=0{,}1$; б) $dx=\Delta x=0{,}01$.

Решение:

а) $f'(x)=3x^2-2$, а $\quad df=(3x^2-2)\cdot dx$; $\quad df(2)=(3\cdot 2^2-2)\cdot 0{,}1=1$.

$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)-1-(x^3-2x-1)=(3x^2-2)\Delta x+(3x+\Delta x)\cdot(\Delta x)^2$.

Бидејќи $f'(x)\Delta x=(3x^2-2)\Delta x$, од $\Delta f=f'(x)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x$ следува

$$\varepsilon\cdot\Delta x=(3x+\Delta x)\cdot(\Delta x)^2, \text{ т.е. } \varepsilon=(3x+\Delta x)\cdot\Delta x.$$

За $x=2$ и $\Delta x=0{,}1$, $\varepsilon=(3\cdot 2+0{,}1)\cdot 0{,}1=0{,}61$.

Бараната разлика е $\Delta f-df=\varepsilon\cdot\Delta x=0{,}61\cdot 0{,}1=0{,}061$. Значи, ако Δf го замениме со df ќе направиме грешка за $0{,}061$.

Доколку Δx е многу мало, грешката ќе биде многу помала.

- Реши ја задачата под б), со што ќе го потврдиш претходниот заклучок.

Од заклучокот $\Delta f(x_0)\approx df(x_0)$, т.е. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)dx$ имаме

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)dx.$$

Оваа формула овозможува практична примена на диференцијалот за приближно пресметување на вредноста на функцијата $f(x)$ во точката x_0, бидејќи диференцијалот на една функција, по правило, полесно се одредува од нараснувањето на функцијата.

4 Со примена на диференцијалот на функција, приближно пресметај: а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt[3]{28}$.

Воочи ја постапката:

а) Функцијата е $f(x)=\sqrt{x}$. Бидејќи точно знаеме колку е $\sqrt{9}$, а 9 е блиску до 10, за $x_0=9$ и $\Delta x=1$, според формулата $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)dx$ имаме:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot dx, \text{ т.е. } f(9+1)=f(9)+\frac{1}{2\sqrt{9}}\cdot 1, \text{ па } \sqrt{10}=\sqrt{9}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot 1=3+\frac{1}{6}=3\frac{1}{6}.$$

б) Функцијата е $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x_0=27,\ \Delta x=dx=1,$ па $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)dx=f(x_0)+\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}\cdot 1,$

т.е. $\sqrt[3]{28}=\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}\cdot 1=3+\frac{1}{3^3}=3\frac{1}{27}.$

5 Приближно пресметај ја вредноста на:

а) $f(x)=x^3-x,$ ако $x_0=1$ и $\Delta x=0{,}1;$ б) $\sqrt{5};$ в) $\sqrt[4]{16{,}64}.$

6 Одреди ја приближната вредност на а) $\operatorname{tg} 46^0;$ б) $\cos 59^0.$

Разгледај ја постапката:

а) $f(x)=\operatorname{tg} x,\ x_0=45^0,\ \Delta x=dx=1^0=\frac{\pi}{180};$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)dx$$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\frac{1}{\cos^2 x_0}dx$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0+1^0\right)=\operatorname{tg} 45^0+\frac{1}{\cos^2 45^0}\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\operatorname{tg} 46^0=1+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot\frac{\pi}{180}=1+2\cdot\frac{\pi}{180}=1{,}0349.$$

б) $f(x)=\cos x,\ x_0=60^0,\ \Delta x=dx=-1^0=-\frac{\pi}{180};$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+(-\sin x_0)dx$$

$$f\left(60^0-1^0\right)=f\left(60^0\right)-\sin 60^0\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$\cos 59^0=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=0{,}5151149.$$

Задачи:

Одреди ги нараснувањето и диференцијалот на функцијата $y=f(x),$ ако:

1 а) $y=x^2-x+1,\ x_0=1,\ \Delta x=0{,}1;$ б) $y=x^3-2x^2+x-3,\ x_0=-2,\ \Delta x=0{,}2;$

в) $y=\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{6},\ \Delta x=\frac{\pi}{18};$

2 Одреди го диференцијалот на функцијата $y=f(x),$ ако:

а) $y=\frac{1}{x};$ б) $y=\frac{1}{x^3};$ в) $y=\sqrt{1+x^2}.$

3 Одреди го диференцијалот на функцијата $y=f(x),$ ако:

а) $y=x\cdot\sqrt{1+x^2};$ б) $y=x^2\cdot\ln x;$ в) $y=\sin^2 x.$

4 Одреди ја апсолутната грешка што се добива при заменувањето на нараснувањето на функцијата со диференцијалот, ако $y=\sqrt{x},\ x_0=4,\ \Delta x=0{,}01.$

(5) Одреди го диференцијалот на функцијата $f(x)$ во точката x_0, а за $\Delta x = 0{,}01$ одреди ги вредностите на $f(x_0 - \Delta x)$ и $f(x_0 + \Delta x)$, ако: а) $f(x) = 3x^2$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

(6) Приближно пресметај: а) $\sqrt[3]{65}$; б) $\sqrt{8{,}76}$.

(7) Приближно пресметај: а) $\sin 31^0$; б) $\ln 0{,}9$.

(8) Колкава е грешката кај плоштината на квадратот чија страна е долга $(50 \pm 0{,}01)\mathrm{m}$?

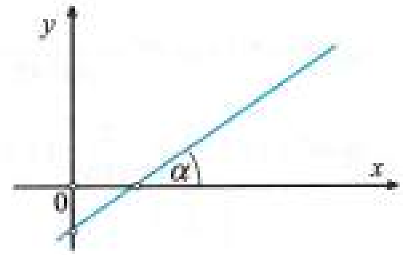
(9) Страната на квадратот е $a = (20 \pm 0{,}01)\mathrm{m}$. Одреди ја грешката кај неговата плоштина.

(10) Колкава е можната грешка кај плоштината на кругот ако радиусот е $r = (50 \pm 0{,}2)\mathrm{cm}$?

7 ГЕОМЕТРИСКО ТОЛКУВАЊЕ НА ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Коефициентот k на правецот на правата $y = kx + n$ во правоаголен координатен систем е $k = \operatorname{tg}\alpha$, α е аголот што правата го зафаќа со позитивната насока на x – оската.



- Правите $y = k_1x + n_1$ и $y = k_2x + n_2$ се:

  а) паралелни, ако $k_1 = k_2$;

  б) нормални, ако $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$.

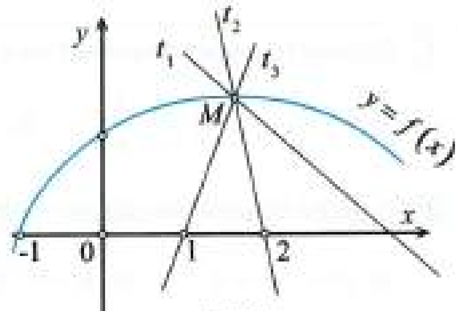
- Тангента на кружница е права што има само една заедничка точка со кружницата.
- Коефициентот на правецот на правата што минува низ точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ е $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

А Низ точката M што лежи на кривата $y = f(x)$ минуваат правите t_1, t_2 и t_3 кои со кривата имаат една заедничка точка (црт. 1). Дали правите t_1, t_2 и t_3 се тангенти на кривата?

- Дадена е параболата $y = ax^2$. Низ точките од параболата се повлечени прави кои се паралелни со оската на симетрија на параболата.

  Колку заеднички точки има секоја од тие прави со параболата?

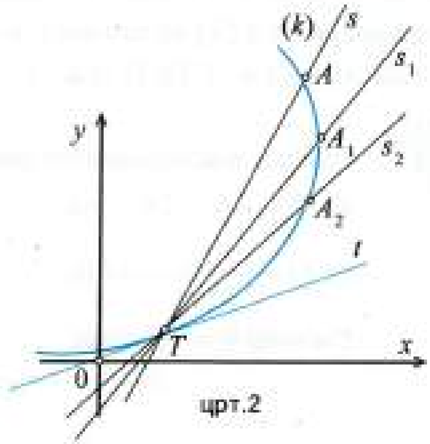
  Дали тие прави се тангенти на параболата?



црт. 1

Правата што минува низ неподвижната точка T и која било точка A, A_1, A_2, ... се вика секанта на кривата (k), црт. 2.

Ако точката A се движи по кривата (k), тогаш секантата ја менува положбата, па ако при граничниот процес кога точката A_i, $i \in \{1,2,3,...\}$ се совпадне со точката T, секантата $TA_i \equiv s_i$ има определена гранична положба, тогаш за добиената права t велиме дека е ***тангента на кривата*** (k).



црт.2

Дефиниција. Тангента на кривата (k) во точката T е граничната положба, ако постои, на секантата TA, кога точката A по кривата (k) се стреми кон точката T.

Нека во координатниот xOy кривата $G(x, f(x))$ е график на функцијата $y = f(x)$ за која претпоставуваме дека е диференцијабилна во точката x_0 (црт. 3).

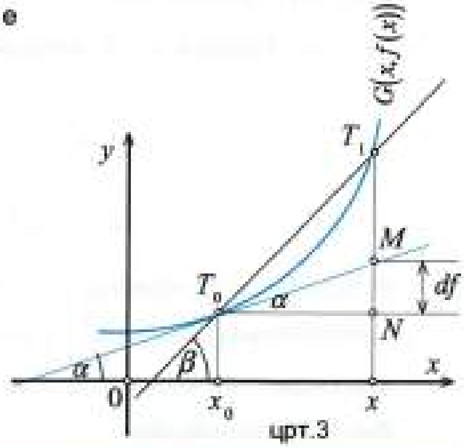
Нека точките $T_0(x_0, f(x_0))$ и $T_1(x, f(x))$ лежат на кривата $G(x, f(x))$, тогаш коефициентот на правецот на секантата T_0T_1 е

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \ 0 < \beta < \pi.$$

Кога $x \to x_0$ $(T_1 \to T_0)$, тогаш аголот β на секантата се стреми кон аголот α, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \beta = \alpha, \text{ па } \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg}\beta = tg\,\alpha.$$

Бидејќи $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, а од $x - x_0 = \Delta x$ следува $x = x_0 + \Delta x$, тогаш:



црт.3

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{T_1 \to T_0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Притоа, правата T_0M кон која се стреми секантата T_0T_1 кога $T_1 \to T_0$ е тангента на кривата во точката T_0.

Запомни!

Коефициентот на правецот k на тангентата на кривата $y = f(x)$ во точката $x_0 \in D_f$ е

$$k = f'(x_0), \text{ ако } f'(x_0) \text{ постои.}$$

Ако $f'(x_0)$ не постои, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = \pm\infty$, тогаш тангентата на кривата во точката $T(x_0, f(x_0))$ е паралелна со y – оската, т.е. е од видот $x = x_0$.

Според тоа, геометриското толкување на изводот на функцијата $f(x)$ се состои во следново: изводот на функцијата $f(x)$ во точката x_0 е еднаков на коефициентот на правецот на тангентата во точката чија апсциса е x_0, т.е. $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=k$.

1 Одреди го коефициентот на правецот на тангентата на кривата во точката x, ако:

а) $f(x)=x^2-2x,\ x=1;$ б) $f(x)=x^3+2x^2-3,\ x=-1;$

в) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2},\ x=0;$ г) $f(x)=\sin x,\ x=-\dfrac{\pi}{4}.$

Согледај го одговорот:

- а) $f'(x)=2x-2,\ k=f'(1)=2\cdot1-2=0;$

- в) $f'(x)=\dfrac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ k=f'(0)=1.$

2 Во која точка од кривата $y=x^3+2x^2-1$ коефициентот на правецот на тангентата е еднаков на 4?

Согледај го решението:

- $y'=3x^2+4x$. Бидејќи $k=4$, следува $y'(x_0)=4$, т.е. $3x_0^2+4x_0=4$, па $x_0=\dfrac{2}{3}$ и $x_0=-2$.

$$\text{За } x_0=\frac{2}{3},\ y_0=\left(\frac{2}{3}\right)^3+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-1=\frac{5}{27};\ A\left(\frac{2}{3},\frac{5}{27}\right).$$

$$\text{За } x_0=-2,\ y_0=(-2)^3+2\cdot(-2)^2-1=-1;\ A(-2,-1).$$

3 Во која точка од кривата $y=x^3$ тангентата е:

а) паралелна со правата $y=3x-4;$ б) паралелна со x – оската;

в) нормална на правата $3x-4y+5=0$?

Воочи ја постапката:

- в) Изводот на функцијата $y=x^3$ е $y'=3x^2$, а изводот на функцијата $3x+4y+5=0$ е $3+4\cdot y'=0$, т.е. $y'=-\dfrac{3}{4}$. Коефициентот на правецот на тангентата на дадената крива во точката x_0 е $k_1=3x_0^{\,2}$, а коефициентот на правецот на правата е $k_2=-\dfrac{3}{4}$.

Од условот $1+k_1\cdot k_2=0$ имаме $1-\dfrac{3}{4}\cdot 3x_0^{\,2}=0$, т.е. $x_0=\pm\dfrac{2}{3}$.

$$\text{За } x_0=\frac{2}{3},\ y_0=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27},\ \text{па } A\left(\frac{2}{3},\frac{8}{27}\right).$$

$$\text{За } x_0=-\frac{2}{3},\ y_0=-\frac{8}{27},\ A\left(-\frac{2}{3},-\frac{8}{27}\right).$$

- а) Искористи го условот за паралелност на две прави.

Б Да ја согледаме геометриската смисла на диференцијалот на функцијата $f(x)$.

На црт. 3 воочи дека $x - x_0 = \overline{T_0N} = \Delta x$ е нараснувањето на аргументот, а нараснување на функцијата е $\Delta f = \overline{NT_1} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Од ΔT_0NM следува

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{NM}}{\overline{T_0N}}, \text{ т.е. } \overline{NM} = \overline{T_0N} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Бидејќи $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, а $\overline{T_0N} = \Delta x = dx$ следува дека

$$\overline{NM} = \overline{T_0N} \cdot \operatorname{tg}\alpha, \text{ т.е. } \overline{NM} = f'(x_0) \cdot dx = df(x_0).$$

Геометриското значење на диференцијалот на функцијата $f(x)$ е следново: ако апсцисата на допирната точка x_0 на тангентата t со кривата $y = f(x)$ нарасне за Δx, тогаш ординатата од тангентата ќе нарасне за вредноста на диференцијалот $df(x_0)$.

Бројот $\Delta f(x_0) - df(x_0) = \overline{NT_1} - \overline{NM} = \overline{MT_1}$ ја покажува грешката која се прави кога нараснувањето Δf на функцијата ќе се замени со диференцијалот df на функцијата $f(x)$ во точката $x_0 \in D_f$.

Задачи:

1. Одреди го коефициентот на правецот на тангентата на кривата $y = 5x^2 - 2x$ во точката:

   а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = -2$; г) $x = \frac{1}{5}$.

2. Одреди го коефициентот на правецот на тангентата на кривата $y = \cos x$ во точката:

   а) $x = 0$; б) $x = \frac{\pi}{4}$; в) $x = \frac{2\pi}{3}$.

3. Одреди го коефициентот на правецот на тангентата на кривата $y = tg\, x$ во точката:

   а) $x = \frac{\pi}{4}$; б) $x = -\frac{3\pi}{4}$; в) $x = \frac{2\pi}{3}$.

4. Во кои точки коефициентот на правецот на тангентата на кривата $y = x^3$ е еднаков на 3?

5. Во кои точки на кривата $y = -3 + x - x^2$ тангентата е:

   а) паралелна со x – оската; б) паралелна со симетралата на првиот квадрант?

6. Во кои точки тангентата на кривата: а) $y = x^2 - 3x + 2$; б) $y = (3x-2)(2x-1)$ со x – оската образува агол $\alpha = \frac{\pi}{4}$?

7. Во кои точки тангентата на кривата $y = \ln x$ е паралелна со правата:

   а) $y = x - 1$; б) $y = 2x - 3$?

8. Одреди ги точките во кои тангентите на кривите $y = x^3 - x - 1$ и $y = 3x^2 - 4x + 1$ се паралелни.

9. Во кои точки тангентата на кривата $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$ е нормална на правата $x + 3y - 4 = 0$?

10. Под кој агол се сечат кривите: а) $y = x^2$ и $y^2 = x$; б) $y = \sin x$ и $y = \cos x$?

(Притоа, под агол меѓу две криви L_1 и L_2 што се сечат во точката M_0 го подразбираме аголот меѓу нивните тангенти во точката M_0.)

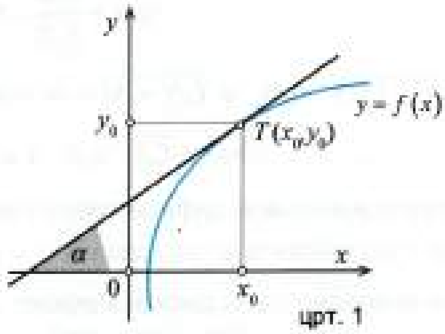
8 РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И РАВЕНКА НА НОРМАЛА

A Од порано знаеме дека равенка на права низ дадена точка $T\left(x_0, y_0\right)$ и даден коефициент на правец k е $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$.

Бидејќи коефициентот на правецот k на тангентата во точката x_0 на кривата на диференцијабилната функција $y=f\left(x\right)$ е $f'\left(x_0\right)$, т.е. $k=f'\left(x_0\right)$, равенката на тангентата е

$$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),$$

каде што $y_0=f\left(x_0\right)$.



црт. 1

Запомни!

Равенката на тангентата на графикот на функцијата $y=f\left(x\right)$ која е диференцијабилна во точката x_0 е

$$y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),\ y_0=f\left(x_0\right).$$

1 Одреди ја равенката на тангентата на параболата $y=4x^2+4x-$ [illegible] точката $T\left(-1,y\right)$.

Решение:

- За $x=-1$, $y=4\cdot\left(-1\right)^2+4\cdot\left(-1\right)-3=-3$, т.е. $T\left(-1,-3\right)$.
- $y'=8x+4$, $k=f'\left(-1\right)=8\cdot\left(-1\right)+4=-4$, па равенката на тангентата е $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$, т.е. $y+3=-4\left(x+1\right)$, па $t: 4x+y+7=0$.

2 Напиши ја равенката на тангентата на елипсата $3x^2+4y^2=48$ во точката $T\left(2,y>0\right)$.

Согледај го решението:

- Од равенката $3x^2+4y^2=48$ следува $y^2=\dfrac{48-3x^2}{4}$. Бидејќи $y>0$, значи $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{48-3x^2}$, па

$$y'=\frac{-3x}{2\sqrt{48-3x^2}}.$$

За $x_0=2$, $y_0=3$, а $k=y'\left(2\right)=-\dfrac{1}{2}$, па равенката на тангентата во точката $A\left(2,3\right)$ е $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$, т.е. $y-3=-\dfrac{1}{2}\left(x-2\right)$ или $x+2y-8=0$.

3 Одреди ја равенката на тангентата на кружницата $x^2+y^2+8x-9=0$ во точката $T\left(0,-3\right)$.

(Внимавај, се бара тангента во точката чија ордината е $y<0$).

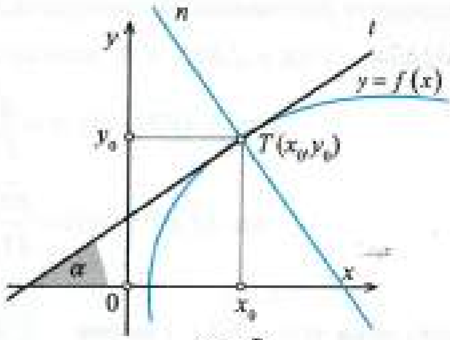
Б **4** Одреди ја равенката на нормалата на кривата $y=f(x)$ во точката $T(x_0, f(x_0))$.

Нека функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0, црт. 2.

Нормала на кривата $y=f(x)$ е правата n што е нормална на тангентата t на кривата во допирната точка.

- Бидејќи $k_t=f'(x_0)$, од условот за нормалност на две прави следува $k_n=-\frac{1}{f'(x_0)}$, $f'(x_0)\neq 0$, па равенката на нормалата е

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\ \ f'(x_0)\neq 0.$$



црт. 2

5 Напиши равенка на тангента и равенка на нормала на кривата $f(x)=x^3-2x$ во точката $A(-1, y_0)$.

Разгледај го решението:

- Првиот извод на функцијата е $y'=3x^2-2$. За $x=-1$ следува $y=(-1)^3-2\cdot(-1)=1$, $A(-1,1)$, а $f'(-1)=3\cdot(-1)^2-2=1$, па

- Равенката на тангентата е:

$t:\ y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$,

$y-1=1\cdot(x+1)$, т.е.

$x-y+2=0$.

- Равенката на нормалата е:

$n:\ y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$,

$y-1=-\frac{1}{1}\cdot(x+1)$, т.е.

$x+y=0$.

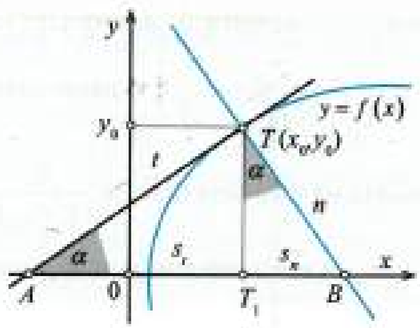
6 Одреди равенка на тангента и равенка на нормала на кривата $x^2-y^2=3$ во точката $A(2,y)$.

В На црт. 3 се претставени тангентата t и нормалата n на кривата $y=f(x)$ во точката

$T(x_0, y_0)$, $y_0=f(x_0)$.

- Должината на отсечката од тангентата меѓу допирната точка и пресечната точка на тангентата со x – оската се вика ***должина на тангента***. Тоа е должината на отсечката AT, црт. 3.

- Должината на ортогоналната проекција на отсечката AT врз x – оската се вика ***субтангента***, а се означува со s_t, т.е. $s_t=\overline{AT_1}$.



црт. 3

Должината на отсечката од нормалата меѓу допирната точка и пресечната точка со $x-$ оската се вика ***должина на нормала***. На цртежот 3, тоа е должината на отсечката BT, а должината на отсечката BT_1 се вика ***субнормала*** и се означува со s_n, т.е. $s_n = \overline{BT_1}$.

8 Одреди ги должините на тангентата и нормалата на кривата на црт. 3.

Бидејќи $\measuredangle TAB = \measuredangle BTT_1 = \alpha$ (агли со заемно нормални краци) имаме:

$$\text{од } \Delta AT_1T: \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\overline{AT_1}}{\overline{TT_1}}, \text{ т.е. } s_t = \overline{AT_1} = \overline{TT_1}\cdot\operatorname{ctg}\alpha = y_0\cdot\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\text{од } \Delta T_1BT: \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BT_1}}{\overline{TT_1}}, \text{ т.е. } s_n = \overline{BT_1} = \overline{TT_1}\cdot\operatorname{tg}\alpha = y_0\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Знаејќи дека $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ имаме $s_t = \left|\frac{y_0}{\operatorname{tg}\alpha}\right| = \left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|$ и $s_n = \left|y_0\cdot f'(x_0)\right|$.

Од ΔAT_1T: $t = \overline{AT} = \sqrt{s_t^{\,2} + \overline{T_1T}^{\,2}} = \sqrt{\left(\frac{y_0}{f'(x_0)}\right)^2 + (y_0)^2}$, т.е. $t = \left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}$.

Од ΔT_1BT: $n = \overline{BT} = \sqrt{s_n^{\,2} + \overline{T_1T}^{\,2}} = \sqrt{\left(y_0 f'(x_0)\right)^2 + (y_0)^2}$, т.е. $n = |y_0|\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}$.

8 Одреди ги должините t и n на тангентата и нормалата на кривата $y = \frac{2}{1+x^2}$, во точката $T(1,1)$.

Проследи го решението:

Првиот извод е $y' = -\frac{2\cdot\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = -\frac{2\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = -\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$. За $x_0 = 1$, $f'(x_0) = -\frac{4\cdot 1}{\left(1+1^2\right)^2} = -1$, па

$$t = \left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2} = \left|\frac{1}{-1}\right|\sqrt{1+(-1)^2} = \sqrt{2}, \text{ а } \quad n = |y_0|\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2} = 1\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Запомни!

Равенката на тангентата на графикот на функцијата $y = f(x)$ која е диференцијабилна во точката x_0 е $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, а равенката на нормалата е $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Должината на тангентата е $t = \left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}$, а на нормалата е $n = |y_0|\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}$,

каде што $f'(x_0)$ е прв извод на функцијата $y = f(x)$, а $y_0 = f(x_0)$.

Должината на субтангентата е $s_t = \left|\frac{y_0}{f'(x_0)}\right|$, а на субнормалата е $s_n = \left|y_0\cdot f'(x_0)\right|$.

Задачи:

1. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на кривата $y = x^4 - x^2 + 3$ во точката $M\,(1, y)$.

2. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на кривата $y = (x+1)\sqrt{3-x}$ во точката:
б) $A(-1,0)$; в) $B(2,3)$. Одреди ја должината на тангентата и нормалата на кривата.

3. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на параболата $y = 4 - x^2$ во нејзините пресечни точки со $x-$оската.

4. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на кружницата $x^2 + y^2 + 4x - 9 = 0$ во пресечната точка со позитивниот дел на $y-$оската.

5. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на кривата $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ во нејзините пресечни точки со хиперболата $y = \dfrac{1}{1+x}$.

6. Напиши ја равенката на тангентата на кривата $y = x^3 - 2x^2$, чиј коефициент на правец е 4.

7. Напиши ја равенката на тангентата на параболата $y = x^2 + 4x + 3$ која е паралелна со симетралата на вториот квадрант. Одреди ја должината на тангентата.

8. Напиши ја равенката на тангентата на кривата $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{14x^2 - 28}$ која е нормална на правата $2x + 4y - 3 = 0$. Одреди ја должината на нормалата.

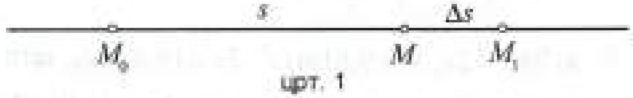
9. Дадени се функциите $y = x^3 - 2x^2$ и $y = 2x^2 + 3x - 2$. Одреди ги точките во кои тангентите на нивните графици се паралелни и напиши ги равенките на тие тангенти.

10. Дадена е кружницата $x^2 + y^2 = r^2$. Докажи дека равенката на тангентата на кружницата во точката $T\,(x_0, y_0)$ е $x x_0 + y y_0 = r^2$.

9 ФИЗИЧКО ТОЛКУВАЊЕ НА ИЗВОД НА ФУНКЦИЈА

A Кога велиме дека растојанието од местото A до местото B, возот го поминал со брзина од $75\,\text{km}$ на час, мислиме на средната брзина со која се движи возот, иако во текот на движењето тој ја менува брзината.

Ако со s го означиме изминатиот пат на материјалната точка M по правата p (црт. 1), тогаш положбата на точката M во секој момент од времето t е определена со функцијата $s = f\,(t)$, која во физиката е позната како ***закон за движење на телата***.



црт. 1

Значи, во моментот t точката се наоѓа во положба M, а изминатиот пат е $s = f\,(t)$. Во моментот $t + \Delta t$, точката M_0 ќе се најде во положбата M_1, па изминатиот пат е $s_1 = f\,(t + \Delta t)$, т.е. во временскиот интервал од t до $t + \Delta t$ точката M го поминала патот $\Delta s = s_1 - s$ или

$$\Delta s = f\,(t + \Delta t) - f\,(t).$$

Значи, изминатиот пат е нараснувањето на функцијата $f(t)$ што одговара на нараснувањето Δt на времето. Брзината на точката (телото) е определена со формулата

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t},\ \text{т.е.}\ V_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

позната како ***средна брзина*** на подвижната точка или тело. При рамномерното движење количникот $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, т.е. средната брзина на телото е постојана величина. Кога движењето на телото не е рамномерно, тогаш брзината се менува во секој момент. Ако нараснувањето Δt на времето е доволно мало, тогаш во моментот t соодветната средна брзина $V_{\text{ср}}$ ќе биде доволно блиску до вистинската брзина V на телото, која се вика ***моментна брзина***. Според ова и законот на движењето $s=f(t)$, моментната брзина V во моментот t е гранична вредност на средната брзина $V_{\text{ср}}$, ако постои, кога $\Delta t\to 0$, т.е.

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}V_{\text{ср}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t).$$

Запомни!

Моментната брзина на телото што се движи по законот $s=f(t)$ е еднаква на вредноста на изводот на функцијата $f(t)$ по променливата t во моментот t_0, т.е.

$$V=f'(t_0).$$

Ако границата $\lim\limits_{\Delta t\to 0}V_{\text{ср}}=f'(t)$ во определен момент t не постои за дадениот закон за движење $f(t)$, значи не постои брзина во моментот t. Таквите појави се случуваат при удирањето на телата во некоја пречка или при нивните меѓусебни судрувања, кога брзината нагло се менува.

1 Одреди ја брзината на телото при слободно паѓање во времето:

а) $t=2\text{s}$; б) $t=4{,}5\text{s}$; г) $t=10\text{s}$.

Разгледај го решението:

- Познато е дека патот при слободното паѓање се пресметува со формулата $s=\frac{1}{2}gt^2\ (g=9{,}81m/s^2)$, па $V=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=\frac{1}{2}g\cdot 2t=g\cdot t$.
- а) За $t=2\text{s}$, $V=9{,}81\text{m/s}^2\cdot 2\text{s}=19{,}62\text{m/s}$, што значи дека на крајот на втората секунда по започнатото паѓање телото има брзина $19{,}62\text{m/s}$;
- б) За $t=4{,}5\text{s}$, $V=44{,}145\text{m/s}$.

2 Одреди ја брзината на телото што се движи според законот $s=5t^2$ во моментот кога:

а) $t=3\text{s}$; б) $t=10\text{s}$.

Б Нека t_1 е времето во кое е определена моментната брзина $V = f'(t_1)$. Да ги разгледаме функцијата на брзината $V = f'(t_1)$ и количникот $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ во околината на t_1, т.е. $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{f'(t+\Delta t)-f'(t)}{\Delta t}$.

- Од физиката земаме дека количникот $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ го дава средното забрзување на телото во интервалот $[t_0, t_0+\Delta t]$, а $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}$ е моментното забрзување a во моментот t_0, т.е.

$$a = V' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f'(t_0+\Delta t)-f'(t_0)}{\Delta t} = f''(t_0).$$

*Буквата **a** е почетната буква на латинскиот збор **acceleratio** (забрзување).*

3 Одреди го забрзувањето на точката во моментот $t_0 = 8s$ на праволиниското движење дадено со законот $s = t^3 - 5$.

Одговор:

- $a(t) = \left((t^3-5)'\right)' = (3t^2)' = 6t;\ a(8) = 6\cdot 8 = 48\,\mathrm{m/s^2}.$

4 Одреди ги брзината и забрзувањето на точката на крајот од петтата секунда во праволиниското движење определено со законот: а) $s = 2-3t+t^2$; б) $s = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{10}t + 20$; в) $s = \frac{1}{8}t^3 + t$.

- Нека $Q = f(t)$ е некоја величина која се менува во текот на времето t, според законот f. Средната брзина на промената на величината Q во интервалот $[t, t+\Delta t]$ е $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$, а брзината на промената на величината Q во моментот t е $Q = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = f'(t)$.

5 Температурата T на едно тело се менува во зависност од времето t според законот $T = 1{,}5t^2$. Одреди ја брзината на затоплувањето на телото на крајот од втората секунда.

Спореди го твоето решение со даденово:

Според претходното имаме:

- $T(2) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1{,}5(t+\Delta t)^2 - 1{,}5t^2}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1{,}5(2+\Delta t)^2 - 1{,}5\cdot 2^2}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}1{,}5(4+\Delta t) = 6$, или

$T = f'(2) = (1{,}5\cdot t^2)' = 3\cdot t = 3\cdot 2 = 6$. Значи, на крајот на втората секунда телото се затоплува со брзина од 3 степени во секунда.

6 Колкава е кинетичката енергија $E = \frac{1}{2}mV^2$ на телото со маса 100 грама на крајот на петтата секунда при движењето на телото определено со законот $s = t^2 - 3t + 2$?

Задачи:

(1) Материјална точка изведува праволиниско движење според законот $s = 2t^2 - 3t + 4$, при што времето е мерено во секунди, а патот во метри.

а) Одреди ја средната брзина на движењето во временскиот интервал од $t = 5$ до $t = 5 + \Delta t$, ако $\Delta t \in \{1;\ 0,5;\ 0,1;\ 0,01\}$.

б) Одреди ја брзината на крајот на петтата секунда.

в) Изведи ја формулата за одредување на брзината во кој било момент од времето.

(2) Едно тело се движи според законот $s = t^3 - 2t^2 + 3t + 1$. Одреди ги положбата, брзината и забрзувањето на телото:

а) во почетниот момент $t = 0$;

б) во моментот $t = 2s$ од почетокот на движењето.

(3) Една точка се движи праволиниски и за t секунди изминува пат од s метри. Одреди ги брзината и забрзувањето на точката на крајот на $t-$ тата секунда, ако таа се движи според законот:

а) $s = 3t^3 - 4t^2 + t - 5,\ t = 3;$ б) $s = 3t^3 - \dfrac{2}{t},\ t = 2;$ в) $s = 3\sin 2t,\ t = \dfrac{\pi}{6} = 0{,}523.$

(4) Телото се движи праволиниски по законот $s = \dfrac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$. Одреди ги брзината и забрзувањето на телото. Во кој момент телото ја менува насоката на движењето?

(5) Законот за патот при движењето на едно тело е $s = \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + t$. Во кој момент брзината на телото е $V = 5$?

(6) Точката се движи праволиниски по законот $s = \sqrt{t}$. Покажи дека забрзувањето на точката е пропорционално со кубот на брзината.

(7) Истекувањето на количеството Q на течноста низ отворот на еден сад е определено со законот $Q = 120t + t^2 - \dfrac{1}{3}t^3$.

а) Одреди ја брзината на истекувањето на крајот на десеттата секунда.

б) По колку секунди истекувањето ќе престане и колку течност за тоа време истекла од садот?

(8) Температурата T на телото се менува по законот $T = 0{,}5t^2 - 2t$. Одреди ја брзината на загревањето (ладењето) на телото на крајот на петтата секунда.

(9) Тело со маса $10\ \mathrm{kg}$ се движи праволиниски според законот $s = 3t^2 + t + 4$. Одреди ја кинетичката енергија што ја има телото на крајот на четвртата секунда.

(10) Едно тело се движи според законот $s = ae^t + be^{-t}$. Покажи дека неговото забрзување е бројно еднакво со изминатиот пат.

10 ИСПИТУВАЊЕ НА МОНОТОНОСТ НА ФУНКЦИЈА СО ПОМОШ НА ИЗВОД

Потсети се!

- За една функција $f(x)$, $x \in D_f$ велиме дека:

а) расте, ако: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; б) опаѓа, ако: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

- Нека е дадена функцијата $f(x) = 2x - 1$, $D_f = \mathbb{R}$ и нека $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ и $x_1 < x_2$. Тогаш имаме:

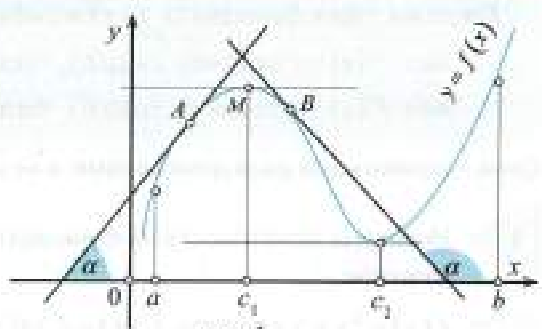
$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 - 1) - (2x - 1) = 2(x_1 - x_2)$. Од $x_1 < x_2$ следува $x_1 - x_2 < 0$, па

$f(x_1) - f(x_2) = 2(x_1 - x_2) < 0$, т.е. $f(x_1) < f(x_2)$. Значи, функцијата расте во интервалот $(-\infty, \infty)$.

Нека функцијата $y = f(x)$, чиј график е преставен на црт. 1 е диференцијабилна во интервалот (a,b) и нека $x_0 \in (a,b)$.

Функцијата $f(x)$ расте во интервалот (a, c_1), а тангентата на кривата во секоја точка x од интервалот (a, c_1) со позитивната насока на $x-$ оската зафаќа остар агол α, па $\operatorname{tg}\alpha > 0$, т.е. $f'(x) \geq 0$.

Функцијата $f(x)$ опаѓа во интервалот (c_1, c_2), а тангентата на кривата во секоја точка x од интервалот (c_1, c_2), со позитивната насока на $x-$ оската зафаќа тап агол α, па $\operatorname{tg}\alpha < 0$, т.е. $f'(x) \leq 0$.



црт. 1

- Уште во кој интервал расте функцијата чиј график е на црт. 1? Одреди го знакот на изводот на $f(x)$.

Испитувањето на монотоноста на функцијата со примена на дефиницијата за монотоност не е секогаш едноставно и лесно. Со примена на изводот на функцијата испитувањето на монотоноста се олеснува. Тоа ни го овозможува следнава

Теорема. Ако функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во интервалот (a,b), тогаш:

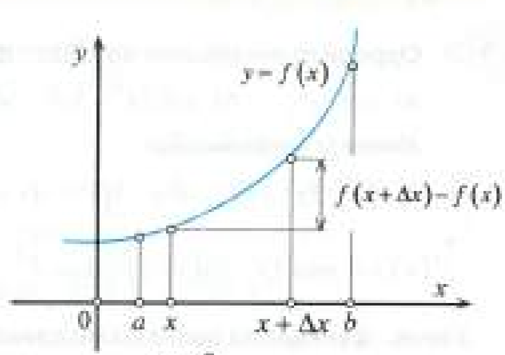
1. Ако функцијата монотоно расте во (a,b), тогаш $f'(x) \geq 0$, за секој $x \in (a,b)$.
2. Ако функцијата монотоно опаѓа во (a,b), тогаш $f'(x) \leq 0$, за секој $x \in (a,b)$.

Доказ. Нека функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна и монотоно расте во интервалот (a,b), црт. 2 и нека $x, x + \Delta x \in (a,b)$. Кога аргументот x расте во интервалот (a,b), тогаш $\Delta x > 0$, и соодветното нараснување на функцијата е

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) > 0$, па $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$.

Според тоа, првиот извод не може да биде негативен, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0.$$



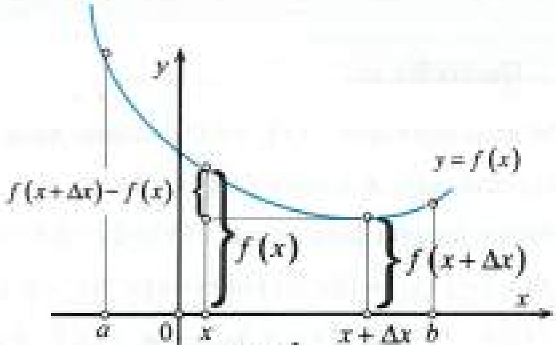
црт. 2

Нека функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во интервалот (a,b) и нека монотоно опаѓа, црт. 3.

Кога x расте во интервалот (a,b), тогаш $\Delta x>0$, а $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)<0$, па количникот

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<0$, т.е. првиот извод не може да биде позитивен, значи

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)\le 0.$$



црт. 3

За монотоност на функцијата важи и следната

> ***Теорема.*** Нека функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во интервалот (a,b).
>
> Ако $f'(x)>0$ за секое $x\in(a,b)$, тогаш функцијата расте во интервалот (a,b).
>
> Ако $f'(x)<0$ за секое $x\in(a,b)$, тогаш функцијата опаѓа во интервалот (a,b).

Оваа теорема нема да ја докажуваме, а ќе ја применуваме во решавањето на задачите.

1 Испитај ја монотоноста на функцијата $f(x)=2x+3$.

Решение:

Од $f(x)=2x+3$ следува $f'(x)=2>0$ за секое $x\in\mathbb{R}$, па функцијата монотоно расте.

2 Дадена е функцијата $f(x)=2x^2-4x+3$. Одреди го интервалот во којшто функцијата:

а) монотоно расте; б) монотоно опаѓа.

Разгледај го решението:

$f'(x)=4x-4$.

а) Од $f'(x)>0$ следува: $4x-4>0$ или $x>1$, значи во интервалот $(1,+\infty)$ функцијата расте;

б) $f'(x)<0$ за $4x-4x<0$ или $x<1$, т.е. во интервалот $(-\infty,1)$ функцијата опаѓа.

Ако $x=1$, тогаш $f'(x)=0$.

Точка x_0 за којашто $f'(x)=0$ се вика ***стационарна точка***. Според тоа, $x=1$ е стационарна точка за функцијата $f(x)=2x^2-4x+3$.

3 Одреди го интервалот во којшто функцијата расте, односно опаѓа:

а) $y=-x^2$; б) $y=2x^3-3x^2-36x+2$; в) $f(x)=-x^3+6x^2-9x+4$.

Воочи ја постапката:

в) $f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x^2-4x+3)=-3(x-3)(x-1)$;

$f'(x)>0$ ако $(x-3)(x-1)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-3<0\\ x-1>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x-3>0\\ x-1<0\end{cases}$. Следува $x\in(1,3)$.

Значи, функцијата расте во интервалот $(1,3)$.

$f'(x)<0$ ако $(x-3)(x-1)>0$, т.е. за $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$, функцијата опаѓа во $(-\infty,1)$ и $(3,+\infty)$.

4 Одреди ги интервалите во коишто функцијата расте, односно опаѓа:

а) $f(x)=\frac{x^2}{x-1},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; б) $f(x)=x^2\cdot e^x$.

Согледај го решението:

а) $f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Внимавај, $(x-1)^2>0$ за секое $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$f'(x)>0$ ако $x(x-2)>0$, за $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$, функцијата расте во интервалите $(-\infty,0)$ и $(2,+\infty)$.

$f'(x)<0$ ако $x(x-2)<0$, за $x\in(0,2)$ функцијата опаѓа во интервалот $(0,2)$.

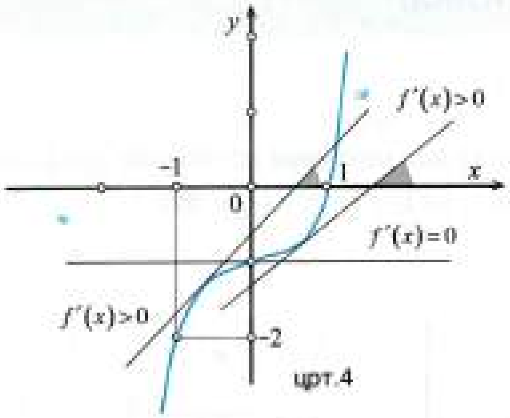
5 Докажи дека функцијата постојано расте:

а) $f(x)=x^3-1$; б) $g(x)=\sqrt[3]{x}$; в) $f(x)=\operatorname{tg}x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

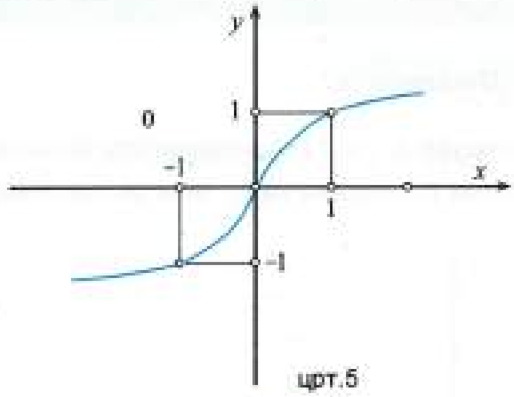
Согледај го решението:

а) Изводот е $f'(x)=3x^2$ за $x\neq 0$ постои и е позитивен. Меѓутоа, $f'(0)=0$, а сепак функцијата расте во интервалот $(-\infty,\infty)$, црт. 4.

б) Изводот е $g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ за $x\neq 0$ постои и е позитивен. Меѓутоа, $g'(0)$ не постои,а сепак функцијата расте во интервалот $(-\infty,\infty)$, црт. 5.



црт.4



црт.5

Значи, неравенството $f'(x)>0$ е доволен, но не и потребен услов за растење на функцијата $f(x)$.

Воочи!

Испитувањето на монотоноста на функцијата $y=f(x),\ x\in D_f$ се сведува на решавањето на неравенката $f'(x)>0$ или $f'(x)<0$.

Задачи:

Одреди ги интервалите на монотоност на функцијата $(1-6)$.

1 а) $y=-\frac{1}{2}x+2$; б) $y=3x-2$; в) $y=x^2$; г) $y=-x^3$.

2 а) $y=2+x-x^2$; б) $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2$; в) $y=x^3-3x-5$.

(3) а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; б) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$.

(4) а) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.

(5) а) $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$; б) $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$.

(6) а) $f(x)=\sin x$; б) $f(x)=\cos^2 x$.

(7) Докажи дека постојано опаѓаат функциите:

а) $y=\operatorname{ctg} x,\ \ x\in(0,\pi)$; б) $y=-2x-\cos x$; в) $y=4-x^5$.

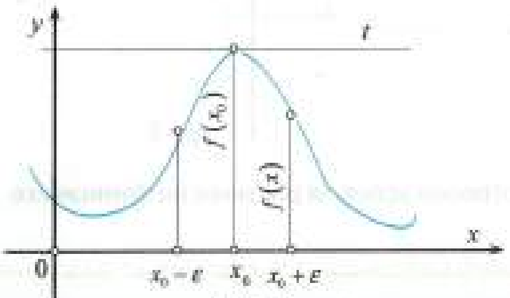
(8) Испитај ја монотоноста на функцијата во дадениот интервал:

а) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3},\ x\in[-2,1]$; б) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2},\ x\in(-\infty,3]$.

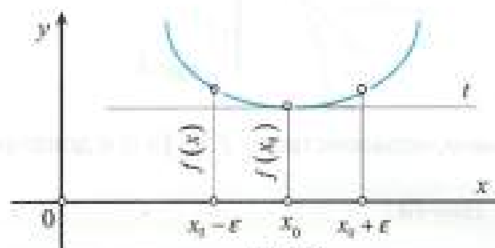
11 ОДРЕДУВАЊЕ НА ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИЈА СО ПОМОШ НА ИЗВОД

Потсети се!

- Функцијата $y=f(x)$ непрекината во интервалот (a,b) има максимум во точката $x_0\in(a,b)$, ако постои $\varepsilon-$ околина на x_0, така што за секој $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, $f(x)<f(x_0)$, црт. 1.



црт. 1



црт. 2

- Функцијата $y=f(x)$ непрекината во интервалот (a,b) има минимум во точката $x_0\in(a,b)$, ако постои $\varepsilon-$ околина на x_0, така што за секој $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, $f(x)>f(x_0)$, црт. 2.

- Зборовите минимум, односно максимум што се употребени во претходното објаснување не значат и најмала, односно најголема вредност на функцијата во целата нејзина дефинициона област. Тие означуваат само најмала, односно најголема вредност на функцијата во околината на соодветната точка. Од тие причини, често се викаат локален минимум, односно локален максимум.

- Максимумот и минимумот на една функција се викаат ***екстремни вредности*** на функцијата.

Точката x_0 во којашто функцијата $f(x)$ има екстремна вредност, ги разделува интервалите на растење и опаѓање, т.е. ако за $\varepsilon > 0$ во интервалот $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ функцијата расте (опаѓа), тогаш во интервалот $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ опаѓа (расте).

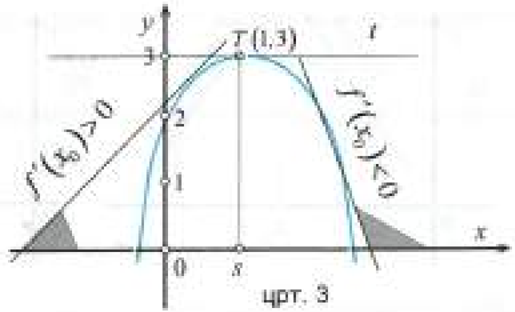
A **1** Одреди ги екстремните вредности на функцијата $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

Согледај го решението:

Ќе ги одредиме интервалите на монотоноста на функцијата.

$f'(x) = -2x + 2$; $f'(x) > 0$ ако $-2x + 2 > 0$, т.е. за $x \in (-\infty, 1)$ функцијата расте, а $f'(x) < 0$ ако $-2x + 2 < 0$, т.е. за $x \in (1, \infty)$ функцијата монотоно опаѓа (црт. 3). Значи, кога аргументот x преминува преку точката $x = 1$, првиот извод го менува знакот од позитивен во негативен, па функцијата има максимум

$$y_{max} = f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 2 = 3.$$



црт. 3

Воочи!

