МАТЕМАТИКА

II година

ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ

АЛБИ

2002

Боривоје Миладиновиќ
Трајче Ѓорѓијевски
Никола Петрески

МАТЕМАТИКА

II година

ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ

2002

ПРЕДГОВОР

Оваа книга ќе ти помогне при изучувањето на математиката во втора година. Биди активен, упорен и редовен во работата, што ќе ти помогне самостојно да стекнуваш знаења, што ќе ти донесе задоволство и успех во учењето.

Книгава е поделена на осум тематски целини. Секоја тематска целина започнува со набројување на поими со кои ќе се сретнеш при изучувањето на содржината на темата, а наставните единици се нумерирани.

Воочи ги ознаките во наставните единици и согледај ја нивната порака.

Потсети се!	Наставните единици почнуваат со нешта што ти се познати, а се потребни за усвојување на новите содржини. Треба да се потсетиш и да ги решиш барањата.
А, Б, ...	Со овие ознаки наставната единица е поделена на делови (порции) што се однесуваат на нивните поими.
1, 2, 3, ...	Со ваквите ознаки се означени активностите, прашањата и задачите што ќе ги решаваш на часот самостојно или со помош на твојот професор. Тие се во самата лекција.

● Со ознаката крукче ти е упатено прашање на кое треба да дадеш одговор.

■ Со оваа ознака е дадена информација за објаснување на новиот поим.

Запомни!	Ова те упатува што е важно за новиот поим.
Треба да знаеш!	Оваа ознака те упатува што треба да знаеш, да паметиш, за да ти корирсти при решавањето на задачите.
Воочи: ***Воопшто:***	Овие две пораки ти даваат на знаење да посветиш поголемо внимание.
Задачи: ①, ②, ③, ...	По секоја наставна единица дадени се задачи. Со редовно и самостојно решавање на овие задачи подобро ќе го разбереш изученото. Твоите одговори спореди ги со одговорите и решенијата што се дадени на крајот од учебникот.
Тематска контролна вежба	На крајот на секоја темите: 1, 2, 3, 4, 5 и 6 дадени се тематски контролни вежби составени од прашања и задачи. Решавај самостојно, со што ќе го провериш твоето знаење од изучената тема.

Кога ќе наидеш на тешкотии при изучувањето на одредени содржини, не се откажувај, обиди се повторно, биди упорен.
Ќе не радува ако оваа книга ти овозможи да ја засакаш математиката и да постигнуваш солиден успех.

Од авторите

ТЕМА 1

ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Големата книга на природата е напишана со јазикот на математиката.

Галилео Галилеј

Во оваа тема првпат ќе учиш за:

- дефиниции на тригонометриските фукции синус, косинус, тангенс и котангенс од остар агол;
- основни тригонометриски зависности од ист агол;
- определување вредности на тригонометриските функции за даден агол;
- определување на агол ако е дадена вредност на тригонометриска функција за тој агол;
- решавање на правоаголен триаголник.

1 ПОИМ ЗА АГОЛ. ЕДИНИЦИ ЗА МЕРЕЊЕ НА АГЛИ

Потсети се!

- Кој агол е прав?
- Нацртај остар, прав и тап агол.

А

1 На цртежот се повлечени полуправите OA и OB.

- На колку делови е поделена рамнината со полуправите?

Запомни!

Геометриска фигура образувана од две полуправи со заедничка почетна точка и делот од рамнината ограничен со нив се вика ***агол***.

- Полуправите OA и OB се викаат ***краци*** на аголот.
- Нивниот заеднички почеток O се вика ***теме*** на аголот.
- За еден агол велиме дека е ***конвексен***, ако секоја отсечка чии крајни точки се на краците од аголот, лежи во тој агол.
- Каков е аголот AOB?

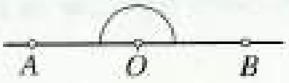
Потсети се!

На цртежот е даден еден агол.

- Именувај го тој агол.
- Именувај ги краците и темето на аголот.

Б

2 Разгледај го аголот AOB на цртежот, размисли и одговори.

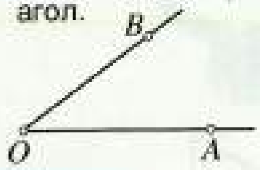


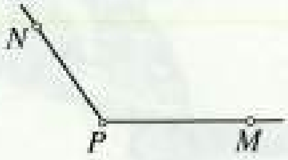
- Што образуваат краците на аголот AOB?

Запомни!

Агол чии краци образуваат една права се вика ***рамен агол***.
Половина од рамниот агол се вика ***прав агол***.

3 На цртежот се дадени аглите AOB и MPN. Спореди го секој од тие агли со правиот агол.





- Кој од дадените агли е помал, а кој поголем од правиот агол?

Воочи и запомни!

Аголот што е помал од правиот агол се вика ***остар агол***.
Аголот што е поголем од правиот агол, а помал од рамниот агол, се вика ***тап агол***.
Два агли што имаат заедничко теме и еден заеднички крак, а нивните области лежат на различни страни од заедничкиот крак се викаат ***соседни агли***.
Два соседни агли што образуваат рамен агол се викаат ***напоредни агли***.

Потсети се!

- Досега повеќе пати си мерел различни величини: должина, маса, плоштина, волумен.
- Кои се единици мерки за должина, плоштина и волумен?
- Дали аглите можат да се споредуваат по големина и дали можат да се мерат?

В 4 Разгледај го агломерот и одговори:

- На колку еднакви делови е поделен правиот агол?

Запомни!

90 - от дел од правиот агол се вика степен (се означуна 1^0).
Степенот е мерна единица за мерење на агли.

Помали единици од степенот за мерење агли се ***минута*** (се означува $1'$) и ***секунда*** (се означува $1''$). Еден степен има шеесет минути, а една минута има шеесет секунди.

Запомни!

$$1^0 = 60';\ \ 1' = 60'';\ \ 1^0 = (60 \cdot 60)'' = 3600''.$$

5 Претвори ги аглите во минути:

а) 5^0; б) $12^0 45'$; в) $45^0 15'$.

6 Претвори ги аглите во секунди:

а) 4^0; б) $10^0 15'$; в) $20^0 20' 20''$.

Г Други мерни единици за мерење на аглите се ***градус*** и ***радијан***.

Градусот (g) е 100 - ти дел од правиот агол. Помали единици од градусот се центизимална минута ($1'$ или 1^c) и центизимална секунда ($1''$ или 1^{cc}), а $1g = 100^c$ и $1^c = 100^{cc}$.

Радијан (rad) е централен агол што му одговара на кружен лак, чија должина е еднаква на радиусот на кружницата.

Ако со r го означиме радиусот на произволна кружница, со 1 должината на лак од таа кружница, а со α централниот агол што му припаѓа на лакот, тогаш тој агол изразен во радијани е:

$$\alpha = \frac{1}{r}\, rad.$$

На пример, ако е α рамен агол, тогаш $1 = \frac{2r\pi}{2}$, додека $\alpha = \frac{\frac{2r\pi}{2}}{r} = \pi\, rad$, т.е. $180^0 = \pi\, rad.$

Ова равенство ја дава врската меѓу степен и радијан, како должинска единица за мерење на аголот. Оттука добиваме:

$$1\,rad = \frac{180^0}{\pi} = 57,29578^0 = 57^0 17' 44,8'',\ \text{а}\ 1^0 = \frac{\pi}{180^0}\, rad = 0,01745\, rad,\ (\pi = 3,14159).$$

Врз основа на претходното, аголот изразен во степени го претвораме во радијани со формулата:

$$\alpha^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot \alpha\, rad.$$

7 Правиот агол изрази го во радијани.

8 Аголот од 150^0 изрази го во радијани.

Согледај го решението:

- Со примена на формулата $\alpha = \frac{\pi}{180^0} \cdot \alpha\, rad$, имаме: $150^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 150^0\, rad = \frac{5}{6}\pi\, rad = 2,6\, rad$.

9 Изрази го во радијани аголот од $21^0 18' 48''$.

Согледај го решението:

- $21^0 18' 48'' = \frac{\pi}{180^0} \cdot 21,313^0 \approx 0,372\, rad$.

10 Аглите од 160^0 и $32^0 25' 16''$, изрази ги во радијани.

11 Аголот $\alpha = \frac{4}{3}\pi\, rad$, изрази го во степени.

Согледај го решението:

- Од равенството $\pi\, rad = 180^0$, следува дека $1\, rad = \frac{180^0}{\pi}$, во случајов,

$\alpha = \frac{4}{3}\pi\, rad = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{180^0}{\pi} = 240^0$, т.е. $\alpha = 240^0$.

12 Изрази го во степени аголот $\alpha = 0,73\, rad$.

Согледај го решението:

- $\alpha = 0,73\, rad = 0,73 \cdot \frac{180}{\pi} = 41,8^0 = 41^0 48'$.

13 Аглите $\alpha = \frac{2}{3}\pi\, rad$ и $\beta = 0,45\, rad$, изрази ги во степени.

Треба да знаеш!

Што е агол?
За кој агол се вели дека е конвексен?
Кој агол е прав, а кој рамен?
Кој агол е остар, а кој тап?

Кои агли се соседни, а кои напоредни?
Што е степен, градус, радијан?
Да знаеш агол мерен во степен да го претвориш во радијан и обратно.

Задачи:

① Одреди го напоредниот агол на аголот $\alpha = 68^0 25'$.

② Претвори ги во минути: а) 8^0; б) $16^0 24'$; в) $46^0 25'$.

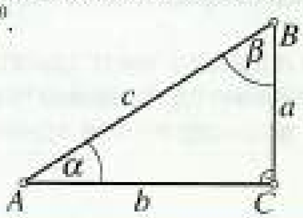
③ Изрази ги во радијани аглите: а) 15^0; б) 45^0; в) 210^0; г) 300^0.

④ Изрази ги во степени аглите дадени во радијани: а) $\frac{3}{2}\pi\, rad$; б) $\frac{7}{3}\pi\, rad$; в) $\frac{11}{12}\pi\, rad$.

2 ДЕФИНИЦИЈА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ

Потсети се!

- Кои се елементите на правоаголен триаголник?
- За кои два триаголници велиме дека се слични?
- Како гласи Питагоровата теорема?
- Острите агли α и β во правоаголен триаголник се комплементни, т.е. $\alpha+\beta=90^0$.



А ■ Вообичаено, обележувањето на страните и аглите на правоаголен триаголник е соодветно на неговите темиња. На пример, аголот во темето A се означува со α, а страната спроти истото теме се означува со a.

■ Катетата a е ***спротивна катета*** на аголот α, а е ***прилегнатата катета*** на аголот β.

- Која катета е спротивна на аголот β?

Правоаголниот триаголник е наполно определен ако се познати два негови елементи, од кои барем еден е страна.

■ За правоаголниот триаголник со катети a и b и хипотенуза c, важи Питагоровата теорема, т.е.

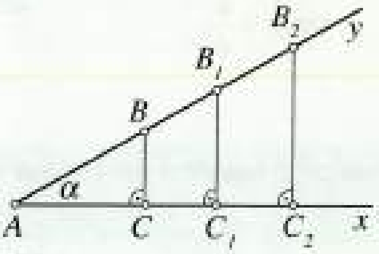
$$c^2=a^2+b^2.$$

1 Дадени се мерните броеви на страните на триаголник:

а) $2,3,4$; б) $3,4,5$; в) $8,9,10$; г) $6,8,10$.

Кои од нив се страни на правоаголен триаголник?

Б Познато е дека два триаголници се слични ако два агли на едниот триаголник се еднакви со два соодветни агли од другиот триаголник. Правоаголните триаголници се слични, ако имаат еднаков по еден остар агол.



■ Соодветните страни на сличните триаголници се пропорционални.

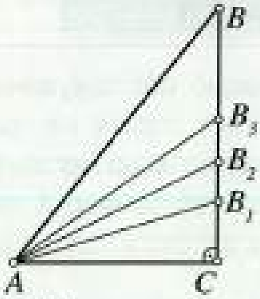
Нека точките B, B_1, B_2,... лежат на кракот Ay од аголот $\alpha=xAy$. Ако од точките B, B_1, B_2,... повлечеме нормали на крак Ax, ќе добиеме правоаголни триаголници ABC, AB_1C_1, AB_2C_2,... кои имаат заеднички агол α.

■ Добиените триаголници се слични, па нивните страни се пропорционални, т.е.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}}=\dots \quad \text{и} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}}=\dots$$

■ Воочуваш, односот на страните на сличните правоаголни триаголници не зависи од големината на страните.

Да ги разгледаме правоаголните триаголници ACB, ACB_1, ACB_2,... на цртежот кои имаат иста катета AC, а различни агли.



- Какви се односите

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}};\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}};\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}},\ldots \text{ и } \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}};\frac{\overline{B_1C}}{\overline{AC}};\frac{\overline{B_2C}}{\overline{AC}},\ldots?$$

- Очигледно е дека односот на спротивната катета на тој агол и прилегнатата катета се различни. Исто така, и односот на прилегнатата катета и хипотенузата за секој од тие правоаголни триаголници има различни вредности.

Значи, односот на две страни во правоаголен триаголник се менува ако се менува остриот агол во тој триаголник.

Според тоа, за еден ист остар агол односот на страните во правоаголниот триаголник во кој припаѓа тој агол секогаш има еднакви бројни вредности, независно од големината на страните на триаголникот, додека за различни остри агли тој однос во соодветните триаголници има различни бројни вредности.

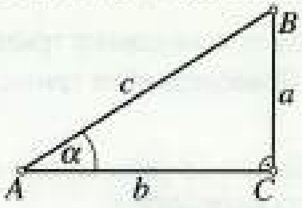
Запомни!

Односот на две страни во правоаголен триаголник е функција од остар агол во тој триаголник.

В Бидејќи односот на страните во правоаголен триаголник зависи од големината на остриот агол, тие односи се викаат ***тригонометриски функции***.

(Грчките зборови тригонон-триаголник и метрео-мерење, значи мерење на триаголник).

Нека е даден правоаголниот триаголник ABC.



- Односот $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ се вика синус од аголот α и се запишува

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Запомни!

Д$_1$: Синус од остар агол во правоаголен триаголник е однос на спротивната катета на тој агол и хипотенузата.

- Односот $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, се вика косинус од аголот α и се запишува со формулата $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Запомни!

Д$_2$: Косинус од острииот агол во правоаголен триаголник е однос на прилегнатата катета на тој агол и хипотенузата.

- Односот $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, се вика тангенс од аголот α и се запишува со формулата $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$.

Запомни!

$Д_3$: Тангенс од остар агол во правоаголен триаголник е однос на спротивната и прилегнатата катета на тој агол.

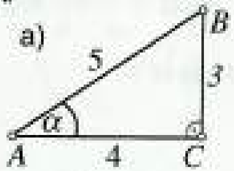
- Односот $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, се вика котангенс од аголот α и се запишува со формулата $ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$.

Запомни!

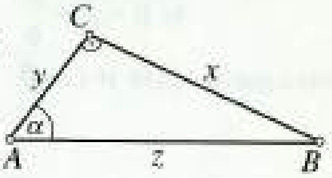
$Д_4$: Котангенс од остар агол во правоаголен триаголник е однос на прилегнатата и спротивната катета на тој агол.

2 Одреди ги вредностите на тригонометриските функции за аголот α, даден на следниве цртежи:

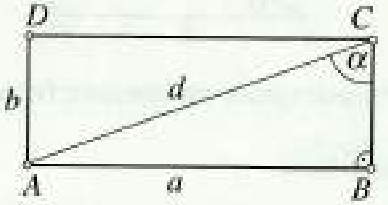
а)



б)



в)



Согледај го решението.

а) $\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6;$

$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8;$

$tg\,\alpha = \frac{3}{4} = 1{,}75;$

$ctg\,\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}333...$

б) $\sin\alpha = \frac{x}{z};$

$\cos\alpha = \frac{y}{z};$

$tg\,\alpha = \frac{x}{y};$

$ctg\,\alpha = \frac{y}{x}.$

в) $\sin\alpha = \frac{a}{d};$

$\cos\alpha = \frac{b}{d};$

$tg\,\alpha = \frac{a}{b};$

$ctg\,\alpha = \frac{b}{a}.$

3 Одреди ја висината на дрво, кое на земја фрла сенка со должина $8m$, ако аголот на сончевиот зрак и дрвото зафаќаат агол од 45^0.

Задачи:

① Кои од равенствата се вистинити: а) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$; б) $\cos\alpha = \sqrt{2}$; в) $tg\,\alpha = \frac{5}{4}$; г) $ctg\,\alpha = \frac{1}{7}$?

② Даден е правоаголен триаголник со катети $a = 28$ и $b = 96$. . Одреди ги вредностите на тригонометриските функции, за аголот α.

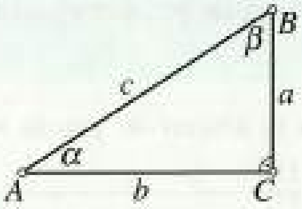
③ Одреди ја приближно висината на дрво, чија сенка е долга $5m$, а сончевите зраци зафаќаат со земјата агол од 50^0.

④ Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од остар агол во правоаголен триаголник, ако неговите катети се однесуваат како $8:15$.

3 ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД КОМПЛЕМЕНТНИ АГЛИ

Потсети се!

- Аглите чии збир е 90^0 се викаат комплементни агли.
- Кој е комплементниот агол на секој од аглите: $60^0, 15^0, 80^0, 75^0$?
- Дали острите агли во правоаголен триаголник се комплементни?



А **1** Катетите на правоаголен триаголник се $a = 6cm$ и $b = 8cm$. Одреди ја вредноста на тригонометриските функции $\sin\alpha$ и $\cos\beta$, $tg\,\beta$ и $ctg\,\alpha$.

Согледај го решението.

- Со примена на Питагоровата теорема, имаме: $c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100$, т.е. $c = 10cm$.
- Од дефиницијата на тригонометриските функции, следува:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = 0,6; \ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = 0,6;$$

$$tg\,\beta = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = 1,33...; \ ctg\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = 1,33...$$

- Што воочуваш за вредностите на функциите $\sin\alpha$ и $\cos\beta$, $tg\,\beta$ и $ctg\,\alpha$?

Запомни!

Ако аглите α и β се комплементни, т.е. $\alpha + \beta = 90^0$, тогаш $\sin\alpha = \cos\beta$ и $tg\,\beta = ctg\,\alpha$.

- Дали се точни равенствата: $\sin\beta = \cos\alpha$ и $tg\,\alpha = ctg\,\beta$?
- Воочи, од $\alpha + \beta = 90^0$, $\beta = 90^0 - \alpha$, имаме:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha; \qquad tg(90^0 - \alpha) = ctg\,\alpha;$$

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha. \qquad ctg(90^0 - \alpha) = tg\,\alpha.$$

Вообичаено, за функцијата косинус се вели дека е ***кофункција*** на синус и обратно. Исто така за функцијата котангенс се вели дека е кофункција на тангенс и обратно.

Запомни!

Секоја тригонометриска функција за даден агол е еднаква со соодветната кофункција на неговиот комплементен агол.

Б **2** Тригонометриските функции за агол од: а) 75^0 и б) $46^0 20'$ изрази ги со тригонометриски функции на соодветниот комплементен агол.

Согледај го решението:

- а) $\sin 75^0 = \sin(90^0 - 15^0) = \cos 15$, $\cos 75^0 = \cos(90^0 - 15^0) = \sin 15^0$,

$$tg\,75^0 = ctg\,15^0, \ ctg\,75^0 = tg\,15^0.$$

■ б) Ако $\alpha = 46^0 20'$, тогаш $\beta = 89^0 60' - 46^0 20' = 43^0 40'$; $\sin 46^0 20' = \cos 43^0 40'$, $\cos 46^0 20' = \sin 43^0 40'$, $tg\, 46^0 20' = ctg\, 43^0 40'$, $ctg\, 46^0 20' = tg\, 43^0 40'$.

3 Одреди го острoт агол α, ако: а) $\sin\left(\alpha - 10^0\right) = \sin 20^0$, б) $\sin\alpha = \cos 50^0$, в) $tg\,\alpha = ctg\,37^0$.
Согледај го решението:

■ а) Од $\alpha - 10^0 = 20^0$ следува $\alpha = 30^0$; б) $\alpha + 50^0 = 90^0, \alpha = 40^0$; в) $\alpha + 37^0 = 90^0, \alpha = 53^0$.

4 Одреди го острoт агол α, ако: а) $\cos\left(\alpha + 15^0\right) = \cos 40^0$, б) $\cos\left(\alpha + 5^0\right) = \cos 40^0$,
в) $tg\left(\alpha - 15^0\right) = ctg\, 20^0$, г) $ctg\left(\alpha + 10^0\right) = tg\, 30^0$.

5 Одреди го острoт агол α, ако:

а) $\sin\left(\alpha + 15^0\right) = \cos 23^0 15'$, б) $\cos\left(\alpha - 20^0\right) = \sin 63^0 25'$, в) $tg\left(\alpha + 20^0\right) = ctg\left(2\alpha - 10^0\right)$.
Согледај го решението:

■ а) Од $\alpha + 15^0 + 23^0 15' = 90^0$, односно $\alpha = 89^0 60' - 38^0 15'$, добиваме $\alpha = 51^0 45'$.

6 Одреди го аголот α, ако: а) $\sin\left(\alpha - 10^0\right) = \cos 34^0 25'$; б) $\cos\left(23^0 - \alpha\right) = \sin 38^0 25' 30''$;
в) $tg\left(\alpha + 20^0\right) = ctg\, 63^0 24'$; г) $ctg\left(\alpha - 40^0\right) = tg\, 63^0 15' 20''$.

7 Упрости ги изразите:

а) $2\sin 35^0 - 3\cos 55^0$; б) $\dfrac{5tg\,50^0 + 3ctg\,40^0}{3tg\,50^0 - ctg\,40^0}$; в) $\dfrac{5\sin 15^0 - 2\cos 75^0}{5\sin 15^0 + 2\cos 75^0}$.

Согледај го решението: ■ Бидејќи аглите од 35^0 и 55^0 се комплементни, следува:

а) $2\sin 35^0 - 3\cos 55^0 = 2\sin 35^0 - 3\sin 35^0 = -\sin 35^0$;

б) $\dfrac{5tg\,50^0 + 3ctg\,40^0}{3tg\,50^0 - ctg\,40^0} = \dfrac{5tg\,50^0 + 3tg\,50^0}{3tg\,50^0 - tg\,50^0} = \dfrac{8tg\,50^0}{2tg\,50^0} = 4.$

8 Упрости ги следните изрази:

а) $3\cos 15^0 - 2\sin 75^0$; б) $\dfrac{2\sin 20^0 + \cos 70^0}{2\sin 20^0 - \cos 70^0}$; в) $\dfrac{3tg\,80^0 - 2ctg\,10^0}{3tg\,80^0 + ctg\,10^0}$.

Задачи:

① Одреди го аголот α, ако:

а) $\sin\left(\alpha + 10^0\right) = \sin 30^0$; б) $\cos\left(\alpha - 15^0\right) = \cos 23^0 15'$; в) $tg\left(\alpha + 20^0\right) = ctg\, 15^0 20'$;

г) $ctg\left(\alpha - 15^0\right) = tg\, 15^0 23'$; д) $tg\left(\alpha - 20^0\right) = ctg\left(\alpha + 20^0\right)$; ѓ) $\sin\left(\alpha + 10^0\right) = \cos\left(10^0 + \alpha\right)$.

② Упрости ги изразите: а) $\dfrac{3\sin 70^0 - 2\cos 20^0}{2\sin 20^0 + \cos 70^0}$; б) $\dfrac{4tg\,5^0 - 2ctg\,85^0}{4tg\,5^0 + ctg\,85^0}$.

③ Упрости ги изразите, ако се знае дека $\alpha + \beta = 90^0$:

а) $\cos\beta + \sin\alpha$; б) $\sin\alpha + \cos\beta$; в) $\sin^2\alpha + \cos^2\beta$.

4 ВРЕДНОСТИ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ОД $45^0, 60^0, 30^0$.

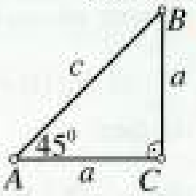
Потсети се!

- Кој триаголник е рамнокрак правоаголен?
- Какви се страните и аглите во рамностран триаголник?
- Кое својство има висината на рамностраниот триаголник?

A

1 Нека a е катетата на рамнокрак правоаголен триаголник ABC. Одреди ја хипотенузата на тој триаголник.

Согледај го решението.



- Според Питагоровата теорема, имаме: $c^2 = 2a^2$ или $c = a\sqrt{2}$.

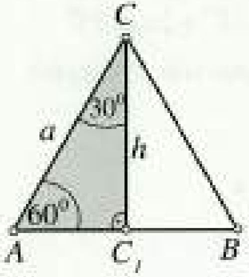
- Според дефиницијата за тригонометриските функции, добиваме:

$$\sin 45^0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \; tg\, 45^0 = \frac{a}{a} = 1.$$

- Колку е $\cos 45^0$ и $ctg\, 45^0$?

2 Одреди ја висината во рамностраниот триаголник ако е дадена неговата страна a.

Согледај го решението.



- Од ΔAC_1C, имаме $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Според дефиницијата за тригонометриски функции, добиваме:

$$\sin 60^0 = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2};$$

$$tg\, 60^0 = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}; \qquad ctg\, 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3 Користејќи го својството за комплементни агли, одреди ја вредноста на тригонометриските функции за агол од 30^0.

Согледај го решението:

- $\sin 30^0 = \sin\left(90^0 - 60^0\right) = \cos 60^0 = \frac{1}{2}; \; \cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$tg\, 30^0 = ctg 60^0 \frac{\sqrt{3}}{2}, \; ctg\, 30^0 = tg\, 60^0 = \sqrt{3}.$$

Б 4 Одреди ја вредноста на изразите:

а) $2\sin 30^0 + 2\cos 60^0$; б) $\left(1+\sin 60^0\right)\left(1-\sin 60^0\right)$.

Согледај го решението.

а) $2\sin 30^0 + 2\cos 60^0 = 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = 2$;

б) $\left(1+\sin 60^0\right)\left(1-\sin 60^0\right) = 1-\sin^2 60^0 = 1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

5 Одреди ја вредноста на изразите:

а) $3\sin 30^0\cdot tg\,30^0 + \cos 60^0\cdot ctg\,60^0$; б) $\left(1+\cos 30^0\right)\left(1-\cos 30^0\right)$.

6 Провери ја точноста на равенствата:

а) $3ctg\,60^0 - 2\sin 60^0 = 0$; б) $\sin 30^0 + \cos 60^0 = tg\,45^0$; в) $\cos^2 60^0 + \sin^2 60^0 = ctg\,45^0$.

Согледај го решението:

а) $3ctg\,60^0 - 2\sin 60^0 = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}-\sqrt{3} = 0$; б) $\sin 30^0 + \cos 60^0 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 = tg\,45^0$.

7 Провери ја точноста на равенствата:

а) $\frac{1}{\sin 30^0} + \frac{1}{\cos 60^0} = \left(tg\,45^0 + ctg\,45^0\right)^2$; б) $4\sin^2 60^0 + 4\cos^2 30^0 = tg^2 60^0 + ctg^2 30^0$.

Задачи:

① Одреди ја вредноста на изразите:

а) $3\sin 60^0 - 2\cos 30^0$; б) $\left(tg\,45^0 + tg\,60^0\right)\left(tg\,45^0 - tg\,60^0\right)$.

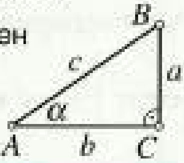
② Провери ја точноста на равенството $2\sin 30^0 - 2\cos 30^0 + \sqrt{3} = 1$.

③ Колкава е сенката на дрвото чија висина е $8m$, ако сончевиот зрак со стеблото на дрвото зафаќа агол од: а) 30^0, б) 45^0, в) 60^0?

5 ВРСКА МЕЃУ ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ОД ИСТ АГОЛ

Потсети се!

- За дефиницијата на тригонометриските функции од остар агол во правоаголен триаголник.
- За Питагоровата теорема.



Од дефиницијата на тригонометриските функции од сголот α во правоаголен триаголник имаме:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\quad tg\,\alpha = \frac{a}{b};\quad \cos\alpha = \frac{b}{c};\quad ctg\,\alpha = \frac{b}{a}.$$

А Од $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, следува: $(\sin\alpha)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2$, т.е. $\sin^2\alpha = \frac{a^2}{c^2}$.

Од $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$ следува: $(\cos\alpha)^2=\left(\dfrac{b}{c}\right)^2$, т.е. $\cos^2\alpha=\dfrac{b^2}{c^2}$. Ако ги собереме соодветните страни на двете равенства, имаме: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$. Бидејќи $a^2+b^2=c^2$ следува:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{c^2}{c^2}=1$, т.е. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\dfrac{a}{b}=tg\,\alpha$, а $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\dfrac{b}{a}=ctg\,\alpha$, и $tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}=1$.

Запомни!

Ако α е кој било остар агол, тогаш точни се равенствата:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad ctg\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad \text{и}\quad tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha=1,$$

кои се викаат основни тригонометриски идентитети.

1 Провери ја точноста на равенствата: а) $\sin^2 60^0+\cos^2 60^0=1$; б) $tg\,30^0\cdot ctg\,30^0=1$.

Основните тригонометриски идентитети имаат широка примена. Со нивна помош, ако е дадена вредноста на една тригонометриска функција, ги одредуваме вредностите на другите тригонометриски функции.

2 Ако е $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции.

Согледај го решението.

■ Од $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, имаме, $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}$, т.е. $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$;

$tg\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{3}{4}$, $ctg\,\alpha=\dfrac{4}{3}$.

3 Ако е дадено $\cos\alpha=\dfrac{9}{40}$, одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции.

4 Ако е а) $\sin\alpha=\dfrac{7}{25}$; б) $\cos\alpha=\dfrac{20}{29}$, да се одредат вредностите на другите тригонометриски функции.

5 Ако е дадено $tg\,\alpha=\dfrac{3}{4}$ одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции.

Согледај го решението:

■ Од $tg\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, имаме $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}\cos\alpha$. Ако последново равенство се замени во основниот идентитет $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, добиваме: $\left(\dfrac{3}{4}\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1$ или $\dfrac{9}{16}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, односно $\cos^2\alpha=\dfrac{16}{25}$, т.е. $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, бидејќи $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}\cos\alpha$ следува $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$.

Од $ctg\,\alpha=\dfrac{1}{tg\,\alpha}$, следува $ctg\,\alpha=\dfrac{4}{3}$.

Постапката за одредување на вредноста на другите тригонометриски функции, ако е дадена вредноста на функцијата $tg\,\alpha$ или $ctg\alpha$, може да се изведе и на следниов начин:

Од $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\big|:\cos^2\alpha$, добиваме $tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ или $\left(\frac{3}{4}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, т.е. $\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{25}{16}$, од каде $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. Решавај на начин кој ти е поедноставен.

6 Ако $ctg\,\alpha=\frac{12}{35}$, одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции.

7 Докажи ја точноста на равенството $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)(tg\,\alpha+ctg\,\alpha)=ctg\,\alpha$ со примена на основните тригонометриски идентитети.

Согледај го решението:

■ Ако со L ја означиме левата, а со D десната страна на равенството, тогаш имаме:

$$L=(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)(tg\,\alpha+ctg\,\alpha)=(1-\sin^2\alpha)\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=$$

$$=\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

$$=\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\,\alpha=D.$$

Значи, даденото равенство е вистинито, за кој било остар агол α.

7 Докажи ја точноста на равенството $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha-1}=-2\,ctg\,\alpha$.

Задачи:

① Ако е: а) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, б) $\cos\alpha=0,28$, одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции.

② Нека е: а) $tg\,\alpha=\frac{35}{12}$, б) $ctg\,\alpha=1,05$, одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции.

③ Докажи ја точноста на равенствата: а) $(1+tg\,\alpha)^2+(1-tg\,\alpha)^2=\frac{2}{\cos^2\alpha}$;

б) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$; в) $\frac{\sin\alpha}{1+ctg\,\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+tg\,\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

6 МЕНУВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ АКО АГОЛОТ СЕ МЕНУВА ОД 0^0 ДО 90^0

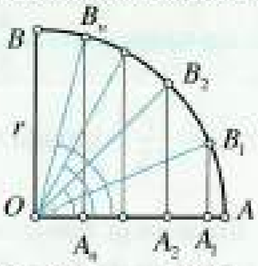
Потсети се!

- Подреди ги по големина вредностите на синус од: $30^0, 60^0, 45^0$.
- Одреди го знакот на разликата:

  а) $\sin 30^0 - \sin 45^0$; б) $\cos 30^0 - \cos 45^0$;

  в) $tg\, 30^0 - tg\, 45^0$; г) $ctg\, 30^0 - ctg\, 45^0$.
- Што воочуваш?

А **1** Разгледај го цртежот кој е четвртина од кружница со радиус $r = 1$.



Воочуваш: $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = ... = \overline{OB_n} = r = 1$.

Нека $\measuredangle A_1OB_1 = \alpha_1$; $\measuredangle A_1OB_2 = \alpha_2$; ...; $\measuredangle A_1OB_n = \alpha_n$. Воочуваш дека $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$, а $\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2} < ... < \overline{A_nB_n}$.

Од $\sin\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{r}$, $\sin\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{r}$, ... $\sin\alpha_n = \frac{\overline{A_nB_n}}{r}$, следува $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2 < ... < \sin\alpha_n$, т.е. вредноста на функцијата "***синус од остар агол***" расте, ако аголот расте. Растењето на функцијата синус е ограничено, бидејќи отсечките $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n$ секогаш се помали од $\overline{OB} = r = 1$. Според тоа, $\sin\alpha < 1$.

Запомни!

Ако аголот α расте и се стреми кон 90^0, тогаш и $\sin\alpha$ расте и се стреми кон 1.

2 Подреди ги по големина: $\sin 15^0$, $\sin 8^0$, $\sin 23^0$, $\sin 16^0$.

Согледај го решението.

- Бидејќи $8^0 < 15^0 < 16^0 < 23^0$, следува $\sin 8^0 < \sin 15^0 < \sin 16^0 < \sin 23^0$.

3 Подреди ги по големина: $\sin 25^0$, $\sin 36^0$, $\sin 20^0$, $\sin 68^0$.

- Како се менува вредноста на функцијата косинус од остар агол, ако тој агол расте од 0^0 до 90^0?

- $\cos\alpha_1 = \frac{\overline{OA_1}}{r}$, $\cos\alpha_2 = \frac{\overline{OA_2}}{r}$, ..., $\cos\alpha_n = \frac{\overline{OA_n}}{r}$.

Бидејќи за $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$, $\overline{OA_1} > \overline{OA_2} > ... > \overline{OA_n}$, следува дека вредноста на косинус од остар агол опаѓа кога аголот расте од 0^0 до 90^0.

Запомни!

Ако аголот α расте и се стреми кон 90^0, тогаш $\cos\alpha$ опаѓа и се стреми кон нула.

4 Подреди ги по големина: $\cos 20^0, \cos 15^0, \cos 25^0$.
Согледај го решението:

- Бидејќи $15^0 < 20^0 < 25^0$, следува $\cos 15^0 > \cos 20^0 > \cos 25^0$.

5 Подреди ги по големина: $\cos 35^0, \cos 18^0, \cos 48^0, \cos 8^0$.

Б За тригонометриските функции $tg\,\alpha$ и $ctg\,\alpha$ имаме:

$$tg\,\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}},\ tg\,\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}},\ \ldots,\ tg\,\alpha_n = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}}.$$

Разгледувајќи ги дропките, воочуваме дака броителите на дропките растат, додека пак, именителите опаѓаат. Значи, ако аголот расте од 0^0 до 90^0, тогаш и вредноста на функцијата тангенс од тој остар агол расте.

На сличен начин, за котангенсот, имаме: $ctg\,\alpha_1 = \frac{\overline{OA_1}}{A_1B_1},\ ctg\,\alpha_2 = \frac{\overline{OA_2}}{A_2B_2},\ldots,ctg\,\alpha_n = \frac{\overline{OA_n}}{A_nB_n}$. Бидејќи $\overline{OA_1} > \overline{OA_2} > \ldots \overline{OA_n}$ и $\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2} < \ldots < \overline{A_nB_n}$, следува дека ако аголот расте од 0^0 до 90^0, тогаш вредноста на котангенсот опаѓа.

Запомни!

Ако аголот α расте и се стреми кон 90^0, тогаш $tg\,\alpha$ расте и се стреми кон бесконечност, додека $ctg\,\alpha$ опаѓа и се стреми кон нула.

6 Подреди ги по големина: а) $tg\,15^0, tg\,18^0, tg\,6^0$; б) $ctg\,25^0, ctg\,15^0, ctg\,12^0$.
Согледај го решението:

- а) Од $6^0 < 15^0 < 18^0$, следува $tg\,6^0 < tg\,15^0 < tg\,18^0$;
- б) Од $12^0 < 15^0 < 25^0$, следува $ctg\,12^0 > ctg\,15^0 > ctg\,25^0$.

7 Подреди ги по големина: а) $tg\,35^0, tg\,20^0, tg\,10^0, tg\,18^0$; б) $ctg\,10^0, ctg\,12^0, ctg\,8^0, ctg\,30^0$.

8 Одреди го знакот на изразот $A = \frac{\cos 50^0 - \sin 24^0}{ctg\,20^0 - tg\,10^0}$.
Согледај го решението:

- $A = \frac{\cos 50^0 - \sin 24^0}{ctg\,20^0 - tg\,10^0} = \frac{\sin 40^0 - \sin 24^0}{tg\,70^0 - tg\,10^0}$. Бидејќи $40^0 > 24^0$, следува $\sin 40^0 > \sin 24^0$, т.е. $\sin 40^0 - \sin 24^0 > 0$ и $tg\,70^0 > tg\,10^0$, односно $tg\,70^0 - tg\,10^0 > 0$, па $A > 0$.

9 Одреди го знакот на изразот $A = \frac{\sin 15^0 - \cos 35^0}{tg\,25^0 - ctg\,15^0}$.

В Врз основа на претходното, можеме да заклучиме:

- Вредноста на синусот и косинусот од остар агол е позитивен број помал од еден, т.е. $0 < \sin\alpha < 1,\ 0 < \cos\alpha < 1$, ако $0^0 < \alpha < 90^0$.
- Вредноста на тангенсот и котангенсот од остар агол е позитивен број, т.е. $0 < tg\,\alpha < \infty,\ 0 < ctg < \infty$ за $0^0 < \alpha < 90^0$.

Задачи:

① Подреди ги по големина вредностите на тригонометриските функции:

а) $\sin 12^0$, $\sin 75^0$, $\sin 25^0$; б) $\sin 23^0$, $\cos 15^0$, $\sin 20^0$, $\cos 35^0$; в) $tg\,15^0$, $ctg\,20^0$, $tg\,10^0$, $ctg\,40^0$.

② Одреди го знакот на изразот:

а) $\sin 20^0 - \sin 30^0$; б) $\sin 35^0 + \cos 15^0$; в) $\dfrac{\cos 15^0 - \sin 35^0}{\sin 65^0 - \cos 18^0}$; г) $\dfrac{tg\,25^0 - ctg\,45^0}{ctg\,60^0 - tg\,35^0}$.

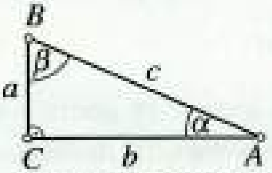
7 РЕШАВАЊЕ НА ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Потсети се!

- Одреди го аголот β на правоаголниот триаголник, ако $\alpha = 34^0 20'$.
- Нека $a = 3cm$ е катета, а $c = 5cm$ хипотенуза на правоаголниот триаголник ABC. Одреди ја катетата b.

1 Одреди ги елементите на правоаголниот триаголник, ако хипотенузата е $c = 12\,cm$ и аголот $\alpha = 30^0$.

Согледај го решението.



Треба да го одредиме аголот β и катетите a и b. Бидејќи β е комплементен агол на аголот α, имаме: $\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - 30^0 = 60^0$. Од $\dfrac{a}{c} = \sin\alpha$, следува $a = c \cdot \sin\alpha = 12 \cdot 0{,}5 = 6cm$.

Значи, $\beta = 60^0$, а катетите се: $a = 6cm$ и $b = \sqrt{108} = 10{,}4cm$.

Забелешка: Катетата b може да се одреди и поинаку, т.е. од $\dfrac{b}{c} = \cos\alpha$, следува $b = c \cdot \cos\alpha$.

Да се ***реши правоаголен триаголник***, значи да се одредат неговите основни елементи. Можни се следниве основни задачи: да се реши правоаголен триаголник, ако се познати: хипотенузата и еден остар агол; една катета и еден остар агол; хипотенузата и една катета; двете катети. За решавање на ваков вид задачи треба да знаеме да ги одредуваме вредностите на тригонометриските функции од кој било агол. За таа цел, проучи го следното ***упатство за користење на калкулатор.***

Вредностите на тригонометриските функции од кој било остар агол ги одредуваме со помош на калкулатор што има такви технички можности.

Со притискање на тастерот **DRG**, во горниот лев агол на дисплејот се испишува ознаката **DEG**, **RAD** или **GRAD**. Тоа значи, ако на дисплејот е испишана ознаката **DEG**, активирана е опција со која големината на аголот се внесува и се обработува во степени.

***Пример* 1.** Пресметај ги вредностите на тригонометриските функции за агол од 74^0.

Согледај ја постапката:

- Притискаме на тастерот **DRG** и следиме на дисплејот да се испише опцијата **DEG**.
- Преку тастатурата го внесуваме мерниот број на аголот, т.е. бројот 74.

- Го притискаме тастерот на кој е испишана ознаката на функцијата чија вредност сакаме да ја пресметаме (sin, cos или tg). Ако го притиснеме тастерот со ознака sin, на дисплејот ќе се испише бројот 0,96126..., а тоа значи дека $\sin 74^0 = 0,96123...$ Ако сакаме да одредиме $\cos 74^0$, тогаш по внесувањето на бројот 74 го притискаме тастерот со ознака cos, па на дисплејот го читаме резултатот 0,27563..., т.е. $\cos 74^0 = 0,27563...$ На ист начин го одредуваме $\mathrm{tg}\ 74^0$.
- Воочуваш дека на тастатурата од калкулаторот нема тастер со ознака ctg.
- Ако треба да одредиме $\mathrm{ctg}\ 74^0$, тогаш постапуваме вака:
  - Го внесуваме бројот 74, притискаме на тастерот tg и на дисплејот читаме 3,48741...

  Бидејќи функциите $\mathrm{tg}\ 74^0$ и $\mathrm{ctg}\ 74^0$ се реципрочни, следува $\mathrm{ctg}\ 74^0 = 1 : \mathrm{tg}\ 74^0$, т.е. $1 : 3,48741$.
  - По добивањето на бројот 3,48741... го притискаме тастерот со ознака **2nd**, а потоа и тастерот со ознака $1/x$ или $1/a$ (реципрочна вредност на x или на a), па на дисплејот се испишува бројот 0,28674.... Значи, $\mathrm{ctg}\ 74^0 = 0,28674...$

Ако мерниот број на аголот содржи минути и секунди, тогаш големината на аголот се изразува во степени, како децимален број.

Пример 2. Одреди ги вредностите на тригонометриските функции за агол од $37^0 45' 18''$.

- Секундите и минутите ги претвораме во степени, т.е. $18'' : 60 = 0,3'$; $45' + 0,3' = 45,3'$; $45,3' : 60 = 0,755^0$; $37^0 + 0,755^0 = 37,755^0$; па $37^0 45' 18'' = 37,755^0$.

  Го внесуваме бројот и според веќе познатата постапка ги добиваме резултатите: $\sin 37,755^0 = 0,61228...$; $\cos 37,755^0 = 0,79063...$; $\mathrm{tg}\, 37,755^0 = 0,77442...$; $\mathrm{ctg}\, 37,755^0 = 1,29128...$
- Воочуваш дека резултатите на дисплејот се испишуваат со пет и повеќе децимали. Во практиката се врши заокружување на децималниот запис на определена точност што ни е потребна, вообичаено со точност од 0,01.
- На некои калкулатори постои опција со која минутите и секундите автоматски се претвораат во степени, а таа опција најчесто се активира со тастерот **DEG** или можеби друг тастер, зависно од типот на калкулаторот. Од тие причини, при употребата на калкулаторот препорачуваме да се користи упатството на произведувачот.
- Ако аголот за кој ги одредуваме вредностите на тригонометриските функции е даден во радијани (RAD) или друга мерна единица, претходно вршиме претворање на аголот во степени. Меѓутоа, ако калкулаторот има технички можности, тогаш кога аголот е даден во радијани на екранот треба да биде испишана опцијата **RAD**, а понатамошната постапка е иста како за агол даден во степени.

Во дел од задачите за решавање на правоаголен триаголник се бара одредување на аголот ако е дадена вредност на некоја тригонометриска функција за тој агол.

- Познато е, ако $\sin\alpha = 1/2$, тогаш $\alpha = 30^0$.

  Постапката за одредување на агол ќе ја објасниме во примерот што следува.

Пример 3. Одреди го аголот α, ако $\sin\alpha = 0,64278$.

- Ако сакаме аголот да го прочитаме во степени, тогаш постапуваме на следниот начин:
  - На дисплејот е активирана и испишана опцијата **DEG**.
  - Го внесуваме бројот 0,64278, го притискаме тастерот **2nd**, а потоа и тастерот $\sin^{-1}$. На дисплејот се испишува бројот 40, а тоа значи дека $\alpha = 40^0$.
- Ако сакаме аголот да го имаме изразен во радијани, тогаш на дисплејот треба да биде испишана опцијата **RAD**, а по спроведувањето на истата постапка се добива бројот 0,69812..., па $\alpha = 0,698\, rad$.

Воочуваш дека опцијата **2nd** овозможува да се одреди инверзна функција на функцијата чија вредност е прикажана на дисплејот. Записите $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, tg^{-1} значат инверзни функции на функциите $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$.

***Пример* 4.** Одреди го аголот α, ако $cos\alpha = 0,67589$.

Согледај ја постапката:

- Го внесуваме бројот 0,67589, го притискаме тастерот **2nd**, а потоа тастерот $\cos^{-1}$. На дисплејот е испишан бројот 47,47669799. Значи, $\alpha = 47,47669^0$.
- Аголот има 47^0; $0,47669^0 \cdot 60 = 28,6018'$ или 28' и $0,6018' \cdot 60 = 36,1080''$ или 36''. Конечно добиваме $\alpha = 47^0 28' 36''$.

На некои калкулатори постои опција со која децималниот дел на степенот се претвора во минути и секунди. Во тој случај постапуваме:

- Откако на дисплејот ќе се испише бројот 47,47669, повторно го активираме тастерот **2nd**, а потоа и тастерот **DMS** и на дисплејот се испишува бројот 47,2836108..., а тоа значи дека $\alpha = 47^0 28' 36''$.

***Пример* 5.** Одреди го аголот α, ако $tg\alpha = 2,65486$.

- Го внесуваме бројот 2,35486;
- Го активираме тастерот **2nd**.
- Го активираме тастерот tg^{-1} и на дисплејот се испишува 88,788433.
- Го активираме тастерот **2nd**.
- Го активираме тастерот **DMS** и на дисплејот се испишува бројот 88,4718..., а тоа значи $\alpha = 88^0 47' 18''$.

***Пример* 6.** Одреди го аголот α, ако $ctg\alpha = 4,5678$.

- Го внесуваме бројот 4,5678.
- Активираме тастер **2nd**.
- Притискаме тастер x^{-1}, бидејќи $tg\alpha = 1/ctg\alpha$.
- Активираме тастер 2nd.
- Активираме тастер tg^{-1} и на дисплејот читаме 12,3425....
- Активираме тастер **2nd**.
- Активираме тастер **DMS** и читаме 12,20, а тоа значи $\alpha = 12^0 20'$.

Ако внесеме невистинита вредност за некоја функција, на дисплејот ќе се испише пораката **E**, што значи невозможно. На пример, ако внесеме 2,456, а потоа активираме тастер **2nd**, па тастер $\sin^{-1}$, ќе се појави пораката **E**. Каде е грешката?

2 Да се реши правоаголниот триаголник, ако се дадени хипотенузата c и аголот β:

а) $c = 8,2\,cm$ и $\beta = 65^0$; б) $c = 45\,cm$ и $\beta = 36^0 20'$.

3 Реши го правоаголниот триаголник, ако се дадени катетата $b = 8\,cm$ и аголот $\alpha = 38^0 40'$.

Согледај го решението:

Треба да го одредиме аголот β, катетата a и хипотенузата c.

Аголот $\beta = 90^0 - \alpha = 89^0 60' - 38^0 40' = 51^0 20'$.

Од $\frac{a}{b} = tg\,\alpha$, следува $a = b \cdot tg\,38^0 40' = 8 \cdot tg\,38,66 = 8 \cdot 0,80 = 6,40$. Хипотенузата c, ќе ја одредиме со примена на Питагоровата теорема, имено $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6,40^2 + 8^2} \approx 10,24$.

Значи, $\beta = 51^0 20'$, катетата $a = 6,4\,cm$ и хипотенузата $c = 10,24\,cm$.

4 Да се реши правоаголниот триаголник, ако се дадени:

а) $a=12\,cm$ и $\alpha=23^0 45^{'}$; б) $b=23\,cm$ и $\beta=63^0 20^{'}$.

5 Реши го правоаголниот триаголник ако се дадени катетите $a=12\,cm$ и $b=5\,cm$. Согледај го решението.

Хипотенузата c ја одредуваме според Питагоровата теорема, т.е.

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13cm.$$

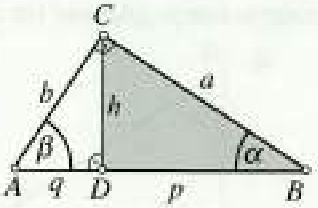
Од $\frac{a}{b}=tg\,\alpha$, следува $tg\,\alpha=2{,}4$ и $\alpha=67^0 38^{'}$. Аголот $\beta=90^0-\alpha=89^0 60^{'}-67^0 38^{'}=22^0 32^{'}$.

Значи, $\alpha=67^0 38^{'}$, $\beta=22^0 32^{'}$ и $c=13$.

6 Да се реши правоаголниот триаголник, ако е дадено:

а) $a=3\,cm$ и $b=4cm$; б) $a=8\,cm$ и $c=17\,cm$; в) $b=12\,cm$ и $c=37\,cm$.

7 Реши го правоаголниот триаголник, ако се дадени $h=12\,cm$ и $p=5\,cm$. (Ортогоналните проекции на катетите a и b врз хипотенузата ги означуваме со p и q, соодветно). Согледај го решението:



Од цртежот, имаме:

$a=\sqrt{h^2+p^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13cm$, $\sin\beta=\frac{h}{a}=\frac{12}{13}=0{,}9230$,

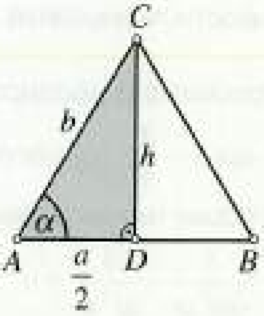
а $\beta=67^0 23^{'}$ и $\alpha=90^0-\beta=22^0 37^{'}$.

Од $tg\,\beta=\frac{b}{a}$, следува $b=a\,tg\,\beta=13\cdot tg\,0{,}616\approx 31{,}2\,cm$; $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13^2+31{,}2^2}=28{,}8\,cm$.

8 Да се реши правоаголниот триаголник ако е дадено:

а) $h=12\,cm$ и $\alpha=36^0 52^{'}$; б) $p=2\,cm$ и $q=8\,cm$.

Б **9** Пресметај го периметарот и висината на рамнокрак триаголник, чиј крак $b=14\,cm$ и аголот на основата 50^0. Согледај го решението.



Од ΔADC, следува:

$\cos\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{b}$, од каде $a=2b\cos\alpha=28\cos 50^0=28\cdot 0{,}642=18\,cm$.

За периметарот имаме: $L=2b+a=28+18+46\,cm$.

Од $\sin\alpha=\frac{h}{b}$, следува $h=b\sin\alpha=14\sin 50^0=14\cdot 0{,}766=10{,}7\,cm$.

10 Пресметај го периметарот на правоаголникот, чија дијагонала е $15\,cm$ и која со поголемата страна зафаќа агол од $36^0 52^{'}$.

Задачи:

① Реши го правоаголниот триаголник, ако е дадено:

а) $a=5cm$ и $\alpha=40^0$; б) $a=25cm$ и $\beta=72^0 30'$;

в) $c=17cm$ и $a=8cm$; г) $a=7cm$ и $b=24cm$.

② Пресметај го периметарот на рамнокрак триаголник, ако е дадено:

а) кракот $b=15cm$ и $\alpha=53^0 08'$; б) $h_a=20cm$ и $\gamma=92^0 48'$.

③ Пресметај ги страната и аглите на ромбот, ако неговите дијагонали се $32cm$ и $60cm$.

④ Одреди ги аглите во рамнокрак трапез, чии основи се: $18cm$ и $8cm$, а кракот $13cm$.

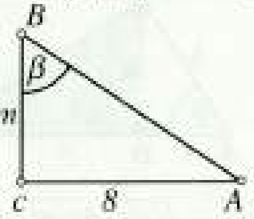
⑤ Од врвот на еден светилник, висок $150m$, се гледа брод под агол на депресија 9^0. Колкаво е растојанието од светилникот до бродот?

Тематска контролна вежба

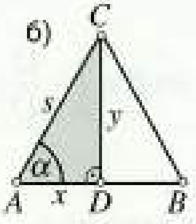
① Страните на триаголникот се: а) $9cm, 12cm\ 13cm$; б) $21cm, 35cm, 40cm$. Кој од нив е правоаголен?

② Запиши ги дефинициите на тригонометриските функции од остар агол во правоаголните триаголници дадени на цртежот:

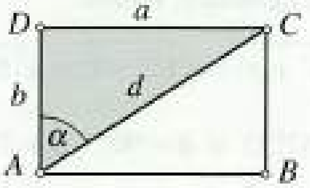
а)



б)



в)



③ Кои од равествата се вистинити:

а) $\sin\alpha=\frac{4}{3}$; б) $\cos\alpha=\sqrt{3}$; в) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; г) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $tg\,\alpha=\sqrt{3}$; ѓ) $ctg\,\alpha=3$?

④ Пресметај ја вредноста на изразите: а) $2\cos 60^0+ctg\,45^0$; б) $3tg\,30^0-3ctg\,60^0$;

в) $\frac{1+\cos 60^0}{1-\sin 30^0}$; г) $\frac{\sin 30^0-\sin 30^0}{\cos 30^0-\sin 60^0}$; д) $\frac{4\cos^2 45^0-1}{tg^2\,60^0}$.

⑤ Упрости ги изразите: а) $\frac{\sin^2 25^0-\cos^2 65^0}{\sin 65^0+\cos 25^0}$; б) $\frac{2tg\,20^0-7ctg\,70^0}{2ctg\,20^0+3ctg\,70^0}$.

⑥ Пресметај ја вредноста на останатите тригонометриски функции ако:

а) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; б) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $tg\,\alpha=\sqrt{3}$.

⑦ Докажи ги тригонометриските идентитети:

а) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{tg^2\alpha}=1$; б) $\frac{ctg\,\alpha-\cos\alpha}{ctg\,\alpha}=1-\sin\alpha$; в) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$.

⑧ Спореди ги вредностите: а) $\sin 23^0$ и $\sin 34^0$; б) $\cos 15^0$ и $\cos 80^0$; в) $tg\,18^0$ и $tg\,40^0$.

⑨ Пресметај го периметарот на правоаголникот чија дијагонала $d=15cm$ со помалата страна зафаќа агол $\alpha=36^0 52'$.

ТЕМА 2

КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

> *Јазикот на математиката не само што е најпрост и нај лесно разбирлив од сите останати јазици, туку е и најкраток*
>
> Х. Брум

Во оваа тема првпат ќе учиш за:

- имагинарна единица;
- имагинарни броеви;
- комплексни броеви и нивните својства;
- множество на комплексни броеви;
- комплексен број како радиус вектор;
- модул на комплексен број;
- операции со комплексни броеви.