Тангентата на кривата во точката $T(1,3)$ (точка на максимумот) со x – оската зафаќа агол $\alpha = 0^0$.

Општо, важи:

Теорема. Ако функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во интервалот (a,b) и ако за некоја точка $x_0 \in (a,b)$ функцијата има екстремна вредност, тогаш $f'(x_0) = 0$.

Обратното тврдење не важи, т.е. изводот на некоја функција во некоја точка $x_0 \in D_f$ може да е еднаков на нула, а сепак во x_0 функцијата да нема екстремна вредност. На пример, за функцијата $f(x) = x^3$ имаме: $f'(x) = 3x^2$, за $x_0 = 0$, $f'(0) = 0$. Меѓутоа, за $x_0 = 0$ функцијата нема екстремна вредност, таа монотоно расте во интервалот $x_0 \in (-\infty, \infty)$, види црт. 4 од претходната лекција.

Оттука следува дека $f'(x_0) = 0$ претставува потребен, но не и доволен услов за постоење на екстремна вредност на функцијата $f(x)$ во точката x_0.

Доволен услов за екстремна вредност.

Ако функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во интервалот (a,b) и ако за некоја точка $x_0 \in (a,b)$ се исполнети следниве два услови:

а) $f'(x_0) = 0$ и

б) $f'(x)$ го менува знакот во околината на x_0,

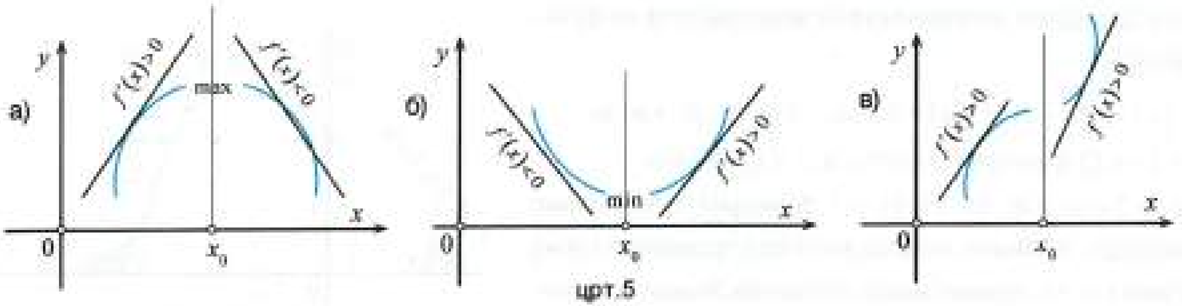
тогаш $f(x_0)$ е екстремна вредност на функцијата $f(x)$.

Ако при преминот на аргументот x низ точката x_0, црт. 5 а), б), в):

$f'(x)$ го менува знакот од позитивен во негативен, тогаш функцијата има максимум, $y_{max} = f(x_0)$.

$f'(x)$ го менува знакот од негативен во позитивен, тогаш функцијата има минимум, $y_{min} = f(x_0)$.

$f'(x)$ не го менува знакот, тогаш функцијата нема екстремна вредност.



црт.5

2 Одреди ги екстремните вредности на функцијата $f(x)=2x^2-3x+4$.

Согледај ја постапката:

- $f'(x)=4x-3$; $f'(x)=0$ ако $4x-3=0$, т.е. $x=\frac{3}{4}$.
- $f'(x)>0$ ако $4x-3>0$, т.е. за $x>\frac{3}{4}$ функцијата расте.
- $f'(x)<0$ ако $4x-3<0$, т.е. за $x<\frac{3}{4}$ функцијата опаѓа.

Значи, за $x<\frac{3}{4}$, $f'(x)<0$, а за $x>\frac{3}{4}$, $f'(x)>0$, па во околината на точката $x=\frac{3}{4}$ изводот го менува знакот од негативен во позитивен, т.е. функцијата има минимум

$$y_{min}=f\left(\frac{3}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\cdot\frac{3}{4}+4=\frac{28}{3}.$$

3 Одреди ги екстремните вредности на функцијата $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

Согледај го решението:

- Првиот извод на функцијата е $f'(x)=x^2-2x-3$.
  Од $f'(x)=0$ следува $x^2-2x-3=0$, т.е. $x=3$ и $x=-1$ се стационирани точки, па во нив функцијата може да има екстремни вредности, но не мора. За таа цел го испитуваме знакот на првиот извод во околината на точките $x=-1$ и $x=3$.

- $f'(x)>0$, ако $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)>0$, т.е. $x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$.
- $f'(x)<0$, ако $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)<0$, т.е. $x\in(-1,3)$.

■ За $x\in(-\infty,-1)$ функцијата расте, $f'(x)>0$, а за $x\in(-1,3)$ функцијата опаѓа, $f'(x)<0$, па во околината на точката $x=-1$ првиот извод го менува знакот од позитивен во негативен, т.е. за $x=-1$ функцијата има максимум

$$y_{\max}=f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3\cdot(-1)=\frac{5}{3}.$$

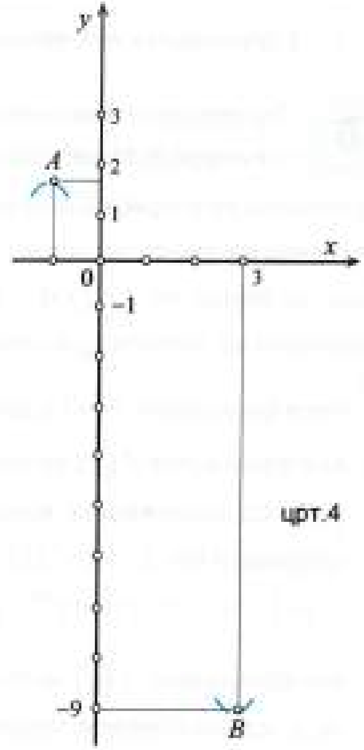
■ Точката $A\left(-1,\frac{5}{3}\right)$ е точка на максимумот на функцијата, па во таа точка графикот го има следниот облик „ ⌒ ", црт. 4.

■ За $x\in(-1,3)$ функцијата опаѓа, $f'(x)<0$, а за $x\in(3,\infty)$ функцијата расте, $f'(x)>0$. Значи, во околината на точката $x=3$ првиот извод го менува знакот од негативен во позитивен, т.е. за $x=3$ функцијата има минимум

$$y_{\min}=f(3)=\frac{1}{3}\cdot3^3-3^2-3\cdot3=-9.$$

■ Точката $B(3,-9)$ е точка на минимумот на функцијата, па во таа точка графикот го има следниот облик „ ◡ ", црт. 4.

■ Ако една функција $f(x)$ е диференцијабилна во ε – околина на точката x_0, освен во самата точка x_0, тогаш функцијата може да има екстремна вредност во x_0, иако во таа точка нема извод, т.е. $f'(x_0)$ не постои. На пример,



црт.4

Функцијата $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geq0\\ -x, & x<0\end{cases}$ има извод $f'(x)=\begin{cases}1, & x\geq0\\ -1, & x<0\end{cases}$, а нема извод во точката $x=0$.

Воочи, првиот извод го менува знакот во околината на точката $x_0=0$ од негативен во позитивен, па според тоа, за $x=0$ функцијата има минимум $y_{\min}=f(0)=0$, иако $f'(0)$ не постои.

4 Одреди ги екстремните вредности на функцијата: а) $y=-3x^2-6x+7$; б) $y=x^3+12x-6$.

5 Одреди ги екстремните вредности на функцијата $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Воочи ја постапката:

■ $y'=\dfrac{2x(x-2)-x^2(x-2)'}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$. $y'=0$ за $x^2-4x=0$, т.е. $x=0$; $x=4$.

Бидејќи $(x-2)^2>0$ за секое $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, знакот на изводот зависи од знакот на броителот.

$y'(x)>0$ ако $x^2-4x=x(x-4)>0$, т.е. $x\in(-\infty,0)\cup(4,\infty)$.

$y'(x)<0$ ако $x^2-4x<0$, т.е. $x\in(0,4)$.

- Во околината на точката $x=0$ првиот извод го менува знакот од позитивен во негативен. Значи, за $x=0$ функцијата има максимум $y_{max}=f(0)=\dfrac{0^2}{0-2}=0$.
- Во околината на точката $x=4$ првиот извод го менува знакот од негативен во позитивен. Значи, за $x=4$ функцијата има минимум $y_{min}=f(4)=\dfrac{4^2}{4-2}=8$.

Б Одредувањето на знакот на првиот извод на функцијата не е секогаш лесно и едноставно, а со тоа и одредувањето на екстремните вредности на функцијата не е едноставна задача.

Со примена на вториот извод на функцијата, решавањето на задачите од тој вид е многу поедноставно. Со помош на знакот на првиот извод $f'(x)$ утврдуваме дали функцијата $f(x)$ расте или опаѓа. Исто така, со знакот на $(f'(x))'=f''(x)$ може да се утврди дали функцијата $f'(x)$ расте или опаѓа во околината на точката x_0, во која $f'(x_0)=0$.

Нека функцијата $f(x)$ е двапати диференцијабилна во околината на точката $x_0\in D_f$.

- Ако функцијата $f(x)$ во точката x_0 има ***максимум***, тогаш нејзиниот прв извод $f'(x)$ во околината на x_0 од позитивните вредности $(x<x_0, f'(x)>0)$ преку нулата $f'(x_0)=0$, добива негативни вредности (за $x_0<x, f'(x)<0$), значи функцијата $f'(x)$ опаѓа. Според тоа, изводот на функцијата $f'(x)$, т.е. $(f'(x))'=f''(x)$ во околината на точката x_0 е негативен, значи, $f''(x_0)<0$.
- Ако функцијата $f(x)$ во точката x_0 има ***минимум***, тогаш нејзиниот прв извод $f'(x)$ во околината на x_0 од негативните вредности (за $x<x_0, f'(x)<0$) преку нулата $f'(x_0)=0$ добива позитивни вредности (за $x_0<x, f'(x)>0$), значи функцијата $f'(x)$ расте. Според тоа, изводот на функцијата $f'(x)$, т.е. $(f'(x))'=f''(x)$ во околината на точката x_0 е позитивен, значи, $f''(x_0)>0$.

Така доаѓаме до следново правило.

Нека функцијата $f(x)$ има прв и втор непрекинат извод во околината на точката x_0 и нека $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)\neq 0$. Функцијата $f(x)$ има екстремна вредност во точката x_0, при што:

1. Ако $f''(x_0)<0$, функцијата има максимум, $y_{max}=f(x_0)$.

2. Ако $f''(x)>0$, функцијата има минимум, $y_{min}=f(x_0)$.

Ако за $x=x_0$, $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)=0$, тогаш вториот извод не можеме да го искористиме за одредување на екстремни вредности на функцијата. Во тој случај ќе го испитаме знакот на првиот извод на функцијата во околината на точката x_0.

Постои друг начин како се врши одредување на екстремни вредности на функција во случајот кога $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)=0$, меѓутоа сега за тоа нема да зборуваме.

6 Одреди ги екстремните вредности на функцијата:

а) $y=2x^2-3x+1$; б) $y=3x^2-2x^3$; в) $y=x^4+2x^2+3$.

Решение:

- б) $y'=6x-6x^2$. Од $y'=0$ следува $6x-6x^2=0$, т.е. $x=0$ и $x=1$.
- $y''=6-12x$. За $x=0$ имаме $y''(0)=6>0$, значи за $x=0$ функцијата има минимум

$$y_{\min}=f(0)=3\cdot 0^2-2\cdot 0^3=0.$$

За $x=1$ имаме $y''(1)=6-12\cdot 1=-6<0$, значи за $x=1$ функцијата има максимум

$$y_{\max}=f(1)=3\cdot 1^2-2\cdot 1^3=1.$$

Запомни!

Одредувањето на екстремните вредности на двапати диференцијабилната функција $f(x)$ се сведува на следните правила:

1. Се одредува првиот извод $f'(x)$ на функцијата.

2. Се решава равенката $f'(x)=0$, т.е. се определуваат стационарните точки.

3. Се одредува вториот извод $f''(x)$ и се испитува неговиот знак одделно за секоја стационарна точка.

6 Одреди ги екстремните вредности на функцијата $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Проследи го решението:

1. Првиот извод е $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$.
2. $f'(x)=0$; $1-\frac{1}{x^2}=0$; $x=1$ и $x=-1$.
3. $f''(x)=0+\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$.

За $x=1$, $f''(1)=\frac{2}{1^3}=2>0$, функцијата има минимум $y_{\min}=f(1)=1+\frac{1}{1}=2$.

За $x=-1$, $f''(-1)=\frac{2}{(-1)^3}=-2<0$, функцијата има максимум $y_{\max}=f(-1)=-1+\frac{1}{-1}=-2$.

Задачи:

Одреди ги екстремните вредности на функциите $(1-7)$:

1 а) $f(x)=-\frac{1}{3}x+2$; б) $f(x)=x^2-5x+1$; в) $f(x)=-x^4+2x^2-3$.

2 а) $f(x)=2x^3-9x^2+12x$; б) $f(x)=x^3-6x^2+12x-5$.

3 а) $y=x^2(x-2)^2$; б) $y=x^3(x-1)$.

4 а) $y=x^2\cdot e^{-x}$; б) $y=e^x+e^{-x}$.

5 а) $y=x\cdot\ln x,\ x>0$; б) $y=\frac{\ln x}{x},\ x>0$.

6 а) $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$; б) $f(x)=x-\sqrt{x},\ x\geq 0$.

7 а) $f(x)=\sin x+\cos x,\ x\in[0,2\pi]$; б) $f(x)=\sin 2x-x,\ x\in[0,2\pi]$.

8 Даден е триномот ax^2+bx+c. Одреди ги a, b и c, ако за $x=2$ триномот има минимум еднаков на -1, а за $x=1$ вредноста на триномот е еднаква на нула.

9 Одреди ги a и b така што функцијата $f(x)=ax^3+bx^2-36x-1$ да има минимум за $x=3$, а максимум за $x=-2$.

11 Одреди ги најголемата и најмалата вредност на функцијата во дадениот интервал:

а) $f(x)=x^4-8x^2+3,\ x\in[-2,2]$; б) $f(x)=\sqrt{4-x^2},\ x\in[-2,2]$.

12 НЕКОИ ПРАКТИЧНИ ПРИМЕНИ НА МАКСИМУМОТ И МИНИМУМОТ

Со примена на правилата за одредување на екстремните вредности на дадена функција може да се решаваат разни задачи од областа на природните науки и техниката. При нивното решавање треба да се воочи зависноста помеѓу величините кои се менуваат и да се состави функцијата.

1 Бројот 9 подели го на два дела така што збирот на нивните кубови да е најмал.

Согледај го решението:

- Ако едниот дел го означиме со x, другиот е $9-x$. Од условот на задачата следува функцијата $y=x^3+(9-x)^3$, а оттука $y'=3x^2+3(9-x)^2\cdot(9-x)'=54x-243$.
- $y'=0$ ако $54x=243$, т.е. $x=4,5$.
- $y''=54>0$, значи за $x=4,5$ функцијата има најмала вредност, па бараните делови се 4,5 и 4,5.

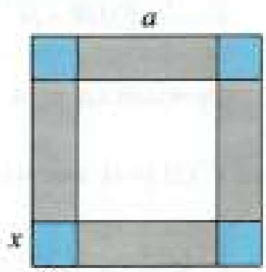
2 Од сите правоаголници со периметар 22cm одреди го оној што има најголема плоштина.

Согледај го решението:

- Периметарот на правоаголникот е $L=2(a+b)$ или $22=2(a+b)$, $a+b=11$, а $P=a\cdot b$. Од $a+b=11$ следува $a=11-b$, а $P=(11-b)\cdot b=11b-b^2$.
- Плоштината на правоаголникот е функција од страната b, па $P'(b)=11-2b$; $P'(b)=0$ ако $11-2b=0$, т.е. $b=5{,}5$. $P''(b)=-2<0$, функцијата има максимум ако $b=5{,}5$, а страната $a=11-5{,}5=5{,}5$. Значи, од сите правоаголници со периметар 22cm, најголема плоштина има квадратот со страна $5{,}5\text{cm}$.

3 Од картон што е во форма на квадрат со страна a направи кутија со најголем волумен.

Спореди го твоето решение со даденово:



црт. 1

За да направиме кутија, треба во секое теме на квадратот да отсечеме по еден квадрат со страна x. Останатиот дел од картонот се превиткува во кутија со висина x и основа квадрат со страна $a-2x$, црт. 1.

- Добиената кутија има форма на правилна четириаголна призма, па за нејзиниот волумен имаме:

$V=B\cdot H=(a-2x)^2\cdot x=a^2x-4ax^2+4x^3$; $V'(x)=a^2-8ax+12x^2$.

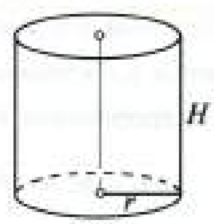
$V'(x)=0$, ако $a^2-8ax+12x^2=0$, т.е. ако $x=\frac{a}{2}$ и $x=\frac{a}{6}$. Ова се вредностите на x за кои функцијата $V(x)$ може да има максимум, но и не мора. Очигледно, ако $x=\frac{a}{2}$ не може да се направи кутија.

Според тоа, можно решение е $x=\frac{a}{6}$. $V''(x)=-8a+24x$, па $V''\left(\frac{a}{6}\right)=-8a+24\cdot\frac{a}{6}=-4a<0$ (внимавај, $a>0$), значи функцијата V има максимум за $x=\frac{a}{6}$, т.е. $V_{max}=\left(a-2\cdot\frac{a}{6}\right)^2\cdot\frac{a}{6}=\frac{2a^3}{27}$.

4 Треба да се направи отворен лонец во форма на прав цилиндар со даден волумен V. Одреди ги радиусот и висината на лонецот, така што неговата изработка да биде најевтина.

Воочи ја постапката:

- Изработката на лонецот ќе биде најевтина ако неговата плоштина е најмала, црт. 2.



црт. 2

$V=r^2\pi H$, а $P=r^2\pi+2r\pi H$. Од $V=r^2\pi H$ следува $H=\frac{V}{r^2\pi}$, а

$P=r^2\pi+2r\pi\cdot\frac{V}{r^2\pi}=r^2\pi+\frac{2V}{r}$, т.е. плоштината на лонецот е функција од r.

$P'(r)=2r\pi-\frac{2V}{r^2}$, π и V се константи. $P'(r)=0$ ако $2r\pi-\frac{2V}{r^2}=0$, т.е. $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

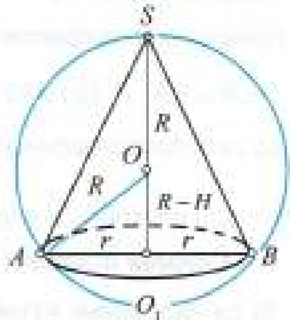
$P''(r)=2\pi+\frac{4V}{r^3}$, па $P''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)=2\pi+\frac{4V}{\frac{V}{\pi}},=6\pi>0$.

- За $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, плоштината има најмала вредност, а димензиите на лонецот се $H=r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

5 Во топка со даден радиус R е впишан прав конус со максимален волумен. Одреди ги радиусот и висината на конусот.

Спореди го твоето решение со даденово:

Нека r е радиус, а H висина на конусот (црт.3). Треба волуменот на конусот да го изразиме како функција од r и H, а една од тие величини да ја изразиме со помош на радиусот R на топката.



црт. 3

- Волуменот на конусот е $V=\frac{1}{3}\pi r^2 H$, $H=\overline{O_1S}$. Од ΔAO_1O имаме $R^2=r^2+(R-H)^2$, т.е. $r^2=2HR-H^2$, па за волуменот добиваме $V=\frac{1}{3}\pi\left(2HR-H^2\right)H=\frac{1}{3}\pi\left(2H^2R-H^3\right)$. Волуменот на конусот е функција од H, а π и R се константи. $V'(H)=\frac{1}{3}\pi\left(4HR-3H^2\right)$.
- $V'(H)=0$, ако $4HR-3H^2=0$, $H=0$ и $H=\frac{4}{3}R$. За $H=0$ задачата нема решение.

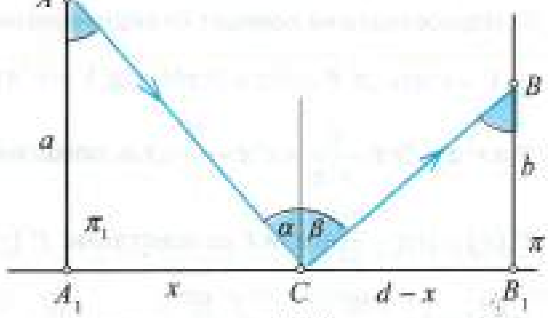
  $V''(H)=\frac{1}{3}\pi(4R-6H)$, а за $H=\frac{4}{3}R$ имаме $V''\left(\frac{4}{3}R\right)=\frac{1}{3}\pi\left(4R-6\cdot\frac{4}{3}R\right)=-\frac{4\pi R}{3}<0.$
- Значи, за $H=\frac{4}{3}R$ конусот има максимален волумен. Според тоа, $r^2=2\cdot\frac{4}{3}R\cdot R-\left(\frac{4}{3}R\right)^2=\frac{8R^2}{9}$,

  т.е. $r=\frac{2R\sqrt{2}}{3}$, а $V_{max}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{8R^2}{9}\cdot\frac{4}{3}R=\frac{32R^3\pi}{81}$.

6 Од изворот A потекнува светлосен зрак, кон рамнината π, од која се одбива, а по одбивањето треба да помине низ точката B. На рамнината π одреди ја положбата на точката C од која се одбива светлосниот зрак, ако се знае дека зракот го поминува патот ACB за најкратко време, т.е. патот ACB е најмал.

Воочи ја постапката:

Точките A, C и B, т.е. споменатиот пат на светлосниот зрак се наоѓа во рамнината π_1 која е нормална на рамнината π, црт. 4.



црт. 4

- Нека A_1 и B_1 се ортогонални проекции на точките A и B врз рамнината π и нека $\overline{AA_1}=a$, $\overline{BB_1}=b$, $\overline{A_1B_1}=d$. Должините a, b, d и брзината V на светлосниот зрак се константи, а t е променлива. Нека $\overline{A_1C}=x$. За патот ACB имаме:

  $\overline{ACB}=\overline{AC}+\overline{CB}=V\cdot t=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}$, т.е.
- функцијата е $t(x)=\frac{1}{V}\left(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}\right)$, па

$t'(x)=\frac{1}{V}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}\right)$ $t'(x)=0$ ако $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$, т.е.

$\frac{x^2}{a^2+x^2}=\frac{(d-x)^2}{b^2+(d-x)^2}$ или $\frac{a^2+x^2}{x^2}=\frac{b^2+(d-x)^2}{(d-x)^2}$. Оттука следува:

- $\frac{a^2}{x^2}=\frac{b^2}{(d-x)^2}$; $\frac{a}{x}=\frac{b}{d-x}$, па $x_1=\frac{ad}{a+b}$ или $\frac{a}{x}=-\frac{b}{d-x}$, па $x_2=\frac{ad}{a-b}$. На дадената задача, при

услов $a>b$, решението е $x_1=\frac{ad}{a+b}$, бидејќи $x_2=\frac{d}{1-\frac{b}{a}}>1$.

- Функцијата $t'(x)$ е непрекината, па во точката A_1 за $x=0$, $t'(0)=-\frac{d}{V\cdot\sqrt{b^2+d^2}}<0$, а во точката B_1

за $x=d$, $t'(d)=-\frac{d}{V\cdot\sqrt{a^2+d^2}}>0$. Значи, изводот го менува знакот од негативен во позитивен во

околината на точката C, т.е. функцијата има минимум во точката C, која е на растојание $x=\frac{ad}{a+b}$

од точката A_1.

- Ако α е упаден агол, а β е агол на одбивањето на светлосниот зрак, тогаш $\measuredangle A_1AC=\alpha$ и $\measuredangle B_1BC=\beta$.

Од ΔA_1AC, $\sin\alpha=\frac{\overline{A_1C}}{\overline{AC}}$; Од ΔB_1BC, $\sin\beta=\frac{\overline{CB_1}}{\overline{BC}}$; $\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\sin\beta=\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$, па

равенката $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ за којашто $f'(x)=0$ е од видот $\sin\alpha=\sin\beta$, т.е. $\alpha=\beta$, а

ова е познатиот закон за одбивање на светлината.

7 Над центарот на една кружна тераса со радиус r на висина H треба да се постави светлосен извор, така што терасата да биде максимално осветлена. На која висина треба да се постави светлосниот извор, ако јачината T на осветлувањето е дадена со формулата $T(H)=\frac{k\cdot\sin\alpha}{r^2+H^2}$, k е константа чија големина е определена со јачината на светлосниот извор, α е агол што правата SA го образува со рамнината на терасата, S е светлосниот извор, а A е која било точка од работ на терасата.

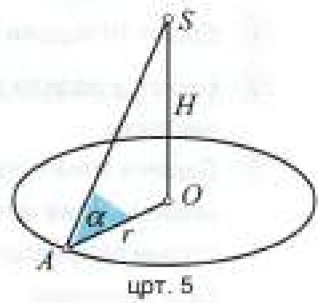
Воочи ја постапката:

- Нека $\overline{SO}=H$ и $\measuredangle SAO=\alpha$, црт. 5. Од ΔAOS имаме $\operatorname{tg}\alpha=\frac{H}{r}$, т.е. $H=r\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

- Функцијата $T(H)=\frac{k\cdot\sin\alpha}{r^2+H^2}$ можеме да ја разгледуваме и како функција

од аргументот α, т.е. $T(\alpha)=\frac{k\cdot\sin\alpha}{r^2+r^2\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{k\cdot\sin\alpha}{r^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}=$

$=\frac{k}{r^2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, k и r се константи.



црт. 5

Нека $\sin\alpha = x$, $\cos^2\alpha = 1-x^2$, па функцијата $T(\alpha)$ е $T(x)=\frac{k}{r^2}\cdot x\cdot(1-x^2)$. $T'(x)=\frac{k}{r^2}\cdot(1-3x^2)$.

$T'(x)=0$ ако $1-3x^2=0$, т.е. ако $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Вредноста $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ не е можна, затоа што од $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ следува $\alpha>180^0$. Решение на задачата е $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. $T''(x)=\frac{k}{r^2}\cdot(-6x)<0$ за $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

■ Значи, функцијата $T(x)$ има максимум за $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Од $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, па

$tg\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. бараната висина е $H=\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

8 Компонентите F_1 и F_2 на силата F меѓу себе зафаќаат агол α. За која големина на аголот α силата $F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2\cdot F_1\cdot F_2\cdot\cos\alpha}$ има максимална вредност?

Согледај го одговорот:

■ Силата F е функција од аголот α, па $F'(\alpha)=\frac{-F_1\cdot F_2\cdot\sin\alpha}{\sqrt{F_1^2+F_2^2+2\cdot F_1\cdot F_2\cdot\cos\alpha}}$, $F'(\alpha)=0$ ако $\sin\alpha=0$,

т.е. $\alpha=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

■ За $\alpha=2k\pi$ силата F е максимална, $F=F_1+F_2$, бидејќи F_1 и F_2 се истонасочени. За $\alpha=(2k+1)\pi$ силата F е минимална, $F=|F_1-F_2|$, бидејќи F_1 и F_2 се спротивнонасочени.

9 Познато е дека јачината i на електричната струја што протекува низ проводник е периодична функција од времето t, искажана со формулата $i=c\cdot\sin\frac{2\pi t}{T}$, каде c е максимална јачина на струјата, а T е времетраењето на една периода. За која вредност на t јачината на струјата е максимална?

Согледај го одговорот:

■ Од $i(t)=c\cdot\sin\frac{2\pi t}{T}$ имаме $i'(t)=c\cdot\cos\frac{2\pi t}{T}\cdot\frac{2\pi}{T}=\frac{2c\pi}{T}\cdot\cos\frac{2\pi t}{T}$.

$i'(t)=0$ ако $\cos\frac{2\pi t}{T}=0$, т.е. $\frac{2\pi t}{T}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. $t=\frac{T}{4}+kT,\ k\in\{0,1,2,3,\dots\}$. k не може да биде негативен број, бидејќи времето за протекување на струјата низ проводникот не може да е негативно.

Задачи:

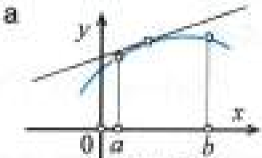
1. Бројот 30 подели го на два собироци, такви што нивниот производ да биде најголем.
2. Бројот a подели го на два собироци, така што збирот од нивните квадратни корени да биде најголем.
3. Даден е триаголник со страна 10 cm и соодветна висина 4 cm. Во триаголникот е впишан правоаголник, така што две негови темиња лежат на дадената страна, а другите две на останатите страни од триаголникот. Одреди ги страните на правоаголникот така што неговата плоштина да биде најголема.

4. Од картон што има форма на правоаголник со димензии 32 cm и 20 cm направи отворена кутија со најголем волумен.
5. Дадено е множество на рамнокраки триаголници чиј периметар е a. Одреди ги димензиите на триаголникот што има најголема плоштина.
6. Во полукружница со радиус r да се впише рамнокрак трапез со најголема плоштина ако поголемата основа е дијаметар на кружницата. Одреди ги висината и помалата основа на трапезот.
7. Одреди ги страните на рамнокракиот триаголник што има најголема плоштина, а е впишан во елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.
8. Кој прав конус со плоштина $72\pi\,\mathrm{cm}^2$ има најголем волумен? Одреди го волуменот.
9. Од сите прави конуси чии изводници се 12 cm, одреди ги димензиите на конусот чиј волумен е најголем.
10. Одреди ги димензиите на прав кружен цилиндар со максимален волумен кој може да се впише во прав конус со радиус на основата R и висина H.
11. На едно тело што се наоѓа на рамнина наведната под агол φ во однос на хоризонталната рамнина дејствува сила $F=\dfrac{k\cdot G}{\cos\varphi+k\cdot\sin\varphi}$, k е коефициент на триење, а G е тежина на телото. За кој агол φ силата F има најголема вредност?

13 КОНВЕКСНОСТ. КОНКАВНОСТ. ПРЕВОЈНИ ТОЧКИ

А На црт. 1 е прикажан график на конвексна крива, а на црт. 2 график на конкавна крива.

Конкавен, латински збор што значи длабнат.



црт. 1

црт. 2

Воочи!

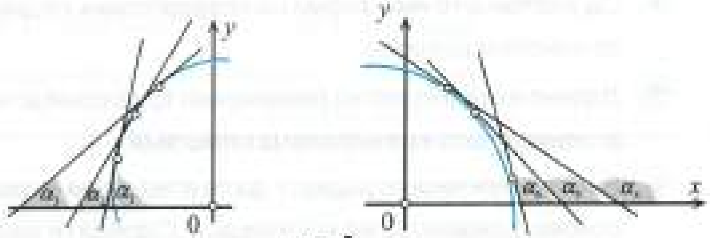
Графикот на диференцијабилната функција $f(x)$ во интервалот (a,b) е конвексен (конкавен), ако тој е под (над) тангентата на кривата повлечена во произволна точка од интервалот (a,b).

Во една од претходните лекции испитувавме монотоност на функцијата $f(x)$ во интервалот со помош на изводот $f'(x)$.

Ако $f'(x)>0$, функцијата расте, а ако $f'(x)<0$, функцијата опаѓа. На сличен начин расудуваме и кога го одредуваме знакот на вториот извод $f''(x)$ со растење и опаѓање на функцијата $f'(x)$ со следнава

Теорема. Нека функцијата $f(x)$ има втор извод во секоја точка од интервалот (a,b).
Ако $f''(x)<0$ за секој $x\in(a,b)$, тогаш графикот на функцијата е конвексен во тој интервал.
Ако $f''(x)>0$ за секој $x\in(a,b)$, тогаш графикот на функцијата е конкавен во тој интервал.

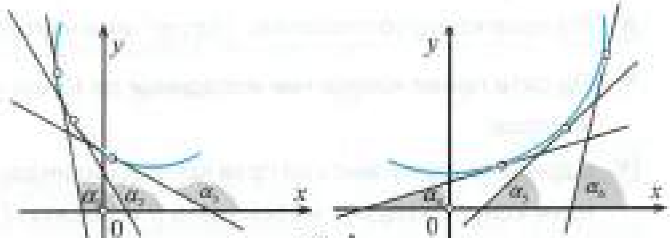
Теоремата нема да ја докажуваме, а таа ни овозможува да ја испитаме природата на закривеност на графикот на функцијата $f(x)$. Нека функцијата $f(x)$ има втор извод во интервалот (a,b).



црт. 3

- Ако во тој интервал $f''(x)<0$, тогаш функцијата $f'(x)$ опаѓа.

  Тоа значи, при движењето по графикот на функцијата $f(x)$ од лево на десно, аголот на тангентата (т.е. коефициентот на правецот) опаѓа, црт. 3. Тангентата се врти во насока во која се движат и стрелките на часовникот и притоа, графикот на функцијата лежи под тангентите, т.е. кривата е конвексна.



црт. 4

- Ако во тој интервал $f''(x)>0$, тогаш функцијата $f'(x)$ расте.

  Тоа значи, при движењето по графикот на функцијата $f(x)$ од лево на десно, аголот на тангентата (т.е. коефициентот на правецот) расте, црт. 4. Тангентата се врти во насока спротивна од вртењето на стрелките на часовникот и притоа графикот на функцијата лежи над тангентите, т.е. кривата е конкавна.

1 Одреди ги интервалите на конкавност и конвексност на кривите:

а) $y=x^3$;   б) $f(x)=x^3-5x^2+3x-5$;   в) $y=e^{-x^2}$.

Разгледај го решението:

- б) $f'(x)=3x^2-10x+3$; $f''(x)=6x-10$. $f''(x)>0$ ако $6x-10>0$, т.е. ако $x>\dfrac{5}{3}$. Кривата е конкавна, т.е. за $x\in\left(\dfrac{5}{3},\infty\right)$ нејзиниот график го има следниов облик „$\smile$“.

  $f''(x)<0$ ако $6x-10<0$, т.е. $x<\dfrac{5}{3}$, кривата е конвексна, па нејзиниот график во тој интервал е од обликот „$\frown$.“

2 Во кој интервал кривата е конвексна, а во кој конкавна, ако:

а) $f(x)=2x^2+\ln x,\ x>0$;   б) $y=\sin x,\ x\in[0,2\pi]$.

Решение:

- а) $f'(x)=4x+\dfrac{1}{x}$; $f''(x)=4-\dfrac{1}{x^2}$. $f''(x)>0$ за $4-\dfrac{1}{x^2}>0$, $4x^2-1>0$,

  за $x\in(-\infty,-0{,}5)\cup(0{,}5;\infty)$, кривата е конкавна во интервалите $(-\infty;0{,}5)$. и $(0{,}5;+\infty)$.

  $f''(x)<0$ ако $4-\dfrac{1}{x^2}<0$, $4x^2-1<0$, $x\in(-0{,}5;0{,}5)$, кривата е конвексна во интервалот $(-0{,}5;0{,}5)$.

Воочи!

Одредувањето на интервалите на конвексност и конкавност на кривата $y=f(x)$ кога $f(x)$ е двапати диференцијабилна, се сведува на решавањето на неравенката $f''(x)>0$ или $f''(x)<0$.

Б Дадена е функцијата $f(x)$ што е два пати диференцијабилна во точката x_0. Ако за $x<x_0$ функцијата е конвексна, а за $x>x_0$ е конкавна или обратно, т.е. во точката x_0 ја менува конвексноста, тогаш точката $(x_0, f(x_0))$ се вика ***превојна*** точка. Значи, кога x расте и кога преминува преку точката x_0 во која вториот извод $f''(x)$ го менува знакот, тогаш во превојната точка тој е еднаков на нула, т.е.

$$f''(x)=0.$$

Запомни!

Потребен услов за кривата $y=f(x)$ да има превојна точка во x_0 е $f''(x)=0$, а доволен услов е $f''(x)$ да го менува знакот во околината на точката x_0.

3 Одреди ги превојните точки на функцијата: а) $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$; б) $y=x^4-6x^2$.

Воочи ја постапката:

б) $y'=4x^3-12x$, $y''=12x^2-12$.

$y''=0$, ако $12x^2-12=0$, т.е. ако $x=\pm1$.

$y''>0$, ако $x^2-1>0$, $x^2>1$ или $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

$y''<0$, ако $x^2-1<0$, $x^2<1$ или $x\in(-1,1)$.

Во околините на точките $x=-1$ и $x=1$, вториот извод го менува знакот.

За $x=-1$, $y=(-1)^4-6\cdot(-1)^2=-5$, а за $x=1$, $y=-5$, па точките $P_1(-1,-5)$ и $P_2(1,-5)$ се бараните превојни точки.

Воочи!

Одредувањето на превојните точки на кривата $y=f(x)$ кога $f(x)$ има втор извод се состои во следното:

1. Се одредува $f''(x)$.
2. Се решава равенката $f''(x)=0$.
3. Се испитува знакот на $f''(x)$ во околината на точките што се решенија на равенката $f''(x)=0$.

4 Определи ги интервалите на конвексност и конкавност и одреди ги превојните точки на кривата:

а) $y=x^3-2x^2-x+2$; б) $y=x^2(3-x)$.

Решение:

а) $y'=3x^2-4x-1$; $y''=6x-4$. $y''=0$ ако $6x-4=0$, т.е. $x=\frac{2}{3}$.

$y''>0$ ако $6x-4>0$, т.е. $x>\frac{2}{3}$. Значи, за $x\in\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ кривата е конкавна, а

$y''<0$ за $x\in\left(-\frac{2}{3},\infty\right)$ кривата е конвексна.

За $x=\frac{2}{3}$, $y=\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{27}$, па превојната точка е $P\left(\frac{2}{3},\frac{20}{27}\right)$.

Задачи:

1. Во кој интервал се конвексни, а во кој се конкавни кривите:

а) $y=3x^2-10x^3$; б) $y=4x-4x^3$?

2. Одреди го интервалот на конвексност и интервалот на конкавност на кривата:

а) $f(x)=x-\frac{1}{x}$, $x\neq 0$; б) $f(x)=6x^2-4x$.

3. Одреди ги превојните точки на кривата: а) $f(x)=\frac{x}{1-x}$, $x\neq 1$; б) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

Одреди го интервалот во којшто кривата е конвексна, односно конкавна и одреди ги нивните превојни точки $(4-7)$:

4. а) $f(x)=\frac{x}{2-x}$, $x\neq 2$; б) $f(x)=\frac{2}{x^2+2}$.

5. а) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $x\in(0,2\pi)$; б) $f(x)=\cos 2x$, $x\in(0,2\pi)$.

6. а) $f(x)=2x+e^{x^2}$; б) $f(x)=x\cdot e^{-x}$.

7. а) $f(x)=x\cdot\ln^2 x$, $x>0$; б) $f(x)=x\cdot\ln x$, $x>0$.

14 ИСПИТУВАЊЕ СВОЈСТВА НА НЕКОИ ФУНКЦИИ И ЦРТАЊЕ НА НИВНИТЕ ГРАФИЦИ

Досега видовме како со помош на првиот и вториот извод на дадена функција точно се испитуваат некои нејзини својства, како на пример: монотоност, екстремни вредности, закривеност (конвексност, конкавност), превојни точки. Со испитување и на другите својства: парност, непарност, периодичност, точки на прекин, одредување на асимптоти, се добиваат доволни точни податоци за текот на функцијата па нејзиниот график можеме да го нацртаме. Од графикот на функцијата можеме да согледаме многу својства на функцијата.

За да го нацртаме графикот на функцијата $y = f(x)$ ги испитуваме следните својства:

1. Дефинициона област на функцијата.
2. Симетрични својства на функцијата (парност, непарност, периодичност).
3. Пресечни точки на графикот на функцијата со координатните оски (нули и пресек со $y-$ оската).
4. Асимптоти на функцијата.
5. Екстремни вредности, нивната природа и интервали на монотоност.
6. Превојни точки, конвексност и конкавност.

Врз основа на добиените податоци кои може да се претстават во табела (но и не мора) се црта графикот на функцијата. Меѓутоа, цртањето на графикот најчесто се прави паралелно со аналитичкото испитување на својствата на функцијата. Наведената шема не мора буквално да се следи, т.е. редоследот на испитувањата на својствата не е битен. Ако функцијата е парна, доволно е да се испита за $x > 0$, па да се користи симетричност. Ако при одредувањето на екстремните вредности, одредувањето на вториот извод е сложено, тогаш испитај ја промената на знакот на првиот извод во околината на точката во која првиот извод е еднаков на нула итн.

Испитувањето на текот на функцијата и конструкцијата на нејзиниот график ќе го разгледаме на неколку задачи.

1 Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y = -x^2 + 2x + 3$.

Воочи ја постапката:

1. Функцијата е дефинирана за секое $x \in \mathbb{R}$, т.е. $D_f = \mathbb{R}$.
2. $f(-x) = -(-x)^2 + 2(-x) + 3 = -x^2 - 2x + 3 \neq f(x)$,
   - Функцијата не е парна.

   $f(-x) = -x^2 - 2x + 3 = -(x^2 + 2x - 3) \neq -f(x)$,
   - Функцијата не е непарна, значи функцијата не е ниту парна, ниту непарна.
   - Функцијата не е периодична. (Периодичноста е застапена најчесто кај тригонометриските функции).
3. Пресеци со координатните оски.
   - Пресек со $x-$ оската:

   $y = 0$, т.е. $-x^2 + 2x + 3 = 0$; $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Точките на пресекот се $A(-1,0)$ и $B(3,0)$.
   - Пресек со $y-$оската:

   $x = 0$, т.е. $y = -0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$, точката на пресекот е $C(0,3)$.
4. Асимптоти на функцијата.
   - Хоризонтална асимптота нема, бидејќи

   $$y = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^2 + 2x + 3) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(-1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = -\infty.$$
   - Вертикална асимптота нема, функцијата е дефинирана за секое $x \in \mathbb{R}$.

Коса асимптота $y = kx + n$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^2 + 2x + 3}{x} = -\infty,$$ нема коси асимптоти.

5. Екстремни вредности:

$y' = -2x + 2;\ y' = 0$ ако $-2x + 2 = 0$, т.е. $x = 1$.

$y'' = -2 < 0$, значи функцијата за $x = 1$ има максимум $y_{max} = y(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4$.

Точката $D(1,4)$ е точка на максимумот, па графикот во точката го има обликот $\frown$.

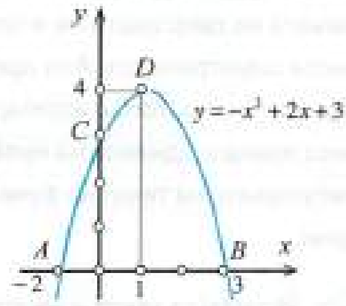
$y' > 0$ ако $-2x + 2 > 0$, $x < 1$, т.е. за $x \in (-\infty, 1)$ функцијата расте.

$y' < 0$ ако $-2x + 2 < 0$, $x > 1$, т.е. за $x \in (1, \infty)$ функцијата опаѓа.

6. $y'' = -2 \neq 0$, па за секое $x \in \mathbb{R}$ кривата нема превојни точки и на целиот интервал е конвексна, а нејзиниот график е во облик „ $\frown$ ".

Добиените податоци ги претставуваме во табелата:

x	$-\infty$		-1	0	1		3		∞
y	$-$ $-\infty$	$-$	0	$+$ 3	4	$+$	0	$-$	$-$ $-\infty$
y'	$+$	$+$ ↗		$+$ ↗	0	$-$ ↘		$-$ ↘	$-$
y''		$-$	$\frown$	$-$	$\frown$	$-$		$-$ $\frown$	



црт. 1

Графикот на функцијата е претставен на црт. 1.

2 Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

Воочи ја постапката:

1. Функцијата е дефинирана за секој реален број, т.е. $x \in (-\infty, \infty)$.

2. $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - (-x) - 1 = -x^3 + x^2 + x - 1 \neq f(x)$ и

$f(-x) = -(x^3 - x^2 - x + 1) \neq -f(x)$, значи функцијата не е ниту парна, ниту непарна.

3. Пресеци со координатните оски.

Пресек со y − оската. За $x = 0$, $f(0) = -1$, пресекот е точката $A(0,1)$.

Нули на функцијата, пресек со x − оската.

За $y = 0$, $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$;

$x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2 - 1) = (x+1)^2(x-1) = 0$, за $x = 1$ или $x = -1$, па пресечните точки се $B(-1,0)$ и $C(1,0)$.

Кај полиномните функции одредувањето на нулите често пати претставува проблем, бидејќи во тој случај имаме решавање на равенки од повисок степен, за чие решавање нема општо правило.

4. Асимптоти на функцијата.

Бидејќи $y = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = \pm\infty$, нема хоризонтална асимптота.

Функцијата нема ни вертикални ни коси асимптоти.

5. Екстремни вредности. $f'(x)=3x^2+2x-1$.

- $f'(x)=0$ ако $3x^2+2x-1=0$, т.е. $x=-1$ или $x=\dfrac{1}{3}$ се точки во кои функцијата може да има или нема екстремни вредности.

$f''(x)=6x+2$.

- За $x=-1$, $f''(-1)=-6+2=-4<0$, значи за $x=-1$ функцијата има максимум

  $y_{max}=f(-1)=(-1)^3+(-1)^2-(-1)-1=0$. $N(-1,0)$ е точка на максимумот.

- За $x=\dfrac{1}{3}$, $f''\left(\dfrac{1}{3}\right)=6\cdot\dfrac{1}{3}+2=4>0$, значи за $x=\dfrac{1}{3}$ функцијата има минимум

  $y_{min}=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{32}{27}$. $M\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{32}{27}\right)$ е точка на минимумот.

$f'(x)=3x^2+2x-1=3(x-x_1)(x-x_2)=(x+1)(3x-1)$.

- $f'(x)>0$ ако $(x+1)(3x-1)>0$. Функцијата монотоно расте во интервалите $(-\infty,-1)$ и $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

- $f'(x)<0$ ако $(x+1)(3x-1)<0$, т.е. за $x\in\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$ функцијата монотоно опаѓа.

6. Превојни точки, конвексност и конкавност. $f''(x)=6x+2$.

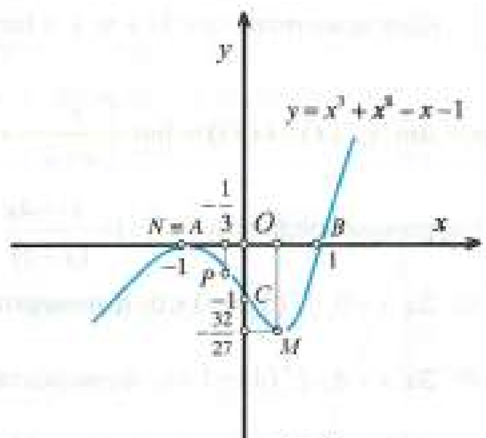
- $f''(x)=0$ за $x=-\dfrac{1}{3}$. $f''(x)>0$ ако $6x+2>0$, т.е. за $x>-\dfrac{1}{3}$ кривата е конкавна.

  $f''(x)<0$ ако $6x+2<0$, т.е. за $x<-\dfrac{1}{3}$ кривата е конвексна, а за $x=-\dfrac{1}{3}$, $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{16}{27}$,

  т.е. $P\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{16}{27}\right)$ е превојна точка.

Табела на податоците:

x	$-\infty$		-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1		∞
$f(x)$	$-$ $-\infty$	$-$	0	$-$ $-\frac{16}{27}$	$-$ -1	$-$ $-\frac{32}{27}$	0	$+$ $+$ $+$	∞
$f'(x)$	$+$	$+$ ↗	0	$-$ ↘	$-$	0	$+$	$+$ ↗	$+$
$f''(x)$	$-$ ⌢	$-$ ⌢		0	$+$ ⌣		$+$ ⌣		$+$ ⌣



црт. 2

Графикот на функцијата е на црт. 2.

3 Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Спореди го твоето решение со даденово:

1. Функцијата е дефинирана за $x-2\neq 0,\ x\neq 2$, т.е. $D_f=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

2. Парност и непарност. $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{-x-2}=\dfrac{x^2}{-x-2}\neq f(x);\ f(-x)=\dfrac{x^2}{-x-2}=-\dfrac{x^2}{-x-2}\neq -f(x)$,

функцијата не е ниту парна ниту непарна.

3. Пресек со координатните оски.

- Пресек со $y-$оската: за $x=0,\ y=0,\ A(0,0)$.
- Пресек со $x-$оската: за $y=0,\ \dfrac{x^2}{x-2}=0,\ x=0,\ A(0,0)$.

4. Асимптоти на функцијата.

- Хоризонтална: $y=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-\dfrac{2}{x}}=+\infty;$

$y=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1-\dfrac{2}{x}}=-\infty$. Функцијата нема хоризонтална асимптота.

- Вертикалната асимптота е $x-2=0,\ x=2$. Ќе го испитаме однесувањето на функцијата во околината на точката $x=2$.

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2+h}\frac{x}{x-2}=\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^2}{2+h-2}=\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^2}{h}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2-h}\frac{x}{x-2}=\lim_{h\to0}\frac{(2-h)^2}{2-h-2}=\lim_{h\to0}\frac{(2-h)^2}{-h}=-\infty.$$

- Коса асимптота. $y=kx+n;\ k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x-2}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=1.$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-k(x)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-2}=2,\ \ y=x+2$ е коса асимптота.

5. Екстремни вредности. $f'(x)=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2};\ f'(x)=0,\ x^2-4x=0,\ x=0$ или $x=4.\ \ f''(x)=\dfrac{8}{(x-2)^3}$.

- За $x=0,\ f''(0)=-1<0$, функцијата има максимум $y_{max}=f(0)=0;\ A(0,0)$.
- За $x=4,\ f''(4)=1>0$, функцијата има минимум $y_{min}=f(4)=\dfrac{4^2}{4-2}=8;\ B(4,8)$.
- $f'(x)>0$ ако $x^2-4x>0$, за $x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ функцијата расте во $(-\infty;0)$ и $(4,+\infty)$.
- $f'(x)<0$ ако $x^2-4x<0$, за секој $x\in(0,4)$ функцијата опаѓа.

6. Превојни точки. $f''(x)=0$, ако $\dfrac{8}{(x-2)^3}=0$, $f''(x)\neq 0$ за секој $x\in D_f$, па кривата нема превојни точки.

Поради $8>0$, знакот на вториот извод зависи од именителот.

$f''(x)>0$ ако $x-2>0$, т.е. за $x>2$ кривата е конкавна.

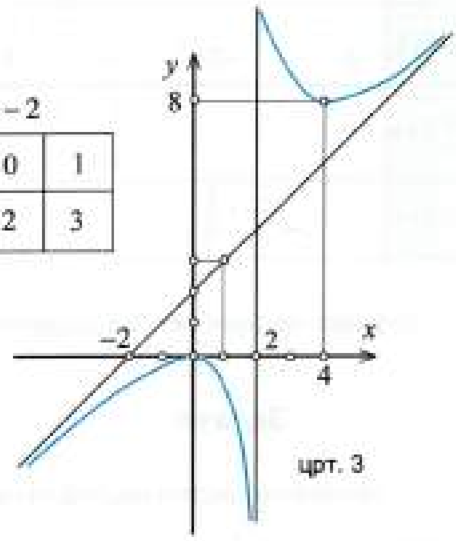
$f''(x)<0$ ако $x-2<0$, т.е. за $x<2$ кривата е конвексна.

Добиените податоци ги прикажуваме табеларно:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y	$-$ $-\infty$	$-$	0	$-$	‖	$+$	8	$+$	$+$ $+\infty$
y'	$+$	$+$ ↗	0	$-$ ↘		$-$	0	$+$	$+$ ↗
y''	$-$ ⌢		$-$ ⌢		|	$+$ ⌣		$+$ ⌣	

$y=x-2$

x	-1	0	1
y	1	2	3



црт. 3

Графикот на функцијата е на црт. 3.

4 Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=x\cdot e^x$.

Спореди го твоето решение со даденово:

1. Функцијата е дефинирана за секој реален број, т.е. $D=(-\infty,\infty)$.

2. $f(-x)=-x\cdot e^{-x}\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, функција не е ниту парна, ниту непарна.

3. За $x=0$ и $y=0$, $A(0,0)$.

4. Хоризонтална асимптота: $y=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$; $y=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$, значи x – оската е хоризонтална асимптота кога $x\to-\infty$ (кон неа се доближува оддолу), $y\to-0$.

- Вертикална и коса асимптота нема.

5. Екстремни вредности.

$f'(x)=(1+x)e^x$; $f'(x)=0$ ако $1+x=0$, т.е. $x=-1$. $\quad f''(x)=(2+x)e^x$.

- За $x=-1$, $f''(-1)=e^{-1}>0$, $y_{\min}=f(-1)=-1\cdot e^{-1}=-e^{-1}$, $B\left(-1,-e^{-1}\right)$.
- $f'(x)>0$, $(1+x)e^x>0$, $1+x>0$, $x>-1$. За $x\in(-1,\infty)$ функцијата расте.
- $f'(x)<0$, $x<-1$, $x\in(-\infty,-1)$ функцијата опаѓа.

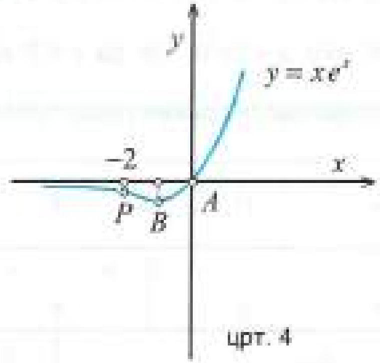
6. Превојни точки. $f''(x)=(2+x)e^x$; $f''(x)=0$ за $x=-2$, $f(-2)=-2e^{-2}$. $P\left(-2,-2e^{-2}\right)$.

$f''(x) > 0$, ако $x > -2$, т.е. за $x \in (-2, \infty)$ кривата е конкавна.

$f''(x) < 0$, ако $x < -2$, т.е. за $x \in (-\infty, -2)$ кривата е конвексна.

Податоците се дадени во табелата:

x	$-\infty$		-2	-1	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	$-$ $\;-2e^{-2}$	$-e^{-1}$ $\;-$	0 $\;+$	$+$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ $\searrow$	$-$	0	$+$	$+$ $\nearrow$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$ $\frown$	0	$+$	$\smile$ $+$		$\smile$ $+$



црт. 4

Графикот на функцијата е даден на црт. 4.

Задачи:

Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $(1-6)$:

1 а) $y = 2x^2 - 3x + 2$; б) $y = x^3 - 3x + 2$; в) $y = x^4 - 2x^2$.

2 а) $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$; б) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

3 а) $y = \dfrac{4x}{4-x^2}$; б) $y = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$.

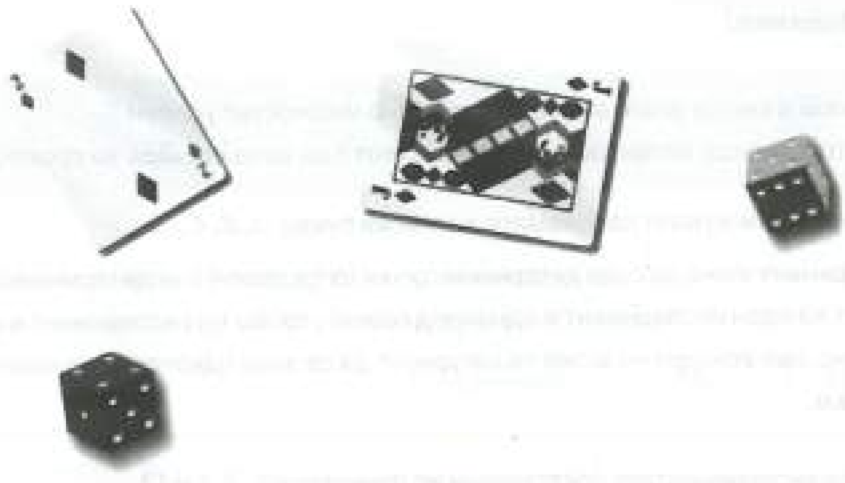
4 а) $y = x^2 \cdot e^x$; б) $y = x \cdot e^{-x^2}$.

5 а) $y = x \cdot \ln x$; б) $y = x - \ln x$.

6 а) $y = \sin x + \cos x$; б) $y = \sin^2 x - 3\sin x$.

ВЕРОЈАТНОСТ

Во оваа тема ќе учиш за:



1 СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ И ВЕРОЈАТНОСТ

Потсети се!

1. Една монета се фрла во воздух и по нејзиното паѓање на земја, на горната страна од монетата може да се појави "грб" или "глава". Со фрлањето на монетата сме извршиле еден ***експеримент*** и како резултат на тој експеримент може да се добие еден од следните ***исходи***: "на горната страна од монетата се појави грб" или "на горната страна од монетата се појави глава".

2. Ако вода се загрева на $100°C$, тогаш таа ќе почне да врие. Овде е извршен еден експеримент (загревање на вода) и како резултат на тој експеримент се јавува исходот "водата врие".

3. Ако се проверува исправноста на производите во една фабрика, тогаш се зема по еден производ, се проверува неговиот квалитет и се утврдува дали е исправен или не. Значи, експериментот е проверка на квалитетот, а можни исходи се: "производот е исправен" и "производот не е исправен".

4. Се спроведува тест за да се провери знаењето на учениците. Оценувањето на тестот се прави со поени од 0 до 100. Тогаш експериментот е оценување на еден ученик, а можни исходи се "ученикот освои i поени", каде што $i = 0,1,2,...,100$.

А ***Запомни!***

Експеримент е секоја реализација на одредено множество услови S.
Секој резултат (исход) во врска со експериментот S се вика ***настан*** во врска со експериментот S.

- Настаните се обележуваат со големите латински букви: $A, B, C, \ldots$
- Еден експеримент може да биде детерминистички (определен) и недетерминистички (неопределен). Ако исходот на еден експеримент е однапред познат, тогаш тој експеримент е ***детерминистички***, во спротивно, ако исходот не може со сигурност да се знае однапред, тој експеримент е ***недетерминистички***.

1 Какви се експериментите претставени во примерите 1, 2, 3 и 4?

Б **2** Да се вратиме повторно на експериментот фрлање монета. Нека се изведени 8 серии од по 1000 експерименти под еднакви услови.

Во секој од експериментите се набљудува настанот A: "падна грб". Со $n_i(A)$ се означува бројот на експериментите од i - тата серија во кои се појавил настанот A. Резултатите од овие осум серии се претставени во следната табела:

i	$n_i(A)$	$\frac{n_i(A)}{n}$
1	502	0,502
2	504	0,504
3	492	0,492
4	500	0,500
5	510	0,510
6	490	0,490
7	493	0,493
8	509	0,509

Во последната колона се дадени вредностите на количникот $\frac{n_i(A)}{n}$, каде што n е бројот на изведените експерименти во една серија. Во нашиот случај $n = 1000$.

Воочи дека сите вредности во оваа колона се блиску до 0,5. Притоа, ако бројот на експериментите во една серија се зголемува, тогаш тој количник се приближува сè повеќе до 0,5.

Запомни!

Бројот $\frac{n_i(A)}{n}$ се нарекува ***релативна фреквенција*** за настанот A во i - тата серија. Реалниот број околу кој се натрупуваат овие релативни фреквенции се нарекува ***статистичка*** (или ***емпириска***) ***веројатност*** на настанот A.

Колку изнесува статистичката веројатност на настанот A: падна грб, во експериментот фрлање монета?

За даден настан A во врска со експериментот S, може да се применува оваа дефиниција, наречена статистичка дефиниција на веројатност, ако:

1. експериментот S може да се повтори при исти услови колку што сакаме пати;
2. релативните фреквенции на настанот A, во секоја од повеќе изведени серии експерименти, се броеви кои се приближно еднакви.

Условот 2 обезбедува статистичка стабилност, а условот 1 обезбедува проверка на условот 2.

Ако за експериментот S се исполнети условите 1 и 2, тогаш секој настан во врска со експериментот S, се нарекува ***случаен настан***.

B **3** Да ги разгледаме следните експерименти и настаните во врска со нив.

а) Нека експериментот е фрлање коцка. Се разгледуваат настаните:

A_1: падна број од 1 до 6,
A_2: падна бројот 7.

б) Експериментот е извлекување на топче од кутија во која има 5 бели топчиња. Се разгледуваат настаните:

B_1: извлечено е бело топче,
B_2: извлечено е црно топче.

в) Експериментот е оценување на случајно избран ученик. Се разгледуваат настаните:

C_1: ученикот доби оценка од 1 до 5, C_2: ученикот доби оценка 12.

Што може да се каже за наведените настани?

Одговор:

Настаните A_1, B_1 и C_1 се јавуваат при секоја реализација на соодветниот експеримент, а настаните A_2, B_2 и C_2 не се појавуваат никогаш при реализација на експериментот.

Запомни!

Сигурен настан во врска со даден експеримент е настанот кој се појавува при секоја реализација на тој експеримент.

Невозможен настан во врска со даден експеримент е настан што не се појавува никогаш при реализација на дадениот експеримент.

Значи, A_1, B_1 и C_1 се сигурни, а A_2, B_2 и C_2 – невозможни настани за соодветните експерименти.

Задачи:

(1) Нека експериментот е фрлање коцка. Направи 4 серии од по 50 фрлања и определи ја статистичката веројатност на појавување на настаните:

A: на горната страна на коцката се појави бројот 2;

B: на горната страна на коцката се појави парен број.

(2) Експериментот е извлекување карта од шпил со 52 карти. Спроведи 5 серии од по 100 експерименти. По секое извлекување, регистрирај го бројот или знакот на картата и врати ја назад во шпилот. Определи кој е бројот околу кој се натрупуваат релативните честоти на настаните:

A: извлечена е карта со бројот 10;

B: извлечена е карта со знакот лист.

2 МНОЖЕСТВО ЕЛЕМЕНТАРНИ НАСТАНИ И ОПЕРАЦИИ СО НАСТАНИ

А Да го разгледаме експериментот фрлање коцка. Некои од можните случајни настани во врска со овој експеримент се следните:

A: падна парен број;

B: падна број делив со 3;

E_1: падна бројот 1;

E_2: падна бројот 2;

E_3: падна бројот 3;

E_4: падна бројот 4;

E_5: падна бројот 5;

E_6: падна бројот 6.

1 Воочи ја разликата помеѓу настаните A и B, од една и настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6 од друга страна.

Настанот A се појавува ако се појави еден од настаните E_2, E_4 или E_6, а настанот B се појавува ако се појави настанот E_3 или ако се појави E_6. Значи, настанот A може да се разложи на настаните E_2, E_4 и E_6, а настанот B може да се разложи на настаните E_3 и E_6.

Од друга страна, настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6 не може да се разложат на други настани. Затоа, тие настани ги нарекуваме ***елементарни настани***. Елементарните настани ќе ги означуваме со симболот E со индекс $1,2,...$

Запомни!

Елементарен настан во врска со даден експеримент е секој логички исход кој не може да се разложи на други настани. Притоа, при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден елементарен настан.
Множеството од сите вакви настани во врска со еден експеримент се вика ***множество елементарни настани*** и се означува со Ω.

2 Определи го множеството елементарни настани за експериментот фрлање коцка.

Решение:

При секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6, затоа множеството елементарни настани во врска со овој експеримент е

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}.$$

3 Определи го множеството елементарни настани за експериментот фрлање на две монети.

Согледај го решението:

При фрлање на една монета, можен исход е "падна глава" или "падна грб" (ќе пишуваме кратко "глава" или "грб"). Но, експериментот се состои од фрлање на двете монети заедно, па можните исходи ќе бидат подредени парови, каде што првиот елемент ќе го означува исходот на првата монета, а вториот елемент исходот на втората. Со други зборови, множеството елементарни настани е следното:

$$\Omega = \{(\text{глава, глава}), (\text{глава, грб}), (\text{грб, глава}), (\text{грб, грб})\}.$$

4 Нека експериментот е фрлање монета сè додека не се појави грб. Определи го множеството елементарни настани.

Решение:

Множеството елементарни настани е од облик $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots\}$, каде што $E_1 = (\text{грб})$, $E_2 = (\text{глава, грб})$, итн. Во општ случај, за фиксно $i = 2,3,\ldots$, елементарниот настан

$$E_i = (\underbrace{\text{глава,глава,..., глава}}_{i-1},\text{грб})$$

и тој се појавува ако во првите $i-1$ фрлања на монетата се појави глава, а во i – тото фрлање грб. Во овој случај, множеството елементарни настани е бесконечно пребројливо множество, бидејќи теоретски експериментот може никогаш да не заврши.

5 Определи го множеството елементарни настани за експериментот мерење висина на случајно избран човек од дадена група луѓе.

Решение:

Ако x е висината на избраното лице во сантиметри, тогаш $x \in [50,250]$, каде што 50 е минималната, а 250 максималната висина што може да ја има еден човек. Сега, множеството елементарни настани е од облик $\Omega = \{x \mid x \in [50, 250]\} = [50, 250]$. Во овој случај, Ω е интервал, т.е. е бесконечно непреброjливо множество.

Од претходните примери можеме да воочиме дека зависно од експериментот, множеството елементарни настани може да биде конечно, бесконечно пребројливо или бесконечно непребројливо множество.

Во понатамошниот дел од текстот ќе се задржиме на експерименти за кои множеството елементарни настани е конечно.

Б Во задача 1 заклучивме дека настанот A ќе се појави ако се појави еден од настаните E_2, E_4 или E_6, а настанот B ќе се појави ако се појави настанот E_3 или ако се појави E_6. Оттука, настаните A и B може да се запишат на следниот начин $A = \{E_2, E_4, E_6\}$, $B = \{E_3, E_6\}$. Да воочиме дека настаните A и B се претставени како подмножества од множеството елементарни настани Ω.

Запомни!

Случаен настан е произволно подмножество од множеството елементарни настани Ω.
Ќе велиме дека настанот A ***се појавил*** ако се појавил некој од елементарните настани кои припаѓаат на соодветното подмножество елементарни настани.

6 Ако експериментот е фрлање на две монети, опиши го настанот C: барем еднаш падна грб.

Одговор:

Настанот C ќе се појави ако на една од монетите падне грб, а на другата глава или ако на двете монети падне грб, т.е.

$$C = \{(\text{глава, грб}), (\text{грб, глава}), (\text{грб, грб})\}.$$

7 Експериментот се состои во фрлање на две коцки. Да се опише множеството елементарни настани и следните случајни настани:

A: на двете коцки падна парен број;

B: на првата коцка падна парен, а на втората непарен број.

Решение:

Множеството елементарни настани за овој експеримент ќе се состои од подредени парови (x, y), каде што x е исходот на првата коцка, а y – исходот на втората коцка, $x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Оттука,

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

За настанот A се добива следното: $A = \{(x, y) \mid x, y \in \{2,4,6\}\}$, или во развиена форма

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\},$$

а за настанот B имаме: $B = \{(x, y) \mid x \in \{2,4,6\}, y \in \{1,3,5\}\}$, или

$$B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}.$$

Сигурниот настан се појавува секогаш кога се реализира експериментот, т.е. секој елементарен настан доведува до негово појавување. Затоа тој се означува со Ω. Невозможниот настан, пак, не се појавува никогаш кога се реализира експериментот, односно ниеден елементарен настан не доведува до негово појавување. Оттука, невозможниот настан ќе го означуваме со $\varnothing$.

В

Запомни!

Производ на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават и двата настани A и B. Тој настан е определен со множество елементарни настани што е пресек од множествата елементарни настани на настанот A и настанот B. Производот на два настани A и B се означува со $A \cap B$ или AB.

8 Нека експериментот е фрлање коцка. Ги разгледуваме настаните:

A: падна број помал или еднаков на 3;

B: падна број делив со 3;

C: падна број поголем од 4.

Да се определи производот на настаните A и B и производот на настаните A и C.

Решение:

Настаните A, B и C се опишуваат на следниот начин: $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_6\}$ и $C = \{E_5, E_6\}$. Настанот $A \cap B$ означува дека се појавил број кој е помал или еднаков на 3 и делив со 3, па така $A \cap B = \{E_3\}$. Настанот $A \cap C$ означува дека се појавил број кој е помал или еднаков на 3 и поголем од 4, што е невозможно. Значи, настаните A и C не може да се појават истовремено, т.е. $A \cap C = \varnothing$.

Запомни!

Ако два настани A и B не може да се појават истовремено тогаш тие се нарекуваат ***дисјунктни настани***. Нивниот производ е невозможен настан, т.е. $A \cap B = \varnothing$.

Запомни!

Збир на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните A или B. Тој настан е определен со множество елементарни настани што е унија од множествата елементарни настани на настанот A и настанот B.
Збирот на два настани A и B, во општ случај, се означува со $A \cup B$.
Доколку настаните A и B се дисјунктни, тогаш нивниот збир ќе го означуваме со $A + B$.

Кога се вели дека се појавил барем еден од настаните A или B, тогаш се подразбира дека се појавил или само настанот A или само настанот B или и двата настани истовремено.

Ако настаните A и B се дисјунктни, тогаш истовремено појавување на двата настани е невозможно, па појавување на настанот $A \cup B$ подразбира да се појави или само настанот A, или само настанот B. Затоа, во овој случај, за збир на два настани се користи ознаката $A+B$. Значи, $A+B = A \cup B$, ако $AB = \varnothing$.

9 Определи го збирот на настаните A и B; како и на настаните A и C, ако A, B и C се настаните дефинирани во задачата 8.

Решение:

Настаните A, B и C се определени со: $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_6\}$ и $C = \{E_5, E_6\}$. Настанот $A \cup B$ означува дека ќе се појави број помал од 3 или број делив со 3, и тој може да се опише на следниот начин:

$$A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_6\}.$$

Настанот $A \cup C$ означува дека ќе се појави број кој не е поголем од 3 или број кој е поголем од 4. Исто така, во задачата 8 воочивме дека настаните A и C се дисјунктни. Оттука, за нивниот збир се добива $A + C = \{E_1, E_2, E_3, E_5, E_6\}$.

Запомни!

Спротивен настан на настанот A е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога не се појавува настанот A. Овој настан се означува со $\overline{A}$. Множеството елементарни настани на настанот $\overline{A}$ е комплемент на множеството елементарни настани соодветни на настанот A во однос на Ω. За секој настан A важи:

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = \Omega.$$

10 Определи ги спротивните настани на настаните A и B од задачата 8.

Согледај го решението:

Настанот A нема да се појави, ако се појави еден од настаните E_4, E_5 или E_6, па затоа $\overline{A} = \{E_4, E_5, E_6\}$, а соодветно $\overline{B} = \{E_1, E_2, E_4, E_5\}$.

Запомни!

Настанот A го ***повлекува*** настанот B (пишуваме $A \subseteq B$), ако секогаш кога се појавува настанот A се појавува и настанот B.

11 Да го разгледаме повторно експериментот фрлање две монети. Нека

A: падна точно една глава; B: падна барем една глава.

Може да се воочи дека секогаш кога ќе се појави настанот A се појавува и настанот B, т.е. $A \subseteq B$.

Запомни!

Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, тогаш за настаните A и B велиме дека се ***еднакви***.

12 Повторно, нека експериментот е фрлање две монети. Се разгледуваат следните настани:

A: падна барем една глава; B: падна барем еден грб.

Опиши ги настаните $A, B, A \cap B, A \cup B$.

Бидејќи случајните настани се подмножества од множеството елементарни настани во врска со еден експеримент, за операциите со настани важат истите закони како за операциите со множества. Некои од нив, кои ќе ги користиме во понатамошните излагања се следните.

Потсети се!

Дистрибутивните закони:

$$A(B \cup C) = AB \cup AC,$$

$$(A \cup B)C = AC \cup BC.$$

Де Моргановите закони:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Г Во овој дел ќе ги обопштиме дефинициите за збир и производ на повеќе од два настани.

Запомни!

Збир на настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Овој настан се означува со $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, а неговото множество елементарни настани е унија од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Запомни!

Производ на настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават истовремено сите настани $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Овој настан се означува со $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ (или $A_1 A_2 \ldots A_n$), а неговото множество елементарни настани е пресек од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

13 Во цел се стрела три пати. Се разгледуваат настаните A_1, A_2 и A_3 кои означуваат погодување на целта во првото, второто и третото стрелање, соодветно. Со помош на овие настани, да се опишат следните случајни настани:

B: постигнати се три погодоци;

C: целта е три пати промашена;

D: постигнат е барем еден погодок;

E: постигнато е барем едно промашување;

F: постигнати се не повеќе од два погодоци;

G: до третото стрелање немало погодок.

Согледај го решението:

- Настанот B ќе се појави ако се појават сите три настани A_1, A_2 и A_3, истовремено. Оттука, $B = A_1A_2A_3$.
- Настанот C ќе се појави ако не се појави ниеден од настаните A_1, A_2 и A_3, т.е. ако се појават нивните спротивни настани, па $C = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.
- Настанот D ќе се појави ако се појави барем еден од настаните A_1, A_2 и A_3, па $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Соодветно, $E = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$.
- Да воочиме дека настанот F ќе се појави ако се појави настанот E, и обратно, појавувањето на настанот F го повлекува појавувањето на настанот E. Значи, $F = E$.
- Настанот G ќе се појави ако не се појават настаните A_1 и A_2, па $G = \overline{A}_1\ \overline{A}_2$.

14 Еден брод има едно кормило, 4 парни котли и 2 турбини. Ги означуваме следните настани:

A: кормилото е исправно;

B_k: k – тиот парен котел е исправен, $k = 1,2,3,4$;

C_j: j – тата турбина е исправна, $j = 1,2$.

Настанот D: бродот е во возна состојба, настапува ако е исправно кормилото, барем еден парен котел и барем една турбина. Да се опишат настаните D и $\overline{D}$, со помош на настаните A, B_k и C_j.

Решение:

- Со користење на операциите на настаните A, B_k и C_j, настанот D може да се опише како $D = A(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4)(C_1 \cup C_2)$. Настанот $\overline{D}$ ќе го опишеме со користење на Де Моргановите закони. Така, $\overline{D} = \overline{A} \cup \overline{B}_1\ \overline{B}_2\ \overline{B}_3\ \overline{B}_4 \cup \overline{C}_1\ \overline{C}_2$.

Задачи:

1. Експериментот се состои прво од фрлање монета. Потоа, ако падне грб, се фрла коцка и се регистрира бројот на точките на горната страна од коцката, а ако падне глава, монетата се фрла уште еднаш. Да се опише множеството елементарни настани.
2. Во една кутија има 5 топчиња нумерирани со броевите од 1 до 5. На случаен начин се извлекува едно по едно топче (без враќање), сè додека не се извлече топче со непарен број. Ако се регистрираат броевите на извлечените топчиња, да се опише множеството елементарни настани.
3. Експериментот се состои во фрлање три коцки. Да се опише множеството елементарни настани и следните случајни настани:

   A: на првите две коцки падна парен број, а на третата непарен;

   B: на сите три коцки падна непарен број;

   C: збирот на точките на трите коцки е парен;

   D: на првите две коцки паднала иста вредност;

   E: на трите коцки не се појавила ниедна петка;

   F: на трите коцки се појавила барем една петка.

4. Стрелец има 4 куршуми и стрела во целта се додека не погоди двапати последователно или додека не ја изгуби шансата да го исполни тој услов. Да се опише множеството елементарни настани и следните случајни настани:

A: целта е погодена барем двапати; B: еден куршум останал неискористен;
C: имало повеќе погодоци од промашувања.

5. Експериментот се состои во фрлање три монети. Настаните A_1, A_2 и A_3, означуваат појавување на грб на првата, втората и третата монета, соодветно. Со користење на овие настани да се опишат следните случајни настани.

B: грб се појави само на првата монета; C: грб се појави на првата и на втората монета;
D: грб се појави на сите три монети; E: грб се појави на барем две монети;
F: грб се појави само на една монета; G: грб се појави на точно две монети;
H: грб се појави најмногу на две монети.

3 ДЕФИНИЦИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ И СВОЈСТВА

Потсети се!

- Множество елементарни настани Ω е множеството од сите логички исходи за даден експеримент со својството: при секое изведување на експериментот да се појави еден и само еден елемент од тоа множество.
- Секој случаен настан A во врска со дадениот експеримент е подмножество од множеството елементарни настани Ω.

A Нека $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ е множеството елементарни настани во врска со експериментот S и нека $p_1, p_2, \dots, p_n$ се дадени реални броеви помеѓу 0 и 1, т.е. $0 \le p_i \le 1$, така што $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Ќе претпоставиме дека p_i е веројатноста на елементарниот настан E_i. Означуваме $p_i = P(E_i)$, за $i = 1, 2, \dots, n$. Нека A е даден случаен настан во врска со истиот експеримент. Настанот A, како подмножество од Ω, нека е од облик $A = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}\}$, каде што $k \le n$, а $i_1, i_2, \dots, i_k$ се различни елементи од множеството $\{1, 2, \dots, n\}$.

Дефиниција: Веројатноста на настанот A е сума од веројатностите на елементарните настани што се содржат во настанот A. Тоа значи дека,

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}. \qquad (1)$$

За вака дефинираната веројатност важи следната

Теорема.

i) $P(A) \ge 0$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) Ако A и B се два дисјунктни настани, тогаш $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Доказ.

i) Веројатноста на секој настан A од облик $A=\{E_{i_1},E_{i_2},...,E_{i_k}\}$, определена според равенството (1) е збир на ненегативни броеви, па јасно е дека таа е ненегативна.

ii) Сигурниот настан Ω ги содржи сите елементарни настани, т.е. $\Omega=\{E_1,E_2,...,E_n\}$. Согласно со дефиницијата на веројатност (1), за веројатноста на настанот Ω се добива

$$P(\Omega)=p_1+p_2+\ldots+p_n,$$

а броевите $p_1,p_2,...,p_n$ ги избравме така што нивната сума е 1. Значи, $P(\Omega)=1$.

iii) Нека $A=\{E_{i_1},E_{i_2},...,E_{i_k}\}$ и $B=\{E_{j_1},E_{j_2},...,E_{j_m}\}$ се два дисјунктни настани. Значи, $A\cap B=\varnothing$. Тогаш, збирот на овие два настани, $A+B=\{E_{i_1},E_{i_2},...,E_{i_k},E_{j_1},E_{j_2},...,E_{j_m}\}$ содржи $k+m$ елементарни настани. За неговата веројатност се добива:

$$\begin{aligned}P(A+B)&=p_{i_1}+p_{i_2}+...+p_{i_k}+p_{j_1}+p_{j_2}+...+p_{j_m}=\\&=(p_{i_1}+p_{i_2}+...+p_{i_k})+(p_{j_1}+p_{j_2}+...+p_{j_m})=\\&=P(A)+P(B).\end{aligned}$$

1 Една табла за пикадо е поделена со концентрични кругови на области кои носат по 10, 9, 8 и 7 поени. Еден играч нишани на таблата со стреличките и ја погодува областа која носи 10 поени со веројатност 0,1, областа која носи 9 поени со веројатност 0,2, областа со 8 поени со веројатност 0,3, онаа со 7 поени со веројатност 0,3 и ја промашува таблата (постигнува 0 поени) со веројатност a. Ако играчот нишани во пикадото еднаш, определи ја веројатноста на следните настани:

A: играчот ќе постигне најмалку 8 поени;

B: играчот ќе добие помалку од 8 поени.

Решение:

При секоја реализација на експериментот "нишанење на таблата за пикадо", се појавува еден и само еден од следните елементарни настани:

E_1: погодена е областа која носи 10 поени;

E_2: погодена е областа која носи 9 поени;

E_3: погодена е областа која носи 8 поени;

E_4: погодена е областа која носи 7 поени;

E_5: таблата воопшто не е погодена.

Значи, множеството елементарни настани $\Omega=\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5\}$, а од условите на задачата имаме дека $p_1=P(E_1)=0{,}1$, $p_2=P(E_2)=0{,}2$, $p_3=P(E_3)=0{,}3$, $p_4=P(E_4)=0{,}3$ и $p_5=P(E_5)=a$. Константата a се определува од условот $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$. Имаме, $0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}3+a=1$, т.е. $a=0{,}1$, па и $p_5=0{,}1$.

Сега, настаните A и B може да се опишат на следниот начин:

$$A=\{E_1,E_2,E_3\} \text{ и } B=\{E_4,E_5\}.$$

Согласно со дефиницијата на веројатност (1), за веројатностите на соодветните настани добиваме:

$$P(A)=p_1+p_2+p_3=0{,}1+0{,}2+0{,}3=0{,}6,\quad P(B)=p_4+p_5=0{,}3+0{,}1=0{,}4.$$

Со користење на својствата на веројатноста од претходната теорема, може да се изведат и следните својства.

1. Веројатноста на невозможниот настан е 0, т.е. $P(\varnothing)=0$.

Јасно е дека ако се разгледува невозможниот настан, тогаш во сумата во равенството (1) нема да има ниеден собирок, па таа сума ќе биде еднаква на 0.

2. Ако $A_1, A_2, \dots, A_n$ се дисјунктни настани, тогаш $P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$.

Својството ќе го покажеме со користење на математичка индукција по бројот на собироците n.

- За $n=2$, тврдењето следува директно од равенството $iii)$ од претходната теорема.
- Да претпоставиме дека тврдењето важи за $k=n-1$.
- Нека $k=n$. Разгледувајќи го $A_1+A_2+\dots+A_{n-1}$ како еден настан, а A_n како друг настан и применувајќи го равенството $iii)$ од претходната теорема, се добива следното:

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P((A_1+A_2+\dots+A_{n-1})+A_n)=P(A_1+A_2+\dots+A_{n-1})+P(A_n)$$

Со примена на индуктивната претпоставка во последното равенство, директно следува горното тврдење.

3. Ако $A\subseteq B$, тогаш $P(A)\le P(B)$.

Без губење на општоста нека $A=\{E_{i_1},E_{i_2},\dots,E_{i_k}\}$, а $B=\{E_{i_1},E_{i_2},\dots,E_{i_k},E_{i_{k+1}},\dots,E_{i_m}\}$, каде што $k\le m$. Тогаш за веројатноста на настанот B се добива:

$$P(B)=p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_k}+p_{i_{k+1}}+\dots+p_{i_m}\ge p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_k}=P(A).$$

4. За веројатноста на произволен настан A во врска со даден експеримент важи дека

$$0\le P(A)\le 1.$$

За секој настан A важи дека $\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega$, па од својството 3, следува дека $P(\varnothing)\le P(A)\le P(\Omega)$, т.е. $0\le P(A)\le 1$.

5. За веројатноста на спротивниот настан $\overline{A}$ на даден настан A важи

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Бидејќи за секој настан A важи дека $\Omega=A+\overline{A}$, а притоа A и $\overline{A}$ се дисјунктни настани, од равенството $iii)$ од претходната теорема, следува дека $P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A})$, т.е. $1=P(A)+P(\overline{A})$, од каде што следува својството 5.

6. Веројатноста на два произволни настани A и B во врска со даден експеримент е

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Ќе разгледаме два случаи: кога настаните A и B се дисјунктни и кога не се дисјунктни.

Ако A и B се дисјунктни настани, тогаш $P(AB) = 0$, а $A \cup B = A + B$, па равенството го добива обликот $P(A + B) = P(A) + P(B)$. Ова е, всушност, равенството *iii)* од претходната теорема и неговата точност е веќе покажана.

Нека A и B не се дисјунктни настани.

Ќе земеме $A = \left\{E_{i_1}, \dots, E_{i_k}, E_{i_{k+1}}, \dots, E_{i_{k+m}}\right\}$, а $B = \left\{E_{i_{k+1}}, \dots, E_{i_{k+m}}, E_{i_{k+m+1}}, \dots, E_{i_{k+m+n}}\right\}$. Производот на овие два настани е $AB = \left\{E_{i_{k+1}}, \dots, E_{i_{k+m}}\right\}$, а нивниот збир $A \cup B = \left\{E_{i_1}, \dots, E_{i_k}, E_{i_{k+1}}, \dots, E_{i_{k+m}}, E_{i_{k+m+1}}, \dots, E_{i_{k+m+n}}\right\}$. Според дефиницијата (1), за веројатноста на сумата на настаните A и B се добива:

$$P(A \cup B) = p_{i_1} + \dots + p_{i_k} + p_{i_{k+1}} + \dots + p_{i_{k+m}} + p_{i_{k+m+1}} + \dots + p_{i_{k+m+n}} =$$
$$= \left(p_{i_1} + \dots + p_{i_k} + p_{i_{k+1}} + \dots + p_{i_{k+m}}\right) + \left(p_{i_{k+1}} + \dots + p_{i_{k+m}} + p_{i_{k+m+1}} + \dots + p_{i_{k+m+n}}\right) - \left(p_{i_{k+1}} + \dots + p_{i_{k+m}}\right) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB).$$

2 Еден кошаркар изведува две слободни фрлања. Притоа се можни следните елементарни настани:

E_1: погодок во првото и погодок во второто фрлање;

E_2: погодок во првото и промашување во второто фрлање;

E_3: промашување во првото и погодок во второто фрлање;

E_4: промашување во првото и промашување во второто фрлање.

Веројатностите на елементарните настани се следните: $P(E_1) = 0{,}49$, $P(E_2) = P(E_3) = 0{,}21$ и $P(E_4) = 0{,}09$. Да се определи веројатноста на следните настани:

A: играчот ќе постигне погодок во првото фрлање;

B: играчот ќе постигне погодок во второто фрлање;

C: играчот ќе постигне погодок во двете фрлања;

D: играчот ќе постигне барем еден погодок во двете фрлања.

Решение:

Настаните A и B може да се претставаат како $A = \{E_1, E_2\}$, а $B = \{E_1, E_3\}$. Оттука, за нивната веројатност се добива:

$$P(A) = p_1 + p_2 = 0{,}49 + 0{,}21 = 0{,}7,$$
$$P(B) = p_1 + p_3 = 0{,}49 + 0{,}21 = 0{,}7,$$
$$P(C) = P(E_1) = 0{,}49.$$

Настанот D ќе се појави ако се постигне погодок само во првото фрлање или само во второто или и во двете фрлања, т.е. $D = A \cup B$. Да воочиме дека настаните A и B не се исклучуваат, бидејќи $AB = \{E_1\} \neq \varnothing$. Оттука, со користење на својството 6, за веројатноста на D се добива следното:

$$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}7 - 0{,}49 = 0{,}91.$$

3 Определи ја веројатноста на настанот D директно, без користење на својството 6.

В Ќе разгледаме еден специјален случај на претходно дефинираната веројатност.

Нека $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ е дадено конечно множество елементарни настани и нека сите овие елементарни настани имаат еднаква веројатност да се појават, т.е. $p_i = p_j$, за $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Од условот $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, следува дека $p_i = \frac{1}{n}$, за сите $i = 1, 2, \ldots, n$. Оттука, ако $A = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}\}$ е даден настан, за неговата веројатност се добива дека

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k \text{ пати}} = \frac{k}{n}.$$

Запомни!

Нека $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ е дадено конечно множество елементарни настани и нека секој од нив има еднаква веројатност да се појави, т.е. $P(E_i) = 1/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ако A е случаен настан во врска со дадениот експеримент во кој се содржат k елементарни настани, тогаш веројатноста на настанот A се определува со:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Ова е познатата ***класична дефиниција*** на веројатност.

Да воочиме дека n е вкупниот број на елементарни настани, т.е. бројот на елементи во Ω. Ќе означиме $n = |\Omega|$. Секој елементарен настан може да го толкуваме како "можен случај" во врска со даден експеримент. Од друга страна, k е бројот на елементарни настани кои се содржат во настанот A, т.е. $k = |A|$ и секој елементарен настан од A ќе го толкуваме како "поволен случај" за појавување на настанот A. Согласно со класичната дефиниција, веројатноста на даден случаен настан A е еднаква на количникот од бројот на поволни случаи за појавување на настанот A и бројот на сите можни случаи за дадениот експеримент, т.е.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

4 Да се определи веројатноста при фрлање коцка да се добие парен број.

Решение:

Ако експериментот е фрлање коцка, множеството елементарни настани $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, каде што E_i е настанот: се појави бројот i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Настанот A: падна парен број може да се опише со $A = \{E_2, E_4, E_6\}$. Значи, бројот на поволни можности за појавување на настанот A е 3, а вкупниот број на можности при реализација на експериментот е 6. Оттука, според класичната дефиниција на веројатност, за веројатноста на настанот A се добива:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5.$$

5 Во една кутија има 5 бели и 4 црни топчиња. Од кутијата се извлекуваат две топчиња наеднаш. Да се определи веројатноста дека двете извлечени топчиња се бели.

Решение:

Го означуваме настанот A: извлечени се две бели топчиња. Бројот на можни исходи на експериментот, т.е. вкупниот број на елементарни настани е $C_9^2=\binom{9}{2}=36$, а поволниот број можности за да се појави настанот A се $C_5^2=\binom{5}{2}=10$. Значи, веројатноста за појавување на настанот A е

$$P(A)=\frac{10}{36}=0,2778.$$

6 Во едно претпријатие има 100 вработени. Од нив 40 зборуваат англиски јазик, 30 зборуваат француски, а 15 ги знаат и двата јазици. Случајно се избира едно лице. Да се определи веројатноста на следните настани:

B: лицето знае само француски јазик; C: лицето знае само англиски јазик;

D: избраното лице знае барем еден јазик; E: избраното лице не знае ниту еден јазик.

Решение:

Ќе ги означиме следните настани:

A: избраното лице зборува англиски; F: избраното лице зборува француски.

Од условите на задачата може да се определи дека $P(A)=\frac{40}{100}=0,4$; $P(F)=\frac{30}{100}=0,3$ и $P(AF)=\frac{15}{100}=0,15$. За определување на веројатноста на настанот B, потребно е да се определи бројот на оние што знаат само француски. Тој број ќе се добие кога од бројот на оние кои знаат француски се одземе бројот на оние кои ги знаат двата јазици. Така, бројот на оние кои знаат само француски е $30-15=15$. Оттука, $P(B)=\frac{15}{100}=0,15$. Аналогно, бројот на оние кои знаат само англиски е $40-15=25$, па $P(C)=\frac{25}{100}=0,25$. Настанот D може да се претстави како $D=A\cup F$, па со користење на својството 6, се добива: $P(D)=P(A\cup F)=P(A)+P(F)-P(AF)=0,4+0,3-0,15=0,55$.

На крај, да воочиме дека $E=\overline{D}$, па со користење на особината 5, добиваме

$$P(E)=1-P(D)=1-0,55=0,45.$$

Задачи:

1. Еден систем за откривање чад во воздухот содржи два уреда A и B. Ако има чад, тогаш уредот A го открива со веројатност $0,95$, уредот B со веројатност $0,98$, а двата уреда истовремено со веројатност $0,94$. Да се определи веројатноста на следните настани:

   C: барем еден уред ќе го открие присуството на чадот во воздухот;

   D: ниеден уред нема да го открие присуството на чадот во воздухот.

2. Страните на еден тетраедар се нумерирани со броевите $1,2,3$ и 4. Тетраедарот се фрла на рамна површина и се набљудува онаа страна која лежи на површината. При изведување на експериментот, секоја страна се појавува со веројатност пропорционална со нејзиниот број. Да се определи веројатноста на следните настани:

   A: падна број помал од 3; B: падна парен број.

(3) Да се определи веројатноста при истовремено фрлање на две коцки да се добие збир 10.

(4) Дадени се 5 отсечки со должини од 2,3,4,7,9 сантиметри. Да се определи веројатноста од три случајно избрани отсечки да може да се конструира триаголник.

(5) Во една лотарија има 100 лозови нумерирани со броевите 1 до 100. Добитни се лозовите чии броеви се деливи и со 4 и со 5. Колкава е веројатноста на настаните:

A: при купување на еден лоз ќе се добие погодок;

B: при купување на два лоза ќе се добие барем еден погодок.

(6) Еден човек купил 7 сијалици од 40 W, 5 сијалици од 60 W и 3 сијалици од 100 W. По пат скршил три сијалици. Колкава е веројатноста дека скршените сијалици имаат вкупно 180 W?

4 УСЛОВНА ВЕРОЈАТНОСТ. НЕЗАВИСНОСТ НА СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ

Потсети се!

- Ако множеството елементарни настани $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ и $P(E_i) = 1/n$, за секој $i = 1, 2, \ldots, n$, тогаш веројатноста на случаен настан A кој содржи k елементарни настани се определува со $P(A)=k/n$.
- Ако A и B се дисјунктни настани, тогаш $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

А Често се случува веројатноста за појавување на еден настан да зависи од тоа дали ќе се појави или не друг настан. Да ги разгледаме следните настани:

A: ќе врне $\qquad$ B: на небото има облаци.

Јасно е дека веројатноста за појава на настанот A зависи од тоа дали ќе се појави или не настанот B. Имено, информацијата дека се појавил настанот B, ја зголемува веројатноста на појавување на настанот A. Затоа, се јавува потребата за дефинирање на таканаречена условна веројатност. ***Условната веројатност*** на настанот A при услов B е веројатност да се појави настанот A, ако се појавил настанот B. Оваа веројатност ќе ја означуваме со $P(A \mid B)$.

- Мотивот за тоа како да се дефинира условната веројатност доаѓа од релативната фреквенција како мерка за можностите за настапување на одреден настан. Имено, нека се изведуваат n експерименти во кои може да се појават настаните A и B. Нека $n(B)$ е бројот на експерименти во кои се појавил настанот B, а $n(AB)$ е бројот на експерименти во кои се појавил настанот AB. Тогаш $\dfrac{n(AB)}{n(B)}$ е релативната честота на појавување на настанот A ако се појавил настанот B. Добиваме,

$$\frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{\frac{n(AB)}{n}}{\frac{n(B)}{n}} \approx \frac{P(AB)}{P(B)},$$ каде што $P(AB)$ е веројатноста на производот на настаните A и B.

Запомни!

Условната веројатност на настанот A при услов B (ако $P(B)>0$) се дефинира со:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

а условната веројатност на настанот B при услов A (ако $P(A)>0$) со:

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

1 Експериментот се состои во фрлање коцка. Да се определи веројатноста дека паднал парен број, ако е познато дека паднал број кој е помал или еднаков на 4.

Решение:

Да ги означиме следните настани:

A: се појавил парен број; B: се појавил број помал или еднаков на 4.

Во тој случај, настанот AB означува дека се појавил парен број кој е најмногу 4. Веројатноста на настаните B и AB е:

$$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3};\quad P(AB)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

На крајот, веројатноста $P(A|B)$ според дефиницијата за условна веројатност, ќе биде:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Од формулите за условна веројатност може да се изрази веројатноста за производ на два настани.

Запомни!

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

2 Во една кутија има 4 бели и 3 црни топчиња. Од кутијата се извлекуваат две топчиња едно по едно, без враќање. Да се определи веројатноста дека двете извлечени топчиња се бели.

Решение:

Да ги означиме настаните

A_1: во првото извлекување е добиено бело топче, A_2: во второто извлекување е добиено бело топче.

Ја бараме веројатноста на настанот A_1A_2. Според претходното својство имаме дека

$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)$. Притоа, $P(A_1)=\frac{4}{7}$, а веројатноста $P(A_2|A_1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, бидејќи ако се извлече бело топче во првото извлекување, во кутијата остануваат 6 топчиња од кои 3 се бели.

Оттука, $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}.$

Формулата за веројатност на производ на два настани може да се обопшти за производ на n настани со следното тврдење:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_2A_1)...P(A_n\mid A_{n-1}...A_2A_1).$$

Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција.

- За $n=2$, добиваме $P(A_1A_2)=P(A_1)\ P(A_2|A_1)$, што следува директно од дефиниција на условна веројатност.
- Да претпоставиме дека тврдењето важи за $k=n-1$.
- За $k=n$ добиваме:

$$P(A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n)=P((A_1A_2\ldots A_{n-1})\ A_n)$$

(според дефиницијата) $\quad = P(A_1A_2\ldots A_{n-1})\ P(A_n\mid A_1A_2\ldots A_{n-1})$

Со примена на индуктивната претпоставка за $P(A_1\ A_2\ldots\ A_{n-1})$ се добива дека:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\ P(A_2\mid A_1)\ P(A_3\mid A_2A_1)\ \ldots\ P(A_{n-1}\mid A_{n-2}\ldots A_2A_1)\ P(A_n\mid A_{n-1}\ldots A_1).$$

3 Во една кутија има 4 бели и 5 црни топчиња. Играчот извлекува по едно топче од кутијата, без враќање, сè додека не извлече бело топче. Да се определи веројатноста дека тој ќе извлекува точно 4 пати.