1 ИМАГИНАРНА ЕДИНИЦА. ИМАГИНАРНИ БРОЕВИ

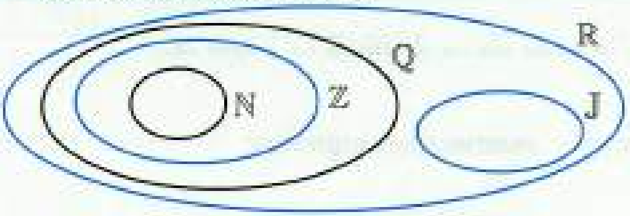
Потсети се!

- Кои бројни множества си ги изучувал досега?
- Равенката $x^2+1=0$ нема решение во множеството на природните броеви.
- Во кое бројно множество има решение равенката $x+3=0$?
- Која од равенките $2x+5=0$ и $2x-\sqrt{3}=0$ има решение во множеството на рационални броеви?

A **1** Одреди ги сите бројни множества во кои има решение секоја од равенките: а) $x-2=0$; б) $x+2=0$;

в) $2x-3=0$; г) $x^2-5=0$; д) $x^2+4=0$.

- Согледај го решението:



а) $x=2\in\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$; б) $x=-2\in\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$; в) $x=\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$;

г) $x=\sqrt{5}\in\mathbb{J}\subset\mathbb{R}$ или $x=-\sqrt{5}\in\mathbb{J}\subset\mathbb{R}$; д) нема решение во множеството $\mathbb{R}$.

2 Определи го бројното множество во кое припаѓа решението на секоја од равенките:
а) $x - 5 = 0$; б) $x + 5 = 0$; в) $2x + 5 = 0$; г) $x^2 - 7 = 0$; д) $x^2 + 9 = 0$.

Потсети се!

- На причините зошто го проширивме множеството на природните броеви, а зошто множеството на целите броеви со нови броеви.
- Изразот $x^2 - 4$ може да се разложи на производот $(x - 2)(x + 2)$.
- Дали може изразот $x^2 + 25$ да се разложи на множители?
- Равенката $x^2 + 1 = 0$ ќе има решение само ако $x^2 = -1$, но дали е тоа можно?

Б **3** Разложи го на прости множители изразот $x^2 + 4$.

Согледај го решението:

Во прва година учеше дека само разликата од квадрати може да се разложи на производ од множители.

Веќе рековме дека равенката $x^2 + 1 = 0$ нема решение во множеството на реалните броеви.

Овие задачи, а и многу други, ја наметнуваат потребата од проширување на множеството $\mathbb{R}$ со други броеви, со цел да се овозможи тие да имаат решение.

При проширувањето треба:

1. новото множество да ги содржи реалните броеви;
2. новото множество да содржи барем еден елемент чиј квадрат е бројот -1;
3. во новото множество на броеви да се дефинираат операциите собирање и множење и за нив да важат соодветните својства како и во множеството на реалните броеви.

За да се исполнат барањата за проширување на множеството $\mathbb{R}$, по дефиниција воведуваме број i, чиј квадрат е еднаков на -1, т.е. $i^2 \overset{def}{=} -1$. Бројот i се вика ***имагинарна единица***, а броевите $2i;\ -\frac{1}{2}i;\ 0,3i;...$ или воопшто $ai,\ a\in\mathbb{R}$ се викаат ***имагинарни броеви*** и притоа:

$1\cdot i=i;\ -1\cdot i=-i;\ 0\cdot i=0.$ Според тоа, $x^2 +4 = x^2 - i^2 4 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$.

4 Реши ги равенките: а) $x^2 + 4 = 0$;   б) $x^2 + 1 = 0$.

Согледај го решението:

- Равенката $x^2 + 4 = 0$ има решение $x = 2i$ или $x = -2i$. Решение на равенката $x^2 + 1 = 0$ е $x = i$ или $x = -i$, бидејќи $x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$, т.е. $x - i = 0$ или $x + i = 0$.

Запомни!

Бројот i се вика ***имагинарна единица*** и неговиот квадрат е еднаков на -1, т.е. $i^2 \overset{def}{=} -1$.

5 Реши ги равенките: а) $x^2 - 9 = 0$;   б) $x^2 + 9 = 0$.

Потсети се!

- $(-1)^2 = 1$; $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2)$;

  $a^2 = a \cdot a$.

- Одреди ја вредноста на степенот x^{-2},

  ако $x = -1$; $x = 3$; $x = -\dfrac{1}{2}$.

- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -1$.

$\mathcal{B}$ **6** Одреди ги и запиши ги степените на имагинарната единица.

Согледај го решението:

$i^1 = i,$

$i^2 = -1,$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i,$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = +1,$

$i^5 = i^4 \cdot i = i,$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1,$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i,$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1, \ldots$

$i^{-1} = \dfrac{1}{i} = -i,$

$i^{-2} = \dfrac{1}{i^2} = -1,$

$i^{-3} = \dfrac{1}{i^3} = +i,$

$i^{-4} = \dfrac{1}{i^4} = 1.$

- Воочуваш дека $i^n \in \{i, -1, -i, 1\}$ или

$i^n = i^{4k+r} = i^r$; $r \in \{0, 1, 2, 3\}$; $n, k \in \mathbb{Z}$.

Навистина:

1) за $n = 4k + 0$ следува $i^n = i^{4k+0} = i^{4k} \cdot i^0 = \left(i^4\right)^k \cdot i^0 = 1^k \cdot i^0 = i^0 = 1$;

2) за $n = 4k + 1$ следува $i^n = i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i^1 = \left(i^4\right)^k \cdot i^1 = 1 \cdot i^1 = i^1 = i$;

3) за $n = 4k + 2$ следува $i^n = i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = \left(i^4\right)^k \cdot i^2 = 1 \cdot i^{21} = i^2 = -1$;

4) за $n = 4k + 3$ следува $i^n = i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = \left(i^4\right)^k \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i$.

7 Пресметај: а) i^{327};   б) i^{-125}.

Согледај го решението:

а) $i^{327} = i^{4 \cdot 81 + 3} = i^3 = -i$;   б) $i^{-125} = i^{4(-32)+3} = i^3 = -i$ или $i^{-125} = \dfrac{1}{i^{125}} = \dfrac{1}{i^{4 \cdot 31 + 1}} = \dfrac{1}{i^1} = \dfrac{i}{i^2} = -i$.

8 Пресметај ја вредноста на изразите:

а) i^{2002}; б) $\dfrac{1}{i^{2002}}$; в) $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{10}$; г) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{i^2} + \dfrac{1}{i^3} + \ldots + \dfrac{1}{i^{10}}$.

Потсети се!

- Броевите $2, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ претстави ги на бројна оска.
- Дали броевите $2i, -2i, \sqrt{3}\,i, -\sqrt{3}\,i$ можат да се претставаат на реална бројна оска?

- Броевите ai и $\frac{b}{i}\ (a, b \in \mathbb{R})$ се имагинарни броеви и се претставуваат на бројна оска која се вика ***имагинарна оска***, а се означува со Jm.

Запомни!

Множеството на имагинарните броеви се означува со $\mathbb{J}m$.

9 Претстави ги на имагинарна бројна оска броевите: $2i, 3i, -3i, 0i$.

- Какви се броевите $3i$ и $-3i$?

Согледај го решението:

- Броевите $3i$ и $-3i$ се спротивни имагинарни броеви.

10 На имагинарната бројна оска претстави ги броевите $5i, \frac{3}{i}, -\frac{2}{3}i$.

Воочи:

- $\frac{a}{i} = -ai$;
- $ai \cdot bi = -ab \in \mathbb{R}$;
- $ai \pm bi = (a \pm b)i$;
- $\frac{ai}{bi} = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

Задачи:

① Одреди ги бројните множества во кои имаат решение равенките:
а) $x - 7 = 0$; б) $x + 8 = 0$; в) $2x - 9 = 0$; г) $x^2 - 11 = 0$; д) $x^2 + 16 = 0$.

② Разложи ги во производ биномите: а) $x^2 + 25$; б) $x^2 + 13$; в) $x^2 + y^2$.

③ Одреди ја вредноста на изразите:
а) i^{203}; б) i^{1002}; в) $\frac{1}{i^{101}}$; г) $i^{2000} + \frac{1}{i^{200}}$; д) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^{10}$.

④ На имагинарната бројна оска претстави ги спротивните броеви на броевите:
$2i, -3i, 5i, -7i$.

2 ПОИМ ЗА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ. ЕДНАКВОСТ НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

Потсети се!

- Броевите $-2, \sqrt{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ се реални броеви.
- Броевите $2i, -5i, \frac{3}{i}, \sqrt{7}\,i, \ldots$ се имагинарни броеви.
- Дали бројот $2 + 3i$ е реален број?

- Бројот $a + bi$ се означува со z, т.е. $z = a + bi$ и се вика ***комплексен број***.

Бројот a е ***реален дел*** на комплексниот број и се означува $a = Re(z)$, а бројот b е ***имагинарен дел*** на комплексниот број и се означува $b = Jm(z)$.

Запомни!

Комплексниот број $z = a + bi$ или $z = Re(z) + Jm(z)\cdot i$ е запишан во алгебарска (стандардна) форма.

Множеството на комплексните броеви го означуваме со $\mathbb{C}$, т.е. $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1 Запиши ги комплексните броеви за кои се дадени:

а) $Re(z) = -2$, $Jm(z) = 0$; б) $Re(z) = 0$, $Jm(z) = -3$; в) $Re(z) = 3$, $Jm(z) = 5$; г) $Re(z) = 0$, $Jm(z) = 0$.

Согледај го решението:

- а) $z = -2 + 0i = -2$; $-2 \in \mathbb{R}$; $-2 \in \mathbb{C}$; б) $z = 0 - 3i = -3i$; $-3i \in Jm$; $-3i \in \mathbb{C}$;
  в) $z = 3 + 5i$, $z \in \mathbb{C}$; г) $z = 0 + 0i = 0$, $0 \in \mathbb{R}$, $0 \in Jm$; $0 \in \mathbb{C}$.

Сигурно воочуваш:

- Ако $Jm(z) = 0$, тогаш $z = a + 0\cdot i = a \in \mathbb{R}$. Оттука следува дека секој реален број е и комплексен, т.е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Значи, задоволен е првиот услов за проширување на множеството $\mathbb{R}$.
- Ако $Re(z) = 0$, тогаш $z = a + bi = bi \in Jm$, значи секој имагинарен број е комплексен, а $Jm \cap \mathbb{R} = \{0\}$.
- Комплексниот број $-z = -a - bi$ е спротивен на комплексниот број $z = a + bi$.
- Комплексниот број $a - bi$ е конјугирано комплексен на бројот $z = a + bi$ и се означува

$$\overline{z} = a - bi.$$

2 Запиши ги спротивниот и конјугирано комплексниот број на бројот:

а) $z = 3 + 0\cdot i$; б) $z = 0 + 2i$; в) $z = 0 + 0i$; г) $z = 2 + 3i$.

3 Ако $z = 2 - 3i$, одреди: а) $\overline{\overline{z}}$; б) $\overline{(-z)}$.

4 Ако $z = a + bi$, провери ја точноста на равенствата: а) $\overline{(-z)} = -\overline{z}$; б) $\overline{\overline{z}} = z$; в) $a^2 + b^2 = z\cdot\overline{z}$.

Согледај го решението:

а) $\overline{(-z)} = \overline{(-a - bi)} = -a + bi = -(a - bi) = -\overline{z}$; б) $\overline{\overline{z}} = \overline{(\overline{z})} = \overline{(\overline{a + bi})} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$;

в) $a^2 + b^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 - (bi)^2 = (a + bi)(a - bi) = z\cdot\overline{z}$.

Потсети се!

- Дали броевите $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -2 - 3i$ се еднакви?
- Бројот $z_1 = 2 - 5i$ е еднаков на бројот $z_2 = x - 5i$ ако $x = 2$.
  Дали постои друга вредност на x за која $z_1 = z_2$?

- Два комплексни броја се еднакви ако и само ако имаат еднакви реални делови и имаат еднакви имагинарни делови.

5 Одреди ги реалните броеви x и y од равенствата:

а) $x + 3i = 2 - yi$; б) $3x + xi - 2y = 2i$;

в) $5x - 3yi + 2i = 6 - ix - y$.

Согледај го решението:

а) Според тврдењето за еднаквост на комплексни броеви следува: $x = 2$ и $y = -3$.

б) Од $3x + xi - 2y = 2i$ следува $(3x - 2y) + xi$, па имаме:

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} 5x = 6 - y \\ -3y + 2 = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (6 - y) : 5 \\ x = 3y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Запомни!

Ако $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогаш $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2) \\ Jm(z_1) = Jm(z_2). \end{cases}$

Задачи:

① Запиши ги комплексните броеви, а потоа нивните спротивни и нивните конјугирано комплексни броеви ако се дадени:

а) $Re(z) = -1, Jm(z) = -3$; б) $Re(z) = 0, Jm(z) = -3$; в) $Re(z) = -4, Jm(z) = 0$.

② Запиши барем еден комплексен број z, таков што $13 = z \cdot \overline{z}$.

③ Провери ја точноста на равенството $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$, ако $z = a + bi$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

④ За кои вредности на x и y се точни равенствата:

а) $3x + xi - 2y = 12 - iy - i$; б) $2x + 2iy + ix - y = 1 + 3i$.

3 ОПЕРАЦИИ СО КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Потсети се!

Нека $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -3 + 5i$. Тогаш,

$Re(z_1) + Re(z_2) = -1$ и

$Jm(z_1) + Jm(z_2) = 2$.

Како се собираат слични мономи?

Сведи го полиномот

$$2(x-3) - (x+1)(2x-1).$$

Збирот на два комплексни броја е комплексен број чиј реален дел е збир од нивните реални делови, а имагинарниот дел е збир од имагинарните делови.

1 Одреди ги збирот и разликата на комплексните броеви:

а) $z_1 = -4 + 3i$ и $z_2 = 5 - 7i$;

б) $z_1 = -3$ и $z_2 = -8i$;

в) $z_1 = 0 + 0i$ и $z_2 = 3 - 2i$.

Согледај го решението.

а) $z_1 + z_2 = (-4 + 3i) + (5 - 7i) = (-4 + 5) + (3i - 7i) = 1 - 4i$;

$z_1 - z_2 = (-4 + 3i) - (5 - 7i) = -4 + 3i - 5 + 7i = -4 - 5 + 3i + 7i = -9 + 10i$;

б) $z_1 + z_2 = -3 - 8i$ и $z_1 - z_2 = -3 + 8i$; в) $z_1 + z_2 = 3 - 2i$ и $z_1 - z_2 = -3 + 2i$.

Воочи и запомни!

Ако $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, тогаш $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2 Одреди ги збирот и разликата на броевите:

а) $z_1 = -2 + i\sqrt{3}$ и $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{27}$; б) $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$ и $z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}i$.

3 Ако $z = a + bi$, одреди $z + \bar{z}$ и $z - \bar{z}$.

Потсети се!

- Пресметај го производот $(a+b)\cdot(c+d)$.
- Според правилото за множење на полиноми, помножи ги комплексните броеви

$z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -5 + 2i$.

Б **4** Нека $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.

Одреди го производот $z_1 \cdot z_2$.

Согледај го решението:

$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$, па поради $i^2 = -1$ добиваме: $z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd$.

Значи,

$Re(z_1 \cdot z_2) = ac - bd$, а $Jm(z_1 \cdot z_2) = ad + bc$.

Воочи и запомни!

Ако $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, тогаш $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$,

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

5 Пресметај го производот $z_1 \cdot z_2$, ако $z_1 = -3 + 2i$, $z_2 = 4 - 3i$.

$z_1 \cdot z_2 = (-3+2i)\cdot(4-3i) = -12 + 9i + 8i - 6i^2 = -12 + 6 + 17i = -6 + 17i$.

6 Изврши го степенувањето: а) $(1+i)^2$; б) $(3-2i)^2$; в) $(1-i)^{10}$.

Согледај го решението:

а) $(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1 + 2i + i^2 = 2i$ или $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$;

б) $(3-2i)^2 = 9 - 12i + (2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$;

в) $(1-i)^{10} = \left((1-i)^2\right)^5 = (-2i)^5 = -32i^5 = -32i$.

7 Ако $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, пресметај ја вредноста на изразите: а) z^3; б) $(\bar{z})^3$; в) $z^{2001} + (\bar{z})^{2001}$.

Согледај го решението:

а) $$z^3 = \frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{8} = \frac{1 + 3\sqrt{3}i + 3(\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3}{8} = \frac{1 + 3\sqrt{3}i + 9i^2 + 3\sqrt{3}i^3}{8} =$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i}{8} = -1.$$

б) $(\bar{z})^3 = \frac{(1-i\sqrt{3})^3}{8} = \frac{1 - 3i\sqrt{3} - 9 + 3i\sqrt{3}}{8} = -1$; в) $z^{2001} + (\bar{z})^{2001} = (z^3)^{667} + \left((\bar{z})^3\right)^{667} = -2$.

Потсети се!

- $\frac{1}{3-\sqrt{2}}=\frac{1}{3-\sqrt{2}}\cdot\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{2}}{5}=\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{2}}{5}.$

- Нека $Z=3+i$, тогаш

$$z\cdot\overline{z}=(3+i)\cdot(3-i)=10.$$

Каков број е производот на два конјугирано комплексни броеви?

- Одреди ги x и y ако
$2 - 3i = (1 + i)(x + yi)$.

8 Одреди го количникот на комплексните броеви $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.

Согледај го решението:

Прв начин. Со примена на заклучокот дека производот на конјугирано комплексни броеви е реален број имаме:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=$$

$$=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

9 Дадени се броевите $z_1=2-3i$ и $z_2=-1+i$. Одреди ги количниците:

а) $z_1 : z_2$; б) $z_2 : \overline{z_1}$.

Согледај го решението:

а) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{-1+i}=\frac{2-3i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}=\frac{-2-2i+3i+3i^2}{(-1)^2-i^2}=\frac{-5+i}{2}.$

- **Втор начин**. Од $z_1 : z_2 = z$ по дефиниција следува $z_1=z_2\cdot z$. Нека $z=x+yi$, тогаш

$\frac{z_1}{z_2}=z$, или $\frac{a+bi}{c+di}=x+yi$, односно $a+bi=(c+di)(x+yi)$, т.е. $a+bi=cx+cyi+dxi-dy$. Од дефиницијата за еднаквост на комплксните броеви следува:

$$\begin{cases}cx-dy=a\\dx+cy=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c^2x-cdy=ac\\d^2x+cdy=bd,\end{cases}$$ па $x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ и $y=\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}$, т.е. $z=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$

Запомни!

Ако $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$, $(z_2\neq 0)$ тогаш $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}.$

10 Пресметај ги количниците: а) $\frac{3-2i}{1+i}$; б) $\frac{2+i}{2-i}$; в) $\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}$.

11 Одреди ги реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број $z=\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}$.

12 Ако $z_1=2+3i$, $z_2=-3+5i$, покажи дека:

а) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$; б) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$; в) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

13 Дадени се комплексните броеви $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -3 + 4i$ и $z_3 = 1 - i$. Провери ги својствата: а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; б) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$; в) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$;

г) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$; д) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$. Како се викаат овие својства?

Согледај го решението;

в) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = [(2 - 3i) + (-3 + 4i)] \cdot (1 - i) = (-1 + i)(1 - i) = 2i$ или

$z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = (2 - 3i)(1 - i) + (-3 + 4i)(1 - i) = -1 - 5i + 1 + 7i = 2i.$

Останатите својства провери ги сам.

***Задачи*:**

① Нека се дадени комплексните броеви $z_1 = \sqrt{2} + i$ и $z_2 = 2 - i\sqrt{2}$. Пресметај:

а) $z_1 - \overline{z_1} \cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}^2}$; г) $\frac{z_1 \cdot z_2}{\overline{z_1}}$.

② Ако $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} i$, докажи дека: а) $z^2 = -\overline{z}$; б) $\overline{z}^2 = -z$; в) $z^2 + \overline{z}^2 = -1$.

③ Упрости го изразот $3z - 2z + 1$, ако: а) $z = 1 + 2i$; б) $z = -\frac{1}{2} + i$.

④ Реши ги равенките: а) $(2 - i)z = 1 + i$; б) $(i - 3)z = 2 - 3i$.

4 КОМПЛЕКСЕН БРОЈ КАКО ПОДРЕДЕН ПАР

Потсети се!

- Што претставува подреден пар на реални броеви во рамнина?
- Меѓу точките од една рамнина и множеството на подредени парови од реални броеви може да се воспостави заемно еднозначно соодветство.
- Точките $A(4,3)$, $B(-1,4)$, $C(-1,-3)$ и $D(2,-4)$ претстави ги во координатна рамнина.

A Комплексниот број $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ е наполно определен со својот реален дел a и имагинарен дел b, т.е. со подредениот пар (a, b). Според тоа, комплексниот број $z = a + bi$ може да се запише и како подреден пар реални броеви, т.е. $z = (a, b)$, па множеството на комплексните броеви се запишува $\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$.

1 Комплексните броеви $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{2}$, $z_3 = 5$, $z_4 = -2i$, $z_5 = i$ запиши ги како подредени парови.

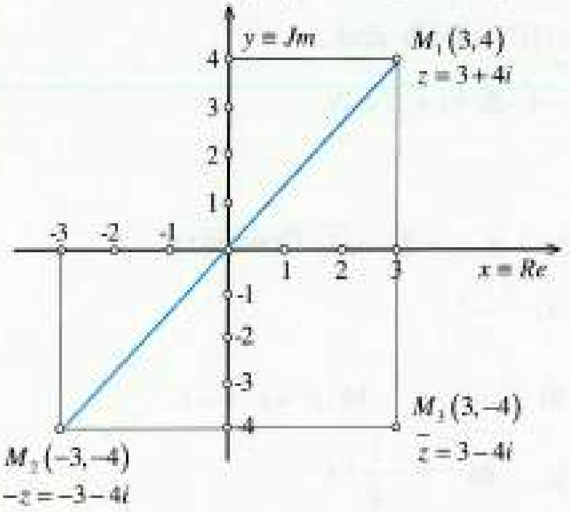
- Комплексниот број $z = (0, b), b \in \mathbb{R}$ е чисто имагинарен број, а комплексниот број $z = (0,1)$ е имагинарна единица, т.е. $(0, b) = bi$ и $(0,1) = i$.
- Еднаквоста на комплексните броеви и операциите со комплексни броеви зададени како подредени парови се изведуваат според истите правила, т.е.

1. $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$; 2. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; 3. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

2 Со примена на наведените правила изврши ги назначените операции:

а) $(3,5)+(4,2)$; б) $(5,8)(3,0)$; в) $(5,4)(5,-4)$.

3 Во координатната рамнина претстави ги точките што одговараат на комплексните броеви $z=(3,4)$, $-z=(-3,-4)$, $\bar{z}=(3,-4)$.



Запомни!

Рамнината во која со точки се претставуваат комплексните броеви се вика ***комплексна*** или ***Гаусова рамнина***, со реална оска x и имагинарна оска y.

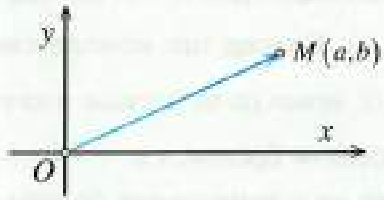
Воочи и запомни!

1. Точките што одговараат на спротивните комплексни броеви се симетрични во однос на координатниот почеток.
2. Точките што одговараат на конјугирано комплексните броеви се симетрични во однос на реалната оска.

4 Во комплексната рамнина претстави ги комплексните броеви: $z_1=(0,0)$, $z_2=(0,5)$, $z_3=(-4,0)$, $z_4=(-2,3)$ и $z_5=(0,1)^2$. Кои од нив се реални, а кои имагинарни броеви?

- Воочи: $(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot0-1\cdot1,\ 0\cdot1+1\cdot0)=(-1,0)$.

Потсети се!



Векторот $\overline{OM}=(a,b)$ е радиус вектор.

- Одреди ги збирот и разликата на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\begin{tikzcd}
z=a+bi \arrow[rr, leftrightarrow, bend left] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \overline{OM} \\
& (a,b) \arrow[ur, leftrightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Б

- Векторот $\overline{OM}$, со почеток во координатниот почеток и крај во точката $M(a,b)$ се вика ***радиус вектор*** на точката M.

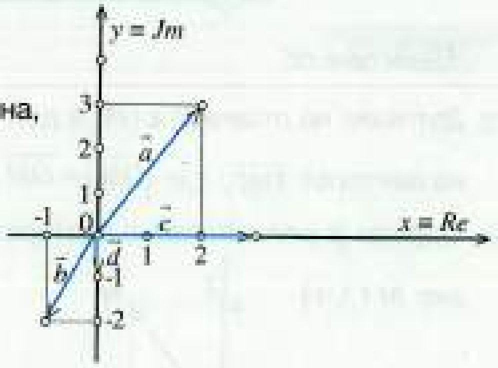
Координатите на точката M се и координати на радиус векторот.

Бидејќи секој подреден пар на реални броеви претставува еден комплексен број, елементите на подредниот пар се координати на радиус вектор. Значи, меѓу комплексните броеви и радиус векторите може да се воспостави обратно еднозначно соодветство. Воочи го цртежот.

5 Дадените вектори претстави ги во комплексна рамнина:

$\vec{a} = (2,3)$; $\vec{b} = (-1,-2)$; $\vec{c} = (3,0)$; $\vec{d} = (0,-1)$.

Согледај го решението:



Воочи, дадените вектори се претставени во комплексна, Гаусова рамнина.

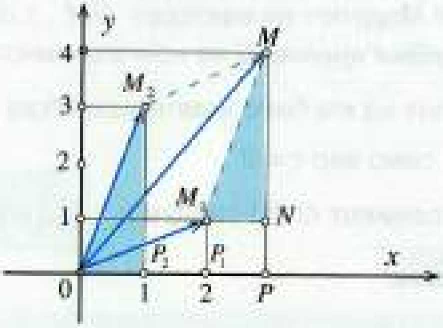
- Бидејќи секој вектор е претставник на некој комплексен број, операциите собирање и одземање на комплексни броеви можат да се сведат на собирање и одземање на вектори.

6 Дадени се комплексните броеви $z_1 = 2+i$ и $z_2 = 1+3i$. Одреди ги збирот $z_1 + z_2$ и координатите на векторот што е претставник на векторот $z = z_1 + z_2$.

Согледај го решението:

$z_1 = 2+i = (2,1)$; $z_2 = 1+3i = (1,3)$;

$z = z_1 + z_2 = (2,1)+(1,3) = (3,4)$.



Воочуваш дека $\overline{OM} = \overline{AM_1} + \overline{OM_2}$ по правило на паралелограм.

Воопшто, ако $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогаш

$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Бидејќи $\Delta OP_2M_2 \cong \Delta M_1NM$, за координатите на точката M имаме:

$\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{P_1P} = \overline{OP_1} + \overline{OP_2} = a_1 + a_2$ и $\overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM} = \overline{PN} + \overline{P_2M_2} = b_1 + b_2$. Значи, точката M има координати $(a_1 + a_2)$ и $(b_1 + b_2)$, т.е. $M\,(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

7 Дадени се комплексните броеви $z_1 = -2+3i$ и $z_2 = 3-4i$. Со примена на векторското претставување на комплексните броеви определи: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$.

Задачи:

① Пресметај: а) $(-1,4)+(3,-7)$; б) $(-2,3)\cdot(-5,-7)$.

② Одреди ги реалните броеви x и y за броевите $z_1 = (x+1,3)$ и $z_2 = (-5, y-4)$ да бидат еднакви.

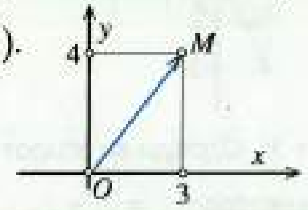
③ Во комплексната рамнина претстави ги броевите: $z_1 = (0, 0)$; $z_2 = (-3, 0)$; $z_3 = (0, -4)$; $z_4 = (-1, 5)$; $z_5 = (1, -5)$ и $z_6 = (-1, -5)$.

④ Со примена на векторско претставување одреди ги збирот и разликата на комплексните броеви: $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = 2 + 5i$.

5 МОДУЛ НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

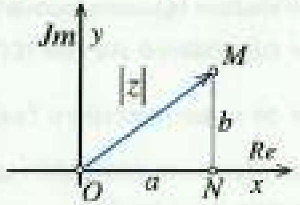
Потсети се!

- Должина на отсечката OM е должината на векторот $\overline{OM}$, т.е. $\left|\overline{OM}\right| = \overline{OM}$.
- Одреди ја должината на векторот $\overline{OM}$, ако $M(3,4)$.



А

Комплексниот број $z = a + bi$, $a = Re(z)$, $b = Jm(z)$ е определен со подредениот пар (a,b) или со радиус векторот $\overline{OM}$ со координати (a,b).



- Воочи! Модулот на векторот $\overline{OM}$, т.е. должината на отсечката OM се вика ***модул*** или ***апсолутна вредност*** на комплексниот број Z, а се означува со $|z|$.
- Модулот на кој било комплексен број е ненегативен реален број, т.е. $|z| \geq 0$, а $|z| = 0$ само ако $z = 0$.

Од триаголникот ONM следува: $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ или $|z| = \sqrt{Re^2(z) + Jm^2(z)}$.

Запомни!

Модулот на комплексниот број $z = a + bi$ е $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Воочи дека: $|z| = |x + 0 \cdot i| = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$.

1 Одреди го модулот на комплексниот број:

а) $z = 2 + \sqrt{7}\,i$; б) $z = 3 - 4i$; в) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $z = \frac{(2-i)^2}{1+i}$.

Согледај: $|3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Потсети се!

- $5 = 4 + 1 = 4 - i^2 = (2 - i)(2 + i)$.
- Одреди го квадратот на модулот на комплексниот број $z = 2 - i$.
- Ако $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + i$ покажи дека важи: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Б

2 За модулот на комплексниот број z важи: $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Навистина, од $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ следува:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi) = z \cdot z.$$

3 Нека $|z_1|$ и $|z_2|$ се модули на комплексните броеви z_1 и z_2. Ќе ја докажеме точноста на равенствата: а) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; б) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

- а) Според равенството $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, имаме $|z_1\cdot z_2|^2=z_1\cdot z_2\cdot\overline{z_1\cdot z_2}=z_1\cdot z_2\cdot\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
- Со примена на комутативното и асоцијативното својство добиваме:

$|z_1\cdot z_2|^2=z_1\cdot\overline{z_1}\cdot z_2\cdot\overline{z_2}$, па бидејќи $z_1\cdot\overline{z_1}=|z_1|^2$ и $z_2\cdot\overline{z_2}=|z_2|^2$ имаме:

$|z_1\cdot z_2|^2=|z_1|^2\cdot|z_2|^2$. Оттука следува $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

- б) За равенството $\left|z_2\cdot\frac{z_1}{z_2}\right|=|z_1|$ го применуваме претходното равенство и добиваме:

$$|z_2|\cdot\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=|z_1|,\text{ т.е. }\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

4 Одреди го модулот на комплексниот број $z=(1-i)^4$.

Согледај го решението:

- Бидејќи $z=(1-i)(1-i)(1-i)(1-i)$, од $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ следува:

$$|z|=|1-i|\cdot|1-i|\cdot|1-i|\cdot|1-i|=|1-i|^4=\left(\sqrt{1+1}\right)^4=4.$$

Воопшто: $|z^n|=|z|^n$.

5 Одреди го модулот на комплексниот број:

а) $z=\frac{(1-i)^5}{(1+i)^4}$; б) $z=\frac{\left(1-i\sqrt{2}\right)^5}{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{7}\right)^4}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

Потсети се!

- Нека $z_1=3+4i$, $z_2=5+12i$.

  Одреди: $|z_1|, |z_2|, |z_1+z_2|, |z_1-z_2|$.
- За претходно добиените вредности провери дали важат неравенствата:

  а) $|z_1|-|z_2|\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$;

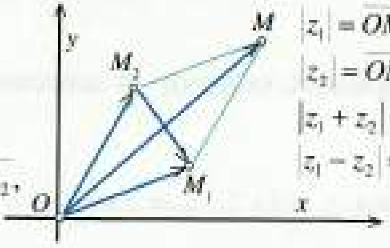
  б) $|z|-|z_2|\leq|z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

В **6** Користејќи ја врската меѓу вектори и комплексни броеви, примени графичка интерпретација за доказ на неравенствата:

1. $|z_1|-|z_2|\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$,
2. $|z_1|-|z_2|\leq|z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|$,

познати како неравенства на триаголник.

Согледај го решението:



$|z_1|=\overline{OM_1}$

$|z_2|=\overline{OM_2}$

$|z_1+z_2|=\overline{OM}$

$|z_1-z_2|=\overline{M_2M_1}$

- Од ΔOM_1M следува $\overline{OM_1}-\overline{OM_2}<\overline{OM}<\overline{OM_1}+\overline{M_1M}$,

  т.е. $|z_1|-|z_2|<|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|$.
- Од ΔOM_1M_2 следува $\overline{OM_1}-\overline{OM_2}<\overline{M_1M_2}<\overline{OM_1}+\overline{OM_2}$,

  т.е. $|z_1|-|z_2|<|z_1-z_2|<|z_1|+|z_2|$.

Во дадените неравенства 1 и 2 знакот за еднаквост важи само во случај кога точките O, M_1 и M_2 се колинеарни.

Задачи:

① Одреди го модулот на комплексниот број:

а) $z=(1+i)^2-3i$; б) $z=\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{7}\right)}{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$; в) $z=\dfrac{(2-i)^2}{3+i}$; г) $z=\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{5}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}$.

② Скрати ги дропките: а) $\dfrac{a^2+1}{a-i}\ (a\neq i)$; б) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+i\sqrt{b}}\ \left(a,b\in\mathbb{R}^+\right)$.

③ Одреди го комплексниот број z, така што $100=z\cdot\bar{z}$, а $Re(z)$ и $Jm(z)$ се цели броеви.

④ Броевите $z_1=5+4i$ и $z_2=2+7i$ претстави ги во комплексна рамнина и провери ја точноста на неравенството $|z_1|-|z|<|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|$.

Тематска контролна вежба

① Пресметај: $\sqrt{-36}-\sqrt{-16}-\sqrt{-64}+\sqrt{-49}$.

② Пресметај: а) $i^5+i^{-4}-i^{121}$; б) $\dfrac{1}{i^5}+\dfrac{1}{i^{17}}+i^{36}+i^{43}+i^{-18}$.

③ Најди комплексен број z, таков што $34=z\cdot\bar{z}$ и неговиот реален и имагинарен дел се цели броеви.

④ Упрости ги изразите: а) $\dfrac{1+3i}{(-1-i)^2}+\dfrac{(-4+i)(-4-i)}{1+i}$; б) $\dfrac{1-3i}{1-i}-\dfrac{i}{2+i}$.

⑤ Одреди ги реалните броеви x и y од равенството $(2+3i)x-(3-4i)y=7i-1$.

⑥ Упрости го изразот $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)i}{\sqrt{7}-\sqrt{2}+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)i}$.

⑦ Одреди го модулот на комплексниот број: а) $z=(1-i)^3$; б) $z=\dfrac{1-3i}{3-2i}$.

⑧ Нека $z_1=3+2i$, $z_2=2+3i$, $z_3=2+5i$. Одреди го графички збирот $z_1+z_2+z_3$.

ТЕМА 3

КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Француски математичар алгебрист, по професија правник. Прв вовел означување на коефициентите на равенки. Со букви ги покажа врските меѓу корените на квадратните равенки.

Виет Франсоа

1540-1603

Во оваа тема ќе учиш за:

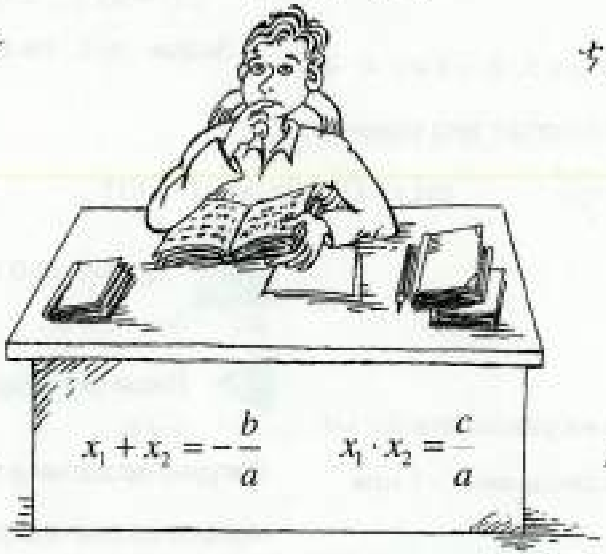
- квадратни равенки;
- дискриминанта на квадратната равенка;
- природата на решенијата на квадратна равенка;
- Виетови формули;
- биквадратни равенки;
- ирационални равенки;
- систем од една квадратна и една линеарна равенка со две променливи;
- примена на квадратната равенка.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=0 \Rightarrow x_1=x_2,\ \ x_1,x_2 \in R$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$



$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$D>0 \Rightarrow x_1 \neq x_2;\ \ x_1,\ x_2 \in R$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

$$D<0 \Rightarrow x_1,x_2 \in C$$

1 ПОИМ ЗА КВАДРАТНА РАВЕНКА. ВИДОВИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ. РЕШАВАЊЕ НА НЕПОЛНИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Кои од следните равенки се квадратни

$$3x-4y=2; \qquad 2-3x+0\cdot x=0;$$

$$3x-x^2=0; \qquad 4x^2-0\cdot x=2;$$

$$\frac{1}{x}=x+2, \quad x\neq 0\,?$$

- Патот при рамномерно забрзано праволиниско движење $S=V_0t+\frac{at^2}{2}$ е квадратна равенка по променливата t.
- За која вредност на k равенката $(k-1)x^2-3kx=2$ е квадратна ?

A

■ Равенката од видот $ax^2+bx+c=0$, каде x е променлива, а $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a\neq 0$ се вика квадратна равенка со една променлива.

Мономот ax^2 е квадратен член, bx линеарен член, а c слободен член на квадратната равенка. Бројот a е коефициент на квадратниот член, b коефициент на линеарниот член, а c е слободен коефициент.

На пример во равенката $3x^2 - x + 2=0$, коефициентите се $a=3$, $b=-1$ и $c=2$.

Равенката $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ се вика ***општ вид*** на квадратна равенка.

1 Равенките $3x=4-5x^2$ и $(x-1)^2=4x-5$ сведи ги во општ вид и одреди ги нивните коефициентите.

Согледај го решението:

■ а) Сите членови на равенката ги сведуваме од иста страна на равенството. Ги подредуваме по големина на степеновиот показател на променливата x. Ги подредуваме равенките една под друга и ги споредуваме коефициентите.

$$ax^2+bx+c=0$$

$5x^2+3x-4=0$ Значи: $a=5$, $b=3$ и $c=-4$.

■ б) Ги извршуваме назначените операции:

$$(x-1)^2=4x-5;$$

$$x^2-2x+1-4x+5=0;$$

$$x^2-6x+4=0$$

$$ax^2+bx+c=0$$

Значи: a=1, b=-6 и c=4.

2 Трансформирај ги во општ вид равенките:

а) $\frac{x(x-1)}{3}-2=\frac{x^2-4}{2}$; б) $(x-1)^2-2x=1-(3x+1)^2$.

Потсети се!

■ $\sqrt{x^2}=|x|$

- Дали $x=0$ е решение на равенката $2x^2=0$?
- Равенката $x^2=4$ има решение x_1=2 или x_2= -2.
- Дали равенката $3x^2=0$ има две решенија?

Б

■ Ако b=0 и c=0, тогаш равенката $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ е од видот ax^2=0.

3 Реши ја квадратната равенка ax^2=0, $a\neq 0$.

Сигурно по делењето со a доби x^2=0. Со корењување на двете страни добиваш $\sqrt{x^2}=0$, т.е. $|x|=0$.

Ова равенство е еквивалентно со равенствата $-x=0$ или $x=0$ т.е. $x_1=0$ или $x_2=0$.

Запомни!

Равенката $ax^2=0$ за $a \neq 0$ има две решенија кои се еднакви на нула, т.е $x_1 = x_2 = 0$.

За $a = 0$ равенката е од видот $0 \cdot x^2 = 0$, па секоја вредност на x е решение на равенката.

4 Одреди ги решенијата на квадратната равенка:

а) $\left(3-\sqrt{2}\right)x^2 = 0$; б) $\left(0-3\right)x^2 = 0$; в) $mx^2 = 0$ за $m \neq 0$; г) $\left(m-1\right)x^2 = 0$ за $m=1$.

Потсети се!

- Решенија на равенката $|x| = 2$ се $x_1=2$ или $x_2=-2$.
- Од $i^2 \overset{def}{=} -1$ следува $i = \sqrt{-1}$.
- Одреди ја вредноста на коренот $\sqrt{-4}$.

ℬ

- Ако $b=0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$ тогаш равенката $ax^2+bx+c=0$ е од видот $ax^2+c=0$ која ќе ја викаме ***чисто квадратна равенка***.

5 Реши ја чисто квадратната равенка

$$ax^2+c=0.$$

- Трансформирај ја равенката во следниот вид $x^2 = -\dfrac{c}{a}$.
- Со коренување на двете страни добиваш $|x| = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ т.е. $x_1 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ или $x_2 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

На пример:	$2x^2-18=0$	$2x^2+18=0$
	$x^2-9=0$	$x^2+9=0$
	$x^2=9$	$x^2=-9$
	$\lvert x\rvert=3$	$\lvert x\rvert=3i$
	$x_1=-3$ или $x_2=3$	$x_1=-3i$ или $x_2=3i$

Запомни!

Чисто квадратната равенка секогаш за решенија има спротивни броеви $x_1 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ или $x_2 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, кои се реални ако $-\dfrac{c}{a} \geq 0$ или имагинарни ако $-\dfrac{c}{a} < 0$.

6 Реши ги чисто квадратните равенки:

а) $3x^2 - 12 = 0$; б) $5x^2 + 45 = 0$; в) $14 - 2x^2 = 0$.

Потсети се!

- Полиномот $7x^2+3x$ разложен во производ е $x\left(7x+3\right)$.
- Разложи го во производ полиномот $2x^2-4x$.
- Производ од два и повеќе множители е нула кога барем еден од множителите е нула.
- Нулите на полиномот $x\left(x-1\right)\left(x+2\right)$ се $x_1 = 0$ или $x_2 = 1$ или $x_3 = -2$.

■ Ако $c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0$, тогаш равенката $ax^2 + bx + c = 0$ е од видот $ax^2 + bx = 0$, која се вика ***мешовито квадратна равенка***.

7 Реши ја квадратната равенка $ax^2 + bx = 0$.

■ Равенката ќе ја трансформираме во видот $x \cdot (ax + b) = 0$, која се вика равенка производ.

■ Равенката производ е еквивалентна со дисјункција (вкупност) на равенките

$$x = 0 \text{ или } ax + b = 0 \text{ т.е. } x_1 = 0 \text{ или } x_2 = -\frac{b}{a}.$$

На пример: $2x^2 - 11x = 0$; $x(2x - 11) = 0$. Значи, $x = 0$ или $x_2 = \frac{11}{2}$ се решенија на дадената равенка.

Запомни!

Мешовито квадратната равенка секогаш има реални решенија при што, секогаш едното решение е нула.

Запомни!

Равенките од видот $ax^2 = 0;\ ax^2 + c = 0;\ ax^2 + bx = 0,\ (a \neq 0)$ се викаат неполни квадратни равенки.

8 Следниве неполни квадратни равенки реши ги со користење на вкупност равенки.

а) $5x^2 = 0$; б) $x^2 - 5 = 0$; в) $x^2 + 1 = 0$; г) $6x^2 - 7x = 0$.

Согледај го решението:

а) $5x \cdot x = 0$

$x = 0$ или $x = 0$, т.е.

$x_1 = 0$ или $x_2 = 0$.

б) $\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) = 0$

$x - \sqrt{5} = 0$ или $x + \sqrt{5} = 0$

Значи: $x_1 = \sqrt{5}$ или $x_2 = -\sqrt{5}$.

в) $(x - i)(x + i) = 0$

$x - i = 0$ или $x + i = 0$

Значи: $x_1 = i$ или $x_2 = -i$.

г) $x\,(6x - 7) = 0$

$x = 0$ или $6x - 7 = 0$, па

$x_1 = 0$ или $x_2 = \frac{7}{6}$.

■ Ако коефициентите $a \neq 0,\ b \neq 0$ и $c \neq 0$ тогаш равенката $ax^2 + bx + c = 0$ се вика полна квадратна равенка. Ако коефициентите a, b и c се реални броеви, тогаш велиме дека равенката е со реални коефициенти.

Некој од коефициентите a, b или c може да биде израз, кој зависи од некој параметар. Во тој случај велиме дека тоа е ***параметарска квадратна равенка***.

На пример равенката $(k - 2)x^2 + 2(k + 3)x - k + 2p = 0$ е параметарска квадратна равенка, а нејзините коефициенти се: $a = k - 2$, $b = 2(k + 3)$ и $c = -k + 2p$.

9 За кои вредности на периметарот m равенката $(2m-1)x^2-3(m+2)x-m+5=0$ е:

а) квадратна, б) од видот $ax^2+c=0$, в) од видот $ax^2+bx=0$.

Согледај го решението:

- а) Равенката е квадратна ако $a \neq 0$, т.е. $2m-1 \neq 0$. Оттука следува $m \neq \frac{1}{2}$.
- б) Во равенката го нема линеарниот член. Значи, $b=0$, т.е. $-3(m+2)=0$. Оттука следува $m=-2$, па равенката е $\left(2\cdot(-2)-1\right)x^2-(-2)+5=0$, т.е $-5x^2+7=0$.
- в) Во овој случај $c=0$, т.е. $-m+5=0$, $m=5$, а равенката е $(2\cdot5-1)x^2-3(5+2)x=0$; $9x^2-21x=0$.

10 Дадена е равенката $2x^2-3x-2=0$.

Ако $x \in \left\{1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right\}$, одреди за кои вредности на x равенката преминува во точно бројно равенство.

Согледај го решението:

- Со проверка ќе утврдиш дека за $x=2$ и $x=-\frac{1}{2}$ равенката поминува во точно бројно равенство.

Запомни!

Вредноста на непознатата за којашто равенката $ax^2+bx+c=0$ преминува во точно бројно равенство се вика ***корен*** или ***решение*** на квадратната равенка.

Задачи:

① Сведи ги равенките во општ вид:

а) $\frac{(2x-3)^2}{2}-\frac{x+1}{3}-5=0$; б) $(x+1)^3-(x+2)^3=(x+2)^2$;

в) $\frac{x+1}{2}\cdot\frac{x+3}{3}-\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2=0$; г) $(x-2)+(x+k)^2=(k-2)x^2$.

② За кои вредности на параметарот k равенката $(3k+2)x^2-(k+2)x+5k-2=0$ е:

а) квадратна, б) од видот $ax^2+bx=0$, в) од видот $ax^2+c=0$?

③ Реши ги равенките: а) $-8x^2=0$; б) $ax^2+2x^2=0$; в) $ax^2+bx^2=cx^2$.

④ Реши ги чисто квадратните равенки: а) $x(x+5)=5(x+20)$; б) $(x-2)(x-3)=-5(x+2)$.

⑤ За кои вредности на параметарот m равенката $(m-2)x^2+1=0$ ќе има реални корени?

⑥ Со користење на еквиваленцијата $h(x)g(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=0$ или $g(h)=0$ реши ги равенките: а) $(x-4)(x+5)=0$; б) $(2k-3x)(4x+3k)=0$.

⑦ Реши ги мешовито квадратните равенки:

а) $\frac{2x^2+3x}{5}-5x+\frac{x^2}{2}=0$; б) $(3x-5)^2-(x-3)^2=16$.

2 РЕШАВАЊЕ НА ПОЛНИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- На методите за разложување на полиноми на прости множители.
- На формулите за скратено множење.
- Провери дали се точни равенствата:

а) $x^2-4x+4=(x-2)^2$;

б) $x^2+x+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

- Одреди го решението на равенката $x^2-2x-8=0$, ако $x\in\{-3,\ -2,\ 0,\ 1,\ 4\}$.

А **1** Полиномите разложи ги на множители:

а) x^2+x-6; б) x^2+2x-3.

Согледај го решението:

а) $x^2+x-6=x^2+3x-2x-6=$

$=x(x+3)-2(x+3)=(x+3)(x-2)$.

б) Првите два члена дополни ги до полн квадрат со додавање и одземање на 1.

$$x^2+2x-3=\left(x^2+2x+1\right)-1-3=$$
$$=(x+1)^2-4=(x+1-2)(x+1+2)=$$
$$=(x-1)(x+3).$$

2 Реши ја равенката $x^2+3x+2=0$. а) со разложување на производ; б) со надополнување до полн квадрат.

Согледај го решението:

а) $x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x^2+2x+x+2=0 \Leftrightarrow x(x+2)+(x+2)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)=0$,

$x+2=0$ или $x+1=0$,

т.е. x = -2 или x = -1.

б) Линеарниот член $3x$ можеме да го запишеме како двоен производ, т.е. $3x=2x\cdot\frac{3}{2}$, па имаме:

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9-8}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)=0$, па $x=-1$ или $x=-2$, се решенија на равенката.

3 Реши ја потполната квадратна равенка $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$.

Равенката ја делиме со a и добиваме $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Линеарниот член $\frac{b}{a}x$ е еднаков на производот $2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}$, па $x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{c}{a}=0$.

Очигледно, вториот член на биномот е $\frac{b}{2a}$, со додавање и одземање на $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ добиваме:

$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$. Оттука следува равенката: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$.

1) Оваа равенка можеме да ја сметаме како чисто квадратна равенка, т.е. $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, па со коренување добиваме $\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, т.е.

$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ или $x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

■ Конечното решение е: $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ или $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2) До решението на равенката $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$ можеме да дојдеме и со разложување: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0$, т.е. $\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$.

■ Од вкупноста равенки ги добиваме горните решенија.

Запомни!

Решенијата на потполната квадратна равенка $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ се определуваат со формулата

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Воочи дека:

1) Со замена на $b=0$ и $c=0$ во формулата за решенија на потполната квадратна равенка, се добиваат решенијата на квадратната равенка од видот $ax^2=0$, т.е. $x_1=0$ или $x_2=0$.

2) Со замена на $b=0$, се добиваат решенијата на равенката од видот $ax^2+c=0$,

т.е. $x_1=-\sqrt{\frac{c}{a}}$ или $x_2=\sqrt{\frac{c}{a}}$.

3) Со замена на $c=0$, се добиваат решенијата на равенката од видот $ax^2+bx=0$,

т.е. $x_1=0$ или $x_2=-\frac{b}{a}$.

4 Реши ги квадратните равенки: а) $x^2+x-12=0$; б) $x^2=2x+1$;
в) $(5x-2)(8x-1)-(3x+1)(4x-1)-9=0$.

Согледај го решението:

■ а) Коефициентите $a=1$, $b=1$ и $c=-12$, ги заменуваме во формулата $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и добиваме $x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}$, т.е. $x_1=3$ или $x_2=-4$.

■ б) Прво равенката ја трансформираме во општ вид, т.е. $x^2-2x-1=0$, а потоа ги одредуваме коефициентите $a=1$, $b=-2$, $c=-1$, па $x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}$.

Познато е дека $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, па $x_{1/2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}$, т.е. $x_1=1+\sqrt{2}$ или $x_2=1-\sqrt{2}$.

в) По извршување на операциите добиваме: $40x^2-5x-16x+2-12x^2+3x+4x+1-9=0$, т.е. $28x^2-22x-6=0$.

По делење со 2 имаме: $14x^2-11x-3=0$.

Коефициентите на равенката се: $a=14$, $b=-11$, $c=-3$.

Со примена на формулата добиваме: $x_{1/2}=\frac{11\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot14\cdot(-3)}}{2\cdot14}=\frac{11\pm\sqrt{121+168}}{28}=\frac{11\pm17}{28}$,

т.е. $x_1=\frac{11+17}{28}=1$ или $x_2=\frac{11-17}{28}=-\frac{3}{14}$. Значи, решенијата се $x_1=1$ или $x_2=-\frac{3}{14}$.

5 Со примена на формулата за решавање на квадратна равенка, реши ги равенките:

а) $7x^2=0$; б) $2x^2-8=0$; в) $7x^2-4x=0$; г) $2x^2+5x-12=0$.

Потсети се!

Одреди ја бројната вредност на изразот b^2-4ac, ако a, b и c се коефициентите на равенката $x^2-4x+3=0$.

Дадена е равенката $(k-1)x^2-kx+1=0$.

Одреди ја вредноста на изразот b^2-4ac, ако a, b и c се коефициентите на дадената равенка.

Решенијата на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a\neq0$, ги одредуваме со формулата

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Поткореновиот израз b^2-4ac се означува со D, т.е. $D=b^2-4ac$ се вика ***дискриминанта*** на квадратната равенка, па формулата $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ е, исто така, формула за одредување на решенијата на квадратна равенка.

Корисно е да знаеш!

1) Ако коефициентите a, b, c на квадратната равенка се реални броеви, тогаш решавај со примена на формулата $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

На пример: $x^2-7x+10=0$, $x_{1/2}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}$, т.е. $x_1=5$ или $x_2=2$.

2) Ако некој од коефициентите a, b или c е параметар или израз, тогаш решавај така што прво ќе ја одредиш дискриминантата $D=b^2-4ac$, а потоа користи ја формулата

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

На пример, равенката $x^2-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}=0$ ќе ја решиме така што прво ќе ја одредиме дискриминантата, т.е.

$$D=b^2-4ac=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2.$$

Со замена во формулата $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ добиваме $x_{1/2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}\pm\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2}$, па $x_1=\sqrt{3}$ или $x_2=\sqrt{2}$.

6 Реши ја равенката $x^2-(a+b)x+ab=0$. Дискутирај го решението на равенката во зависност од параметрите a и b.

Согледај го решението:

■ Ја одредуваме дискриминантата:

$D=(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, па $x_{1/2}=\frac{a+b\pm(a-b)}{2}$.

За $a\neq b$, $x_1=\frac{a+b+a-b}{2}=a$ или $x_2=\frac{a+b-a+b}{2}=b$. За $a=b$, $x_1=\frac{b+b+0}{2}=b$ или $x_2=\frac{b+b+0}{2}=b$.

Задачи:

① Реши ги квадратните равенки со непосредна примена на формулата:

а) $6x^2+x-2=0$; б) $4x^2-12x+9=0$; в) $x^2-4x+13=0$.

② Реши ги квадратните равенки со претходно определување на дискриминантата:

а) $x^2-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{35}=0$; б) $ax^2-(a+1)x+1=0$.

3 ДИСКУСИЈА ЗА РЕШЕНИЈАТА НА КВАДРАТНАТА РАВЕНКА

Потсети се!

- Што е дискриминанта на квадратната равенка?
- Одреди ја дискриминантата на секоја од равенките а) $2x^2-3x=0$ и б) $x^2+4=0$, а потоа одреди ги нивните решенија.
- На кое множество припаѓаат решенијата на претходните две равенки?
- Воочи, од што зависи дали $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ или $x_1,x_2\in\mathbb{C}$?
- Какви се броевите $2-3i$ и $2+3i$?
- Колку е: $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-2}$?

А **1** Одреди ги решенијата на равенките со претходно одредување на дискриминантата:

а) $x^2-4x+3=0$; б) $x^2-4x+4=0$; в) $x^2-4x+5=0$.

Согледај го решението:

а) $D=16-4\cdot1\cdot3=4=2^2>0$; $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{4\pm2}{2}$, т.е. $x_1=3$ или $x_2=1$; $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ и $x_1\neq x_2$.

б) $D=16-4\cdot1\cdot4=0$; $x_{1/2}=\frac{4\pm0}{2}$, т.е. $x_1=2$ или $x_2=2$; $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ и $x_1=x_2$.