Воочи ја постапката во решението:

- Играчот ќе извлекува точно 4 пати, ако во првите 3 обиди извлече црно топче, а во четвртиот обид – бело. Ако A_i е настанот дека играчот ќе извлече бело топче во i-тото извлекување, $i=1,2,3,4$, тогаш ја бараме веројатноста на настанот $\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3\ A_4$. Според претходното својство, имаме:

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\ \overline{A}_2)P(A_4\mid\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3).$$

Притоа, $P(\overline{A}_1)=\frac{5}{9}$. Ако во првото извлекување е извлечено црно топче, тогаш во кутијата останале 4 црни од вкупно 8 топчиња, па

$$P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Ако во првите две извлекувања се добиени две црни топчиња, во кутијата ќе има 3 црни од вкупно 7 топчиња, па

$$P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{3}{7},$$

и на крајот, по 3 извлечени црни топчиња, во кутијата има 2 црни и 4 бели топчиња, па

$$P(A_4\mid\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Така, $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4)=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{63}=0{,}0794.$

B За настанот A велиме дека е независен од настанот B, ако $P(A|B)=P(A)$. Тоа значи, дека појавувањето на настанот B не ја менува веројатноста да се појави настанот A.

Ако настанот A е независен од настанот B, тогаш имаме

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B),$$

а тоа значи дека и настанот B е независен од настанот A. Тогаш за A и B велиме дека се ***независни настани***. Во тој случај,

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B).$$

Обратно, ако последното равенство е исполнето, тогаш

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B),$$

па A и B се независни настани. Со тоа е докажана следната

Теорема. Настаните A и B се ***независни***, ако и само ако

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Во некои случаи независноста може да се согледа од самите услови на задачата. На пример, ако се фрлаат две коцки и се набљудуваат настаните

A: на првата коцка падна шестка,

B: на втората коцка падна петка,

тогаш е јасно дека A и B се независни настани, бидејќи исходот на едната не влијае на исходот на другата коцка.

Но, во некои случаи неопходно е да се провери условот за независност од последната теорема.

4 Од шпил со 52 карти се извлекува една карта. Да ги разгледаме следните настани:

A: извлечена е карта на која е бројот пет; B: извлечената карта е лист.

Провери дали настаните A и B се независни.

Согледај го решението:

$$P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},\quad P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4},\quad P(AB)=\frac{1}{52}=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{4}=P(A)\cdot P(B).$$

Значи, условот за независност е исполнет, па A и B се независни настани, иако интуитивно тоа не изгледа така (помеѓу картите со знак лист има петка и меѓу четирите петки има петка лист).

5 Двајца стрелци стрелаат во една цел независно еден од друг. Веројатноста првиот од нив да ја погоди целта е 0,7, а вториот 0,9. Да се определи веројатноста дека целта ќе биде погодена барем еднаш.

Решение:

Ги означуваме настаните

A: првиот стрелец ја погодил целта; B: вториот стрелец ја погодил целта.

Од условите на задачата е јасно дека A и B се независни настани бидејќи двајцата стрелци стрелаат независно еден од друг. Притоа, $P(A)=0{,}7$, а $P(B)=0{,}9$. Ја бараме веројатноста на настанот $A\cup B$. Добиваме:

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)=\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\\&=0{,}7+0{,}9-0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}97.\end{aligned}$$

6 За настаните A и B, од задача 4, утврдивме дека се независни. Провери ја независноста на паровите настани A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; како и $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Решение:

Од задача 4 имаме дека $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ и $P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$.

Настанот $A\overline{B}$ означува дека е извлечена карта со бројот 5 која не е лист. Постојат 3 поволни можности за овој настан, па

$$P\left(A\overline{B}\right)=\frac{3}{52}=\frac{1}{13}\cdot\frac{3}{4}=P(A)P\left(\overline{B}\right).$$

Значи, A и $\overline{B}$ се независни настани.

Соодветно, $\overline{A}B$ е настанот: извлечена е карта со знакот лист на која е број што е различен од 5. Има 12 поволни можности за овој настан. Оттука,

$$P\left(\overline{A}B\right)=\frac{12}{52}=\frac{12}{13}\cdot\frac{1}{4}=P\left(\overline{A}\right)P(B),$$

т.е. и настаните $\overline{A}$ и B се независни.

На крајот, $\overline{A}\overline{B}$ е настанот: извлечена е карта која не е петка и не е лист. Поволни можности има 36, па

$$P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=\frac{36}{52}=\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{4}=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right).$$

Оттука, и $\overline{A}$ и $\overline{B}$ се независни настани.

Ќе ја покажеме точноста на следната

Теорема. Ако A и B се независни настани, тогаш независни се и паровите: A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Доказ. Ако A и B се независни настани, тогаш $P(AB)=P(A)P(B)$. Сега, $A=A\Omega=A\left(B+\overline{B}\right)=AB+A\overline{B}$, па за веројатноста на A се добива:

$$P(A)=P(AB)+P\left(A\overline{B}\right).$$

Од претпоставката за независност на A и B имаме:

$$P(A)=P(A)P(B)+P\left(A\overline{B}\right),\text{ па}$$

$$P\left(A\overline{B}\right)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)\left(1-P(B)\right)=P(A)P\left(\overline{B}\right),$$

бидејќи $1-P(B)$ е веројатноста на спротивниот настан на B. Од последното равенство заклучуваме дека A и $\overline{B}$ се независни настани. Независноста на $\overline{A}$ и B следува заради симетрија, а независноста на $\overline{A}$ и $\overline{B}$ е последица од независноста на претходните два пара настани. (Докажи го ова тврдење!).

Поимот за независност на настани може да се обопшти на повеќе од два настани.

Запомни!

Настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се ***независни во целина***, ако за произволен k ($2 \le k \le n$) и за кој било избор на индекси $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ важи

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}).$$

- Значи, ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се независни настани, тогаш за веројатноста на нивниот производ се добива дека е производ на веројатностите на поединечните настани, т.е.

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

- Слично како и за два настани се покажува дека ако се независни настаните $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ тогаш независни се и настаните $A_1, A_2, \ldots, \overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots$

7 Во една кутија има 6 бели и 2 црни топчиња. Играчот извлекува едно топче, ја гледа неговата боја и го враќа во кутијата. Да се определи веројатноста дека бело топче ќе извлече за прв пат во четвртото извлекување.

Согледај го решението:

Нека A_i означува дека во i – тото извлекување е добиено бело топче, $i = 1,2,\ldots$ Бидејќи после секое извлекување, извлеченото топче се враќа назад во кутијата, исходот на секое извлекување не зависи од исходот на претходните извлекувања, т.е. настаните A_i, $i = 1,2,\ldots$, се независни. Притоа, $P(A_i) = 6/8 = 3/4$, а $P(\overline{A}_i) = 1/4$ за $i = 1, 2, 3,\ldots$ Оттука,

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{256}.$$

Задачи:

1. Од множеството $S = \{1,2,\ldots, 20\}$ на случаен начин се избира еден број. Да се определи веројатноста дека извлечениот број е парен, ако е познато дека е делив со 3.

2. Веројатноста еден стрелец да ја погоди целта во првото стрелање е 2/3. Ако ја погоди целта во првиот обид, стекнува право на втор обид. Веројатноста да ја погоди целта во двата обиди е 0,5. Да се определи веројатноста да ја погоди целта во вториот обид, ако стекнал право за втор обид.

3. Еден претплатник ја заборавил последната цифра од телефонскиот број на својот пријател и затоа ја избирал случајно.
   а) Да се определи веројатноста дека ќе ја погоди во третиот обид.
   б) Да се определи истата таа веројатност, ако знаел дека цифрата која ја заборавил е парна.

4 На одделни картички се напишани буквите Е, А, А, А, И, М, М, Т, Т, К. Картичките се мешаат,а потоа се извлекуваат една по една и се поредуваат по редоследот на извлекувањето. Да се определи веројатноста да се добие зборот МАТЕМАТИКА.

5 Во една кутија има 4 бели и 3 зелени топчиња. Играчите A и B извлекуваат наизменично по едно топче. Победува оној кој прв ќе извлече бело топче. Да се определи веројатноста да победи играчот A, ако извлечените топчиња не се враќаат во кутијата.

6 Да ја разгледаме истата игра како во задачата 5. Да се определи веројатноста да победи играчот B, најмногу после 3 свои извлекувања, ако после секое извлекување, извлеченото топче се враќа назад во кутијата.

5 СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ОД ДИСКРЕТЕН ТИП

Потсети се!

- Настаните A и B се независни ако и само ако $P(AB) = P(A)P(B)$.
- Настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се независни во целина, ако за кој било $k\ (2 \le k \le n)$ и за кој било избор на индекси $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ важи

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \ldots P\left(A_{i_k}\right).$$

A Поимот случајна променлива е еден од основните поими во теоријата на веројатност. Многу често се случува на секој елементарен настан $E_i \in \Omega$ да му се придружи некој број $X(E_i) \in \mathbb{R}$. Еве неколку примери.

1 Ако експериментот е фрлање коцка, тогаш $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, каде што елементарниот настан E_i означува дека на горната страна на коцката се појавиле i точки. Во врска со овој експеримент може да се разгледува функција X од множеството елементарни настани Ω во множеството реални броеви $\mathbb{R}$, зададена со $X(E_i) = i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Оваа функција може да се опише како број на точки појавени на горната страна на коцката. Функцијата X ќе прима вредности од множеството $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и секоја од вредностите ќе ја прима со одредена веројатност која ќе зависи од веројатноста на елементарните исходи. Имено,

$$P\{X = i\} = P(E_i) = 1/6, \quad \text{за секој} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

2 Нека експериментот е фрлање на две монети. Тогаш $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, каде што $E_1 =$ (глава, глава), $E_2 =$ (глава, грб), $E_3 =$ (грб, глава) и $E_4 =$ (грб, грб). Сите елементарни настани се еднакво веројатни, т.е. $P(E_i) = 1/4$, $i = 1, 2, 3, 4$. Да ја разгледаме функцијата Y која претставува број на појавени глави на двете монети. Функцијата Y ќе прима вредности од множеството $R_Y = \{0, 1, 2\}$, а веројатностите со кои ќе ги прима тие вредности зависат од веројатностите на елементарните настани. Така,

$$P\{Y = 0\} = P(E_4) = 1/4, \quad P\{Y = 1\} = P\{E_2, E_3\} = 1/4 + 1/4 = 1/2, \; P\{Y = 2\} = P(E_1) = 1/4.$$

3 Страните на еден хомоген тетраедар се нумерирани со броевите 1, 2, 3, 4. Експериментот се состои во две фрлања на тетраедарот на рамна површина, при што се набљудува страната со која тетраедарот лежи на површината. Множеството елементарни настани за овој експеримент е $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. Притоа, сите елементарни настани (x, y) се еднакво веројатни, т.е. $P((x, y)) = 1/16$, за секој $(x, y) \in \Omega$. Да ја разгледаме функцијата Z - збир на броевите добиени при двете фрлање на тетраедарот. Z ќе прима вредности од множеството $R_Z = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а соодветните веројатности со кои ќе ги прима тие вредности се определуваат на следниов начин:

$$P\{Z=2\} = P\{(1,1)\} = 1/16$$
$$P\{Z=3\} = P\{(1,2),(2,1)\} = 2/16$$
$$P\{Z=4\} = P\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = 3/16$$
$$P\{Z=5\} = P\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} = 4/16$$
$$P\{Z=6\} = P\{(2,4),(3,3),(4,2)\} = 3/16$$
$$P\{Z=7\} = P\{(3,4),(4,3)\} = 2/16$$
$$P\{Z=8\} = P\{(4,4)\} = 1/16$$

На ваков начин со придружување број на секој елементарен настан се конструира функција дефинирана на множеството елементарни настани. Таа функција прима вредности со одредена веројатност која зависи од веројатностите на елементарните настани. Затоа, таквите функции ќе ги викаме ***случајни променливи***.

Запомни!

Случајна променлива X е функција од множеството елементарни настани Ω во множеството реални броеви $\mathbb{R}$.

Множеството вредности на една случајна променлива X е подмножество од $\mathbb{R}$ и тоа може да биде конечно, бесконечно преброjливо или бесконечно непреброjливо.

Ако множеството вредности на X е конечно или преброjливо, тогаш велиме дека случајната променлива X е од ***дискретен тип*** или ***дискретна случајна променлива***.

Ако, пак, множеството вредности на X е бесконечно непреброjливо, тогаш X е случајна променлива од ***апсолутно непрекинат тип***.

Досега разгледаните случајни променливи се дискретни случајни променливи со конечно множество вредности.

Случајни променливи од дискретен тип со преброjливо множество вредности се, на пример, бројот на фрлања на коцка сè додека не се добие бројот 5, бројот на контролирани производи во еден магацин сè додека не се добие дефектен производ (ако секој контролиран производ се враќа во магацинот), итн.

Случајни променливи од апсолутно непрекинат тип се, на пример, висина на случајно избрано лице од дадена група луѓе, време на непрекината работа на една машина, количина на шеќер во едно јаболко и сл.

Овде ќе се задржиме само на случајни променливи од дискретен тип со конечно множество вредности. Во понатамошниот текст, ***под терминот дискретна случајна променлива ќе подразбираме токму случајна променлива со конечно множество вредности***.

Зайомни!

Случајна променлива X е од ***дискрешен шиū*** (или ***дискрешна случајна ūроменлива***), ако прима вредности од конечно множество $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и притоа веројатноста X да прими вредности од комплементот на R_X е 0, т.е. $P\{X \in \mathbb{R} \setminus R_X\} = 0$. Со други зборови, случајната променлива X не може да прими вредности од множеството $\mathbb{R} \setminus R_X$ со ненулта веројатност.

Случајната променлива од дискретен тип е наполно определена со множеството вредности R_X и соодветните веројатности:

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Притоа, веројатностите p_i мора да ги задоволуваат следните услови:

1. $0 \le p_i \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$
2. $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$

На ваков начин, со множеството вредности кои ги прима случајната променлива X и соодветните веројатности, велиме дека е зададен ***закон на расūределба*** на X.

Ако X прима малку вредности, тогаш вообичаено е законот на распределба да се претстави во табела, каде што во првиот ред стојат вредностите на случајната променлива, а во вториот ред соодветните веројатности. Така, законите на распределба на случајните променливи X, Y и Z определени во примерите 1, 2 и 3 може да се претстават на следниов начин:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}, \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix},$$

$$Z : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1/16 & 2/16 & 3/16 & 4/16 & 3/16 & 2/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

Воочи дека сумата на веројатностите во секој од трите случаи е еднаква на 1.

Б **4** Нека експериментот е фрлање монета. Да се опише случајната променлива X – број на појавени глави на горната страна на монетата.

Решение:

Множеството елементарни настани за овој експеримент е $\Omega = \{E, \overline{E}\}$, каде што E е елементарниот настан "падна глава", а $\overline{E}$ – "падна грб". Случајната променлива X ќе прима вредности од множеството $R_X = \{0, 1\}$ и

$$P\{X = 0\} = P(\overline{E}) = \frac{1}{2}, \qquad P\{X = 1\} = P(E) = \frac{1}{2}.$$

Значи,

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ваквата случајна променлива се нарекува ***индикаūор на насūаноū*** E, кој во конкретниот случај означува појавување на глава.

Во општ случај, нека во експериментот се набљудува дали ќе се појави или не даден настан A и нека $P(A)=p$. Случајната променлива I_A која е определена со:

$$I_A:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},$$

каде што $q=1-p$ се нарекува ***индикатор на настанот*** A.

В *Запомни!*

Ако T е подмножество од множеството реални броеви $\mathbb{R}$, тогаш $P\{X\in T\}$ е сума на сите веројатности $p_i=P\{X=x_i\}$, за сите $x_i\in T$.

5 Тројца стрелци стрелаат во една цел независно еден од друг. Првиот од нив ја погодува целта со веројатност $0{,}6$, вториот со веројатност $0{,}5$, а третиот со $0{,}8$. Да се определи:

а) законот на распределба на случајната променлива X – број на погодувања на целта;

б) $P\{1<X\leq 3\}$.

Решение:

а) Ќе ги означиме настаните A_i: $i-$ тиот стрелец ја погодил целта, $i=1,2,3$. Од условите на задачата, настаните A_1, A_2 и A_3 се независни и $P(A_1)=0{,}6$, $P(A_2)=0{,}5$ и $P(A_3)=0{,}8$. Случајната променлива X ќе прима вредности од множеството $R_X=\{0,1,2,3\}$. Притоа, настанот $\{X=0\}$ означува дека сите стрелци ја промашиле целта, настанот $\{X=1\}$ означува дека точно еден стрелец ја погодил целта итн. За соодветните веројатности се добива:

$$p_0=P\{X=0\}=P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2=0{,}04.$$

$$p_1=P\{X=1\}=P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8=0{,}26.$$

$$p_2=P\{X=2\}=P\left(A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3\right)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8=0{,}46.$$

$$p_3=P\{X=3\}=P\left(A_1A_2A_3\right)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8=0{,}24.$$

Значи,

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}04 & 0{,}26 & 0{,}46 & 0{,}24 \end{pmatrix}.$$

б) $P\{1<X\leq 3\}=p_2+p_3=0{,}46+0{,}24=0{,}7.$

6 Определи ја распределбата на случајната променлива X од претходната задача, ако сите стрелци ја погодуваат целта со веројатност p $(0<p<1)$.

Решение:

Ако во решението на претходната задача се стави $P(A_i)=p$, а $P\left(\overline{A}_i\right)=1-p=q$, $i=1,2,3$, се добива следното:

$$p_0 = P\{X=0\} = P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right) = q^3,$$

$$p_1 = P\{X=1\} = P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right) = 3pq^2 = C_3^1pq^2,$$

$$p_2 = P\{X=2\} = P\left(A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3\right) = 3p^2q = C_3^2p^2q,$$

$$p_3 = P\{X=3\} = P\left(A_1A_2A_3\right) = p^3.$$

Кратко, овие веројатности може да се запишат во облик:

$$p_i = C_3^i p^i q^{3-i}, \quad i = 0,1,2,3.$$

За ваквата случајна променлива X велиме дека има бинарна распределба со параметри 3 и p; се пишува

$$X \sim B(3,p).$$

Да го обопштиме претходниот резултат. Нека се изведува серија од n независни и еднакви експерименти. Во секој од нив се набљудува појавување или не на настанот A чија веројатност $P(A) = p$. Случајната променлива X означува број на појавувања на настанот A во серијата од n експерименти. X прима вредности од множеството $R_X = \{0, 1, \ldots, n\}$. Притоа,

$$P\{X=0\} = P(\underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n}) = q^n, \qquad P\{X=n\} = P(\underbrace{AAA\ldots A}_{n}) = p^n.$$

Да ја определиме веројатноста $P\{X=i\}$, за $i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$. Нека B_{1i} е настанот дека во првите i експерименти ќе се појави настанот A, а во следните $n-i$ нема да се појави, т.е.

$B_{1i} = \underbrace{AAA\ldots A}_{i}\underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-i}$. Заради независноста на настаните заклучуваме дека $P(B_{1i}) = p^i q^{n-i}$. Од вкупно n експерименти, на C_n^i начини може да се изберат i, во кои ќе се појави настанот A. Оттука,

$$P\{X=i\} = C_n^i p^i q^{n-i}, \; i = 0,1,\ldots,n.$$

На ваков начин е определена случајна променлива која има ***биномна распределба*** со параметри n и p. Пишуваме $X \sim B(n,p)$.

Г Со користење на дефиниција за независност на два случајни настани, може да се дефинира независност на две случајни променливи X и Y.

Запомни!

Случајните променливи X и Y се ***независни*** ако за произволна вредност x_i што припаѓа на множеството вредности на X и произволна вредност y_j што припаѓа на множеството вредности на Y, случајните настани $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ се независни. Односно,

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}, \text{ за секој } x_i \in R_X \text{ и секој } y_j \in R_Y.$$

Аналогно, со помош на дефиницијата за независност во целина на n случајни настани, ќе дефинираме независност на n случајни променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Запомни!

Случајните променливи $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ се ***независни***, ако за произволни вредности $x_i \in R_{X_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, случајните настани $\{X_1 = x_1\}, \{X_2 = x_2\}, \ldots, \{X_n = x_n\}$ се независни во целина, односно $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\} \cdot P\{X_2 = x_2\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n = x_n\}$, за секој $x_i \in R_{X_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Задачи:

1. Случајната променлива X е зададена со $X : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & p & 0{,}1 \end{pmatrix}$.
Да се определи: а) константата p; а) $P\{1 < X < 5\}$.

2. Во една кутија се наоѓаат 4 топчиња означени со броевите $1,2,3,4$. На случаен начин се извлекува по едно топче (без враќање), сѐ додека не се извлече топче со непарен број. Да се определи распределбата на случајните променливи:
X: збирот на извлечените броеви; Y: бројот на извлечените топчиња.

3. Еден човек има врзоп од 4 клуча, но само еден од нив ја отвора вратата на неговата канцеларија. Човекот заборавил кој е вистинскиот клуч, па затоа го бира случајно. Да се определи распределбата на случајната променлива X – број на обиди до наоѓање на вистинскиот клуч, ако по секое пробување несоодветниот клуч се трга настрана.

4. На маса се фрлаат две коцки. Да се определи распределбата на случајната променлива Z – збир на точките на горната страна од двете коцки.

5. Веројатноста да се роди машко дете е $0{,}51$. Ако се смета дека полот на секое следно дете во едно семејство не зависи од полот на претходните, да се определи распределбата на случајната променлива X – број на машки деца во едно четиричлено семејство.

6. Во една фабрика има 4 машини. Во текот на денот првата од нив може да се расипе со веројатност $0{,}1$, втората со веројатност $0{,}2$, веројатноста за расипување на третата е $0{,}09$, а за четвртата $0{,}11$. Ако машините се расипуваат независно една од друга, да се определи распределбата на случајната променлива X – број на расипани машини во текот на денот.

6 БРОЈНИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА ЕДНА СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЛИВА

Потсети се!

- Секоја случајна променлива X е наполно определена со нејзиното множество вредности $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и соодветните веројатности $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Индикатор на даден настан A, за кој $P(A) = p$, а $q = 1 - p$, е случајната променлива зададена со

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

А Понекогаш не е неопходно познавањето на распределбата на некоја случајна променлива, туку доволно е да се знаат некои карактеристики (параметри) кои ја опишуваат таа случајна променлива. Некои од тие параметри се математичкото очекување и дисперзијата на една случајна променлива.

Нека X е случајна променлива која прима вредности од множеството $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и нека експериментот се повторува N пати. Притоа, нека n_1 пати се појави бројот x_1, n_2 пати – бројот x_2, итн., n_k пати – бројот x_k. Аритметичката средина на овие броеви ќе биде:

$$\overline{x}_N = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{N}.$$

Последниот израз може да се запише во облик:

$$\overline{x}_N = \frac{n_1}{N} x_1 + \frac{n_2}{N} x_2 + \ldots + \frac{n_k}{N} x_k.$$

Ако N е доволно големо, тогаш релативната фреквенција $\frac{n_i}{N}$ ќе биде приближно еднаква на статистичката веројатност на настанот $\{X = x_i\}$, за $i = 1, 2, \ldots, k$, т.е. $\frac{n_i}{N} = P\{X = x_i\} = p_i$. Тогаш, аритметичката средина може да се запише во облик:

$$\overline{x}_N = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_k x_k.$$

Оттука доаѓа идејата за дефинирање на математичко очекување или средна вредност на една случајна променлива на следниот начин.

Запомни!

Ако X е случајна променлива со множество вредности $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и веројатности $p_i = P\{X = x_i\}$, за $i = 1, 2, \ldots, k$, тогаш ***математичкото очекување*** (средната вредност) на X се означува со EX и се определува со равенството:

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k.$$

1 Да се определи математичкото очекување на случајната променлива X зададена со следниот закон на распределба на веројатностите:

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Решение:

Според формулата за определување на математичко очекување имаме дека

$$EX = 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}5 = 4{,}3.$$

2 Да се определи математичкото очекување на индикаторот на даден настан A кој се појавува со веројатност p.

Решение:

Индикаторот на настан A е зададен со $I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, па за неговото математичко очекување се добива $EX = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

Б *Запомни!*

Математичкото очекување ги има следните својства:

1. $Ec = c$, каде што c е произволна константа.
2. $E(cX) = cEX$.
3. $E(X+Y) = EX + EY$.
4. Ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш $E(XY) = EX \cdot EY$.
5. За дадени константи $c_1, c_2, \ldots, c_n$: $E(c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n) = c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \ldots + c_nE(X_n)$

3 Нека X и Y се независни случајни променливи зададени со следните закони на распределба:

$X: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$, $Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. Да се определи математичкото очекување $X+Y$ и XY.

Решение:

За математичките очекувања X и Y добиваме:

$$EX = 1\cdot 0,4 + 3\cdot 0,3 + 5\cdot 0,3 = 2,8 \text{ и } EY = 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,7 = 1,7.$$

Со користење на својството 3, се добива дека $E(X+Y) = EX + EY = 2,8 + 1,3 = 4,1$, а со користење на независноста на X и Y и својството 4, го наоѓаме математичкото очекување

$$E(XY) = EX \cdot EY = 2,8 \cdot 1,7 = 4,76.$$

В **4** Нека случајната променлива X зададена со $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$, а

случајната променлива Y е константа $P\{Y=3\}=1$. Определи ги EX и EY.

Согледај го решението:

$EX = 1\cdot 0,2 + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,2 + 4\cdot 0,2 + 5\cdot 0,2 = 3$, а $EY = 3\cdot 1 = 3$.

Воочи дека двете случајни променливи имаат исто математичко очекување, иако нивната распределба се разликува. Имено, првата случајна променлива прима пет вредности, а втората е константна.

5 Една табла за пикадо е поделена со концентрични кругови на области кои носат 10,9 и 8 поени. Двајца играчи A и B нишанат на пикадото и нека X е број на поени кои ги постигнува играчот A, а Y – број на поени што ги постигнува играчот B. Распределбата на X и на Y е зададена на следниот начин:

$X: \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$, $Y: \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$. Определи го очекуваниот број на поени на играчите A и B.

Решение:

$EX = 8\cdot 0,1 + 9\cdot 0,3 + 10\cdot 0,6 = 9,5$ и $EY = 8\cdot 0,2 + 9\cdot 0,1 + 10\cdot 0,7 = 9,5$.

Воочи дека двете случајни променливи имаат исто математичко очекување, т.е. очекуваниот број на поени е еднаков и за двајцата играчи, иако распределбата на двете случајни променливи се разликува. Од друга страна, да го разгледаме отстапувањето на поените од добиеното математичко очекување

$EX = EY = 9,5$. Може да се види дека $P\{X = 8\} < P\{Y = 8\}$, што наведува на заклучок дека кај вториот играч може да се очекува поголем број погодувања на областа со 8 поени, а со тоа и поголемо отстапување (расејување) на поените од математичкото очекување, кое изнесува 9,5, отколку расејувањето кај првиот играч.

- Затоа се јавува потреба од воведување на нова карактеристика која ќе го определува отстапувањето на вредностите на една случајна променлива од нејзиното математичко очекување. Таа карактеристика се нарекува дисперзија на случајната променлива.

Запомни!

Ако X е случајна променлива со множество вредности $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и веројатности $p_i = P\{X = x_i\}$, за $i = 1, 2, \ldots, k$, тогаш ***дисперзијата*** на X се означува со DX и се определува со равенството:

$$DX = E(X - EX)^2 = (x_1 - EX)^2 \cdot p_1 + (x_2 - EX)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_k - EX)^2 \cdot p_k.$$

- Искажано со зборови, дисперзијата е средна вредност од квадратите на отстапувањата на вредностите на случајната променлива од нејзиното математичко очекување.
- Со развивање на изразот за определување на дисперзијата и применување на својствата на математичкото очекување се добива следното:

$DX = E(X^2 - 2X\,EX + (EX)^2) = E(X^2) - 2EX\,EX + (EX)^2 = EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$,

каде што EX^2 се определува со формулата $EX^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_k^2 p_k$.

6 Да се определи дисперзијата на случајните променливи X и Y од задачата 5.

Решение:

- Во задачата 5 најдовме $EX = EY = 9,5$. Сега,

$$EX^2 = 8^2 \cdot 0,1 + 9^2 \cdot 0,3 + 10^2 \cdot 0,6 = 90,7; \qquad EY^2 = 8^2 \cdot 0,2 + 9^2 \cdot 0,1 + 10^2 \cdot 0,7 = 90,9.$$

За дисперзиите на двете случајни променливи се добива:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 90,7 - 9,5^2 = 0,45; \qquad DY = EY^2 - (EY)^2 = 90,9 - 9,5^2 = 0,65.$$

Бидејќи, $DX < DY$, може да се заклучи дека распределбата на поените на првиот играч е похомогена отколку распределбата на поените на вториот играч.

7 Да се определи дисперзијата на индикаторот на настанот A.

Решение:

- Индикаторот на настанот A е зададен со $I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ и определивме дека неговото математичко очекување е $EI_A = p$. За EI_A^2 добиваме $EI_A^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$.

Сега, $DI_A = EI^2 - (EI_A)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$.

8 Случајната променлива X означува оценка по математика во IV^1, а случајната променлива Y – оценка по математика во IV^2. Законите на распределба на случајните променливи X и Y се следните: $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$, $Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,1 & 0,15 & 0,3 & 0,15 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Определи ги средните оценки по математика во двата класа. Во случај да се еднакви, определи во кој од двата класа распределбата на оценките е похомогена.

Решение:

- За средните оценки на двата класа добиваме:

$EX = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 = 3,4$ и $EY = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,3 = 3,4$.

Значи, средните оценки на двата класа се еднакви. За EX^2 и EY^2 добиваме:

$EX^2 = 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,2 = 13$ и

$EY^2 = 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,15 + 3^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,15 + 5^2 \cdot 0,3 = 13,3$. Сега,

$DX = EX^2 - (EX)^2 = 13 - 3,4^2 = 1,44$ и $DY = EY^2 - (EY)^2 = 13,3 - 3,4^2 = 1,74$.

Бидејќи $DX < DY$, може да се заклучи дека распределбата на оценките во IV^1 е похомогена од онаа во IV^2.

Запомни!

Дисперзијата ги има следните својства:

1. $DX \geq 0$; $DX = 0$ ако и само ако $P\{X = \text{const}\} = 1$.
2. $D(cX) = c^2DX$, за дадена константа c.
3. Ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш
$$D(X + Y) = DX + DY.$$
4. Ако $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се независни случајни променливи, тогаш
$$D(c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n) = c_1^2D(X_1) + c_2^2D(X_2) + \ldots + c_n^2D(X_n).$$

9 Нека X и Y се независните случајни променливи зададени во задачата 3. Да се определи дисперзијата на $X + Y$.

Решение:

$EX^2 = 1^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,3 = 10,6$ и $EY^2 = 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,7 = 3,1$. За дисперзијата на двете случајни променливи се добива $DX = EX^2 - (EX)^2 = 10,6 - 2,8^2 = 2,76$ и $DY = EY^2 - (EY)^2 = 3,1 - 1,7^2 = 0,21$. На крајот, од независноста на X и Y и со примена на својството 3, наоѓаме дека
$$D(X + Y) = DX + DY = 2,76 + 0,21 = 2,97.$$

Задачи:

1 Распределбата на случајната променлива X – оценка по математика во еден клас е следната: $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,1 & 0,15 & 0,3 & 0,3 & 0,15 \end{pmatrix}$. Да се определи средната оценка по математика во класот и дисперзијата на таа оценка.

2 Распределбата на случајната променлива Y – број на членови во едно домаќинство во Скопје е следната: $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0,237 & 0,317 & 0,178 & 0,157 & 0,07 & 0,026 & 0,015 \end{pmatrix}$. Да се определи средниот број на членови во едно домаќинство во Скопје и соодветната дисперзија.

3 Еден стрелец ја погодува целта со веројатност $p = 0,8$ во секое стрелање. Тој има 4 куршуми и стрела сѐ додека не ја погоди целта или додека не ги потроши сите куршуми. Да се определи:

а) распределбата на случајната променлива X – број на стрелања на целта;

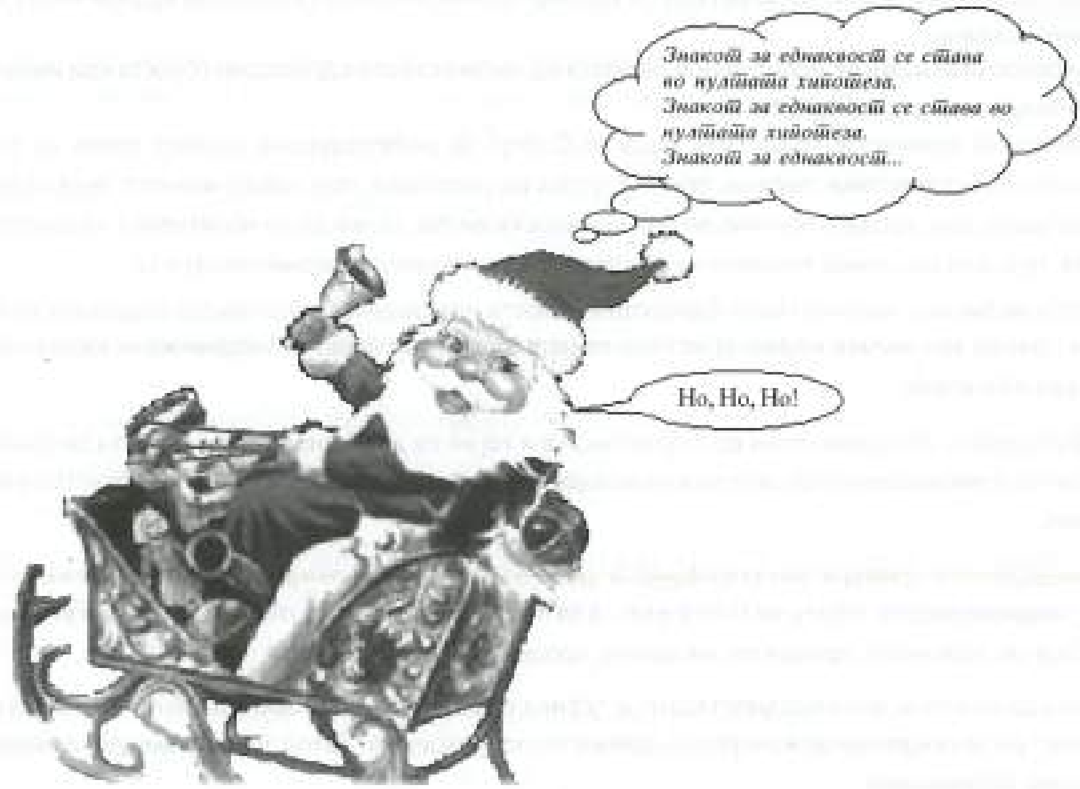
б) EX и EY.

4 Се фрлаат две коцки за играње. Да се определи очекуваниот збир на точките на двете коцки и неговата дисперзија.

ТЕМА 5

СТАТИСТИКА

Во оваа тема ќе учиш за:



1 ПОПУЛАЦИЈА, ОБЕЛЕЖЈЕ, ПРИМЕРОК. СТАТИСТИКИ

Потсети се!

- Случајните променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се независни, ако за произволни вредности $x_i \in R_{X_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, случајните настани $\{X_1 = x_1\}, \{X_2 = x_2\}, \ldots, \{X_n = x_n\}$ се независни во целина. Односно,

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\} \cdot P\{X_2 = x_2\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n = x_n\}, \text{ за сите } x_i \in R_{X_i}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

А

- Математичката статистика е наука која во себе вклучува три типа на активности:

1. собирање на статистички податоци;
2. проучување на тие статистички податоци;
3. разработка на општи методи и правила за собирање на статистички податоци, за нивно проучување, добивање на веродостојни резултати и решенија кои се научно засновани.

Предмет на математичката статистика се третиот тип на активности со кој се врзани многу теориски и практични задачи.

- При секое статистичко испитување се поаѓа од множеството еднородни објекти кои имаат една или повеќе заеднички карактеристики.

На пример, на множеството од сите деца во Скопје на десетгодишна возраст може да се испитаат следните карактеристики: висина, тежина, успех на училиште, пол, националност, боја на очи и сл. На множеството, пак, грозје откупено во една винарска визба, може да се испитуваат карактеристиките: тежина, процент на шеќер, процент на алкохол (ако почнало да ферментира) и сл.

- Во статистиката, множеството еднородни објекти или резултати од некоја операција кои имаат една или повеќе заеднички карактеристики се нарекува ***популација***. Заедничката карактеристика се нарекува ***обележје***.

- Популацијата е основен поим во статистиката и тој не се дефинира. Популацијата се означува со Ω, бидејќи тоа е множеството од сите можни исходи во врска со еден експеримент (множество елементарни настани).

- Во наведените примери, за популацијата "деца во Скопје", обележја се: висината, тежината, успехот, полот, националноста, бојата на очите и сл., а за популацијата "грозје откупено во една винарска визба", обележја се: тежината, процентот на шеќер, процентот на алкохол итн.

- Може да се воочи дека вредноста што ја добива обележјето е променлива величина и таа не може со сигурност да се предвиди за конкретна единка од популацијата. Затоа, ќе сметаме дека секое обележје е случајна променлива.

- Најчесто, при решавање на практични проблеми, распределбата на обележјето не е однапред позната. Оттука, целта на статистиката е со користење на одредени методи да се определи таа распределба или да се најдат нејзините карактеристики, да се оценат некои параметри и сл.

Обележјата може да бидат квалитативни или квантитативни. Вредностите на квантитативното обележје се реални броеви. Квантитативни обележја се: висина, тежина, успех (кај популацијата ученици), или процент на шеќер, тежина и сл. (кај популацијата откупено грозје). Квалитативни обележја се полот, националноста, бојата на очите и сл.

Квантитативните обележја може да бидат дискретни и непрекинати, исто како што може да бидат и случајните променливи.

Б Најчесто, при вршење на статистички испитувања, невозможно е да се испитаат сите елементи од популацијата. Се случува испитувањата да траат долго, да бидат поврзани со трошење на големи финансиски средства или, уште повеќе, при испитување на одредени објекти да дојде до нивно уништување.

Затоа, се избира дел од популацијата на кој се вршат сите испитувања и притоа треба да се донесат заклучоци кои ќе важат за целата популација со одредена веројатност.

Запомни!

Делот од популацијата на кој се вршат потребните испитувања се вика ***примерок***.
Бројот на елементите во примерокот се вика ***обем на примерокот***.

Заклучоците кои ќе се донесат врз основа на примерокот треба да важат за целата популација. За да се постигне тоа, потребно е примерокот да биде ***репрезентативен***, т.е. да претставува мини-модел на популацијата. За да се постигне тоа, потребно е секој елемент од популацијата да има еднакви шанси да влезе во примерокот. Значи, изборот на секој елемент треба да биде независен и случаен.

Запомни!

Примерокот кој се добива со низа независни и еднакви експерименти се нарекува ***прост случаен примерок***.

Отстапувањето од принципот на случаен избор може да доведе до сериозни грешки. Да го разгледаме следниот реален пример.

1 Американското списание "Литературен зборник" спровело анкета за испитување на јавното мислење околу претстојните претседателски избори во САД во 1936 година. Кандидати биле Ф. Рузвелт и А. Лендон. За избор на примерок, списанието го употребило телефонскиот именик. Биле избрани 4 милиони адреси и на сите им била испратена анкета со прашања околу кандидатите. Списанието потрошило големи финансиски средства за испраќањето на картичките и обработката на податоците и објавило дека за претседател ќе биде избран А. Лендон. Резултатот од изборите потврдил дека прогнозата била погрешна. Каде било згрешено?

Одговор:

- Во овој случај, направени се две грешки. Прво, во тој период на владеење на економска криза, телефони имале само најбогатите. Второ, на анкетата одговориле најмногу деловните луѓе, кои, всушност, имале навика да одговараат на писма, а сите тие го поддржувале Лендон.
- Од друга страна, двајца социолози, околу истото прашање, направиле анкета со 4 илјади испитаници и дошле до вистинскиот одговор. Причина за тоа е што тие не само што правилно го составиле примерокот, туку тргнале од тоа што општеството е составено од различни социјални слоеви и најголем дел од припадниците на еден слој поддржуваат ист кандидат. Така, со помош на проучувањето по социјалните слоеви биле донесени заклучоци кои важат за целата држава.
- Денес, слични вакви методи за донесување заклучоци се општоприфатени.

В Нека за дадена популација се набљудува обележјето X. Нека X_1 е вредноста на X во првото изведување на експериментот. Јасно, X_1 е една случајна променлива. Потоа, нека X_2 е случајната променлива – вредност на X при второто изведување на експериментот итн., X_n – вредност на X при n – тото изведување на експериментот. На таков начин е добиен прост случаен примерок $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Запомни!

Низата независни и еднакво распределени случајни променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се вика ***случаен примерок*** за обележјето X.
Кога случајните променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ќе добијат конкретни вредности од популацијата, тогаш се добива една ***реализација на случајниот примерок***.

- Така, ако x_i е вредност на случајната променлива X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, тогаш $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е една реализација на случајниот примерок $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

2 Нека X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 е случаен примерок со обем 5 за обележјето X – висина на учениците на десетгодишна возраст во Скопје. Ако случајно се изберат 5 такви ученици и се измери нивната висина, тогаш ќе се добие една реализација на примерокот. На пример, 102, 104, 99, 95, 110 е една реализација на примерокот, 115, 110, 97, 99, 104 е друга конкретна реализација на примерокот врз основа на 5 други случајни избори и сл.

Г При теориски изучувања и донесување на теориски заклучоци, во статистиката се користи случаен примерок $X_1, X_2, \ldots, X_n$, а при практични задачи се работи со конкретна реализација на примерокот.

- Во голем број методи во статистиката се користат функции од примерокот кои се, исто така, случајни променливи. Тие функции ќе ги нарекуваме статистики.

Запомни!

Статистика е функција од случајниот примерок $X_1, X_2, \ldots, X_n$ за обележјето X.
При конкретна реализација $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на примерокот, статистиката ќе добие една конкретна вредност која ќе ја викаме ***реализација на статистиката***.

3 Нека X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 е случаен примерок за обележјето X – висина на учениците во Скопје на возраст од 10 години. Тогаш функцијата $U = \dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5}$ е една функција од примерокот, т.е. статистика. Ако земеме една реализација на примерокот, на пример, $102,\ 104,\ 99,\ 95,\ 110$, тогаш ќе добиеме една вредност (реализација) на статистиката U.

Имено, $u = \dfrac{102+104+99+95+110}{5} = 102$ и во конкретниот случај, претставува аритметичка средина на висините од реализираниот примерок.

Задачи:

1. Да ја разгледаме популацијата сијалици произведени во еден ден во една фабрика. Наведи кои од следните обележја се квалитативни, а кои квантитативни: јачина на сијалицата, боја, исправност, големина (во cm) и тежина.

2. Дадена е популацијата $\Omega = \{2, 3, 4, 5\}$. Кои се сите можни примероци со обем 2 кои може да бидат извлечени со враќање од таа популација?

3. Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ е даден случаен примерок, а $Y = \dfrac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)$ е дадена статистика.

   а) Да се пресмета реализацијата y на статистиката Y, ако е даден следниот реализиран примерок:

   $$1 \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 5 \quad 1$$

   б) Што е разликата помеѓу Y и y?

2 ХИПОТЕЗИ И ГРЕШКИ

Потсети се!

- Статистика е функција од случајниот примерок $X_1, X_2, \ldots, X_n$ за обележјето X. При конкретна реализација $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на примерокот, статистиката добива една конкретна вредност која ја викаме реализација на статистиката.

А Како што е кажано порано, најголем број од проблемите во статистиката се сведуваат на определување на непознатата распределба на обележјето или определување на бројните карактеристики, оценување на некои непознати параметри за обележјето и сл. Во поголем број случаи, определувањето на овие карактеристики се врши со задавање на некои претпоставки чија точност, потоа, треба да се провери, т.е. тестира.

1 Една фабрика за чоколади откупува млеко од приватните производители. Вработените во фабриката се сомневаат дека производителите додаваат вода во млекото со цел да го зголемат својот профит. Вишокот на вода во млекото може да се открие со определување на температурата на замрзнување на млекото. Точката на замрзнување на природното млеко (без додадена вода) е просечно околу $-0{,}5°\mathrm{C}$, но ако се додаде вода, млекото замрзнува на повисока температура од $-0{,}5°\mathrm{C}$. Во овој случај, интересот на фабриката е да покаже дека во млекото има додадено вода. Затоа, се формира еден случаен примерок со земање на мостри од неколку случајно избрани канти млеко од еден производител и се проверува точката на замрзнување на млекото. Врз основа на добиените резултати треба да се спроведе еден статистички тест во кој треба да се одлучи дали претпоставката (хипотезата) за додавање на вода во млекото ќе се прифати или ќе се отфрли.

Запомни!

Секоја претпоставка за популацијата, за распределбата на некое нејзино обележје, за вредностите на некои параметри на обележјето и сл. се вика ***статистичка хипотеза***.
Постапката со која се проверува точноста на поставената хипотеза врз основа на податоците од даден примерок се нарекува ***статистички тест***.

2 Постапката за тестирање на статистички хипотези е многу слична на постапката за донесување на судска пресуда. Имено, кога некој е обвинет за кражба, судот смета дека е невин, сè додека не се докаже дека е виновен. Обвинителот собира докази и ги презентира во судот, со цел да ја оспори претпоставката "не е виновен" и обвинетиот да биде осуден. Меѓутоа, ако обвинението не успее да ја оспори претпоставката "не е виновен", тогаш не е покажано дека обвинетиот е невин, туку нема доволно докази за тој да се прогласи за виновен.

Како што може да се види од претходните два примери, постапката на тестирање се сведува на одлучување за една од две хипотези кои се исклучуваат една со друга. Имено, ако едната се прифати, другата автоматски се отфрла, и обратно. Така, во првиот пример, една претпоставка е дека во млекото нема додадено вода, а втората претпоставка е спротивната: во млекото има додадено вода. Во примерот со судот, двете спротивни претпоставки се дека обвинетиот е виновен и дека не е виновен.

Запомни!

Хипотезата која се тестира се нарекува ***нулта хипотеза*** и се означува со H_0, а спротивната се нарекува ***алтернативна хипотеза*** и се означува со H_a.
За нулта хипотеза обично се избира онаа во која се зададени некои стандарди за конкретната карактеристика или вредностите кои биле актуелни до последното мерење.

Така во примерот 1, стандардите покажуваат дека точката на замрзнување на природното млеко е $-0{,}5°C$, па ќе избереме нултата хипотеза да е од облик:

$$H_0: t = -0{,}5,$$

а проверуваме дали температурата на замрзнување на млекото од производителите е поголема од $-0{,}5°C$, па затоа алтернативната хипотеза ќе биде од облик:

$$H_a: t > -0{,}5.$$

Скоро во секоја ситуација се поставува прашање како да се избере алтернативната хипотеза. Експлицитен одговор на ова прашање кој ќе важи за секој проблем, не постои. Што ќе се избере за алтернативна хипотеза, секогаш зависи од конкретната задача. Така, во примерот 1, покрај дадената алтернативна хипотеза постојат уште две можни. Тоа се: $H_a:\ t < -0{,}5$ и $H_a:\ t \neq -0{,}5$. Во овој случај, се определивме за првонаведената хипотеза ($H_a:\ t > -0{,}5$), бидејќи случајот $t < -0{,}5$, оди во прилог на нултата хипотеза. Имено, ако точката на замрзнување на млекото е помала од стандардната, тогаш млекото содржи помалку вода, па е погусто и не ги нарушува стандардите.

3 Во една млекара се произведува јогурт чија масленост треба да е 3 единици. За да се провери дали една серија ја поседува бараната масленост, се избира примерок од неколку пакувања јогурт и се мери маслеността. Во овој случај, би можело да се тестира нултата хипотеза:

$$H_0:\ a = 3,$$

наспроти алтернативната $H_a:\ a \neq 3$. Се одлучуваме за оваа алтернативна хипотеза, бидејќи ако алтернативна хипотеза е $H_a:\ a < 3$, и ако таа помине како точна, тоа би значело дека маслеността е помала од тоа што е пропишано (со што би биле измамени потрошувачите), а ако алтернативна хипотеза е $H_a:\ a > 3$ и ако таа помине како точна, тогаш млекарата би била во загуба.

- Во примерот 3, алтернативната хипотеза е $H_a:\ a \neq 3$. За ваквиот тест велиме е ***двостран***. Ако се избере алтернативната хипотеза $H_a:\ a < 3$ или $H_a:\ a > 3$, тогаш тестот е ***едностран***.
- Да претпоставиме дека распределбата на едно обележје X зависи од еден непознат параметар b, а сите останати параметри на таа распределба се познати. Нека хипотезата која се поставува за да се определи вредноста на непознатиот параметар, е од облик $H_0:\ b = b_0$, каде што b_0 е фиксен реален број. Ваквите хипотези во кои се јавува само една вредност на непознатиот параметар се нарекуваат ***прости хипотези***.
- Ако, пак, се постави хипотеза од облик $H : b > b_0$ (хипотезата H може да биде или нулта или алтернативна), тогаш параметарот b може да прими повеќе вредности, т.е. $b \in (b_0, \infty)$. Хипотезата со која за параметарот се допуштени повеќе вредности се нарекува ***сложена хипотеза***. Сложени се и хипотезите од обликот $H : b < b_0$ или $H : b \neq b_0$.
- Во практични примери може да се тестира проста наспроти проста хипотеза, проста наспроти сложена или сложена наспроти сложена хипотеза.

4 Составот на една кутија во која има 20 топчиња не е наполно познат. Да ги дефинираме следните хипотези:

H_0: во кутијата има 6 црвени и 14 бели;

H_a: во кутијата има 5 црвени и 15 бели топчиња.

Во овој случај имаме проста наспроти проста хипотеза, бидејќи ако сметаме дека параметарот е бројот на црвени топчиња, тогаш тој е еднозначно зададен и во нултата и во алтернативната хипотеза. Да воочиме дека ако е познат бројот на црвени топчиња, тогаш бројот на бели топиња во кутијата е наполно определен. Но, ако хипотезите се дефинираат на следниот начин:

H_0: во кутијата има 6 црвени и 14 бели;

H_a: во кутијата има повеќе од 5 црвени топчиња;

тогаш алтернативната хипотеза е сложена. Имено, бројот на црвени топчиња може да биде 6, …,20, т.е. постојат повеќе вредности за разгледуваниот параметар.

Во процесот на тестирање на една хипотеза, одлуката дали таа ќе се прифати или ќе се отфрли, се донесува врз основа на податоците од еден примерок. Бидејќи станува збор за случаен примерок, постои можност одлуките кои ги донесуваме да бидат донесени со некоја грешка.

Запомни!

Отфрлањето на нултата хипотеза кога таа е точна се вика ***грешка од прв тип***. Нејзината веројатност се вика ***веројатност на грешка од прв тип*** и се означува со α.
Прифаќањето на нултата хипотеза кога таа е неточна се вика ***грешка до втор тип***.
Нејзината веројатност се вика ***веројатност на грешка од втор тип*** и се означува со β.

Двете можности за нултата хипотеза (точна или неточна) и двете можни одлуки кои може да ги донесе оној кој го спроведува тестирањето може да се претставaт во една дводимензионална табела.

Одлука	Нулта хипотеза H_0	
	точна	неточна
H_0 се отфрла	грешка од прв тип	правилна одлука
H_0 се прифаќа	правилна одлука	грешка од втор тип

5 Познато е дека во една кутија се наоѓаат 10 топчиња, но не е сигурно дали се: 6 црвени и 4 зелени или се 5 црвени и 5 зелени. Затоа се дефинираат следните хипотези:

H_0: во кутијата има 6 црвени и 4 зелени;

H_a: во кутијата има 5 црвени и 5 зелени топчиња.

Се дефинира следното правило за тестирање:

1) хипотезата H_0 не се отфрла ако и само ако се извлече црвено топче;
2) во спротивно H_0 се отфрла.

Да се определат веројатностите на грешка од прв и втор тип.

Решение:

Грешка од прв тип ќе се појави ако се отфрли нултата хипотеза кога таа е точна. Ако H_0 е точна, тогаш во кутијата има 6 црвени и 4 зелени топчиња. Хипотезата ќе ја отфрлиме ако се извлече зелено топче, а веројатноста тоа да се случи е $4/10 = 0{,}4$. Оттука,

$$\alpha = P\{\text{извлечено е зелено топче} \mid H_0 \text{ е точна}\} = 0{,}4.$$

Грешка до втор тип ќе се појави ако нултата хипотеза се прифати, ако не е точна, т.е. ако е точна алтернативната. Во тој случај, во кутијата има 5 црвени и 5 зелени топчиња. Нултата хипотеза ќе се прифати ако се извлече црвено топче. Веројатноста ова да се случи, при овој состав на кутијата, е $5/10 = 0{,}5$, значи

$$\beta = P\{\text{извлечено е црвено топче} \mid H_a \text{ е точна}\} = 0{,}5.$$

Целта на секој статистички тест е двата типа на грешки да бидат што е можно помали. Притоа, ако α се намалува, т.е. ако се намалува веројатноста нултата хипотеза да биде отфрлена кога е точна, тогаш се зголемува веројатноста да биде прифатена кога е неточна, т.е. се зголемува β, и обратно. Затоа, обично, се задава максимална дозволена вредност за α и се избира критериум со кој за избраната вредност за α, се обезбедува најмала вредност за β.

Запомни!

Најголемата дозволена веројатност на грешка од прв тип се вика ***ниво на значајност на тестот***.

Најчесто, се избира $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$. Изборот $\alpha = 0{,}05$, т.е. изборот веројатноста да ја отфрлиме нултата хипотеза кога таа е точна да е $0{,}05$, го покажува следното. Нека тестот се повторува повеќе пати. Секое повторување на тестот ќе го сметаме за обид да се најде доказ дека нултата хипотеза е неточна. Ако $\alpha = 0{,}05$, тогаш може да се смета дека таков доказ ќе се најде во најмногу 5% од обидите, ако нултата хипотеза е точна. Ако, пак, $\alpha = 0{,}01$, тоа значи дека при повторување на тестот повеќе пати, нултата хипотеза нема да се прифати во најмногу 1% од случаите, ако таа е точна.

Ако се вратиме на споредбата со судскиот процес, $\alpha = 0{,}05$, означува дека најмногу 5% од доказите ќе бидат против обвинетиот (во овој случај, против нултата хипотеза која гласи "обвинетиот не е виновен"), останатите 95% ќе бидат во негова корист, во случај кога тој не е виновен.

Запомни!

Веројатноста да се отфрли нултата хипотеза кога таа е неточна се нарекува ***моќ на тестот*** и се означува со p.

Ако хипотезата е неточна, таа може да се прифати или да се отфрли. Веројатноста да се прифати, ако е неточна е β, а веројатноста да се отфрли кога е неточна е p. Оттука,

$$p + \beta = 1, \qquad \text{т.е.} \qquad p = 1 - \beta.$$

6 Во една кутија има 10 топчиња. Се тестира нултата хипотеза

H_0: во кутијата има 2 црвени и 8 бели топчиња,

наспроти алтернативната

H_a: во кутијата има 4 црвени и 6 бели топчиња.

Се извлекуваат две топчиња без враќање и се усвојува следното правило за тестирање:

1) H_0 се отфрла, ако двете извлечени топчиња се црвени;
2) во спротивно, H_0 се прифаќа.

Да се определат веројатностите на грешка од прв и втор тип и моќта на тестот.

Решение:

Да ги означиме следните настани:

A_i: во i – тото извлекување е добиено црвено топче, $i = 1, 2$.

Грешка од прв тип ќе се појави, ако се отфрли нултата хипотеза кога таа е точна. Ако нултата хипотеза е точна, во кутијата има 2 црвени и 8 бели топчиња, а таа ќе се отфрли ако се извлечат две црвени топчиња, т.е. ако се појави настанот A_1A_2. За неговата веројатност се добива:

$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{45}$. Оттука, веројатноста на грешка од прв тип е $\alpha = 1/45$.

Грешката од втор тип ќе се појави ако се прифати нултата хипотеза кога не е точна. Ако нултата хипотеза не е точна, тогаш е точна алтернативната, т.е. во кутијата има 4 црвени и 6 бели топчиња.

Нултата хипотеза ќе се прифати ако од кутијата, со ваков состав, не се извлечат две црвени топчиња, т.е. ако се извлече најмногу едно црвено топче. Всушност, овој настан е спротивен на настанот A_1A_2, кој означува дека во двете извлекувања е добиено црвено топче. Сега,

$$P(\overline{A_1A_2})=1-P(A_1A_2)=1-P(A_1)P(A_2\mid A_1)=1-\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{13}{15}.$$

Значи, $\beta=13/15$, па моќта на тестот ќе биде $p=1-\beta=2/15$.

Следен чекор во постапката на тестирање на нултата хипотеза е изборот на ***тест статистика*** Z. Тој избор зависи од хипотезата која ја тестираме. На конкретни видови тест статистики ќе се задржиме во наредните лекции кога ќе тестираме конкретни хипотези.

Претпоследен чекор во еден статистички тест е определувањето на критичниот домен. Тоа е, всушност, област на отфрлање на нултата хипотеза. Имено, реалната оска е поделена на две подобласти: област на прифаќање на нултата хипотеза и област на нејзино отфрлање (***критичен домен***). Критичниот домен ќе го означуваме со C и тој се избира така што веројатноста тест статистиката Z да прими вредност која припаѓа во тој критичен домен, ако нултата хипотеза е точна, е најмногу α, т.е.

$$P\{Z\in C\mid H_0 \text{ е точна}\}\leq\alpha.$$

Како што е претходно кажано, најчесто се настојува за дадена веројатност на грешка од прв тип α, да се определи минималната вредност на грешката од втор тип β. Критичниот домен за кој тоа е исполнето се нарекува ***оптимален критичен домен*** или ***најмоќен критичен домен***. Значи, ако C^* е најмоќен критичен домен, тогаш за секој друг критичен домен C важи:

$$P\{Z\notin C^*\mid H_a \text{ е точна}\}\leq P\{Z\notin C\mid H_a \text{ е точна}\}.$$

7 Во една кутија се наоѓаат 8 топчиња од кои некои се бели, а останатите се црни. Точниот состав на топчињата не е познат, па затоа се поставуваат следните хипотези:

H_0: во кутијата има 4 бели и 4 црни топчиња,

H_a: во кутијата има 2 бели и 6 црни топчиња.

За да се утврди која од хипотезите е точна, од кутијата се извлекува 3 пати по едно топче со враќање. За дадено ниво на значајност $\alpha=0{,}1$, да се утврди најмоќен критичен домен за тестирање на поставената хипотеза.

Решение:

Критериумот за прифаќање или не на нултата хипотеза, треба да зависи од бројот на извлечени бели топчиња во трите изведени извлекувања. Затоа, за тест статистика ќе ја избереме Z која означува токму број на извлечени бели топчиња. Јасно е дека множеството вредности на Z е $R_Z=\{0,1,2,3\}$. Ако нултата хипотеза е точна, тогаш веројатноста да се извлече бело топче е $4/8=1/2$, што значи дека случајната променлива Z ќе има биномна распределба, $Z\sim B(3,1/2)$. Ако, пак, алтернативната хипотеза е точна, тогаш веројатноста да се добие бело топче при едно извлекување е $2/8=1/4$ и $Z\sim B(3,1/4)$. Значи, се тестира нултата хипотеза H_0: $Z\sim B(3,1/2)$ наспроти алтернативната H_a: $Z\sim B(3,1/4)$. Да определиме критичен домен за тестирање на ваквите хипотези, при ниво на значајност $\alpha=0{,}1$. Тоа ќе го направиме од следниот услов:

$$P\{Z\in C\mid H_0 \text{ е точна}\}\leq\alpha.$$

Ако H_0 е точна, тогаш распределбата на Z е определена со:

$$P\{Z=k\}=\binom{4}{k}\frac{1}{2^4}, \text{ за } k=0,1,2,3,4, \quad \text{или}$$

$$Z:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}0625 & 0{,}25 & 0{,}375 & 0{,}25 & 0{,}0625 \end{pmatrix}$$

Ги бараме оние подмножества од множеството вредности на Z, за кои важи $P\{Z\in C \mid H_0 \text{ е точна}\}\leq 0{,}1$. Очигледно е дека тоа се само едноелементните множества $C_1=\{0\}$ и $C_2=\{4\}$, бидејќи $P\{Z=0\}=P\{Z=4\}=0{,}0625<0{,}1$, а веројатноста Z да припаѓа на кое било друго множество ќе биде поголема од $0{,}1$.

Оттука може да се заклучи дека C_1 и C_2 може да се сметаат за критични домени при тестирање на дадената хипотеза. Од нив подобар критичен домен е оној за кој веројатноста на грешка од втор вид е помала, т.е. помала е веројатноста да се прифати нултата хипотеза, ако е точна алтернативната.

Ако H_a е точна, тогаш $Z\sim B(3,1/4)$, односно:

$$P\{Z=k\}=\binom{4}{k}\frac{1}{4^k}\left(\frac{3}{4}\right)^{4-k}, \text{ за } k=0,1,2,3,4 \quad \text{т.е.}$$

$$Z:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 81/256 & 108/256 & 54/256 & 12/256 & 1/256 \end{pmatrix}.$$

Сега, $\beta_1=P\{Z\notin C_1 \mid H_a \text{ е точна}\}=P\{Z\in\{1,2,3,4\} \mid H_a \text{ е точна}\}=\frac{108}{256}+\frac{54}{256}+\frac{12}{256}+\frac{1}{256}=\frac{175}{256}=0{,}68.$

Од друга страна,

$$\beta_2=P\{Z\notin C_2 \mid H_a \text{ е точна}\}=P\{Z\in\{0,1,2,3\} \mid H_a \text{ е точна}\}=\frac{81}{256}+\frac{108}{256}+\frac{54}{256}+\frac{12}{256}=\frac{255}{256}=0{,}99.$$

Бидејќи $\beta_1<\beta_2$, заклучуваме дека C_1 е подобар критичен домен од C_2, т.е. C_1 е најмоќен критичен домен. Притоа, веројатноста на грешка од втор тип е многу голема, $\beta_1=0{,}68$, но таа може да се намали, ако се зголемува бројот на изведени експерименти.

- Постојат методи за определување на најмоќен критичен домен за тестирање на една хипотеза, но овде нема да се задржуваме на објаснување на тие методи, пред сè заради потребата од поголеми теориски предзнаења.
- На крајот се пресметува вредноста z на тест статистика Z врз основа на даден примерок и се проверува дали таа припаѓа на определениот критичен домен. Ако $z\in C$, тогаш нултата хипотеза се отфрла како неточна, во спротивно нултата хипотеза не се отфрла, т.е. се прифаќа како точна.
- Од претходно изнесеното, може да се даде следниот алгоритам за тестирање на статистички хипотези.

Запомни!

1. Се поставуваат нултата хипотеза H_0 и алтернативната хипотеза H_a.
2. Се определува најголемото дозволено ниво на грешка од прв вид α, т.е. се определува нивото на значајност на тестот.
3. Се определува тест статистика Z за конкретниот статистички тест и се пресметува нејзината вредност z за конкретна реализација на случајниот примерок.
4. Се определува критичен домен C, така што $P\{Z \in C \mid H_0$ е точна$\} \leq \alpha$.
5. Се проверува дали пресметаната вредност z на тест статистиката Z припаѓа на критичниот домен или не. Ако $z \in C$, тогаш нултата хипотеза се отфрла како неточна, во спротивно, таа се прифаќа како точна.

Задачи:

(1) Страните на еден тетраедар се нумерирани со броевите 1,2,3,4. Играта се состои во фрлање на тетраедарот и набљудување на бројот на страната со која тетраедарот лежи на површината. Забележано е дека страната со бројот 1 се јавува во 1/2 од изведените експерименти, страната 2 во 1/4 од случаите, а секоја од страните 3 и 4 во 1/8 од случаите. Ги поставуваме следните хипотези:

H_0: тетраедарот е хомоген, т.е. сите страни имаат еднаква веројатност да се појават,

H_a: тетраедарот не е хомоген и страните се појавуваат според горенаведената законитост.

Тетраедарот се фрла три пати. Се предлага следниот критериум за тестирање:

1) ако трипати се појави бројот 1, тогаш хипотезата H_0 се отфрла;

2) во спротивно, H_0 се прифаќа.

Да се определат веројатностите на грешка од прв и втор тип и моќноста на тестот.

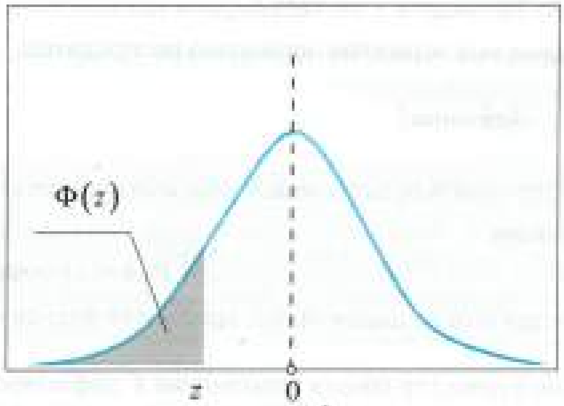
3 ЧИТАЊЕ ОД ТАБЛИЦИ ЗА НОРМАЛНА РАСПРЕДЕЛБА, t – РАСПРЕДЕЛБА И χ^2 – РАСПРЕДЕЛБА

Во статистичките тестови кои понатаму ќе ги разгледуваме се јавува потреба од читање на вредности од таблици за нормална распределба, t – распределба и χ^2 (хи-квадрат) – распределба. Затоа, во овој дел ќе објасниме како се чита од тие таблици.

А Таблица за нормална распределба е Таблицата 1 дадена на крајот од учебникот. Во неа, за дадена вредност на $z \in \mathbb{R}$, може да се прочита вредноста $\Phi(z)$, која претставува плоштина на фигурата дадена на црт. 1. Ако $z=1,35$, во првата колона на Таблицата 1 се бара 1,3, а во првата редица се бара 0,05. Пресекот на соодветната редица и колона ја дава вредноста на $\Phi(1,35)$. Наоѓаме дека $\Phi(1,35)=0,9115$. Соодветно, $\Phi(-2,34)=0,0096$.

1 Определи ги $\Phi(-3{,}35)$, $\Phi(1{,}58)$, $\Phi(-1{,}78)$, $\Phi(2{,}35)$.

Функцијата која ја определува кривата на црт. 1, е дефинирана за сите $z \in \mathbb{R}$. Оваа функција го достигнува својот максимум за $z = 0$ и симетрична е во однос на y – оската. Плоштината на фигурата што кривата ја зафаќа со x – оската изнесува 1. Од симетричноста следува дека плоштината на делот од оваа фигура кој се наоѓа лево од правата $x = 0$ изнесува $1/2$, и соодветно делот десно од правата $x = 0$, има плоштината, исто така, $1/2$.



црт. 1

Кривата не ја допира x – оската, всушност, x – оската е нејзина асимптота. Меѓутоа, може да се смета дека целата плоштина на фигурата ограничена со кривата и x – оската е практично концентрирана помеѓу $-3{,}4$ и $3{,}4$. Имено, плоштината на делот од фигурата ограничена со кривата и x – оската лево од правата $x = -3{,}4$ и делот десно од правата $x = 3{,}4$, е приближно еднаков на 0. Оттука, ако $x < -3{,}4$, тогаш $\Phi(x) = 0$, а ако $x > 3{,}4$, тогаш $\Phi(x) = 1$.

Запомни!

1. За фиксна вредност на z, таква што $-3{,}4 \leq z \leq 3{,}4$, вредноста $\Phi(z)$, се чита од Таблицата 1 за нормална распределба, и таа вредност се наоѓа во пресекот на редицата, соодветна на целиот дел и првата децимала на z и колоната соодветна на втората децимала на z.
2. $\Phi(z) = 0$, за $z < -3.4$.
3. $\Phi(z) = 1$, за $z > 3.4$.

Б Во некои случаи, потребно е да се спроведе обратната постапка. За дадена вредност на α, од Таблицата 1, да се прочита вредноста u_α, така што $\Phi(u_\alpha) = \alpha$. Тогаш во Таблицата 1, се бара вредноста α или вредноста што е најблиску до неа. Таа вредност лежи во пресекот на некоја редица и колона. Вредностите кои се наоѓаат на почетокот на соодветната редица и соодветната колона ја даваат вредноста на u_α.

2 Да се определат вредностите x, така што $\Phi(x) = 0{,}9564$ и $\Phi(x) = 0{,}8$.

Решение:

Најпрво во Таблицата 1, се бара вредноста 0,9564. Таа се наоѓа во пресекот на редицата соодветна на 1,7 и колоната соодветна на 0,01. Оттука, $x = u_{0{,}9564} = 1{,}71$. Во вториот случај, во Таблицата 1 се бара вредноста 0,8. Точно тој број не постои во оваа таблица, па затоа го бараме бројот кој е најблиску до 0,8. Тоа е бројот 0,7995 и е во пресекот на редицата 0,8 и колоната 0,04. Значи, $x = 0{,}84$.

В Во Таблицата 1 дадена на крајот од учебникот, табелирана е, всушност, распределбата на една случајна променлива која наоѓа голема примена во опишувањето на голем број појави во природата. Тоа е, всушност, случајната променлива со нормална распределба.

Во општ случај, нормалната распределба зависи од два параметри a и σ^2. Се пишува $X \sim N\left(a,\sigma^2\right)$, каде што $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Во Таблицата 1 се табелирани вредностите за случајна променлива $X \sim N(0,1)$, за која велиме дека има нормална нормирана распределба.

Запомни!

Случајната променлива X која има нормална нормирана распределба, е определена на следниот начин:

$$P\{X < z\} = \Phi(z), \quad \text{за секој } z \in \mathbb{R},$$

каде што за даден број z, вредноста $\Phi(z)$ се чита од Таблицата 1 за нормална распределба.

Јасно е дека случајната променлива X дефинирана на ваков начин не е дискретна случајна променлива, бидејќи ги прима сите вредности од $\mathbb{R}$. Но, тука нема да навлегуваме подлабоко во својствата на оваа случајна променлива. Битно е да се нагласи дека многу случајни променливи кои се јавуваат во реалниот живот, како на пример, висина, тежина и сл. имаат токму нормална распределба. Грешките што се јавуваат при мерења на некоја величина имаат, исто така, нормална распределба.

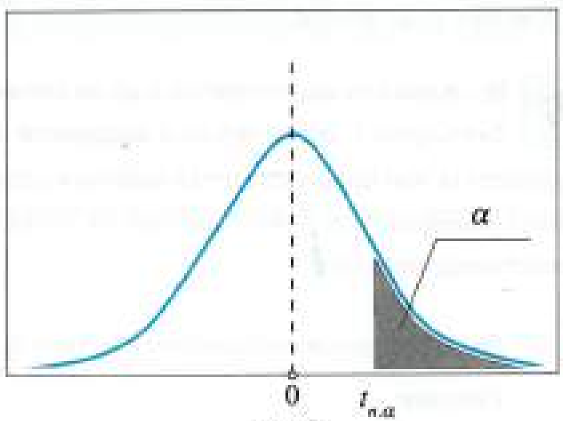
Г Таблица за $t-$ распределба е Таблицата 2 дадена на крајот од учебникот. Од оваа таблица, за дадени n и α, може да се прочита вредноста $t_{n,\alpha}$, каде n е природен број, а α е број помеѓу 0 и 1, т.е. $0 < \alpha < 1$.

Вредноста $t_{n,\alpha}$ се чита од пресекот на редицата во која се наоѓа соодветната вредност на n и колоната соодветна на бројот α. Вредност $t_{n,\alpha}$ е определена така што плоштината на фигурата дадена на црт. 2, е еднаква на α.

Исто како и кај нормална распределба, плоштината на фигурата ограничена со кривата и x – оската е 1.

На пример, $t_{15;0,01} = 2,602$ е број кој се наоѓа во редицата соодветна на $n = 15$ и колоната соодветна на $\alpha = 0,01$.

Кривата на црт. 2, зависи од n, т.е. е различна за различни вредности на n.



црт. 2

3 Определи $t_{9;0,05}$, $t_{5;0,02}$.

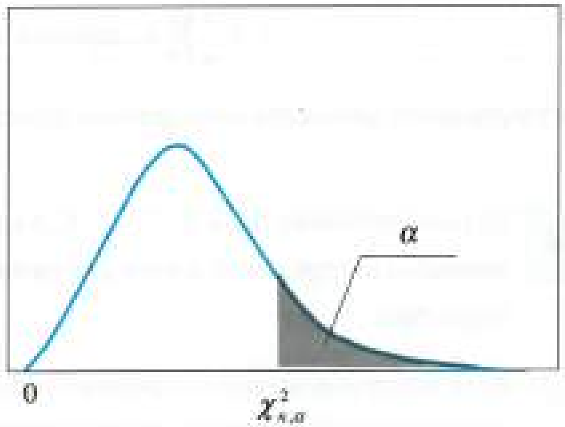
Г Таблица за χ^2- распределба е Таблицата 3 дадена на крајот од учебникот. Од оваа таблица, за дадени n и α, може да се прочита вредноста $\chi^2_{n,\alpha}$. Притоа, n е природен број, а α е број помеѓу 0 и 1, т.е. $0 < \alpha < 1$.

Слично како кај t – распределбата, вредноста се чита од пресекот на редицата во која се наоѓа соод-ветната вредност на n и колоната соодветна на бројот α.

Вредноста е определена така што плоштината на фигурата дадена на црт. 3, е еднаква на α.

И во овој случај, како и во претходните два, плоштината на фигурата ограничена со кривата и x-оската е 1.

Да нагласиме дека исто како и кај t-распределбата, кривата на црт. 3 зависи од n, т.е. за различна вредност на n се добива различна крива. Бројот n се нарекува ***степен на слобода*** кај χ^2 – распределбата.



црт. 3

Така, за $n = 15$ и $\alpha = 0{,}05$, вредноста $\chi^2_{15;0,05} = 32{,}80$.

4 Определи $\chi^2_{12;0,01}$, $\chi^2_{2;0,025}$.

Задачи:

1. Со користење на Таблицата 1 за нормална распределба, определи $\Phi(2{,}45)$, $\Phi(-2{,}95)$ и $\Phi(4{,}45)$.

2. Од Таблицата за нормална распределба, определи го x така што $\Phi(x) = 0{,}075$ и $\Phi(x) = 0{,}776$.

3. Од Таблицата 1 за t – распределба, определи $t_{12;\,0,02}$, $t_{20;\,0,05}$.

4. Од Таблицата 3 за χ^2 – распределба, определи $\chi^2_{15;0,05}$ и $\chi^2_{30;0,1}$.

4 ТЕСТОВИ ЗА ВРЕДНОСТ НА МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКУВАЊЕ ПРИ ПОЗНАТА ДИСПЕРЗИЈА

Потсети се!

Низата независни и еднакво распределени случајни променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се вика случаен примерок за обележјето X. Кога случајните променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ќе добијат конкретни вредности од популацијата, тогаш се добива една реализација на случајниот примерок.

Статистика е функција од случајниот примерок $X_1, X_2, \ldots, X_n$ за обележјето X. При конкретна реализација $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на примерокот, статистиката ќе добие една конкретна вредност која ќе ја викаме реализација на статистиката.

За произволна случајна променлива X и за произволна константа c, важи $D(cX) = c^2DX$.

Аритметичката средина $\overline{x}_n$, односно дисперзијата s_n^2 на еден реализиран примерок $x_1, x_2, ..., x_n$ се пресметува по формулата

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \text{ односно } s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_n\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}_n^2;$$

стандардната девијација е квадратен корен од дисперзијата: $s_n = \sqrt{s_n^2}$.

A Да претпоставиме дека $X_1, X_2, ..., X_n$ е случаен примерок со обем n за обележјето X кое има нормална распределба, и нека дисперзијата на X е позната, т.е. $DX = \sigma_0^2$, каде што $\sigma_0 > 0$ е даден број.

1 Да се потсетиме најпрво на примерот со фабриката за чоколади од лекцијата 2. Имено, фабриката откупува млеко од приватните производители. Вработените во фабриката се сомневаат дека производителите додаваат вода во млекото со цел да го зголемат својот профит. Вишокот на вода во млекото може да се открие со определување на температурата на замрзнување на млекото. Точката на замрзнување на природното млеко (без додадена вода) е просечно околу $-0{,}5°C$, но ако се додаде вода, млекото замрзнува на повисока температура од $-0{,}5°C$. Да се провери дали во млекото од случајно избран производител има додадено вода.

Во конкретниот случај, се разгледува обележјето X–точка на замрзнување на млекото и според стандардите очекуваната вредност на X, т.е. нејзиното математичко очекување $EX = -0{,}5$. Затоа, потребно е да се тестира хипотезата H_0: $EX = -0{,}5$, наспроти алтернативната H_a: $EX > -0{,}5$. Значи, треба да се спроведе тест за вредноста на математичкото очекување.

Зависно од алтернативната хипотеза, постојат 3 вида тестови за вредност на математичко очекување: два еднострани и еден двостран. Тоа се следните:

Тест I	Тест II	Тест III
$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX > a_0$	$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX < a_0$	$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX \neq a_0$

При позната дисперзија на обележјето, за тестирање на сите три видови хипотези, наведени погоре, се користи следната тест статистика:

$$U = \frac{\overline{X}_n - a_0}{\sigma_0}\sqrt{n},$$

каде што $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ е аритметичка средина на случајниот примерок $X_1, X_2, ..., X_n$. Да воочиме дека $\overline{X}_n$ е функција од примерокот $X_1, X_2, ..., X_n$, па $\overline{X}_n$ е една статистика.

За конкретна реализација $x_1, x_2, \dots, x_n$ на случајниот примерок $X_1, X_2, \dots, X_n$ се добива реализација на статистиката U:

$$u = \frac{\overline{x}_n - a_0}{\sigma_0}\sqrt{n},$$

каде што $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ е аритметичката средина на реализираниот примерок $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Да ја воочиме разликата помеѓу $\overline{X}_n$ и $\overline{x}_n$. Имено, $\overline{X}_n$ е статистика, значи е една случајна променлива, а $\overline{x}_n$ е број, кој претставува една вредност на случајната променлива $\overline{X}_n$.

Оправданоста за користење на овој тест се состои во следното. Најпрво ќе ги определиме математичкото очекување и дисперзијата на аритметичката средина $\overline{X}_n$ на примерокот. За математичкото очекување добиваме:

$$E\overline{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = EX,$$

бидејќи сите случајни променливи од примерокот $X_1, X_2, \dots, X_n$ се еднакво распределени како и обележјето X, па $EX_i = EX$, за секој $i = 1, 2, \dots, n$.

Исто така, $DX_i = DX = \sigma_0^{\,2}$, за секој $i = 1, 2, \dots, n$, а $X_1, X_2, \dots, X_n$ се независни случајни променливи. Ако се искористи сето тоа, за дисперзијата на $\overline{X}_n$ се добива:

$$D\overline{X}_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{nDX}{n^2} = \frac{\sigma_0^{\,2}}{n}.$$

Сега, ако е точна нултата хипотеза, т.е. ако $EX = a_0$, разликата $\overline{X}_n - a_0 = \overline{X}_n - EX$ е, всушност, добиеното отстапување на аритметичката средина на случајниот примерок од неговото математичко очекување. Од друга страна, очекуваното отстапување на аритметичката средина од нејзиното математичко очекување е $\sqrt{D\overline{X}_n} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$. Статистиката U е добиена како количник на овие две отстапувања и на некој начин ги споредува овие две отстапувања помеѓу себе.

Критичниот домен за тестирање на трите горенаведени хипотези зависи од алтернативната хипотеза. Облиците на најмоќните критични домени за дадено ниво на значајност на тестот α се дадени во табелава.

Алтернативна хипотеза	Критичен домен
$H_a: EX > a_0$	$C = (u_{1-\alpha}, \infty)$
$H_a: EX < a_0$	$C = (-\infty, u_{\alpha})$
$H_a: EX \neq a_0$	$C = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty)$

Вредностите $u_{\alpha}, u_{1-\alpha}, u_{1-\alpha/2}$ се читаат од Таблицата 1 за нормална распределба, така што $\Phi(u_{\alpha}) = \alpha, \Phi(u_{1-\alpha}) = 1-\alpha$ и $\Phi(u_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$. Сите три критични домени се определени така што

$$P\{U \in C | H_0 \text{ е точна}\} = \alpha,$$

а притоа веројатноста на грешка од втор вид е минимална.

При тестирање на статистички хипотези, најчесто се избира $\alpha = 0,05$ или $\alpha = 0,01$. За овие вредности на нивото на значајност на тестот, од Таблицата 1, се добиваат следните критични домени:

Алтернативна хипотеза	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
$H_a : EX > a_0$	$C = (1,65; \infty)$	$C = (2,33; \infty)$
$H_a : EX < a_0$	$C = (-\infty; -1,65)$	$C = (-\infty; -2,33)$
$H_a : EX \neq a_0$	$C = (-\infty; -1,96) \cup (1,96; \infty)$	$C = (-\infty; -2,58) \cup (2,58; \infty)$

2 Една откупна станица мери масленост на млеко, при што се претпоставува дека масленоста има нормална распределба со стандардно отстапување $\sigma_0 = 1$. Во еден ден е собрано млеко од 25 производители. Добиени се следните резултати:

Масленост во %	Од 1,5 до 2,5	Од 2,5 до 3,5	Од 3,5 до 4,5
Број на производители	5	16	4

Со ниво на значајност $\alpha = 0,05$, да се тестира хипотезата дека средната вредност на масленоста е 3%.

Решение:

Го разгледуваме обележјето X – масленост на млекото. Ќе ја тестираме нултата хипотеза:

$H_0 : EX = 3$, наспроти алтернативната $H_a : EX \neq 3$.

Податоците се групирани во интервали, па за да ја определиме аритметичката средина на примерокот, за претставник на секој интервал ќе ја земеме неговата средина. Така, 2 е претставник на интервалот $(1,5; 2,5]$ и на 2 му се препишува фреквенцијата 5, потоа 3 е претставник на интервалот $(2,5; 3,5]$ и му се придружува фреквенцијата 16, а 4 е претставник на $(3,5; 4,5]$ и има фреквенција 4. Ова е вообичаена постапка при пресметување на бројни карактеристики на податоци кои се групирани во интервали.

Сега, аритметичката средина на примерокот ќе биде $\overline{x}_n = \frac{1}{25}(2 \cdot 5 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 4) = 2,96$, а вредноста на тест статистиката U ќе биде:

$$u = \frac{\overline{x}_{25} - a_0}{\sigma_0}\sqrt{25} = \frac{2,96 - 3}{1} = -0,2.$$

Имаме двостран тест, па за $\alpha = 0,05$, критичниот домен е

$$C = (-\infty; -1,96) \cup (1,96; \infty).$$

Вредноста на тест статистиката $u = -0,2 \notin C$, што значи дека нултата хипотеза се прифаќа. Можеме да сметаме дека масленоста на млекото е 3%.

Да нагласиме дека ако обемот n на примерокот $X_1, X_2, \ldots, X_n$ е поголем од 30, тогаш претходно наведените тестови може да се спроведуваат не само за обележје X, кое има нормална распределба, туку и за која било друга распределба.

3 Да се тестира хипотезата од задачата 1, при ниво на значајност $\alpha = 0{,}05$, ако од еден случајно избран производител се избрани 40 канти млеко, за нив е измерена точката на замрзнување и се добиени следните резултати:

$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}6$	$-0{,}7$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}1$
$-0{,}3$	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}3$	$-0{,}4$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}5$
$-0{,}1$	$-0{,}3$	$-0{,}4$	$-0{,}5$	$-0{,}6$	$-0{,}8$	$-0{,}2$	$-0{,}2$	$-0{,}3$	$-0{,}5$
$-0{,}1$	$-0{,}4$	$-0{,}5$	$-0{,}6$	$-0{,}6$	$-0{,}7$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}7$	$-0{,}5$

Притоа, познато е дека стандардната девијација на обележјето е $\sigma_0 = 0{,}2$.

Решение:

Да воочиме уште еднаш дека се тестира нултата хипотеза: $H_0\colon EX = -0{,}5;\ H_a\colon EX > -0{,}5$.

Врз основа на дадените податоци, може да се пресмета аритметичката средина на реализираниот примерок. Се добива $\overline{x}_n = -0{,}4325$. Сега, реализацијата на тест статистиката ќе биде

$$u = \frac{\overline{x}_n - a_0}{\sigma_0}\sqrt{40} = \frac{-0{,}4325 + 0{,}5}{0{,}2}\sqrt{40} = 2{,}13.$$

Нивото на значајност на тестот е $\alpha = 0{,}05$, па од претходната табела, наоѓаме дека критичниот домен, при дадената алтернативна хипотеза, е $C = (1{,}65;\infty)$. Вредноста на тест статистиката $u = 2{,}13 \in C$, па можеме да заклучиме дека нултата хипотеза се отфрла, т.е. во млекото од избраниот производител има додадено вода.

Б **4** Врз основа на претходни резултати познато е дека веројатноста еден стрелец да ја погоди целта е $0{,}9$. По подготовките за натпревар, извршено е пробно стрелање, во кое стрелецот ја погодил целта 92 пати од 100 обиди. Со ниво на значајност $\alpha = 0{,}01$, да се тестира хипотезата дека веројатноста за постигнување погодок е зголемена, наспроти алтернативната дека не е зголемена.

Согледај го решението:

Да го означиме со A: стрелецот ја погодил целта. Од условите на задачата е познато дека $P(A) = 0{,}9$. Ќе ја тестираме нултата хипотеза $H_0\colon P(A) = 0{,}9$ наспроти алтернативната $H_a\colon P(A) > 0{,}9$.

Овој тест се сведува повторно на тест за вредност на математичко очекување. Имено, обележјето кое го разгледуваме е индикатор на настанот A. Значи,

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - P(A) & P(A) \end{pmatrix}.$$

Да се потсетиме дека $EI_A = P(A)$, а $DI_A = P(A)(1 - P(A))$. Значи, во конкретниот случај, се тестираат хипотезите:

$$H_0\colon EI_A = 0{,}9$$
$$H_a\colon EI_A > 0{,}9,$$

па треба да се спроведе тест за вредноста на математичко очекување. Ако H_0 е точна, тогаш $P(A) = 0{,}9$, од каде што следува дека $EI_A = 0{,}9$, а $DI_A = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09$, што значи дека дисперзијата е позната.

Потоа, на пробното стрелање се постигнати 92 погодоци. Значи, за обележјето I_A е добиен примерок $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, и притоа 92 елементи од реализацијата на примерокот се 1, а осум од нив се 0 (1 означува дека ќе се појави A, т.е. 1 означува погодок, а 0 означува промашување). Сега, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 92$, а аритметичката средина на реализацијата на примерокот е $\overline{x}_{100} = \frac{92}{100} = 0,92$ и таа претставува, всушност, релативна фреквенција на настанот A во дадениот примерок.

За вредноста на U статистиката за конкретната реализација на примерокот се добива:

$$u = \frac{\overline{x}_{100} - P(A)}{\sqrt{P(A)(1-P(A))}}\sqrt{100} = \frac{0,92-0,9}{\sqrt{0,09}} \cdot 10 = 0,67.$$

За ниво на значајност $\alpha = 0,01$, при алтернативна хипотеза од облик H_a: $EI_A > 0,9$, од последната табела наоѓаме дека критичниот домен е $C = (2,33;\infty)$. Бидејќи пресметаната вредност $u = 0,67 \notin C$, заклучуваме дека нултата хипотеза не се отфрла. Значи, веројатноста за постигнување погодок не е зголемена.

Запомни!

При тестирање на нултата хипотеза H_0: $P(A) = p_0$, наспроти една од алтернативните хипотези:

i) H_a: $P(A) > p_0$ *ii)* H_a: $P(A) < p_0$ *iii)* H_a: $P(A) \neq p_0$

се користи тест статистиката $U = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$, каде што $\hat{P}$ е релативната фреквенција на настанот A во случајниот примерок.

Најмоќните критични домени се определени на ист начин како претходно, т.е. тие се идентични со оние дадени во претходните две табели за секоја соодветна хипотеза.

5 При 100 фрлања на монета, 60 пати паднала глава. Со ниво на значајност $\alpha = 0,05$, да се тестира хипотезата дека монетата е исправна.

Согледај го решението:

Нека A е настанот: паднала глава. Ако монетата е исправна, веројатноста да се појави овој настан е 0,5. Затоа се тестира нултата хипотеза: H_0: $P(A) = 0,5$ наспроти алтернативната H_a: $P(A) \neq 0,5$. Од 100 фрлања на монетата, 60 пати паднала глава, што значи дека релативната фреквенција на настанот A е $\hat{p} = \frac{60}{100} = 0,6$. Вредноста на тест статистиката U, во конкретниот случај, ќе биде $u = \frac{0,6-0,5}{\sqrt{0,5 \cdot 0,5}}\sqrt{100} = 2$. Тестот е двостран, па за $\alpha = 0,05$, критичниот домен е $C = (-\infty;-1,96) \cup (1,96;\infty)$.

Добиената вредност $u = 2 \in C$, од каде што следува дека нултата хипо-теза се отфрла. Значи, монетата не е исправна.

Задачи:

1. Познато е дека каблите што се произведуваат во една фабрика имаат средна јачина од 1800 единици и стандардно отстапување од 100 единици. Со новиот технолошки процес добиени се кабли за кои се тврди дека се појаки. Дали ова тврдење е точно, ако средната јачина на 50 случајно избрани новопроизведени кабли е еднаква на 1850 единици со дозволен ризик од 1%?

2. Врз основа на пописот на населението добиени се податоци за бројот на жителите во 50 села во една област:

Број на жители	500 - 1000	1000 - 1500	1500 - 2000	2000 - 2500	2500 - 3000
Број на села	1	4	32	10	3

При ниво на значајност $\alpha = 0,05$, да се тестира хипотезата дека просечниот број на жители во сите села од таа област е 2000, ако се знае дека бројот на жителите има нормална распределба со стандардно отстапување 350.

3. Веројатноста за неуспешна вакцина е $p = 0,09$. Со новата вакцина се очекува дека таа веројатност ќе се намали. Меѓу 100 случајно избрани пациенти, вакцинирани со новата вакцина, утврдено е дека кај 5 пациенти вакцинирањето е неуспешно. Дали со ниво на значајност $\alpha = 0,05$, може да се смета дека новата вакцина е подобра?

4. При 180 фрлања на коцка, 35 пати паднала петка. Да се тестира хипотезата дека веројатоста да се појави петка е $1/6$, наспроти алтернативната дека не е $1/6$. Нивото на значајност на тестот е $0,05$.

5 ТЕСТОВИ ЗА ВРЕДНОСТ НА МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКУВАЊЕ ПРИ НЕПОЗНАТА ДИСПЕРЗИЈА

Потсети се!

- При проверка на хипотеза за вредност на математичко очекување во случај кога дисперзијата σ_0^2 на обележјето е позната се користи тест статистиката $U = \dfrac{\overline{X}_n - a_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$, каде што n е обемот на примерокот, а a_0 е вредноста на математичкото очекување, ако нултата хипотеза е точна.

A Најчесто во реалните ситуации, дисперзијата на обележјето X не е позната.

- Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ е случаен примерок за обележјето X кое има нормална распределба и нека обемот на примерокот е помал од 30, т.е. $n < 30$.
- Зависно од алтернативната хипотеза, повторно може да се разгледуваат три вида тестови:

Тест I	Тест II	Тест III
$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX > a_0$	$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX < a_0$	$H_0 : EX = a_0$ $H_a : EX \neq a_0$

Разликата од претходниот случај е само во тоа што дисперзијата на обележјето не е позната.

- За оценка на непознатата дисперзија ќе ја користиме коригираната дисперзија $\overline{S}_n^2$ на примерокот $X_1, X_2, \ldots, X_n$, која се пресметува по следната формула:

$$\overline{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Ако дисперзијата на примерокот е S_n^2, тогаш таа се пресметува по формулата

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Сега, врската помеѓу обичната и коригираната дисперзија на еден случаен примерок е следната:

$$\overline{S}_n^2 = \frac{n}{n-1}S_n^2.$$

- Тест статистиката која се користи за тестирање на ваквата нулта хипотеза е следната:

$$T = \frac{\overline{X}_n - a_0}{\overline{S}_n}\sqrt{n} \quad \text{или} \quad T = \frac{\overline{X}_n - a_0}{S_n}\sqrt{n-1}.$$

- Критичниот домен за тестирање на трите горенаведени хипотези, исто како и претходно, зависи од алтернативната хипотеза. Облиците на најмоќните критични домени за дадено ниво на значајност на тестот α се дадени во табелава.

Алтернативна хипотеза	Критичен домен
$H_a: EX > a_0$	$C = (t_{n-1;\alpha}, \infty)$
$H_a: EX < a_0$	$C = (-\infty, -t_{n-1;\alpha})$
$H_a: EX \neq a_0$	$C = (-\infty, -t_{n-1;\alpha/2}) \cup (t_{n-1;\alpha/2}, \infty)$

- Во овој случај, вредностите $t_{n-1;\alpha}$ и $t_{n-1;\alpha/2}$ се читаат од Таблицата 2 за t – распределбата.

1 Заради испитување на временските прилики во Охрид, избрани се случајно 15 години и врз основа на метеоролошкиот извештај, добиен е бројот на сончеви денови во текот на избраните години:

190	169	195	195	198	180	179	169
192	194	199	200	180	174	185	

Со ниво на значајност $\alpha = 0{,}025$, да се тестира хипотезата дека очекуваниот број на сончеви денови во текот на една година во Охрид е 180, наспроти алтернативната хипотеза дека е поголем од 180.

Согледај го решението:

- Се тестира нултата хипотеза $H_0: EX = 180$, наспроти алтернативната $H_a: EX > 180$. Од дадениот примерок наоѓаме дека $\overline{x}_{15} = 186{,}6$, $\overline{s}_{15} = 10{,}7756$. Вредноста на t – статистиката ќе биде:

$$t = \frac{186{,}6 - 180}{10{,}7756}\sqrt{15} = 2{,}37.$$

Нивото на значајност на тестот е $\alpha = 0{,}025$, а критичниот домен при дадената алтернативна хипотеза ќе гласи $C = (t_{n-1;\alpha}, \infty)$, каде што $n = 15$. Од Таблицата 2 за t – распределба наоѓаме $t_{14;0{,}025} = 2{,}145$. Значи, критичниот домен е $C = (2{,}145, \infty)$. Вредноста на t – статистиката $t = 2{,}37 \in C$, па нултата хипотеза се отфрла, а се прифаќа алтернативната. Врз основа на дадениот примерок, може да се заклучи дека бројот на сончеви денови во Охрид е поголем од 180.

Б Ако $n \geq 30$, тогаш при тестирање на претходно наведените хипотези се користи истата статистика како и претходно. Во овој случај, тест статистиката се означува со U и критичниот домен се добива со читање од Таблицата 1 за нормална распределба, исто како и во случајот кога имавме тестови за математичко очекување со позната дисперзија.

- Имено, во овој случај, се користи тест статистиката

$$U = \frac{\overline{X}_n - a_0}{\overline{S}_n}\sqrt{n}.$$

Обликот на критичниот домен во зависност од алтернативната хипотеза е даден во следната табела, каде што вредностите $u_\alpha, u_{1-\alpha} u_{1-\alpha/2}$ се читаат повторно од Таблицата 1 за нормална распределба, такашто

$$\Phi(u_\alpha) = \alpha,\ \Phi(u_{1-\alpha}) = 1-\alpha,\ \Phi(u_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2.$$

- Да напомeнеме дека за $n \geq 30$, овој тест може да се спроведе и ако обележјето нема нормална распределба, т.е. тестот важи и за произволна друга распределба на обележјето.

Алтернативна хипотеза	Критичен домен
$H_a : EX > a_0$	$C = (u_{1-\alpha}, \infty)$
$H_a : EX < a_0$	$C = (-\infty, u_\alpha)$
$H_a : EX \neq a_0$	$C = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty)$

2 Во едно претпријатие, распределбата на платите за месец јануари била следнава (изразена во илјади денари):

Плата	7 до 8	8 до 9	9 до 10	10 до 11	11 до 12	12 до 13
Број на вработени	1	5	9	18	12	5

Со ниво на значајност $\alpha = 0{,}02$, да се тестира хипотезата дека средната вредност на платата во ова претпријатие е $10(000)$ денари.

Решение:

- Во овој случај, се тестира нултата хипотеза H_0: $EX = 10$ наспроти алтернативната H_a: $EX \neq 10$. Притоа, имаме тест за вредност на математичко очекување при непозната дисперзија. Ќе ја користиме $U-$ статистиката бидејќи имаме примерок со обем $n = 50 > 30$. Да напомeнеме дека трите нули (000) кои означуваат илјади денари, нема да ги пишуваме, бидејќи нема да влијаат на крајната вредност на U статистиката (Провери!).