в) $D=16-4\cdot1\cdot5=-4<0$; $x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{4\pm2i}{2}$, т.е. $x_1=2+i$ или $x_2=2-i$; $x_1,x_2\in\mathbb{C}$ и $x_1=\overline{x_2}$.

Воочи и запомни!

1) Ако $D > 0$, решенијата на квадратната равенка се реални и различни.
2) Ако $D = 0$, решенијата на квадратната равенка се реални и еднакви.
Воопшто, ако $D \geq 0$, тогаш решенијата на квадратната равенка се реални броеви.
3) Ако $D < 0$, тогаш решенијата на квадратната равенка се конјугирано комплексни броеви.

2 Без да ги решаваш равенките, одреди ја природата на нивните решенија:

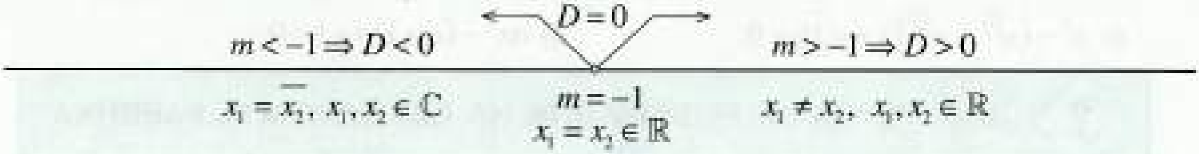
а) $x^2-5x+7=0$; б) $x^2+8x+16=0$; в) $x^2+x+4=0$.

3 Во зависност од параметарот m, одреди ја природата на решенијата на равенките:

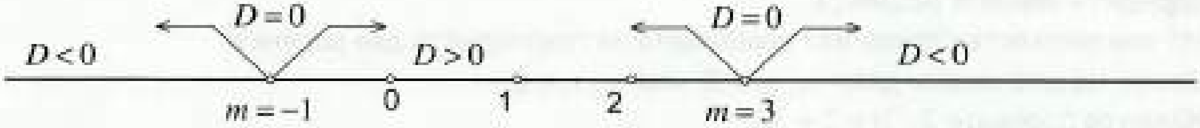
а) $x^2-2x-m=0$; б) $(m-2)x^2-(m+1)x+m+1=0$.

Согледај го решението:

а) $D = 4 + 4m$. $D = 0$, ако $4 + 4m = 0$, т.е. $m = -1$. Воочи, за $m > -1$, $D > 0$, а за $m < -1$, $D < 0$.
Воочи го графичкото прикажување на оваа дискусија.



б) $D=(m+1)^2-4(m-2)(m+1)=m^2+2m+1-4\left(m^2-2m+m-2\right)=-3m^2+6m+9$. Дискриминантата $D=0$, ако $-3m^2+6m+9=0$, т.е. $m^2-2m-3=0$ за $m_1=3$ или $m_2=-1$, со што на множеството $\mathbb{R}$ е поделено на три интервали: $(-\infty,-1),(-1,3)$ и $(3,\infty)$.



Со проверка го одредуваме знакот на дискриминантата во еден интервал, на пример во интервалот (-1, 3). Ако во интервалот (-1, 3) дискриминантата е негативна, тогаш во останатите интервали е позитивна или обратно.

На пример, за $m = 1$ имаме: $D=-3\cdot1^2+6\cdot1+9=12>0$, значи во интервалот $(-1,3)$, $D>0$, а во другите два интервали дискриминантата е негативна, т.е. $D<0$. (Внимавај, равенката е квадратна за $m \neq 2$). Според тоа, ако:

1) $m \in \{-1,3\}$, $x_1=x_2$, $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$. 2) $m \in (-1,3) \setminus \{2\}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$.
3) $m \in (-\infty,-1) \cup (3,\infty)$, $x_1=\overline{x_2}$, $x_1,x_2 \in \mathbb{C}$.

Задачи:

① Реши ги квадратните равенки: а) $x^2-8x+15=0$; б) $x^2+2x+5=0$; в) $x^2-x+\frac{1}{4}=0$.

② Без да ги решаваш равенките, одреди ја природата на решенијата:

а) $x^2+x-12=0$; б) $4x^2-12x+9=0$; в) $x^2-6x+25=0$.

③ Одреди го параметарот m, така што равенката $x^2+2(3-m)x+2m-3=0$ да има двоен корен.

④ Одреди ја природата на решенијата на равенката $(k-1)x^2+2(k+2)x+k-3=0$, во зависност од промената на параметарот k.

4 ВРСКА МЕЃУ РЕШЕНИЈАТА И КОЕФИЦИЕНТИТЕ НА КВАДРАТНАТА РАВЕНКА

Потсети се!

- На теоремите за еквивалентност на равенките.
- Равенката $2x^2-3x+6=0$ траноформирај ја така што коефициентот пред квадратниот член да е еднаков на 1.
- Реши ја равенката $2x^2+3x-5=0$.
- Одреди ги збирот и производот на корените на равенката $2x^2+3x-5=0$.
- За Франсоа Виет прочитај на насловната страна на ова тема.

А Нека е дадена квадратната равенка $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$. Ако дадената равенка ја поделиме со а, се добива нова квадратна равенка еквивалентна со дадената, т.е.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Вообичаено, коефициентите на новата равенка ги обележуваме со p и q, т.е. $\frac{b}{a}=p$ и $\frac{c}{a}=q$, па равенката е од видот

$$x^2+px+q=0$$

кој се вика ***нормален вид*** на квадратна равенка.

1 Квадратните равенки: а) $2x^2+3x+7=0$, б) $mx^2-(m+1)x-3=0$ трансформирај ги во нормален вид, а потоа одреди ги нивните коефициенти.

2 Одреди ги збирот и производот од корените на равенката $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$. Согледај го решението:

- Познато ти е дека корените на дадената равенка се:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ или } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \text{ а}$$

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a} \text{ и } x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Воочи и запомни!

Ако x_1 и x_2 се корени на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, тогаш $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, се викаат ***Виетови формули***.

Ако равенката е во нормален вид, т.е. $x^2+px+q=0$, тогаш Виетовите формули се

$$x_1+x_2=-p \text{ и } x_1\cdot x_2=q.$$

3 Без да ги решаваш равенките: а) $3x^2-4x+5=0$ и б) $x^2+(m+1)x-2m+3=0$, одреди ги збирот и производот на корените за секоја равенка.

а) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$; б) $x_1+x_2=-p=-(m+1)$, $x_1\cdot x_2=q=-2m+3$.

4 Нека за броевите x_1 и x_2 важи $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$. Докажи дека x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2+px+q=0$.

Согледај го доказот:

Од $x_1+x_2=-p$ следува $p=-(x_1+x_2)$, па равенката е од видот $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$.

За $x=x_1$ имаме: $x_1^2-(x_1+x_2)\cdot x_1+x_1\cdot x_2=0$ или $x_1^2-x_1^2-x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_2=0$, т.е. $0=0$. Значи, за $x=x_1$ дадената равенка преминува во точно бројно равенство, т.е. x_1 е решение на равенката. На сличен начин покажи дека тврдењето е точно и за $x=x_2$.

Со тоа е докажана следната

Теорема: Броевите x_1 и x_2 се решенија на равенката $ax^2+bx+c=0$ ако и само ако $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, ако равенката е од видот $x^2+px+q=0$, тогаш $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

5 Со примена на Виетовите формули определи кои од дадените броеви се корени на соодветните равенки:

а) 3 и 4 за $x^2-7x+12=0$; б) 3 и -4 за $x^2+7x-12=0$; в) $1\pm\sqrt{2}$ за $x^2-2x-1=0$.

Ако дадените броеви ги задоволуваат Виетовите формули, значи тие броеви се решенија на соодветната равенка.

а) Од $x_1+x_2=-p$ и $x_1\cdot x_2=q$, следува $p=7$, $q=12$. Бидејќи $3+4=-(-7)=7$ и $3\cdot 4=12$, броевите 3 и 4 се корени на равенката $x^2-7x+12=0$.

6 Нека x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2+px+q=0$. Докажи дека $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$.

Согледај го доказот:

Изразот $x_1^2+x_2^2$ го дополнуваме до полн квадрат на бином. Со додавање и одземање на $2x_1x_2$ добиваме: $x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Според Виетовите формули имаме $x_1+x_2=-p$ и $x_1\cdot x_2=q$, следува $x_1^2+x_2^2=(-p)^2-2q=p^2-2q$.

7 Нека x_1 и x_2 се решенија на равенката $3x^2-2x+6=0$. Без да ја решаваш дадената равенка, одреди ја вредноста на секој од изразите:

а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; б) $\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}$; в) $2x_1-3x_2^2+2x_2-3x_1^2$.

Согледај го решението:

Според Виетовите формули имаме: $x_1+x_2=-\frac{-2}{3}=\frac{2}{3}$ и $x_1\cdot x_2=\frac{6}{3}=2$. Секој од дадените изрази го трансформираме во израз што ќе ги содржи само изразите x_1+x_2 и $x_1\cdot x_2$.

а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$; б) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}{x_1\cdot x_2}=\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot 2}{2}=-\frac{16}{9}$.

в) $2x_1-3x_2^{\ 2}+2x_2-3x_1^{\ 2}=2\left(x_1+x_2\right)-3\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}\right)=2\cdot\frac{2}{3}-3\cdot\left(-\frac{32}{9}\right)=\frac{36}{3}=12$.

Задачи:

① Дадените квадратни равенки запиши ги во нормален вид, а потоа за секоја од нив одреди ги p и q:

а) $3x^2-6x+5=0$; б) $mx^2-(m+2)x-5m=0$.

② Нека x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2+px+q=0$. Докажи дека $x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}=3pq-p^3$.

③ Без да ја решаваш равенката $2x^2-4x+1=0$, одреди ја вредноста на секој од изразите: а) $\frac{1}{x_1^{\ 2}}+\frac{1}{x_2^{\ 2}}$; б) $x_1^{\ 2}x_2+x_1x_2^{\ 2}$; в) $\frac{x_1^{\ 2}}{x_2}+\frac{x_2^{\ 2}}{x_1}$, ако x_1 и x_2 се корени на равенката.

5 ПРИМЕНА НА ВИЕТОВИТЕ ФОРМУЛИ

Потсети се!

- Решенија на равенката $x^2+7x+12=0$ се: $x_1=3$ или $x_2=4$.
- Дали можеш да составиш равенка чии корени се броевите 2 и 3?
- Одреди го параметарот k во равенката $x^2+(k+1)x+2=0$, ако нејзините корени се 1 и 2.

Со примена на Виетовите формули ќе решиме некои задачи со што ќе дадеме одговор на барањата во делот "Потсети се".

1 Состави квадратна равенка чии корени се $x_1=2$ или $x_2=-7$.

Согледај го решението:

- Според Виетовите формули, x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2+px+q=0$, ако $x_1+x_2=-p$ и $x_1\cdot x_2=q$.

Значи, бараната равенка е од видот $x^2+px+q=0$, каде што $p=-\left(x_1+x_2\right)$, а $q=x_1\cdot x_2$.

- Од $x_1=2$ и $x_2=-7$ следува $p=-\left(2-7\right)=5$, $q=2\cdot\left(-7\right)=-14$, па $x^2+5x-14=0$ е бараната равенка.

2 Состави квадратна равенка со реални коефициенти ако нејзините корени се:

а) $x_1=-\frac{2}{3}, x_2=0,5$; б) $x_1=3-\sqrt{2}, x_2=3+\sqrt{2}$; в) $x_1=5-4i, x_2=\overline{x_1}$; г) $x_1=a+b, x_2=a-b$.

Согледај го решението:

в) $p=-(5-4i+5+4i)=-10$, $q=(5-4i)(5+4i)=25-16i^2=41$, па равенката е $x^2-10x+41=0$.

3 Одреди ги страните на правоаголникот чија плоштина е $10\ cm^2$, а периметар $14\ cm$.

Упатство: $a+b=7$ и $a\cdot b=10$. Користи ги Виетовите формули.

4 Дадена е равенката $mx^2-(2m+2)x+1=0$. Одреди го параметарот m, така што корените x_1 и x_2 на дадената равенка ја задоволуваат релацијата $x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2=4$.

Согледај го решението:

- Според Виетовите формули имаме: $x_1+x_2=-\dfrac{-(2m+2)}{m}=\dfrac{2m+2}{m}$; $x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{m}, m\neq 0$.
- Од $x_1^2x_2+x_1x_2^2=4$ следува $x_1x_2(x_1+x_2)=4$, па со замена ја добиваме равенката

$\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{2m+2}{m}=4$ или $4m^2-2m-2=0$, т.е. $2m^2-m-1=0$, чии корени се $m=1$ или $m=-\dfrac{1}{2}$.

Ако се обидеш да ја решиш задачата на друг начин, т.е. прво да ги одредиш корените на равенките x_1 и x_2 кои ќе ги замениш во дадената релација, во тој случај ќе добиеш сложена равенка до чие решение тешко се доаѓа.

5 Одреди го параметарот m во равенката $x^2-(m+1)x+m+3=0$, така што едниот нејзин корен е два пати поголем од другиот.

Согледај го решението:

- Воочи, равенката е во нормален вид, па $x_1+x_2=-p=-(-(m+1))=m+1$ и $x_1\cdot x_2=m+3$.

Од условот $x_1=2x_2$ следува системот:

$$\begin{cases}x_1=2x_2\\ x_1+x_2=m+1\\ x_1\cdot x_2=m+3.\end{cases}$$

Од системот $\begin{cases}x_1=2x_2\\ x_1+x_2=m+1\end{cases}$ имаме:

$3x_2=m+1$, т.е. $x_2=\dfrac{m+1}{3}$ и $x_1=\dfrac{2(m+1)}{3}$.

Со замена на x_1 и x_2 во третата равенка добиваме $\dfrac{2(m+1)}{3}\cdot\dfrac{m+1}{3}=m+3$, т.е. $2m^2-5m-25=0$, чии решенија се $m_1=5$ или $m_2=-\dfrac{5}{2}$.

Задачи:

① Состави квадратна равенка со реални коефициенти, ако $x_1=4-7i$ е корен на таа равенка.

② Нека x_1 и x_2 се корени на равенката $3x^2-6x-5=0$. Без да ја решаваш равенката, одреди ја вредноста на изразите: а) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$; б) $\dfrac{x_1}{x_2^2}+\dfrac{x_2}{x_1^2}$.

③ Одреди го параметарот m на равенката $x^2-4x+m=0$, ако за нејзините корени x_1 и x_2 важи релацијата: а) $x_1-3x_2=0$; б) $x_1^2+x_2^2=40$.

④ Одреди го параметарот m во квадратната равенка:

а) $x^2-(m+3)x+m+2=0$, ако за нејзините корени важи: $\dfrac{x_1}{x_1+1}+\dfrac{x_2}{x_2+1}=\dfrac{13}{10}$;

б) $x^2-2mx+m^2=1$, ако за нејзините корени важи релацијата $x_1=2x_2$.

6

РАЗЛОЖУВАЊЕ НА КВАДРАТЕН ТРИНОМ ВО ПРОИЗВОД. ПРИМЕНА НА КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Воочи како на прости множители ќе го разложиме полиномот $x^2 - 7x + 12$.
$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 =$
$= x(x - 3) - 4(x - 3) =$
$= (x - 3)(x - 4)$.

- Одреди ја вредноста на полиномот $x^2 - 7x + 12$ за $x = 3$.
- Што е нула на полином?
- Што е трином?

- Решенијата на квадратната равенка $x^2 - 5x + 6 = 0$ се $x_1 = 3$ или $x_2 = 2$.

1 Одреди ја вредноста на полиномот

$$x^2 - 5x + 6 \text{ за } x \in \{-1, 0, 2\}.$$

- За $x = -1$ имаме:

$$x^2 - 5x + 6 = (-1)^2 - 5\cdot(-1) + 6 = 12.$$

- За $x = 0$ имаме: $x^2 - 5x + 6 = 6$.
- За $x = 2$ имаме:

$$x^2 - 5x + 6 = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0.$$

Запомни!

Вредноста на променливата x, за којашто полиномот $P(x)$ добива вредност нула се вика ***нула на полиномот***.

Воочи, нулите на квадратниот трином $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ се, всушност, реалните корени на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

2 Квадратниот трином $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ запиши го како производ од линеарни множители.

Согледај го решението:

- Нека x_1 и x_2 се реални нули на квадратниот трином. Со примена на Виетовите формули имаме: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, па $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right) =$

$$= a\left(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2\right) = a\left(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Запомни!

Равенството $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ покажува како се разложува во производ квадратниот трином $ax^2 + bx + c$, при што x_1 и x_2 се нули на триномот.

3 Разложи го во производ триномот: а) $x^2 - 8x + 12$; б) $x^2 + x - 12$; в) $8x^2 + 2x - 3$.

- в) Нулите на триномот се: $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 8\cdot(-3)}}{2\cdot 8}$, т.е. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{4}$. Според тоа,

$$8x^2 + 2x - 3 = 8(x - x_1)(x - x_2) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right) = 8\cdot\frac{2x - 1}{2}\cdot\frac{4x + 3}{4} = (2x - 1)(4x + 3).$$

4 Состави квадратна равенка чии решенија се $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=-3$.

Согледај го решението:

- Од $a(x-x_1)(x-x_2)=0$, поради $a\neq 0$, следува $(x-x_1)(x-x_2)=0$ или $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=0$,

односно $x^2+3x-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$, т.е. бараната равенка е $2x^2+5x-3=0$.

Потсети се!

- За да скратиме дадена дропка, треба броителот и именителот да ги разложиме во производ.

5 Скрати ја дропката $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$.

Согледај го решението:

- За броителот имаме: $x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$, т.е.

$x_1 = 2$ и $x_2 = -3$, па $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

Според тоа, $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2}=\frac{x+3}{x-2}$, за $x\neq 2$.

Потсети се!

- За која вредност на x има смисла дропката $\frac{x+1}{x^2-4}$?
- Одреди го дефиниционото множество на равенката $\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{4+x^2}{1-x^2}$.

Б **6** Дадена е дробно рационалната равенка

$$\frac{3x}{x-1}+\frac{4x}{x+1}=\frac{2x^2-6x}{x^2-1}.$$

Одреди ги нејзините решенија.

Согледај го решението:

- Равенката е дефинирана за: $x-1\neq 0$, $x+1\neq 0$, т.е. $x\neq 1$ и $x\neq -1$.

Значи, дефиниционото множество на дадената равенка е $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

- Дадената равенка ја множиме со НЗС$(x-1,x+1)=x^2-1$ и добиваме:

$$3x(x+1)+4x(x-1)=2x^2-6x,$$

$$3x^2+3x+4x^2-4x=2x^2-6x,$$

$$5x^2+5x=0,\ x_1=0 \text{ или } x_2=-1.$$

- Бидејќи $x_2=-1$ не припаѓа на дефиниционото множество, решение на равенката е $x=0$.

7 Реши ја равенката $\frac{2x+1}{x^2+x-6}-\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{6}{x^2-9}$.

- Упатство: Разложи ги именителите на множители, одреди го нивниот НЗС, определи го дефиниционото множество итн.

8 Одреди ги решенијата на дробно рационалната равенка $\frac{x-n}{x-m}+\frac{x-m}{x-n}=\frac{10}{3}$, ако параметрите $m,n\in\mathbb{R}$.

Согледај го решението:

- Равенката е параметарска, па за $x\neq m$ и $x\neq n$, НЗС$=3(x-m)(x-n)$.

- По ослободувањето од именителите имаме: $3(x-n)^2+3(x-m)^2=10(x-m)(x-n)$.
- Општиот вид на равенката е $4x^2-4(m+n)x-3m^2-3n^2+10mn=0$.
- Дискриминантата на равенката е $D=\left(4(m+n)\right)^2-4\cdot4\left(-3m^2-3n^2+10mn\right)$, т.е.

$$D=\left(8(m-n)\right)^2.$$

- Корените на равенката се: $x_{1/2}=\dfrac{4(m+n)\pm8(m-n)}{8}$, т.е. $x_1=\dfrac{3m-n}{2}$ или $x_2=\dfrac{3n-m}{2}$.

Корисно е да знаеш!

Равенката $\dfrac{x-n}{x-m}+\dfrac{x-m}{x-n}=\dfrac{10}{3}\ (x\neq m, x\neq n)$ може да ја запишуваме во облик $\dfrac{x-n}{x-m}+\dfrac{1}{\dfrac{x-n}{x-m}}=\dfrac{10}{3}$, па со воведување на смената $\dfrac{x-n}{x-m}=y$ таа се трансформира во квадратната равенка $y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{3}$, чии решенија се $y_1=3$ или $y_2=\dfrac{1}{3}$.

Потоа, од $\dfrac{x-n}{x-m}=3$ следува $x_1=\dfrac{3m-n}{2}$, а од $\dfrac{x-n}{x-m}=\dfrac{1}{3}$ следува $x_2=\dfrac{3n-m}{2}$.

Потсети се!

- Запиши број што е:
  а) четвртина од бројот x;
  б) три пати поголем од бројот x;
  в) три пати помал од бројот x.
- Состави текст според којшто може да се состави равенката $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{10}{3}$.

ℬ **9** Разликата од реципрочните вредности на два цели последователни броеви е $\dfrac{1}{30}$. Кои се тие броеви?

Согледај го решението:

- Нека x и $x+1$ се цели последователни броеви. Нивни реципрочни вредности се броевите $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x+1}$.

- Според условот на задачата ја составуваме равенката $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{30}$, $(x\neq0, x\neq-1)$.

По сведувањето ја добиваме квадратната равенка од општ вид $x^2+x-30=0$, чии решенија се $x_1=5$ или $x_2=-6$.

- Бараните броеви се 5 и 6 или -6 и -5.

10 Колку години има сега Јован, ако тој после три години ќе има толу години, колку што е квадратот на бројот на годините што ги имал пред три години?

11 Во кој многуаголник можат да се повлечат вкупно 170 дијагонали?

Задачи:

① Упрости го изразот $\frac{x+1}{x^2+x-2}-\frac{x}{x^2-1}$.

② Реши ја равенката и дискутирај го решението: $\frac{x}{x-a}+\frac{2a}{x+a}=\frac{8a^2}{x^2-a^2}, (x\neq\pm a, a\in\mathbb{R})$.

③ Двајца работници можат да завршат една работа за $6\frac{2}{3}$ часа. Колку време му е потребно на првиот работник сам да ја заврши работата, ако за тоа му се потребни три часа помалку отколку на вториот работник кога би работел сам?

7 БИКВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Провери кои од броевите 0, -4, 4, 2, -2 се решенија на равенката

  $x^4-16x^2=0.$
- Од кој степен е дадената равенка и колку решенија има таа?

А 1 Дадените равенки се од четврти степен. Одреди ги решенијата на секоја од нив.

а) $x^4=0$;

б) $x^4 - 16 = 0$;

в) $x^4 - 9x^2 = 0$;

г) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Согледај го решението:

- а) Од $x\cdot x\cdot x\cdot x=0$ следува $x_1=x_2=x_3=x_4=0$, па равенката има четирикратен корен еднаков на нула.
- б) Од равенката следува $(x^2-4)(x^2+4)=0$, т.е. $(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)=0$, па $x_{1/2}=\pm2$, $x_{3/4}=\pm2i$. Значи, равенката има четири корени: два реални различни и два имагинарни различни корени.
- в) $x^2(x^2-9)=0$, т.е. $x\cdot x(x-3)(x+3)=0$, па $x_{1/2}=0$, $x_{3/4}=\pm3$. Значи, равенката има двократен корен еднаков на нула и два реални различни корени.
- г) Равенката $x^4-7x^2+12=0$ можеме да ја запишеме во облик $(x^2)^2-7x^2+12=0$.
- Ако ја воведеме смената $x^2=y$, ја добиваме квадратната равенка $y^2-7y+12=0$, чии решенија се $y_1=3$ или $y_2=4$.
- Се враќаме на смената, па имаме: $x^2=y_1$ или $x^2=y_2$, т.е. $x^2=3$ или $x^2=4$.
- Од $x^2=3$ следува $x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$, а од $x^2=4$ следува $x_{3/4}=\pm2$.
- Според тоа, равенката има четири корени, $x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$; $x_{3/4}=\pm2$.

Запомни!

Равенката од видот $ax^4+bx^2+c=0, (a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq0)$ се вика ***биквадратна равенка***.

2 Реши ја биквадратната равенка $ax^4+bx^2+c=0, \quad (a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0)$.

Согледај го решението:

- Дадената равенка ја запишуваме во облик $a\left(x^2\right)^2+bx^2+c=0$ и воведуваме нова променлива y, т.е. $x^2=y$.
- Добиваме квадратна равенка $ay^2+by+c=0$, чии решенија се y_1 или y_2, добиени според формулата за решавање на квадратна равенка.

Со враќање во смената, добиваме $x^2=y_1$, $x^2=y_2$, т.е. $x_{1/2}=\pm\sqrt{y_1}$ или $x_{3/4}=\pm\sqrt{y_2}$.

3 Реши ја равенката $x^4-13x^2+36=0$.

4 Скрати ја дропката: а) $\frac{x^2-4}{x^4-13x^2+36}$; б) $\frac{9b^4-40b^2+16}{4b^4-17b^2+4}$.

Задачи:

① Реши ги равенките: а) $5x^4=0$; б) $3x^4-27=0$; в) $x^4+4x^2=0$.

② Одреди ги решенијата на биквадратните равенки:

а) $\left(4x^2+5\right)\left(x^2-5\right)=6x^2$; б) $\frac{2x^2+3}{5}-\frac{5x^2-16}{10}=\frac{30-2x^2}{x^2-6}$.

③ Состави биквадратна равенка чии решенија се $x_{1/2}=\pm 3$, $x_{3/4}=\pm\sqrt{2}$.

④ Плоштината на еден правоаголник е $60cm^2$, а неговата дијагонала е $13cm$. Одреди ги страните на правоаголникот.

8 ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- За кој израз велиме дека е ирационален?
- За кои реални броеви изразите:

  а) $\sqrt{x+5}$; б) $\sqrt[3]{3-2x}$, - имаат смисла?

  Определи го дефиниционото множество

- на изразот $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-4}$.

- Дефиниционо множество на ирационален израз е множеството од реалните броеви во коешто ирационалните изрази се реални броеви.

А 1 Кои од дадените равенки се ирационални равенки:

а) $x+\sqrt{2}=5$; б) $x^2+\sqrt{3}=\sqrt{5}$;

в) $x-\sqrt{x}=2$?

- Равенката во којашто барем еден нејзин член што содржи променлива е ирационален израз се вика ***ирационална равенка***.
- Решавањето на ирационалните равенки се одвива во две фази:

1) Се одредува дефиниционото множество на равенката.
2) Ирационалните членови на равенката што ја содржат непозната се трансформираат во рационални изрази.

2 Одреди го дефиниционото множество на секоја од равенките:

а) $\sqrt{x-1}=3$; б) $\sqrt[3]{x+5}=3$; в) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$;

г) $\dfrac{3}{\sqrt{x-3}}-\sqrt{5-x}=0$; д) $\sqrt{x-4}+\sqrt{2-x}+\sqrt{10-x}=0$.

Согледај го решението:

- а) Корен со парен коренов показател е реален број само ако поткореновиот израз е ненегативен реален број. Според тоа, $x-1\geq 0$, т.е. $D=[1,\infty)$.
- б) Корен со непарен коренов показател е дефиниран за секој реален број, па $D=\mathbb{R}$.
- в) $\begin{cases} x\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\geq o \\ x\geq -1 \end{cases}$; $D=[0,\infty)$, г) $\begin{cases} x-3>0 \\ 5-x\geq 0 \end{cases}$; $D=(3,5]$, д) $\begin{cases} x-4\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \\ 10-x\geq 0 \end{cases}$; $D=\varnothing$.

3 Реши ги ирационалните равенки:

а) $\sqrt{x-1}+7=x$; б) $\sqrt{2x^2+7}=x^2-4$; в) $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$.

Согледај го решението:

- а) Го определуваме дефиниционото множество. Од $x-1\geq 0$ следува $D_1=[1,\infty)$.
- Ако во равенката има еден ирационален член што ја содржи непознатата x, тој член го оставаме на едната страна, а другите членови ги разместуваме на другата страна на равенството, па имаме $\sqrt{x-1}=x-7$.
- Познато е дека $3^2=9$ и $(-3)^2=9$. Значи, иако $3\neq -3$, сепак $3^2=(-3)^2$. Од тие причини следува дека операцијата степенување со парен експонент на двете страни на равенката не е еквивалентна трансформација.

  Според тоа, равенките $\sqrt{x-1}=x-7$ и $\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-7)^2$ се еквивалентни само ако

  $$x-7\geq 0,\ \text{т.е.}\ x\geq 7,\ \text{па}\ D_2=[7,\infty).$$

- Равенките се еквивалентни само ако $x\in D_1\cap D_2$, т.е. $D=[1,\infty)\cap[7,\infty)=[7,\infty)$.

  По извршеното степенување ја добиваме равенката $x-1=x^2-14x+49$, т.е.

  $x^2-15x+50=0$, чии корени се $x_1=10$ или $x_2=5$.

- Решение на дадената равенка е $x=10$. Бидејќи $x_2=5\notin D$, значи тоа не е решение на дадената равенка, а во тоа лесно ќе се увериме.

  За $x=5$, добиваме неточно бројно равенство, односно $\sqrt{5-1}-7=5$, т.е. $-5=5$.

- б) Од $2x^2+7\geq 0$ следува $D_1=\mathbb{R}$.
- По степенувањето новата равенка ќе биде еквивалентна со дадената ако $x^2-4\geq 0$, т.е. $(x-2)(x+2)\geq 0$, па оттука имаме $D_2=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$.
- Значи, $D=D_1\cap D_2=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$.
- По степенувањето добиваме: $2x^2+7=\left(x^2-4\right)^2$ или $2x^2+7=x^4-8x^2+16$, т.е.

$x^4-10x^2+9=0$. Решенијата на биквадратната равенка се $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=1$ или $x_4=-1$.

Од нив само $x_1,x_2\in D$, па корените на дадената равенка се $x=3$ или $x=-3$.

Во точноста на одредените решенија увери се со проверка. (Проверката се врши во дадената равенка).

в) Дефиниционото множество на дадената равенка е $\begin{cases}2x+8\geq 0\\ x+5\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -4\\ x\geq -5\end{cases}, D_1=[-4,\infty)$.

- Бидејќи во равенката има два ирационални членови што ја содржат непозната x, нив ги разместуваме на различни страни на равенството, па имаме:

$\sqrt{2x+8}=7-\sqrt{x+5}$ или

$$\left(\sqrt{2x+8}\right)^2=\left(7-\sqrt{x+5}\right)^2$$

$$2x+8=49-14\sqrt{x+5}+x+5$$

$$14\sqrt{x+5}=46-x$$

$$\left(14\sqrt{x+5}\right)^2=(46-x)^2$$

$$196(x+5)=2116-92x+x^2$$

$$x^2-288x+1136=0.$$

- Решенијата на равенката се $x_1=4$ или $x_2=280$. Која вредност е решение на дадената ирационална равенка, одредуваме со проверка.

За x = 4, равенството $\sqrt{2\cdot 4+8}+\sqrt{4+5}=7$ е точно, т.е. $3+4=7$. За $x=280$, равенството $\sqrt{2\cdot 280+8}+\sqrt{280+5}=7$ е невистинито. Според тоа, решение на дадената ирационална равенка е $x=4$.

Запомни!

Пред секое квадрирање, при решавањето на ирационалните равенки треба да се одреди множеството во кое се добиваат еквивалентни равенки.

Одредувањето на дефиниционото множество на некои ирационални равенки не е едноставно, па во таков случај равенката ја решаваме без одредување на дефиниционото множество. Кои од добиените вредности на променливата ќе бидат решенија на равенката, утврдуваме со проверка.

4 Реши ја равенката $\sqrt{2x-15}-\sqrt{x+16}=-1$, без да одредуваш дефиниционо множество.

Согледај го решението:

- Ги разместуваме ирационалните членови: $\sqrt{2x-15}=\sqrt{x+16}-1$.
- Степенуваме: $\left(\sqrt{2x-15}\right)^2=\left(\sqrt{x+16}-1\right)^2$; $2x-15=x+16-2\sqrt{x+16}+1$.
- Повторно ги разместуваме ирационалните членови: $2\sqrt{x+16}=32-x$.
- Повторно степенуваме: $\left(2\sqrt{x+16}\right)^2=(32-x)^2$, . . ., $x^2-68x+900=0$, $x_1=48$ или $x_2=20$.
- Со проверка утврдуваме дека $x=20$ е решение на дадената равенка.

Треба да знаеш!

1) Ирационалната равенка $\sqrt{P}=Q,\left[P=P(x),Q=Q(x)\right]$ е еквивалентна со системот равенки:

$$\begin{cases}P=Q^2\\Q\geq 0\\P\geq 0.\end{cases}$$

2) За ирационалната равенка $\sqrt{P(x)}\pm\sqrt{Q(x)}=R(x)$, прво се одредува дефиниционото множество од системот $\begin{cases}P(x)\geq 0\\Q(x)\geq 0\end{cases}$, а по степенувањето, откако равенката ќе ја доведеме во обликот $\sqrt{F(x)}=f(x)$, повторно ја применуваме постапката 1).

5 Реши ја ирационалната равенка $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=\sqrt{x+24}$.

Б Некои ирационални равенки можат да се решаваат со смена.

6 Реши ја равенката $x^2-2x+\sqrt{x^2-2x+6}=6$.
Согледај го решението:

- Со замена $x^2-2x=y$ добиваме:

$$y+\sqrt{y+6}=6$$
$$\sqrt{y+6}=6-y$$
$$y+6=36-12y+y^2$$
$$y^2-13y+30=0,$$
$$y_1=10,\ y_2=3.$$

Дефиниционата област за променливата y ќе ја одредиме од системот

$$\begin{cases}y+6\geq 0\\6-y\geq 0,\ \ y\in[-6,6].\end{cases}$$

- Воочуваш, $y=10$ не е решение на равенката.

За $y=3$ имаме: $x^2-2x=3$, $x^2-2x-3=0$, т.е. $x_1=3$ или $x_2=-1$.

- Последната равенка нема ограничувања, па решенијата на дадената равенка се $x=3$ или $x=-1$.

7 Реши ја ирационалната равенка $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\dfrac{3}{\sqrt{x+3}}$.

Задачи:

① Реши ги равенките: а) $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=2$; б) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}=-2$.

② Реши ги ирационалните равенки: а) $\sqrt{x^2-5x+10}=8-2x$; б) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18}=5$.

③ Реши ги равенките: а) $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$; б) $x^2+\sqrt{x^2-3x+5}=7+3x$;

в) $\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+3=0$.

9 СИСТЕМ ОД ЕДНА ЛИНЕАРНА И ЕДНА КВАДРАТНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

- Според променливите x и y, одреди го степенот на секој од полиномите:
  $P(x,y) = 2x - 3y + 1$;
  $Q(x,y) = x^2 - 2y^2 + 3x - 5$.
- Реши го системот линеарни равенки
  $$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$
  со метод на замена.
- Кој од подредените парови
  $(x, y) \in \{(1,0), (1,1), (2,0)\}$ е решение
  на системот $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 2\,? \end{cases}$

A **1** Воочи, системот $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

е составен од една линеарна равенка со две непознати и една квадратна равенка со две непознати од исто дефинициона множество.

Реши го дадениот систем.

Согледај го решението:

- Од линеарната равенка ја изразуваме едната непознатa, на пример:
  $$x = 2 - y.$$
- Заменуваме во квадратната равенка и добиваме:
  $(2-y)^2 + y^2 = 2$, т.е. $y^2 - 2y + 1 = 0$.
  Решение на квадратната равенка е $y = 1$, па $x = 2 - 1 = 1$. Решение на системот е подредениот пар $(x, y) = (1, 1)$.

Треба да знаеш!

- Системот $\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$, каде што сите коефициенти се реални броеви и барем еден од коефициентите a, b или c е различен од нула е општ вид на систем од една линеарна и една квадратна равенка со две непознати.
- Ваков систем се решава со методот на замена, а неговото решение е множество од подредени парови.

2 Реши го системот $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$

Согледај го решението:

- Од линеарната равенка имаме $y = 4 - 2x$, па со замена во квадратна равенка добиваме:
  $$x^2 + x(4-2x) + (4-2x)^2 = 7, \text{ т.е. } x^2 - 4x + 3 = 0.$$
- Од $x_1 = 1$ или $x_2 = 3$, следува $y_1 = 2$ и $y_2 = -2$. Според тоа, решение на системот е множеството $\{(1.2), (3, -2)\}$.

3 Реши ги системите равенки: а) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x^2 + x + y^2 = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x \cdot y = 3. \end{cases}$

4 Два многуаголника имаат вкупно 20 страни и 95 дијагонали. Кои се тие многуаголници?

Задачи:

① Реши ги системите: а) $\begin{cases} 2x^2+2y^2+3x-2=0 \\ x-2y=-2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{20} \\ x-y=-1. \end{cases}$

② Реши го системот $\begin{cases} x+y=5a \\ x\cdot y=6a^2. \end{cases}$

③ Збирот од една дропка и нејзината реципрочна вредност е $2\frac{9}{10}$, а збирот од броителот и именителот на дропката е 7. Одреди ја таа дропка.

Тематска контролна вежба

① Одреди ги корените на секоја од квадратните равенки:

а) $2x^2+7=0$; б) $3x^2-5x=0$; в) $x^2-x-6=0$.

② Реши ги квадратните равенки: а) $\frac{x^2+1}{3}+\frac{2x^2+x}{5}=1+\frac{x}{5}$; б) $\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x-2}=1$.

③ Со испитување на дискриминантата, одреди ја природата на решенијата на равенките:

а) $x^2-8x+15=0$; б) $4x^2-12x+7=0$; в) $x^2-2x+9=0$.

④ Состави квадратна равенка со реални коефициенти ако се дадени нејзините корени:

а) $x_1=\frac{5}{8}$, $x_2=-\frac{3}{4}$; б) $x_{1/2}=-6\pm 5i$.

⑤ Во равенката $x^2+2(m-5)x+m^2-6=0$ одреди го параметарот m, така што за нејзините решенија да важи равенството $x_1{}^2+x_2{}^2=10$.

⑥ Скрати ја дропката $\frac{10x^2-7x+1}{6x^2+x-2}$.

⑦ Реши ја равенката $x^4-(2a+b)x^2+2ab=0$.

⑧ Реши ја равенката $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$.

⑨ Одреди ги решенијата на системот $\begin{cases} \frac{10x+y}{xy}=3 \\ y-x=2. \end{cases}$

ТЕМА 4

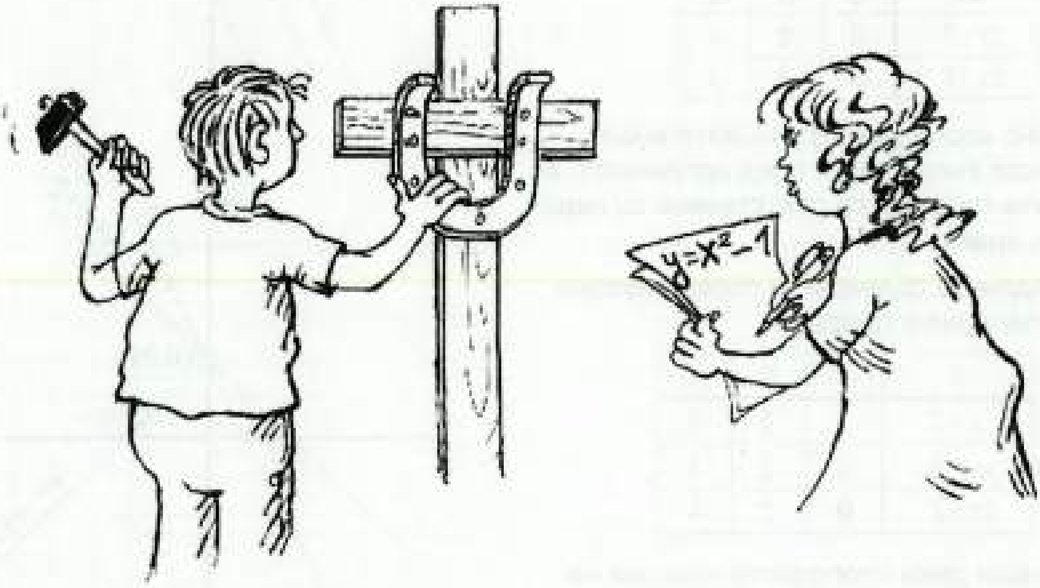
КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА. КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА

Полесно е математиката да се научи,
отколку да се работи без неа.

Х. Боас

Во оваа тема ќе учиш за:

- квадратна функција;
- цртање на график на квадратна функција;
- нула на квадратна функција;
- екстремни вредности на квадратна функција;
- монотоност на квадратна функција;
- знак на квадратна функција;
- квадратни неравенки;
- систем од квадратни неравенки.



I ПОИМ ЗА КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Која од функциите $y = 2x - 5$, $y = \frac{1}{x}$ или $y = x^2 - x$ е линеарна?
- Определи $f(0)$, $f(1)$ и $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ ако $f(x) = 3x - 4$.
- На кои начини може да се претстави една функција?
- Одреди ја нулата на функцијата
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}.$$
- Одреди ја функцијата $f(x)$, ако $f(x-1) = 2x - 3$.

■ Нека $x - 1 = t$. Тогаш $x = t + 1$,

$f(t) = 2(t-1) - 3 = 2t - 1$, па $f(x) = 2x - 1$.

---

1 Во ист координатен систем нацртај ги графиците на линеарните функции:

а) $y = 2x$, $y = 2x + 2$, $y = 2x - 3$;

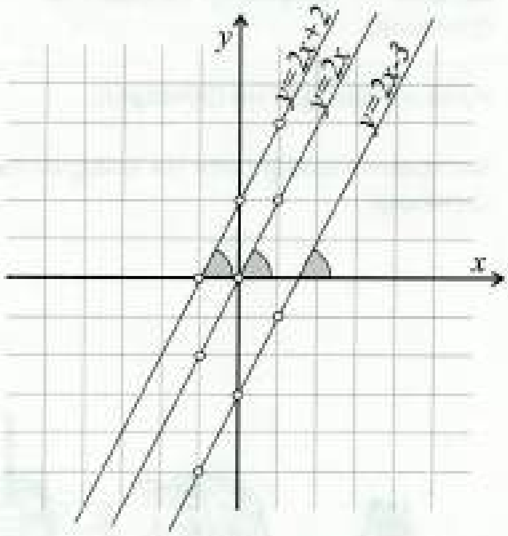
б) $y = x + 2$, $y = -x + 2$, $y = 2x + 2$.

Што воочуваш?

Согледај го решението:

■ а) Дадените функции ги претставуваме табеларно и графички.

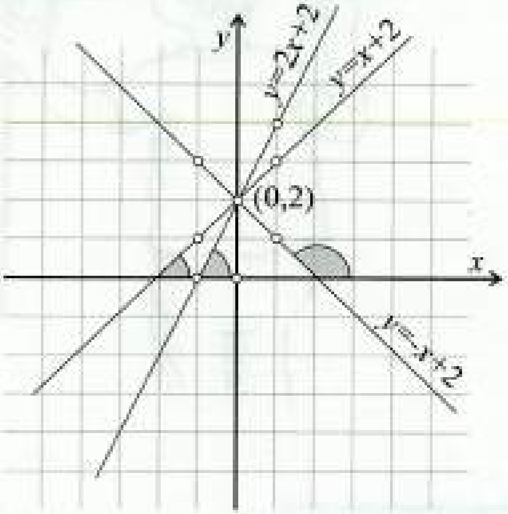
x	-1	0	1
$2x$	-2	0	2
$2x+2$	0	2	4
$2x-3$	-5	-3	-1



■ Сигурно воочи дека функциите имаат еднаков коефициент пред аргументот, а нивните графици се претставени со паралелни прави.

б) Дадените функции ги претставуваме табеларно и графички.

x	-1	0	1
$x+2$	1	2	3
$-x+2$	3	2	1
$2x+2$	0	2	4



■ Воочуваш дека слободните членови на дадени функции се еднакви, а нивните графици се прави што минуваат низ точката $A(0,2)$.

Воочи!

Еквивалентни се исказите:

- коефициентот на правецот на функцијата $f(x)$ е позитивен реален број;

- графикот на функцијата $f(x)$ зафаќа остар агол со позитивната насока на x - оската;

- функцијата монотоно расте, бидејќи за секои $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_2 > x_1$ следува $f(x_2) > f(x_1)$.

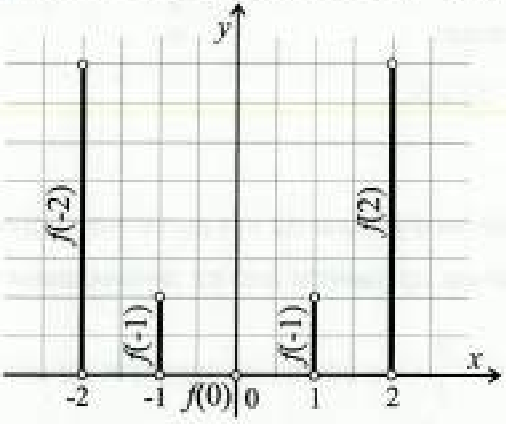
Треба да знаеш!

- Пресликувањето при кое $x \rightarrow f(x) = y = ax + b$, за $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$ се вика линеарна функција, со дефинициона област $D_f = \mathbb{R}$ и множество на вредности $V_f = \mathbb{R}$.
- Графикот на линеарната функција е множеството $G_f = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = f(x) = ax + b; a, b \in \mathbb{R}\}$.
- Множеството G_f претставено во координатната рамнина е права.

Потсети се!

- Одреди $f(0), f(1), f(3)$ на функцијата $f(x) = x^2 - 2x$.
- Нека $f(x) = x^2 + 1$. Претстави ја графички вредноста $f(1)$.

- Функцијата претставена табеларно е:
- Множеството вредности е $V_f = \{1, 0, 4,\}$.

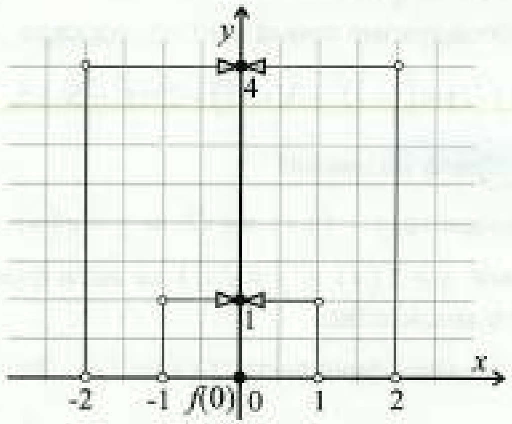


- Графички приказ на ординатите на вредностите на функцијата

Б **2** Претстави ја табеларно и графички функцијата $f(x) = x^2$, ако $D_f = \{-2, -1, 0, +1, +2\}$. Определи го множеството вредности на функцијата.

Согледај го решението:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4



- Графички приказ на функцијата со точки на ординатната оска

Треба да знаеш!

- Пресликувањето f при кое $x \to f(x)=ax^2+bx+c$, за $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a\neq 0$ се вика ***квадратна функција***, а нејзината дефинициона област е $D_f=\mathbb{R}$.

  Понекогаш наместо $f(x)=ax^2+bx+c$ пишуваме $y=ax^2+bx+c$.
- Графикот на квадратната функција е множеството $G_f=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}, y=f(x)=ax^2+bx+c; a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0\}$, а множеството G_f претставено во координатна рамнина е крива која се вика ***парабола***.

Потсети се!

- Одреди ја линеарната функција $f(x)=ax+b$, ако $f(0)=2$ и $f(2)=0$.
- Одреди го реалниот број c во квадратната функција $f(x)=2x^2-3x+c$, ако $f(0)=5$.

3 Дадена е функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$.

Одреди ги коефициентите a, b и c ако $f(0)=0$, $f(3)=45$, $f(2)=20$.

Согледај го решението:

- Според условите на задачата го формираме системот $\begin{cases} c=0 \\ 9a+3b+0=45 \\ 4a+2b+0=20, \end{cases}$

чие решение е: $a=5$, $b=0$ и $c=0$, па дадената функција е $f(x)=5x^2$.

4 Одреди ја квадратната функција $f(x)=x^2+bx+c$, така што нејзиниот график да ги содржи точките $A(2,0)$ и $B(-3,0)$.

5 Ако $f(x+1)=x^2-3x+2$, одреди ја функцијата $f(x)$.

Согледај го решението:

- Воведуваме смена $x+1=t$, од каде $x=t-1$ и добиваме:

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)+2=t^2-5t+6, \text{ па } f(x)=x^2-5x+6.$$

Треба да знаеш!

Функциите $y=f(x), x\in D_f$ и $y=g(x), x\in D_g$ се различни функции од ист аргумент, а функциите $y=f(x)$ и $y=f(t)$ се исти функции од различни аргументи ако се дефинирани во исто множество.

На пример, функциите $f(x)=2x^2-3x+1$ и $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x$ се различни функции од ист аргумент, додека функциите $f(x)=\frac{1}{3}x^2-4x+5$ и $f(t)=\frac{1}{3}t^2-4t+5$ се исти функции од различни аргументи ако x и t се од исто дефиниционо множество.

Задачи:

① Која од дадените функции е квадратна:

а) $f(x)=5+2x-x^2$; б) $f(x)=x(x-1)$; в) $f(x)=x-x^3$; г) $f(x)=3x^2$.

② Одреди го множеството вредности на функцијата $f(x)=x^2-2x$, ако:

а) $D_f=\{-2,-1,0,+1,+2\}\subset\mathbb{Z}$; б) $D_f=[-2,2]\subset\mathbb{R}$.

③ Одреди ја квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$, ако

$f(0)=6$, $f(-1)=12$, $f(-2)=0$.

2

ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $f(x)=ax^2$ И $f(x)=ax^2+c$

Потсети се!

- Кои од точките $A(-1,1), B(0,0), C(1,2)$ припаѓаат на графикот на функцијата $f(x)=x^2$?
- Графикот на функцијата $f(x)=x^2$ е парабола.
- Дали графикот на функцијата $f(x)=3x^2$ е парабола?

- а) Функциите ги претставуваме табеларно и имаме:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$2x^2$	8	2	0	2	8
$½x^2$	2	½	0	½	2

- Според податоците од табелата, функциите ги претставуваме графички, црт. 1.
- Воочи ги координатите на точките M_1, M_2 и M_3 и спореди ги должините на отсечките AM_1, AM_2 и AM_3.

Сигурно воочи дека за поголеми вредности на коефициентот a се добиваат и поголеми ординати на споменатите точки и обратно.

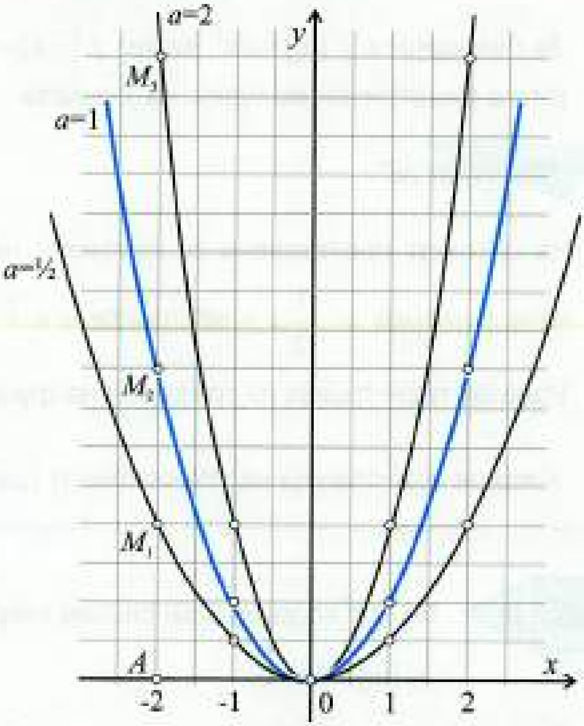
𝒜 **1** Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите:

а) $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$;

б) $f(x)=2x^2$, $f(x)=-2x^2$.

Што забележуваш?

Согледај го решението:



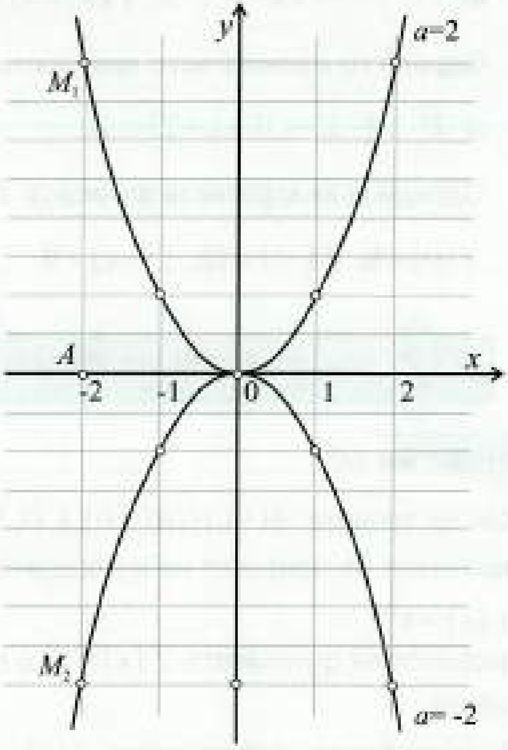
црт. 1

Ако $a > 1$, тогаш со зголемувањето на вредноста на a се зголемуваат и ординатите на точките за иста вредност на аргументот x, т.е. графикот на функцијата се доближува до y оската.

- б) Претстави ја функцијата табеларно

x	-2	-1	0	1	2
$2x^2$	8	2	0	2	8
$-2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

- Функцијата претстави ја графички, црт. 2.
- Воочуваш дека ординатите на токите M_1 и M_2 се спротивни броеви.



црт. 2

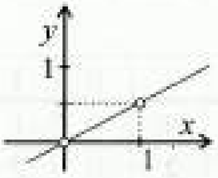
Запомни!

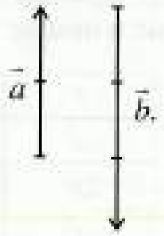
Графикот на функцијата $y = ax^2, a \neq 0$ е крива која се вика парабола, чие теме е во координатниот почеток.
Ако $a > 0$, тогаш параболата е со отворот кон позитивната насока на y-оската, а ако $a < 0$, тогаш параболата е со отворот кон негативната насока на y-оската.

- За функцијата $f(x) = ax^2$ важи: $f(-x) = f(x)$, а тоа значи дека графикот на функцијата е симетричен во однос на y-оската.

Потсети се!

- На цртежот претставени се графикот на квадратната функција $y = \frac{1}{2}x$ и векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.





- Изврши транслација на графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}x$ за вектор $\vec{a}\,|\vec{a}| = 2$.
- Изврши транслација на прикажаниот график за вектор $\vec{b}\,|\vec{b}| = 3$.

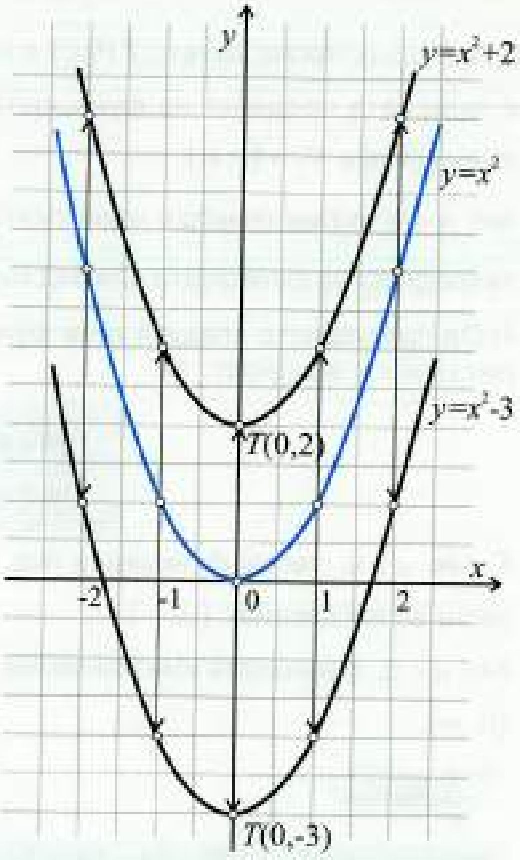
Б 2 Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите $f_1(x) = x^2 + 2$ и $f_2(x) = x^2 - 3$.