- Ако за претставник на секој интервал се земе неговата средина, тогаш за аритметичката средина на примерокот се добива:

$$\overline{x}_{50} = \frac{1}{50}(7{,}5\cdot 1 + 8{,}5\cdot 5 + 9{,}5\cdot 9 + 10{,}5\cdot 18 + 11{,}5\cdot 12 + 12{,}5\cdot 5) = 10{,}5,$$ а неговата дисперзија е

$$s_{50}^2 = \frac{1}{50}(7{,}5^2\cdot 1 + 8{,}5^2\cdot 5 + 9{,}5^2\cdot 9 + 10{,}5^2\cdot 18 + 11{,}5^2\cdot 12 + 12{,}5^2\cdot 5) - 10{,}5^2 = 1{,}4.$$

Коригираната дисперзија на примерокот ќе биде $\overline{s}_{50}^2 = \frac{50}{49} s_{50}^2 = 1,43$, па за вредноста на тест статистиката U ќе се добие $u = \frac{10,5-10}{\sqrt{1,43}}\sqrt{50} = 2,96$.

Тестот е двостран, па критичниот домен ќе биде од облик

$C = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty)$, каде што $\alpha = 0,02$. Значи, $C = (-\infty, -u_{0,99}) \cup (u_{0,99}, \infty)$.

Од Таблицата 1 за нормална распределба, наоѓаме дека $u_{0,99} = 2,33$, па критичниот домен ќе биде $C = (-\infty, -2,33) \cup (2,33, \infty)$. Добиената вредност $u = 2,96 \in C$, па може да се заклучи дека нултата хипотеза се отфрла. Значи, во даденото претпријатие, просечната плата не е $10(000)$ денари.

Задачи:

1. За да се процени приносот на една житарица по хектар во пелагонискиот регион, избрани се 18 парцели и добиени се следните податоци:

53	54	60	65	55	63	59	58	62
61	60	58	57	62	58	60	60	62

Со ниво на значајност $\alpha = 0,01$, да се тестира нултата хипотеза дека просечниот принос изнесува 60 мерни единици на хектар, наспроти алтернативната дека е помал од 60.

2. Врз основа на примерок со обем $n = 50$, добиено е дека средното време на работа на еден тип транзистори е $\overline{x}_{50} = 1950$ часа со стандардно отстапување $\overline{s}_{50} = 200$ часа. Со 5% ниво на значајност, да се тестира нултата хипотеза дека очекуваното време на работа на транзисторите е 2000 часа, наспроти алтернативната дека е:

   а) поголемо од 2000 часа;

   б) помало од 2000 часа;

   в) различно од 2000 часа.

3. Обележјето X претставува број на телефонски разговори преку една централа за еден час. За да се определи очекуваниот број на разговори во тек на еден час, случајно се избрани 25 часа во текот на една недела и броевите на извршени разговори во текот на тие 25 часа се следните:

24	35	29	28	29	16	31	26	23	33
25	19	32	23	16	17	26	23	27	27
24	22	23	13	30					

Со ниво на значајност $\alpha = 0,02$, да се тестира хипотезата дека просечниот број извршени разговори преку централата во тек на еден час е 25.

4. За споредување на две методи за мерење на скроб во компир, земени се 16 компири и пресечени се на половина. Секоја од половините е испитувана со еден од методите. Добиени се следниве разлики:

2	0	0	1	2	2	3	-3
1	2	3	0	-1	1	-2	1

Да се тестира хипотезата дека разликите меѓу методите не се значајни. Тестирањето да се изведе за 5% и 1% ниво на значајност.

6 ТЕСТ ЗА ВРЕДНОСТ НА ДИСПЕРЗИЈА

Знаеме дека дисперзијата е мерка за расејувањето на податоците од математичкото очекување. Таа ја определува точноста на мерењата, отстапувањето и сл. На пример, уредот кој во авионот ја мери височината, во процесот на мерење прави некои грешки, отстапувања. Потребно е тие отстапувања да бидат во некоја дозволена граница, бидејќи секое поголемо отстапување од дозволеното може да биде катастрофално. Постојат уште голем број вакви примери што наведуваат на потребата да се дефинираат тестови за вредност на дисперзијата (отстапувањето).

Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ е случаен примерок за обележјето X кое има нормална распределба. Се тестира нултата хипотеза: $H_0: DX = \sigma_0^2$, наспроти $H_a: DX > \sigma_0^2$, со ниво на значајност α.

За тестирање на оваа хипотеза се користи χ^2 – статистиката

$$\chi^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma_0^2},$$

каде што $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$ е дисперзијата на дадениот примерок.

Критичен домен при тестирање на оваа хипотеза е $C = (\chi^2_{n-1;\alpha}, \infty)$, каде што $\chi^2_{n-1;\alpha}$ се чита од Таблицата 3 за χ^2 – распределба.

1 Врз основа на метеоролошките набљудувања е заклучено дека висината (во сантиметри) на годишниот воден талог има нормална распределба. На случаен начин се избрани 10 години и во тие години измерена е висината на годишниот воден талог во Скопје, при што се добиени следните податоци:

37	59	36	55	39	65	53	41	54	50

Со ниво на значајност $\alpha = 0{,}1$ да се тестира хипотезата дека дисперзијата на висината на водниот талог изнесува 20 cm, наспроти алтернативната дека е поголема од 20.

Се тестира хипотезата $H_0: DX = 20$ наспроти $H_a: DX > 20$. Врз основа на примерокот се добива дека аритметичката средина на примерокот е $\overline{x}_{10} = 48{,}9$, а неговата дисперзија е $s_{10}^2 = 91{,}09$. За вредноста на χ^2 – статистиката се добива:

$$\chi^2 = \frac{10 \cdot 91{,}09}{20} = 45{,}545.$$

Критичниот домен ќе биде $C = \left(\chi^2_{n-1;\alpha}, \infty\right)$ каде што $n = 10$, а $\alpha = 0{,}1$. Од Таблицата 3 за χ^2 – распределба, се наоѓа дека $\chi^2_{9;0{,}1} = 14{,}6837$. Значи, $C = (14{,}6837, \infty)$ и притоа, $\chi^2 = 45{,}545 \in C$. Значи, нултата хипотеза се отфрла, а се прифаќа алтернативната. Тоа значи дека дисперзијата на висината на водниот талог во Скопје е поголема од 20 cm.

Задачи:

1. Со мерење на масата на учениците во една група добиени се следните податоци:

Маса во kg	40 до 50	50 до 60	60 до 70	70 до 80	80 до 90
Број на ученици	7	16	20	6	1

Со ниво на значајност $\alpha = 0{,}025$ да се тестира хипотезата дека стандардната девијација на масата на учениците е 8 килограми.

2. Познато е дека стандардната девијација на масата на пакетите од 40 грама изнесува 0,25 грама. Врз основа на примерок од 20 пакети, добиено е дека стандардната девијација на реализираниот примерок е 0,32 грама. Дали со ниво на значајност $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$, може да се тврди дека не дошло до зголемување на стандардната девијација?

7 ТАБЕЛИ НА КОНТИНГЕНЦИЈА

Потсети се!

- Случајните променливи X и Y се независни, ако за произволна вредност x_i што припаѓа на множеството вредности на X и произволна вредност y_j што припаѓа на множеството вредности на Y, случајните настани $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ се независни. Односно,

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}, \text{ за сите } x_i \in R_X \text{ и } y_j \in R_Y.$$

А Во многу практични задачи, често се случува, за дадена популација да се разгледува повеќе од едно обележје. Така, за популацијата ученици на десетгодишна возраст во Скопје, може да се разгледуваат повеќе обележја истовремено. На пример, висина, маса, пол, боја на очи и сл.

- Во ваков случај, кога за популацијата се разгледуваат повеќе обележја, често се поставува прашањето дали тие обележја се независни. Бидејќи секое обележје е една случајна променлива, проблемот се сведува на проверка дали две случајни променливи се независни. Проверката се прави со статистички тест.
- Нека за дадена популација се разгледуваат обележјата X и Y. Со ниво на значајност α, ќе ја тестираме нултата хипотеза:

H_0: обележјата X и Y се независни;

наспроти алтернативната

H_a: обележјата X и Y не се независни.

- Нека X е обележје со множество вредности $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, а Y е обележје со множество вредности $R_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$. Да напомнеме дека обележјата не мора да бидат само квантитативни, тие може да бидат и квалитативни. На пример, ако X означува пол на учениците, тогаш множеството вредности на X ќе биде $R_X = \{$машки, женски$\}$.

Тестирање на поставената хипотеза се врши врз основа на еден реализиран примерок. За таа цел, нека се извршени мерења на n случајно избрани единки од популацијата, т.е. нека е избран примерок со обем n. Бидејќи се разгледуваат две обележја, за секоја единка ќе постојат по два податоци. Всушност, со мерење на секоја единка се добива по еден подреден пар (x_i, y_j), каде x_i е вредност за обележјето X, а y_j е вредност за обележјето Y.

1 Ако X означува пол на учениците, а Y боја на очите, тогаш една реализација на случајниот примерок со обем 5 би била следната:

(машки, сини), (женски, црни),(женски, кафеави),(машки, црни), (женски,црни),

каде што првиот елемент во секој пар е полот на соодветниот ученик, а вториот елемент е бојата на неговите очи.

Нека по мерењата на n случајно избрани единки е добиен примерок кој ќе се состои од n подредени парови. Со n_{ij} ја означуваме фреквенцијата на појавување на парот (x_i, y_j) во дадениот примерок, $i = 1, 2,\ldots, r$; $j = 1, 2,\ldots, s$. Тогаш добиените фреквенции може да се претставаат во табелата.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_s
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1s}
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2s}
...	...	...	...	...
x_r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rs}

Табелата од ваков облик, каде што во пресекот на i – тата редица и j – тата колона стои елементот n_{ij}, кој претставува фреквенција на појавување на парот (x_i, y_j) во дадениот примерок, се вика ***табела на контингенција***.

Во горната табела ќе ги пресметаме сумите по редици и колони. Нека n_{Xi} е сума на елементите во i – тата редица, $i = 1, 2,\ldots, r$, а n_{Yj} е сума на елементите во j – тата колона, $j = 1, 2,\ldots, s$. Тоа претставено во табелата изгледа вака:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_s	Σ
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1s}	n_{X1}
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2s}	n_{X2}
...	...	...	...	...	...
x_r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rs}	n_{Xr}
Σ	n_{Y1}	n_{Y2}	...	n_{Ys}	n

Јасно е дека сумата на сите фреквенции од табелата на контингенција е n, колку што е и обемот на примерокот. Притоа, n_{X1} е број на парови од примерокот во кои се појавува вредноста x_1, n_{X2} е број на парови во кои се појавува вредноста $x_2,\ldots, n_{Xr}$ е број на парови од примерокот во кои се појавува вредноста x_r. На ист начин, за фиксно $j = 1, 2,\ldots, s$, бројот n_{Yj} е број на парови од примерокот во кои се појавува вредноста y_j.

Ако секоја од фреквенциите во примерокот се подели со обемот на примерокот n, ќе се добијат релативните фреквенции за појавување на соодветните настани, кои за доволно големо n, се приближно еднакви на веројатностите на тие настани. Така $\frac{n_{ij}}{n}$ е релативна фреквенција на настанот $\{X = x_i, Y = y_j\}$, па за n доволно големо $\frac{n_{ij}}{n} \approx P\{X = x_i, Y = y_j\}$.

Соодветно, $\frac{n_{X_i}}{n} = P\{X = x_i\}$, а $\frac{n_{Y_j}}{n} = P\{Y = y_j\}$. Сега, нултата хипотеза која ја тестираме може да се напише во облик $H_0 : P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$, за сите $i = 1, 2, ..., r$; $j = 1, 2, ..., s$, што всушност е условот две случајни променливи да бидат независни.

- За тестирање на оваа хипотеза се користи следната тест статистика:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{X_i} n_{Y_j}}{n}\right)^2}{n_{X_i} n_{Y_j}}.$$

- Ако се извршат одредени алгебарски операции во претходната формула (прво степенување, а потоа средување на добиениот израз), таа го добива следниот облик кој е поедноставен за пресметување:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{n_{ij}^2}{n_{X_i} n_{Y_j}} - n.$$

Запомни!

За тестирање на хипотезата за независност на две статистички обележја X и Y се користи тест статистиката:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{n_{ij}^2}{n_{X_i} n_{Y_j}} - n.$$

Критичниот домен за тестирање на оваа хипотеза е од облик $C = \left(\chi^2_{(r-1)(s-1)\alpha}, \infty\right)$, каде што бројот $\chi^2_{(r-1)(s-1)\alpha}$ се чита од Таблицата 3 за χ^2 – распределба.

2 Со ниво на значајност $\alpha = 0,05$, да се тестира хипотезата дека моделот на автомобилот од марката "пежо" е независен од полот на сопственикот. Резултатите добиени со испитување на 350 случајно избрани сопственици на автомобили е дадена во следнава табела на контингенција.

Согледај го решението:

X \ Y	пежо 106	пежо 206	пежо 306
Маж	40	80	30
Жена	30	120	50

- Нека обележјето X го означува полот на сопственикот, а обележјето Y – моделот на Пежо автомобилот. Врз основа на дадениот примерок со обем $n = 350$, ќе ја тестираме хипотезата: H_0: X и Y се независни обележја. Притоа, обележјето X прима две вредности, а обележјето Y прима три вредности, што значи дека $r = 2$, а $s = 3$.
- Со пресметување на сумите по редици и колони, табелата го добива следниов облик:

X \ Y	пежо 106	пежо 206	пежо 306	Σ
Маж	40	80	30	150
Жена	30	120	50	200
Σ	70	200	80	350

Сега, вредноста на χ^2 – статистиката е следната:

$$\chi^2 = 350\left(\frac{40^2}{150\cdot 70}+\frac{80^2}{150\cdot 200}+\frac{30^2}{150\cdot 80}+\frac{30^2}{200\cdot 70}+\frac{120^2}{200\cdot 200}+\frac{50^2}{200\cdot 80}\right)-350 = 7,4375.$$

За определување на критичниот домен за оваа хипотеза, при дадено $\alpha = 0,05$, најпрво од Таблицата 3 за χ^2 – распределба, наоѓаме $\chi^2_{(r-1)(s-1);\alpha} = \chi^2_{(2-1)(3-1);0,05} = \chi^2_{2;0,05} = 5,99147$. Сега, критичниот домен е $C = (5,99147;\infty)$. Добиената вредност на тест статистиката е $\chi^2 = 7,4375 \in C$, од каде што се заклучува дека нултата хипотеза се отфрла. Значи, моделот на "пежо" автомобилот не е независен од полот на сопственикот.

3 Разгледувани се одговорите на 200 случајно избрани лица на следните две прашања:

1) Сметате ли дека пушењето е штетно по здравјето?

2) Дали пушите?

Резултатите од одговорите се дадени во табелава на контингенција:

		Одговор на прашањето 1	
	X \ Y	Да	Не
Одговор на прашање 2	Да	70	90
	Не	30	10

Со ниво на значајност $\alpha = 0,01$, да се провери дали одговорот на второто прашање не зависи од мислењето на лицата дека пушењето е штетно по здравјето.

Решение:

Да ги разгледаме обележјата X и Y, кои претставуваат одговор на првото и на второто прашање, соодветно. И двете случајни променливи примаат вредности од множеството {да, не}. Со сумирање по редици и колони во табелата на контингенција се добива:

X \ Y	Да	Не	Σ
Да	70	90	160
Не	30	10	40
Σ	100	100	200

Вредноста на статистиката е:

$$\chi^2 = 200\left(\frac{70^2}{160\cdot 100}+\frac{90^2}{160\cdot 100}+\frac{30^2}{40\cdot 100}+\frac{10^2}{40\cdot 100}\right)-200 = 12,5.$$

Од Таблицата 3 за χ^2 – распределба, наоѓаме $\chi^2_{(r-1)(s-1);0,01} = \chi^2_{(2-1)(2-1);0,01} = \chi^2_{1;0,01} = 6,6349$, па критичниот домен ќе биде $C = (6,6349, \infty)$. Пресметаната вредност на тест статистиката $\chi^2 = 12,5 \in C$, од каде што може да се заклучи дека двете обележја се зависни.

Задачи:

1. Кандидатите за претседател на една средношколска организација се една девојка и едно момче. Во случаен примерок со обем 1000 добиени се резултатите претставени во следнава табела на контингенција:

Кандидати / Бирачи	Кандидат девојка	Кандидат момче
Женски	250	220
Машки	230	300

Со ниво на значајност $\alpha = 0{,}01$, да се провери дали определбата на гласачите зависи од полот на кандидатот.

2. Во следната табела се дадени категоризациите на 100 ученици според интересот за математика и предиспозициите за математика.

Интерес / Предиспозиции	Голем интерес	Заинтересиран	Индиферентен	Незаинтересиран
Добра	20	15	5	1
Средна	10	10	12	9
Слаба	1	7	5	5

Со ниво на значајност $\alpha = 0{,}025$, да се провери дали интересот на учениците зависи од нивните предиспозиции.

ТЕМА 1 НИЗИ И ПРОГРЕСИИ

1 (1) а) $-2, \frac{3}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{16}, \frac{6}{23}$; б) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$; в) 0, 1, 0, 1, 0; г) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$. (2) а) $a_n = \frac{n}{2^n}$;

б) $a_n = \frac{2^{n-1}}{1+(n-1)100}$; в) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$; г) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot n$. (3) а) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55; б) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

(4) а) 1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; б) 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415. (5) а) $4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 1, \ldots$; б) 16, 8, 4, 2, 1,...

(6) а) монотоно расте; б) монотоно опаѓа. (7) а) монотоно опаѓа; б) монотоно расте.

(8) а) монотоно расте; б) монотоно опаѓа; в) Не е монотона, бидејќи за секој природен број k е исполнето $a_{2k-1} < a_{2k}$, но и $a_{2k+1} < a_{2k}$; г) монотоно опаѓа. (9) а) $|a_n| = 1$, од каде следува дека низата е определена; б) $0 < a_n < 2$, од каде следува дека низата е ограничена; в) $0 < a_n < 1$, ограничена; г) не е ограничена; д) $1,4 < a_n < \sqrt{2}$ или $1 < a_n < 2$ - ограничена.

2 (1) Аритметички се низите под а) и г). (2) а) Да, бидејќи $\sin^2 60^0 - \sin^2 45^0 = \sin^2 45^0 - \sin^2 30^0 = -\frac{1}{4}$;

б) Да, бидејќи $\cos^2 45^0 - \cos^2 60^0 = \cos^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{4}$. (4) а) 200; б) 325. (5) а) 25; б) 41; в) $-1,5$; г) $20a + b$.

(6) а) $-3, -1, 1, 35$; б) 7, 9, 11, 13, 15; в) 10, 8, 6, 4, 2; г) 7, 10, 13, 16, 19.

(7) $18, 14\frac{2}{3}, 11\frac{2}{3}, 8, 4\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, -2, -5\frac{1}{3}, -8\frac{2}{3}, -12$.

3 (1) а) $n = 10, S_{10} = 265$; б) $n = 16, S_{16} = -552$. (2) а) $a_n = 29, d = 3$; б) $a_n = 35, d = 2$.

(3) а) $a_1 = 5, S_{13} = 91$; б) $a_1 = 2a, S_9 = 54a + 36b$. (4) а) $3, 1, -1, -3, \ldots$; б) 2, 4, 6, 8,...; в) $\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, 6, \ldots$

(5) Дадено е: $a_1 = 3$, $a_{ср} = 13$ и $S_n = 143$. Од $a_{ср} = \frac{a_1 + a_n}{2}$ добиваме $a_n = 23$, а со замена во формулата $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ќе добиеме $n = 11$. Разликата d ја одредуваме од $a_{11} = a_1 + 10d$, т.е. $d = 2$.

(6) Познато е: $a_1 = 18$, $d = -3$ и $a_n = \frac{S_{n-1}}{5}$, при што $a_n = a_1 + (n-1)d$, $S_{n-1} = \frac{n-1}{2}[2a_1 + (n-2)d]$.

Оттука со замена добиваме $n = 21$, $n = 4$ (не е решение), значи бараниот член е $a_{21} = -42$.

(7) $a_1 = -2$, $d = 1$. (8) 20, 50, 80. Упатство. Трите последователни члена означи ги со $x - d$, x и $x + d$.

(9) 5, 9, 13, 17,... (10) а) $x = \frac{19}{2}$. Упатство. $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = 1$, $a_n = x$, $S_n = 200$. б) $x = 2$.

4 (1) Геометриски прогресии се низите под а), б) и г). (2) а) $3, -6, 12, -24, \ldots$; б) $-2, -6, -18, -54, \ldots$; в) $8, -4, 2, -1, \frac{1}{2}, \ldots$; г) $18, 6, 2, \frac{2}{3}, \ldots$ (3) а) $3, 9, 27, 51, \ldots$; б) $5, \frac{10}{3}, \frac{20}{9}, \frac{40}{27}, \ldots$ (4) а) $-2, 8, -32, 128, \ldots$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ (5) $a_5 = 1$. (6) а) $3, 2\cdot 3^9, 2\cdot 3^{n-1}$; б) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2^9}, \frac{3}{2^{n-1}}$; в) $-2, 3(-2)^9, 3(-2)^{n-1}$; г) $-\frac{1}{2}, 3\left(-\frac{1}{2}\right)^9, 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; д) $3, -2\cdot 3^9, -2\cdot 3^{n-1}$; ѓ) $\frac{1}{2}, -\left(\frac{1}{2}\right)^9, -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. (7) 1 и 2. (8) Ќе се зголеми 256 пати.

5 (1) $s_7 = 86$; (2) а) $q = \frac{3}{2}, s_6 = \frac{4655}{32}$; б) $q = \frac{1}{2}, s_{11} = -\frac{2047}{64}$, $q = -\frac{1}{2}, s_{11} = \frac{-683}{64}$.

(3) а) $n = 8, a_8 = 896$; б) $n = 6, a_6 = -486$. (4) а) Множејќи ги со q двете страни на формулата $a_n = a_1q^{n-1}$ добиваме: $a_nq = a_1q^n$, а потоа овој резултат го користиме во формулата за збир на првите n членови, т.е.

$s_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1} = \frac{a_nq - a_1}{q-1}$. Заменувајќи ги вредностите за s_n, a_n и a_1 во равенството $s_n = \frac{a_nq - a_1}{q-1}$, добиваме $2730 = \frac{2048q-2}{q-1}$, од каде $q = 4$. Потоа од $a_n = a_1q^{n-1}$ имаме $4^{n-1} = 1024$, $n = 6$. б) $q = 5, n = 5$.

(5) $a_1 = 3$, $q = 2$, па прогресијата е: $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$ (6) 9. Упатство. Види задача **4**.

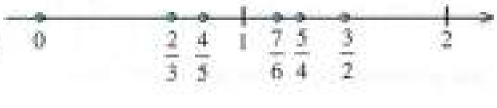
(7) Од условот на задачата имаме $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 26 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 364 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 26 \\ a_1^2(1+q^2+q^4) = 364 \end{cases}$. Ако првата равенка ја квадрираме и ја поделиме со втората равенка, ќе добиеме $\frac{(1+q+q^2)^2}{(1+q+q^2)(1-q+q^2)} = \frac{26\cdot 26}{26\cdot 14}$ или $3q^2 - 10q + 3 = 0$, од каде што $q = 3$, $q' = \frac{1}{3}$. Од $a_1(2+q+q^2) = 26$ добиваме $a_1 = 2$, $a_1' = 18$. Значи, постојат две такви прогресии: $2, 6, 16, \ldots$ и $18, 6, 2 \ldots$ (8) $S_{32} = 2^{32} - 1 = 4294967295$.

(9) Постојат три такви прогресии, и тоа: (I) $27, -27, 27, -27, \ldots$ (II) $27, \frac{-27}{2}, \frac{27}{4}, -\frac{27}{8}, \ldots$ (III) $27, 9, 3, 1, \ldots$

(10) $S_n = \frac{1}{81}(10^n - 10 - 9n)$; Упатство. $1 = \frac{10-1}{9}, 11 = \frac{10^2-1}{9}, 111 = \frac{10^3-1}{9}, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{n} = \frac{10^n-1}{9}$.

6 (2) а) $n > 145$; б) $n > 14445$. (3) а) $n > 5$; б) $n > 28$. (4) а) $\frac{1}{9}$, $n \geq 2$; б) $\frac{27}{99}$, $n \geq 2$.

(5) а) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}$; б)



в) Не; г) Да, $0 \leq a_n \leq \frac{3}{2}$; д) $n > 100$; ѓ) 1.

7 (2) а) дивергентна, со две точки на натрупување; б) дивергентна, со две точки на натрупување.

(3) Од $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$, т.е. $a_n < a_{n+1}$, следува дека низата е растечка.

Бидејќи $a_n=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n<2$ заклучуваме дека низата е ограничена, што значи низата е конвергентна.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2,\ \dfrac{2n-1}{n+1}<\dfrac{2n}{n+1}<\dfrac{2n+2}{n+1}$, т.е. $a_n<c_n<b_n$, па следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

(5) а) $\left(\dfrac{5n+4}{n}\right)$; б) $\left(\dfrac{5n-2}{n}\right)$. (6) а), г), д) конвергентни; б), в) дивергентни.

8 (2) а) $+\infty$; б) осцилира; в) $-\infty$; г) осцилира. (3) а) -3; б) 1. (4) а) 7; б) 3. (5) а) 2; б) $\dfrac{2}{3}$; в) $\dfrac{4}{3}$.

(6) а) e; б) e; в) e. (7) а) e^2; б) e^4; в) e^2.

9 (1) а) 11; б) $\dfrac{1}{3}$; в) $-\dfrac{62}{51}$. (2) а) $\dfrac{a}{c}$; б) $\dfrac{3}{5}$; в) 1. (3) а) 1; б) $\dfrac{1}{4}$. (4) а) $\dfrac{1}{3}$; б) 1; в) 2; г) 1.

(5) а) $\dfrac{1}{2}$; б) 2. (6) а) $\dfrac{1}{9}$; б) $\dfrac{29}{20}$. (7) а) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$; б) 0. Упатство. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

10 (1) а) $\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{28}{3}$; в) $2(1+\sqrt{2})$; г) $\dfrac{92}{3}$; д) $2(2+\sqrt{3})$; ѓ) $\dfrac{2}{3}\lg 3$. (3) а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt[3]{45}$. (4) $1\dfrac{53}{99}$.

(5) а) $\dfrac{2929}{900}$; б) $\dfrac{521}{110}$. (6) $a_5=\dfrac{32}{75},\ a_5'=-\dfrac{8}{75}$. (7) а) $x=3$; б) $\dfrac{5}{4}$. (8) а) $(i)\ 4r\pi$, $(ii)\ 6r\sqrt{3}$; б) $(i)\ \dfrac{4R^2\pi}{3}$.

ТЕМА 2 ФУНКЦИИ И ГРАНИЧНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИИ

1 (1) $f(2)=2\cdot2^2-2+3=9$; $f(-1)=6$; $f(0)=3$; $f(a)=2a^2-a+3$.

(2) $f(-2)=-1$; $f(-1)=0$; $f(0)=1$; $f(1)=2$; $f(2)=4$. (3) $\varphi(2)=1$; $\varphi(0)=2$; $\varphi\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\varphi(3)=2$.

(4) а) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=b+a$ за $b\neq a$; б) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-f\left(\dfrac{a-b}{2}\right)=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2=\dfrac{a+b-a+b}{2}\cdot\dfrac{a+b+a-b}{2}=ab$.

(5) $\dfrac{f(x)-f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)}=\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-\frac{y-1}{y+1}}{1+\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{y-1}{y+1}}=\dfrac{x-y}{1+xy}$.

(6) а) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2, & x\geq1\\ x^2+2x-2, & x<1\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ 0 & x=0\\ x^2-1, & x>0\end{cases}$. (7) а) $\begin{cases}-a+b=1\\ 2a+b=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}$; б) $\begin{cases}4a-2b+3=-5\\ a+b+3=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=2\end{cases}$.

8 Нека $x+\frac{1}{x}=t \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. а) $f(t)=t^2-2 \Rightarrow f(x)=x^2-2$;

б) Нека $x+1=t$, т.е. $x=t-1$, $f(t)=a(t-1)^2+b(t-1)+c$.

$f(t)=at^2-2at+a+bt-b+c=at^2-(2a-b)t+a-b+c \Rightarrow f(x)=ax^2-(2a-b)x+a-b+c$.

9 а) $D_f=\mathbb{R}$; б) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$; в) $D_f=\mathbb{R}$; г) $x^2-5x+6\ge 0 \Rightarrow D_f=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$;

д) $1-\sin x\ge 0 \Rightarrow \sin x\ge 1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$; ѓ) $\begin{cases} x^2-2x>0 \\ 5-x\ge 0 \end{cases}$; $D_f=(-\infty,0)\cup(2,5]$.

10 а) $f(A)=[1,4]$; б) $f(0)=0$; $f(1)=\frac{1}{2}$; $f(A)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 11 $p=5\operatorname{tg}\alpha$; $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\alpha \mid \alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; $V=\mathbb{R}$.

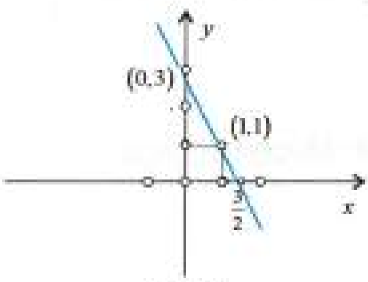
12 $b^2=(2R)^2-x^2$, т.е. $b=\sqrt{4R^2-x^2}$, значи $P=xb=x\sqrt{4R^2-x^2}$.

2 1 а) $y=-2x+3$; $D_f=\mathbb{R}$; $V_f=\mathbb{R}$. црт. 1.

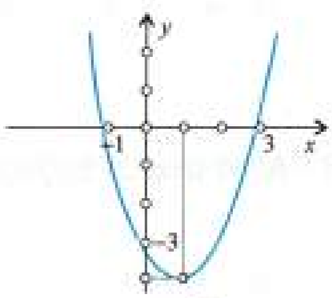
б) $y=x^2-2x-3$; Нули: $x_1=-1$, $x_2=3$; Теме: $\alpha=1$, $\beta=-4$; $D_f=\mathbb{R}$, $V_f=\mathbb{R}$, црт. 2.

в) $y=\frac{2}{x}$. $y=0$ е хоризонтална асимптота; $x=0$ е вертикална асимптота.

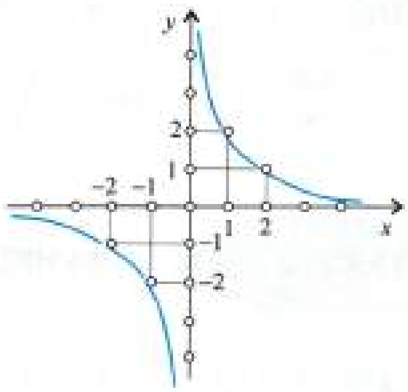
$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $V_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, црт. 3.



црт. 1



црт. 2



црт. 3

2 а) $x=\frac{3}{2}$; б) $x=\frac{4}{3}$. 3 а) $x_1=1$ или $x_2=2$; б) $x\left(x^4-5x^2+4\right)=0$; $x_1=0$ или $x_{2/3}=\pm 1$ или $x_{4/5}=\pm 2$.

4 а) $x=2$; б) $x_{1/2}=\pm 1$ или $x_{3/4}=\pm 4$. 5 а) $x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ или $x_2=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$.

6 а) $x^2-3=1$ т.е. $x_1=-2$ или $x_2=2$; б) $x^2+2x=8$ т.е. $x_1=-4$ или $x_2=2$.

7 а) $f(-x)=(-x)^2\cdot|\sin(-x)|=x^2|-\sin x|=x^2|\sin x|=f(x)$; б) $f(-x)=\frac{3(-x)^2}{4-(-x)^2}=\frac{3x^2}{4-x^2}=f(x)$;

в) $f(x)=\sqrt{\cos(-x)}=\sqrt{\cos x}=f(x)$. 8 а) $f(-x)=2(-x)^3-(-x)^5-2(-x)^7=-2x^3+x^5+2x^7=-\left(2x^3-x^5-2x^7\right)=-f(x)$;

б) $f(-x)=(-x)^3+4\operatorname{tg}(-x)=-x^3-4\operatorname{tg}x=-\left(x^3+4\operatorname{tg}x\right)=-f(x)$.

9 а) $f(-x)=(-x)^2-1-3\cos(-x)=x^2-1-3\cos x=f(x)$; парна

б) $f(-x)=(-x)^3+2+\sin(-x)=-x^3+2-\sin x\neq f(x)$; $f(-x)=-(x^3-2+\sin x)\neq -f(x)$. Ниту парна, ниту непарна;

в) $f(-x)=(-x)^n=\begin{cases} x^n & \text{за } n=2k;\ k\in\mathbb{N} \\ -x^n & \text{за } n=2k-1;\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$. Значи, за n парно, функцијата е парна, за n непарно функцијата е непарна.

10 а) $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)+\operatorname{tg}(-x)-(-x)^3}{\cos^2(-x)}=\dfrac{-\sin x-\operatorname{tg}x+x^3}{\cos^2 x}=-\dfrac{\sin x+\operatorname{tg}x-x^3}{\cos^2 x}=-f(x)$; непарна;

б) $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=-\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x)$; непарна.

11 а) $f(-x)=\dfrac{(1+a^{-x})^2}{a^{-x}}=\dfrac{(a^x+1)^2}{a^x}=f(x)$, парна;

б) $f(-x)=\lg\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\lg\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lg\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=\lg\dfrac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}=$

$=-\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)$, непарна.

3 1 а) $T=\dfrac{2\pi}{b}=\dfrac{2\pi}{\frac{4}{5}}=\dfrac{5\pi}{2}$; б) $T=\dfrac{\pi}{b}=\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$; в) $T=\dfrac{2\pi}{3}$. 2 а) $T=\pi$; б) $T=2\pi$; в) $y=\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$; $T=2\pi$.

3 а) $T_1=\dfrac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\dfrac{4\pi}{3}$, $T_2=\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$; $T=12\pi$; б) $T_1=\dfrac{2\pi}{3}$, $T_2=\dfrac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\dfrac{4\pi}{3}$; $T=\dfrac{4\pi}{3}$.

4 а) $f(x+T)=(x+T)\sin(x+T)\neq f(x)$, не е периодична; б) $f(x+T)=\sin 2(x+T)+\sin(x+T)=\sin x$, периодична, со период $T=2\pi$. 5 а) $f(x+T)=-2+\sin(x+T)=f(x)$, перодична со период $T=2\pi$;

б) $f(x+T)=x+T+\cos(x+T)\neq f(x)$, не е периодична.

6 а) $f(x_2)=-\dfrac{3}{2}x_2+1$; $f(x_1)=-\dfrac{3}{2}x_1+1$; За $x_2>x_1$ ќе нема $f(x_2)-f(x_1)=-\dfrac{3}{2}x_2+1+\dfrac{3}{2}x_1-1=-\dfrac{3}{2}(x_2-x_1)<0$;

б) $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{2}x_2+3-\dfrac{1}{2}x_1-3=\dfrac{1}{2}(x_2-x_1)>0$. 7 а) за $0<x_1<x_2<+\infty$ имаме: $f(x_2)-f(x_1)=\lg_2 x_2-\lg_2 x_1=\lg_2\dfrac{x_2}{x_1}>0$;

б) за $0<x_1<x_2<+\infty$ имаме: $f(x_2)-f(x_1)=\log_{\frac{1}{2}}x_2-\log_{\frac{1}{2}}x_1=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x_2}{x_1}<0$;

в) за $x_1<x_2$ имаме: $f(x_2)-f(x_1)=3^{-x_2}-3^{-x_1}=3^{-x_1}\left(3^{-(x_2-x_1)}-1\right)=\dfrac{1}{3^{x_1}}\left(\dfrac{1}{3^{x_2-x_1}}-1\right)<0$.

8 а) За $0\le x_1<x_2$ имаме: $f(x_2)-f(x_1)=x_2^2+1-x_1^2-1=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$, растечка;

б) за $0\le x_1<x_2\le 1$ имаме: $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{x_2+1}-\dfrac{1}{x_1+1}=\dfrac{x_1+1-x_2-1}{(x_2+1)(x_1+1)}=\dfrac{x_1-x_2}{(x_2+1)(x_1+1)}<0$; опаднувачка

в) за $0\le x_1<x_2$ имаме: $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{x_2^2+1}-\dfrac{1}{x_1^2+1}=\dfrac{x_1^2+1-x_2^2-1}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}=\dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}<0$, опаднувачка.

4 ① а) $\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}=3$; $V_f=[3,+\infty)$; б) $\beta=3$, $V_f=(-\infty,3]$; в) $V_f=\mathbb{R}$.

② а) $\beta=-\frac{49}{4}$, $V_f=\left[-\frac{49}{4},+\infty\right)$; б) $\beta=-\frac{25}{8}$, $V_f=\left(-\infty,\frac{25}{8}\right]$. ③ а) $y=\begin{cases}2x+1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$, $V_f=[1,+\infty)$;

б) $y=\begin{cases}2-x, & x\geq 1\\ x, & x<1\end{cases}$, $V_f=(-\infty,1]$. ④ а) $V_f=(1,+\infty]$; $y=1$ е хоризонтална асимптота; б) $V_f=(1,+\infty)$.

⑤ а) $y=\sin x\cos x=\frac{2\sin x\cos x}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x$. $V_f=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; б) $V_f=[-3,3]$.

⑥ 1. а) $\inf f(x)=3$; б) $\sup f(x)=3$; в) не постои. 2. а) $\inf f(x)=-\frac{49}{4}$; б) $\sup f(x)=\frac{25}{8}$. 3. а) $\inf f(x)=1$;

б) $\sup f(x)=1$. 4. а) $\inf f(x)=1$; б) $\inf f(x)=1$. 5. а) $\inf f(x)=-\frac{1}{2}$; $\sup f(x)=\frac{1}{2}$; б) $\inf f(x)=-3$; $\sup f(x)=3$.

⑦ а) $y_{\min}=\beta=-1$ за $x=1$; б) $y_{\max}=\beta=\frac{1}{4}$ за $x=\frac{3}{2}$; в) $y_{\min}=0$ за $x=0$. ⑧ а) $y_{\max}=1$ за $x=\frac{\pi}{2}$, $y_{\min}=-1$ за $x=\frac{3\pi}{2}$;

б) $y_{\max}=0$ за $x=0$ или $x=2\pi$, $y_{\min}=-2$ за $x=\pi$. ⑨ а) $y_{\max}=1$ за $x=0$; б) Нема екстреми.

⑩ а) $1+x^2\neq 0$, значи $D_f=\mathbb{R}$; б) $V_f=[-1,1]$, бидејќи од $y=\frac{2x}{1+x^2}$, добиваме $yx^2-2x+y=0$ од каде

$4-4y^2\geq 0$ т.е. $1-y^2\geq 0$; в) функцијата е ограничена, $-1\leq f(x)\leq 1$; г) за $x=1$, $y_{\max}=1$; за $x=-1$, $y_{\min}=-1$;

д) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; $f(x)$ опаѓа; $x\in(-1,1)$; $f(x)$ расте; ѓ) $f(-x)=\frac{2(-x)}{1+(-x)^2}=-\frac{2x}{1+x^2}=-f(x)$ непарна;

е) $f(x+T)=\frac{2(x+T)}{1+(x+T)^2}\neq f(x)$; не е периодична.

5 ① а) $(f+g)=3x^2+2x+4$; $D=D_f\cap D_g=\mathbb{R}$; $(f\cdot g)=6x^3+15x^2-2x-5$; $D=\mathbb{R}$;

б) $(f+q)=\frac{1}{x-1}+x-1=\frac{x^2}{x-1}$; $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $(f\cdot g)=1$; $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$;

в) $(f+g)=\frac{1-x}{1+x}+3x^2-1=\frac{3x^3+3x^2-2x+1}{1+x}$; $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $(f\cdot g)=\frac{-3x^3+3x^2+x-1}{1+x}$; $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

② а) $f(x)+g(x)=\frac{x}{1-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{x}=\frac{x^2+\sqrt{1-x}-\sqrt{x-x^2}}{x(1+\sqrt{x})}$; $D_f=[0,+\infty)\setminus\{1\}$; $D_g=(-\infty,1]\setminus\{0\}$; $D=(-\infty,1)\cup(0,+\infty)$.

б) $f(x)\cdot g(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$; $D=(-\infty,1)\cup(0,+\infty)$. ③ $f+f=4x+2$; $D=\mathbb{R}$; $f\cdot f\cdot f=8x^3+12x^2+6x+1$; $D=\mathbb{R}$.

4 а) $f\circ g=f\left(g(x)\right)=5g(x)-4=5\cdot(2-3x)-4=-15x+6;\ g\circ f=g\left(f(x)\right)=1-3f(x)=2-3(5x-4)=-15x+14;$

б) $f\circ g=f\left(g(x)\right)=\dfrac{1}{g(x)+2}=\dfrac{1}{2x+3+2}=\dfrac{1}{2x+5};\quad g\circ f=g\left(f(x)\right)=2f(x)+3=2\dfrac{1}{x+2}+3=\dfrac{3x+8}{x+2}.$

5 $f\circ g=f\left(g(x)\right)=1-\dfrac{x+3}{2x+4}=\dfrac{x+1}{2x+1};\ g\circ f=g\left(f(x)\right)=\dfrac{f(x)+3}{2f(x)+4}=\dfrac{1-x+3}{2(1-x)+4}=\dfrac{4-x}{6-2x}.$

6 $f\circ g=f\left(g(x)\right)=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\cos x};\ g\circ f=g\left(f(x)\right)=\cos f(x)=\cos\sqrt{x}.$

7 $f\circ f=f\left(f(x)\right)=\dfrac{1+3f(x)}{f(x)-3}=\dfrac{1+3f(x)}{f(x)-3}=\dfrac{1+3\frac{1+3x}{x-3}}{\frac{1+3x}{x-3}-3}=\dfrac{x-3+3+9x}{1+3x-3x+9}=x.$ 8 $f\left(f(x)\right)=\dfrac{2\frac{2x+1}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2}=\dfrac{4x+2+x-2}{2x+1-2x+4}=x.$

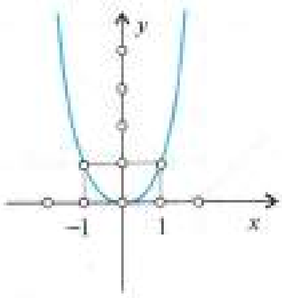
9 а) $12y=8-3x;\ 3x=8-12y;\ x=\dfrac{8-12y}{3}$, значи $f^{-1}(x)=\dfrac{8-12x}{3};$

б) $xy-2y=2x+3;\ x(y-2)=2y+3;\ x=\dfrac{2y+3}{y-2}$, значи $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{x-2};$

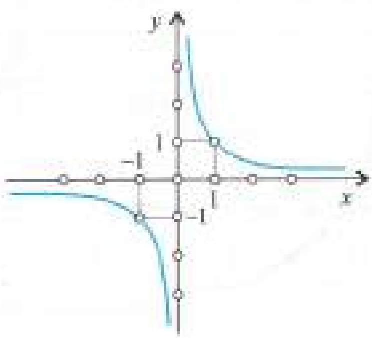
в) $\sqrt[3]{x}=y-1$, значи $x=(y-1)^3;\ f^{-1}(x)=(x-1)^3;$ г) $10^{x-2}=y-3$, значи $x=\lg(y-3)+2,\ f^{-1}(x)=\lg(x-3)+2.$

10 а) $f(x)=\dfrac{1}{x};\ x=\dfrac{1}{y}$, значи $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x};$ б) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x};\ y+xy=1-x;\ xy+x=1-y;\ x=\dfrac{1-y}{1+y}$, т.е. $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x}.$

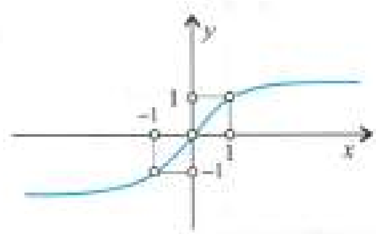
6 1 а) $y=x^4$, црт. 1. б) $y=x^{-5}$, црт. 2. в) $y=x^{\frac{1}{3}}$, црт. 3.



црт. 1

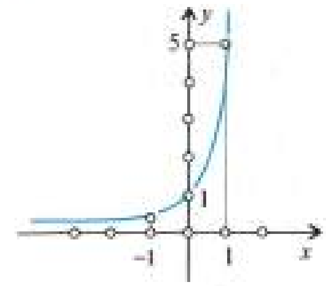


црт. 2

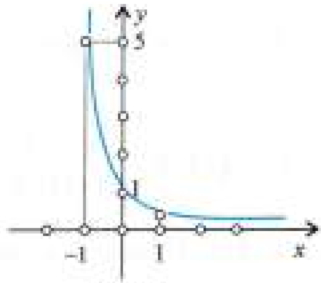


црт. 3

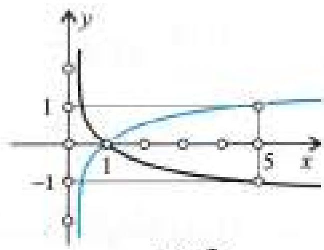
② а) $y=5^x$, црт. 4. б) $y=0,2^x$, црт. 5. в) $y=\log_5 x$, црт. 6. г) $y=\log_{\frac{1}{5}} x$, црт. 6.



црт. 4



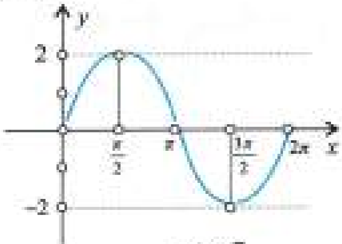
црт. 5



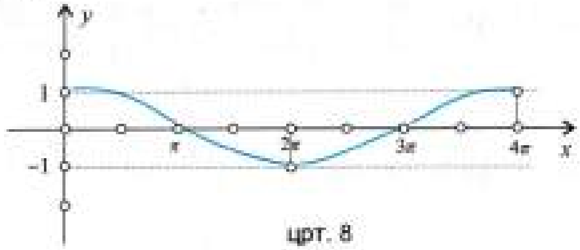
црт. 6

③ а) црт. 7.

б) црт. 8.

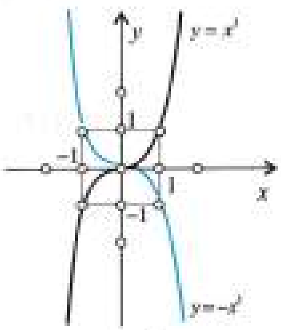


црт. 7

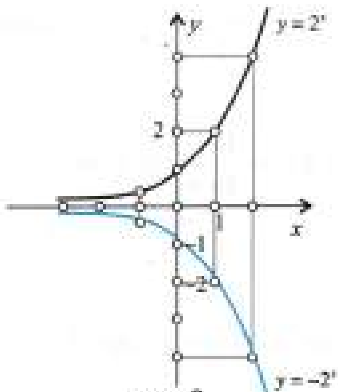


црт. 8

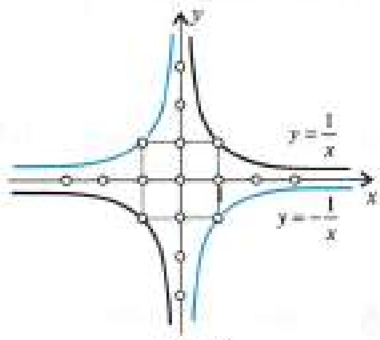
7 ① а) црт. 1. б) црт. 2. в) црт. 3



црт. 1

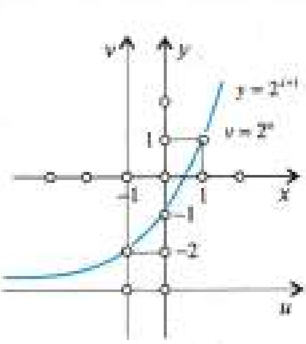


црт. 2

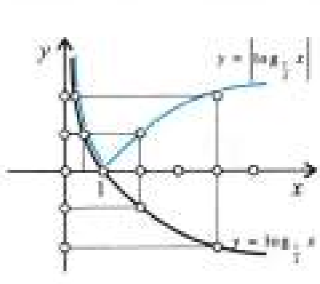


црт. 3

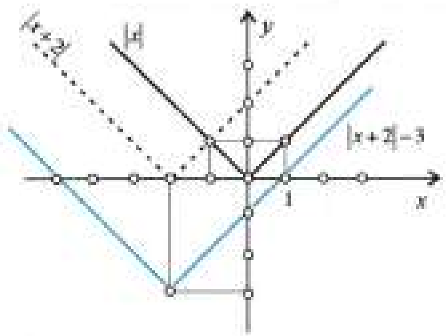
② а) црт. 4. б) црт. 5. в) црт. 5. ③ а) црт. 6. б) црт. 7. в) црт. 8.