Согледај го решението:

- Функцијата $f(x)=x^2$ ја претставуваме табеларно и графички (црт. 3).

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4

- Воочуваш дека графиците на функциите $f_1(x)=x^2+2=f(x)+2$ и $f_2(x)=x^2-3=f(x)-3$ ги добиваш со транслација на графикот на функцијата $f(x)=x^2$ за две мерни единици во позитивната насока, односно за три мерни единици во негативната насока по y-оската.



црт. 3

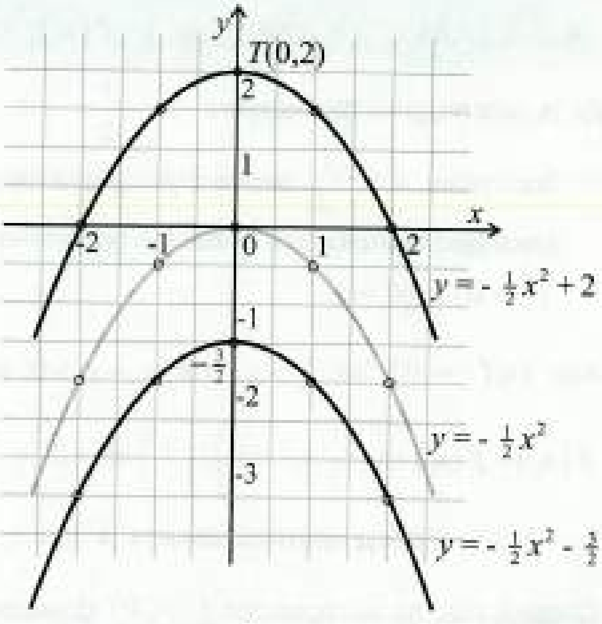
Запомни!

Графикот на функцијата $f(x)=ax^2+c$ е парабола со теме $T(0,c)$, а се добива со транслација на параболата $y=ax^2$ за $|c|$ единици во позитивната насока по y-оската ако $c>0$, а во негативната насока по y-оската ако $c<0$.

3 Нацртај ги графиците на функциите $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ и $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}$ во ист координатен систем.

Согледај го решението:

x	-2	-1	0	1	2
$½x^2$	-2	-½	0	½	2



црт. 4

- Воочуваш дека графикот на функцијата $f(x)=ax^2+c$ е парабола што е складна со параболата $f(x)=ax^2$, чија оска се совпаѓа со y-оската.
- Да согледаме некои својства на функцијата $f(x)=ax^2+c$.

1) Функцијата е дефинирана за сите реални броеви, т.е. $D_f=\mathbb{R}$.

2) Темето на параболата е во точката $T(0,c)$.

3) Ако $a > 0$, тогаш темето $T(0, c)$ е најниската точка од графикот. Значи за $x = 0$, $f(x) = c$ е најмалата вредност на функцијата. Оттука следува дека множеството вредности на функцијата е $V_f = [c, \infty)$.

Ако $a < 0$, тогаш темето е највисоката точка од графикот. Значи, $x = 0$, $f(x) = c$ е најголемата вредност на функцијата. Според тоа, множеството вредности на функцијата е $V_f = (-\infty, c]$.

4) Од претходното следува дека функцијата во темето има најмала или најголема (екстремна) вредност, т.е.

ако $a > 0$, $y_{\min} = c$ за $x = 0$,

ако $a < 0$, $y_{\max} = c$ за $x = 0$.

5) Ако $a > 0$, тогаш функцијата има минимум, па во интервалот $(-\infty, 0)$ монотоно опаѓа, а расте во интервалот $(0, \infty)$.

Ако $a < 0$, функцијата има максимум, па во интервалот $(-\infty, 0)$ расте, а опаѓа во интервалот $(0, \infty)$.

Запомни!

Функцијата $y = f(x), x \in (a, b), a < b$ монотоно расте во интервалот (a, b), ако за кој било $x_1, x_2 \in (a, b), x_2 > x_1$ важи $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Функцијата $y = f(x), x \in (a, b), a < b$ монотоно опаѓа во интервалот (a, b), ако за кој било $x_1, x_2 \in (a, b), x_2 > x_1$ важи $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

Да ја разгледаме функцијата $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$, чиј график е претставен на црт. 4.

- Воочуваш, $a = -\frac{1}{2}$, значи функцијата има максимум, т.е. $y_{\max} = 2$ за $x = 0$. Оттука следува дека дефиниционата област е поделена на две подмножества, т.е. интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

Ако $x \in (-\infty, 0)$, за $x_2 > x_1$, т.е. $x_2 - x_1 > 0$, имаме:

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(-\frac{1}{2}x_2^2 + 2\right) - \left(-\frac{1}{2}x_1^2 + 2\right) = -\frac{1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) = -\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0,$$ бидејќи

$x_2 - x_1 > 0$ според претпоставката, а $x_2 + x_1 < 0$ како збир на два негативни броја.

Според тоа, во интервалот $(-\infty, 0)$ функцијата $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ монотоно расте.

Ако $x\in(0,\infty)$, за $x_2>x_1$, т.е. $x_2-x_1>0$, имаме:

$f(x_2)-f(x_1)=\left(-\frac{1}{2}x_2^{\,2}+2\right)-\left(-\frac{1}{2}x_1^{\,2}+2\right)=-\frac{1}{2}\left(x_2^{\,2}-x_1^{\,2}\right)=-\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1)<0$, бидејќи

$x_2-x_1>0$ по услов, а $x_2+x_1>0$ како збир од два позитивни броја.

Според тоа, во интервалот $(0,\infty)$ функцијата монотоно опаѓа.

Вредноста на аргументот за којашто функцијата има екстремна вредност, го разбива дефиниционото множество на две подмножества (интервали), така што во едниот интервал функцијата расте, а во другиот опаѓа, или обратно.

Запомни! За функцијата $y=ax^2+c, a\neq 0$ имаме:

Ако $a>0$, $y_{min}=c$ за $x=0$. За $x\in(-\infty,0)$ функцијата монотоно опаѓа, а за $x\in(0,\infty)$ функцијата монотоно расте.

Ако $a<0$, $y_{max}=c$ за $x=0$. За $x\in(-\infty,0)$ функцијата монотоно расте, а за $x\in(0,\infty)$ функцијата монотоно опаѓа.

4 Запиши ги својствата на функцијата $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}$..

Согледај го решението:

Графикот е прикажан на црт. 4.

1. $D_f=\mathbb{R}$.

2. $T\left(0,-\frac{3}{2}\right)$.

3. $a=-\frac{1}{2}<0$, значи функцијата има максимум, $y_{max}=-\frac{3}{2}$ за $x=0$.

4. За $x\in(-\infty,0)$ функцијата монотоно расте, а за $x\in(0,\infty)$ функцијата монотоно опаѓа.

5. Графикот на функцијата е симетричен во однос на ординатната оска.

5 Дадени се функциите $y=2x^2-1$ и $y=2x^2+2$.

а) Нацртај ги графиците на дадените функции со помош на графикот на функцијата $y=2x^2$.

б) Нацртај ги графиците на функциите со помош на табеларно претставување.

в) Испитај ги својствата на функциите.

***Задачи*:**

① Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите:

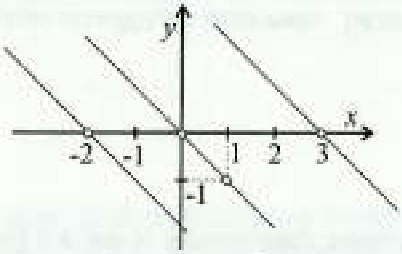
а) $f(x)=x^2$, $f(x)=x^2-1$, $f(x)=x^2+3$;

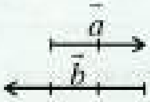
б) $f(x)=-x^2$, $f(x)=-x^2+2$, $f(x)=-x^2-4$, а потоа одреди го темето, множеството вредности и монотоноста на секоја функција.

3 ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $y=a(x-\alpha)^2$

Потсети се!

- На цртежот се дадени график на функцијата $y=-x$ и векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, кои имаат ист правец со x-оската.





- Со транслација на правата $y=-x$ за векторот $\overrightarrow{-a}$, $|\vec{a}|=2$, добиен е графикот на правата $y=-x-2$, т.е. $y=-(x+2)$.
- Со транслација на правата $y=-x$ за векторот $-\vec{b}$, $|\vec{b}|=3$, добиен е графикот на правата $y=-x+3$, т.е. $y=-(x-3)$.
- Што воочуваш?

A **1** Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите:

$$f(x)=x^2,\ f(x)=(x+2)^2,\ f(x)=(x-3)^2.$$

- Што воочуваш од цртежот?

Согледај го решението:

- Дадените функции ги претставуваме табеларно и графички.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4

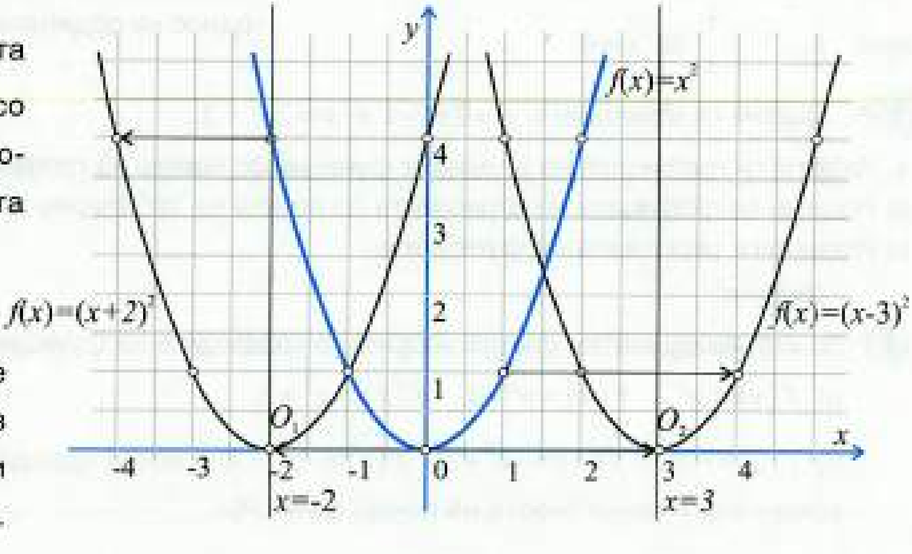
x	-4	-3	-2	-1	0
$(x+2)^2$	4	1	0	1	4

x	1	2	3	4	5
$(x-3)^2$	4	1	0	1	4

- Воочи, графикот на функцијата $y=(x+2)^2$ е добиен со транслација на графикот на функцијата $y=x^2$ по x-оската за 2 единици налево.

- Графикот на функцијата $y=(x-3)^2$ е добиен со транслација на параболата $y=x^2$ по x-оската надесно за 3 единици.

- Оска на симетрија е права што минува низ темето на параболата и е паралелна со y-оската.



Запомни!

Графикот на функцијата $f(x)=a(x-\alpha)^2$ е парабола со теме во точката $T(\alpha,0)$, добиен со транслација на параболата $f(x)=ax^2$ по x-оската за $|\alpha|$ единици лево ако $\alpha>0$, а десно ако $\alpha<0$.

Оска на симетрија на параболата $f(x)=a(x-\alpha)^2$ е правата $x=\alpha$, а таа минува низ темето на параболата и е паралелна со ординатната оска.

2 Нацртај ги графиците на функциите $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ и $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$.

3 Нацртај го графикот на функцијата $y=-2x^2+4x-2$ и испитај ги својствата на таа функција.

Согледај го решението:

- Дадената функција ја трансформираме на следниот начин:

$y=-2x^2+4x-2=-2(x^2-2x+1)=-2(x-1)^2$. Значи, функцијата е од видот $y=a(x-\alpha)^2$, каде што $a=-2$ и $\alpha=1$.

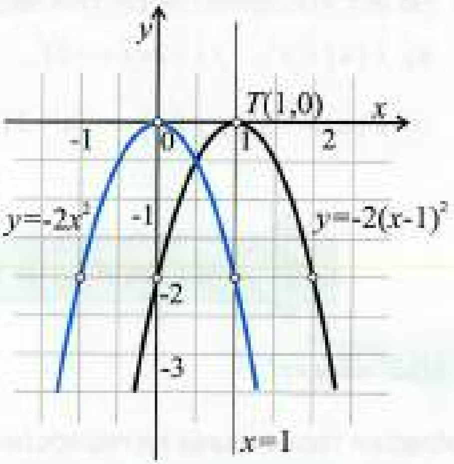
- Го цртаме графикот на функцијата $y=-2x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$-2x^2$	-8	-2	0	-2	8

- Графикот на функцијата $y=-2(x-1)^2$ ќе го добиеме со транслација на параболата $y=-2x^2$ по x-оската во десно за вредноста $\alpha=1$.

- Воочи ги својствата на функцијата:

1. $D_f=\mathbb{R}$.
2. $T(1,0)$.
3. $a=-2<0$, функцијата има максимум $y_{\max}=0$ за $x=1$.
4. $V_f=(-\infty,0]$.
5. Бидејќи функцијата има максимум за $x=1$, значи, за $x\in(-\infty,1)$ функцијата монотоно расте, а за $x\in(1,\infty)$ функцијата монотоно опаѓа.
6. Оска на симетрија на параболата е правата $x=1$.



Запомни!

Ако $a>0$, функцијата во темето преминува од опаднувачка во растечка.

Ако $a<0$, функцијата во темето преминува од растечка во опаднувачка.

4 Претстави ја графички функцијата $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2$.

Согледај го решението:

- Ги скицираме по ред графиците на следните функции:

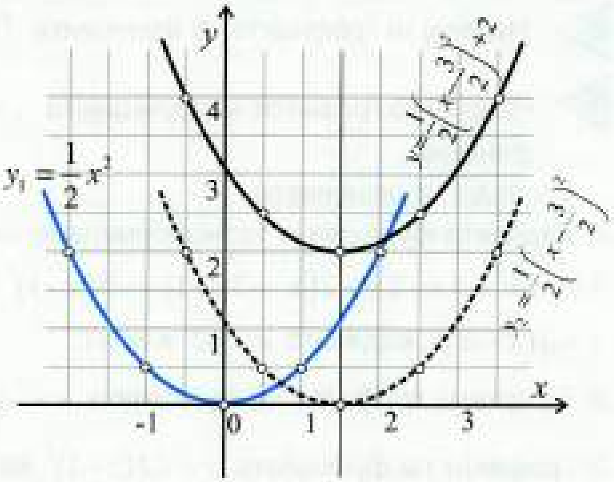
1. $y_1=\frac{1}{2}x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$\frac{1}{2}x^2$	2	½	0	½	2

2. $y_2=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$, со транслација на параболата $y_1=\frac{1}{2}x^2$ по x-оската надесно за $\frac{3}{2}$ единици.

3. $y=y_2+2$, со поместување на параболата y_2 за две единици во позитивната на-сока на y-оската.

Воочуваш дека графикот на дадената функција е парабола чие теме е во точката $T\left(\frac{3}{2},2\right)$, а е свртена во позитивната насока на y-оската бидејќи $a=\frac{1}{2}>0$.



Задачи:

① Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите:

а) $f(x)=x^2$, $f(x)=(x-2)^2$, $f(x)=(x+3)^2$;

б) $f(x)=-x^2$, $f(x)=-(x-2)^2$, $f(x)=-(x+3)^2$.

4 ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $f(x)=ax^2+bx+c$

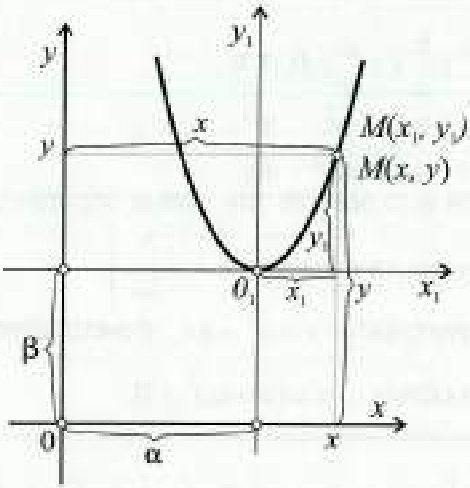
Потсети се!

- Изврши транслација на параболата $y=x^2$ за две единици во позитивната насока на апсцисната оска, а потоа добиената парабола помести ја за три единици во позитивната насока на ординатната оска.
- Одреди ги координатите на темето на параболата добиена по двете транслации.

А 1 Запиши ја квадратната функција во таков вид, од којшто може непосредно да ги одредиш координатите на темето на параболата.

Согледај го решението:

- Во координатниот систем xOy избираме точки $T(\alpha, \beta)$ и $M(x, y)$. Претпоставуваме дека точката T е теме на параболата што минува низ точката M.



- Во точката $T(\alpha, \beta)$ поставуваме нов координатен систем $x_1O_1y_1$, како на цртежот. Нека точката M во однос на новиот координатен систем е со координати $M(x_1, y_1)$.
- Сигурно воочуваш дека во координатниот систем $x_1O_1y_1$ $(T \equiv O_1)$ дадената парабола има равенка $y_1 = ax_1^2$. Ако ги споредиме координатите на точката M во однос на двата координатни системи, имаме:

$y_1 = y - \beta$ и $x_1 = x - \alpha$, па по заменувањето добиваме:

$y - \beta = a(x - \alpha)^2$, т.е. $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Запомни!

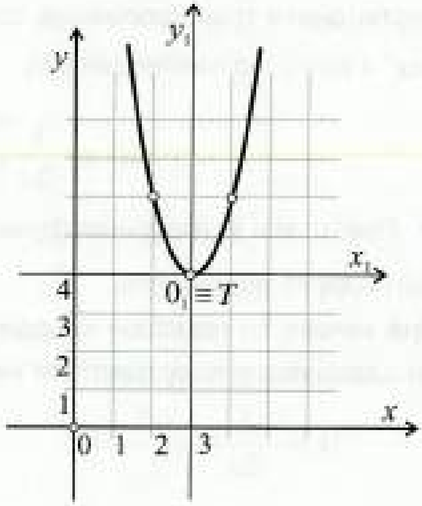
Записот $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ се вика каконичен (сведен) вид на квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$.Темето на параболата е точката $T(\alpha, \beta)$.

2 Нацртај го графикот на функцијата $y = 2(x-3)^2 + 4$.

Согледај го решението:

- Од $y - 4 = 2(x-3)^2$ следува дека темето е $T(3, 4)$.
- Функцијата $y_1 = 2x_1^2$ ја претставуваме табеларно и графички во координатниот систем $x_1O_1y_1$ $(O_1 \equiv T)$.

x	-2	-1	0	1	2
$2x^2$	8	2	0	2	8



- Графикот во координатниот систем $x_1O_1y_1$ е параболата $y_1 = 2x_1^2$, а истиот тој график во координатниот систем xOy е график на функцијата $y = 2(x-3)^2 + 4$.

Потсети се!

- Ако равенката $ax^2+bx+c=0$ ја поделиме со $a\neq 0$, добиваме:

  $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, т.е.

  $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$,

  при што првите три члена определуваат бином на квадрат, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

- Функцијата $y=x^2-4x$ трансформирај ја во облик $y=a(x-\alpha)^2+\beta$.

---

3 Трансформирај ја во каноничен вид функцијата $y=ax^2+bx+c$ и одреди ги координатите на темето на параболата.

Согледај го решението:

- Линеарниот член во функцијата $y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ ќе го посматраме како двоен производ, т.е. $\frac{b}{a}x=2\cdot\frac{b}{2a}x$. Со додавање и одземање на изразот $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ имаме:

$y=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$, т.е. $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$. По споредувањето со функцијата $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ имаме: $\alpha=-\frac{b}{2a}$, $\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Воочи!

1) Координатите на темето на параболата зависат од вредностите на a, b и c, т.е.

$$T\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

2. Претходната трансформација се применува за доведување на квадратната функција $y=ax^2+bx+c$ во каноничен вид

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},\ \text{т.е.}\ y=a(x-\alpha)^2+\beta.$$

4 Претстави ја графички функцијата $y=x^2-2x-3$.

Согледај го решението:

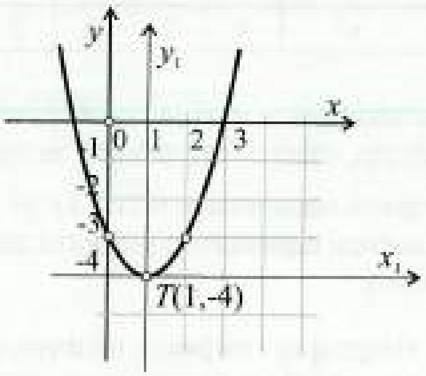
- **Прв начин:** со помошен координатен систем
- Ги одредуваме координатите на темето и имаме:

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\cdot}=1,$$

$$\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot(-3)-(-2)^2}{4\cdot 1}=\frac{-12-4}{4}=-4,\ \text{т.е.}\ T(1,-4).$$

x	-2	-1	0	1	2
x_1^2	4	2	0	2	4

- Табеларно ја претставуваме функцијата $y_1 = ax_1^2$, т.е. $y_1 = x_1^2$, бидејќи $a = 1$.
- Во координатниот систем xOy ја претставуваме точката $T(1, -4)$.
- Поставуваме нов координатен систем x_1Ty_1.
- Во новиот координатен систем го цртаме графикот на функцијата $y_1 = x_1^2$.
- Нацртаниот график во однос на координатниот систем xOy е график на функцијата $y = x^2 - 2x - 3$.



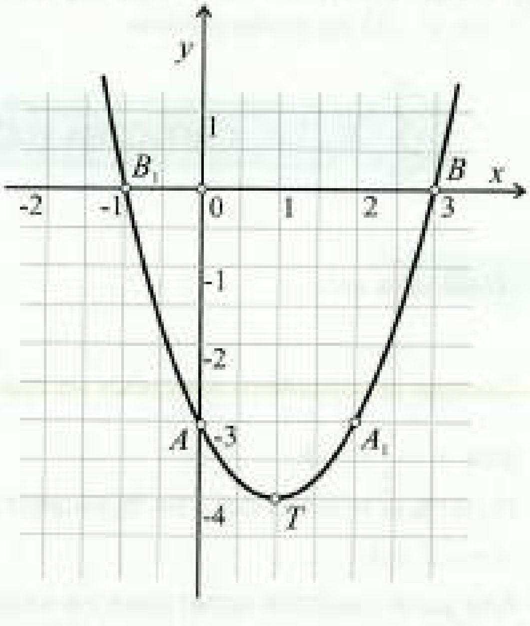
Втор начин: со определување на карактеристични точки од графикот

- Го определуваме темето $T(1, -4)$. Параболата е симетрична во однос на правата $x = 1$.
- Ја определуваме пресечната точка на параболата со ординатната оска, па за $x = 0$ имаме: $y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$, $A(0, -3)$.
- Графички ја одредуваме точката A_1 што е симетрична со A во однос на оската на параболата.
- Ги определуваме пресечните точки на параболата со x-оската, па за $y = 0$ имаме:

$$x^2 - 2x - 3 = 0,\ x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2},\ \text{т.е.}$$

$x_1 = 3$ или $x_2 = -1$, односно $B(3, 0)$, $B_1(-1, 0)$.

- Графикот е прикажан на цртежот.



Воочи!

За цртање на графикот треба да се определени најмалку пет негови точки.

Ако равенката $ax^2 + bx + c = 0$ нема реални нули, значи графикот не ја сече апсцисната оска, тогаш определуваме уште неколку други точки со произволен избор за аргументот.

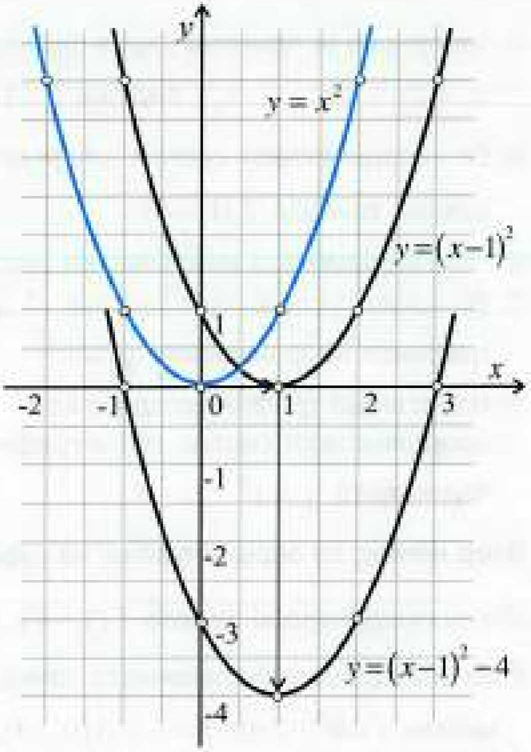
Трет начин: со транслација на графикот на основната функција $y = x^2$

- Дадената функција ја трансформираме во каноничен вид и добиваме $y = (x - 1)^2 - 4$.

- Функцијата $y = x^2$ ја претставуваме табеларно:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	2	0	2	4

- Параболата $y = x^2$ ја поместуваме во позитивната насока на x-оската за една единица.
- Втората парабола $y = (x - 1)^2$ ја поместуваме за четири единици по y-оската во негативната насока.



5 Нацртај го графикот на функцијата $y = -x^2 + 2x + 3$.

Задачи:

① Трансформирај ја во каноничен вид функцијата $y = -3x^2 + 6x + 2$.

② Нацртај го графикот на функцијата $y = x^2 - 4x$ на трите начини.

5 СВОЈСТВА НА КВАДРАТНАТА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Одреди ја најмалата вредност на функцијата $y=\frac{1}{2}x^2-3$.
- Испитај ја монотоноста на функцијата $y=-x^2+3$.
- Кои уште својства испитавме на квадратната функција $y = ax^2 + c$?

А **1** Испитај ги својствата на квадратната функција
$$y = ax^2 + bx + c.$$

1. *Дефинициона област*

Квадратната функција е дефинирана за сите реални броеви, т.е. $D_f = \mathbb{R}$.

2. *Теме на параболата*

Функцијата ја сведуваме во каноничен вид

$$y=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

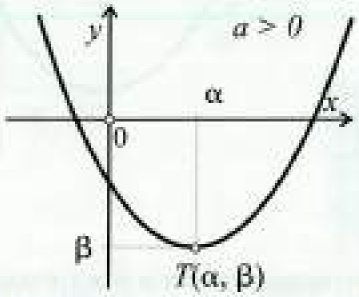
па темето на параболата е

$$T(\alpha,\beta);\ \alpha=-\frac{b}{2a},\ \beta=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

3. *Екстремна вредност на функцијата*

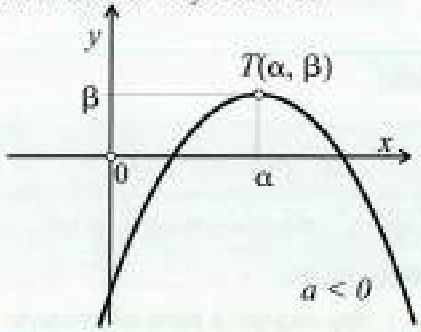
Во темето функцијата достигнува најголема или најмала вредност во зависност од знакот на коефициентот a.

За $a>0$ параболата е отворена кон позитивна насока на y-оската.



$$y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a} \text{ за } x=-\frac{b}{2a}.$$

За $a<0$ параболата е отворена кон негативна насока на y-оската.



$$y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a} \text{ за } x=-\frac{b}{2a}.$$

2 Одреди ја екстремната вредност на функцијата $y = -2x^2 - 4x - 5$.

Бидејќи $a=-2<0$, параболата е со отворот кон негативната насока на y-оската па функцијата има максимум $y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$ за $x=-\frac{b}{2a}$, т.е. $y_{\max}=-3$ за $x=1$.

3 За која вредност на параметарот k, функцијата $y = kx^2 - 2x - 5$ има максимум еднаков на -2?

Согледај го решението:

Функцијата има максимум ако $k<0$, односно $y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$ или $\frac{4k(-5)-4}{4k}=-2$ од каде

$$-20k-4=-8, \text{ т.е. } k=-\frac{1}{3}.$$

4. *Множество вредности на функцијата*

Екстремната вредност го определува множеството вредности на функцијата, кое го означуваме со V_f. Ако $a>0$, $V_f=[\beta,\infty)$, а ако $a<0$, $V_f=[-\infty,\beta)$.

Во претходниот пример $V_f=(-\infty,-2]$.

4 Одреди ги екстремната вредност и множеството вредности на квадратната функција

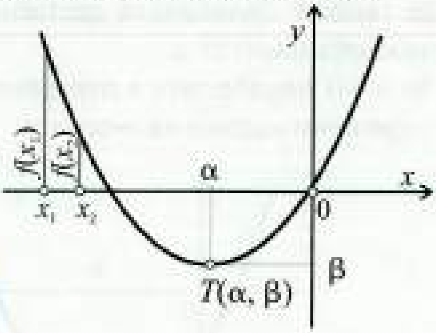
$$y=\frac{1}{2}x^2-4x.$$

5. *Монотоност на функцијата*

Да испитаме монотоност (растење, опаѓање) на една функција, значи да утврдиме што се случува со вредностите на функцијата ако аргументот постојано расте.

Ако $a>0$, функцијата има минимум.

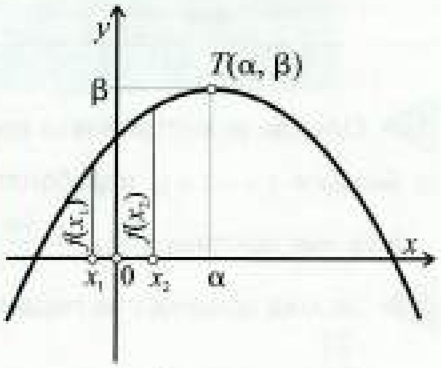
Оската $x=-\frac{b}{2a}$ на параболата ја разбива дефиниционата област на функцијата на два интервали, $(-\infty,\alpha)$ и (α,∞). Бидејќи функцијата има минимум, во првиот интервал функцијата опаѓа и достигнува одреден минимум, а потоа во вториот интервал расте.



Воочи!

За $x_1<x_2<\alpha$ следува $f(x_1)>f(x_2)$, т.е. за $x\in(-\infty,\alpha)$ функцијата монотоно опаѓа, а за $x\in(\alpha,\infty)$ функцијата монотоно расте.

Ако $a<0$, функцијата има максимум. Значи, во едниот интервал расте и достигнува одреден максимум, а во другиот интервал опаѓа.



Воочи!

За $x_1<x_2<\alpha$ следува $f(x_1)<f(x_2)$, т.е. за $x\in(-\infty,\alpha)$ функцијата монотоно расте, а за $x\in(\alpha,\infty)$ функцијата монотоно опаѓа.

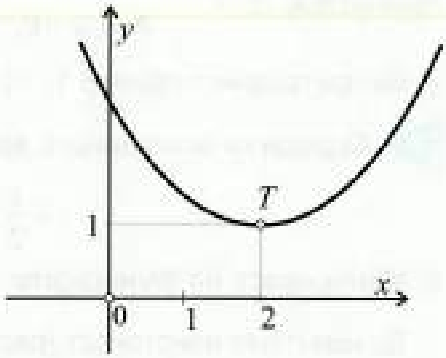
5 Одреди ги интервалите на растење и опаѓање за функцијата $y=\frac{1}{2}x^2-2x+3$.

Согледај го решението:

- Од $a=\frac{1}{2}>0$ следува дека функцијата има минимум $y=\frac{4ac-b^2}{4a}=1$ за $x=-\frac{b}{2a}=2$.

Интервалите во кои треба да се разгледува монотоноста на функцијата се $(-\infty,2)$ и $(2,\infty)$.

- Бидејќи функцијата има минимум, таа во интервалот $(-\infty,2)$ монотоно опаѓа, а во интервалот $(2,\infty)$ монотоно расте.



6 Испитај ја монотоноста на функцијата:
а) $y=x^2+3$; б) $y=-x^2+x$.

6. *Нули на функцијата*

Нули на функцијата $y=ax^2+bx+c$ се вредностите на аргументот x за кои што $y=0$. Нули на функцијата се решенијата на равенката $ax^2+bx+c=0$. Нулите на функцијата ги определуваат пресечните точки на графикот со x-оската.

7 Одреди ги нулите на функцијата:

а) $y=2x^2+3x-2$; б) $y=x^2-4x+4$; в) $y=2x^2-2x+5$.

а) Од $y=0$ следува $2x^2+3x-2=0$.

Нејзините решенија се: $x_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2\cdot 2}$, т.е. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-2$.

Значи, графикот на функцијата ја сече x-оската во точката $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ и точката $B(-2,0)$.

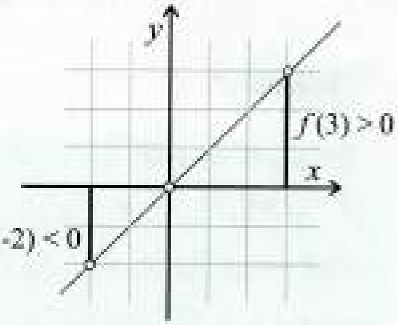
Реши ги задачите б) и в). Што воочуваш?

Напомена. Ако равенката $ax^2+bx+c=0$ нема реални корени, тогаш графикот на функцијата $y=ax^2+bx+c$ не ја сече x-оската.

8 За кои вредности на p и q графикот на квадратната функција $f(x)=x^2+px+q$ ја сече апсцисната оска во точките $A(1,0)$ и $B(3,0)$?

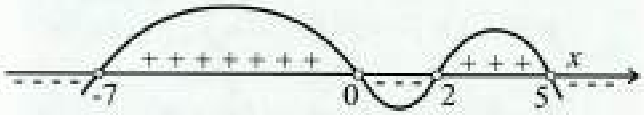
7. *Знак на функцијата*

Потсети се!



- На графикот на функцијата $f(x)=x$ се прикажани вредностите $f(-2)$ и $f(3)$.
- Одреди го интервалот на аргументот x во којшто функцијата $f(x)=x$ има негативни вредности.

9 Одреди го знакот на функцијата чиј график е претставен на цртежот.



Крива на знакот.

Согледај го решението:

- За поедноставно одредување на знакот на една функција, ќе ја користиме следната асоцијација:

1) Апсцисната оска ќе сметаме дека го претставува нивото на водата во морето (надморска висина 0 m), па тука вредноста на функцијата е нула.
2) Вредностите на функцијата што се над x-оската асоцираат на точки од кривата што се над водата, па нивните ординати се позитивни.
3) Вредностите на функцијата што се под x-оската асоцираат на точки од кривата што се под нивото на водата, па нивните ординати се негативни.

- Според тоа имаме:

за $x\in(-\infty,-7)\cup(0,2)\cup(5,\infty)$, $f(x)<0$;

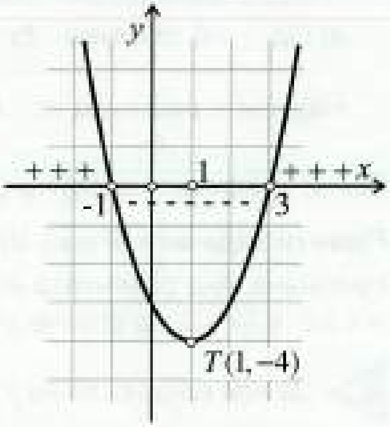
за $x\in(-7,0)\cup(2,5)$, $f(x)>0$;

за $x\in\{-7,0,2,5\}$, $f(x)=0$.

10 Одреди го знакот на квадратната функција $f(x)=x^2-2x-3$.

Согледај го решението:

- Го одредуваме темето на параболата, $T(1,-4)$.
- Го одредуваме пресекот на параболата со y-оската, па за $x=0$, $y=-3$.
- Ги одредуваме нулите на функцијата, па од $y=0$ следува $x_1=3$, $x_2=-1$.
- Го цртаме графикот на функцијата.



- Воочуваме:
за $x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$, $f(x)>0$, а за $x\in(-1,3)$, $f(x)<0$.

Запомни!

За $a>0$ имаме:

$D>0$,

$x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$, $f(x)>0$, $(x_1<x_2)$;

$x\in(x_1,x_2)$, $f(x)<0$, $(x_1<x_2)$;

$D=0$, $x\in(-\infty,\infty)\setminus\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$, $f(x)>0$;

$D<0$, $x\in(-\infty,\infty)$, $f(x)>0$.

За $a<0$ имаме:

$D>0$,

$x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$, $f(x)<0$, $(x_1<x_2)$;

$x\in(x_1,x_2)$, $f(x)>0$ $(x_1<x_2)$;

$D=0$, $x\in(-\infty,\infty)\setminus\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$, $f(x)<0$;

$D<0$, $x\in(-\infty,\infty)$, $f(x)<0$.

10 Одреди го знакот на функцијата: а) $f(x)=x^2+4$; б) $f(x)=-2x^2-6x$.

Задачи:

① Дадена е функцијата $y=x^2-4x+1$.
а) Одреди ја равенката на оската на графикот на функцијата.
б) Одреди го множеството вредности V_f на функцијата.

② Одреди ги интервалите на монотоноста на функцијата $y=-x^2+2x+1$.

③ Одреди го знакот на функцијата $y=x^2-5x+6$.

6 ТЕК И ГРАФИК НА КВАДРАТНАТА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Вредноста $x = -1$ е нула на функцијата $y = x + 1$.
- За $x \in (-\infty, -1)$ функцијата $f(x) < 0$; а за $x \in (-1, \infty)$ функцијата $f(x) > 0$.
- Функцијата $y = x + 1$ монотоно расте.
- Одреди: нула, знак и монотоност на функцијата $y = -x - 3$.

A Во врска со поимот квадратна функција многу често се поставува барањето: "Нацртај го графикот и испитај го текот на квадратната функција...".

- Како ќе постапиш?

На поставеното барање ќе одговориш, ако одредиш:

1) дефинициона област D_f на функцијата;
2) теме на параболата;
3) пресеци на параболата со координатните оски.

Со овие податоци може да го нацрташ графикот на функцијата, а потоа одреди:

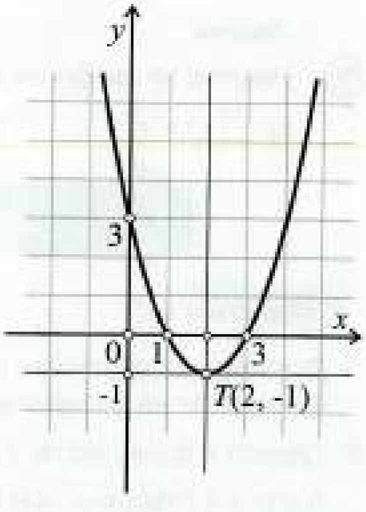
4) екстремна вредност на функцијата;
5) оска на симетрија на параболата;
6) множество вредности V_f на функцијата;
7) монотоност на функцијата;
8) знак на функцијата.

(Редоследот на запишувањето на одговорите не е битен.)

1 Нацртај го графикот и испитај го текот на функцијата $y = x^2 - 4x + 3$.

Согледај го решението:

- Дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R}$.
- Темето на параболата е $T(\alpha, \beta)$ за $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 2, \beta = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -1$, од каде $T(2, -1)$ а $y = (x - 2)^2 - 1$.
- Пресеците со координатните оски се:
  - а) пресек со y-оската, за $x = 0$ следува $y = 3$;
  - б) пресек со x-оската (нули на функцијата), за $y = 0$ следува $x^2 - 4x + 3 = 0$, т.е. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
- Графикот на функцијата е даден на цртежот. $a = 1 > 0$, функцијата има минимум $y_{min} = -1$, за $x = 2$.



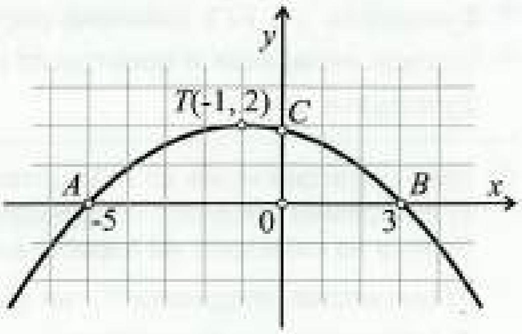
- Оска на симетрија е правата $x = 2$.
- Вредноста на функцијата е $V_f = [-1, \infty)$.
- Монотоност на функцијата: за $x \in (-\infty, 2)$ функцијата монотоно опаѓа, а за $x \in (2, \infty)$ функцијата монотоно расте.
- Знак на функцијата: за $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, $f(x) > 0$; а за $x \in (1, 3)$, $f(x) < 0$.

2 Нацртај го графикот и испитај го текот на функцијата $f(x)=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{15}{8}$.

Согледај го решението:

1) $D_f=\mathbb{R}$.

2) $x_1=-5$ или $x_2=3$ се нули на функцијата, $A(-5,0)$ и $B(3,0)$ се пресечни точки на графикот со x-оската, а за x = 0 следува $y=\frac{15}{8}$, па $C\left(0,\frac{15}{8}\right)$ е пресечна точка на графикот со y-оската.



3) $\alpha=-1,\ \beta=2,\ T(-1,2),\ y=-\frac{1}{8}(x+1)^2+2.$

- Графикот е прикажан на цртежот.

4) Бидејќи $a=-\frac{1}{8}<0$, функцијата има максимум $y_{\max}=2$ за $x=-1$.

5) Оска на симетрија е правата $x=-1$.

6) $V_f=(-\infty,2]$.

7) За $x\in(-\infty,-1)$ функцијата монотоно расте, а за $x\in(-1,\infty)$ функцијата опаѓа.

8) За $x\in(-\infty,-5)\cup(3,\infty)$, $f(x)<0$; за $x\in(-5,3)$, $f(x)>0$.

3 Нацртај го графикот и испитај го текот на функцијата:

а) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$; б) $f(x)=-x^2+4x$.

Задачи:

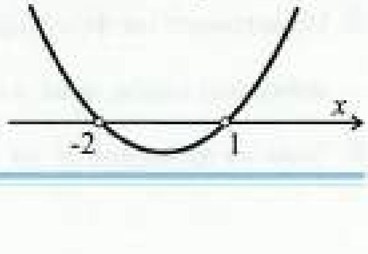
① Нацртај го графикот и испитај го текот на секоја од функциите:

а) $f(x)=x^2-x$; б) $f(x)=x^2+4$.

7 ЗНАК НА КВАДРАТЕН ТРИНОМ

Потсети се!

- Дали може приближно да се одреди положбата на параболата, ако се знаат нулите и коефициентот на квадратниот член на квадратната функција?



- Дадена е функцијата $f(x)=x^2+x-2$. Бидејќи $a=1>0$, параболата е отворена кон позитивната насока на ординатата, а нулите се $x_2=1$ и x_1 = -2. Воочи ја положбата на параболата.

1 Одреди го знакот на квадратниот трином x^2+x-6.

Согледај го решението:

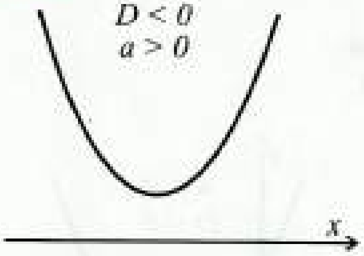
- Триномот го разгледуваме како квадратна функција $y=x^2+x-6$. Нулите се $x_1=-2$ или $x_2=3$.
- Го скицираме графикот на функцијата, за $a>0$.
- Одреди го знакот на квадратната функција.

- Триномот x^2+x-6 го менува знакот според знакот на функцијата $y=x^2+x-6$, т.е. за $x\in(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$, $x^2+x-6>0$, а за $x\in(-2,3)$, $x^2<0$.

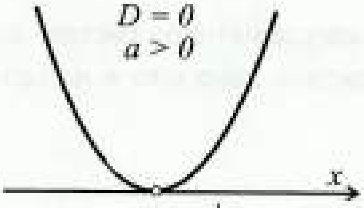
Воочуваш, за да се одреди знакот на квадратниот трином ax^2+bx+c, треба да се знае коефициентот a и нулите на триномот.

- Коефициентот a може секогаш да се одреди.
- Природата на нулите на триномот зависи од дискриминантата, па за таа цел:

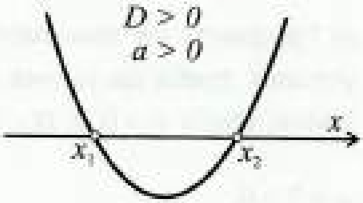
Треба да знаеш!



$ax^2+bx+c>0$
за секое $x\in\mathbb{R}$



$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$
$ax^2+bx+c>0$
за секое $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$

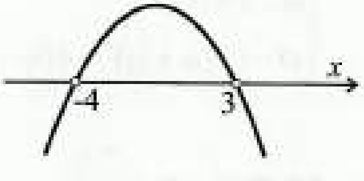


$ax^2+bx+c<0$ за $x\in(x_1,x_2)$
$ax^2+bx+c>0$
за $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$, а

2 Одреди го знакот на квадратниот трином $-x^2-x+12$.

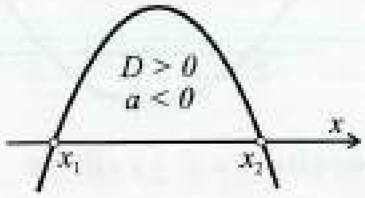
Согледај го решението:

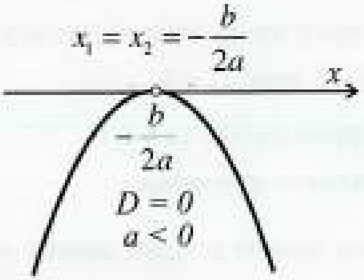
- $a=-1<0$, параболата е отворена кон негативната насока на y-оската.
- $D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot12\cdot(-1)=49$. Бидејќи $D>0$, триномот има две реални различни нули, $x_1=-4$ или $x_2=3$.

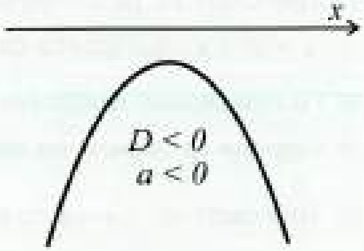


- Знак: за $x\in(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$, $-x^2-x+12<0$, а за $x\in(-4,3)$, $-x^2-x+12>0$.

Треба да знаеш!







$ax^2+bx+c>0$ за $x\in(x_1,x_2)$,

$ax^2+bx+c<0$ за $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,\infty)$

$ax^2+bx+c<0$ за секое $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

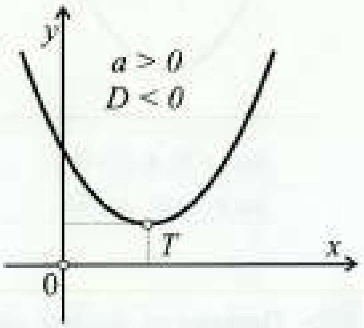
$ax^2+bx+c<0$ за секое $x\in\mathbb{R}$

3 Одреди ја вредноста на параметарот m, така што:

а) квадратниот трином $2x^2-3x+2m$ да е позитивен за секој реален број;

б) квадратниот трином $(m-3)x^2-2(m+1)x+m+2$ да е негативен за секој реален број.

- а) Графикот на триномот во координатниот систем, според условот треба да ја има положбата како што е на цртежот. Значи, треба $a>0$ и $D<0$.

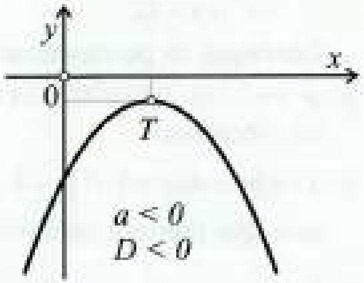


- $a=2>0$;

$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot2m=9-16m$. Од условот $D<0$ следува

$9-16m<0$ или $-16m<-9$, односно $m>\frac{9}{16}$, т.е. $m\in\left(\frac{9}{16},\infty\right)$.

- б) Графикот на триномот во координатниот систем, според условот треба да ја има положбата како што е на цртежот. Значи, треба $a<0$ и $D<0$, па системот е



$$\begin{cases} m-3<0 \\ D=\left(2(m+1)\right)^2-4(m-3)(m+2)<0, \end{cases} \quad \begin{cases} m<3 \\ m<-\frac{7}{3} \end{cases}$$

т.е. $m\in\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right)$.

Задачи:

① Одреди го знакот на квадратниот трином:

а) $x^2+2x-24$; б) $-x^2-3x+4$.

② За кои вредности на x квадратниот трином добива позитивни вредности:

а) $-ax^2-3x+2$; б) x^2-3x+4; в) $-2+x-x^2$.

③ Одреди го знакот на квадратната функција:

а) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x$; б) $y=-x^2+2x-3$.

④ За кои вредности на параметарот k функцијата $y=kx^2-2(k-1)x^2+k+2$ добива позитивни вредности за секој реален број?

⑤ Одреди го параметарот k така што функцијата $y=(k-1)x^2+(k-2)x-k-1$ да достигнува најмала вредност за $x=1$. За добиената вредност на k одреди го знакот на функцијата.

⑥ Одреди ја најмалата вредност на дропката $\dfrac{2}{-\frac{1}{3}x^2-4x+1}$.

8 КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ

Потсети се!

- За која вредност на $x\in\{-1,3,5,0\}$ неравенката $x^2+x-1>0$ преминува во вистинит исказ?
- Кога производот $a\cdot b$ е позитивен?

А 1 Реши ја квадратната неравенка

$$x^2-3x-10<0.$$

Согледај го решението:

Задачата ќе ја решиме на повеќе начини:

- **Прв начин.** Квадратниот трином на неравенката го трансформираме во производ. За таа цел имаме:

$$x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(-10)}}{2},\ x_1=5 \text{ или } x_2=-2.$$

- Според формулата $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ добиваме: $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$, т.е.

$$(x+2)(x-5)<0.$$

- Овој производ е еквивалентен со $\begin{cases}x+2>0\\x-5<0\end{cases} \vee \begin{cases}x+2<0\\x-5>0.\end{cases}$

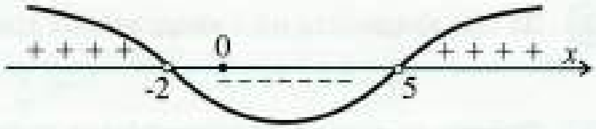
Решението е $M=(-2,5)\cup\varnothing=(-2,5)$.

- **Втор начин.** Со методот на интервали, имаме:
- Воочи, производот е негативен во интервалот $(-2,5)$, т.е. $M=(-2,5)$.

	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-5)$		$+$		$-$		$+$	

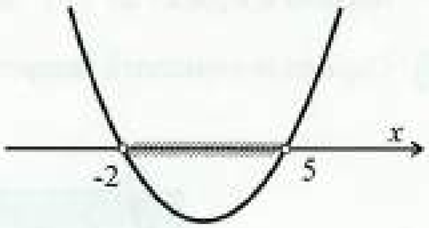
Трет начин. Со користење на кривата на знакот (види својство 7, знак на квадратната функција).

- Нулите на триномот $x^2-3x-10$ се $x_1=5$ или $x_2=-2$.
- Множеството на реалните броеви е разбиено на три отворени интервали $(-\infty,-2),(-2,5),(5,\infty)$, што се гледа од графичкиот приказ.



- Со проверка го одредуваме знакот на триномот во кој било интервал. На пример за $x=0$ имаме $0^2-3\cdot 0-10=-10<0$. Значи, за секое $x\in(-2,5)$ триномот е негативен, па кривата на знакот во тој интервал е под x-оската. Понатаму знакот на кривата се менува наизменично во останатите интервали. Според тоа, $x^2-3x-10<0$ за $x\in(-2,5)$.

- **Четврти начин.** Со знак на квадратниот трином:
- Нулите се: $x+2=0 \vee x-5=0,\ x=-2 \vee x=5.$
- Коефициентот на квадратниот член е позитивен, па параболата е отворена кон позитивната насока на y-оската.
- Ја читаме вредноста што е негативна, т.е. $x^2-3x-10<0$ за $x\in(-2,5)$.



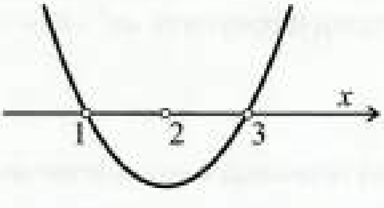
Запомни!

Неравенката $ax^2+bx+c>(\geq,<,\leq)0$, каде што $a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0$ се вика квадратна неравенка.

2 Најди ги целобројните решенија на неравенката $\frac{(x-1)^2}{4}\leq 1-\frac{3-x}{2}$.

Согледај го решението:

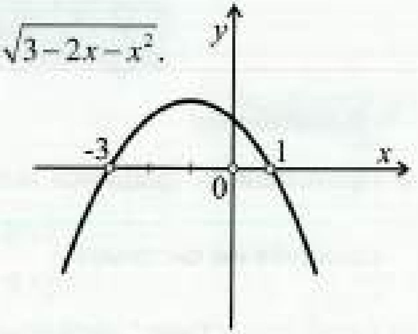
- По средувањето ја добиваме равенката $x^2-4x+3\leq 0$. За $a=1>0, D=4>0, x_1=1$ или $x_2=3$.
- Положбата на параболата е прикажана како на цртежот.
- Според тоа, решението е $M\in\{1,2,3\}$.



3 Реши ги неравенките: а) $x^2-6x+9>0$; б) $x^2-6x+9\leq 0$;

в) $x^2+2x^2+5<0$; г) $-x^2+2x^2+5<0$.

4 Одреди ја дефиниционата област на функцијата $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$.



Согледај го решението:

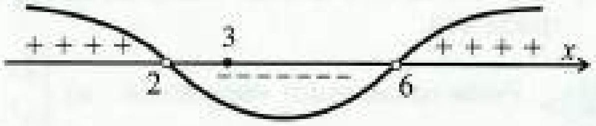
- $3-2x-x^2 \ge 0$.
- $a=-1<0,\ D=4-4\cdot 3\cdot(-1)=16>0,\ x_1=1$ или $x_2=-3$.
- $3-2x-x^2 \ge 0$ за $x\in[-3,1],\ D_f=[-3,1]$.

5 Одреди ја дефиниционата област на следните функции: а) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+7}$.

6 Одреди ја вредноста на параметарот k, така што квадратниот трином $x^2-(k-2)x+k-2$ да има реални нули.

Согледај го решението:

- Квадратниот трином има реални нули ако $D\ge 0$, т.е. $b^2-4ac\ge 0$.



- Со замена добиваме $k^2-8k+12\ge 0$, т.е. $k_1=2$ или $k_2=6$. За $k=3$ имаме:

$3^2-8\cdot 3+12<0$, значи за $k\in(2,6)$ кривата на знакот е под x-оската. Во другите два интервали е над оската, т.е. $k^2-8k+12\ge 0$ за $k\in(-\infty,-2]\cup[6,\infty)$.

Според тоа триномот има реални нули ако $k\in(-\infty,-2]\cup[6,\infty)$

7 Одреди го параметарот k, така што квадратниот трином $(3k-2)x^2+kx+k$ да нема реални нули. (Упатство: $3k-2\neq 0,\ D<0$.)

Задачи:

① Реши ја неравенката $x(2-x)+3>x^2-3x$.

② Одреди ја дефиниционата област на функцијата $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.

③ Реши ја неравенката $\frac{x-2}{3-2x}\ge 0$ со сведување во квадратна неравенка.

9 СИСТЕМ КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ

Потсети се!

- Претстави го графички множеството решенија на системот $\begin{cases} x \le 5 \\ x > -4. \end{cases}$
- Реши го системот неравенки

$$\begin{cases} 2x - 3 \ge 5 \\ 4 - 2x \ge -1. \end{cases}$$

А **1** Даден е системот од една линеарна и една квадратна неравенка

$$\begin{cases} 2x - 3 \le -1 \\ x^2 + x - 20 < 0. \end{cases}$$

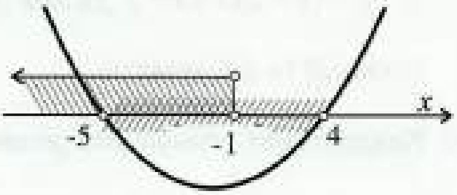
Одреди го решението на дадениот систем

Согледај го решението:

- Решението на линеарната неравенка е: $2x \le 3 - 1,\ x \le 1,\ M_1 = (-\infty, 1]$.
- Нулите на квадратниот трином се: $x_1 = -5$ или $x_2 = 4$, а решението на неравенката е $M_2 = (-5, 4)$.

Решение на системот е:

$M = M_1 \cap M_2 = (-\infty, 1] \cap (-5, 4) = (-5, 1]$.



- Решението на системот може да се одреди и графички.

2 Реши го системот неравенки: а) $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x^2 - x - 6 \ge 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(x+1) \ge 0 \\ x + 3 > 0 \\ x^2 - 1 \ge 0. \end{cases}$

Потсети се!

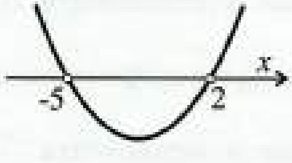
Одреди го пресекот на множествата $M_1 = (-\infty, -3) \cup (10, \infty)$ и $M_2 = [-7, 15)$.

За кои вредности на a и b изразот $\frac{a}{b}$ е негативен?

Б **3** Реши го системот

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 \le 0 \\ x^2 - 4x - 21 < 0. \end{cases}$$

Согледај го решението



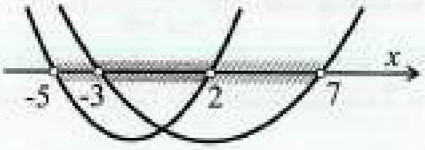
- Решението на неравенката $x^2 + 3x - 10 \le 0$ е: Нулите се $x_1 = -5 \vee x_2 = 2$, па $M_1 = [-5, 2]$.

- Решението на неравенката $x^2-4x-21<0$ е:

  Нулите се: $x_1=7 \vee x_2=-3$, па $M_2=(-3,7)$.

- Решението на системот е $M=(-3,\ 2)$.

- Решението можеме да го одредиме со графичко претставување.



4 Реши го системот $\begin{cases}(x-3)(x+4)\geq 0\\(x-4)(x+3)<0.\end{cases}$

5 Реши ја неравенката $\dfrac{x-1}{x^2-x-6}\geq 0.$

Согледај го решението:

Прв начин: Неравенката ќе ја разгледуваме како неравенка количник.

- Неравенката е еквивалентна со дисјункцијата на системите:

- $\begin{cases}x-1\geq 0\\x^2-x-6>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x-1\leq 0\\x^2-x-6<0\end{cases}$

  $\begin{cases}x\geq 1\\(x-3)(x+2)>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x\leq 1\\(x-3)(x+2)<0\end{cases}$

  $\begin{cases}x\geq 1\\x\in(-\infty,-2)\cup(3,\infty)\end{cases}$ или $\begin{cases}x\leq 1\\x\in(-2,3).\end{cases}$

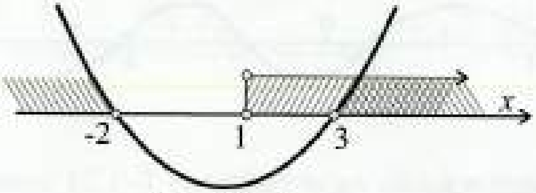
Од $x^2-x-6=0$

следува $x_{1/2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}$,

т.е. $x_1=3$ или $x_2=-2$.

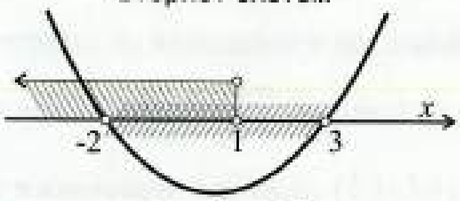
- Решението ќе го одредиме со графичко претставување на:

првиот систем



$M_1=(3,\infty)$

вториот систем



$M_2=(-2,1]$

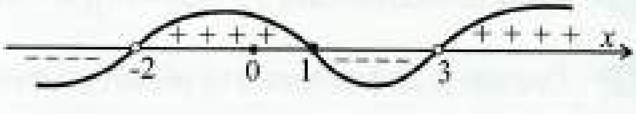
$$M=M_2\cup M_1=(-2,1]\cup(3,\infty).$$

Втор начин: Со кривата на знакот.

- Ги одредуваме нулите и имаме:

  $x-1=0$ за $x=1$;

$x^2-x-6=0$ за $x_1=-2$ или $x_2=3$.



- За $x=0$ имаме $\frac{0-1}{0^2-0-6}=\frac{1}{6}>0$, што значи за секое $x\in(-2,1)$ изразот е позитивен, па кривата на знакот е под x-оската.
- Во останатите интервали знакот на изразот наизменично се менува.

Според тоа, $\frac{x-1}{x^2-x-6}\geq 0, x\in(-2,1]\cup(3,\infty)$.

Воочи, именителот е секогаш различен од нула, па затоа точките што одговараат на броевите - 2 и 3 се означени со празни кружчиња.

6 Реши ја неравенката количник $\frac{x^2+2x-8}{-x^2+3x+4}<0$.

Согледај го решението:

Прв начин:

- Неравенката е еквивалентна со дисјункцијата од системите

$$\begin{cases}x^2+2x-8>0\\-x^2+3x+4<0\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}x^2+2x-8<0\\-x^2+3x+4>0.\end{cases}$$

- Решението на првиот систем е $M_1=(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$.
- Решението на вториот систем е $M_2=(-1,2)$, а решението на неравенката е

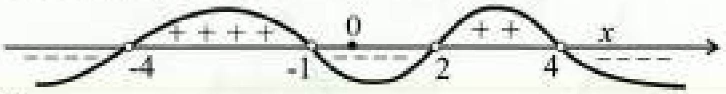
$$M=M_1\cup M_2,\text{ т.е. } M=(-\infty,-4)\cup(-1,2)\cup(4,\infty).$$

- Решението на неравенката одреди го графички.

Втор начин: Со кривата на знакот.

Од $x^2+2x-8=0$ следува $x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-8)}}{2}$, т.е. $x_1=2$ или $x_2=-4$. Слично, од $-x^2+3x+4=0$ следува $x_3=-1$ или $x_4=4$. Интервалите се:

Внимавај, сите интервали се отворени.



За $x=0$ имаме $\frac{0+2\cdot0-8}{0+2\cdot0+4}=-2<0$, значи,

за $x\in(-1,2)$ дадената неравенка е задоволена. Лево и десно од интервалот $(-1,2)$ знакот на кривата се менува наизменично. Според тоа, решение на неравенката е $M=(-\infty,-4)\cup(-1,2)\cup(4,\infty)$.

7 Реши ја неравенката $(x^2-3x-10)(x^2-5x-6)\leq 0$.

8 Одреди ја дефиниционата област на функцијата $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-25}{x^2+x-6}}$.

9 Реши ја неравенката $\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}<-1.$

Согледај го решението:

- Членот - 1 го префрламе на левата страна на неравенката, па по средувањето ја добиваме неравенка количник $\frac{x^2+x-6}{2x^2-x-1}<0.$
- Со примена на еквивалентност со дисјункција на системи го добиваме решението на неравенката, т.е. $M=\left(-3,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,2).$
- Со примена на кривата на знакот имаме: $x^2+x-6=0, x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$, $x_1=2$ или $x_2=-3$.

  Аналогно, $2x^2-x-1=0, x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2\cdot 2}, x_3=1$ или $x_4=-\frac{1}{2}.$
- Кривата на знакот е:

  За $x=-4$ имаме:

$\frac{(-4)^2+(-4)-6}{2\cdot(-4)^2-(-4)-1}=\frac{6}{35}>0.$ Решението е $M=\left(-3,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,2).$

Овој метод може да се применува за решавањето на која било неравенка. Особено е погоден за решавање на неравенките во кои има повеќе множители или делители.

10 Реши ја неравенката $\frac{(x^2+4x-5)(x^2+x+1)}{(x^2-9)(x^2-9x+14)}\le 0.$

Согледај го решението:

- $x^2+x+1=0$ нема реални нули.

$x^2+4x-5=0,\ x_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-5)}}{2}, x_1=1\vee x_2=-5;\quad x^2-9=0, x_3=3\vee x_4=-3;$

$x^2-9x+14=0,\ x_{5/6}=\frac{9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 14}}{2}, x_5=7\vee x_6=2;$

Внимавај, ни еден од множителите во именителот не може да е еднаков на нула.

Интервалите се прикажани на цртежот.

Одредувањето на знакот на неравенката може да биде во кој било интервал, па така за $x=0$, со замена во дадената неравенка имаме: $\frac{(-5)\cdot 1}{(-9)\cdot 14}=\frac{-5}{-126}>0.$

Според тоа, за $x\in(-3,1)$, $\frac{(x^2+4x-5)(x^2+x+1)}{(x^2-9)(x^2-9x+14)}>0,$ т.е. кривата на знакот е над x-оската. Во другите интервали, знакот на кривата се менува наизменично. Според тоа, решението на неравенката е

$$M=[-5,-3)\cup[1,2)\cup(3,7).$$

11. Реши ја неравенката $\dfrac{(x^2+4x+7)(x^2-2x-3)}{(x^2+x+2)(x^2-4)} \geq 0.$

12. За кои вредности на параметарот a, неравенството $\dfrac{ax}{x^2+4} < \dfrac{3}{2}$ е точно за секој реален број x?

Согледај го решението:

- Неравенството го трансформираме во видот $\dfrac{-3x^2+2ax-12}{2(x^2+4)} < 0.$
- Именителот $2(x^2+4) > 0$ за секој реален број. Значи, знакот на дропката зависи од броителот. Оттука следува $-3x^2+2ax-12<0$ за секој реален број.
- Бидејќи $a=-3<0$, значи $D=(2a)^2-4\cdot(-3)\cdot(-12)$ треба да е негативна, т.е. $4a^2-144<0$, $a^2-36<0$. Решението е $M=(-6,6)$.

Задачи:

1. Одреди го множеството решенија на системот $\begin{cases} x+1<0 \\ x^2-x-6<0. \end{cases}$
2. Реши ја неравенката $(x^2-4)(x^2-2x-15) \leq 0.$
3. Реши ја квадратната неравенка $\dfrac{x^2+2x-63}{x^2-8x+7} > 7.$
4. За која вредност на k, неравенката $\dfrac{2x^2+kx-4}{x^2-x-4} < 4$ е точна за секој реален број x?

Тематска контролна вежба

1. Одреди ги $a,b,c \in \mathbb{R}$ во функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$, ако $f(1)=0, f(2)=4, f(-1)=10.$
2. Во ист координатен систем и со помош на функцијата $y=x^2$ нацртај ги графиците на функциите: а) $f(x)=x^2-4$, $f(x)=x^2+2$; б) $f(x)=(x-1)^2$, $f(x)=(x+2)^2$.
3. Трансформирај ја во каноничен вид функцијата $f(x)=2x^2-4x+6.$
4. Одреди ги знакот и монотоноста на функцијата $f(x)=6x^2+x-2.$
5. Нацртај го графикот и испитај го текот на функцијата $f(x)=-x^2+2x+3.$
6. Одреди го знакот на квадратниот трином: а) $2x^2+7x-4$; б) $-3x^2+x+2.$
7. Одреди ја дефинициона та област на функцијата $f(x)=\sqrt{2x^2-5x-12}.$
8. Реши го системот неравенки $\begin{cases} x^2-x-30 \leq 0 \\ x^2-4x-32>0. \end{cases}$

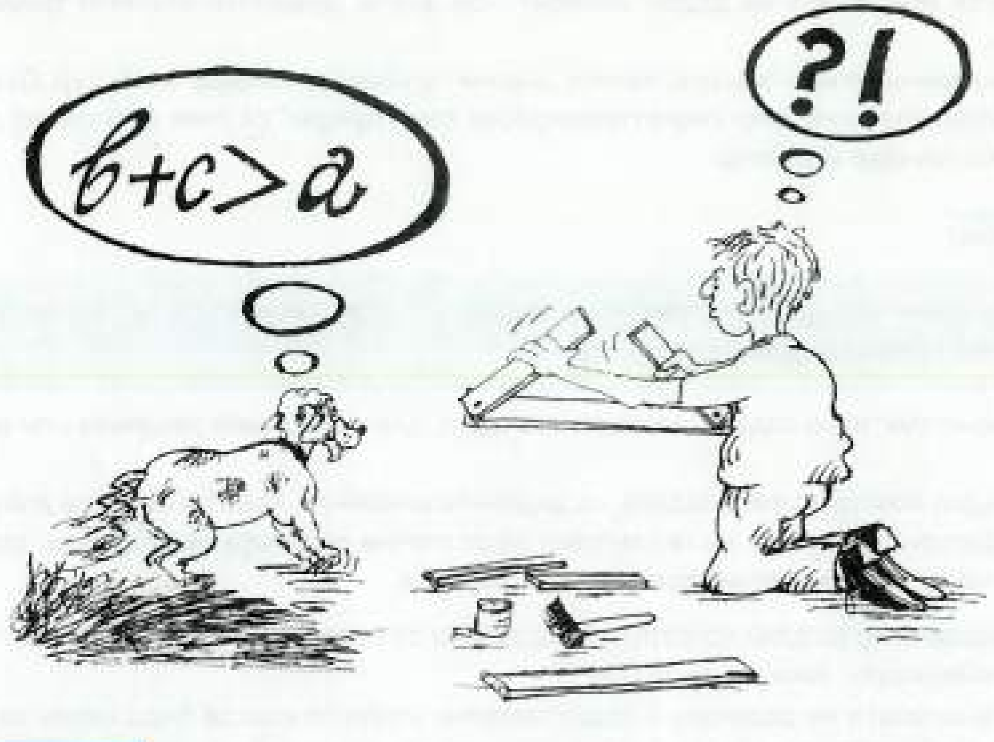
ТЕМА 5

КОНСТРУКЦИЈА НА ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

> *Во големата градина на геометријата секој може да направи букет по свој вкус.*
>
> Д. Хилберт
>
> 1862-1943

Во оваа тема ќе учиш за:

- како се решава конструктивна задача;
- чекори за решавање на конструктивна задача;
- методи за решавање на конструктивна задача;
- конструкција на геометриско место на точки;
- конструкција на триаголник;
- конструкција на четириаголник.



1 ПОИМ ЗА КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

А Интересот за геометриските конструкции има зачеток уште пред новата ера. Според историските записи, барањето за решавање на конструктивните задачи само со помош линијар и шестар прв го поставил Платон (429 - 374). Оттогаш, целокупниот развиток на геометријата и некои области на математиката тесно се поврзани со развојот на геометриските конструкции во рамнина.

Денес, теоријата на геометриските конструкции претставува богата и длабоко развиена математичка област, која има широка практична примена.

Конструктивните задачи заземаат значајно место во геометријата. Нивното решавање бара учество на сложени мисловни активности и можеби ниту една друга област во математиката не го развива во таква мера логичкото мислење, како што тоа го прави геометријата, а особено рашавањето на конструктивните задачи.

Задачата која се решава со помош на дадени геометриски фигури и точно определени инструменти, при што се добива геометриска фигура што задоволува некои однапред зададени услови, претставува конструктивна задача.

При изборот на податоците во задачата треба да се внимава тие однапред да ја исклучуваат можноста за решение. На пример, со дадени: ***страната*** AC, ***аголот*** α и ***висината*** h_c, триаголникот не може да се конструира, бидејќи еден од дадените елементи (страната, аголот или висината) зависи од другите два, па правоаголен триаголник со дадена хипотенуза, катета и остар агол има вишок на даден елемент. Тоа значи, дадените елемети треба да бидат ***независни***.

При решавањето на конструктивните задачи се користи линијар и шестар. Старогрчките геометри сметале дека "вистински геометриски конструкции" се оние што можат да се изведат само со линијар и шестар.

Запомни!

Решение на една конструктивна задача е секоја фигура што ги задоволува поставените цели на задачата.

Една конструктивна задача може да има едно, две или повеќе решенија или да нема решение.

Ако во една конструктивна задача, со дадените елементи, како решение се добијат повеќе складни фигури, тогаш нив не ги сметаме за различни решенија на задачата, освен ако во задачата не се бара различна положба на фигурата.

Б Решавањето на една конструктивна задача се изведува низ следниве етапи: ***анализа, конструкција, доказ*** и ***дискусија.***

Анализа. Анализата на задачата е подготвителна етапа со која се бара начин за решавање на конструкцијата. Треба да се воочи врската помеѓу дадените елементи и бараната фигура.

Анализата се врши на фигура за која претпоставуваме дека е решение на задачата. Нацртаната фигура треба да е блиску до формата на бараната фигура, а на неа се означуваат дадените елементи. Анализата вообичаено започнува со зборовите: "Претпоставуваме дека задачата е решена", а потоа ја бараме врската меѓу дадените елементи и бараната фигура. Анализата е комплетна, ако секој чекор во постапката се образложи.

Конструкција. Конструкцијата следува по анализата и опфаќа множество од основни конструкции направени според утврден редослед, со цел да се добие бараната фигура.

Доказ. Во овој дел се уверуваме дека конструираната фигура ги задоволува условите на задачата. Честопати доказот за некои тврдења следува од конструкцијата.

Дискусија. Во анализата го определуваме начинот за конструкција на бараната фигура според дадените елементи. Во текот на конструкцијата може да се случи со дадените елементи да се добие едно, или повеќе решенија, или да нема решенија. Од тие причини, дискусијата треба да даде одговор на прашањата:

а) Дали конструкцијата може да се изведе со произволен избор на дадените елементи?

б) Колку решенија има задачата за секој можен избор на дадените елементи?

Сите наведени етапи не се секогаш строго диференцирани, но нивната примена води кон точни и потполни решенија на конструктивните задачи.

При решавање на конструктивни задачи се користат различни методи, најчесто следниве:

1) метод на геометриско место на точки;
2) метод на помошни фигури;
3) метод на алгебарска анализа;
4) метод на геометриски трансформации.

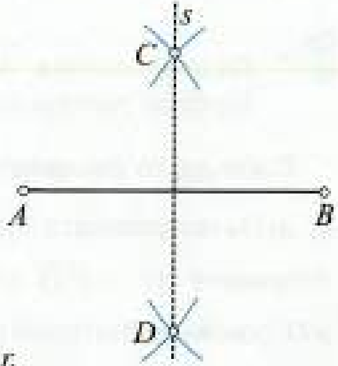
При решавањето на некои конструктивни задачи често пати се користат повеќе методи.

- Решавањето на една конструктивна задача се состои во конструкција на конечен број ***основни*** конструкции.

Вообичаено, следните пет конструкции се сметаат за основни:

1) Конструкција на права определена со две зададени точки.
2) Определување на пресечна точка на две прави.
3) Конструкција на кружница со даден центар и радиус.
4) Конструкција на пресечна точка на права и кружница.
5) Конструкција на пресечни точки на две кружници.

Согледај ги решенијата на некои конструктивни задачи, со користење на основни конструкции.



црт. 1

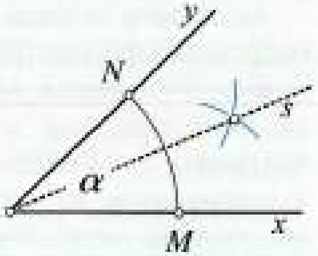
1 Конструирај симетрала на отсечката AB.

- Воочи го текот на конструкцијата (црт. 1).
- $k_1(A,r)\cap k_2(B,r)=\{C,D\}$, $r>\frac{\overline{AB}}{2}$, што значи правата CD е симетрала на отсечката AB.
- $k_1(A,r)$ значи, цртаме кружница со центар во точката A и радиус r.
- $k_2(B,r)$ цртаме кружница со центар во точката B и радиус r, а $k_1(A,r)\cap k_2(B,r)=\{C,D\}$ значи, двете кружници се сечат во точките C и D.

2 Конструирај симетрала на аголот α (црт. 2).

3 Нацртај отсечка AB и пренеси ја на дадена права p.

4 Даден е агол α. Конструирај агол што е еднаков со дадениот агол.



црт. 2

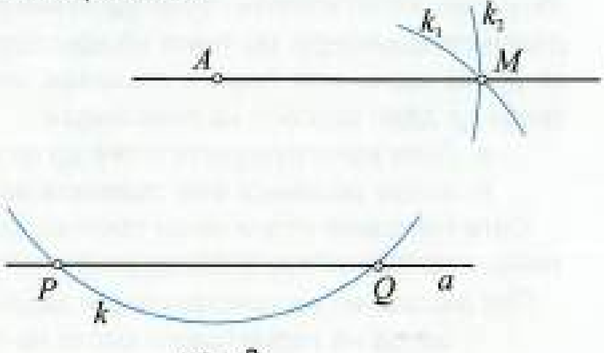
5 Дадена е права a и точка A што не лежи на дадената права. Конструирај права што минува низ точката A и е паралелна со дадената права.

Согледај го решението:

Конструираме:

$$k(A,r)\cap a=\{P,Q\};\ k_1\left(Q,\overline{AP}\right)\cap k_2\left(A,\overline{PQ}\right)=\{M\}.$$

Бидејќи $\overline{AP}=\overline{MQ},\ \overline{PQ}=\overline{AM}$, четириаголникот $PQMA$ е паралелограм, па $PQ \parallel AM$ (црт. 3). Значи, точките A и M ја определуваат бараната права.



црт. 3

6 Конструирај права што е нормална на дадена права и минува низ дадена точка.

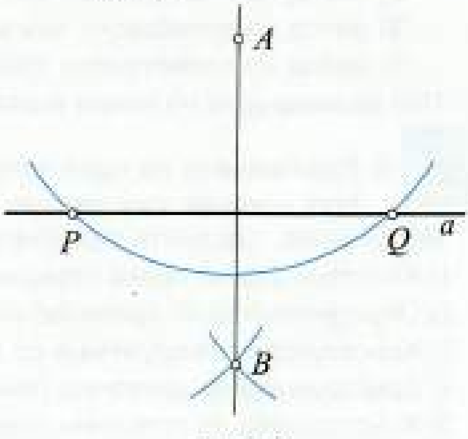
Согледај го решението:

а) Ако $A \notin a$, тогаш имаме (црт. 4):

$$k(A,r)\cap a=\{P,Q\};\ k_1(P,r_1)\cap k_2(Q,r_1)=\{B\};\ \left(r_1>\frac{\overline{PQ}}{2}\right).$$

Правата AB е бараната нормала.

б) Изведи ја конструкцијата ако $A \in a$.

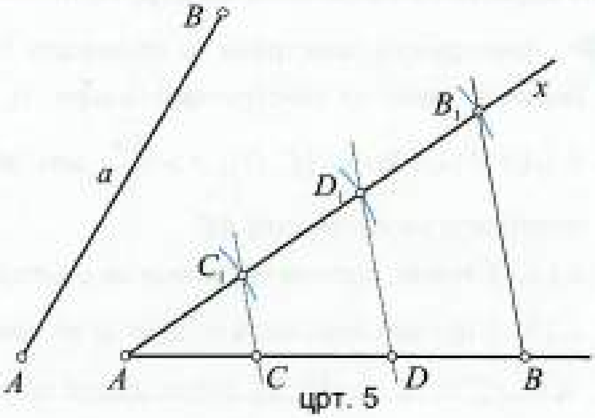


црт. 4

7 Дадена отсечка $\overline{AB}=a$ да се подели на еднакви делови или во даден однос.

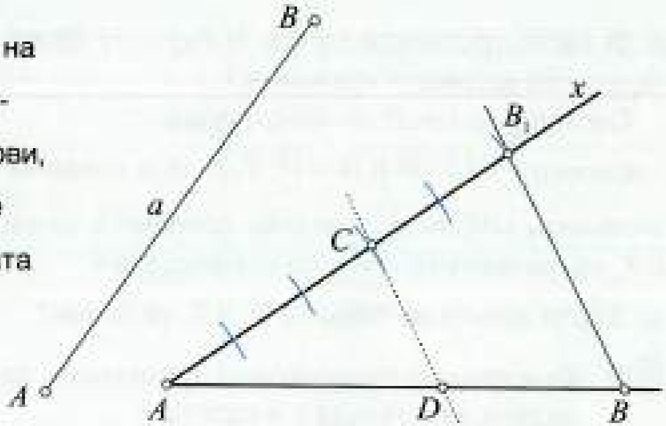
Согледај го решението:

а) На полуправата A_x (црт. 5) ги нанесуваме отсечките $\overline{AC_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{D_1B_1}$. Низ точките C_1 и D_1 повлекуваме прави паралелни со правата BB_1, кои отсечката AB ја сечат во бараните делбени точки C и D.



црт. 5

б) Ако отсечката AB треба да се подели, на пример во однос $3:2$ (црт 6.) тогаш на полуправата A_x нанесуваме 5 $(3+2)$ еднакви делови, а потоа од точката $C\left(\overline{AC}=3\right)$ повлекуваме права паралелна со BB_1 која ја сече отсечката AB во бараната точка D, т.е. $\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$.



црт. 6

Задачи:

① Определи го центарот на опишаната кружница околу триаголникот.

② Определи го центарот на впишаната кружница во триаголникот.

③ Определи го ортоцентарот во триаголникот.

④ Отсечката $\overline{AB}=10\,cm,$ подели ја на три еднакви дела.

⑤ Отсечката $\overline{AB}=a,$ подели ја во однос $3:4$.

2 ОСНОВНИ КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

Потсети се!

- Која било страна на триаголникот е помала од збирот на другите две, а е поголема од нивната разлика $|a-b|<c<a+b$.
- Збирот на внатрешните агли во триаголникот е 180^0.

За основни конструкции на триаголник ќе ги сметаме следните три задачи:

1 Конструирај триаголник ако се дадени две страни и аголот меѓу нив.

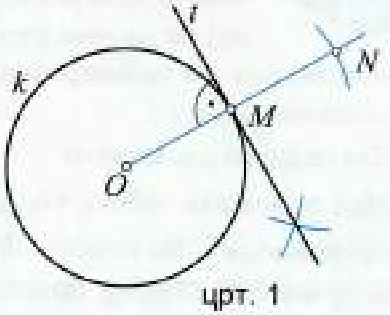
2 Конструирај триаголник ако е дадена една страна и аглите што лежат на неа.

3 Конструирај триаголник ако се дадени сите три страни.

4 Низ дадена точка M да се конструира тангента на дадена кружница $k(O,r)$.

Согледај го решението:

а) Ако дадената точка M припаѓа на кружницата k (црт. 1), бараната тангента е симетрала на отсечката $\overline{ON}=2r$. (види задача 1 од претходната лекција)



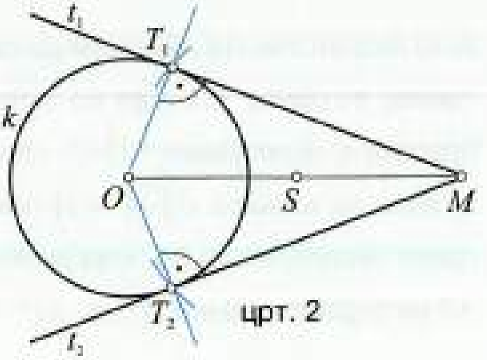
црт. 1

б) Нека дадената точка M (црт. 2) лежи надвор од дадената кружница k.

Согледај го текот на конструкцијата.

- пресекот $k_1\left(S,\overline{OS}\right)\cap k=\{T_1,T_2\}$, ($S$ е средина на отсечката OM) ги определува допирните точки T_1 и T_2 на тангентите t_1 и t_2 со кружницата k.

Зошто аглите во точките T_1 и T_2 се прави?

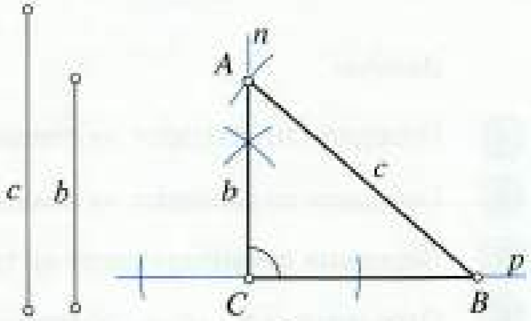


црт. 2

5 Конструирај правоаголен триаголник со дадена хипотенуза c и катета b.

Согледај го решението:

Во точката C на правата p конструираме нормала n, на која нанесуваме отсечка $\overline{CA}=b$ (црт. 3), па $k(A,c)\cap p=\{B\}$. Со што е конструиран правоаголниот триаголник ACB?



црт. 3

6 Конструирај правоаголен триаголник, ако се дадени:

а) хипотенузата c и катетата a;

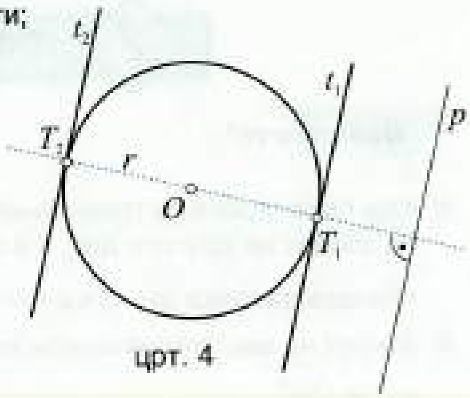
б) двете катети;

в) аголот α и едната катета.

7 Конструирај тангента на дадена кружница, паралелна со дадена права.

Согледај го решението:

Од точката O конструираме нормала на правата p (црт. 4). Во пресекот на таа нормала и кружницата ги добиваме точките T_1 и T_2 во кои се конструирани бараните тангенти t_1 и t_2.

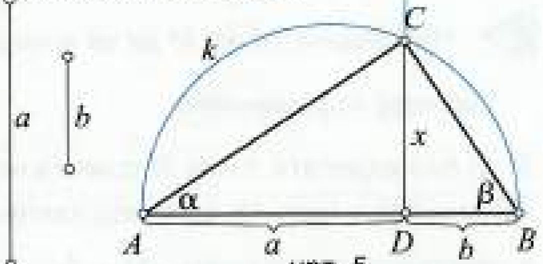


црт. 4

8 Конструирај тангента на кружница, која е нормална на дадена права.

9 Конструирај ја отсечката $x=\sqrt{a\cdot b}$, ако се дадени отсечките a и b. (Отсечката x е геометриска средина од отсечките a и b.)

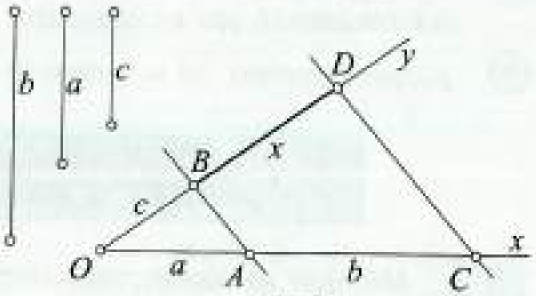
Согледај го решението:



црт. 5

Над отсечката $\overline{AB}=a+b$ (црт. 5) опишуваме полукружница k. Во точката $D\left(\overline{AD}=a\right)$ повлекуваме нормала која ја сече полукружницата k во точката C. Според Талесовата теорема, ΔABC е правоаголен.

Од сличноста на триаголниците ADC и BDC $(\measuredangle BCD=\alpha,\ \measuredangle ACD=\beta)$ следува дека $a:x=x:b$, т.е. $x=\sqrt{a\cdot b}$, што значи $\overline{DC}=x=\sqrt{a\cdot b}$.



црт. 6

10 Ако се дадени отсечките a, b и c, конструирај ја отсечката x, така што $a:b=c:x$ (позната како четврта геометриска пропорционала).

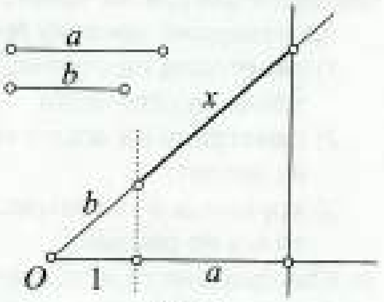
Согледај го решението:

■ На кракот O_x од аголот xOy (црт. 6) ги нанесуваме отсечките $\overline{OA}=a$ и $\overline{AC}=b$, додека на кракот Oy ја нанесуваме отсечката $\overline{OB}=c$. Низ точката C повлекуваме права паралелна со AB, која кракот O_y го сече во точката D. Според Талесовата теорема следува дека добиените отсечки се пропорционални, т.е. $a:b=c:x$. Со тоа е определена должината на отсечката $\overline{BD}=x$.

11 Конструирај отсечка $x=a\cdot b$, ако a и b се дадени отсечки.

Согледај го решението:

■ Од равенството $1\cdot x=a\cdot b$, ја добиваме пропорцијата $1:a=b:x$, каде што 1 е должина на единична отсечка, од чија големина не зависи големината на отсечката x (црт. 7).



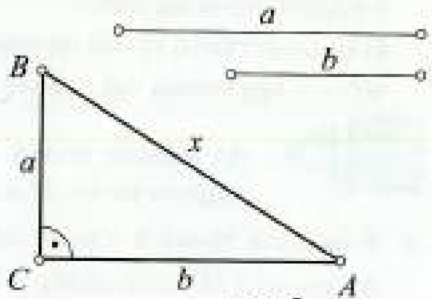
црт. 7

12 Конструирај отсечка $x=\dfrac{a\cdot b}{c}$, ако a, b и c се дадените отсечки.

13 Ако се дадени отсечките a и b, конструирај ја отсечката $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

Согледај го решението:

Од равенството $x=\sqrt{a^2+b^2}$, очигледно следува дека $x^2=a^2+b^2$. Што значи, отсечката x е хипотенуза на правоаголен триаголник, чии катети се отсечката a и b (црт. 8).



црт. 8

14 Ако се дадени отсечките a и b, конструирај ја отсечката $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

Задачи:

① Во триаголникот ABC, конструирај ја висината h_c.

② Конструирај правоаголен триаголник со хипотенуза c и агол α.

③ Конструирај правоаголен триаголник, ако се дадени проекциите a_1 и b_1 на катетите a и b соодветно врз хипотеузата.

④ Дадена отсечка $\overline{AB} = a$, подели ја во однос $3:4$.

3 РЕШАВАЊЕ НА КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ СО МЕТОД НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО ОД ТОЧКИ

А Методот на геометриски места на точки (понатаму ќе го запишиваме кратко г.м.т. или можество точки) бил познат уште во античко време, а прв го вовел грчкиот филозоф Аристотел (384-322). Тој сметал дека линијата не се состои од точки, туку место на кое можат да се распоредат точки.

Познато е дека г.м.т. е секое непразно множество од точки кои поседуваат едно заедничко својство. Најчесто, пресекот на две геометриски места на точки води кон добивањето на бараната фигура на конструктивната задача.

Ќе наведеме неколку примери, кои претставуваат г.м.т. во рамнина:

1) симетрала на отсечка е геометриско место на точки, еднакво оддалечена од крајните точки на отсечката;

2) симетрала на агол е геметриско место на точки, еднакво оддалечени од краците на аголот;

3) кружница е геометриско место на точки во таа рамнина, еднакво оддалечено од една точка во рамнина.

- Кои својства ги исполнуваат наведените геометриски места на точки?

4) множеството точки од центрите на сите кружници кои допираат дадена права во дадена точка е права што е нормална на дадената права во дадената точка;

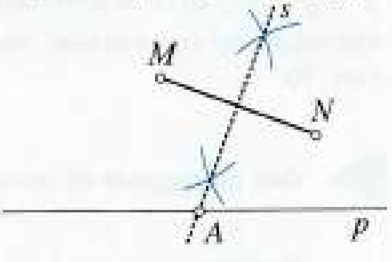
5) множеството точки што се еднакво оддалечени од две паралелни прави е права што е паралелна со дадените прави и подеднакво е оддалечена од нив;

6) множеството точки од кои дадена отсечка се гледа под прав агол, е кружница чиј дијаметар е дадената отсечка (црт. 1).

црт. 1

Б 1 На дадена права p конструирај точка A што е на еднакво растојание од две дадени точки M и N.

- Бараната точка е пресек на г.м.т. - симетралата s на отсечката MN и правата p (црт. 2), т.е. $s \cap p = \{A\}$.



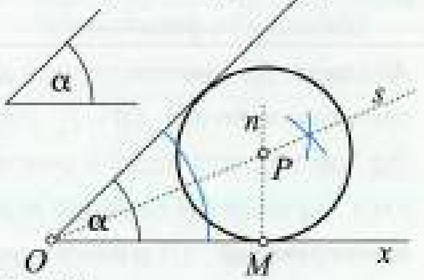
црт. 2

2 Дадена е права p и правите q и r што се сечат. На правата p определи точка S што е на исто растојание од правите q и r.

Упатство: Пресекот на правата p и симетралата на аголот образуван од правите q и r, е бараната точка S.

3 Конструирај г.м.т. кое ги допира краците на даден агол α и притоа едниот крак во дадена точка M.

Упатство: Бараното г.м.т. е кружница (црт. 3), чиј центар е во пресекот на две г.м.т. и тоа симетралата s на аголот α и нормалата n повлечена во точката M на кракот Ox, т.е. $n \cap s = \{P\}$. Радиусот на бараната кружница е отсечката MP.



црт. 3

4 Даден е агол α и точка M во неговата внатрешност. Определи точка S што е на дадено растојание d од точката M и која е еднакво оддалечена од краците на аголот α .

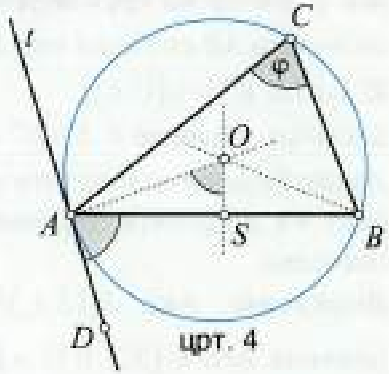
5 Конструирај г.м.т. од кое дадена отсечка AB се гледа под даден агол φ.

Согледај го решението:

Задачата ќе ја решиме на два начина:

Прв начин:

Анализа. Воочи, ΔABO (црт. 4) е рамнокрак со основа AB и $\measuredangle AOB = 2\varphi$. Оттука следува дека $\measuredangle BAO = \measuredangle ABO = 90 - \varphi$. Според тоа центарот на кружницата што е бараното геометриско место на точки е во врвот на рамнокракиот ΔABO .



црт. 4

Конструкција. 1. Конструираме рамнокрак ΔABO , со основа AB и $\measuredangle ABO = \measuredangle BAO = 90 - \varphi$.

2.Конструираме кружница $k\left(O, r = \overline{OA}\right)$(црт. 5).

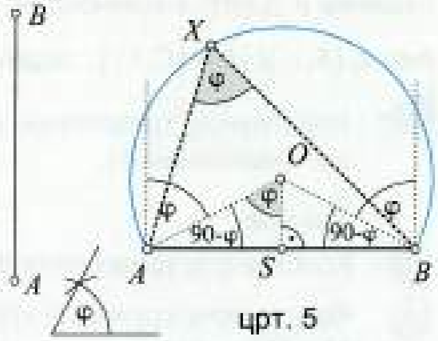
Доказ. Доказот е очигледен, бидејќи

$$\measuredangle AOB = 180^0 - 2\left(90^0 - \varphi\right) = 2\varphi .$$

Значи, $\measuredangle AXB = \varphi$ како периферен агол над тетивата AB.

Дискусија. Конструкцијата е можна за секоја отсечка

$$AB \neq 0 \text{ и } 0^0 < \varphi < 180^0 .$$



црт. 5

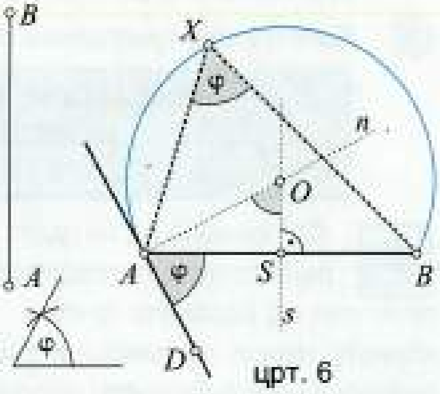
Втор начин:

Анализа. Да претпоставиме дека точката C (црт. 4) е точка од бараната кружница која претставува г.м.т. од кое отсечката AB се гледа под аголот φ.Бидејќи точката O е центар на опишаната кружница, значи ΔABO е рамнокрак, па $\measuredangle AOB = 2\varphi$. Од $OA \perp AD$ и $OS \perp AB$ следува

$$\measuredangle DAB = 0{,}5 \cdot \measuredangle AOB = \varphi .$$

Конструкција. Ја цртаме отсечката AB и $\measuredangle DAB = \varphi$ (црт.6). Во точката A конструираме нормала на AD која ја сече симетралата на отсечката AB во точката O. Точката O е центар на кружницата кое е бараното геометриско место на точки.

Доказ. Бидејќи $\measuredangle DAB = \varphi$ и $n \perp AD$ следува дека $\measuredangle SAO = 90^0 - \varphi$, па $\measuredangle AOS = \varphi$, а $\measuredangle AOB = 2\varphi$. Според тоа за секоја точка X од кружницата периферниот агол $AXB = \varphi$, како периферен агол над лакот AB на кој му одговара централен агол од 2φ.

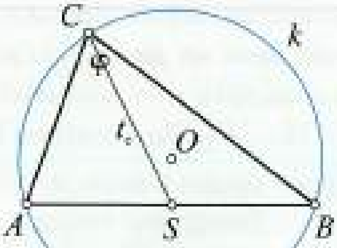


црт. 6

Дискусија. Конструкцијата е можна за секоја отсечка $AB \neq 0$ и $0^0 < \varphi < 180^0$. Ако $\varphi = 90^0$, тогаш г.м.т. е кружница чиј дијаметар е отсечката AB.

6 Конструирај триаголник ABC со страна c, агол γ и тежишна линија t_c.

Согледај го решението:



црт. 6

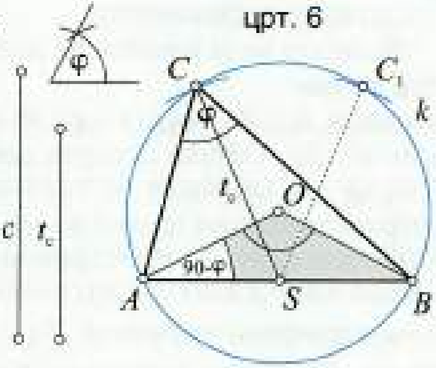
Анализа. Да претпоставиме дека ΔABC (црт. 6) е бараниот триаголник во кој $\overline{AB}=c$, $\measuredangle ACB=\gamma$ и $\overline{SC}=t_c$.

Од претходната задача очигледно е дека темето C лежи на г.м.т. од каде AB се гледа под агол γ.

Конструкција. 1) Го конструираме рамнокракиот триаголник ABO (црт. 7) со основа $\overline{AB}=c$ и аглите на основата $\measuredangle SAO=\measuredangle SBO=90^0-\gamma$. Врвот O на рамнокракиот триаголник е центар на кружницата, која е бараното г.м.т. од кое отсечката AB се гледа под агол γ.

2) $k_1(S,t_c)\cap k=\{C,C_1\}$.

Бараното решение е ΔABC или ΔABC_1.



црт. 7

Доказ. Бидејќи елементите од бараната фигура одговараат на дадените, велиме дека конструкцијата е потполна.

Дискусија. Ако $k_1(S,t_c)\cap k=\varnothing$, задачата нема решение. Ако $k_1(S,t_c)\cap k=\{C\}$, задачата има едно решение и ΔABC е рамнокрак.

Ако $k_1(S,t_c)\cap k=\{C,C_1\}$, задачата има две решенија, како во овој случај.

7 Конструирај триаголник, ако е дадено a, t_a и R (R - радиус на опишаната кружница околу триаголникот).

Задачи:

① Конструирај триаголник со страна a и висини h_b и h_c.

② Конструирај кружница која ги допира краците на даден агол α и минува низ две точки M и N (во внатрешноста на аголот).

③ Конструирај триаголник со страна b, агол β и висина h_b.

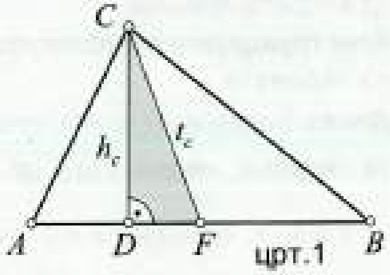
4

РЕШАВАЊЕ НА КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ СО МЕТОД НА ПОМОШНА ФИГУРА, АЛГЕБАРСКА АНАЛИЗА И ГЕОМЕТРИСКИ ТРАНСФОРМАЦИИ

A Со примена на методот на г.м.т. може да се констатира дека секоја потребна или барана точка се определува како пресек на две г.м.т. Меѓутоа, често пати се конструира прво дел од бараната фигура, наречена ***помошна фигура.*** Во таков случај велиме дека се користи метод на помошни фигури, кој во суштина не се разликува од методот на г.м.т., бидејќи и дополнувањето на помошната фигура до бараната се врши со помош на конструкција на г.м.т.

Еве еден пример од примената на овој метод:

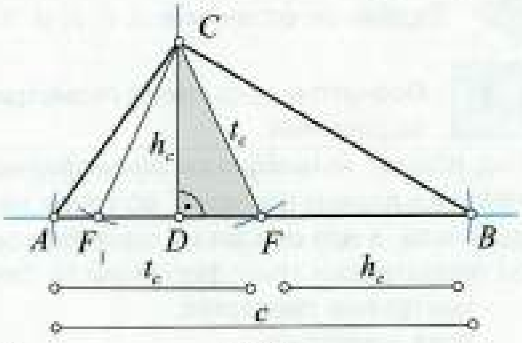
1 Конструирај триаголник ABC, ако се дадени страната c, висината h_c и тежишната линија t_c.



црт.1

Согледај го решението:

Анализа. Нека задачата е решена и нека триаголникот ABC (црт. 1) е бараниот триаголник. Очигледно е дека правоаголниот ΔDFC (помошна фигура) може да се конструира бидејќи е позната катетата h_c и хипотенузата t_c, а со тоа ќе се определи темето C на ΔABC. Темињата A и B лежат на правата DF на растојание $\frac{1}{2}\overline{AB}$ од точката F. (Зошто?)



црт.2

Конструкција. Го конструираме правоаголниот триаголник DFC (црт. 2) со катета h_c и хипотенуза t_c.

Кружницата $k\left(F,\frac{c}{2}\right)$, ја сече правата DF во бараните точки A и B, т.е. $\overline{FA}=\overline{FB}=\frac{c}{2}$.

Доказ. Со конструирање на правоаголниот ΔDFC, должината на отсечките h_c и t_c е точна по конструкција. Средишната точка F и должината на отсечката AB, исто така, следува од конструкцијата.

Дискусија. Конструкцијата на правоаголниот триаголник DFC е можна ако $h_c \leq t_c$. Што значи:

а) ако $h_c < t_c$, кружницата $k(C,t_c)$ ќе ја сече правата DE во две точки F и F_1, а со тоа задачата има две решенија, од кои едното е дадено на цртежот. Какви се тие решенија меѓу себе;

б) ако $h_c = t_c$, задачата има едно решение и тогаш ΔABC ќе биде рамнокрак триаголник;

в) ако $h_c > t_c$, задачата нема решение?

2 Конструирај триаголник со тежишни линии t_a и t_b и аголот меѓу нив φ.

Б Во некои конструктивни задачи се застапени метрички зависности меѓу дадените елементи, т.е. врската меѓу тие елементи е искажана ***алгебарски.*** Во таков случај при решавањето на конструктивните задачи, во делот на анализата се формираат равенки, во кои конструктивно треба да се определи непознатата.

Еве еден пример од примената на овој метод:

3 Дадени се отсечките a, b и c. Конструирај отсечка $x=\frac{a^2+b^2}{c}$.

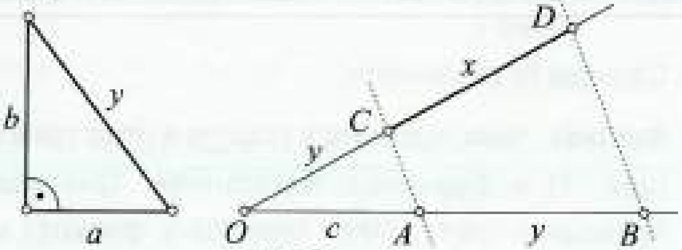
Согледај го решението:

Анализа. Нека $a^2+b^2=y^2$, од каде очигледно е дека y - е хипотенузата за правоаголен триаголник (црт. 3) со катети a и b.

Понатаму за определување на отсечката $x=\frac{y^2}{c}$, имаме $c\cdot x=y\cdot y$, т.е. $c:y=y:x$, за чија конструкција користи ја задачата 10 од втората лекција.

Конструкцијата произлегува од анализата на задачата.

Доказ. Бидејќи $AC \parallel BD$, според Талесовата теорема, имаме $\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{OC}:\overline{CD}$ или $c:y=y:x$, односно $x=\frac{y^2}{c}=\frac{a^2+b^2}{c}$.



црт.3

Дискусија. Задачата секогаш има единствено решение.

4 Дадени се отсечките a, b, c, d. Конструирај ја отсечката $x=\frac{(a+b)\cdot c}{d}$.

Познато е дека секоја геометриска фигура претставува непразно множество од точки во рамнина.

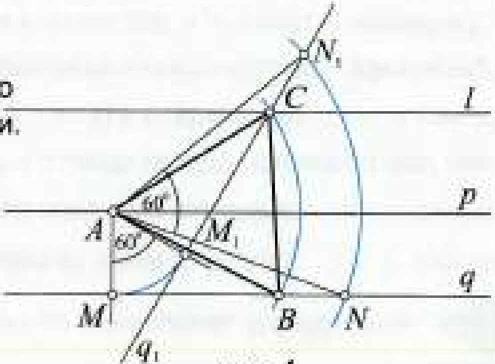
Под поимот ***геометриска трансформација*** подразбираме поместување (пресликување) на точки од дадена фигура F, во точки на истата рамнина кои образуваат фигура F_1 складна на дадената, а врз основа на однапред определените правила.

За геометриски трансформации ги сметаме, следните:

- централна симетрија;
- осна симетрија;
- ротација;
- транслација;
- хомотетија.

5 Конструирај рамностран триаголник ABC, така што неговите темиња да лежат на три паралелни прави.

Упатство. Нека се дадени паралелните прави l, p и q (црт. 4). Нека темето A лежи на правата p. Со ротација на правата q со центар во точката A за агол од 60^0 се добива правата q_1. Во пресекот на правите ℓ и q_1 е темето C на бараниот триаголник. Кружницата $k(A, AB)$ ја сече правата q во точката B, која е трето теме на бараниот триаголник.



црт. 4

6 Дадени се три концентрични k_1, k_2 и k_3. Конструирај рамностран триаголник ABC така што секое теме да лежи на различна кружница.

Задачи:

① Конструирај триаголник со страна c, висина h_c и агол α.

② Конструирај триаголник ако се дадени b, α, t_c.

③ Конструирај триаголник ако се дадени аглите α и β и висината h_c.

5 КОНСТРУКЦИЈА НА ТРИАГОЛНИК

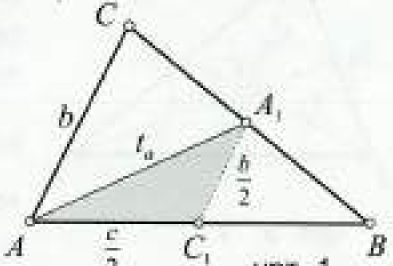
Потсети се!

- Како се конструира нормала на права во точка што лежи на правата?
- Како се конструира нормала на права од точка што не лежи на правата?
- Како се конструира права паралелна со дадена права, која минува низ точка што не лежи на дадената права?
- За средна линија на триаголник.

A 1 Конструирај триаголник ABC, ако се дадени страните b и c и тежишната линија t_a.

Согледај го решението:

Анализа. Да претпоставиме дека триаголникот ABC (црт. 1) е конструиран, со страни b, c и тежишната линија t_a. Воочуваш дека $\overline{A_1C_1} = \frac{b}{2}$. (Зошто?) (Точката C_1 е средина на AB.)



црт. 1

Конструкција. Го конструираме помошниот ΔAC_1A_1, со страни $\overline{AC_1} = \frac{c}{2}$, $\overline{AA_1} = t_a$ и $\overline{A_1C_1} = \frac{b}{2}$.

- Како ќе ги одредиш темињата B и C?

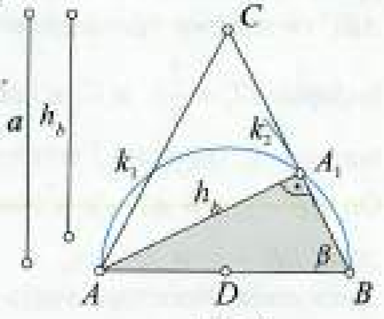
Доказ. Дадените елементи ја задоволуваат конструкцијата.

Дискусија. При произволен избор на елементите задачата може да има едно решение: $\left(\left|\frac{c}{2}-\frac{b}{2}\right| < t_a < \frac{c}{2}+\frac{b}{2}\right)$ или да нема решение.

2 Конструирај рамнокрак триаголник со основа a и висина h_c.

3 Конструирај рамнокрак триаголник со основа a и висина h_b.

Упатство. Во пресекот на кружницата $k_1\left(D, \frac{\overline{AB}}{2}\right)$ и $k_2(A, h_b)$ ја добиваме точката A_1. Триаголникот AA_1B е правоаголен. (Зошто?). Во темето A го конструираме аголот $\alpha = \measuredangle B$ чиј крак се сече со полуправата BA_1 во бараното теме C. (црт. 3)



црт. 3

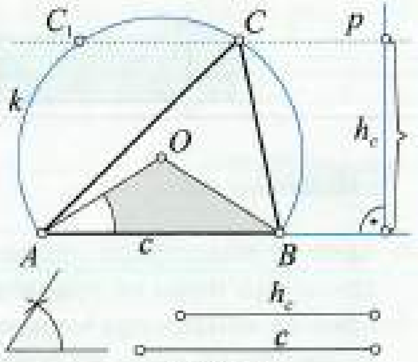
4 Конструирај триаголник ABC, со страна c, висина h_a и агол α.

5 Конструирај триаголник со страна c, агол β и тежишна линија t_c.

6 Конструирај триаголник со страна c, агол γ и висина h_c.

Согледај го решението:

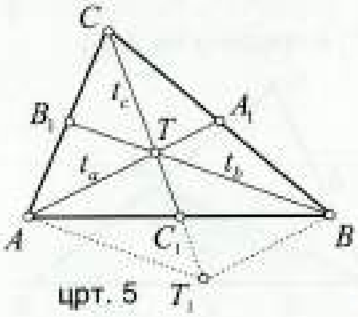
- 1) Конструирај кружница k, од која отсечката AB се гледа под агол γ, за што го користиме рамнокракиот триаголник ABO со страна $\overline{AB} = c$ и аглите на него $90^0 - \gamma$. (црт. 4)
- 2) На растојание h_c од правата AB повлекуваме права p, паралелна со AB, која ја сече кружницата k во бараната точка C, односно C_1.



црт. 4

7 Конструирај триаголник ако се дадени трите тежишни линии.

Согледај го решението:



црт. 5

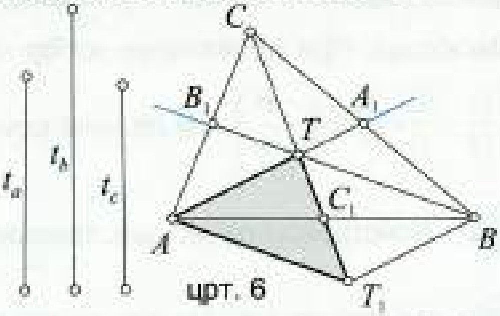
Анализа. Нека бараниот триаголник е ABC (црт. 5) со тежишните линии t_a, t_b, t_c и нивната пресечна точка T. Познато е дека тежишните линии во триаголникот се делат во однос $2:1$ (од темето кон страната). Ако ја продолжиме тежишната линија t_c преку точката C_1 за $\frac{1}{2}t_c$, ќе се добие точката T_1. Поврзувајќи ги точките A и B со T_1 ќе се добие паралелограмот AT_1BT.