црт. 4



црт. 5



црт. 6

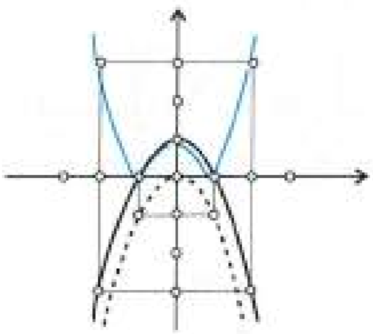


fig. 7

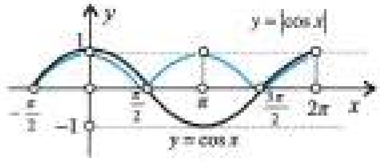


fig. 8

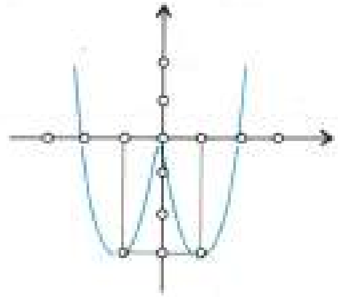


fig. 9

(4) a) $y=\begin{cases}x^2+6x & x\ge 0\\ x^2-6x & x<0\end{cases}$, fig. 9. b) fig. 10.

(5) a) fig. 11. b) fig. 12.

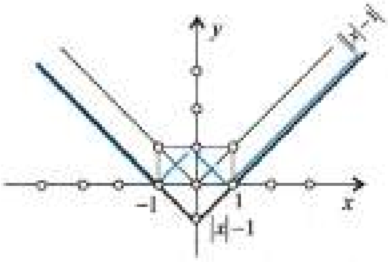


fig. 10

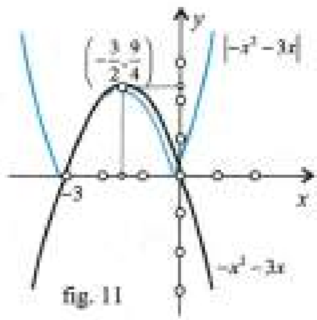


fig. 11

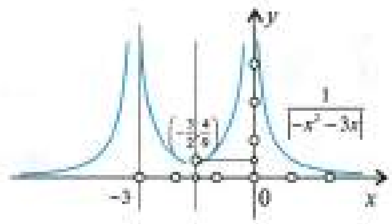


fig. 12

(6) a) fig. 13. b) fig. 13. c) fig. 14.

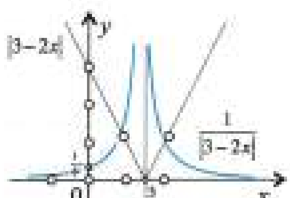


fig.13

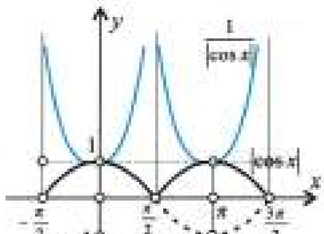


fig. 14

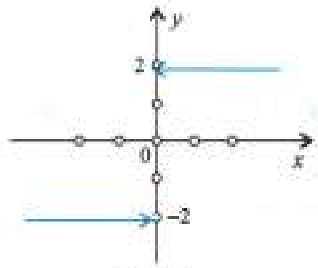
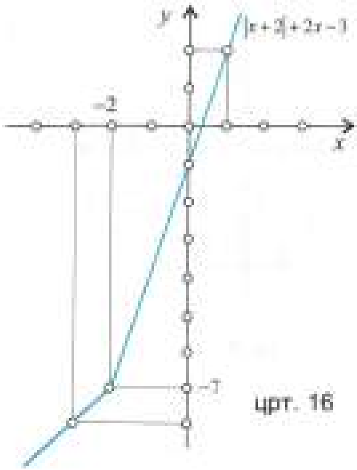


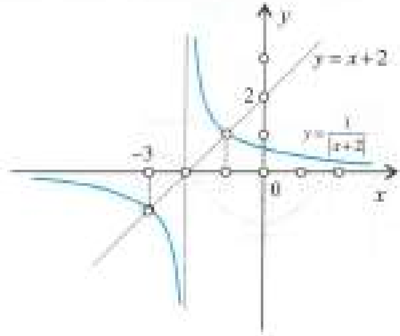
fig. 15

(7) a) $y=\frac{|2x|}{x}=\begin{cases}2; & x>0\\ -2; & x<0\end{cases}$, fig. 15. b) $y=\begin{cases}x+2+2x-3=3x-1, & x\ge -2\\ -x-2+2x-3=x-5, & x<2\end{cases}$, fig. 16.

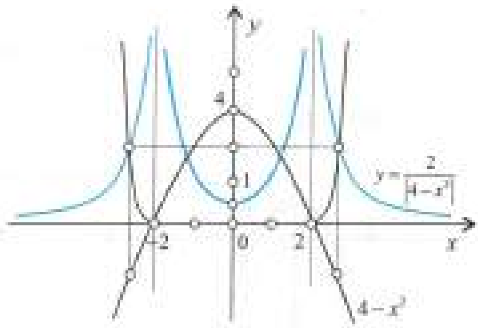
(8) a) fig. 17. b) fig. 18.



црт. 16



црт. 17



црт. 18

8 (1) а) -1; б) -1. (3) а) 1; б) -1. (4) а) 2; б) 4. (5) а) 2; б) 3. (6) а) -1; б) 0.

9 (1) а) $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{2x}{x+1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{2(-1-h)}{-1-h+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2x}{x+1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{2(-1+h)}{-1+h+1}=-\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{3x}{x-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3(1-h)}{1-h-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x}{x-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3(1+h)}{1+h-1}=+\infty$.

(2) а) $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{-1-h+1}{(-1-h-1)(-1-h+1)}=-\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{-1+h+1}{(-1+h-1)(-1+h+1)}=-\frac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{(1-h-1)(1-h+1)}{1-h-1}=2$; $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{h\to0}\frac{(1+h-1)(1+h+1)}{1+h-1}=2$.

(3) а) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3}{x-2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3}{2+h-2}=+\infty$; б) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3}{x-2}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3}{2-h-2}=-\infty$. (4) а) 1; б) 1.

(5) а) 1; б) 0; в) 0. (6) а) ∞; б) $-\infty$; в) $+\infty$. (7) а) $+\infty$; б) $-\infty$; в) $\pm\infty$; г) $-\infty$.

10 (1) а) -5; б) ∞. (2) а) $-\frac{1}{3}$; б) -1. (3) а) 2; б) $\frac{3}{2}$; в) 3.

(4) а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1}{4}$; б) ∞. (5) а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{2}$.

(6) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-4+2x}{2(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+4)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{5}{4}$.

(7) а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$; б) 2.

8 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\cdot 4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x\cos 4x}{\sin x}=2.$

11 1 а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 4x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}x}{\frac{\sin x}{4x}\cdot 4x\cdot\cos x}=\frac{1}{4}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2.$ 2 а) $\frac{1}{2}$; б) 0.

3 а) 4; б) 2. 4 а) 4; б) 4. 5 а) e; б) e; 6 а) e^2; б) $e^{-\frac{4}{3}}$.

7 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{x+1}-1\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)\cdot\frac{1}{-(x+1)}\cdot x}=e^{-1}$; б) e^4.

8 а) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot2x\cdot\frac{1}{x}}=e^2$; б) e^{-3}.

12 1 а) Функцијата е непрекината бидејќи:

$\lim\limits_{x\to2^-}(2x+1)=\lim\limits_{h\to0}\left(2(2-h)+1\right)=5$; $\lim\limits_{x\to2^+}(2x+1)=\lim\limits_{h\to0}\left(2(2+h)+1\right)=5$; $f(2)=5$;

б) Функцијата е прекината бидејќи $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{0-h}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{0+h}=+\infty$.

2 $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{h\to0}(-1)=-1$; $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{h\to0}(+1)=\pm1$. Значи функцијата е прекината.

3 $\lim\limits_{x\to0^-}x\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{h\to0}|0-h|=0$; $\lim\limits_{x\to0^+}x\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{h\to0}|0+h|=0$, значи функцијата е непрекината.

4 $\lim\limits_{x\to1^-}x=\lim\limits_{h\to0}(1-h)=1$; $\lim\limits_{x\to1^+}(4-x)=\lim\limits_{h\to0}(4-1-h)=3$; $f(1)=2$. Функцијата е прекината.

5 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\frac{\sin a}{a}=f(a)$, за $a\neq0$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. Значи $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{за } x\neq0\\ 1 & \text{за } x=0\end{cases}$.

6 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{0-h}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+}x=\lim\limits_{x\to0}(0+h)=0$ и $f(x)=0$, прекината во $x=0$.

7 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\frac{a^2+a-2}{2(a^3-1)}=f(a)$ за $a\neq1$. Ако $a=1$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{2}$. Значи $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-2}{2(x^3-1)}, & \text{за } x\neq1\\ \frac{1}{2}, & \text{за } x=1.\end{cases}$

8 $|\sin x-\sin a|=\left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|\leq2\cdot1\frac{|x-a|}{2}=|x-a|<\delta=\varepsilon.$ Соодветно, $\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\leq1$ и $\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|<\left|\frac{x-a}{2}\right|$.

13 1 а) $x=2$ е вертикална асимптота; $y=1$ е хоризонтална асимптота;

б) $x=2$ е вертикална асимптота; $y=x+2$ е коса асимптота.

2 а) $x=0$ е вертикална асимптота; $y=x+1$ е коса асимптота; б) $y=0$ е хоризонтална асимптота.

3 а) $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$ се вертикални асимптоти; $y=-x$ е коса асимптота; б) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ е коса асимптота.

4 а) $y=1$ е хоризонтална асимптота; б) $y=0$ е хоризонтална асимптота кога $x\to+\infty$.

ТЕМА 3 ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ

1

(1) Бидејќи $L=2(a+b)$, нека $a=15\,\mathrm{m}$, $b=20\,\mathrm{m}$.

а) $\Delta L=2(a+\Delta a+b)-2(a+b)=2\cdot\Delta a=2\cdot 0{,}11=0{,}22\,\mathrm{m}$. $\Delta P=(a+\Delta a)\cdot b-ab=\Delta a\cdot b=0{,}11\cdot 20=2{,}2\,\mathrm{m}^2$.

б) $\Delta L=2\cdot\Delta b=2\cdot 0{,}2=0{,}4\,\mathrm{m}$; $\Delta P=a\cdot\Delta b=15\cdot 0{,}2=3\,\mathrm{m}^2$.

(2) $P=r^2\pi$. а) $\Delta P=(r+\Delta r)^2\cdot\pi-r^2\pi=\Delta r(2r+\Delta r)\pi$. б) $\Delta P=0{,}2(2\cdot 2+0{,}2)\pi=0{,}84\pi\,\mathrm{cm}^2$; в) $0{,}41\pi\,\mathrm{cm}^2$.

(3) а) $\Delta R=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(-2+0{,}1)-f(-2)=f(-1{,}8)-f(-2)=\dfrac{2}{1{,}8}+1=2\dfrac{1}{9}$. б) -2,32; в) 0,03; г) 0,205.

(4) а) $\Delta x=2{,}6-2{,}5=0{,}1$. $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=\left(4(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^2\right)-\left(4x-x^2\right)$; $\Delta f=\Delta x(4-2x-\Delta x)$.

За $x=x_0=2{,}5$ и $\Delta x=0{,}1$. $\Delta f=0{,}1(4-2\cdot 2{,}5-0{,}1)=-0{,}11$. б) $\Delta x=0{,}125$, $\Delta f=0{,}1$. в) $\Delta x=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{12}$;

$\Delta f=\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12}\right)-\cos^2\dfrac{2\pi}{3}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$; г) $\Delta x=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$, $\Delta f=tg\dfrac{\pi}{3}-tg\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{3}-1$.

(5) а) $y'=1$; б) $y'=2x$, за $x_0=2$; $y'_{(2)}=2\cdot 2=4$. в) $\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\cdot\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$;

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x\left(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}$; $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)=3x^2$, за $x=x_0=-1$, $y'(-1)=3\cdot(-1)^2=3$.

г) $y'=\dfrac{x^2+1}{x^2}$, за $x=x_0=1$, $y'(1)=2$.

(6) а) $y=|x+1|=\begin{cases}x+1 & \text{за } x\ge -1\\ -(x+1) & \text{за } x<-1\end{cases}$ за $x\ge -1$, $f'_+(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

$f'_+(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{(x+\Delta x+1)-(x+1)}{\Delta x}=1$; $f'_-(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-(x+\Delta x+1)-(-(x+1))}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$.

б) $f'_-(1)=-1$; $f'_+(1)=1$. в) $f'_-(0)$ не постои бидејќи функцијата за $x<0$ не е дефинирана, а $f'_+(0)=0$.

(7) а) Ја испитуваме деференцијабилноста само од десно, т.е. $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, бидејќи

$\Delta x=x-x_0=x-0$, кога $\Delta x\to 0^+$, тогаш $x\to 0^+$, па $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}=0$.

Значи $f'_+(0)=0$, т.е. функцијата е диференцијабилна. б) Функцијата не е деференцијабилна, бидејќи е прекината и ако $f'_-(1)=f'_+(1)$. в) Функцијата не е дифенренцијабилна.

2

(1) а) $y'=6x^5$; б) $y=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}$; $y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; в) $y=x^{-10}$, $y'=-10x^{-11}=\dfrac{-10}{x^{11}}$.

(2) а) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\Delta x(-2x-\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-2x-\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$; $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2x-\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}=\dfrac{-2}{x^3}$

или $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'=\left(x^{-2}\right)'=-2x^{-2-1}=-\dfrac{2}{x^3}$;

б) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\Delta x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

или $\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. в) $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$. (3) $(x+2)'=\left(2x^2-3x+4\right)'$; $1=4x-3$, $x=1$.

За $x=1$; $y(1)=1+2=3$ и за втората функција $y(1)=2\cdot 1^2-3\cdot 1+4=3$, т.е. $A(1,3)$.

(4) $y'=\cos x$; $\cos x=1$, $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. (5) $y'=-\sin x$; $-\sin x=0$, $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

(6) $(\sin x)'=(\cos x)'$; $\cos x+\sin x=0$, $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

3 (1) а) $y'=x$; б) $y=-3x^2$; в) $y'=-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$, $y'=m$. (2) а) $y'=4x-3$; б) $y'=\sqrt{2}-6x$; в) $y'=1-x+x^2$;

г) $y'=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^4}+\frac{12}{x^5}$. (3) а) $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; б) $y'=-\frac{3}{5\sqrt[5]{x^8}}$; в) $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$; г) $y'=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

(4) а) $y'=\cos x+2\sin x$; б) $y'=5x^4-e^x+\frac{1}{x}$; в) $y'=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{4}{4\sin^2\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}$.

(5) а) $y'=-6x^2+14x-3$; б) $y'=9x^2-20x-11$; в) $y'=5x^4-4x^3+3x^2-2x$.

(6) а) $y'=1$; б) $y'=\frac{\left(1+\cos^2 x\right)tg\, x}{\cos x}$; $y'=-\frac{\left(1+\sin^2 x\right)ctg\, x}{\sin x}$. (7) а) $y'=x^2(3\ln x+1)$; б) $y'=xe^x(2+x)$;

в) $y'=(x)'e^x\ln x+x\cdot\left(e^x\right)'\ln x+xe^x\cdot(\ln x)'$; $y'=e^x(\ln x+x\ln x+1)$.

(8) а) $y'=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$; б) $y'=\frac{-3x^2-2x+3}{\left(x^2+1\right)^2}$; в) $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$; г) $y'=-\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}=-\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$.

(9) а) $y'=\frac{2}{x(\ln x+1)^2}$; б) $y'=\frac{1-2\ln x}{x^3}$; г) $y'=\frac{1-x}{e^x}$.

(10) а) $f'(x)=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$; $f'(0)=0$; $f'(1)=\frac{2e}{(e+1)^2}$, а $f'(-1)=\frac{2e^{-1}}{\left(e^{-1}+1\right)^2}=\frac{\frac{2}{e}}{\frac{(1+e)^2}{e^2}}=\frac{2e}{(e+1)^2}$, т.е. $f'(1)=f'(-1)$.

4 (1) а) $y'=4\left(3x^2+5x-1\right)^3\left(3x^2+5x-1\right)'=4\left(3x^2+5x-1\right)^3\cdot(6x+5)$; б) $y'=-132x^3\left(5-3x^4\right)^{10}$;

в) $y'=2b(a+bx)$; г) $y'=-15bx^2\left(a-bx^3\right)^4$.

(2) а) $y'=(2x-3)(6x-15)$; б) $y'=3(3x-2)\left(x^2+3x-4\right)^2\left(8x^2+11x-14\right)$. (3) а) $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$; б) $y'=\frac{2ax^2}{\sqrt[3]{\left(4+2ax^3\right)^2}}$.

(4) а) $y'=2-\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$; б) $y'=2x+\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. (5) а) $y'=\frac{6x^2+1}{\sqrt{2x^2+1}}$; б) $y'=\frac{x+2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

(6) а) $h(x)=f(g(x))=3-2g(x)=3-2\cdot x^2$; $f'(x)=-4x$; б) $h(x)=g(f(x))=(f(x))^2=(3-2x)^2$; $h'(x)=-4(3-2x)$;
в) $h(x)=g(p(x))=(\sin x)^2=\sin^2 x$, $h'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$;
г) $h(x)=p(f(x))=\sin(f(x))=\sin(3-2x)$; $h'(x)=-2\cos(3-2x)$.

(7) а) $h(x)=f(g(x))=\dfrac{1}{g(x)-1}=\dfrac{1}{\cos x-1}$, $D_h: x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, $h'(x)=\dfrac{-\sin x}{(\cos x-1)^2}$;

б) $h(x)=f(p(x))=\dfrac{1}{p(x)-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$, $x\in R^+\setminus\{1\}$, $h'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$;

в) $h(x)=p(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\cos x}$; $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, $h'(x)=-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$;

г) $h(x)=p(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x>1$, $h'(x)=-\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)'}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=-\dfrac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$.

(8) а) $y'=e^{2x-3}(2x-3)'=2e^{2x-3}$; б) $y'=\dfrac{\left(x^2-3x\right)'}{x^2-3x}=\dfrac{2x-3}{x^2-3x}$; в) $y'=\dfrac{(\sin x)'}{\sin x}=\operatorname{ctg} x$.

(9) а) $y'=3\cos 3x$; б) $y'=3\sin^2 x\cdot\cos x$; в) $y'=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}$.

(10) а) $y'=-\sin\sqrt{a}x\left(\sqrt{ax}\right)'=-\sin\sqrt{ax}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{ax}}\cdot(ax)'=-\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}\sin\sqrt{ax}$; б) $y'=-2\sin 2x\cdot\operatorname{tg}^2 x+\cos 2x\cdot 2\operatorname{tg}x\cdot(\operatorname{tg}x)'$;

$y'=-2\sin 2x\cdot\operatorname{tg}^2 x+\cos 2x\cdot 2\operatorname{tg}x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$, по примена на соодветни тригонометриски трансформации имаме

$y'=\dfrac{\operatorname{tg}x\left(2\cos 2x-\sin^2 2x\right)}{\cos^2 x}$. (11) а) $y=\sqrt[5]{x-x^3}$; $y'=\dfrac{-\left(1-3x^2\right)}{5\sqrt[5]{\left(x-x^3\right)^4}}$; б) $y'=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; в) $y'=\pm\dfrac{2-x}{\sqrt{x^2-4x+3}}$; г) $y'=\dfrac{1-4x+2x^2}{(1-x)^2}$.

5 (1) а) $y'=10x-3$, $y''=10$; б) $y'=4\cdot\dfrac{1}{12}x^3-\dfrac{7}{6}3x^2$, $y''=x^2-7x$.

(2) а) $y'=\dfrac{4-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$, $y''=\dfrac{\left(4-4x^2\right)'\left(1+x^2\right)^2-\left(4-4x^2\right)\left(\left(1+x^2\right)^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^4}$; $y''=\dfrac{-8x^2\left(1+x^2\right)^2-\left(4-4x^2\right)2\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}$;

$y''=\dfrac{\left(1+x^2\right)(-8x)\left(x+x^3+2+2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=\dfrac{\left(1+x^2\right)(-8x)\left(1+x^2\right)(x+2)}{\left(1+x^2\right)^4}$; $y''=\dfrac{-8x(x+2)}{\left(1+x^2\right)^2}$; б) $y'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; $y''=-\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$.

(3) а) $y'=\ln x+1$; $y''=\dfrac{1}{x}$; б) $y'=(1+2x)e^{2x}$; $y''=(4+4x)e^{2x}$.

(4) а) $y'=\dfrac{2}{(1-x)^2}$; $y''=-\dfrac{2\left((1-x)^2\right)'}{\left((1-x)^2\right)^2}=\dfrac{4}{(1-x)^3}$; б) $y'=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$; $y''=\dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$;

в) $y'=(1+\cos x)e^{\sin x}$; $y''=\left(\cos^2 x+\cos x-\sin x\right)e^{\sin x}$.

(5) а) $y=\pm\sqrt{25-x^2}$; $y'=\pm\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}$, $y''=-\dfrac{25}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^3}}$; б) $y''=\dfrac{4}{(1-x)^3}$.

(6) а) $y'=3x^2-6x-9$; $y''=6x-6$; $y''(-1)=6\cdot(-1)-6=-12$; б) за $y=8$ имаме $8=\frac{x^2}{x-2}$; $8x-16=x^2$; $x=4$.

$y'=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$; $y''=\frac{8}{(x-2)^3}$; $y''_{(4)}=\frac{8}{(4-2)^3}=1$. (7) $f'(x)=2ax+b$; $f''(x)=2a$.

Оттука следува $2a=4$, $a=2$. Од $f'(2)=2\cdot2\cdot3+b=9$; $b=-3$ и $f(-1)=2(-1)^2-3(-1)+c=7$, $c=2$.

6 (1) а) $f(x_0+\Delta x)=f(1,1)=1,1^2-1,1+1=1,11$, $f(x_0)=f(x_0)=f(1)=1$; $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x)=1,11-1=0,11$,

$df(x_0)=f'(x_0)\cdot dx=(2x_0-1)dx=(2\cdot1-1)0,1=0,1$; б) $\Delta f=+3,88$; $df(-2)=f'(-2)\cdot dx=4,2$;

в) $\Delta f=-0,0871$; $df=-0,0872$. (2) а) $dy=-\frac{1}{x^2}dx$; б) $dy=-\frac{3}{x^4}dx$; в) $dy=\frac{x\,d\,x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(3) а) $dy=\frac{(1+2x^2)dx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $dy=x(2\ln x+1)dx$; в) $dy=\sin 2x\,dx$. (4) $\Delta f=0,1$; $dy=0,1025$, па $|\Delta f-dy|=0,0025$.

(5) а) $df=6xdx$, $f(1-0,01)=f(x_0)+f'(x)dx=f(0,99)=3\cdot1^2+6\cdot1\cdot(-0,01)=3-0,06=2,94$;

б) $df=-\frac{1}{x}dx$; $f(1+0,01)=f(1)+df(1)=1-0,01=0,99$.

(6) а) $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)dx$; $x_0=64$, $dx=1$, па $\sqrt[3]{64+1}=\sqrt[3]{64}+\frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}=4+\frac{1}{48}=4,0208$; б) 2,96.

(7) а) $\sin(x_0+\Delta x)=\sin x_0+(\sin x_0)'dx$; $x_0=30^0$, $\Delta x=1^0=\frac{\pi}{180^0}$; $\sin 31^0=\sin 30^0+\cos 30^0\cdot\frac{\pi}{180^0}=\frac{1}{2}+0,01511=0,51511$;

б) $\ln(x_0+\Delta x)=\ln x_0+\frac{1}{x_0}dx$; $x_0=1$, $dx=-0,1$; $\ln 9=1+\frac{1}{1}\cdot(-0,1)=-0,1$.

(8) Од $P=a^2$ следува $dp=2adx$, а $\Delta P=(a+\Delta x)^2-a^2=(2a+\Delta x)\Delta x$. За $a=50\,\mathrm{m}$ и $dx=0,01$ имаме:

$P=50^2=2500\,\mathrm{m}^2$. $dP=2\cdot50\cdot0,01=1\,\mathrm{m}^2$, а $\Delta P=(2\cdot50+0,01)0,01=1,0001\,\mathrm{m}^2$. Од $P(a+\Delta a)-P(a)=\Delta P$ следува

$P(a+\Delta x)=P(a)+\Delta P$, т.е. $P=(2500+1,0001)\,\mathrm{m}^2$; $P(a+\Delta x)=P(a)+dP$, т.е. $P=(2500+1,00)\,\mathrm{m}^2$.

Точната грешка на пресметаната плоштина изнесува $\Delta P=1,0001\,\mathrm{m}^2$. Ако наместо ΔP замениме $dP=1,00\,\mathrm{m}^2$, разликата е $0,0001\,\mathrm{m}^2=1\,\mathrm{cm}^2$, па со голема точност може да се земе дека грешката е $dP=1\,\mathrm{m}^2$.

(9) $\Delta P=0,4001$, $dp=0,4$, па $|\Delta P-dp|=0,0001$.

(10) Точната грешка е $\Delta P=62,9256$, а $dP=62,8\,\mathrm{cm}^2$, па ако наместо ΔP заменуваме dP, грешката изнесува $62,9256-62,8=0,1256\,\mathrm{cm}^2=12,56\,\mathrm{mm}^2$.

7 (1) $y'=10x-2$; а) $k=y'(0)=-2$; б) $k=8$; в) $k=-22$; г) $y'=10\cdot\frac{1}{5}-2=0$.

(2) $y'=-\sin x$; а) $k=-\sin 0=0$; б) $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $k=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (3) $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$; а) $k=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}=2$; б) $k=2$; в) $k=4$.

(4) $y'=3x^2$, $3x_0^2=3$; $x_0^2=1$; $x=\pm1$, а $x=3\cdot(\pm1)^3=\pm3$. Бараните точки се $A(1,3)$ и $B(-1,-3)$.

(5) $y' = 1-2x$; а) $\alpha = 0$, па $k = tg\,0^\circ = 0 = 1-2x$, $x = \frac{1}{2}$, а $y = -3+\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, $y = -\frac{11}{4}$; $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$;

б) $\alpha = 45^\circ$, а $k = 1$ па $x = 0$; $y = -3$ т.е. $A(0,-3)$.

(6) а) $y' = 2x-3$; $k = tg\frac{\pi}{4} = 1$; $2x-3 = 1$; $x = 2$, а $y = 2^2-3\cdot 2+2 = 0$. Бараната точка е $A(2,0)$; б) $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

(7) $y' = \frac{1}{x}$, а) Од условот $k_1 = k_2$, имаме $(x-1)' = \frac{1}{x}$, т.е. $\frac{1}{x} = 1$; $x = 1$, а $y = \ln 1 = 0$, $A(1,0)$;

б) $(2x-3)' = \frac{1}{x}$; $2 = \frac{1}{x}$, $x = 2$, а $y = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$; $A(2, -\ln 2)$.

(8) Од условот $k_1 = k_2$ следува $\left(x^3-x-1\right)' = \left(3x^2-4x+1\right)'$ т.е. $3x^2-1 = 6x-4$, па $x = 1$. Бараните точки имаат апциса $x = 1$. Точката што лежи на кривата $y = x^3-x-1$ е $y = 1^3-1-1 = -1$, т.е. $A(1,-1)$, а на кривата $y = 3x^2-4x+1$ е $y = 3\cdot 12-4\cdot 1+1 = 0$ па $B(1,0)$.

(9) Од $x+3y-4 = 0$ следува $y = -\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$, а од условот за нормалноста $1+k_1\cdot k_2 = 0$ следува

$1+\left(x^3-3x^2+3x+3\right)'\cdot\left(-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\right)' = 0$, т.е. $1+\left(3x^2-6x+3\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$. Оттука следува $1-x^2+2x-1 = 0$; $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Ординати на точката од кривата c се $y_1 = 3$ и $y_2 = 5$, па бараните точки се $A(0,3)$; $B(2,5)$.

(10) Аголот под кој се сечат кривите на две функции е агол што го образуваат тангентите на кривите во нивната пресечна точка. а) Пресечната точка е решение на системот $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$. Пресечните точки се $A(0,0)$ и $B(1,1)$.

Извод на функцијата е $y' = 2x$ и $2y\cdot y' = 1$, т.е. $y' = \frac{1}{2y}$. Во точката A, $k_1 = 2\cdot 0 = 0$, тангентата е паралелна со x - оската, а за втората крива k не постои, значи тангентата е нормална со y - оската, па аголот меѓу нив е 90°.

Во точката B, $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$, па според формулата $tg\,\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$ имаме $tg\,\varphi = -\frac{3}{4}$, а $\varphi = arctg\frac{3}{4} = 36^\circ 52'$;

б) Решение на системот $\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \end{cases}$ е $x = \frac{\pi}{4}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. За $k = 0$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, за $k = 1$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $B\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Бидејќи аглите под кои се сечат кривите се еднакви во сите пресечни точки, доволно е да се пресмета аголот во точката A. За функцијата $y = \sin x$ имаме $y' = \cos x$, $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. За функцијата $y = \cos x$ имаме $y' = -\sin x$, $k_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, па $tg\,\varphi = -2\sqrt{2}$, а $\varphi = arctg\,2\sqrt{2} = 70^\circ 31'43''$.

8 (1) За $x = 1$, $y = 1^4-1^2+3 = 3$; $M(1,3)$. $f'(x) = 4x^3-2x$, па $k = f'(1) = 4\cdot 1^3-2\cdot 1 = 3$.

$t: y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$; $t: 2x-y+1 = 0$; $n: y-y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$; $x+2y-7 = 0$.

(2) $y' = \frac{5-3x}{3\sqrt{3-x}}$. а) $k_t = f'(-1) = 2$; $t: y = 2x+2$, $n: y = -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$. Должината на тангентата и на нормалата 0. б) $t: x+2y-4 = 0$, должината на тангентата е $3\sqrt{5}$; $n: 2x-y-1$, должината на нормалата е $1{,}5\cdot\sqrt{5}$.

(3) Пресечните точки со x - оската се $A(2,0)$ и $B(-2,0)$, а $y'=-2x$. Во точката $A(2,0)$, $k=-4$, а $t: y=-4x+8;$ $n: x-4y-2=0$. Во точката $B: k=4;$ $t: y=4x+8;$ $n: x+4y+2=0$.

(4) За $x=0$, $y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3$. Тангентата ја бараме во точката $A(0,3)$. Функцијата е дадена во имплицитен вид, па $y=\sqrt{9-4x-x^2}$, а $y'=-\dfrac{2+x}{\sqrt{9-4x-x^2}}$. $y'(0)=-\dfrac{5}{3}$, па $t: 5x+3y-9=0$, а $n: 3x+5y+15=0$.

(5) Пресечните точки се $A(0,1)$, $B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, $y'=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Во точката $A(0,1)$, $k=f'(0)=0$, па $t: y=1$. Бидејќи тангентата е паралелна со x - оската, нормалната е паралелна со y оската, т.е. $x=0$, самата y - оска. Во точката $B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, $k=f'(1)=-\dfrac{1}{2}$, па $t: x+2y-2=0$, а $n: 4x-2y-3=0$.

(6) Бидејќи $k=f'(x_0)=4$, треба да ја најдеме точката. Од $f'(x_0)=3x^2-4x_0$ имаме $3x_0^2-4x_0=4$. Решенијата на равенката се $x_0=2$ и $x_0=-\dfrac{2}{3}$, а за $x_0=2$, $y_0=2^3-2\cdot 2^2=0$, па $A(2,0)$. За $x=-\dfrac{2}{3}$, $y_0=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3-2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2=-\dfrac{32}{27}$, па $B\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{32}{27}\right)$. Во точката A, $t: y=4x-8;$ $n: x+4y-2=0$, а во B, $t: 108x-27y-70=0;$ $n: 27x+108y+146=0$.

(7) Симетралата на вториот квадрант е $y=-x$, а од условот за паралелност имаме $\left(x^2+4x+3\right)'=(-x)'$, т.е. $2x+4=-1$, $x=-\dfrac{5}{2}$, а $y=\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2-4\left(-\dfrac{5}{2}\right)+3=-\dfrac{3}{4}$. Коефициентот на правецот на тангентата е $k=(-x)'=-1$, па тангентата е $4x+4y+13=0$. Должината на тангентата е $t=\left|\dfrac{-\frac{3}{4}}{-1}\right|\cdot\sqrt{1+(-1)^2}=\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$.

(8) Од $2x+4y-3=0$, следува $k=-\dfrac{1}{2}$, а $k_1=2$, а $y'=\dfrac{7x}{\sqrt{14x^2-28}}$, имаме $\dfrac{7x}{\sqrt{14x^2-28}}=2$.

Следува $x=4$, па допирната точка на тангентата е $A(4,7)$, а тангентата е $y=2x-1$. Нормалата е $n: y-7=-\dfrac{1}{2}(x-4);$ $x+2y-28=0$. Должината на нормалата е $n=7\sqrt{1+(2)^2}=7\sqrt{5}$.

(9) $f'(x_0)=\varnothing'(x_0)$, т.е. $\left(x^3-2x^2\right)'=\left(2x^2+3x-2\right)';$ $3x^2-4x=4x+3$, $3x^2-8x-3=0$. $x_1=3$, $x_2=-\dfrac{1}{3}$.
На кривата $y=x^3-2x^2;$ за $x_1=3;$ $y_1=9;$ $A_1(3,9)$, а за $x_2=-\dfrac{1}{3}$, $y_2=-\dfrac{7}{27}$, $A_2\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{7}{27}\right)$, па тангентите се t_1: $15x-y-36=0;$ t_2: $405x-27y+2=0$, на кривата $y=2x^2+3x-2$, допирните точки се $B(3,25)$ и $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{25}{9}\right)$, t_1: $15x-y-20=0;$ t_2: $135x-9y+70=0$.

(10) $y'=-\dfrac{x_0}{y_0}$ т.е. $k_t=-\dfrac{x_0}{y_0}$, па t: $y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$. По средувањето добиваме $y\,y_0-y_0^2=-x\,x_0+x_0^2$, т.е. $x\,x_0+y\,y_0=x_0^2+y_0^2=r^2$.

9

1 а) $v_{ср}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{2(t+\Delta t)^2-3(t+\Delta t)+4-\left(2t^2-3t+4\right)}{\Delta t}$;

$v_{ср}=4t+2\Delta t-3=4\cdot 5+2\Delta t-3=17+2\Delta t$. За $\Delta t=1$, $v_{ср}=17+2\cdot 1=19$; $\Delta t=0,5$, $v_{ср}=18$; $\Delta t=0,1$, $v_{ср}=17,2$; $\Delta t=0,01$, $v_{ср}=17,02\,\mathrm{m/s}$. б) $v(5)=\left(2t^2-3t+4\right)'=4t-3=4\cdot 5-3=17$. в) $v=(4t-3)\,\mathrm{m/s}$.

2 а) $t=0$, $s=1\,\mathrm{m}$; $v(0)=3$; $a(0)=-4\,\mathrm{m/s^2}$; б) $t=2$, $s=2^3-2\cdot 2^2+3\cdot 2+1=7\,\mathrm{m}$; $v(2)=s'(2)=7\,\mathrm{m/s}$; $a(2)=s''(2)=6\cdot 2-4=8\,\mathrm{m/s^2}$.

3 а) $v=58\,\mathrm{m/s}$; $a=46\,\mathrm{m/s^2}$; б) $v=12,5\,\mathrm{m/s}$; $a=5,5\,\mathrm{m/s^2}$; в) $v=6\cos 2t$; $v\left(\frac{\pi}{6}\right)=6\cdot\cos\frac{\pi}{3}=6\cdot\frac{1}{2}=3\,\mathrm{m/s}$, $a=v'=12(-\sin 2t)=-12\sin 2t=-12\cdot\sin\frac{\pi}{3}=-6\sqrt{3}\,\mathrm{m/s^2}$.

4 $v=s'(t)=t^2-4t+3$; $a=s''(t)=2t-4$. Телото ја менува насоката во моментот кога $v=0$, т.е. $t^2-4t+3=0$ или $t_1=1$; $t_2=3$.

5 $v=t^2-3t+1$, за $v=5$ следува $t^2-3t+1=5$; $t_1=4$, $t_2=-1$. Решението е $t=4$ секунди.

6 $v=s'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$; $a=s''(t)=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)'=-\frac{1}{4\sqrt{t^3}}=-\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^3$, т.е. $a=-2\cdot v^3$.

7 а) $V_{(10)}=40\ell$; б) $v=0$; $120+2t-t^2=0$, $t=12$ сек. а $Q_{max}=120\cdot 12+12^2-\frac{1}{3}\cdot 12^3=1008\,\ell$.

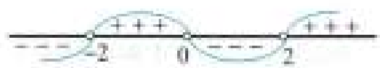
8 $T_{(5)}=\left(0,5t^2-2t\right)'=t-2=5-2=3$, т.е. 3 степени во секунда.

9 $v=6t+1$; $v_{(4)}=6\cdot 4+1=25$, а $E=\frac{10\cdot 25^2}{2}=3125$ џула. 10 $a=y''(t)=ae^t+be^{-t}$.

10

1 а) Опаѓа за $x\in(-\infty,+\infty)$; б) расте за $x\in(-\infty,+\infty)$; в) расте за $x>0$, а опаѓа за $x<0$; г) опаѓа за секое x.

2 а) расте за $x<\frac{1}{2}$, опаѓа за $x>\frac{1}{2}$; б) $f'(x)=x\left(x^2-4\right)=x(x-2)(x+2)$.



Нулите на првиот извод се 0,2 или −2, а кривата на знакот на изводот е

$f'(x)>0$ за $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$. Функцијата расте во $(-2,0)$ и $(2,+\infty)$. $f'(x)<0$ за $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$, функцијата опаѓа во $(-\infty,-2)$ и $(0,2)$. в) Расте во $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$, а опаѓа во интервалот $(-1,1)$.

3 а) За секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ расте; б) расте во $(-1,1)$, а опаѓа во интервалите $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$.

4 а) $f'(x)=\frac{\left(2x-x^2\right)'}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$. $f'(x)>0$; $1-x>0$; $x\in(-\infty,1)$. Бидејќи функцијата е дефинирана за $x\in[0,2]$, имаме $x\in(-\infty,1)\cap[0,2]=[0,1)$. За $x=0$, $f'(x)$ не постои, значи функцијата расте во $(0,1)$. $f'(x)<0$ за $x\in(1,+\infty)$, па функцијата опаѓа во $[0,2]\cap(1,+\infty)=(1,2)$. Внимавај $f'(2)$ не постои; б) расте во $(2,+\infty)$, а опаѓа во $(-\infty,1)$.

5 а) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+x^2\right)'=\frac{x}{1+x^2}$. Расте за $x>0$, а опаѓа за $x<0$.

б) $f'(x)=e^{-x^2}+x\cdot e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=e^{-x^2}(1-2x^2)$. Расте во $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, а опаѓа во $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$.

6 а) Расте во $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, а опаѓа во $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) $f'(x)=2\cos x(\cos x)'=-\sin 2x$. Расте во $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right)$, а опаѓа во интервалот $\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

7 а) $f'(x)=-1+\sin x$, бидејќи $-1\le\sin x\le1$, следува $f'(x)\le0$, значи функцијата монотоно опаѓа на целиот интервал и ако, во некои точки $f'(x)=0$, имено за $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $f'(x)=0$. 8 а) опаѓа; б) опаѓа.

11 1 а) $f'(x)=-\frac{1}{3}<0$, опаѓа за секое $x\in\mathbb{R}$. Нема екстремни вредности; б) $f'(x)=2x-5=0$ за $x=\frac{5}{2}$. $f''(x)=2>0$, функцијата има минимуми за $x=\frac{5}{2}$, $y_{min}=-5\frac{1}{4}$; в) $f'(x)=-4x^3+4x$, $f'(x)=0$ за $x=0$, $x=1$ и $x=-1$. $f''(x)=-12x+4$, за $x=0$, $f''(0)=4>0$, $y_{min}=-3$; за $x=1$, $f''(1)=-12<0$, $y_{max}=-2$; за $x=-1$, $f''(-1)=-12<0$, $y_{max}=-2$.

2 а) максимум во $(1,5)$, минимум $(2,4)$. б) $f'(x)=3(x-2)^2>0$ за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, функцијата постојано расте. Нема ниту максимум, ниту минимум.

3 а) минимуми во $(0,0)$;$(2,0)$, максимум во $(1,1)$. б) $y'=x^2(4x-3)$, $y'=0$ за $x=0$ и $x=\frac{3}{4}$. $y''=6x(2x-1)$, за $x=\frac{3}{4}$; $y''\left(\frac{3}{4}\right)>0$, има минимум во $\left(\frac{3}{4},-\frac{27}{256}\right)$. За $x=0$, $y''(0)=0$. Со вториот извод не можеме да утврдиме што има функцијата за $x=0$. Ќе го испитаме знакот на $y'(x)$ во околината на $x=0$. На пример за $x=0{,}1$, $y'(0{,}1)=0{,}1^2(4\cdot0{,}1-3)<0$, а за $x=-0{,}1$, $y'(-0{,}1)=(-0{,}1^2)(4\cdot(-0{,}1)-3)=0{,}01(-3{,}4)<0$. Значи првиот извод во околината на $x=0$ не го менува знакот, т.е. за $x=0$ функцијата нема екстремна вредност.

4 а) минимум во $(0,0)$, максимум во $(2,4e^{-2})$. б) минимум во $(0,2)$. 5 а) минимум во $(e^{-1},-e^{-1})$; б) максимум во (e,e^{-1}).

6 а) $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$, $f'(x)=0$ ќа $x=\pm1$; $f''(x)=\frac{-2x(x^2+x+1)-2(1+x^2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^3}$;

$f''(1)=\frac{-2\cdot1\cdot3-0}{3^3}=-\frac{2}{9}<0$, има минимум во $\left(1,\frac{1}{3}\right)$. $f''(-1)=\frac{-2(-1)\cdot1-0}{1^3}=2>0$, има минимум во $(-1,-1)$.

б) минимум во $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$.

7 а) Максимуми во $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, минимуми во $\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$; б) максимуми во $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{2}-\pi}{6}\right)$, минимуми $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi-3\sqrt{2}}{6}\right)$.

8 Нека $f(x)=ax^2+bx+c$; $f'(x)=2ax+b$. За $x=2$, $f'(2)=2a\cdot2+b=0$, $4a+b=0$.

За $x=2$, $f(2)=a\cdot2^2+b\cdot2+c=4a+2b+c=-1$ и за $x=1$, $a\cdot1^2+b\cdot1+c=0$; Решението на системот:

$\begin{cases}4a+b=0\\4a+2b+c=-1\\a+b+c=0\end{cases}$ е $a=1$, $b=-4$, $c=3$, трином е $f(x)=x^2-4x+3$.

9 $f'(x)=3ax^2+2bx-36$, $f'(3)=27a+6b-36=0$ и $f'(-2)=12a-4b-36=0$. Решението на добиениот систем е $a=2$, $b=-3$, па $f(x)=2x^3-3x^2-36x-1$. Провери дека $f''(3)>0$, а $f''(-2)<0$.

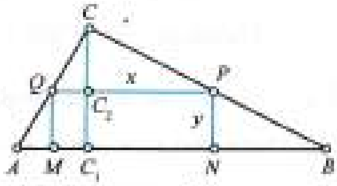
10 а) $f'(x)=4x^3-16x$; $f'(x)=0$, за $x=0$ и $x=\pm 2$. $f''(x)=12x^2-16$, $f''(0)=-16<0$ има максимум $f_{max}=f(0)=3$. $f''(\pm 2)=32>0$ има минимуми $f_{min}=f(2)=f(-2)=-13$. Вредноста на функцијата на границите од интервалот се совпаѓа со минимумот. Најголема вредност е $f(0)=3$, а најмалата $f(\pm 2)=-13$.

б) Најголемата вредност е максимумот $f(0)=2$. Најмалата вредност ја достига во границите на интервалот, т.е. $f'(\pm 2)=0$.

12

1 $x=y=15$. 2 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-x}$; $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{a-x}}$. $f'(x)=0$ за $x=\dfrac{a}{2}$, а $f_{max}\left(\dfrac{a}{2}\right)=2\sqrt{\dfrac{a}{2}}$.

3 Нека страните на правоаголникот, црт. 1, се x и y. $P(x,y)=x\cdot y$.



црт. 1

Од сличноста на триаголниците ABC и QPC следува $\overline{AB}:\overline{QP}=\overline{CC_1}:\overline{CC_2}$, т.е.

$10:x=4:(4-y)$; $y=\dfrac{20-2x}{5}$. $P=\dfrac{x(20-2x)}{5}=\dfrac{20x-2x^2}{5}$.

$P'(x)=\dfrac{20-4x}{5}$, $P'(x)=0$ за $x=5$. $P''(x)=-\dfrac{4}{5}<0$, плоштината е максимална, па $x=5\text{cm}$, $y=2\text{cm}$, а $P=5\cdot 2=10\text{cm}^2$.

4 Нека x е страна на квадратот кој треба да се исече од секое теме на картонот. Основата на кутијата е правоаголник со страни $32-2x$ и $20-2x$, а висината x. $V(x)=(30-2x)(20-2x)\cdot x=4x^3-104x^2+640x$.

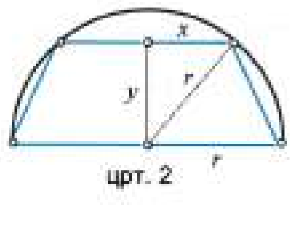
$V'(x)=12x^2-208x+640$, $V'(x)=0$, за $x=4$ и $x=13\frac{1}{3}$. Решението е $x=13\frac{1}{3}$ не е можно, $x=4$ е решение. $V''(x)=24x-208$, $V''(4)=-112<0$, *ра* $V_{max}(4)=1152\text{cm}^3$.

5 Ако основата на триаголникот е x, тогаш кракот $b=\dfrac{a-x}{2}$, а висината $h=\sqrt{\left(\dfrac{a-x}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$, па

$P=\dfrac{1}{2}x\cdot h=\dfrac{1}{2}x\sqrt{\left(\dfrac{a-x}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{4}\sqrt{a^2x^2-2ax^3}$. Плоштината P ќе биде максимална, ако $f(x)=a^2x^2-2ax^3$ има максимална вредност. $f'(x)=2ax(a-3x)$, $f'(x)=0$ за $x=0$ и $x=\dfrac{a}{3}$. $f''(x)=2a^2-12ax$, за $x=\dfrac{a}{3}$, $f''\left(\dfrac{a}{3}\right)=-2a^2<0$.

Плоштината е максимална ако страната на триаголникот е $\dfrac{a}{3}$, т.е. бараниот триаголник е рамностран.

6 Нека x е половината од помалата основа, а y - висината на трапезот, црт. 2.

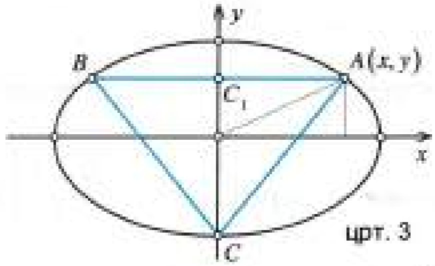


црт. 2

$P=\dfrac{(2r+2x)y}{2}=(r+x)\cdot y$; $y=\sqrt{r^2-x^2}$; $P=(r+x)\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{(r+x)^3(r-x)}$.

$x=\dfrac{r}{2}$, $2x=r$ и $y=\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

(7) Нека основата на впишаниот триаголник е паралелна со поголемата оска, а врвот во темето на помалата оска на елипсата. Ако $A(x,y)$, тогаш основата $\overline{AB_1} = 2x$, висината $\overline{CC_1} = b+y$, па $P = \dfrac{2x\cdot(b+y)}{2} = x(b+y)$. Од равенката на елипсата следува $x^2 = \dfrac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$, $x = \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$, па $P = \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\cdot(b+y)$, т.е. $P = \dfrac{a}{b}\sqrt{(b+y)^3\cdot(b-y)}$. Плоштината на триаголникот е максимална



црт. 3

ако $f(y) = (b+y)^3(b-y)$ има максимална вредност. Оттука следува $2x = a\sqrt{3}$, $h = b+y = \dfrac{3b}{2}$, $P_{max} = \dfrac{3ab\sqrt{3}}{4}$.