- Кое својство го имаат дијагоналите на паралелограмот?

Конструкција. Го конструираме ΔTT_1A (црт. 6) со страни $\overline{AT} = \frac{2}{3}t_a$, $\overline{TT_1} = \frac{2}{3}t_c$ и $\overline{AT_1} = \frac{2}{3}t_b$.

- Како ќе ги определиме темињата B и C?

Доказ. Доволно е ако докажеме дека триаголникот ABC ги содржи трите дадени тежишни линии.



црт. 6

Бидејќи $\overline{TT_1} = \frac{2}{3}t_c$ и C_1 е средина на TT_1, следува дека точката T ја дели отсечката C_1C во однос $1:2$, односно T е тежиште. Исто така, BB_1 и AA_1 се тежишни линии на овој триаголник. Од $\overline{BT} = \overline{T_1A}$ и $\overline{AT} = \overline{T_1B}$ (како спротивни страни на паралелограмот) и T е тежиште. Следува дека $\overline{BB_1} = t_b$ и $\overline{AA_1} = t_a$.

Дискусија. Конструкцијата на ΔTT_1A е еднозначна, ако е исполнето неравенството

$$|t_b - t_a| < t_a < t_b + t_c.$$

10 Конструирај триаголник ако се дадени две тежишни линии и аголот меѓу нив.

Задачи:

① Конструирај рамнокрак триаголник со основа a и агол γ.

② Конструирај триаголник со страна c, аголот α и тежишната линија t_b.

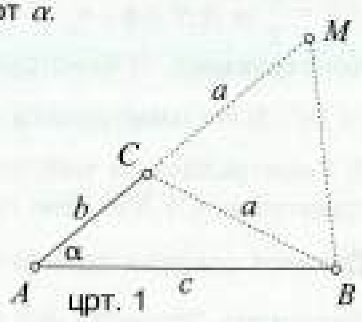
6 КОНСТРУКЦИЈА НА ТРИАГОЛНИК СО ПРИМЕНА НА АЛГЕБАРСКА АНАЛИЗА

Потсети се!

- За симетрала на отсечка.
- За симетрала на основата на рамнокрак триаголник.

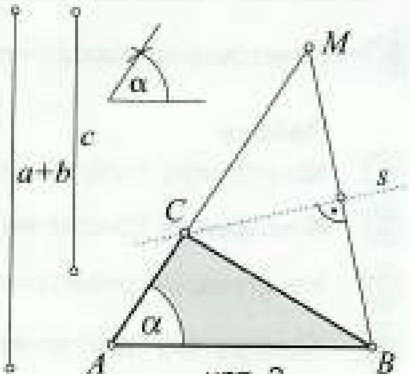
A **1** Конструирај триаголник ако е даден збирот на страните a и b, страната c и аголот α.

Согледај го решението:



црт. 1

Анализа. Нека ΔABC (црт. 1) е решение на задачата. Ако страната AC ја продолжиме за должината на страната $\overline{BC}=a$ ја добиваме отсечката $a+b=\overline{AM}$. Триаголникот ABM е еднозначно определен. Бидејќи ΔBCM е рамнокрак, заклучуваме дека темето C лежи на симетралата на отсечката BM.



црт. 2

Конструкција. Го конструираме ΔABM (црт. 2) со страна $\overline{AB}=c$, $\overline{AM}=a+b$ и аголот меѓу нив α. Темето C го добиваме во пресекот на симетралата на страната BM и страната AM.

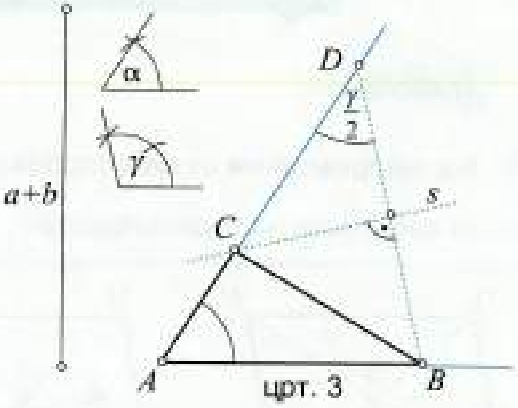
Доказ. Од конструкцијата очигледно е дека страната c и аголот α му припаѓаат на ΔABC. Од тоа што s е симетрала на страната BM, заклучуваме дека ΔBCM е рамнокрак триаголник, при што $\overline{MC}=\overline{CB}$.

Дискусија. За да постои триаголник, потребно е да се имаат предвид неравенствата за триаголник $\left(|a-b|<c<a+b\right)$ и $0^0<\alpha<180^0$. При овие услови, како пресек на симетралата s и AM се добива само една точка C. Според тоа, постои единствено решение на задачата.

2 Конструирај триаголник ако е даден збирот на страните a и b и аглите α и γ.

Упатство. Го конструираме помошниот триаголник ADB (црт. 3) со страна $\overline{AD}=a+b$ и аглите на неа α и $\frac{\gamma}{2}$.

- Зошто аголот во темето D е еднаков на $\frac{\gamma}{2}$?
- Како ќе го определиме темето C?



црт. 3

3 Конструирај правоаголен триаголник ако се дадени една катета и збирот од хипотенузата и другата катета.

4 Конструирај рамнокрак триаголник, ако се дадени основата а и разликата $b-h_a$.

Анализа. Нека триаголникот ABC е решение на задачата (црт. 4).

Нека $\overline{A_1N}=b-h_a$, тогаш $\overline{AN}=b$, па ΔANC е рамнокрак, а ΔCA_1N е правоаголен со катети $\overline{A_1C}=\frac{a}{2}$ и $\overline{A_1N}=b-h_a$.

Конструкција. 1) Конструираме симетрала на основата BC. 2) На симетралата нанесуваме отсечка $\overline{A_1N}=b-h_a$.

3) Симетралата на хипотенузата NC на правоаголниот триаголник CA_1N ја сече правата A_1N во точката A.

Доказот следува од анализата.

Дискусија. Задачата има единствено решение, бидејќи правоаголниот триаголник CA_1N е секогаш определен со катетите $\frac{a}{2}$ и $b-h_a$.

црт. 4

5 Конструирај правоаголен триаголник ABC $\left(\measuredangle c=90^0\right)$, ако е дадено: а) t_c, h_c; б) a, R.

Задачи:

① Конструирај триаголник ако е дадено c, h_c, β.

② Конструирај триаголник ако е дадено a, c, t_a.

③ Конструирај триаголник ако е дадено: збирот $a+c$, страната b и аголот α.

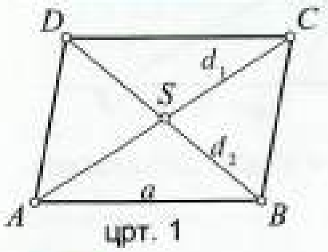
④ Конструирај триаголник со страна c, тежишна линија t_c и агол γ.

⑤ Конструирај триаголник со страна c, радиус R на опишаната кружница и тежишната линија t_k.

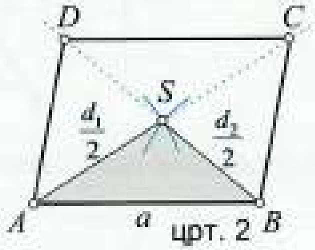
7 КОНСТРУКЦИЈА НА ПАРАЛЕЛОГРАМ

Потсети се!

- Кој четириаголник се вика паралелограм?
- За својствата на паралелограмот.



црт. 1



црт. 2

А 1 Конструирај паралелограм со страна a и дијагоналите d_1 и d_2.

Согледај го решението:

Анализа. Нека паралелограмот $ABCD$ (црт. 1) е бараниот. Бидејќи дијагоналите во паралелограмот се преполовуваат ΔABS е наполно определен, со страни $\overline{AB}=a$, $\overline{AS}=\frac{d_1}{2}$, $\overline{BS}=\frac{d_2}{2}$.

Конструкција. Го конструираме помошниот ΔABS (црт. 2) .

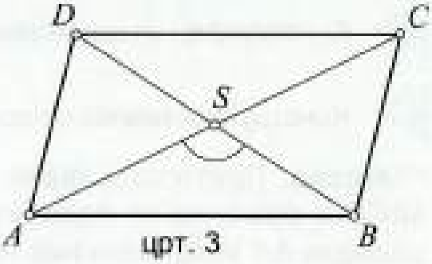
- Како се определуваат темињата C и D?

Доказ. Конструкцијата одговара на поставените услови, односно ги задоволува својствата на паралелограм.

Дискусија. Задачата има едно решение за $\left|\frac{d_1}{2}-\frac{d_2}{2}\right|<a<\frac{d_1}{2}+\frac{d_2}{2}$.

2 Конструирај паралелограм ако му се дадени дијагоналите d_1 и d_2 и аголот меѓу нив φ.

3 Конструирај паралелограм со страна $\overline{AB}=a$, дијагонала $\overline{AC}=d_1$ и аголот меѓу дијагоналите φ.

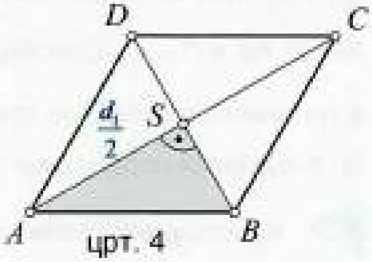


црт. 3

Упатство. Конструираме кружница k што е г.м.т. од кое отсечката $\overline{AB}=a$ се гледа под агол φ. (црт. 3) Во пресекот на кружницата $k_1\left(A,\frac{d_1}{2}\right)$ со k ја добиваме точката S, која е пресек на дијагоналите во паралелограмот.

- Како ќе ги определиме темињата C и D?

4 Конструирај ромб со страна a и дијагонала d_1.



црт. 4

Упатство.

- Познато е дека дијагоналите во ромбот се заемно нормални. Го конструираме помошниот правоаголен триаголник ASB (црт. 4), со хипотенуза $\overline{AB}=a$ и катета $\overline{AS}=\frac{d_1}{2}$ (S е точка во која се сечат дијагоналите).
- Определи ги темињата C и D.

5 Конструирај паралелограм ако се дадени дијагоналите и аголот α.

Задачи:

① Конструирај ромб со страна a и висина h.

② Конструирај паралелограм со страни a и b и висина h_a.

③ Конструирај ромб ако е дадена помалата дијагонала d_1 и острииот агол α.

8 КОНСТРУКЦИЈА НА ЧЕТИРИАГОЛНИК

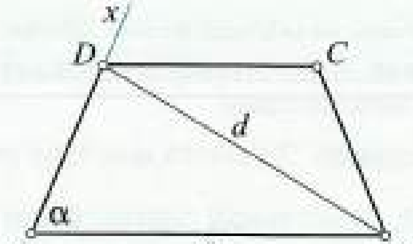
Потсети се!

- Кој четириаголник се вика трапез, а кој трапезоид?
- Наведи ги својствата на рамнокракиот трапез.

A **1** Конструирај рамнокрак трапез со дадени: основа a, агол α и дијагонала d.

Согледај го упатството.

Упатство. Нека $ABCD$ е бараниот трапез во којшто $\overline{AB}=a$, $\measuredangle BAD=\alpha$ и $\overline{BD}=d$. Темето D е во пресекот на кружницата $k(B,d)$ и кракот Ax на аголот α. Определувањето на темето C е очигледно (црт. 1).



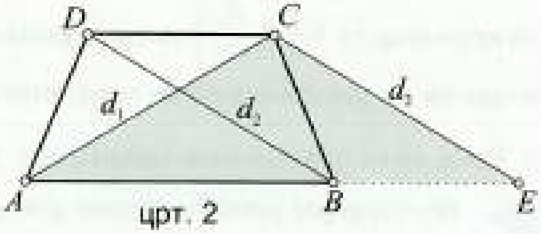
црт. 1

2 Конструирај рамнокрак трапез, ако се дадени a, α, h.

3 Конструирај четириаголник ако се дадени страните a, b, c, d и аголот α.

4 Конструирај трапез со основи a и b и дијагонала d_1 и d_2.

Упатство. Претпоставуваме дека трапезот $ABCD$ е решение на задачата (црт. 2). Ако основата AB ја продолжиме низ точката B за $\overline{BE}=b$, тогаш го добиваме паралелограмот $BECD$, па $\overline{EC}=d_2$. Според тоа, помошна фигура е триаголникот AEC со страни $\overline{AE}=a+b$, $\overline{AC}=d_1$ и $\overline{CE}=d_2$.



црт. 2

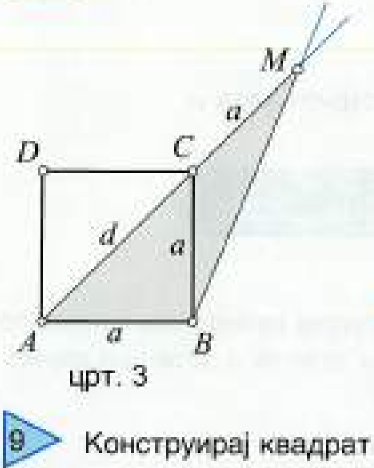
- Како ќе ги определиш темињата B и D?

5 Конструирај трапез со основи a и b и агли на основата α и β.

6 Конструирај трапез со основи a и b, дијагонала d_1 и висина h.

7 Конструирај трапез со основа a, краци c и d и едната дијагонала d_1.

Б 8 Конструирај квадрат ако е даден збирот на страната и дијагоналата $a+d$.



црт. 3

Упатство. Да ја продолжиме дијагоналата AC низ точката C за $\overline{CM}=\overline{CB}=a$ (црт. 3). Бидејќи $\overline{AM}=d+a$, $\measuredangle BAM=45^0$ и $\measuredangle AMB=\frac{45^0}{2}$. (Зошто?) Можеме да конструираме триаголник ABM. Симетралата на BM ја сече AM во точката C. (Зошто?)

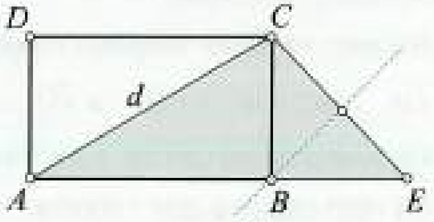
- Како ќе го определиш темето D?

9 Конструирај квадрат ако е дадена разликата од дијагоналата и страната, d - a.

10 Конструирај правоаголник ако е даден збирот од страните $a+b$ и дијагоналата d.

Упатство. Го конструираме помошниот триаголник AEC (црт. 4) со страни $\overline{AE}=a+b$, $\overline{AC}=d$ и $\measuredangle AEC=45^{0}$. Симетралата на EC ја сече AE во точката B.

- Определи ја точката D.



црт. 2

11 Конструирај правоаголник $ABCD$, ако е дадена разликата од страните $a-b$ и дијагоналата d.

Задачи:

① Конструирај ромб ако е дадено a, d_2.

② Конструирај рамнокрак трапез ако е дадено a, b $(a \parallel b)$, α и h.

③ Конструирај четириаголник ако е дадено a, b, c, d, β.

9 КОНСТРУКЦИЈА НА ПРАВИЛЕН МНОГУАГОЛНИК

Потсети се!

- Кој многуаголник е правилен?
- Дали квадратот и рамностраниот триаголник се правилни многуаголници и зошто?
- Во секој правилен многуаголник може да се впише кружница.
- Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница.
- На какви фигури е поделен правилниот многуаголник, ако секое негово теме е поврзано со центарот на многуаголникот?

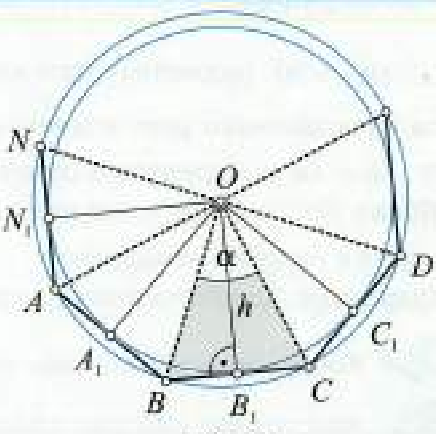
A За правилен многуаголник важат следниве теореми:

Теорема 1. Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница.

Согледај го доказот:

- Темињата на правилниот многуаголник $ABCD...N$ се поврзани со центарот на опишаната кружница (црт. 3). Добиените триаголници AOB, BOC, COD,...NOA се складни. $\left(\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}...=\overline{ON}=R;\ \overline{AB}=\overline{BC}=...=\overline{NA}\right)$.

  Од складноста на овие триаголници следува еднаквоста на нивните висини, т.е. $\overline{OA_1}=\overline{OB_1}=\overline{OC_1}...=\overline{ON_1}$.



црт. 3

Теорема 2. Во секој правилен многуаголник може да се впише кружница.

Согледај го доказот:

Доказот на оваа теорема следува од доказот на претходната теорема. Бидејќи $OA_1 \perp AB$, $OB_1 \perp BC$, $OC_1 \perp CD ...$ и $\overline{OA_1} = \overline{OB_1} = \overline{OC_1} = ... = h$, значи дека точките A_1, B_1, C_1 ... лежат на кружницата чиј центар е во темето O, а $r = h$.

Од претходните две теореми, следува:

- 1) Центарот на впишаната и центарот на опишаната кружница на правилен многуаголник се совпаѓаат и таа точка се вика ***центар на правилниот многуаголник.***
- 2) Еден од триаголниците ABO, BCO,... се вика карактеристичен триаголник.
- 3) Аголот α при врвот на карактеристичниот триаголник се вика централен агол (црт. 3) на правилниот многуаголник.
- 4) Централниот агол на карактеристичниот триаголник е еднаков на $360 : n$, т.е.

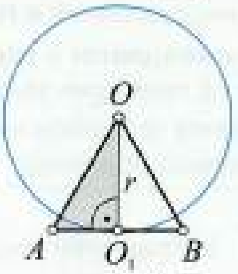
$$\alpha_n = \frac{360^0}{n}.$$

- 5) Висината на карактеристичниот триаголник се вика ***апотема*** на правилниот многуаголник.

За ***конструкција*** на правилен многуаголник ***вписан*** во дадена кружница доволно е да се знае централниот агол.

1 Конструирај правилен шестаголник во кој е впишана кружница со радиус r.

Согледај го решението:



црт. 4

Анализа. Воочуваш дека радиусот r е апотема на карактеристичниот триаголник (црт. 4) ABO со агол при врвот од 60^0.

- Каков триаголник е ΔABO?

Конструкција. Го конструираме правоаголниот триаголник AO_1O со катета $\overline{OO_1} = r$ и $\measuredangle AOO_1 = 30^0$ (користи го цртежот од анализата). Бидејќи $\overline{AO_1} = \frac{\overline{AB}}{2}$, т.е. $\overline{AB} = 2\overline{AO_1}$, страната на правилниот шестаголник е определена.

- Како ќе ги определиш останатите темиња на правилниот шестаголник?

Доказ. Со тоа што е позната апотемата $(h = r)$ на рамностраниот триаголник ABO, конструкцијата е наполно изводлива.

Дискусија. Задачата има едно решение за кое било r.

2 Конструирај рамностран триаголник во кружница со радиус r.

3 Конструирај квадрат впишан во кружница со радиус r.

4 Конструирај правилен осумаголник впишан во кружница со радиус r.

црт. 5

Согледај го решението:

Централниот агол е $\alpha_8 = \frac{360^0}{8} = 45^0$. Определувајќи го централниот агол $\alpha = 45^0$, ја определуваме и страната AB на правилниот осумаголник. Понатаму конструкцијата е очигледна. (црт. 5)

5 Да се конструира правилен петаголник впишан во кружница со радиус r.

Согледај го решението:

Конструкцијата ја извршуваме по следнава постапка:

1) Цртаме кружница $k(O,r)$, (црт. 6).

2) Во кружницата k цртаме дијаметар MN.

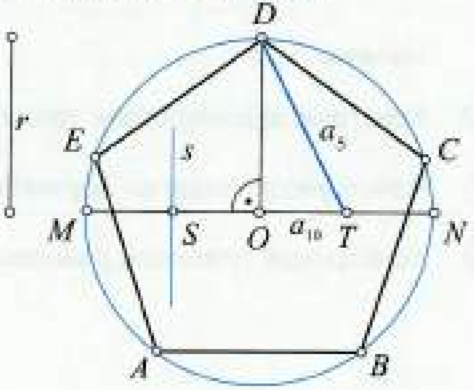
3) Конструираме радиус OD, нормален на MN.

4) Конструираме симетрала s на радиусот MO, $s \cap OM = \{S\}$.

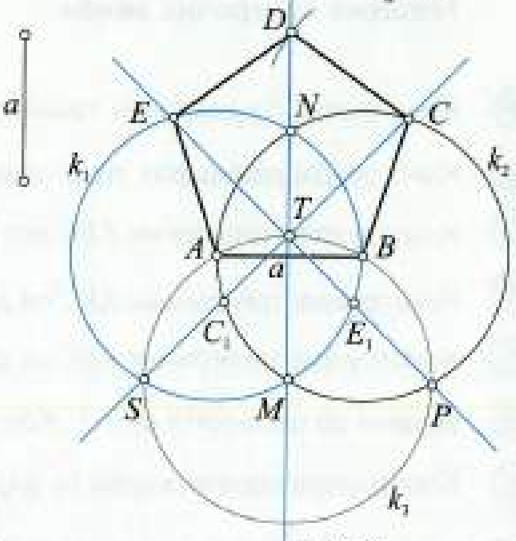
5) Конструираме кружница k_1 со центар S и радиус SD, $k_1 \cap MN = \{T\}$.

6) Ја повлекуваме отсечката $DT = a_5$.

7) Ја нанесуваме DT по кружницата почнувајќи од точката D и така се добива правилниот петаголник $ABCDE$ (црт. 6). Отсечката OT е еднаква на страната на правилниот десетаголник, впишан во истата кружница.



црт. 6



црт. 7

6 Конструирај правилен петаголник со дадена страна a.

Согледај го решението:

Конструкцијата ја изведуваме по следната постапка:

1) Цртаме отсечка $\overline{AB} = a$, 2) Конструираме пресек на кружниците $k_1(A,AB) \cap k_2(B,AB) = \{M,N\}$. 3) Ја повлекуваме правата MN. 4) Конструираме кружница $k_3(M,\overline{AB})$, $k_3 \cap MN = \{T,T_1\}$, $k_3 \cap k_2 = \{A,P\}$ и $k_3 \cap k_1 = \{B,S\}$. 5) Ги повлекуваме правите PT и ST, $ST \cap k_2 = \{C,C_1\}$ и $PT \cap k_1 = \{E,E_1\}$. 6) Конструираме кружен лак $k_4(C,AB)$, $k_4 \cap MN = \{D,D_1\}$. 7) Поврзувајќи ги точките A, B, C, D, E, го добиваме бараниот правилен петаголник.

7 Конструирај рамностран триаголник впишан во кружница со даден радиус r.

8 Конструирај правилен осумаголник опишан околу кружница со радиус r.

Упатство: Во карактеристичниот триаголник го конструираме правоаголниот триаголник AB_1O (види црт. 3).

9 Конструирај правилен дванаесетаголник, опишан околу кружница со радиус r.

Задачи:

① Конструирај рамностран триаголник опишан околу кружница со радиус r.

② Конструирај правилен осумаголник впишан во кружница со радиус r.

③ Конструирај правилен дванаесетаголник, впишан во кружница со радиус r.

Тематска контролна вежба

① Конструирај правоаголен триаголник со дадени катета a и агол α.

② Конструирај рамнокрак триаголник ако се дадени основата a и аголот при врвот γ.

③ Конструирај триаголник ABC ако се дадени страната c и височините h_a и h_b.

④ Конструирај триаголник ABC со дадени: c, R и α.

⑤ Конструирај триаголник ABC со дадени: c, R и h_c.

⑥ Дадени се отсечките d_1 и d_2. Конструирај ромб чии дијагонали се дадените отсечки.

⑦ Конструирај паралелограм со дадени: страна a, агол α и помала дијагонала d_2.

⑧ Конструирај трапез $ABCD$ со дадени: основи a и b, крак c и агол β.

⑨ Конструирај рамнокрак трапез $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ ако се дадени: $\overline{AB}+\overline{AD}$, дијагоналата d и аголот α.

⑩ Конструирај правилен дванаесетаголник впишан во кружница со даден радиус r.

ТЕМА 6

ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКИ ФИГУРИ

> *Славата на геометријата е во тоа што од толку малку принципи, земени однадвор, таа може да направи толку многу.*
>
> Исак Њутн
>
> 1642-1727

Во оваа тема ќе учиш за:

- плоштина на квадрат и правоаголник;
- плоштина на ромб и ромбоид;
- плоштина на триаголник со различни формули;
- плоштина на разни видови четириаголници;
- периметар и плоштина на правилни многуаголници;
- периметар и плоштина на круг;
- должина на кружен лак;
- плоштина на делови на круг.

I ПЛОШТИНА НА ПАРАЛЕЛОГРАМ

А Потребата за наоѓање плоштина на разни фигури се појавила многу одамна, уште во старите цивилизации на Месопотамија и Египет. Фараонот Сезоотрис ја разделил обработливата земја на Египќаните, кои плаќале данок според големината на доделената земја. Се случувало реката Нил да се излее од коритото и да уништи дел од земјишните парцели. По барање на сопствениците на оштетените парцели, фараонот испраќал земјомери за да, утврдат колкав дел од парцелите е уништен. Така настанале првите зачетоци на геометријата во Египет, од каде преминала во Грција. (Според Херодот, V век п.н.е.) Оттука потекнува името геометрија, што значи мерење земја. (Составено од грчките зборови геа - земја и метрео - мерка.)

Со развојот на цивилизацијата, во секојдневниот живот се наметнува проблемот за определување плоштина на разни објекти што се во форма на многуаголник или круг.

Во прва година учеше за поимите: точка, права, рамнина, множество, за кои рековме дека се основни поими. Основните поими не се дефинираат. Тие се осмислуваат преку некои нивни својства што едноставно се прифаќаат како такви.

Поимот плоштина, исто така, е основен поим.

За плоштината на многуаголник се прифаќаат следниве својства, т.е. аксиоми:

1. Плоштината P на еден многуаголник е секогаш позитивен реален број, т.е. $P>0$.
2. Плоштината на многуаголник не зависи од неговата местоположба, т.е. складните многуаголници имаат еднакви плоштини.
3. Ако многуаголникот е составен од два или повеќе многуаголници што не се преклопуваат, тогаш неговата плоштина е еднаква на збирот од плоштините на составните делови.
4. Квадратот со страна a има плоштина a^2.

Последното својство ја утврдува и ***мерната единица*** за плоштина, според SI (светски систем за мерки) тоа е квадратот со страна $1m$, а се вика ***квадратен метар*** и се означува со $1m^2$. Според тоа, одредувањето на периметар и плоштина на многуаголник или друга фигура претставува еден вид пресликување на таа фигура во множеството на позитивните реални броеви.

За одредување плоштина на одредена фигура се мерат потребните должини, па плоштината се пресметува според утврдени правила.

Правилата според кои се пресметува плоштината на многуаголник се викаат ***формули за пресметување на плоштина***.

Потсети се!

- Основна единица мерка за плоштина е $1m^2$.
- Кои мерни единици за плоштина се поголеми, а кои се помали од $1m^2$?
- Квадратот со страна a има плоштина $P=a^2$.

Б

1 Пресметај ја плоштината на квадрат со страна $a=35cm$.

- Според аксиомата имаме:

$P=a^2$, или $P=35^2$, т.е.

$P=1225\,cm^2=12,25\,dm^2$.

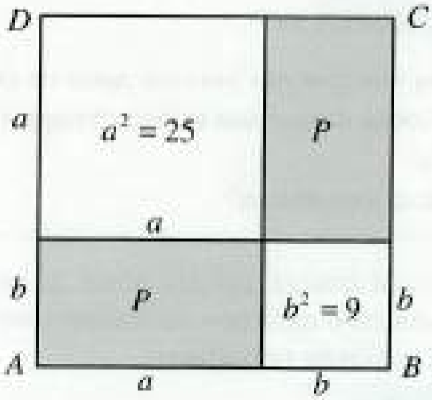
2 Пресметај ја плоштината на квадрат во кој е впишана кружница со радиус $r=2\,cm$.

3 Пресметај ја плоштината на квадрат чија дијагонала е $d=4cm$.

4 Пресметај ја плоштината на правоаголник со страна $a=5\,cm$ и $b=3\,cm$.

Согледај го решението.

- Конструираме квадрат $ABCD$ со страна $a+b$.
- Квадратот $ABCD$ го делиме на два правоаголника чии страни се a и b и два квадрата, еден со страна a и друг со страна b.
- Двата правоаголника се складни, па според аксиомата тие имаат еднаква плоштина P.
- Од својството 3 на аксиомата следува:



$$P_{ABCD}=2P+a^2+b^2 \text{ или}$$

$$(a+b)^2=2P+a^2+b^2, \text{ односно}$$

$$a^2+2ab+b^2=2P+a^2+b^2, \text{ т.е.}$$

$$P=ab.$$

Значи, плоштината на правоаголникот е $P=5\cdot 3=15\,cm^2$.

Запомни!

Плоштината на правоаголник со димензии a и b се пресметува со формулата

$$P=a\cdot b.$$

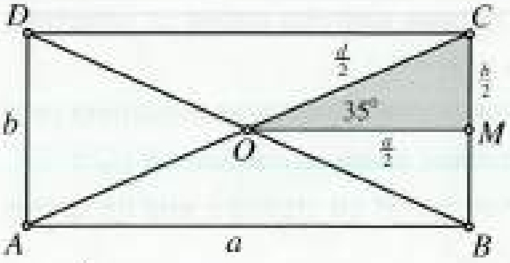
5 Пресметај ја плоштината на правоаголник со страна $a=5\,cm$ и дијагонала $d=13\,cm$.

6 Да се пресмета плоштината на правоаголник ако неговата дијагонала е $10\,cm$, а аголот меѓу дијагоналите е 70^0.

Согледај го решението:

- Дадениот агол меѓу дијагоналите лежи спроти помалата страна на правоаголникот.
- Триаголникот OMC е правоаголен со страни:

$\overline{OM}=\frac{a}{2}$, $\overline{MC}=\frac{b}{2}$, $\overline{OC}=\frac{d}{2}$ и $\measuredangle MOC=35^0$.



- Според дефиницијата на тригонометриски функции во правоаголен триаголник имаме:

$$\sin 35^0=\frac{\overline{CM}}{\overline{OC}}=0,57=\frac{\frac{b}{2}}{5},\text{ т.е. } b=5,7\ cm \quad \text{и} \quad \cos 35^0=\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}=\frac{\frac{a}{2}}{5}=0,82=\frac{a}{10},\text{ т.е. } a=8,2\ cm.$$

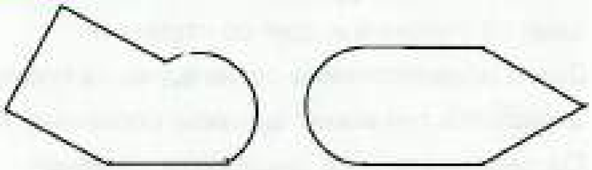
Според тоа, $P=a\cdot b=5,7\cdot 8,2=46,74cm^2$.

7 Пресметај плоштина на правоаголник, ако едната страна е $20cm$, а аголот меѓу страната и дијагоналата е 50^0. (При пресметувањето користи калкулатор.)

Потсети се!

- За кои фигури велиме дека се складни?
- Какви плоштини имаат складните фигури?
- Што е ромбоид?

ℬ **8** Дали фигурите дадени на цртежот имаат еднакви плоштини?



- Воочи: секоја фигура може да се подели на три дела, така што секој дел од едната фигура да е складен со соодветниот дел од другата фигура. Значи, дадените фигури имаат еднакви плоштини.

Запомни!

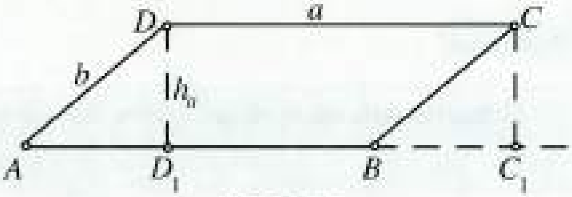
Фигурите можат да имаат еднакви плоштини иако не се складни.

9 Пресметај плоштина на ромбоид со страни a и b. (Под поимот страни a и b на некоја фигура понатаму ќе ги подразбираме мерните броеви на должините на тие страни.)

Согледај го решението:

- Конструираме $DD_1\perp AB$ и $CC_1\perp AB$.
- $\Delta AD_1D\equiv\Delta BC_1C$, поради $\overline{AD}=\overline{BC}$,

$\measuredangle DAD_1=\measuredangle CBC_1$ и $\measuredangle DD_1A=\measuredangle CC_1B=90^0$.



- Какви плоштини имаат ромбоидот $ABCD$ и правоаголникот D_1C_1CD?

Бидејќи $\overline{AD_1}=\overline{BC_1}$, страните на правоаголникот D_1C_1CD се $\overline{D_1C_1}=a$ и $\overline{DD_1}=h_a$, па

$$P_{ABCD}=P_{D_1C_1CD}=a\cdot h_a.$$

До истиот заклучок се доаѓа и ако од точките C и D се повлечат нормали кон страната b на ромбоидот.

Запомни!

Плоштината на паралелограмот со страни a и b и соодветни висини h_a и h_b се пресметува со формулата:

$$P=a\cdot h_a \text{ или } P=b\cdot h_b.$$

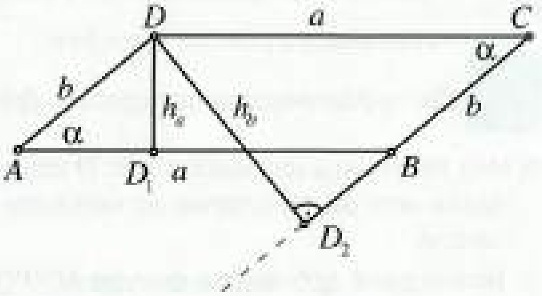
10 Пресметај ја висината h_a на ромбоидот со страни $a=8\,cm$, $b=12\,cm$ и висина $h_b=6\,cm$.

- Од $P=a\cdot h_a$ и $P=b\cdot h_b$ имаме: $a\cdot h_a=b\cdot h_b$, односно $8\cdot h_a=12\cdot 6$, т.е. $h_a=72:8=9\,cm$.

11 Страните на еден паралелограм се $a=120\,cm$ и $b=50\,cm$, а аголот меѓу нив е $\alpha=40^0$, пресметај ја плоштината на паралелограмот.

Согледај го решението:

- Според дефиницијата за тригонометриските функции за остар агол во правоаголен триаголник имаме:



- Од ΔAD_1D следува: $\sin\alpha=\frac{\overline{DD_1}}{\overline{AD}}=\frac{h_a}{b}$; $h_a=b\cdot\sin\alpha$.
- Од ΔDD_2C следува: $\sin\alpha=\frac{\overline{DD_2}}{\overline{DC}}=\frac{h_b}{a}$; $h_b=a\cdot\sin\alpha$.
- Од $P=a\cdot h_a=b\cdot h_b$ следува: $P=a\cdot b\cdot\sin\alpha=b\cdot a\cdot\sin\alpha$.

Воочи!

Плоштината на паралелограм може да се пресметува и со формулата

$$P=a\cdot b\cdot\sin\alpha.$$

Според тоа, $P=120\cdot 50\cdot\sin 40^0$, т.е. $P=3856,72\,cm^2=38,5672\,dm^2$.

Потсети се!

- Што е ромб?
- Под кој агол се сечат дијагоналите во ромбот?
- Колкав е радиусот на вишаната кружница во ромбот?

12 Одреди ја плоштината на ромбот со страна a и висина h.

Согледај го решението:

- Докажи дека ромбот $ABCD$ и правоаголникот DD_1C_1C се еднаквоплоштни.
- Плоштината на ромбот е $P=a\cdot h$.

Од ΔAD_1D имаме $\sin\alpha=\frac{h}{a}$, односно $h=a\cdot\sin\alpha$, па $P=a\cdot a\sin\alpha=a^2\sin\alpha$.

Запомни!

Плоштината на ромбот се пресметува по формулата

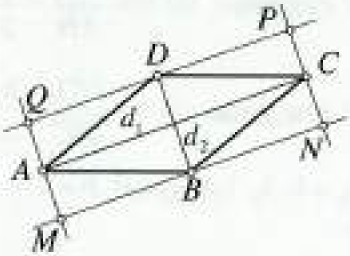
$$P=a\cdot h \text{ или } P=a^2\sin\alpha.$$

13 Пресметај ја висината на ромбот, ако страната $a=12,5\,cm$, а неговата плоштина е $80\,cm^2$.

- Од $P=a\cdot h$ следува $80=12,5\cdot h$, па оттука $h=80:12,5=6,4\,cm$.

14 Пресметај ја плоштината на ромб, ако страната $a=15\,cm$, а радиусот на впишаната кружница во ромбот е $r=3\,cm$.

Да го разгледаме својството: Дијагоналите на ромбот се сечат под прав агол.



- Низ темињата на ромбот $ABCD$ повлечи прави што се паралелни со неговите дијагонали.
- Воочи дека добиената фигура $MNPQ$ е правоаголник чии страни се $\overline{MN}=d_1$ и $\overline{NP}=d_2$, па $P_{MNPQ}=d_1\cdot d_2$.
- Каква плоштина имаат триаголниците добиени со конструкцијата?
- Плоштината на ромбот е два пати помала од плоштината на правоаголникот, т.е.

$$P_{ABCD}=\frac{d_1\cdot d_2}{2}.$$

- Дијагоналите на квадратот се еднакви меѓу себе, т.е. $d_1=d_2=d$, па неговата плоштина е

$$P=\frac{d\cdot d}{2}=\frac{d^2}{2}.$$

Воочи!

Плоштината на ромбот со дијагонали d_1 и d_2 се пресметува по формулата $P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$,

а на квадратот $P=\frac{d^2}{2}$, каде d е дијагонала на квадратот.

15 Околу квадрат е опишана кружница со радиус 4,5 cm. Пресметај ја плоштината на квадратот.

16 Пресметај ја плоштината на ромбот, ако помалата дијагонала е $d_2=10cm$ и страната е $a=13cm$.

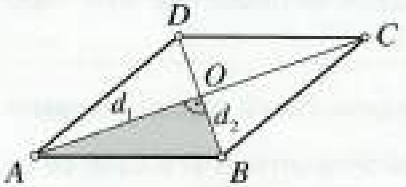
Согледај го решението.

Триаголникот ABO е правоаголен, па според Питагоровата теорема имаме:

$$a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \text{ или } \left(\frac{d_1}{2}\right)^2=a^2-\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=13^2-5^2,$$

односно $\left(\frac{d_1}{2}\right)=\sqrt{144}=12$, т.е. $d_1=24cm$.

Следствено, $P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{24\cdot 10}{2}=120cm^2$.



Запомни!

За страната a и дијагоналите d_1 и d_2 на ромбот важи: $a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2$.

17 Одреди ја плоштината на ромб, чија висина е 12 cm, а помалата дијагонала е 13 cm.

Задачи:

① Одреди ги страните на правоаголникот ако:

а) тие се однесуваат како $4:9$, а $P=144m^2$;

б) периметарот е $74dm$, а $P=3m^2$.

② Пресметај ја плоштината на паралелограм чии висини се $h_a=3cm, h_b=2\sqrt{3}\,cm$, а аголот меѓу нив е 60^0.

③ Висините на еден паралелограм се однесуваат како $2:3$, неговиот периметар е 40 cm, а остриот агол е 30^0. Пресметај ја плоштината на тој паралелограм.

④ Одреди ги висината и периметарот на ромб со плоштина $P=6dm^2$ и дијагонала $d_1=4dm$.

⑤ Во еден триаголник со страна 30 cm и соодветна висина 10 cm впишан е правоаголник, така што едната страна на правоаголникот лежи на дадената страна на триаголникот. Одреди ги страните на правоаголникот ако неговата плоштина е $63cm^2$.

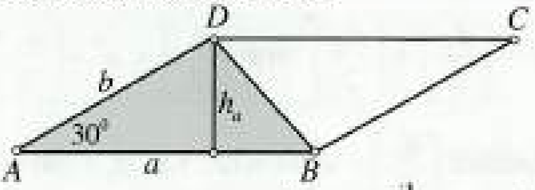
2 ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

Потсети се!

- Што е триаголник?
- Какви видови триаголници има според страните, а какви според аглите?
- Дијагоналата го дели паралелограмот на два складни триаголници.
- Колкава е плоштината на триаголникот во однос на плоштината на паралелограмот?

1 Страните на паралелограмот $ABCD$ се $a=12\,cm$ и $b=9\,cm$, а аголот меѓу нив е 30^0. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABD.

Согледај го решението.



- Плоштината на паралелограмот $ABCD$ е $P=a\cdot b\cdot\sin\alpha=12\cdot 9\cdot\sin 30^0=12\cdot 9\cdot\frac{1}{2}=54\,cm^2$.
- Триаголниците ABD и CDB се складни (зошто?), па имаат еднакви плоштини. Оттука следува $P_{ABD}=\frac{1}{2}P_{ABCD}=27\,cm^2$.
- Воочи дека висината h_a на паралелограмот е, исто така, и висина на триаголникот ABD. До истиот заклучок се доаѓа ако се повлече висината h_b кон страната b.

Запомни!

Плоштината на триаголникот со страни a, b и c и соодветни висини h_a, h_b и h_c се пресметува со формулата $P=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$.

2 Искажи ја со зборови формулата за пресметување плоштина на триаголник.

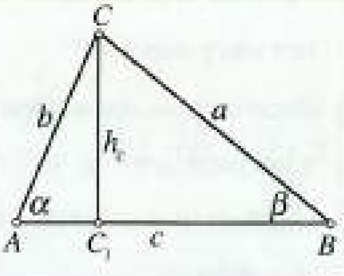
3 Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со основа 20 cm и крак 26 cm.

4 Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако се дадени неговите страни и агли.

Од триаголникот AC_1C имаме: $\sin\alpha=\frac{h_c}{b}$, т.е. $h_c=b\cdot\sin\alpha$; а од триаголникот CC_1B следува: $\sin\beta=\frac{h_c}{a}$, т.е. $h_c=a\cdot\sin\beta$. Од $P=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ добиваме

$P=\frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$ или $P=\frac{1}{2}c\cdot a\cdot\sin\beta$.

На сличен начин се добива и $P=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$.



Запомни!

Плоштина на триаголник може да се пресметува со примена на формулата:

$$P=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha.$$

5 Пресметај ја плоштината на ΔABC, ако се познати $b=8\,cm$, $c=12\,cm$ и $\alpha=36^0 45'$.

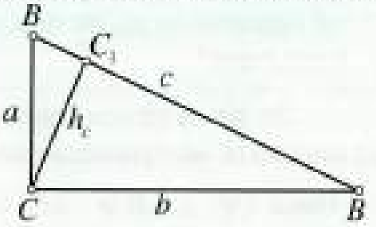
Согледај го решението:

- Аголот α е меѓу страните b и c, па според формулата имаме:

$$P=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot \sin 36^0 45'=48\cdot \sin\left(36^0+45'\right)=48\cdot \sin 36,75^0=48\cdot 0,598=28,72\,cm^2.$$

- Во рамностраниот триаголник сите агли се по 60^0, па ако a е негова страна, тогаш плоштината $P=\frac{1}{2}a\cdot a\cdot \sin 60^0$, односно $P=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

- Во правоаголниот триаголник катетите се заемно нормални, па $h_a=b$, $h_b=a$ и $P=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{a\cdot b}{2}$, или $P=\frac{c\cdot h_c}{2}$.



Запомни!

Плоштината на рамностран триаголник со страна a е $P=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

Плоштината на правоаголен триаголник со катети a и b е $P=\frac{1}{2}a\cdot b$.

6 Одреди ја хипотенузната висина h_c на правоаголен триаголник чии катети се $a=12\,cm$ и $b=16\,cm$.

7 Катетите на правоаголен триаголник се однесуваат како $5:12$, а неговата плоштина е $480\,cm^2$. Пресметај го периметарот на триаголникот.

Согледај го решението:

- Од $a:b=5:12$, следува $\frac{a}{5}=\frac{b}{12}=k$, т.е. $a=5k$, $b=12k$.

Од $P=\frac{1}{2}ab$, следува $480=\frac{5k\cdot 12k}{2}$, т.е. $k=4$, па $a=20\,cm$, $b=48\,cm$ и $c=\sqrt{a^2+b^2}=52\,cm$.
Според тоа, $L=a+b+c$, односно $L=120\,cm$.

Задачи:

① Две страни на еден триаголник се $3\ cm$ и $8\ cm$. Дали неговата плоштина може да биде: а) $10\,cm^2$; б) $15\,cm^2$; в) $12\,cm^2$?

② Две страни на триаголник се $10\,cm$ и $14\,cm$, а аголот спроти помалата од нив е 45^0. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

③ Збирот на две страни на триаголникот ABC е $15\ cm$, а висините кон нив се $4\ cm$ и $6\ cm$, соодветно. Одреди ја плоштината на триаголникот.

④ Периметарот на рамнокрак триаголник е $64\ cm$, а разликата на кракот и основата е $11\ cm$. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

⑤ Од средината на една страна на триаголник повлечени се паралелни прави со страните на триаголникот. Докажи дека плоштината на добиениот паралелограм е два пати помала од плоштината на триаголникот.

⑥ Одреди ја плоштината на правоаголен триаголник, ако неговата висина ја дели хипотенузата на отсечки од $32\ cm$ и $18\ cm$.

3 ДРУГИ ФОРМУЛИ ЗА ПРЕСМЕТУВАЊЕ ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

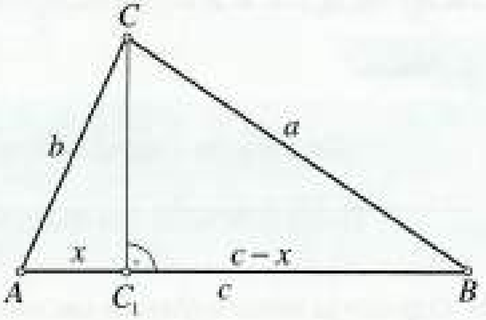
Потсети се!

- Кои елементи на триаголникот треба да се познати за да се пресмета неговата плоштина?

А 5 Пресметај ја плоштината на триаголникот, ако неговите страни се $a = 20cm$, $b = 13cm$ и $c = 21cm$.

Согледај го решението.

За да се пресмета бараната плоштина треба на некој начин да се одреди барем една од висините на триаголникот ABC.



- Нека $CC_1 \perp AB$ и $\overline{AC_1} = x$. Тогаш $\overline{C_1B} = c - x$, па од триаголникот AC_1C следува:

$h_c^2 = b^2 - x^2$, односно $h_c^2 = 13^2 - x^2$.

- Слично, од триаголникот CC_1B имаме:

$h_c^2 = a^2 - (c - x)^2$, т.е. $h_c^2 = 20^2 - (21 - x)^2$.

- Од претходните две равенства добиваме:

$13^2 - x^2 = 20^2 - (21 - x)^2$, или $169 - x^2 = 400 - (441 - 42x + x^2)$, или $42x = 210$, односно $x = 5$, па $h_c^2 = 13^2 - 5^2$, т.е. $h_c = 12cm$. Значи, $P = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 12 = 126cm^2$.

- Во основното образование вакви задачи си решавал поинаку, си ја применувал Хероновата формула (Херон е грчки математичар од Александрија, I век п.н.е.) која гласи:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ каде } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Пресметај ја плоштината на дадениот триаголник со примена на Хероновата формула.

Согледај го изведувањето на Хероновата формула:

- Од равенствата $h_c^2 = b^2 - x^2$ и $h_c^2 = a^2 - (c - x)^2$, следува $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$, од каде

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \text{ па } h_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2.$$

- Со примена на формулата $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, имаме:

$$h_c^2 = \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right); \qquad h_c^2 = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c};$$

$$h_c^2 = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2c} \cdot \frac{(b^2 + 2bc + c^2) - a^2}{2c}; \qquad h_c^2 = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2c} \cdot \frac{(b + c)^2 - a^2}{2c}, \text{ т.е.}$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a).$$

Користејќи ја формулата $s=\frac{a+b+c}{2}$ (s е полупериметар на ΔABC), т.е. $2s=a+b+c$, определуваме:

$$a-b+c=a+b+c-2b=2s-2b=2(s-b),$$

$$a+b-c=a+b+c-2c=2s-2c=2(s-c) \text{ и}$$

$$b+c-a=a+b+c-2a=2s-2a=2(s-a), \text{ па}$$

$$h_c^2=\frac{1}{4c^2}\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-a)\cdot 2s;$$

$$h_c^2=\frac{1}{c^2}\cdot 4(s-b)(s-c)(s-a)\cdot s;$$

$$h_c=\frac{2}{c}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ и}$$

$$P=\frac{1}{2}c\cdot h_c=\frac{1}{2}c\cdot\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ т.е.}$$

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

2 Пресметај ја плоштината на паралелограм чии страни се $a=13cm$, $b=14cm$ и една дијагонала $d_1=15cm$.

Согледај го решението.

- Дијагоналата AC го дели паралелограмот $ABCD$ на два складни триаголници.

Бидејќи се дадени трите страни на триаголникот ABC, неговиот полупериметар е

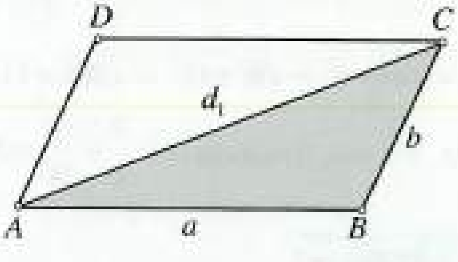
$s=\frac{a+b+d_1}{2}=\frac{13+14+15}{2}=21$, па според Хероновата формула имаме:

$P_{ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d_1)}$, односно

$P_{ABC}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$, т.е.

$P_{ABC}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\sqrt{3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3}=\sqrt{3^2\cdot 7^2\cdot 2^4}=84cm^2$,

па плоштинта на паралелограмот е $P=2\cdot 84=168cm^2$.



Запомни!

Плоштината на триаголник ако се дадени неговите страни се пресметува со

Хероновата формула $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s=\frac{a+b+c}{2}$.

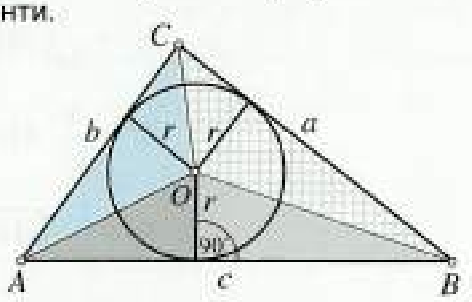
3 Одреди ја најмалата висина на триаголникот чии страни се $50\,cm, 58\,cm$ и $72\,cm$.

4 Користејќи ја Хероновата формула, изведи доказ на формулата за плоштина на рамностран триаголник.

Потсети се!

- Каде се наоѓа центарот на впишаната кружница во триаголникот?
- Колкав агол образуваат страната на триаголникот и радиусот на впишаната кружница повлечен во допирната точка?
- Каде се наоѓа центарот на опишаната кружница на триаголникот?
- Каде лежи центарот на кружницата опишана околу правоаголен триаголник?

Б 5 Нека r е радиус на впишаната кружница во триаголникот ABC со страни a, b и c. Одреди ја плоштината на триаголникот изразена преку споменатите елементи.



Согледај го решението:

- Воочи, радиусот r е висина на секој од триаголниците ABO, BOC и AOC.
- Според аксиомата за плоштина на многуаголник имаме:

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle ABO}+P_{\triangle BCO}+P_{\triangle CAO}$$

$$P=\frac{c\cdot r}{2}+\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}$$

$$P=r\cdot\frac{a+b+c}{2}=r\cdot s, \text{ бидејќи } s=\frac{a+b+c}{2}.$$

6 Пресметај го радиусот на впишаната кружница во правоаголниот триаголник чии катети се $8\,cm$ и $15\,cm$.

- За решението имаме: $P=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{8\cdot 15}{2}=60\,cm^2$;

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{289}=17\,cm$; $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{8+15+17}{2}=20\,cm$;

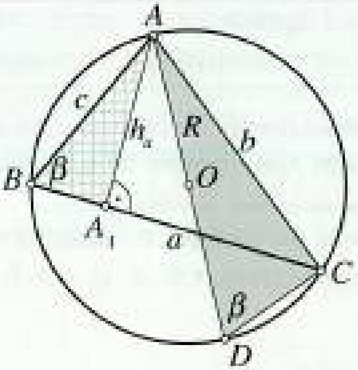
Од $P=r\cdot s$, следува $r=\frac{P}{s}=\frac{60}{20}=3\,cm$.

Запомни!

Ако r е радиус на впишаната кружница во триаголникот со страни a, b и c, тогаш $P=r\cdot s$, а $r=\frac{P}{s}$, каде $s=\frac{a+b+c}{2}$. Ако ΔABC е рамностран, тогаш $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

7 Пресметај го радиусот r на впишаната кружница во триаголникот ABC, чии страни се $a=12\,cm$, $b=15\,cm$, $c=17\,cm$.

8 Одреди го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC, чии страни се a, b и c.



Согледај го решението.

- Нека $AA_1 \perp BC, \overline{AA_1} = h_a$, и $\overline{AD} = 2R$.
- Триаголникот ADC е правоаголен (зошто?);

$\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = \beta$, како периферни агли над ист кружен лак.

- Од $\Delta\ ABA_1$ имаме $\sin\beta = \frac{h_a}{c}$,

а од ΔADC имаме: $\sin\beta = \frac{b}{AD} = \frac{b}{2R}$, па $\frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R}$, т.е. $2R \cdot h_a = b \cdot c$. Ако двете страни на последното равенство ги помножиме со a, добиваме: $2R \cdot ah_a = abc$, т.е. $4RP_\Delta = abc$. Оттука следува:

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}, \text{ а } R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4P}.$$

9 Пресметај го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот чии страни се $37\ cm$, $15\ cm$ и $44\ cm$.

Согледај го решението:

Полупериметарот на триаголникот е $s = \frac{37+15+44}{2} = 48\,cm$, па според Хероновата формула $P = \sqrt{48 \cdot (48-37)(48-15)(48-44)} = 4 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 2 = 264\,cm^2$.

За радиусот на кружницата добиваме $R = \frac{37 \cdot 15 \cdot 44}{4 \cdot 264} = \frac{185}{8} = 23\frac{1}{8}\,cm$.

Запомни!

Ако R е радиус на опишаната кружница околу триаголникот ABC со страни a, b и c, тогаш $P = \frac{abc}{4R}$, а $R = \frac{abc}{4P}$.

Ако триаголникот е рамностран, тогаш $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

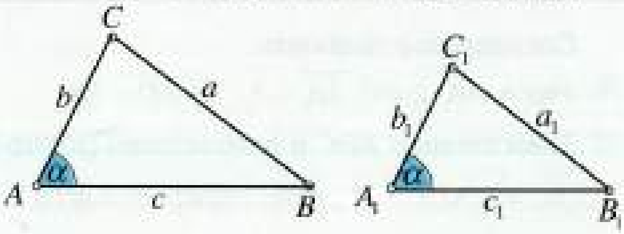
10 Основата на рамнокрак триаголник е $a = 24\,cm$, а кракот $b = 20\,cm$. Одреди го радиусот на впишаната и опишаната кружница на тој триаголник.

Потсети се!

- Кои триаголници се слични?
- Во каква зависност се соодветните страни на сличните триаголници?

- Два триаголници се слични ако два агли од едниот триаголник се еднакви со два агли од другиот триаголник.

11 Одреди го односот на плоштините на два слични триаголници.



- Страните на сличните триаголници се пропорционални, т.е. $a:a_1=b:b_1=c:c_1$. Од $P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ и $P=\frac{1}{2}b_1c_1\sin\alpha$, следува

$\frac{P}{P_1}=\frac{\frac{1}{2}bc\sin\alpha}{\frac{1}{2}b_1c_1\sin\alpha}=\frac{b\cdot c}{b_1\cdot c_1}$. Од $b:b_1=c:c_1$ следува $b=\frac{c\cdot b_1}{c_1}$, па $\frac{P}{P_1}=\frac{\frac{cb_1}{c_1}\cdot c}{b_1c_1}=\frac{c^2}{c_1^2}$.

На сличен начин докажуваме дека $\frac{P}{P_1}=\frac{a^2}{a_1^2}$ и $\frac{P}{P_1}=\frac{b^2}{b_1^2}$.

Запомни!

Плоштините на два слични триаголници се однесуваат како квадратите на соодветните страни, т.е. $P:P_1=a^2:a_1^2=b^2:b_1^2=c^2:c_1^2$.

- Истото тврдење важи и за слични многуаголници.

12 Плоштините на два слични триаголници се $49\,cm^2$ и $64\,cm^2$, а една страна на помалиот триаголник е $7\,cm$. Одреди ја соодветната страна на поголемиот триаголник.

Согледај го решението:

Од $P:P_1=a^2:a_1^2$ следува $49:64=7^2:a_1^2$, или $a_1^2=64$, т.е. $a_1=8\,cm$.

13 Плоштините на два слични триаголници се $81\,cm^2$ и $25\,cm^2$, а една страна на поголемиот триаголник е $9\,cm$. Одреди ја соодветната страна на помалиот триаголник и висината што одговара на таа страна.

Задачи:

① Радиусите на две кружници се $39\,cm$ и $17\,cm$, а централното растојание е $44\,cm$. Одреди ја должината на нивната заедничка тетива.

② Одреди ја плоштината на триаголникот ако две страни се $27\,cm$ и $29\,cm$, а тежишната линија кон третата страна е $26\,cm$.

③ Одреди ги страните на триаголникот ако тие се однесуваат како $9:10:17$, а неговата плоштина е $144\,cm^2$.

④ Правоаголниот триаголник ABC со хипотенуза $20\,cm$ и катета $12\,cm$ е сличен со триаголникот $A_1B_1C_1$, чиј периметар е $60\,cm$. Најди ја плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$.

⑤ Најголемите страни на два слични многуаголници се $35\,m$ и $14\,m$, а разликата на нивните плоштини е $105\,m^2$. Одреди ги плоштините на тие многуаголници.

4 ПЛОШТИНА НА ТРАПЕЗ И ТРАПЕЗОИД

Потсети се!

- Што е трапез?
- На што е еднаква средната линија на трапезот?
- Како се трансформира трапез во триаголник со еднакви плоштини?
- Што е трапезоид?

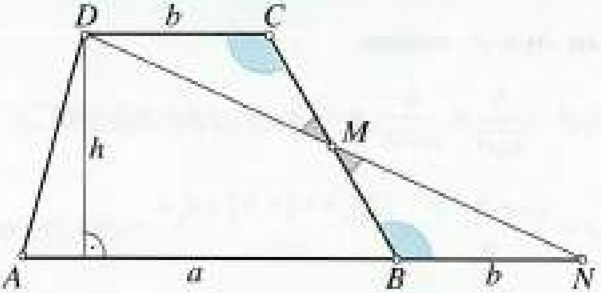
Нека точката M е средишна точка на кракот BC.

- Поради $\overline{MB}=\overline{MC}$, $\measuredangle BMN=\measuredangle CMD$ (накрсни агли) и $\measuredangle NBM=\measuredangle DCM$ (наизменични агли), според признакот АСА заклучуваме дека $\Delta BNM\cong\Delta CDM$. Оттука следува $\overline{BN}=\overline{CD}=b$.
- Триаголникот AND и трапезот $ABCD$ имаат еднакви плоштини. (Зошто?) Значи,

$$P_{AND}=P_{ABCD}=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h=m\cdot h,$$ при што $m=\frac{1}{2}(a+b)$ е средна линија на трапезот.

A **1** Пресметај ја плоштината на трапез ако се дадени основите a и b и висината h.

Согледај го решението:



2 Пресметај ја плоштината на трапез со основи 15 cm и 8 cm, а висина 10 cm.

Согледај го решението:

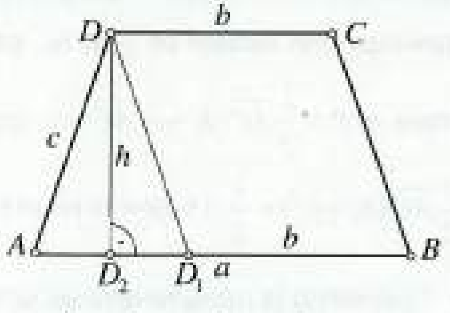
- Со примена на формулата имаме: $P=\frac{(a+b)\cdot h}{2}=\frac{(15+8)\cdot 10}{2}=115cm^2$.

Запомни!

Ако a и b се основи на трапезот, а h е негова висина, тогаш плоштината на трапезот се пресметува со формулата $P=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$.

3 Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи 14 cm, 6 cm и крак 5 cm.

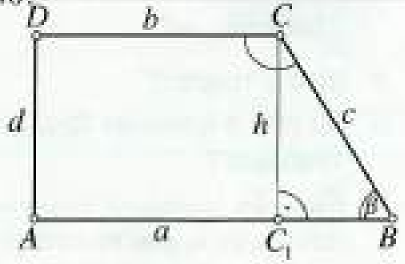
Согледај го решението:



- Со повлекување на $DD_1\parallel BC$, трапезот е поделен на паралелограм и рамнокрак триаголник со основа $\overline{AD_1}=a-b$. Од ΔAD_2D, добиваме: $h^2=\overline{AD}^2-\overline{AD_2}^2$, или

$$h^2=c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=5^2-\left(\frac{14-6}{2}\right)^2=9,$$ т.е. $h=3cm$, па $P=\frac{(a+b)\cdot h}{2}=\frac{(14+6)\cdot 3}{2}=30cm^2$.

4 Пресметај ја плоштината и периметарот на правоаголниот трапез $ABCD, AD \perp AB$, со основи $a = 25,3$; $b = 15,5$ и агол меѓу кракот и основата $130^0 40^{'}$.



Согледај го решението.

- Аглите што лежат на кракот се суплементни (зошто?), т.е.

$\beta = 180^0 - 130^0 40^{'} = 49^0 20^{'}$.

Од ΔCC_1B имаме:

$$tg\beta = \frac{h}{\overline{C_1B}} = \frac{h}{a-b}, h = (a-b)tg\beta = 9,8tg49^0 20^{'} = 9,8 \cdot 1,164 = 14,4cm.$$

$$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2} = \frac{(25,3+15,5)\cdot 14,4}{2} = 293,76cm^2 .$$

Од $\cos\beta = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{BC}} = \frac{a-b}{c}$, следува $c = \frac{9,8}{\cos 49^0 20^{'}} = 15,04cm$; а бидејќи $d = h$, тогаш

$L = a+b+c+d = 25,3+15,5+15,04+14,40 = 70,24cm.$

5 Основите на еден трапез се $23dm$ и $170cm$, а плоштината е $2m^2$. Одреди ја висината на тој трапез.

Б Трапезоид е четириаголник кој нема паралелни страни.

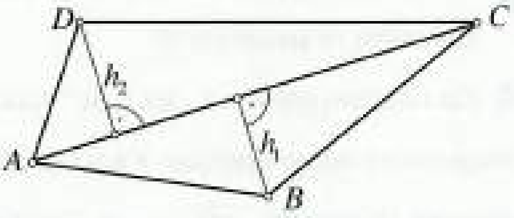
Одредувањето на плоштината на трапезоидот може да се врши на различни начини, во зависност од дадените елементи.

6 Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$, ако дијагоналата $\overline{AC} = 15cm$, а темињата B и D се оддалечени од дадената дијагонала 8 cm и 18 cm.

Согледај го решението:

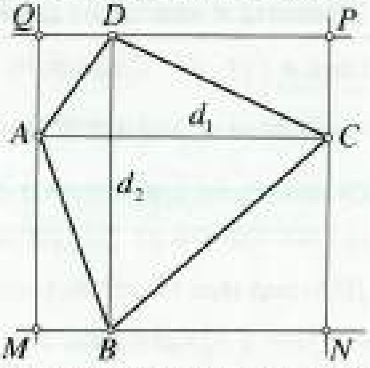
- Дијагоналата AC го дели трапезоидот на два триаголници, чии висини се h_1 и h_2, па бараната плоштина е $P = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot h_1 + \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot h_2$, односно

$$P = \frac{1}{2}\overline{AC}(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot(8+18) = 195cm^2.$$



7 Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$, ако $\overline{AB} = 20cm$, $\overline{BC} = 7cm$, $\overline{CD} = 13cm$, $\overline{AD} = 4cm$ и $\overline{AC} = 15cm$.

8 Во четириаголникот $ABCD$ дијагоналите d_1 и d_2 се заемно нормални. Пресметај ја неговата плоштина, ако $d_1 = 12cm$ и $d_2 = 17cm$.



Согледај го решението:

- Ако низ темињата на дадениот четириаголник повлечеме прави паралелни со дијагоналите, се добива правоаголникот $MNPQ$, со страни $\overline{MN} = d_1$ и $\overline{MQ} = d_2$.

Од добиените осум правоаголни триаголници, два по два се складни, па имаат еднакви плоштини. Според тоа, бараната плоштина е два пати помала од плоштината на правоаголникот $MNPQ$,

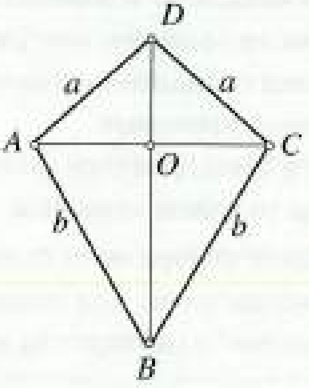
$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{12 \cdot 17}{2} = 102\,cm^2.$$

Сигурно воочи дека на истиот начин пресметувавме плоштина на ромб и квадрат.

Запомни!

Плоштина на четириаголник со заемно нормални дијагонали d_1 и d_2 се пресметува со формулата $P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

9 Страните на делтоид се $10\ cm$ и $17\ cm$, а дијагоналата што не е оска на симетрија е $16\ cm$. Пресметај ја плоштината на делтоидот.



- Четириаголникот чии две по две соседни страни се еднакви се вика делтоид.
- Дијагоналата BD е симетрала на дијагоналата AC и е оска на симетрија на делтоидот.
- Од триаголникот DOC следува

$$\overline{DO}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{OC}^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 36, \quad \text{т.е. } \overline{DO} = 6cm.$$

- Од триаголникот OBC следува:

$$\overline{OB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{OC}^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 = 17^2 - 8^2 = 225,$$

$\overline{OB} = 15cm$; $\overline{DB} = \overline{DO} + \overline{OB} = 6 + 15 = 21cm$. $P = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{DB} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 21 = 168\,cm^2$.

Пресметај ја плоштината на делтоидот со примена на Хероновата формула.

10 Пресметај ја плоштината на делтоидот со страни $8\ cm$, $15\ cm$ и агол меѓу нив 150^0.

Задачи:

① Основите и кракот на рамнокрак трапез се однесуваат како $10:4:5$, а неговата плоштина е $112\,cm^2$. Одреди го периметарот на трапезот.

② Пресметај ја плоштината на трапезот со основи $24\,cm$ и $10\,cm$, а краци $13\,cm$ и $15\,cm$.

③ Основите на еден трапез се $19\,cm$ и $2\,cm$, а дијагоналите се $17\,cm$ и $10\,cm$. Пресметај ја плоштината на тој трапез.

④ Делтоид има плоштина $480\,cm^2$. Одреди го неговиот периметар ако едната страна е $13\,cm$ и едната дијагонала е $24\,cm$.

⑤ Една соба (правоаголна форма) со димензии 5,6 m и 4,5 m е поврзана со балкон што е половина од правилен шестаголник со страна 1,6 m. Одреди ја плоштината на подот за двете простории.

5 ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА ПРАВИЛЕН МНОГУАГОЛНИК

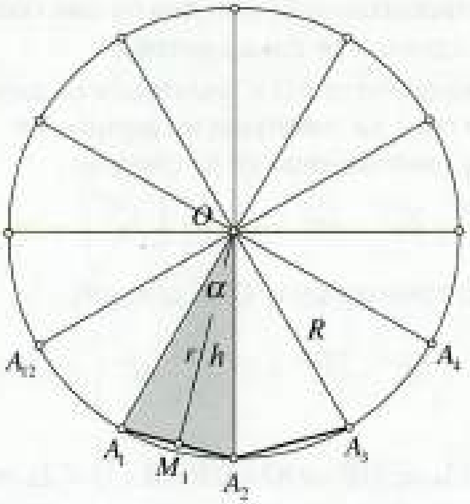
Потсети се!

- Кој многуаголник се вика правилен многуаголник?
- Дали квадратот и рамностраниот триаголник се правилни многуаголници?
- Во секој правилен многуаголник може да се впише кружница.
- Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница.
- На какви фигури ќе се подели правилниот многуаголник, ако секое негово теме се поврзе со центарот на кружницата?

- Нацртај кружница со радиус $R = 6\,cm$.
- Точките $A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{11}$ се темиња на правилен шестаголник.
- Како ќе го конструираш правилниот дванаесетаголник?

А 1 Околу правилен дванаесетаголник е опишана кружница со радиус $R = 6\,cm$. Пресметај ги плоштината и периметарот на многуаголникот.

Согледај го решението.



Страна на правилниот дванаесетаголник е отсечката $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots = \overline{A_{11}A_{12}} = a$.

Отсечката $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = ... = R$ е радиус на опишаната кружница, а $\overline{OM_1} = r = h$ е радиус на вписаната кружница на правилниот дванаесетаголник.

■ Со поврзување на центарот O со секое теме, многуаголникот е поделен на 12 складни рамнокраки триаголници. Секој од нив се нарекува ***карактеристичен триаголник*** на правилниот многуаголник. Аголот при врвот (централниот агол) во карактеристичниот триаголник A_1A_2O е $\alpha = 360^0 : 12 = 30^0$. Отсечката $\overline{OM_1} = h$ е висина во ΔA_1A_2O и се вика ***апотема*** на карактеристичниот триаголник.

Според тоа, бараната плоштина е $P = 12 \cdot P_{\Delta A_1A_2O}$, а за плоштината на карактеристичниот триаголник имаме: $P_{\Delta A_1A_2O} = \frac{1}{2}\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin 30^0 = 9\,cm^2$.

Значи, $P = 12\cdot 9 = 108\,cm^2$.

■ Плоштината на триаголникот A_1A_2O можеш да ја пресметаш и со формулата $P = \frac{1}{2}ah$, така што a и h ќе ги одредиш од триаголникот A_1M_1O, користејќи $\measuredangle A_1OM_1 = \frac{\alpha}{2}$.

Од триаголникот A_1M_1O имаме: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{1}{2}a}{R} = \frac{a}{2R}$, па

$a = 2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = 2\cdot 6\cdot\sin 15^0 = 3{,}106$. Според тоа, $L = 12\cdot a = 12\cdot 3{,}106 = 37{,}27\,cm$.

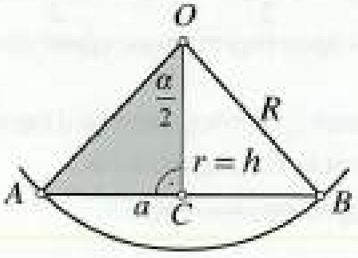
2 Пресметај плоштина и периметар на произволен правилен многуаголник ако е дадено:
а) a; б) R; в) r.

Согледај го решението:

■ Централниот агол е $\alpha = 360^0 : n$.

● Како ќе го нацрташ правилниот n – аголник?

Елементите на правилниот многуаголник се: страната a, радиусите на опишаната и вписаната кружница R и r.



Триаголникот ABO е карактеристичен триаголник, па $P = n\cdot P_{\Delta ABO}$, $L = n\cdot a$.

а) Бидејќи е дадена страната $a = \overline{AB}$, тогаш од триаголникот ACO имаме:

$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$, т.е. $h = \frac{1}{2}a\,ctg\frac{\alpha}{2}$. $P_{\Delta ABO} = \frac{1}{2}a\cdot h = \frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}a^2\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

Според тоа, $P = \frac{1}{4}n\cdot a^2\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$ и $L = n\cdot a$.

б) Ако е даден радиусот R на опишаната кружница, со примена на формулата $P_{\Delta}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, имаме: $P_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha$, а $P=\frac{1}{2}nR^2\sin\alpha$.

Од триаголникот ACO имаме: $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{R}$, или $a=2R\sin\frac{\alpha}{2}$, па $L=2nR\sin\frac{\alpha}{2}$. Значи,

$$P=\frac{1}{2}nR^2\sin\alpha,\ \text{а}\ \ L=2nR\sin\frac{\alpha}{2}.$$

в) За дадено $r=h$, од триаголникот ACO имаме: $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{AC}}{\overline{OC}}=\frac{\frac{1}{2}a}{r}=\frac{a}{2r}$, односно $a=2r\,tg\frac{\alpha}{2}$, а $P_{\Delta ABO}=\frac{1}{2}r\cdot a=\frac{1}{2}r\cdot 2r\,tg\frac{\alpha}{2}=r^2\,tg\frac{\alpha}{2}$. Следува,

$$P=n\cdot r^2\,tg\frac{\alpha}{2},\quad L=2nr\,tg\frac{\alpha}{2}.$$

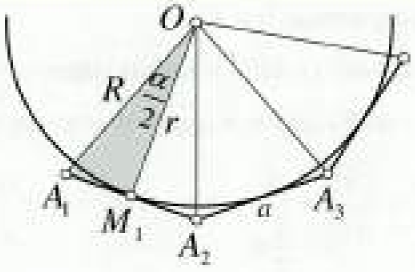
На пример, нека $a=7\,cm$ е страна на правилен осумаголник. Тогаш $\alpha=360^0:8=45^0$, па $P=\frac{1}{4}\cdot 8\cdot 7^2\cdot ctg\frac{45^0}{2}=98\cdot ctg\,22^0 30'=236,66\,cm^2$.

Претходните формули не мора да се помнат. Плоштина на правилен многуаголник може да се пресмета и преку плоштината на карактеристичниот триаголник, т.е.

$P=n\cdot P_{\Delta ABO}=n\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}na\cdot h=\frac{1}{2}L\cdot h$, каде $L=na$ е периметар на $n-$аголникот, а h е висина на карактеристичен триаголник.

3 Пресметај ги плоштината и периметарот на правилен деветаголник што е опишан околу кружница со радиус 6 cm.

Согледај го решението.



■ Од ΔA_1M_1O имаме: $\alpha=360^0:9=40^0$, $\overline{A_1M_1}=\frac{1}{2}a$,

$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{OM_1}}$, однсно $tg\,20^0=\frac{\frac{1}{2}a}{r}=\frac{a}{2r}$,

т.е. $a=2r\,tg\,20^0=4,367\,cm$.

Според тоа, $L=n\cdot a=9\cdot 4,367=39,303\,cm$ и $P=\frac{1}{2}L\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 39,303\cdot 6=117,9\,cm^2$.

4 Одреди ја плоштината на правилниот шестаголник со страна a.

Централниот агол е $\alpha = 360^0 : 6 = 60^0$. Бидејќи $R = a$, според претходните формули добиваме:

$$P = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot ctg\frac{60^0}{2} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} \text{ или } P = \frac{1}{2} \cdot 6a^2 \sin 60^0 = 3a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Запомни!

Плоштината на правилен шестаголник со страна a се пресметува со формулата

$$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

5 Пресметај ги плоштината и периметарот на правилен триаголник што е:

а) впишан во кружница со радиус $20\ cm$;

б) опишан околу кружница со радиус $20\ cm$.

Задачи:

① Една просторија треба да се поплочи со плочки во форма на правилен шестаголник со страна $12\ cm$. Колку такви плочки ќе се употребат ако просторијата има форма на правоаголник со димензии $7{,}48\ m$ и $3{,}25\ m$?

② Околу една кружница е опишан правилен многуаголник со периметар $60\,cm$ и плоштина $240\,cm^2$. Одреди го радиусот на таа кружница.

③ На кружницата со радиус $r = 6\,cm$ последователно се дадени точките A, B, C, D и E, такви што $\measuredangle AOB = 30^0, \measuredangle BOC = 60^0, \measuredangle COD = 90^0, \measuredangle DOE = 120^0$. Пресметај ја плоштината на многуаголникот $ABCDE$.

④ Рамностран триаголник и правилен шестаголник имаат еднакви плоштини. Најди го односот на нивните периметри.

⑤ Апотемите на два правилни шестаголници се однесуваат како $2:3$, а разликата од нивните плоштини е $160\sqrt{3}$. Одреди ги плоштините на тие шестаголници.

6

ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА КРУГ

Потсети се!

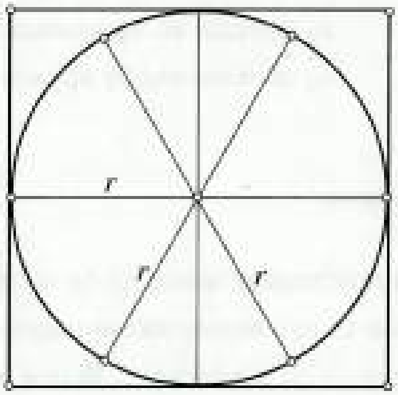
- Што е кружница?
- Што подразбираш под поимот периметар на многуаголник?
- Во основното образование си пресметувал периметар на круг со формулата $L = 2r\pi$.
- Како во основното образование дојдовте до вредноста на бројот $\pi = 3{,}1415...$?
- Дали кои било две кружници се слични фигури?

Во основното образование бројот π го пресмета како количник од периметарот на круг и неговиот дијаметар, т.е.

$$\frac{L}{d} = \pi,$$

а ознаката е земена како прва буква на грчкиот збор "*перифериа*", што значи обем.

Со определувањето на бројот π се занимавал и грчкиот математичар Архимед (живеел во III век п.н.е.). Тој во кружница со радиус r вписал правилен шестаголник, а опишал квадрат, па дошол до заклучок $3 < \frac{L}{d} < 4$. Со зголемување на бројот на страните на впишаниот и опишаниот многуаголник и со споредување на нивните периметри, пресметал дека $\frac{L}{d} = \pi$ се наоѓа меѓу $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{10}{70}$.



Повеќе математичари го одредувале бројот π.

Холандскиот математичар Лудолф (1539-1610) го пресметал бројот π на 20 децимали на правилниот полигон со 32212254720 страни, а подоцна и на 35 децимали, па оттаму овој број се нарекува ***Лудолфов број***.

- Две кружници секогаш се слични меѓу себе, а коефициентот на сличноста се определува со односот на нивните дијаметри.

Ако L_1 и L_2 се должини на две кружници, а d_1 и d_2 нивни дијаметри, тогаш:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{d_1}{d_2}, \text{ т.е. } \frac{L_1}{d_1} = \frac{L_2}{d_2} \text{ е константен број кој се означува со } \pi.$$

Оттука следува дека $\frac{L}{d} = \pi$, т.е. $L = d \cdot \pi$ или $L = 2r\pi$, бидејќи $d = 2r$. Бројот π е пресметан на многу децимали, $\pi = 3{,}14159265...$, меѓутоа најчесто се зема приближната вредност, т.е. $\pi = 3{,}14$. На пример, ако $r = 5\,cm$, тогаш $L = 2r\pi = 2 \cdot 5 \cdot 3{,}14 = 31{,}4\,cm$.

Ако при пресметувањето на периметар и плоштина на круг бројот π не се заменува, тогаш вредноста на пресметаната величина е апсолутно точна. Ако, пак, бројот π се замени со 3,14, се добива приближна вредност на резултатот.

1 Одреди го радиусот на кругот чиј периметар е $150,72\,m$.

Согледај го решението:

■ Од $L = 2r\pi$, односно $2r\pi = L$, следува $r = \frac{L}{2\pi} = \frac{150,72}{2\cdot 3,14} = 24\,m$.

2 Колкава должина има кружница со дијаметар $d = 22\,dm$?

3 Како ќе се промени периметарот на даден круг, ако неговиот радиус се зголеми: 2 пати, 3 пати, 4 пати, . . . , n пати ?

Согледај го решението.

Нека r е радиус на дадениот круг. Тогаш неговиот периметар е $L = 2r\pi$.

Ако $r_1 = 2r$, тогаш $L_1 = 2\pi \cdot r_1 = 2\pi \cdot 2r = 2\cdot(2\pi r) = 2\cdot L$.

Ако $r_2 = 3r$, тогаш $L_2 = 2\pi \cdot r_2 = 2\pi \cdot 3r = 3\cdot(2\pi r) = 3\cdot L$.

Ако $r_3 = 4r$, тогаш $L_3 = 2\pi \cdot r_3 = 2\pi \cdot 4r = 4\cdot(2\pi r) = 4\cdot L$ итн.

Значи, периметарот на кругот ќе се зголеми соодветно: 2 пати, 3 пати, . . . , n пати.

Потсети се!

● Што е круг?

■ Познато ти е дека плоштина на круг се пресметува со формулата $P = r^2\pi$.

Нека во дадената кружница е вписан правилен n – аголник $A_1A_2A_3...A_n$. Тогаш неговата плоштина се пресметува со формулата:

$$P = \frac{1}{2}L\cdot h.$$

● Каква е таа плоштина во однос на плоштината на кругот?

Во истата кружница впиши правилен многуаголник со два пати повеќе страни, т.е. многуаголник $A_1B_1A_2B_2...A_nB_n$.

Б **4** Покажи дека плоштината на круг со радиус r се пресметува со формулата

$$P = r^2\pi.$$

● Што воочуваш? Каква е плоштината на новиот многуаголник во однос на плоштината на кругот?

■ Ако P е плоштина на кругот, сигурно воочи дека разликата $P - P_n$ се намалува, ако се зголемува бројот на страните на правилниот n – аголник.

Ако бројот на страните на правилниот n – аголник се зголемува до бесконечност, тогаш што ќе стане со разликата: $P-P_n$; $L-L_n$; $r-h$?

Сигурно воочи дека секоја од разликите ће повеќе и повеќе ќе се намалува, т.е. ќе се стреми кон нула, а тоа го означуваме:

Ако $n \to \infty$, тогаш $P-P_n \to 0, L-L_n \to 0$ и $r-h \to 0$.

Значи, со зголемување на бројот на страните на правилниот n – аголник до бесконечност, тој се стреми да го покрие кругот, па разликата $P-P_n$ ќе биде толку мала, што може да се занемари, т.е. $P-P_n=0$. Аналогно, $L-L_n=0$ или $L=L_n$ и $r-h=0$ или $r=h$. Оттука имаме:

$P=P_n=\frac{1}{2}L_n\cdot h$, а бидејќи $L_n=L=2r\pi$ и $h=r$, следува:

$$P=\frac{1}{2}\cdot 2r\pi\cdot r=\pi r^2.$$

На пример, ако радиусот на кругот е $r=10cm$, тогаш неговата плоштина е $P=\pi\cdot 10^2$, т.е. $P=314\,cm^2$. Плоштината е пресметана со апсолутна точност ако запишеме $P=100\pi\,cm^2$.

Запомни!

Периметарот на кругот со радиус r се пресметува со формулата $L=2r\pi$, а неговата плоштина со формулата $P=r^2\pi$.

5 Периметарот на еден круг е $32\pi\,cm$. Одреди ја плоштината на кругот.

Задачи:

① Одреди го радиусот на кругот, ако мерните броеви на неговата плоштина и периметар се еднакви.

② Ако радиусот на еден круг се зголеми 4 пати, тогаш како ќе се промени:

а) неговиот периметар; б неговата плоштина?

③ Макара со дијаметар $1{,}4\,m$ прави 80 завртувања околу својата оска за една минута. Одреди ја брзината на движење на точката што лежи на кружницата на макарата.

④ Еден коњ со главата е врзан за кол со јаже долго $10{,}5\,m$. Одреди ја плоштината на делот од ливадата од кој коњот може да пасе трева.

⑤ Во една кружница дадена дадени се две паралелни тетиви чие меѓусебно расојание е $39\,dm$. Тетивите се долги $14\,dm$ и $40\,dm$. Одреди ја плоштината на кругот.

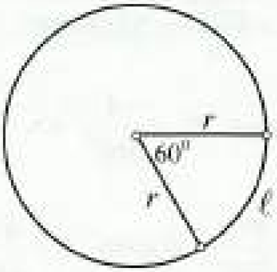
7 ДОЛЖИНА НА КРУЖЕН ЛАК. ПЛОШТИНА НА ДЕЛОВИ НА КРУГ

Потсети се!

- За кој агол велиме дека е централен агол?
- Што е кружен лак?
- Како се пресметува должина на кружница?
- Должината на една кружница е $72\,dm$. Колкава должина има кружниот лак чиј централен агол е 1^0?

А

1 Пресметај ја должината на кружниот лак чиј централен агол е 60^0, а $r = 10\,cm$.



Аголот од 60^0 е $\frac{1}{6}$ од полниот агол, па должината ℓ на кружниот лак е $\frac{1}{6}$ од периметарот на кругот, т.е. $\ell = \frac{1}{6}\cdot 2r\pi = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 10\pi = \frac{10\pi}{3} = 10,46\,cm.$

Воопшто: $\ell_{1^0} = \frac{1}{360^0}\cdot 2r\pi = \frac{\pi r}{180^0}$; $\ell_{2^0} = \frac{\pi r}{180^0}\cdot 2$; $\ell_{3^0} = \frac{\pi r}{180^0}\cdot 3$;...; $\ell_\alpha = \frac{\pi r}{180^0}\cdot \alpha.$

Запомни!

Должината на кружен лак се пресметува со формулата $\ell = \frac{\pi r \alpha}{180^0}$, каде r е радиус на кружницата, а α е централниот агол што одговара на лакот.

2 Пресметај ја должината на кружниот лак, ако централниот агол е $\alpha = 50^0 46'$ и $r = 2,5\,m.$

Аголот ќе го претвориме во степени и имаме: $\alpha = 50^0 46' = 50^0 + \left(\frac{46}{60}\right)^0 = 50,76^0$, па

$\ell = \frac{\pi\cdot 2,5\cdot 50,76^0}{180^0} = 2,215\,m.$

3 Одреди го централниот агол α ако должината на лакот е $\ell = 2\,m$, а $r = 3\,m.$

Потсети се!

- Што е кружен исечок?
- Со која формула се пресметува плоштина на круг?
- Кој дел од кругот е кружниот исечок чиј централен агол е 1^0?

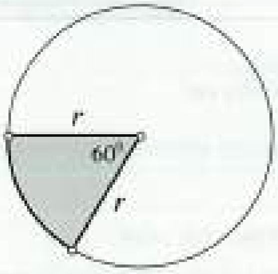
Б

4 Пресметај ја плоштината на кружниот исечок чиј централен агол е 60^0, а $r = 10\,cm$.

Согледај го решението.

- Делот од кругот што е зафатен со едем негов централн агол се вика ***кружен исечок*** или ***кружен сектор***.

. Централниот агол $\alpha = 60^0$ е $\frac{1}{6}$ од 360^0, па плоштината



на кружниот исечок е $\frac{1}{6}$ од плоштината на кругот, т.е.

$$P = \frac{1}{6}\pi \cdot 10^2 = \frac{100\pi}{6} = 52,36\,cm^2.$$

Воопшто: $P_{1^0} = \frac{1}{360^0} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^2}{360^0}$; $P_{2^0} = \frac{\pi r^2}{360^0} \cdot 2^0$; $P_{3^0} = \frac{\pi r^2}{360^0} \cdot 3^0$;...; $P_\alpha = \frac{\pi r^2}{360^0} \cdot \alpha = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^0}$.

Бидејќи $\ell = \frac{\pi r \alpha}{180^0}$, имаме $P = \frac{\pi r \alpha \cdot r}{180^0 \cdot 2} = \frac{\ell r}{2}$.

Запомни!

Плоштината на кружен исечок се пресметува со формулата $P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^0}$ или $P = \frac{\ell r}{2}$, каде r е радиус на кругот, α е централниот агол и ℓ е должината на кружниот лак на соодветниот централен агол.

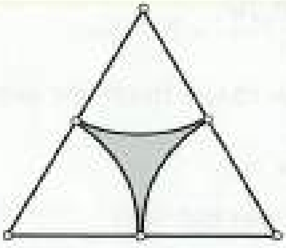
5 Пресметај ја должината на кружниот лак и плоштината на кружниот исечок што одговараат на страната на правилниот петаголник впишан во кружница со радиус $r = 6\,cm$.

Согледај го решението:

- Централниот агол е $\alpha = 360^0 : 5 = 72^0$, па $\ell = \frac{\pi r \alpha}{180^0} = \frac{3,14 \cdot 6 \cdot 72}{180} = 7,53\,cm$ и

$$P = \frac{\ell r}{2} = \frac{7,53 \cdot 6}{2} = 22,62\,cm^2.$$

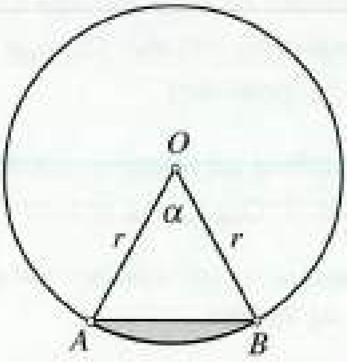
6 На цртежот е даден рамностран триаголник со страна $a = 6\,dm$. Пресметај плоштина и периметар на шрафираниот дел од триаголникот.



- Дел од кругот ограничен со еден кружен лак и неговата соодветна тетива се вика кружен отсечок или кружен сегмент.

7 Пресметај ја плоштината на кружниот отсечок со централен агол од 60^0 и $r = 12\,cm$.

Согледај го решението.



Нека P_1 е плоштина на триаголникот ABO,

а P_2 плоштина на кружниот исечок. Тогаш, плоштината на кружниот отсечок е:

$$P = P_2 - P_1, \text{ или}$$

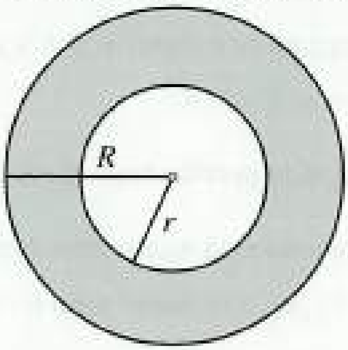
$$P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^0} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}, \text{ односно}$$

$$P = \frac{\pi 12^2 60^0}{360^0} - \frac{12^2\sqrt{3}}{4}, \text{ т.е. } P = 24\pi - 36\sqrt{3} = 12\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right) cm^2.$$

Запомни!

Плоштината на кружен отсечок е еднаква на разликата од плоштината на кружниот исечок и плоштината на триаголникот впишан во него.

8 Пресметај ја плоштината на кружниот отсечок ако се дадени $\alpha = 56^0$, $r = 4{,}5\,cm$.

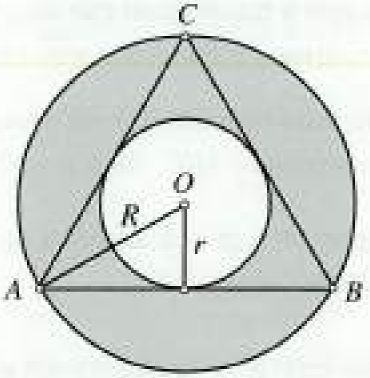


- Делот од рамнината ограничен со две концентрични кружници се вика ***кружен прстен***.

Ако R и r се радиуси на кружниците, тогаш

$$P = \left(R^2 - r^2\right)\pi.$$

9 Пресметај ја плоштината на кружниот прстен формиран со опишаната и впишаната кружница на рамностран триаголник со страна $a = 2\,dm$.



Потсети се: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$P = \pi\left(\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\right) = \pi\left(\frac{3a^2}{9} - \frac{3a^2}{36}\right), \text{ т.е.}$$

$$P = \pi \cdot \frac{4a^2 - a^2}{12} = \pi \cdot \frac{a^2}{4} = \pi \cdot \frac{2^2}{4} = \pi\, cm^2.$$

10 Пресметај ја плоштината на празниот дел од напречниот пресек на водоводна цевка, ако дијаметарот на надворешниот круг е $10\,cm$, а дебелината на цевката е $2\,mm$.

Задачи:

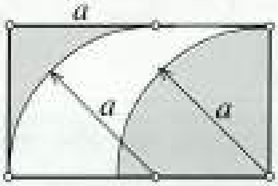
① Периметарот на една макара е $540\ mm$. Јажето (ременот) ја допира макарата по лак со должина од $200\ mm$. Одреди го аголот што го зафаќа макарата со допирниот дел од јажето (ременот).

② Една кривина од железничката пруга е дел од кружница со радиус $1200\ m$ и има должина $450\ m$. Одреди го аголот што му одговара на лакот од пругата.

③ Плоштината на кружен исечок е $3\pi\ cm^2$, а соодветниот агол е 30^0. Пресметај ја плоштината на кругот.

④ Два складни круга со радиус $4\ cm$ се сечат и имаат заедничка тетива долга $4\ cm$. Пресметај ја плоштината на пресекот.

⑤ Пресметај ја плоштината на обоениот дел на цртежот.



Тематска контролна вежба

① Одреди ги страните a, b и дијагоналата d на правоаголникот со плоштина $36\,m^2$, ако $a:b=9:4$.

② Одреди ја плоштината на ромбот со страна $12\ cm$ и агол 45^0.

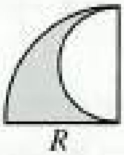
③ Висините на еден паралелограм се однесуваат како $2:3$, неговиот периметар е $40\ cm$, а острриот агол е 30^0. Одреди ја плоштината на паралелограмот.

④ Даден е рамнокрак триаголник со основа $20 cm$ и крак $26 cm$. Одреди ја неговата плоштина и висината кон кракот.

⑤ Одреди го радиусот на впишаната и опишаната кружница на правоаголниот триаголник ABC, ако $a=12 cm$ и $b=16 cm$.

⑥ Пресметај ја плоштината на трапезот чии дијагонали $d_1=12 cm$ и $d_2=8 cm$ се заемно нормални.

⑦ Пресметај ги периметарот и плоштината на обоениот дел на цртежот, ако $R=10 cm$.



ТЕМА 7

ЕЛЕМЕНТИ ОД СТЕРЕОМЕТРИЈА

> *Нека никој кој не е вешт во геометријата не го преминува мојот праг.*
>
> Платон 427-347 пне

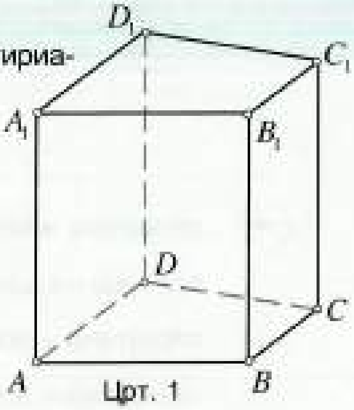
Во оваа тема ќе учиш за:

- пресеци на призма со рамнина;
- плоштина и волумен на призма;
- пресеци на пирамида со рамнина;
- плоштина и волумен на пирамида;
- плоштина и волумен на потсечена пирамида;
- пресеци на цилиндар со рамнина;
- плоштина и волумен на цилиндар;
- пресеци на конус со рамнина;
- плоштина и волумен на конус;
- плоштина и волумен на потсечен конус;
- плоштина на сфера и делови на сфера;
- волумен на топка и делови на топка.

1 ПРИЗМА. ПРЕСЕЦИ НА ПРИЗМА СО РАМНИНА

Потсети се!

- На цртеж 1 е претставена права четириаголна призма.
- Како се викаат четириаголниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ кај призмата?
- Какви фигури се четириаголниците ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1 и ADD_1A_1?
- Како се викаат отсечките AB, BC, A_1B_1, B_1C_1,..., а како отсечките AA_1, BB_1, CC_1 ...?



Црт. 1

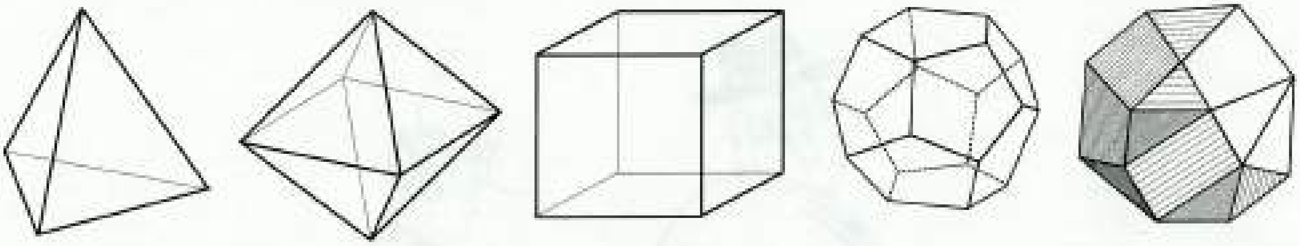
За коцката, квадарот и воопшто за призмата велиме дека се *геометриски тела*.

Запомни!

Под поимот геометриско тело или тело подразбираме ограничен и затворен дел од просторот.

Ако површината со која е заградено едно тело е составена само од многуаголници, тогаш тоа тело се вика ***рабесто тело*** или ***полиедар***.

На цртежот 2 се дадени некои видови полиедри.



Црт. 2

Многуаголниците што ја образуваат границата на полиедарот се викаат ***ѕидови***, а нивните страни-*рабови* на полиедарот. Темињата на многуаголниците се и темиња на полиедарот. Секое теме на полиедарот е заедничка точка барем на три негови рабови.

- Полиедарот што е расположен на иста страна од рамнината определена со кој било негов ѕид се вика ***конвексен*** полиедар.
- Какво геометриско тело е призмата?

Запомни!

Призма е полиедар ограничен со два складни многуаголници што лежат на две паралелни рамнини, а останатите ѕидови се паралелограми кои имаат по една заедничка страна со секој од многуаголниците.

Дадена е петаголна призма (црт. 3).

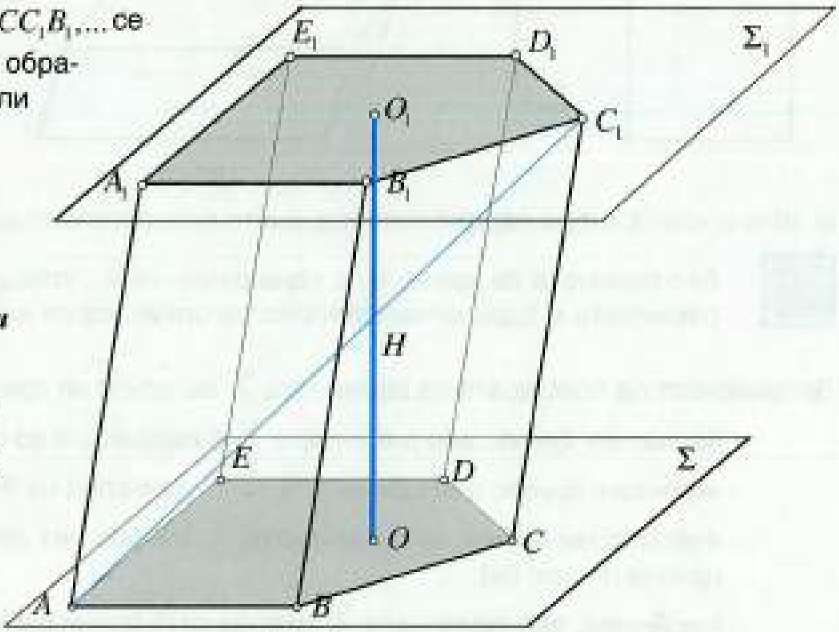
- Многуаголниците $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ лежат на паралелните рамнини Σ и Σ_1 и се викаат ***основи на призмата***.

- Паралелограмите ABB_1A_1, BCC_1B_1,... се викаат ***бочни ѕидови*** и тие ја образуваат бочната површина или обвивката на призмата.

- Отсечките AB, BC, CD, ..., A_1B_1, B_1C_1,...се ***основни рабови*** на призмата, а отсечките AA_1, BB_1, CC_1,...се ***бочни рабови*** на призмата.

- Призмата чии бочни рабови се нормални на основите се вика ***права призма***.

- Како се вика призмата чии бочни рабови не се нормални на основите?



Црт. 3

- Права призма чија основа е правилен многуаголник се вика ***правилна призма***.

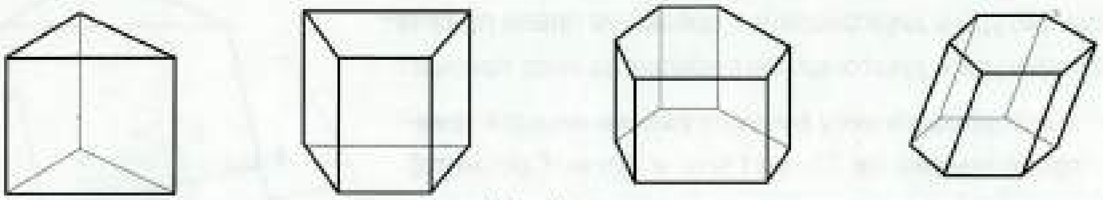
Растојанието меѓу основите на призмата се вика висина на призмата и вообичаено се означува со H, при што $H = \overline{OO_1}$ (црт. 3).

- Какви се меѓу себе бочните рабови и висината на правата призма?

- Отсечката чии крајни точки се две темиња на призмата што не лежат на ист ѕид, се вика ***просторна дијагонала*** или само ***дијагонала*** на призмата.

На цртежот 3 тоа се отсечките AC_1, AD_1, BD_1 итн.

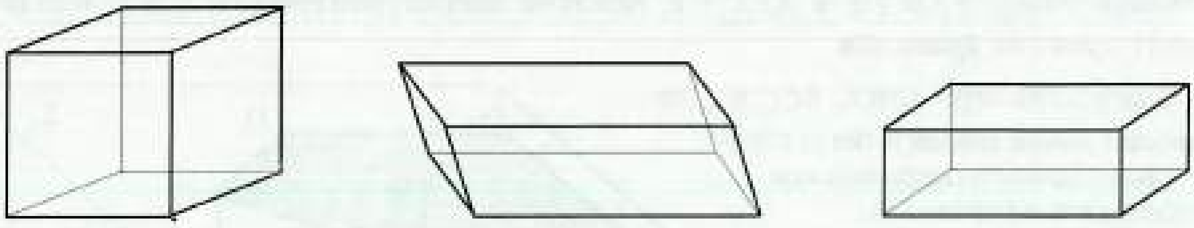
- Според видот на основата, призмата може да биде: триаголна, четириаголна, петаголна, шестаголна итн. (црт. 4).



Црт. 4

- Колку вкупно рабови има: триаголната, четириаголната, n – аголната призма?
- Една призма има вкупно 24 раба. Која е таа призма?
- Дали постои призма која има вкупно 14 раба?

■ На цртежот 5 се дадени некои видови четириаголни призми.



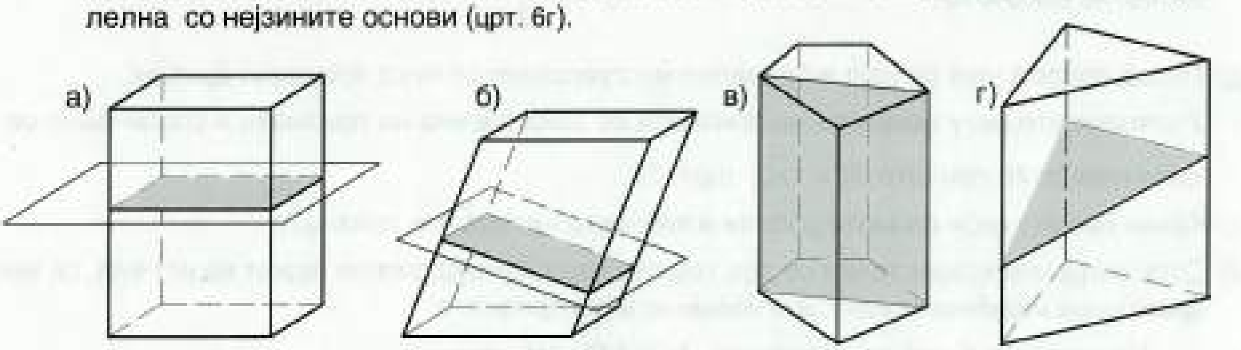
Црт. 5

- Што е коцка, што е паралелопипед, а што правоаголен паралелопипед (квадар)?

Б Ако призмата се пресече со една рамнина Σ, тогаш заедничкиот дел на призмата и рамнината е еден конвексен многуаголник кој се вика ***пресек на призма со рамнина***.

Во зависност од положбата на рамнината Σ во однос на призмата, разликуваме:

- ***паралелен пресек***, ако рамнината Σ е паралелна со основите на призмата (црт. 6а);
- ***нормален пресек***, ако рамнината Σ е нормална на бочниот раб на призмата (црт. 6б);
- ***дијагонален пресек***, ако рамнината Σ минува низ два несоседни бочни раба на призмата (црт. 6в);
- ***кос пресек***, ако рамнината Σ ги сече сите бочни рабови на призмата, но не е паралелна со нејзините основи (црт. 6г).

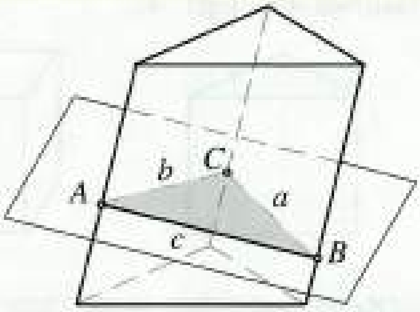


Црт. 6

- Во која призма не може да се конструира дијагонален пресек и зошто?
- Која фигура е паралелниот пресек на призмата?
- Која фигура е дијагоналниот пресек на права призма?
- Која фигура е дијагоналниот пресек на коса призма?

5 Растојанијата меѓу бочните рабови на коса триаголна призма се $37cm$, $13cm$ и $40cm$. Пресметај ја плоштината на еден нормален пресек на призмата.

Согледај го решението.



Црт. 7

■ Бочните ѕидови на призмата се паралелограми.

Дадените растојанија се, всушност, висини на паралелограмите, па ΔABC (црт. 7) е еден нормален пресек на призмата.

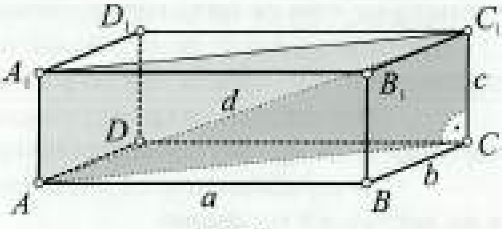
Плоштината на триаголникот ABC ја пресметуваме според Хероновата формула и имаме:

$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ за $s=\dfrac{37+13+40}{2}=45$, т.е. $P=\sqrt{45\cdot 8\cdot 32\cdot 5}=240cm^2$.

2 Пресметај ја плоштината на паралелниот пресек на коса триаголна призма, чии основни рабови се $10\ cm$, $17\ cm$ и $21\ cm$.

3 Одреди ја должината на дијагоналата на правоаголен паралелопипед со димензии: $2\ m$, $3m$ и $6\ m$.

Согледај го решението:



Црт.7

- Дијагонала на квадарот е и дијагонала на дијагоналниот пресек на квадарот, т.е. $d=\overline{AC_1}$ (црт. 7).

Од ΔACC_1 следува $d^2=\overline{AC}^2+\overline{CC_1}^2$, а од ΔABC следува $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=a^2+b^2$, па

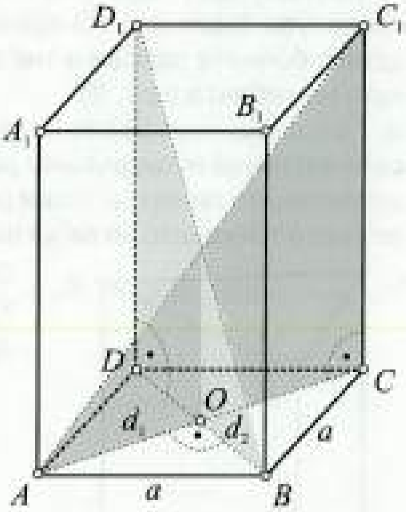
$d^2=a^2+b^2+c^2$, т.е. $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Значи, $d=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7\ m$.

- Колку дијагонални пресеци има квадарот и какви се тие меѓу себе?

4 Одреди ја дијагоналата на коцка со раб $a=7\ cm$.

5 Висината на права призма е $2\ dm$, а нејзината основа е ромб. Одреди го основниот раб на призмата ако нејзините дијагонали се $5\ dm$ и $8\ dm$.

Согледај го решението:



Црт.8

- Бидејќи призмата е права, бочните рабови се нормални на основите, па триаголниците ACC_1 и BDD_1 се правоаголни (црт. 8).

Дијагоналите на ромбот се различни, значи и дијагоналните пресеци ACC_1A_1 и BDD_1B_1 се различни, па

$\overline{AC_1}=8cm$, $\overline{BD_1}=5cm$.

Од ΔACC_1 следува $\overline{AC}^2=\overline{AC_1}^2-\overline{CC}^2=8^2-2^2=60$.

Од ΔBDD_1 следува $\overline{BD}^2=\overline{BD_1}^2-\overline{DD_1}^2=5^2-2^2=21$.

Од ΔABO следува:

$\overline{AB}^2=\left(\dfrac{BD}{2}\right)^2+\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$, т.е. $a=\overline{AB}=\sqrt{\dfrac{81}{4}}=4,5cm$.

Запомни!

Права што е нормална на рамнина, нормална е на сите прави што лежат во рамнината и минуваат низ прободот.

Разгледувањето на претходните цртежи дава можност да стекнеш просторна претстава за нацртаното геометриско тело на рамнината на листот. Во наредната задача ќе воочиш некои насоки што ќе ти помогнат да нацрташ геометриско тело.

6 Нацртај права четириаголна призма со висина $5\ cm$, а чија основа е правоаголник со димензии $a = 4\ cm$ и $b = 3\ cm$.

Согледај ги насоките:

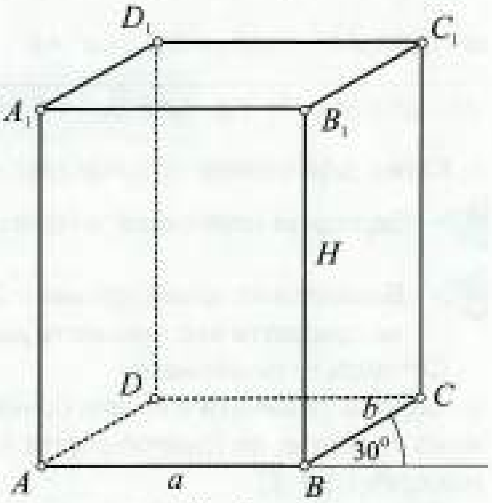
- Геометриското тело го набљудуваме во однос на две рамнини: хоризонтална, што ја идентификуваме со клупата на која е тетратката, и вертикална, што ја идентификуваме со таблата на која се црта геометриското тело.
- Претпоставуваме дека основата на призмата е хоризонтална, а еден нејзин бочен ѕид е вертикален, т.е. паралелен со рамнината на таблата.

- Сите рабови се цртаат како отсечки и притоа, рабовите што се паралелни меѓу себе кај телото, се цртаат со паралелни отсечки и на цртежот.

- Сите рабови што се паралелни со рамнината на таблата се цртаат паралелно со неа и во вистинска големина.

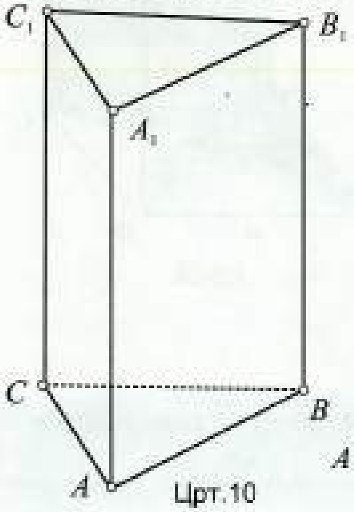
- Хоризонталните рабови што се нормални кон рамнината на таблата се цртаат под агол во однос на рабовите што се паралелни со таблата, намалени во споредба со вистинските рабови. Аголот и коефициентот на намалувањето се избираат произволно, меѓутоа добар цртеж се добива ако аголот е 30^0, а коефициентот на намалувањето е $0{,}5$. Често пати се избира агол од 45^0 или 60^0, а коефициент $1 : 3$, $2 : 3$.