(8) Од $72\pi = \pi r^2 + \pi r s$ следува $s = \dfrac{72-r^2}{r}$, од $H^2 = s^2 - r^2$ имаме $H = \dfrac{12}{r}\sqrt{36-r^2}$, па $V(r) = 4\pi r\sqrt{36-r^2}$ или $V(r) = 4\pi\sqrt{36r^2-r^4}$. Волуменот има максимум ако $f(r) = 36r^2 - r^4$ има максимум. $r = 3\sqrt{2}$, $H = 12$, а $V_{max} = 72\pi\,\text{cm}^3$.

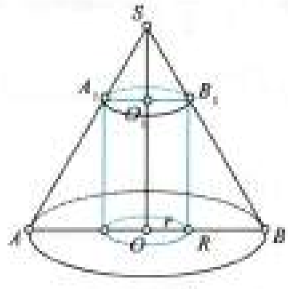
(9) $r^2 = 12^2 - H^2$, $V = \dfrac{1}{3}r^2\pi H = \dfrac{1}{3}\pi(144-H^2)\cdot H$, т.е. $V(H) = \dfrac{1}{3}\pi(144H - H^3)$, од $V'(H) = 0$, следува $H = 4\sqrt{3}$, а $r = 4\sqrt{6}$.

(10) Нека r е радиус на основата, а h висина на цилиндарот.

Од сличноста на триаголниците OBS и $O_1B_1S_1$, црт. 4 имаме

$R : r = H : (H-h)$, $h = \dfrac{H(R-r)}{R}$; $V(r) = \pi r^2 h = \dfrac{\pi H}{R}(r^2R - r^3)$, $V'(r) = 0$.

За $r = \dfrac{2R}{3}$, $h = \dfrac{H}{3}$, а $V_{max} = \dfrac{4\pi R^2 H}{27}$.



црт. 4

(11) $F'(\varphi) = \dfrac{-kG(-\sin\varphi + k\cos\varphi)}{(\cos\varphi + k\sin\varphi)^2}$; $F'(\varphi) = 0$, ако $-\sin\varphi + k\cos\varphi = 0$, т.е. $\varphi = arc\,tg\,k$. $F''(\varphi) = \dfrac{kG + 2(\sin\varphi - k\cos\varphi)}{(\cos\varphi + k\sin\varphi)^3}$.

За $\varphi = arc\,tg\,k$, $\sin\varphi - k\cos\varphi = 0$ па $F''(\varphi) > 0$, значи силата има минимум ако $\varphi = arc\,tg\,k$.

13 (1) а) $y' = 6x - 30x^2$; $y'' = 6 - 60x$, $y'' > 0$; $6 - 60x > 0$. За $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{10}\right)$, функцијата е конкавна. $y'' < 0$ за $x \in \left(\dfrac{1}{10}, +\infty\right)$, функцијата е конвексна; б) $y'' = 24x(2x-1)$; $y'' > 0$, за $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ функцијата е конкавна. $y'' < 0$, за $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ функцијата е конвексна. (2) а) $y'' = -\dfrac{2}{x^3}$. Конкавна за $x \in (-\infty, 0)$, конвексна за $x \in (0, +\infty)$. б) За $x \in (-1,1)$ конкавна, а за $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ - конвексна.

(3) а) $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$. $f''(x) \neq 0$, за секој $x \in D_f$. Нема превојни точки. б) $f''(x) = \dfrac{-8x}{(1+x^2)^3}$, $f''(x) = 0$, ако $x = 0$. За $x = 0$ $f(x) = 0$, па точката $A(0,0)$ е превојна точка.

4 а) $f''(x)=\dfrac{4}{(2-x)^3}$; $f''(x)\neq 0$ за секој $x\in D_f$. Нема превојни точки. Конкавна за $x\in(-\infty,2)$, конвексна за $x\in(2,+\infty)$.

б) $f''(x)=\dfrac{4\left(3x^2-2\right)}{\left(x^2+x\right)^2}$; $f''(x)=0$ за $x\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $f\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=\dfrac{3}{4}$. $f''(x)>0$ за $3x^2-2>0$, $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}},+\infty\right)$ конкавна, $f''(x)<0$ за $x\in\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ конвексна. Точките $P_1\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{3}{4}\right)$ и $P_2\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{3}{4}\right)$ се превојни точки.

5 а) $f'(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; $f''(x)=-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. $f''(x)=0$ за $x+\dfrac{\pi}{3}=0$ и $x+\dfrac{\pi}{3}=\pi$, т.е. $x=-\dfrac{\pi}{3}$ и $x=\dfrac{2\pi}{3}$.

$f''(x)>0$, ако $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)<0$; т.е. $\pi<x+\dfrac{\pi}{3}<2\pi$; $x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$. $f''(x)<0$ ако $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)>0$, т.е. $0<x+\dfrac{\pi}{3}<\pi$; $x\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

За $x=-\dfrac{\pi}{3}$, $f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$; За $x=\dfrac{2\pi}{3}$, $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=0$. Превојни точки се $P_1\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)$; $P_2\left(\dfrac{2\pi}{3},0\right)$.

Конкавна во $\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$, конвексна во $\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$. б) $f''(x)=-4\cos 2x$. Превојни точки се $P_1\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$, $P_2\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$, $P_3\left(\dfrac{5\pi}{4},0\right)$, $P_4\left(\dfrac{7\pi}{4},0\right)$. Конкавна во $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right)$. Конвексна во $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{7\pi}{4},7\pi\right)$.

6 а) $f''(x)=\left(2+4x^2\right)e^{x^2}$. $f''(x)>0$ за секој реален број. Конкавна за $x\in\mathbb{R}$. б) $f''(x)=(x-2)e^{-x}$; $f''(x)=0$ за $x=2$. $f''(x)>0$ за $x>2$; конкавна во $(2,+\infty)$. $f''(x)<0$ за $x<2$; конвексна во $(-\infty,2)$. Превојна точка $x=2$, $f(2)=2e^{-2}$ е $P\left(2,2e^{-2}\right)$.

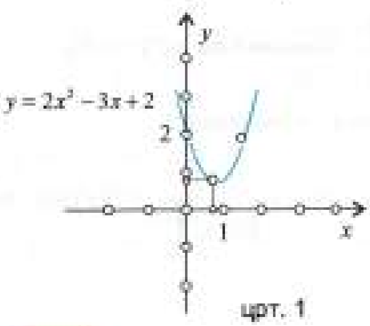
7 а) $f'(x)=1\cdot\ln^2 x+x\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln^2 x+2\ln x$. $f''(x)=\dfrac{2}{x}(\ln x+1)\cdot f''(x)=0$, $\ln x+1=0$, $\ln x=-1$, $x=e^{-1}$.

$f''(x)>0$, ако $\ln x>-1$, $x>e^{-1}$; $f''(x)<0$, ако $\ln x<-1$, т.е. $0<x<e^{-1}$. Функцијата е конкавна во $\left(e^{-1},+\infty\right)$, конвексна во $\left(0,e^{-1}\right)$. За $x=e^{-1}$, $f\left(e^{-1}\right)=e^{-1}\cdot\left(\ln\left(e^{-1}\right)\right)^2=e^{-1}$. Превојна точка $P\left(e^{-1},e^{-1}\right)$.

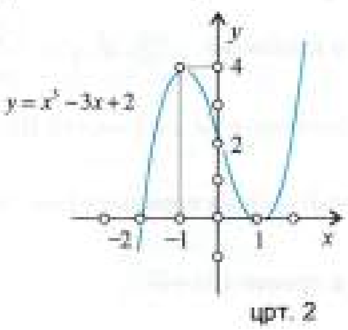
б) $f''(x)=\dfrac{1}{x}$. Нема превојна точка, $f''(x)>0$ за секој $x>0$, т.е. функцијата е конкавна во $(0,+\infty)$.

14

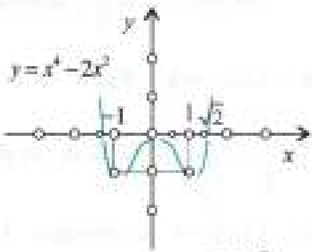
1 а) $D_f: x\in\mathbb{R}$; не е ниту парна, ниту непарна, Нема нули, ја сече y - оската во $(0,2)$, нема асимптоти. Има минимум $y=\dfrac{7}{8}$ за $x=\dfrac{3}{4}$. За $x>\dfrac{3}{4}$ расте, за $x<\dfrac{3}{4}$ опаѓа. Нема превојни точки, функцијата е конкавна, црт. 1.



црт. 1



црт. 2

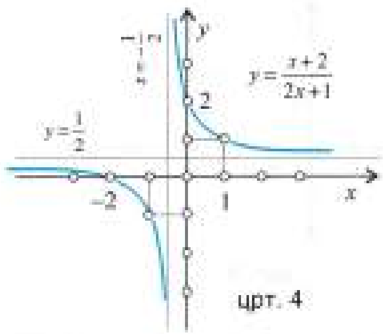


црт. 3

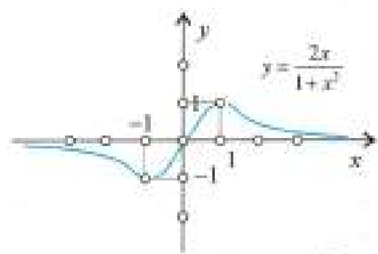
б) Дефинирана за секој реален број, т.е. $D_f: x \in \mathbb{R}$. Нули на функцијата се $x=-2$ и $x=1$. Пресек со y - оска $(0,2)$. За $x=-1$ има максимуми $y_{max}=4$. За $x=1$ има минимум $y_{min}=0$, т.е. $(-1,4)_{max}$; $(1,0)_{min}$. Превојна точка $(0,2)$, црт. 2.

в) Дефинирана за $x \in (-\infty,+\infty)$. Функцијата е парна, па графикот е симетричен во однос на y - оската. Нулите се $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$; $(0,0)$, $(0,\sqrt{-2};)$, $(0,\sqrt{2})$. Пресек со y - оска $(0,0)$. Екстремни вредности за $x=0$ има максимум, $y_{max}=0$. За $x=\pm 1$ има минимум, $y_{min}=-1$. $(0,0)_{max}$; $(\pm 1,-1)_{min}$. Превојни точки се $P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{5}{9}\right)$ и $P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{5}{9}\right)$, конвексна во $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, конкавна во $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$, црт. 3.

2 а) Дефинирана за $x \neq -\frac{1}{2}$, $D_f: x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Не е ниту парна, ниту непарна, пресек со x - оска $(-2,0)$, пресек со y - оска $(0,2)$. Правата $y=\frac{1}{2}$ е хоризонтална асимптота, а $x=-\frac{1}{2}$ вертикална асимптота. Кога $x \to -\frac{1}{2}$ од лево $y \to -\infty$, а кога $x \to -\frac{1}{2}$ од десно $y \to +\infty$. Нема екстремни вредности, монотоно опаѓа за секој $x \in D_f$. Нема превојни точки, конвексна во $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, конкавна во $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$, црт. 4.



црт. 4

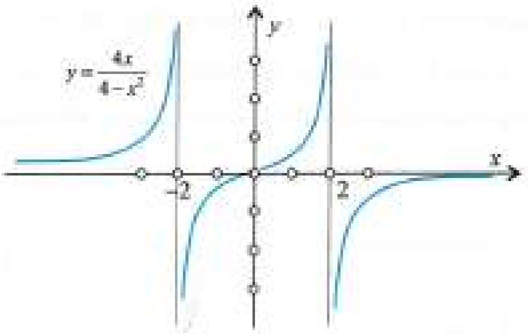


црт. 5

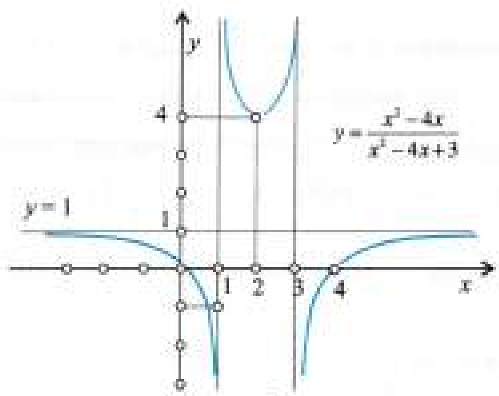
б) $D_f: x \in (-\infty,+\infty)$. Функцијата е непарна , графикот е симетричен во однос на координатен почеток. Точката $(0,0)$ пресечна точка со оските. x - оската е хоризонтална асимптота. Во точката $(1,1)$ максимум, во $(-1,-1)$ минимум, расте во $(-1,1)$, а опаѓа во $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$. Превојни точки $P_1\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2\,(0,0)$, $P_3\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Конвексна во $(-\infty,\sqrt{3})$ и $(0,\sqrt{3})$; конкавна во $(-\sqrt{3},0)$ и $(\sqrt{3},+\infty)$, црт. 5.

3 а) Дефинирана е за $4-x^2 \neq 0$, т.е. $D_f: x \in (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$. Функцијата е непарна, графикот е симетричен во однос на координатен почеток. Точката $(0,0)$ е пресечна точка со координатните оски. Правите $x=-2$ и $x=2$ се вертикални асимптоти. Кога $x \to -2$ од лево $y \to +\infty$, ако $x \to -2$ од десно $y \to -\infty$; Кога $x \to 2$ од лево $y \to +\infty$, ако $x \to 2$ од десно $y \to -\infty$. x - оската е хоризонтална асимптота. Кога $x \to 0$, $y \to -0$, ако $x \to -\infty$, $y \to +0$.

$f'(x)=\frac{16+4x^2}{\left(4-x^2\right)^2}$. Функцијата нема екстремни вредности. $f'(x)>0$ за секој $x \in D_f$, монотоно расте. Точката $P_1\,(0,0)$ е превојна точка. Конвексна во $(-2,0)$ и $(2,+\infty)$, конкавна во $(-\infty,-2)$ и $(0,2)$, црт . 6.



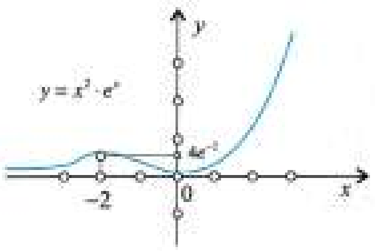
црт. 6



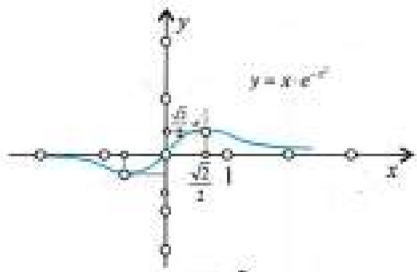
црт. 7

б) Дефинирана за $x^2-4x+3\neq 0$, $D_f: x\in \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$. Не е парна, не е непарна. $x=0$ и $x=4$ се нули на функцијата. Правата $y=1$ е хоризонтална асимптота, а $x=1$ и $x=3$ се вертикални асимптоти. За $x=2$ има минимум $y_{min}=4$. За $x>2$ расте, за $x<2$ опаѓа. Нема превојни точки, црт. 7.

4 а) $D_f: x\in \mathbb{R}$. Не е парна, не е непарна. За $x=0$, $y=0$. x - оската е хоризонтална асимптота. Кога $x\to-\infty$, $y\to 0$, ако $x\to+\infty$, $y\to+\infty$, $y>0$, за секој $x\neq 0$. За $x=0$ има минимум, $y_{min}=0$, за $x=-2$ има максимум, $y_{max}=4e^{-2}$. Расте во $(-\infty,-2)$ и $(0,+\infty)$, а опаѓа во $(-2,0)$, црт. 8.



црт. 8



црт. 9

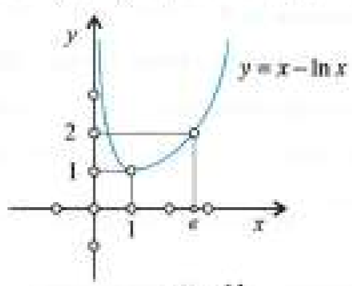
б) $D_f: x\in(-\infty,+\infty)$. Нула на функцијата е $x=0$, е непарна. $y=0$ (x - оска) е хоризонтална асимптота.

Екстремни вредности за $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ има максимум $y_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, за $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ минимум $y_{min}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}$.

Превојни точки $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=0$ и $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, црт. 9.

5 а) $D_f: x\in(0,+\infty)$. Нула на функцијата е $x=1$, т.е. $(1,0)$. Екстремни вредности за $x=e^{-1}$ има минимум $y_{min}=-e^{-1}$. Нема превојни точки. Конкавна за секој $x\in D_f$. Опаѓа во $(0,e^{-1})$, а расте во $(e^{-1},+\infty)$, црт 10.

црт. 10



црт. 11

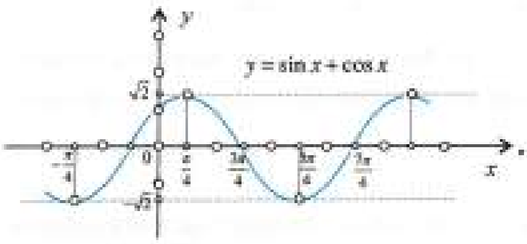
б) $D_f: x\in(0,+\infty)$; Нема нули, ниту е парна, ниту е непарна. $y>0$ за $x\in D_f$; правата $x=0$ е вертикална асимптота, кога $x\to 0$ односно $y\to+\infty$. За $x=1$ има минимум $y_{min}=1$; за $x\in(0,1)$ опаѓа. За $x\in(1,\infty)$ расте; конкавна за $x\in(0,+\infty)$, црт. 11.

(6) а) $D_f: x\in\mathbb{R}$; Нули на функцијата $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; Периодична со период 2π; екстремни вредности.

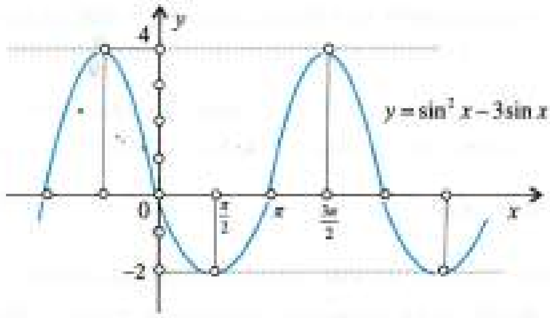
$y'=\sin x-\cos x$; $y'=0$, $tg\,x=1$; $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, за $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, $y''(x)>0$.

Функцијата има минимум $y_{min}=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$; За $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $y''(x)<0$, функцијата има максимум $y_{max}=\sqrt{2}$;

Превојни точки се $P\left(k\pi-\frac{\pi}{4},0\right)$, т.е. нулите се превојни точки, црт. 12.



црт. 12



црт. 13

б) $D_f: x\in\mathbb{R}$; Нули на функцијата се $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; Периодична со периода 2π;

За $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ има минимум, $y_{min}=-2$; За $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ има максимум $y_{max}=4$, црт. 13.

ТЕМА 4 ВЕРОЈАТНОСТ

1 (1) $\approx 1/6$; $\approx 1/2$. (2) $\approx 1/13$; $\approx 1/4$.

2 (1) $\Omega=\{$(грб, 1), (грб, 2), (грб, 3), (грб, 4), (грб, 5), (грб, 6), (глава, глава), (глава, грб)$\}$.

(2) $\Omega=\{(1),(3),(5),(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(2,4,1),(2,4,3),(2,4,5),(4,2,1),(4,2,3),(4,2,5)\}$.

(3) $\Omega=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$, каде x е бројот на точки на првата коцка, y – бројот на точки на втората коцка, а z – бројот на точки на третата коцка.

$A=\{(x,y,z)\mid x,y\in\{2,4,6\}, z\in\{1,3,5\}\}$, $B=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,3,5\}\}$,
$C=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\}, x+y+z\in\{4,6,8,10,12,14,16,18\}\}$,
$D=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\}, x=y\}=\{(x,x,z)\mid x,z\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$,
$E=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,3,4,6\}\}$, $F=\overline{E}$.

(4) Ако 0 означува промашување, а 1 погодок, тогаш:
$\Omega = \{(1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0)\}$;
$A = \{(1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$;
$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 0)\}$; $C = \{(1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1)\}$.

(5) $B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $C = A_1A_2$, $D = A_1A_2A_3$, $E = A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$, $F = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,
$G = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$, $H = \overline{D}$.

3 (1) Од условите на задачата $P(A) = 0{,}95$, $P(B) = 0{,}98$, а $P(AB) = 0{,}94$. Настанот $C = A \cup B$, па

$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}99$. Настанот $D = \overline{A}\overline{B} = \overline{A \cup B}$, што следува од Деморгановите закони. Оттука, $P(\overline{D}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$.

(2) Множеството елементарни настани $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, каде E_i: падна бројот i, $i = 1, 2, 3, 4$. Притоа, $p_i = Ki$, каде K е коефициент на пропорционалност што ќе го определиме од условот $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.
Така, $K(1 + 2 + 3 + 4) = 1$, т.е. $K=1/10$, а $p_i = i/10$, $i = 1,2,3,4$. $P(A) = p_1 + p_2 = 0{,}3$. $P(B) = p_2 + p_4 = 0{,}6$.

(3) $\Omega = \{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$. Бројот на елементи во Ω е $\overline{V}_6^2 = 6^2 = 36$. Ако A е настанот: збирот на точките на двете коцки е 10, тогаш $A = \{(4, 6),(5, 5),(6, 4)\}$, т.е. постојат 3 поволни можности за појавување на настанот A. Оттука, $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

(4) Вкупниот број на можни избори на 3 од понудените 5 должини е $C_5^3 = 10$. Ако A е настанот: од трите избрани отсечки може да се формира триаголник, тогаш A ќе се појави ако збирот на должините на кои било две отсечки е поголем од должината на третата отсечка. Оттука, поволни можности има вкупно 3. Тоа се: $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 7, 9\}$, $\{4, 7, 9\}$. Добиваме дека $P(A) = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

(5) Добитни се лозовите со реден број 20, 40, 60, 80, 100, па $P(A) = \frac{5}{100} = 0{,}05$. Веројатноста на настанот B ќе ја определиме преку веројатноста на спротивниот настан $\overline{B}$: ниеден од два купени лоза не е добитен. $P(\overline{B}) = \frac{C_{95}^2}{C_{100}^2} = 0{,}902$. Сега, $P(B) = 0{,}098$.

(6) $C_{15}^3 = 455$ е вкупниот број на можности од 15 сијалици да се изберат 3 кои се скршиле. Нека A е настанот: скршените сијалици имаа вкупно 180 W. Поволни можности за појавување на настанот A се следните: се скршиле 2 сијалици од по 40 W и 1 сијалица од 100 W; или 3 сијалици од по 60 W. Оттука, поволни можности за појавување на настанот A има вкупно $C_7^2C_3^1 + C_5^3 = 73$. Така, $P(A) = \frac{73}{455} = 0{,}16$.

4 (1) Да ги означиме настаните: A: извлечениот број е парен, B: извлечениот број е делив со 3.
Според дефиницијата за условна веројатност добиваме дека $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3/20}{6/20} = \frac{1}{2}$.

(2) Нека A_i: стрелецот ја погодил целта во i-тото гаѓање, $i = 1, 2$. Од условите на задачата $P(A_1) = 2/3$, а $P(A_1A_2) = 0{,}5$. Се бара условната веројатност $P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{3}{4}$.

3 Означуваме:

B: претплатникот не ја погодил заборавената цифра во првите два обиди, но ја погодил во третиот обид.

A_i: претплатникот ја погодил заборавената цифра во i-тиот обид, $i = 1, 2, \ldots$

Да воочиме дека настаните A_i не се независни. Имено, со секое непогодување на цифрата се намалува бројот на цифри од кои се избира.

Настанот B ќе се појави, ако претплатникот не ја погоди цифрата во првиот и во вториот обид, туку во третиот, т.е. $B = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. За веројатноста на овој настан имаме: $P(B)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(A_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)$.

а) Заборавена цифра е една од цифрите 0, 1, 2,..., 10. Веројатноста да ја промаши цифрата во првиот обид е $P(\overline{A}_1)=\frac{9}{10}$, бидејќи 9 цифри се погрешни. Соодветно, $P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)=\frac{8}{9}$, бидејќи ако промашил во првиот обид, остануваат уште 9 цифри од кои 8 се погрешни. На крај, $P(A_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{1}{8}$, бидејќи после два промашени обида, остануваат уште 8 можни цифри, а само една е вистинската. Со замена во претходната формула, за веројатноста на настанот B се добива $P(B)=1/10$.

б) Претплатникот знае дека цифрата е парна, па избира од цифрите 0, 2, 4, 6, 8. На ист начин како и претходно $P(B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.

4 $P(MATEMATIKA) = P(M)\cdot P(A \mid M)\cdot P(T \mid MA)\cdot P(E \mid MAT)\cdot P(M \mid MATE)\cdot P(A \mid MATEM)\cdot$
$\cdot P(T \mid MATEMA)\cdot P(I \mid MATEMAT)\cdot P(K \mid MATEMATI)\cdot P(A \mid MATEMATIK)$

$$=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{151200}.$$

5 Да ги означиме следните настани: A_i: играчот A извлекува бело топче во i-тото свое извлекување, B_i: играчот B извлекува бело топче во i-тото свое извлекување, $i=1,2,\ldots$

D: победува играчот A.

Настаните A_i и B_i се зависни настани, бидејќи секое извлекување зависи од исходот на претходните (извлечените топчиња не се враќаат во кутијата).

Настанот $D = A_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1A_2$, а за неговата веројатност се добива следното:

$$P(D)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1 \mid \overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1\overline{B}_1)$$
$$=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{35}.$$

6 Нека настаните A_i и B_i се дефинирани на ист начин како во задачата 5. Но, сега, после секое извлекување, извлеченото топче се враќа во кутијата, па секој следен експеримент се изведува при исти услови како и претходните. Тоа значи дека секој следен исход нема да зависи од претходните, т.е. A_i и B_i се независни настани и $P(A_i) = P(B_i) = 4/7$, а. Нека C е настанот: ќе победи играчот B најмногу после 3 свои извлекувања. Тогаш $C = \overline{A}_1B_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{A}_3B_3$. Поради независноста на настаните A_i и B_i, $i=1,2,\ldots$, за веројатноста на B се добива: $P(B) = P(\overline{A}_1)P(B_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(B_2)+P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{B}_2)P(\overline{A}_3)P(B_3)$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}+\left(\frac{3}{7}\right)^3\cdot\frac{4}{7}+\left(\frac{3}{7}\right)^5\cdot\frac{4}{7}=0,298.$$

5 (1) $p=0,4$. Упатство: p се определува од условот $0,3+0,2+p+0,1=1$.
$P\{1<X<5\}=P\{X=2\}+P\{X=4\}=0,2+0,4=0,6.$

(2) Множеството елементарни настани е следното $\Omega=\{(1),(3),(2,1),(2,3),(4,1),(4,3),(2,4,1),(2,4,3),(4,2,1),(4,2,3)\}$.

Оттука се определуваат можните збирови на броевите од извлечените топчиња. Тоа се: 1, 3, 5, 7, 9, односно множеството вредности на случајната променлива X е $R_X=\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Ги означуваме настаните A_i: извлечено е топче со бројот i, $i=1, 2, 3, 4$.

Сега, настанот $\{X=1\}$ ќе се појави, ако во првото извлекување се добие бројот 1, па неговата веројатност е $P\{X=1\}=P(A_1)=\frac{1}{4}$. Имајќи ги предвид елементарните настани, настанот $\{X=3\}$ ќе се појави, ако во првото извлекување се добие бројот 3 или ако во првото извлекување се добие бројот 2, а во второто извлекување бројот 1. Оттука, неговата веројатност е

$$P\{X=3\}=P(A_3+A_2A_1)=P(A_3)+P(A_2)P(A_1\mid A_2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Продолжувајќи на ист начин, добиваме: $P\{X=5\}=P(A_2A_3+A_4A_1)=P(A_2)P(A_3\mid A_2)+P(A_4)P(A_1\mid A_4)=\frac{1}{6}$;

$$P\{X=7\}=P(A_4A_3+A_2A_4A_1+A_4A_2A_1)=\frac{1}{6};\quad P\{X=9\}=P(A_2A_4A_3+A_4A_2A_3)=\frac{1}{12}.$$

Така, $X:\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1/4 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/12\end{pmatrix}$

Случајната променлива Y прима вредности од множеството $R_Y=\{1, 2, 3\}$. За определување на соодветните веројатности ги означуваме настаните B_i: во i-тото извлекување ќе се добие непарен број, $i=1,2,3$.
Тогаш, настанот $\{Y=1\}$ ќе се појави, ако во првото извлекување се добие непарен број, па неговата веројатност е $P\{Y=1\}=P(B_1)=2/4=1/2$. Настанот $\{Y=2\}$ ќе се појави, ако во првото извлекување се добие парен, а во второто непарен број, па $P\{Y=2\}=P(\overline{B}_1B_2)=P(\overline{B}_1)P(B_2\mid\overline{B}_1)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. Ако продолжиме понатаму, добиваме:
$P\{Y=3\}=P(\overline{B}_1\overline{B}_2B_3)=P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2\mid\overline{B}_1)P(B_3\mid\overline{B}_1\overline{B}_2)=\frac{1}{6}$, т.е. $Y:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1/6\end{pmatrix}$

(3) $X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$. Упатство: Се работи на ист начин како при определување на распределбата на случајната променлива Y во претходната задача.

(4) $Z:\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\ 1/36 & 2/36 & 3/36 & 4/36 & 5/36 & 6/36 & 5/36 & 4/36 & 3/36 & 2/36 & 1/36\end{pmatrix}$. Упатство: Се работи на ист начин како во задачата од лекцијата, за збир на броевите добиени при две фрлања на тетраедар.

(5) Согледај дека $X\sim B(4{,}0.51)$. Затоа, $P\{X=i\}=\binom{4}{i}\cdot 0,51^i\cdot 0,49^{4-i}$, за $i=0, 1, 2, 3, 4$. Така,

$X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0,0576 & 0,24 & 0,3747 & 0,26 & 0,0677\end{pmatrix}$

6 Да ги означиме настаните A_i: i - тата машина се расипала во текот на денот, $i = 1, 2, 3, 4$. Овие настани се независни и $P(A_1) = 0{,}1$, $P(A_2) = 0{,}2$, $P(A_3) = 0{,}09$, а $P(A_4) = 0{,}11$. Случајната променлива X - број на расипани машини во текот на денот ќе прима вредности од множеството $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. За соодветните веројатности се добива: $P\{X = 0\} = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}89 = 0{,}583128$

$$P\{X = 1\} = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4) = 0{,}340318$$

$$P\{X = 2\} = P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4 + A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4 + \overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4) = 0{,}070178$$

$$P\{X = 3\} = P(A_1A_2A_3\overline{A}_4 + A_1A_2\overline{A}_3A_4 + A_1\overline{A}_2A_3A_4 + \overline{A}_1A_2A_3A_4) = 0{,}006178$$

$$P\{X = 4\} = P(A_1A_2A_3A_4) = 0{,}000198$$

Конечно, $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}583128 & 0{,}340318 & 0{,}070178 & 0{,}006178 & 0{,}000198 \end{pmatrix}$.

6 1 $EX = 3{,}25$, $DX = 1{,}3875$. 2 $EX = 2{,}644$, $DX = 2{,}049$.

3 Означуваме A_i: стрелецот ја погодува целта во i - тиот обид, $i = 1, 2, 3, 4$. Настаните A_i се независни и $P(A_i) = p = 0{,}8$. Случајната променлива X – број на стрелање на целта, прима вредности од множеството $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$, а за соодветните веројатности се добива:

$$P\{X = 1\} = P(A_1) = 0{,}8$$
$$P\{X = 2\} = P(\overline{A}_1A_2) = 0{,}16$$
$$P\{X = 3\} = P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = 0{,}032$$
$$P\{X = 4\} = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = 0{,}008$$

Значи, $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}8 & 0{,}16 & 0{,}032 & 0{,}008 \end{pmatrix}$. Сега, $EX = 1{,}248$, $DX = 0{,}298$.

4 Нека X е број на точки на првата, Y – број на точки на втората коцка. Тогаш X и Y имаат иста распределба, определена со:

$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$, $Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

и X и Y се независни случајни променливи бидејќи исходот на едната коцка не влијае на другата и обратно. Наоѓаме $EX = EY = 3{,}5$, а $DX = DY = 35/12$. Со користење на особините на математичко очекување и дисперзија од збир на две независни случајни променливи се добива:

$$E(X + Y) = EX + EY = 7, \; D(X + Y) = DX + DY = 70/12 = 35/6.$$

ТЕМА 5 СТАТИСТИКА

1 ① Квантитативни обележја се: јачина на сијалицата, големина (во cm) и тежина, а квалитативни се: боја и исправност.

② Можни примероци со обем 2 се: 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 3,2; 3,3; 3,4; 3,5; 4,2; 4,3; 4,4; 4,5; 5,2; 5,3; 5,4; или 5,5. Напомена: со знакот точка-запирка (;) се одделени различните примероци.

③ $y = 11{,}5$. Y е случајна променлива како функција од случајниот примерок, а y е реален број, кој е, всушност, вредност на случајната променлива Y.

2 ① Да ги означиме настаните:

A_i: во i - тото фрлање на тетраедарот е добиена единица, $i = 1, 2, 3$.

Од условите на задачата е јасно дека настаните A_i се независни.

Ако е точна нултата хипотеза, тогаш $P(A_i) = 1/4$, за $i = 1, 2, 3$. Нултата хипотеза ќе се отфрли, ако се појави настанот $A_1A_2A_3$, па за веројатноста за грешка од прв тип се добива:

$$\alpha = P\{A_1A_2A_3 \mid H_0 \text{ е точна}\} = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = (1/4)^3 = 1/64.$$

Ако е точна алтернативната, а не е точна нултата, тогаш нултата хипотеза ќе ја прифатиме, ако во барем едно фрлање не се добие единица, т.е. ако се појави настанот $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} = \overline{A_1A_2A_3}$. Притоа, ако H_a е точна, тогаш $P(A_i) = 1/2$, за $i = 1, 2, 3$. Сега, за веројатноста на грешка од втор тип добиваме:

$$\beta = P\{\overline{A_1A_2A_3} \mid H_a \text{ е точна}\} = 1 - P\{A_1A_2A_3 \mid H_a \text{ е точна}\} = 1 - (1/2)^3 = 7/8.$$

Моќта на тестот е $p = 1 - \beta = 1/8$.

3 ① $\Phi(2{,}45) = 0{,}9929$, $\Phi(-2{,}95) = 0{,}0016$ и $\Phi(4{,}45) = 1$. ② $\Phi(-1{,}44) = 0{,}0749$ и $\Phi(0{,}76) = 0{,}7764$.

③ $t_{12;\,0,02} = 2{,}303$, $t_{20;\,0,05} = 1{,}725$. ④ $\chi^2_{15;0,05} = 24{,}9958$, $\chi^2_{2;0,025} = 7{,}37776$.

4 ① Се тестира нултата хипотеза H_0: $EX = 1800$, наспроти алтернативната H_a: $EX > 1800$, со ниво на значајност $\alpha = 0{,}01$. Стандардното отстапување $\sigma = 100$ е познато. Вредноста на тест статистиката ќе биде: $u = \dfrac{\overline{x}_{50} - a_0}{\sigma}\sqrt{50} = \dfrac{1850 - 1800}{100}\sqrt{50} = 3{,}54$. За $\alpha = 0{,}01$, критичниот домен е $C = (2{,}33, \infty)$. Бидејќи $u = 3{,}54 \in C$, заклучуваме дека хипотезата H_0 се отфрла, а се прифаќа H_a. Тоа значи дека новите кабли се појаки од старите.

② Ако за претставник на секој интервал сеземе неговата средина, тогаш се добива дека $\overline{x}_{50} = 1850$. Се тестира хипотезата $H_0: EX = 2000$, наспроти алтернативната $H_a: EX \neq 2000$, со ниво на значајност $\alpha = 0{,}05$.

За вредноста на тест статистиката U се добива: $u = \dfrac{1850 - 2000}{350}\sqrt{50} = -3{,}03 \in C = (-\infty, -1{,}96) \cup (1{,}96, \infty)$, од каде следува дека просечниот број на жители во селата во тој регион е различен од 2000.

③ Ако A е настанот: вакцината е неуспешна, тогаш се тестира нултата хипотеза:

$$H_0: P(A) = 0{,}09$$

наспроти алтернативната $\quad H_a: P(A) < 0{,}09.$

Од 100 вакцинирани пациенти, кај 5 од нив вакцината не е успешна, што значи дека релативната фреквенција на настанот A е $\overline{p}=\frac{5}{100}=0,05$. Вредноста на тест статистиката U, во конкретниот случај, ќе биде $u=\frac{0,05-0,09}{\sqrt{0,09\cdot 0,91}}\sqrt{100}=-1,4$. За $\alpha=0,05$, критичниот домен е $C=(-\infty,-1,65)$. Добиената вредност $u=-1,4\notin C$, од каде следува дека нултата хипотеза не се отфрла. Значи, новата вакцина не дава подобри резултати од старата.

4. Се тестира хипотезата H_0: $P(A)=1/6$, наспроти алтернативната H_a: $P(A)\neq 1/6$. Нивото на значајност на тестот е 0,05, а вредноста на тест статистиката е $u=\frac{35/180-1/6}{\sqrt{(1/6)\cdot(5/6)}}\sqrt{180}=1\notin C=(-\infty,-1,96)\cup(1,96,\infty)$. Значи, нултата хипотеза не се отфрла.

5

1. Се тестира нултата хипотеза H_0: $EX=60$, наспроти алтернативната H_a: $EX<60$, при што дисперзијата на обележјето не е позната. Од дадениот примерок наоѓаме: $\overline{x}_{18}=59,278$, $\overline{s}_{18}^2=9,977$. Се користи T-статистика и нејзината вредност е $t=\frac{\overline{x}_{18}-a_0}{\overline{s}_{18}}\sqrt{18}=\frac{59,289-60}{\sqrt{9,977}}\sqrt{18}=-0,955$. Бидејќи $t\notin C=(-\infty,-2,567)$ следува дека нултата хипотеза не се отфрла, т.е. очекуваниот приход во хектар во пелагонискиот регион е 60 мерни единици.

2. Се тестита нултата хипотеза H_0: $EX=2000$, наспроти алтернативната а) H_a: $EX>2000$; б) H_a: $EX<2000$; в) H_a: $EX\neq 2000$. Дисперзијата на обележјето не е позната, туку е оценета врз основа на примерокот и $\overline{s}_{50}^2=200^2$, додека аритметичката средина на примерокот е $\overline{x}_{50}=1950$. Бидејќи $n=50>30$, се користи U тест статистика. Нејзината вредност е: $u=\frac{1950-2000}{200}\sqrt{50}=-1,77$. Критичниот домен ќе зависи од алтернативната хипотеза.
а) $u\notin C=(1,65,\ \infty)$, па H_0 не се отфрла; б) $u\in C=(-\infty,-1,65)$, па H_0 се отфрла;
в) $u\notin C=(-\infty,-1,96)\cup(1,96,\infty)$ и H_0 не се отфрла. Заклучок: прифаќањето или отфрлањето на нултата хипотеза зависи од тоа како е поставена алтернативната хипотеза.

3. Се тестира нултата хипотеза H_0: $EX=25$, наспроти алтернативната H_a: $EX\neq 25$. Од примерокот се наоѓа $\overline{x}_{25}=24,84$, $\overline{s}_{25}^2=31,56$. Вредноста на T статистиката е $t=\frac{24,84-25}{\sqrt{31,56}}\sqrt{25}=-0,142$.
Притоа, $t\notin C=(-\infty,-2,492)\cup(\ 2,492,\infty)$, па H_0 не се отфрла. Значи, бројот на повици преку централата е просечно 25 во текот на еден час.

4. Разликите меѓу методите нема да бидат значајни, ако нивната очекувана вредност е 0. Затоа се тестира нултата хипотеза H_0: $EX=0$, наспроти алтернативната H_a: $EX\neq 0$. Наоѓаме $\overline{x}_{16}=0,75$, $\overline{s}_{16}=1,69$. Вредноста на тест статистиката е $t=1,77$. За $\alpha=0,05$, критичниот домен е $C=(-\infty,-2,131)\cup(2,131,\infty)$. $t\notin C$, па при 5% ниво на значајност, нултата хипотеза не се отфрла. Исто така, нултата хипотеза нема да се отфрли и за секое пониско ниво на значајност, па и за 1%.

6 (1) Се тестира хипотезата $H_0: DX = 8^2$, наспроти алтернативната $H_a: DX > 8^2$. Врз основа на примерокот се определува дека $s_{50}^2 = 88,64$. Вредноста на χ^2-статистиката е $\chi^2 = \dfrac{50 \cdot 88,64}{64} = 69,25$. Критичниот домен е е од облик $C = \left(\chi^2_{49;0,025}, \infty\right) = (71,4202, \infty)$. Од таблица е прочитана вредноста за $\chi^2_{50;0,025}$, бидејќи таа е најблиска вредност до бараната, од вредностите кои постојат во Таблицата 3. $\chi^2 = 69,25 \notin C$, па нултата хипотеза не се отфрла.

(2) Се тестира хипотезата $H_0: DX = 0,25^2$, наспроти алтернативната $H_a: DX > 0,25^2$. Вредноста на χ^2-статистиката е $\chi^2 = \dfrac{20 \cdot 0,32^2}{0,25^2} = 32,768$. Притоа, за $\alpha = 0,05$, $t \in C = \left(\chi^2_{19;0,05}, \infty\right) = (30,1435, \infty)$, па нултата хипотеза не се прифаќа со 5% ниво на значајност. За $\alpha = 0,01$, $t \notin C = \left(\chi^2_{19;0,01}, \infty\right) = (36,1908, \infty)$, а тоа значи дека H_0 се прифаќа при ова ниво на значајност.

7 (1) Вредноста на тест статистиката е $\chi^2 = 9,575 \in C = (6,63490, \infty)$, па определбата на гласачите зависи од полот на кандидатот.

(2) $\chi^2 = 20,438 \in C = (14,4494, \infty)$. Интересирањето на учениците зависи од нивните предиспозиции.

ПРЕГЛЕД НА ПОИМИ

М

Н

О

П

Р

С

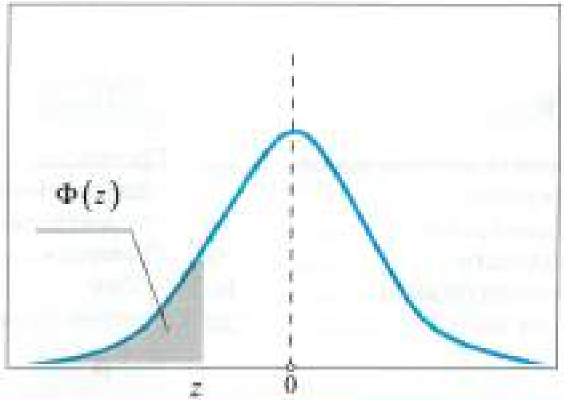
Т

Х

Ф

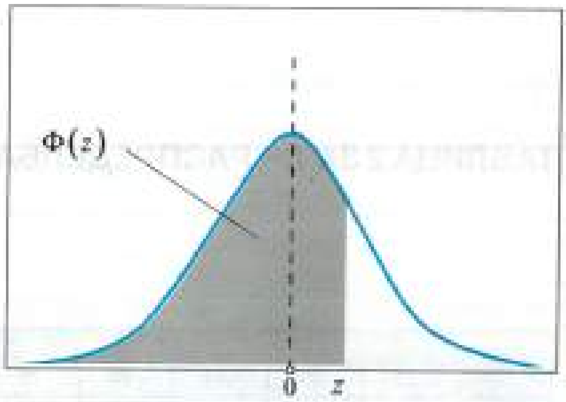
Ч

ТАБЛИЦА 1 ЗА НОРМАЛНА РАСПРЕДЕЛБА



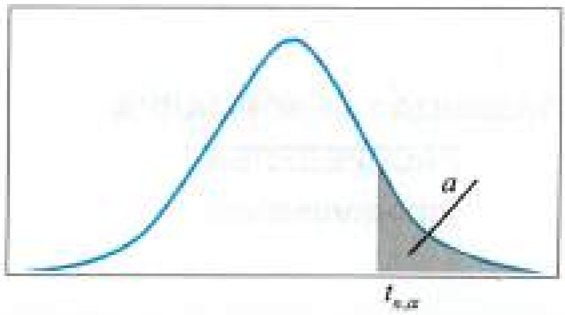
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0	.5000	.4960	.4920	4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

ТАБЛИЦА 1 ЗА НОРМАЛНА РАСПРЕДЕЛБА
(продолжение)



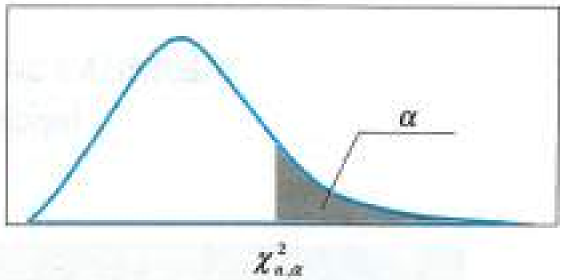
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8089	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	9998

ТАБЛИЦА 2 ЗА t – РАСПРЕДЕЛБА



n	α											
	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.104	3.497	4.025	4.437
12	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	.679	.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	.679	.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	.678	.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	.677	.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	.675	.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
∞	.674	.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291

ТАБЛИЦА 3 ЗА χ^2 - РАСПРЕДЕЛБА



n	α				
	0.995	.0990	.0975	0.950	.0900
1	0.0000393	0.0001571	0.0009821	0.0039321	0.0157908
2	0.0100251	0.0201007	0.0506356	0.102587	0.210720
3	0.0717212	0.114832	0.215795	0.351846	0.584375
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.063623
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396
22	8.64272	9.54249.	10.9823	12.3380	14.0415
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581

ТАБЛИЦА 3 ЗА χ^2 - РАСПРЕДЕЛБА
(продолжение)

n	α				
	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966
3	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381
4	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602
5	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569
12	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	23.5418	26.2962	28.8485	31.9999	34.2672
17	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
22	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956
23	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585
25	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278
26	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899
27	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449
28	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933
29	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356
30	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321
90	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

СОДРЖИНА

Автори: **д-р Верица Бакева**
Боривоје Миладиновиќ

Рецензенти: **д-р Наум Целакоски**
Весна Чорбарова - Миленковска - професор во ДСУ "Панче Арсовски" Скопје
Заим Адеми - професор во гимназија "Зеф Љуш Марку" Скопје

Уредник: **Билјана Ангелова**

Стручни соработници - консултанти: **Катица Спасовска Бинчева**
Трајче Ѓорѓијевски

Со Решение од Министерот на Министерството за образование и наука на Република Македонија бр. 11-4095/1 од 29.07.2004 година оваа книга е одобрена за употреба во средното гимназиско образование.

„АЛБИ" ДОО Скопје, ул. Даме Груев бр.7–7/2 Скопје

Место и година на првото издание: Скопје 2004

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски" - Скопје

51 (075.3)

БАКЕВА, Верица
Математика : за IV година: гимназиско образование / Верица Бакева, Боривоје Миладиновиќ. - Скопје : Алби, 2004. - 270 стр. : илустр. ; 26 cm

ISBN 9989 - 919 - 60 -7
1. Миладиновиќ, Боривоје

COBISS.MK-ID 58197002

Издавач:
ДРУШТВО ЗА ИЗДАВАЧКА ДЕЈНОСТ, ПРОИЗВОДСТВО, ПРОМЕТ И УСЛУГИ
□АЛБИ□ДОО Скопје
ул. "Даме Груев" бр.7–7/2, Скопје

Управител: Александар Стефановски

д-р Верица Бакева , Боривоје Миладиновиќ
МАТЕМАТИКА
IV година гимназиско образование

Лектура
Сузана Стојковска

Компјутерска обработка
Милчо Аврамоски, Блаже Тофиловски

Коректура
Автори

XVII коригирано издание
Обем 272 страници, формат 21 x 26 cm
Тираж 139 примероци
Отпечатено во печатница:
Друштво за графичка, издавачка и трговска дејност "Печатница Наумовски" Д.О.О.Е.Л. Скопје
ул. Пекљане бр.71 Скопје

Скопје 2020 година