- Од точките A, B, C и D, што се темиња на основата, се повлекуваат нормали на основата и на нив се пренесува висината на призмата. На тој начин се цртаат бочните рабови и тие се паралелни со рамнината на таблата (црт. 9).

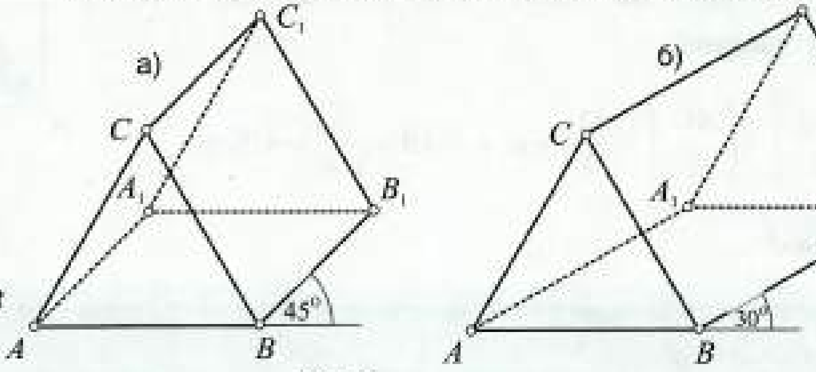


Црт. 9

- При определувањето на видливоста на рабовите, се практикува невидливите рабови да се цртаат со испрекината линија, а такви рабови излегуваат од темињата што не се гледаат. За невидлива се смета точка што не лежи на контурата на цртежот, а е поблиска до рамнината на цртањето. Во нашиот случај контура е искршената линија $ABCC_1D_1A_1$. Контурата е секогаш видлива. На цртежите 10 и 11 е прикажана правилна триаголна призма со основен раб $3\ cm$ и висина $5\ cm$.



Црт.10



Црт.11

- Во врска со цртежите 10 и 11 воочи кој ѕид е хоризонтален, а кој ѕид е паралелен со рамнината на цртањето.

8 Нацртај скица на правилна шестаголна призма со основен раб 3 cm и висина 5 cm.

Задачи:

① Основата на призма е ромб со дијагонали 10 cm и 24 cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на еден паралелен пресек на призмата.

② Дадена е правилна триаголна еднаквоработна призма (основниот и бочниот раб се еднакви) со раб $a = 4\ cm$. Пресметај ја плоштината на пресекот што минува низ оската и низ еден бочен раб на призмата.

③ Бочниот раб на една коса призма е 15 cm и со рамнината на основата зафаќа агол $\alpha = 30^0$. Одреди ја висината на призмата.

④ Скицирај правилна шестаголна призма со основен раб $a = 2\ cm$ и висина $H = 6\ cm$, така што еден бочен ѕид е хоризонтален, а основите се паралелни со рамнината на цртањето.

2 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПРИЗМА

Потсети се!

- Со какви фигури е ограничена призмата?
- Како се пресметува плоштина на паралелограм?
- Како се пресметува плоштина на триаголник?

1 Пресметај ја плоштината на права призма чија основа е правоаголник со димензии $a = 6\ cm$ и $b = 8\ cm$, а висината на призмата е еднаква со дијагоналата на основата, т.е. $H = d$..

Согледај го решението:

■ Плоштината на призмата е еднаква на збирот од плоштините на основните и бочните ѕидови.

Ако со B ја означиме плоштината на едната основа (базис), тогаш $B = a \cdot b$, т.е. $B = 48 cm^2$.

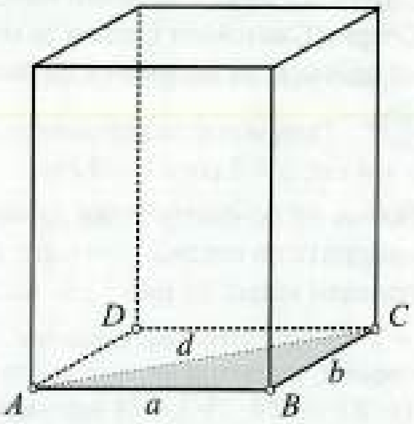
- Какви фигури се бочните ѕидови и какви се тие меѓу себе?

Очигледно, $M = 2a \cdot H + 2b \cdot H$, а од условот следува

$$H = d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 cm.$$

Значи, $M = 2 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 10 = 280 cm^2$. Според тоа, плоштината на призмата е

$$P = 2B + M = 2 \cdot 48 + 280 = 376 cm^2.$$



Црт.1

Запомни!

Плоштината на призма се пресметува со формулата $P = 2B + M$, каде B е плоштина на основата, а M е плоштина на бочната површина.

2 Пресметај ја плоштината на права триаголна призма со основни рабови $51\ cm$, $30\ cm$ и $27\ cm$, и бочен раб $40\ cm$.

3 Покажи дека плоштината на квадар со димензии a, b и c се пресметува со формулата $P = 2(ab+ac+bc)$, а на коцка со раб a се пресметува со формулата $P = 6a^2$.

- Бочните ѕидови на права призма се правоаголници, па

$$M = aH + bH + cH + \ldots,$$
$$M = (a+b+c+\ldots)\cdot H,$$
$$M = L\cdot H,$$

каде L е периметарот на основата, а H е висина на призмата.

Потсети се!

- Која е основната единица мерка за волумен, кои се помали, а кои поголеми?
- Што е геометриско тело?
- Во основното образование волуменот на призма го пресметуваш со формулата $V = B\cdot H$, B е плоштина на основата, а H е висина на призмата.

- Бочните ѕидови на коса призма се паралелограми, па

$$M = a_1\cdot s + b_1\cdot s + c_1\cdot s + \ldots,$$
$$M = (a_1+b_1+c_1+\ldots)\cdot s,$$
$$M = L_1\cdot s,$$

каде L_1 е периметар на еден нормален пресек, а s е должина на бочниот раб.

Б Ограничен и затворен дел од просторот се вика геометриско тело.

Големината на ограничениот дел од просторот претставува волумен на геометриското тело.

Значи, на секое геометриско тело може да му се придружи позитивен реален број V, така што:

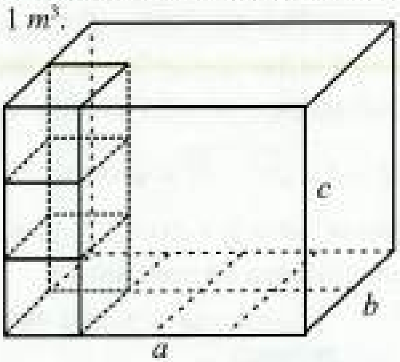
1) $V > 0$, за секое геометриско тело;
2) складните тела имаат еднакви волумени;
3) ако телото е составено од два или повеќе составни делови кои немаат заеднички внатрешни точки, тогаш волуменот на телото е еднаков на збирот од волумените на тие делови;
4) коцка со раб $1\ m$ има волумен $1\ m^3$.

Овие својства се познати како ***аксиома за волумен***.

Според Светскиот систем за мерки, волуменот на коцка со раб $1\ m$ се зема како основна мерна единица за волумен и се вика кубен метар, а се означува со $1\ m^3$.

4 Пресметај го волуменот на квадар со димензии: $a = 4\ cm$, $b = 2\ cm$ и $c = 3\ cm$.

Воочи, на основата може да се претстават $a\cdot b = 4\cdot 2 = 8$ квадрати со страна $1\ cm$ (црт. 2). Ако на секој квадрат се постави коцка со раб $1\ cm$, ќе се добие слој што содржи $a\cdot b = 8$ волуменски единици. Во квадарот има c такви слоеви, па затоа можат да се наместат вкупно $(a\cdot b)\cdot c = (4\cdot 2)\cdot 3 = 24$ волуменски единици. Според тоа, волуменот на квадарот е $V = a\cdot b\cdot c$. Конкретно, $V = 4\cdot 2\cdot 3 = 24 cm^3$.



Црт.2

Формулата $V = a\cdot b\cdot c$ е точна и во случај кога a, b и c се кои било позитивни реални броеви, а точноста на ова тврдење нема да ја докажуваме.

5 Докажи дека волуменот на коцка со раб a се пресметува со формулата $V = a^3$.

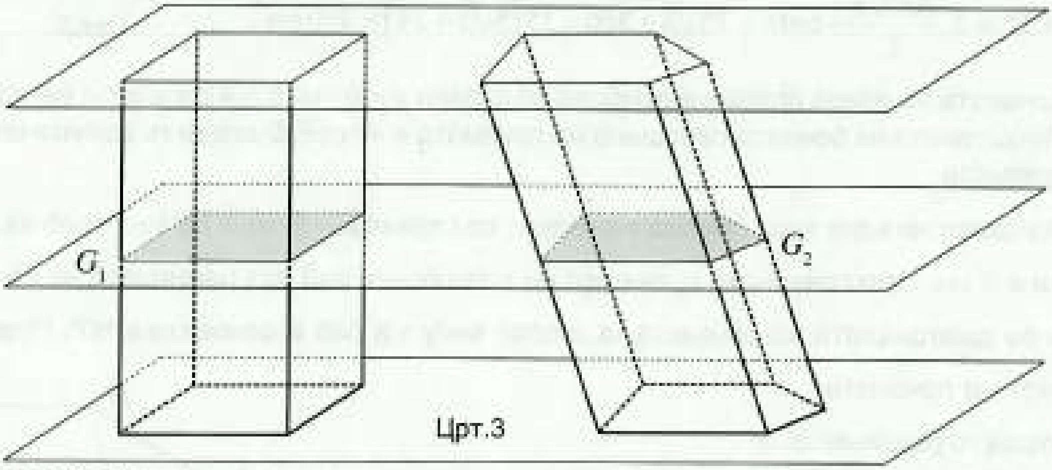
Бидејќи плоштината на основата на квадарот е $B = a \cdot b$, а висината е еднаква на третиот раб, т.е. $c = H$, следува дека формулата за пресметување волумен на квадарот е $V = B \cdot H$.

Запомни!

Волуменот на призма се пресметува со формулата $V = B \cdot H$, каде B е плоштина на основата, а H е висина на призмата.

Точноста на ова тврдење следува од тврдењето на италијанскиот математичар Бонавентура Кавалиери (1599-1647), па затоа и денес го носи неговото име.

Принципот на Кавалиери гласи: *Ако две тела* G_1 *и* G_2 *можат да се постават во таква положба, така што пресеците на двете тела со која било рамнина што е паралелна со дадената рамнина се фигури кои имаат еднакви плоштини, тогаш волумените на двете тела* G_1 *и* G_2 *се еднакви* (црт. 3). Точноста на ова тврдење не ја докажуваме.



Црт.3

Бидејќи постојат фигури што имаат еднакви плоштини иако не се складни, значи за секоја призма постои соодветен квадар што го задоволува принципот на Кавалјери. Оттука и следува точноста на тврдењето за пресметување на волуменот на призма.

6 Дијагоналниот пресек на квадар е квадрат, а основните рабови се 15 *cm* и 8 *cm*. Пресметај го волуменот на квадарот.

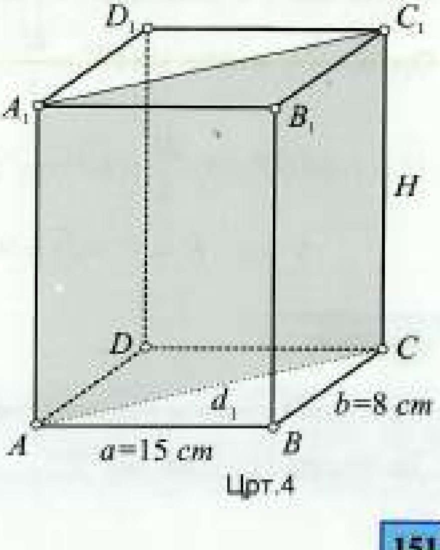
Согледај го решението:

Од условот на задачата следува дека $d = H$ (црт. 4).

Од ΔABC следува $d^2 = a^2 + b^2$, т.е.

$d = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17\,cm$, па $V = a \cdot b \cdot H$, односно

$$V = 15 \cdot 8 \cdot 17 = 2040\,cm^3.$$



Црт.4

7 Три месингени коцки со рабови 3 *cm*, 4 *cm* и 5 *cm* се претопени во една коцка. Одреди го работ на таа коцка.

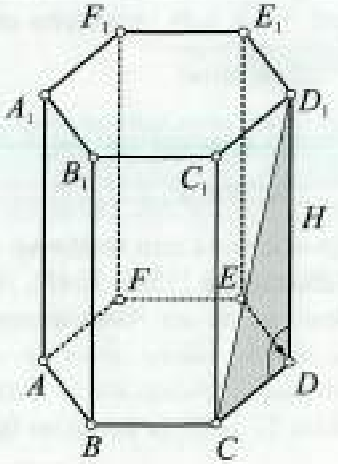
8 Основниот раб на правилна шестаголна призма е $5\ cm$, а дијагоналата на бочниот ѕид е $13\ cm$. Пресметај ги волуменот и плоштината на призмата.

Согледај го решението:

- Волуменот на призмата е $V = B \cdot H$.

$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{2}\sqrt{3}\,cm^2.$$

- Бочните ѕидови на призмата се правоаголници, па од триаголникот CDD_1 (црт. 5) следува:



Црт.5

$H = \overline{DD_1} = \sqrt{\overline{CD_1}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,cm.$ Според тоа,

$$V = B \cdot H = \frac{75}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 12 = 450\sqrt{3}\,cm^3.$$

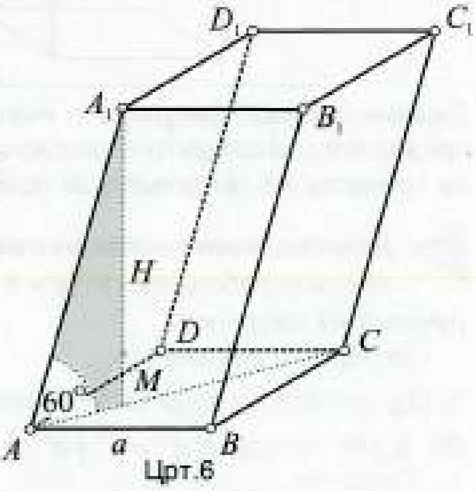
$$P = 2B + M = 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6aH = 75\sqrt{3} + 360 = 15\left(5\sqrt{3} + 24\right) \approx 490\,cm^2.$$

9 Основата на права призма е ромбоид со страни $a = 6\ cm$, $b = 4\ cm$ и агол меѓу нив 30^0. Плоштината на бочната површина на призмата е $40\ cm^2$. Одреди го волуменот на призмата.

10 Основата на една коса призма е квадрат со страна $a = 5\ cm$, а бочниот раб на призмата е $8\ cm$. Ортогоналната проекција на еден бочен раб врз рамнината на основата се совпаѓа со дијагоналата на основата, а аголот меѓу тој раб и основата е 60^0. Пресметај го волуменот на призмата.

Согледај го решението:

- За да го одредиме волуменот $V = B \cdot H$, треба да ја одредиме висината H на призмата. Нека отсечката AM е ортогонална проекција на работ AA_1 (црт. 6).



Црт.6

Од ΔAMA_1 имаме $\sin 60^0 = \dfrac{H}{s}$, односно

$H = s \cdot \sin 60^0 = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,cm.$ Според тоа,

$$V = a^2 \cdot H = 5^2 \cdot 4\sqrt{3} = 100\sqrt{3}\,cm^3.$$

Запомни!

Агол меѓу права и рамнина е аголот што правата го образува со својата ортогонална проекција врз рамнината.

Задачи:

① Одреди го волуменот на коцка ако:

а) плоштината на коцката е $24m^2$;

б) дијагоналниот пресек на коцката има плоштина $16\sqrt{2}\,m^2$;

в) дијагоналата на еден бочен ѕид е $6m$.

② Димензиите на еден квадар се однесуваат како $3:4:7$, а неговата плоштина е $1098m^2$. Одреди го волуменот на квадарот.

③ Основата на коса четириаголна призма е рамнокрак трапез со основи $44\ cm$, $28\ cm$ и крак $17\ cm$. Еден дијагонален пресек на призмата е ромб со остар агол од 45^0 и тој е нормален на основата. Одреди ја плоштината на призмата.

④ Растојанијата меѓу бочните рабови на коса триаголна призма се $37\ cm$, $15\ cm$ и $26\ cm$. Плоштината на бочната површина е еднаква со плоштината на нормалниот пресек. Одреди го волуменот на призмата.

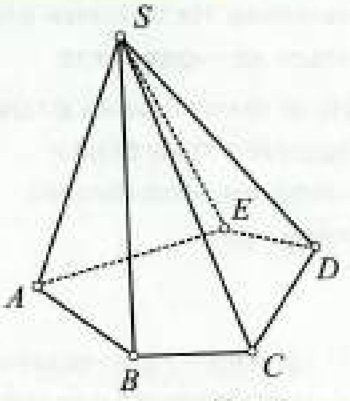
⑤ Одреди ги плоштината и волуменот на правилна четириаголна призма чија дијагонала е $7\ cm$, а дијагоналата на еден бочен ѕид е $5\ cm$.

3

ПИРАМИДА. ПРЕСЕЦИ НА ПИРАМИДА СО РАМНИНА

Потсети се!

- На цртежот 1 е претставена петаголна пирамида.
- Која фигура е основата на пирамидата?
- Кои фигури се бочните ѕидови на пирамидата?
- Како се викаат отсечките AB, BC, CD, ..., а како отсечките SA, SB, SC, ...?
- Каде се наоѓа центарот на опишаната кружница околу триаголникот?

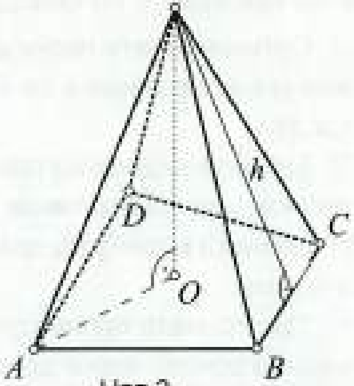


Црт.1

Воочуваш дека пирамидата е рабесто геометриско тело, т.е. полиедар.

Запомни!

Пирамида е полиедар ограничен со еден конвексен многуаголник, а останатите ѕидови се триаголници што имаат заедничко теме и по една заедничка страна со многуаголникот.



Црт.2

На цртежот 2 е дадена четириаголна пирамида.

- Четириаголникот $ABCD$ се вика ***основа на пирамидата***.
- Триаголниците ABS, BCS ,... се викаат ***бочни ѕидови*** и тие ја сочинуваат ***обвивката*** на пирамидата. Нивната заедничка точка S се вика ***врв на пирамидата***.

- Растојанието од врвот на пирамидата до нејзината основа се вика ***висина на пирамидата*** и се означува со H. Значи, $\overline{SO} = H$.
- Растојанието од врвот на пирамидата до работ на основата (висина на бочен ѕид) се вика ***бочна висина***.
- Според видот на основата, пирамидата може да биде: триаголна, четириаголна, петаголна итн.

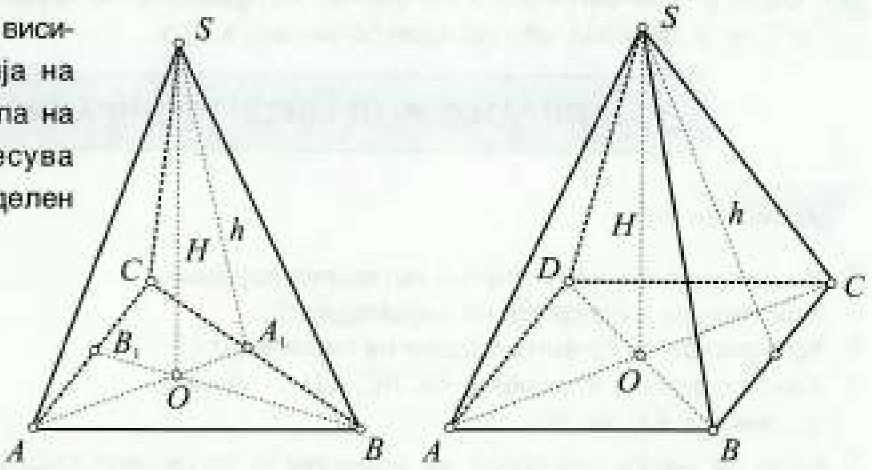
Запомни!

Пирамидата чија основа е правилен многуаголник, а бочните рабови се еднакви меѓу себе се вика ***правилна пирамида***.

Б При цртање на пирамида постапуваме слично како при цртањето на призма.

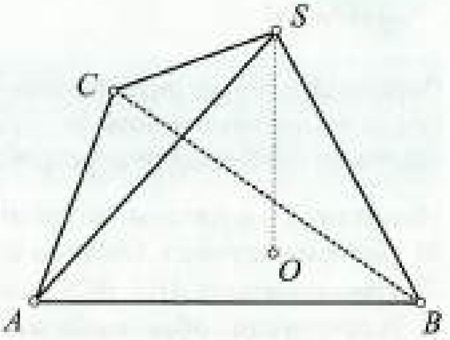
- Основата на пирамидата ја поставуваме во хоризонтална положба, а висината ја цртаме нормално на основата, т.е. паралелно со рамнината на цртањето.
- Од подножната точка на висината (ортогонална проекција на врвот) се повлекува нормала на основата и на неа се нанесува висината. На тој начин е определен врвот на пирамидата.

На цртежот 3 се нацртани правилна триаголна и правилна четириаголна пирамида.



Црт.3

- Центарот на опишаната кружница околу рамностран триаголник е во пресекот на симетралите на страните и се совпаѓа со тежиштето на триаголникот. Значи, подножјето на висината е во тежиштето на основата.
- Ортогоналната проекција на врвот кај правилна четириаголна пирамида е во пресекот на дијагоналите на основата.
- Бочните ѕидови на правилна пирамида се складни рамнокраки триаголници.
- Бочната висина на правилна пирамида се вика апотема.
- Триаголната пирамида уште се вика ***тетраедар***, а нејзината основа може да е кој било ѕид (црт. 4).



Црт.4

Запомни!

Тетраедар чии ѕидови се рамнострани триаголници се вика ***правилен тетраедар***.

- Што е разликата меѓу правилна триаголна пирамида и правилен тетраедар?

Ако пирамида се пресече со рамнината Σ, тогаш нивниот заеднички дел е многуаголник и се вика пресек на пирамидата.

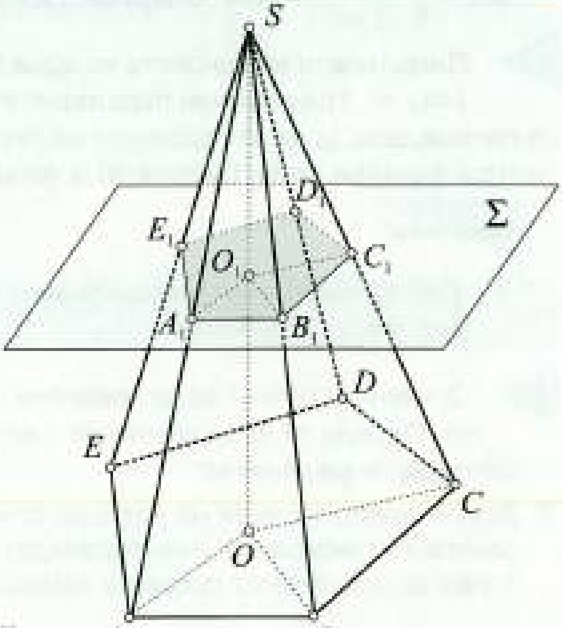
Пресекот може да биде:

- паралелен, ако рамнината Σ е паралелна со основата на пирамидата;
- дијагонален, ако рамнината Σ минува низ два несоседни бочни рабови.

Дијагоналниот пресек на секоја пирамида е триаголник.

За паралелниот пресек на пирамида со рамнина важи следнава:

Теорема: Ако пирамидата се пресече со рамнина што е паралелна со основата, тогаш:
1) бочните рабови и висината со пресекот се поделени на пропорционални отсечки;
2) основата и пресекот се слични многуаголници;
3) плоштината на пресекот и плоштината на основата се однесуваат како квадратите на нивните растојанија до врвот на пирамидата.



Црт.5

Доказ. Нека многуаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ е еден паралелен пресек на пирамидата (црт. 5).

1) Од условот за паралелност на рамнината Σ и основата на пирамидата следува:

$A_1O_1 \parallel AO,\ B_1O_1 \parallel BO, \ldots,$ па $\Delta SA_1O_1 - \Delta SAO,$

$\Delta SB_1O_1 - \Delta SBO, \ldots$ Оттука имаме:

$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SO_1}}{SO};\ \frac{\overline{SB_1}}{SB} = \frac{\overline{SO_1}}{SO};\ \frac{\overline{SC_1}}{SC} = \frac{\overline{SO_1}}{SO}; \ldots,$ т.е.

$$\frac{\overline{SA_1}}{SA} = \frac{\overline{SB_1}}{SB} = \frac{\overline{SC_1}}{SC} = \ldots = \frac{\overline{SO_1}}{SO}.$$

2) Од условот за паралелност следува:

$A_1B_1 \parallel AB,\ B_1C_1 \parallel BC,\ C_1D_1 \parallel CD, \ldots,$ па

$\Delta SA_1B_1 \sim \Delta SAB,\ \Delta SB_1C_1 - \Delta SBC,\ \Delta SC_1D_1 - \Delta SCD, \ldots$

Оттука следува $\frac{\overline{A_1B_1}}{AB} = \frac{\overline{SB_1}}{SB};\ \frac{\overline{B_1C_1}}{BC} = \frac{\overline{SB_1}}{SB} = \ldots$ т.е. $\frac{\overline{A_1B_1}}{AB} = \frac{\overline{B_1C_1}}{BC} = \frac{\overline{C_1D_1}}{CD} = \ldots$ Освен тоа,

$\measuredangle A_1B_1C_1 = \measuredangle ABC,\ \measuredangle B_1C_1D_1 = \measuredangle BCD,\ \measuredangle C_1D_1E_1 = \measuredangle CDE,$ како агли со заемно паралелни краци. Според тоа, многуаголниците $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ имаат пропорционални страни и еднакви агли. Поради тоа следува дека тие се слични.

3) Познато е својството: плоштините на сличните многуаголници се однесуваат како квадратите на соодветните страни. Според тоа имаме:

$$\frac{P}{P_1}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A_1B_1}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B_1C_1}^2}=\cdots$$, а бидејќи $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{SA_1}}=\frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}}$, следува $\frac{P}{P_1}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}$, каде P е плоштина на основата, а P_1 е плоштина на паралелниот пресек.

1 Висината на една пирамида е $16\ cm$, а плоштината на нејзината основа е $512\ cm^2$. На кое растојание од основата се наоѓа паралелниот пресек чија плоштина е $50\ cm^2$?

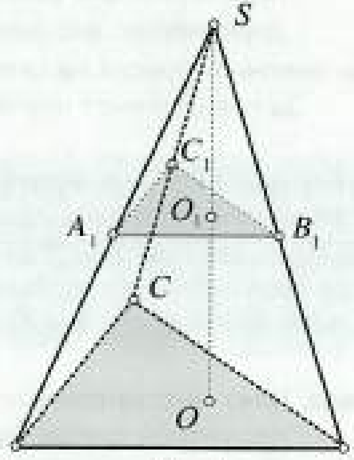
Согледај го решението:

- Бидејќи видот на пирамидата овде нема значење, според теоремата имаме (црт. 6):

За $P=512\,cm^2$, $P_1=50\,cm^2$ и $H=16\,cm$, имаме:

$$\frac{P}{P_1}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}$$ или $$\frac{512}{50}=\frac{16^2}{\overline{SO_1}^2}$$, односно $$\overline{SO_1}^2=\frac{16^2\cdot 50}{512}$$, т.е.

$$\overline{SO_1}=\sqrt{\frac{16^2\cdot 25}{256}}=5\,cm.$$ Следува, $\overline{OO_1}=16-5=11\,cm.$



Црт.6

2 Плоштината на основата на една пирамида е $144\ cm^2$. Три рамнини паралелни со основата на пирамидата, ја делат висината на пирамидата на четири еднакви дела. Пресметај ја плоштината на добиените пресеци.

Запомни!

Дел од пирамидата ограничен со основата и еден паралелен пресек се вика ***потсечена пирамида***.

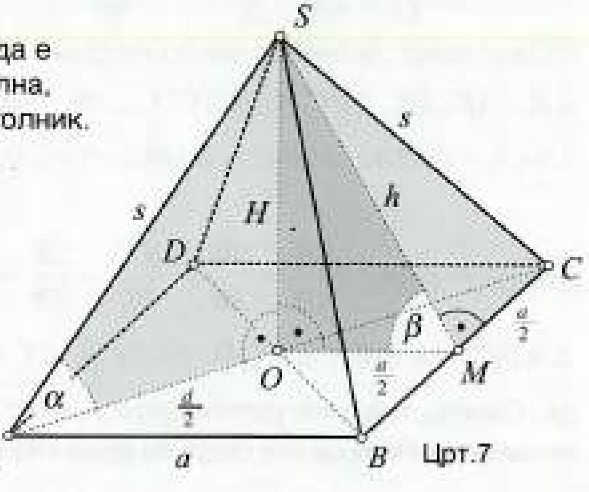
3 Основниот раб на една правилна четириаголна пирамида е $14\ cm$, а бочниот раб е $10\ cm$. Одреди ги плоштината на дијагоналниот пресек и бочната висина на пирамидата.

Согледај го решението:

- Дијагоналниот пресек на четириаголна пирамида е секогаш триаголник. Ако пирамидата е правилна, тогаш дијагоналниот пресек е рамнокрак триаголник.

Триаголникот ACS (црт. 7) е рамнокрак со основа $d=\overline{AC}$. Од ΔABC следува $\overline{AC}^2=a^2+a^2$, па $d=a\sqrt{2}=14\sqrt{2}\,cm$. Од ΔAOS имаме:

$$H^2=s^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2$$, т.е. $$H=\sqrt{10^2-\left(7\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}\,cm.$$



Црт.7

Според тоа, $P = \frac{1}{2} d \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 14\,cm^2$.

Од триаголникот SMC имаме: $h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, т.е. $h = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}\,cm$.

- Воочи ги релациите меѓу елементите на правилна четириаголна пирамида (црт. 7):

$$\text{Од } \Delta AOS: \ s^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2; \ \text{од } \Delta SMC: \ s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2; \ \text{од } \Delta SOM: h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

> Аголот α е агол што го зафаќа бочниот раб со основата на пирамидата, а аголот β е агол што го зафаќа бочниот ѕид со основата на пирамидата.

4 Пресметај ги висината и апотемата на правилна триаголна пирамида со основен раб $a = 12\,cm$ и бочен раб $s = 10\,cm$.

- Воопшто, за да се определат некои елементи на која било пирамида, треба да се постави некој пресек на пирамидата што ќе ги содржи бараните елементи.

Во овој случај, ќе го користиме пресекот на пирамидата со рамнина што минува низ еден бочен раб и нејзината висина (црт. 8).

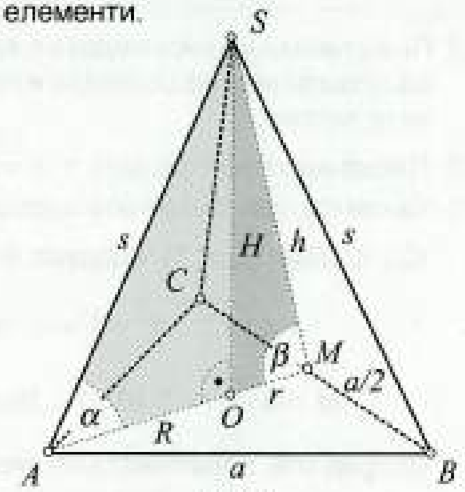
- Точката O е центар на впишаната и опишаната кружница на основата на пирамидата, па

$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}\,cm$ и $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}\,cm$.

Од $\Delta\, AOS$ имаме: $H^2 = s^2 - R^2$, т.е.

$H = \sqrt{10^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{52}\,cm$. Од $\Delta\, BSM$ следува:

$h^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, т.е. $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,cm$.



Црт.8

- Воочи ги релациите меѓу елементите на правилна триаголна пирамида (црт. 8):

$$\text{Од } \Delta SAO: \ s^2 = H^2 + R^2; \ \text{од } \Delta SBO: \ s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2; \ \text{од } \Delta SOM: \ h^2 = H^2 + r^2.$$

Задачи:

① Нацртај скица на правилна шестаголна пирамида со основен раб $2\,cm$ и висина $5\,cm$.

② Плоштината на основата на една пирамида е $150\,cm^2$, плоштината на еден паралелен пресек е $54\,cm^2$, а растојанието меѓу нив е $14\,cm$. Одреди ја висината на пирамидата.

③ Основниот раб на правилна четириаголна пирамида е $16\,cm$, а висината е $12\,cm$. Еден паралелен пресек на пирамидата има плоштина $120\,cm^2$. Одреди го делот од бочниот раб зафатен меѓу пресекот и врвот на пирамидата.

④ Бочниот раб на правилна шестаголна пирамида со рамнината на основата зафаќа агол од 60^0. Пресметај ја плоштината на најголемиот дијагонален пресек на пирамидата, ако основниот раб е $6\ cm$.

⑤ Одреди ја висината на пирамидата чија основа е правоаголник со страни $8\ cm$ и $6\ cm$, а секој бочен раб е $13\ cm$.

4 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПИРАМИДА

Потсети се!

- Како се пресметува плоштина на призма?
- Кои фигури се граници на пирамидата?
- Како се пресметува плоштина на триаголник, а како на паралелограм?

А 1 Дадена е правилна четириаголна пирамида со основен раб $a=10\,cm$ и висина $H=12\,cm$. Пресметај ја плоштината на пирамидата.

Согледај го решението:

- Плоштината на пирамидата е еднаква на збирот од плоштината на основата и плоштините на бочните ѕидови.
- Плоштината на основата е $B=a^2=10^2=100\,cm^2$.
- Какви фигури се бочните ѕидови на пирамидата?

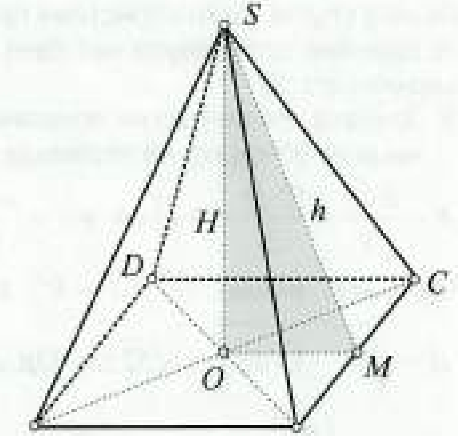
Од ΔSOM (црт. 1) следува $h^2=\overline{SO}^2+\overline{OM}^2$, т.е.

$$h=\sqrt{12^2+5^2}=13\,cm,\text{ па}$$

$$M=4\cdot\frac{ah}{2}=2\cdot10\cdot13=260\,cm^2.$$

Според тоа, плоштината на пирамидата е

$$P=B+M=100+260=360\,cm^2.$$



Црт.1

Запомни!

Плоштина на пирамида се пресметува со формулата $P=B+M$, каде B е плоштина на основата, а M е плоштина на обвивката на пирамидата.

5 Основните рабови на триаголна пирамида се $13\ cm$, $14\ cm$ и $15\ cm$, а висина е $3\ cm$. Одреди ја плоштината на пирамидата ако подножјето на висината е во центарот O на впишаната кружница во основата.

Упатство: Од $P_\Delta=r\cdot s$ одреди го радиусот r.

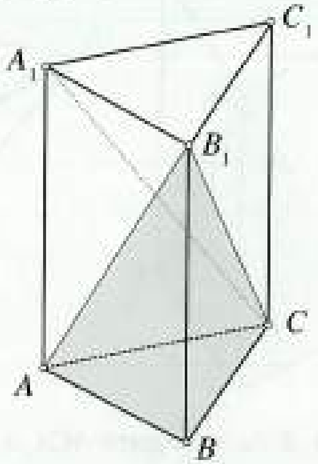
Нека M, N и P се подножни точки на бочните висини на пирамидата. Докажи дека триаголниците SOM, SON и SOP се складни итн.

Потсети се!

- Како се пресметува волумен на призма?
- Може ли да се конструира дијагонален пресек на триаголна призма?
- Како гласи принципот на Кавалиери?
- Во основното образование си пресметувал волумен на пирамида со формулата $V=\frac{1}{3}B\cdot H$, каде B е плоштина на основата, а H е висина на пирамидата.

Б

Триаголната призма на цртеж 2 е пресечена со рамнина што минува низ темињата A, C и B_1. На тој начин еден дел од призмата е триаголна пирамида со основа ABC и врв B_1 (црт. 2).



Црт.2

- Дали може останатиот дел од призмата да се подели на два дела?
- Какви волумени имаат добиените делови на пирамидата?
- Останатиот дел е четириаголна пирамида со основа ACC_1A_1 и врв B_1. Оваа пирамида може да се подели на два дела со рамнина што минува низ темињата A_1, C и B_1. Добиените делови се пирамиди со заеднички врв B_1, едната за основа го има триаголникот ACA_1, а другата триаголникот CC_1A_1.

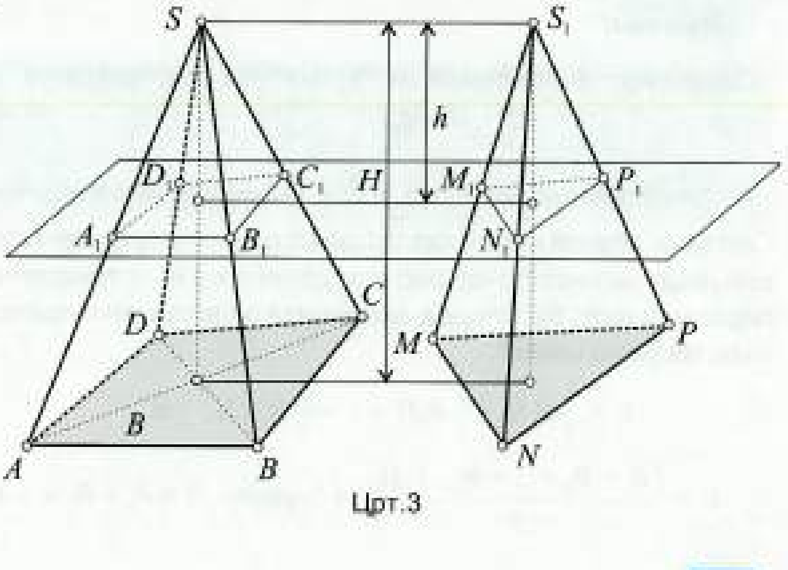
Значи, триаголната призма може да се подели на три триаголни пирамиди. За да дадеме одговор на второто прашање, претходно ќе ја докажеме следнава

Теорема: Ако две пирамиди имаат еднакви висини и еднакви плоштини на основите, тогаш нивните паралелни пресеци што се на еднакво растојание од врвот имаат еднакви плоштини.

Доказ: Нека $P_{ABCD}=P_{MNP}=B$, H е висина на пирамидите, h е растојание од врвот до пресеците, и нека B_1 и B_2 се плоштини на паралелните пресеци. Според теоремата за паралелни пресеци имаме:

$$\frac{B}{B_1}=\frac{H^2}{h^2} \text{ и } \frac{B}{B_2}=\frac{H^2}{h^2},$$ па оттука следува:

$$\frac{B}{B_1}=\frac{B}{B_2}, \text{ т.е. } B_1=B_2.$$

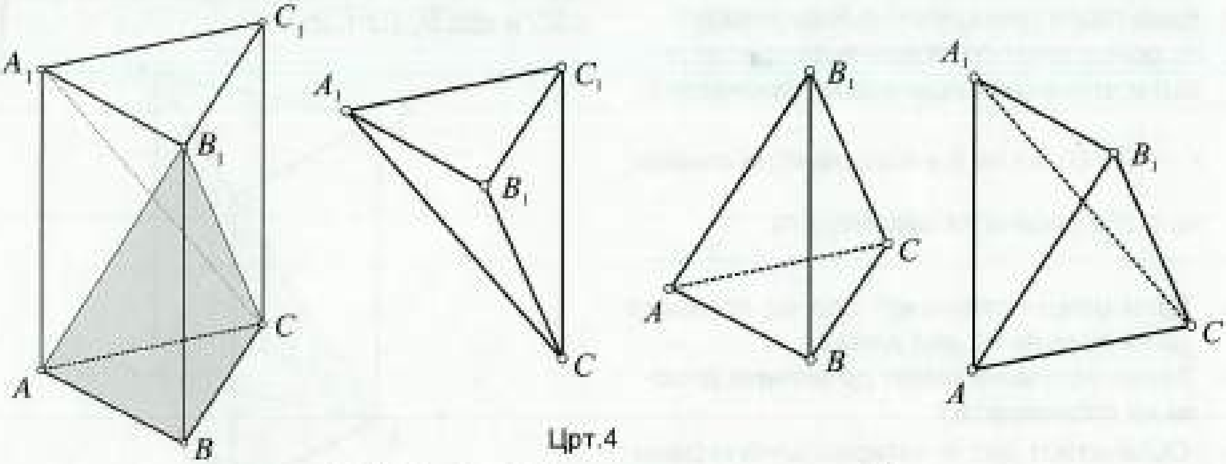


Црт.3

Според принципот на Кавалијери:

Две пирамиди што имаат еднакви висини и еднакви плоштини на основите, имаат еднакви волумени.

Да ги разгледаме деловите на призмата добиени на цртеж 2, а прикажани на цртеж 4.



Црт.4

Воочи црт. 2, пирамидите ACA_1B_1 и $CC_1A_1B_1$ имаат заеднички врв B_1, значи нивните висини се еднакви, а нивните основи имаат еднакви плоштини, бидејќи $\Delta ACA_1 \cong \Delta CC_1A_1$.

Според тоа, $V_{ACA_1B_1} = V_{CC_1A_1B_1}$. Слично, пирамидите $ABCB_1$ и $A_1B_1C_1C$ имаат еднакви висини, а нивните основи се складни, бидејќи тие се основите на призмата, па $V_{ABCB_1} = V_{A_1B_1C_1C}$.

Значи, ***добиените триаголни пирамиди имаат еднакви волумени.***

Бидејќи волуменот на призмата е $V = B \cdot H$, следува дека волуменот на секоја од добиените триаголни пирамиди е третина од волуменот на триаголната призма.

Со тоа е докажана следната

Теорема: Волуменот на триаголна пирамида е еднаков на третината од производот на плоштината на основата и должината на нејзината висина.

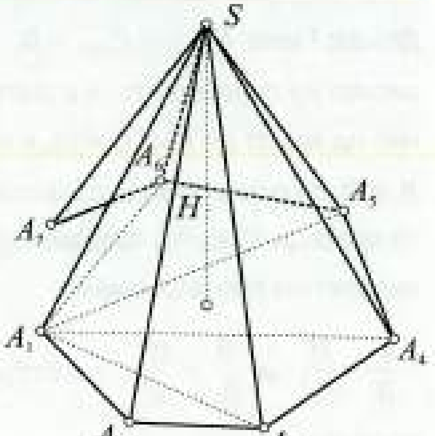
- Како ќе се пресмета волуменот на која било пирамида?

Запомни!

Волуменот на пирамида се пресметува со формулата

$$V = \frac{B \cdot H}{3},$$

B е плоштина на основата, а H е висина на пирамидата.



Црт.5

Секоја n- аголна пирамида со дијагоналните пресеци што минуваат низ ист бочен раб е поделена на n - 2 триаголни пирамиди (црт. 5). Според аксиомата за волумен и претходната теорема имаме:

$$V = \frac{1}{3}B_1H + \frac{1}{3}B_2H + ... + \frac{1}{3}B_{n-2}H, \text{ т.е.}$$

$$V = \frac{(B_1 + B_2 + ... + B_{n-2}) \cdot H}{3}, \text{ а бидејќи } B = B_1 + B_2 + ... + B_{n-2} \text{ следува } V = \frac{B \cdot H}{3}.$$

2 Бочните рабови на една триаголна пирамида имаат еднаква должина 14,5 cm, а основата на пирамидата е правоаголен триаголник со катети 12 cm и 16 cm. Одреди го волуменот на пирамидата.

Согледај го решението:

- Од условот $\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}$ следува дека подножјето на висината на пирамидата е во центарот на опишаната кружница на основата (црт. 6). Бидејќи основата е правоаголен триаголник, средината O на хипотенузата AB е центар на опишаната кружница околу основата, па $H=\overline{SO}$.

Црт.6

Од ΔABC имаме:

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20cm.$$

Од ΔAOS следува $\overline{SO}^2=\overline{SA}^2-\overline{AO}^2$, т.е.

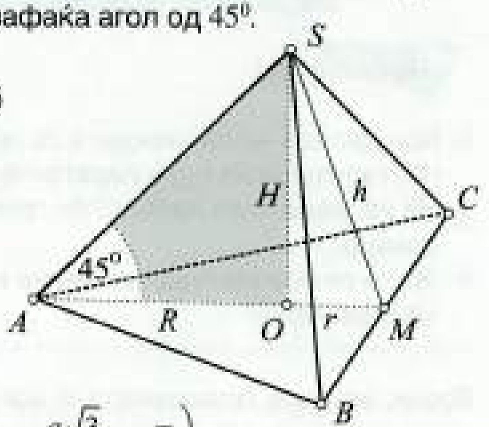
$H=\sqrt{14,5^2-10^2}=10,5cm,$ па

$$V=\frac{1}{3}\cdot BH=\frac{1}{3}\cdot\frac{ab}{2}\cdot H=\frac{12\cdot16}{6}\cdot10,5=336cm^3.$$

3 Одреди ги волуменот и плоштината на правилна триаголна пирамида со основен раб долг 6 cm, а бочниот раб со рамнината на основата зафаќа агол од 45^0.

Согледај го решението (црт. 7):

- Отсечката AO е ортогонална проекција на бочниот раб AS врз рамнината на основата. Бидејќи ΔABC е рамностран, следува $\overline{AO}=R=\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}\,cm.$



Црт.7

Од триаголникот AOC следува дека $H=R=2\sqrt{3},$ па

- $V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\cdot2\sqrt{3}=18cm^3.$

Од ΔSOM имаме: $h^2=\overline{SO}^2+\overline{OM}^2$, $\left(\overline{SO}=R=2\sqrt{3},\overline{OM}=r=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}\right)$,

односно $h=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{15}\,cm.$

- $P=B+M=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{ah}{2}=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{6\sqrt{15}}{2}=9\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)=50,43cm^2.$

Задачи:

① Пресметај го волуменот на правилна четириаголна пирамида ако се знае дека:
  а) основниот раб е 2 cm, а висината е 3 cm;
  б) основниот раб и бочниот раб се еднакви на 12 cm;
  в) основниот раб е 24 cm, а дијагоналниот пресек има плоштина 36 cm^2.

② Збирот на основниот и бочниот раб на една правилна четириаголна пирамида е $5\ dm$. Одреди го волуменот на пирамидата ако нејзината плоштина е $16\ dm^2$.

③ Основните рабови на една триаголна пирамида се $26\ cm$, $51\ cm$ и $55\ cm$. Аглите шти ги зафаќаат бочните ѕидови со рамнината на основата се еднакви меѓу себе. Пресметај ја бочната плоштина на пирамидата, ако нејзиниот волумен е $2640\ cm^3$.

④ Основата на една триаголна пирамида е рамнокрак триаголник со основа $70\ cm$ и крак $37\ cm$. Бочниот раб што го содржи врвот на основата на рамнокракиот триаголник е нормален на рамнината на основата и има должина $16\ cm$. Одреди ги волуменот и плоштината на пирамидата.

⑤ Арена за циркус има форма на правилна шестаголна призма со основен раб $6\ m$ и висина $2{,}5\ m$, а покривот на арената е обвивка на правилна шестаголна пирамида чија висина е $3\ m$.
Одреди колку гледачи собира арената, ако за секој гледач треба да се обезбеди најмалку $3{,}5\ m^3$ простор.
Колку метри квадратни платно е набавено за арената, ако 10% од употребеното платно е отпадок, а подот на арената е направен од друг материјал.

5

ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПОТСЕЧЕНА ПИРАМИДА

Потсети се!

- Кои делови на пирамидата се добиваат со поставување на еден паралелен пресек?
- На теоремата за паралелен пресек на пирамида.
- Како се пресметува плоштина и волумен на пирамида?

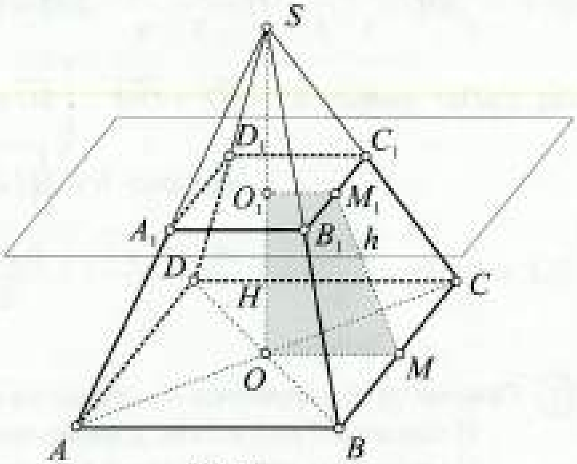
Воочи, се бара плоштината и волуменот на геометриското тело $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (црт. 1).

Запомни!

Дел од пирамидата што е зафатен со основата и со некој паралелен пресек се вика потсечена пирамида.

Нека B е плоштина на основата $ABCD$, B_1 е плоштина на пресекот $A_1B_1C_1D_1$, а M е плоштината на обвивката. Тогаш плоштината на потсечената пирамида е $P = B + B_1 + M$.

𝒜 **1** Правилна четириаголна пирамида со основен раб $20\ cm$ и висина $24\ cm$ е пресечена со рамнина што е паралелна со основата. Пресекот ја дели висината на пирамидата на два еднакви дела. Пресметај ги плоштината и волуменот на делот од пирамидата што е зафатен меѓу основата и паралелниот пресек.

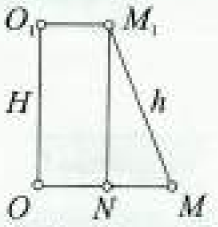


Црт.1

Според теоремата за паралелен пресек на пирамида имаме $B : B_1 = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$.

Бидејќи $B = a^2 = 20^2 = 400\,cm^2$, добиваме: $400 : B_1 = \overline{SO}^2 : \left(\frac{1}{2}\overline{SO}\right)^2$, т.е.

$B_1 = \dfrac{400\cdot\frac{1}{4}\overline{SO}^2}{\overline{SO}^2} = 100\,cm^2$. Од $B_1 = a_1^2 = 100$, следува дека работ на помалата (горната) основа на потсечената пирамида е $a_1 = 10\,cm$, па од правоаголниот трапез O_1OMM_1 (црт. 2) имаме: $\overline{OM} = \frac{a}{2}$, $\overline{O_1M_1} = \frac{a_1}{2}$, $\overline{NM} = \frac{a-a_1}{2}$ и $\overline{OO_1} = H = 12\,cm$, каде H е висина на потсечената пирамида.



Црт.2

Според теоремата за паралелниот пресек, следува дека бочните ѕидови на потсечената пирамида се рамнокраки трапези, чија висина е $h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a-a_1}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{20-10}{2}\right)^2} = 13\,cm$.

Значи, $M = 4\cdot\frac{(a+a_1)\cdot h}{2} = 4\cdot\frac{(20+10)\cdot 13}{2} = 780\,cm^2$, па

$$P = B + B_1 + M = 400 + 100 + 780 = 1280\,cm^2 = 12{,}8\,dm^2.$$

Волуменот на потсечената пирамида е еднаков на разликата од волуменот на целата пирамида и волуменот на отсечениот дел, т.е.

$$V = \frac{1}{3}B\cdot\overline{SO} - \frac{1}{3}B_1\cdot\overline{SO_1} = \frac{1}{3}(400\cdot 24 - 100\cdot 12) = 2800\,cm^3 = 2{,}8\,dm^3.$$

- Воочи, потсечената пирамида е правилна, ако е дел од правилната пирамида.
- Бочните ѕидови на правилна потсечена пирамида се рамнокраки трапези, складни меѓу себе, па

$M = n\cdot\frac{(a+a_1)\cdot h}{2} = \frac{(na+na_1)\cdot h}{2} = \frac{(L+L_1)\cdot h}{2}$, каде L е периметар на основата, L_1 е периметар на горната основа, а h е бочна висина (апотема).

Запомни!

Плоштината на потсечена пирамида се пресметува со формулата $P = B + B_1 + M$, каде B и B_1 се плоштини на основите, а M е плоштина на бочните ѕидови.

5 Висината на правилна шестаголна потсечена пирамида е 15 cm, помалиот основен раб е 1 cm, а бочниот раб е 17 cm. Пресметај ја плоштината на обвивката на потсечената пирамида.

Б Нека H е висина на потсечената пирамида и нека x е висина на отсечениот дел од пирамидата, тогаш

$$V=\frac{1}{3}B(H+x)-\frac{1}{3}B_1\cdot x,\ \text{те.}\ V=\frac{1}{3}BH+\frac{1}{3}(B-B_1)x.$$

Од теоремата за паралелен пресек имаме:

$$\frac{B}{B_1}=\frac{(H+x)^2}{x^2},\ \text{или}\ \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}}=\frac{H+x}{x},\ \text{т.е.}\ x=\frac{H\cdot\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}}=\frac{H\cdot\sqrt{B_1}\cdot\left(\sqrt{B}+\sqrt{B_1}\right)}{B-B_1},\ \text{па}$$

$$V=\frac{1}{3}\left(B+\sqrt{BB_1}+B_1\right)\cdot H.$$

Запомни!

Волумен на потсечена пирамида се пресметува со формулата

$$V=\frac{1}{3}\left(B+\sqrt{BB_1}+B_1\right)\cdot H,$$

каде B и B_1 се плоштини на основите, а H е висина на потсечената пирамида.

3 Плоштините на основите на една потсечена пирамида се $245\ dm^2$ и $80\ dm^2$, а висината на целата пирамида (заедно со отсечениот дел) е $35\ dm$. Одреди го волуменот на потсечената пирамида.

Согледај го решението:

Од $\frac{B}{B_1}=\frac{(x+H)^2}{x^2}$ имаме $\frac{245}{80}=\frac{35^2}{x^2}$, т.е. $x=20,\ H=35-20=15\,dm$, па

$$V=\frac{1}{3}\left(245+\sqrt{245\cdot 80}+80\right)\cdot 15=2325\,dm^3.$$

Задачи:

① Колкава маса има фигурата направена од дрво што е во форма на правилна шестаголна потсечена пирамида со основни рабови $8\ dm$ и $5\ dm$ и бочен раб $5\ dm$, ако специфичната густина на дрвото е $0{,}075$?

② Пресметај ги плоштината и волуменот на правилна четириаголна потсечена пирамида ако апотемата е $12\ cm$, бочниот раб $15\ cm$, а плоштината на бочната површина е $1008\ cm^2$.

③ Одреди го волуменот на правилна триаголна потсечена пирамида, ако рабовите на основите се $30\ dm$ и $20\ dm$, а бочната плоштина е еднаква на збирот од плоштините на основите.

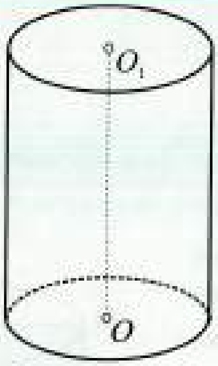
④ Висината на триаголна потсечена пирамида е $10\ cm$. Рабовите на едната основа се $27\ cm$, $29\ cm$ и $52\ cm$, а периметарот на другата основа е $72\ cm$. Одреди го волуменот на потсечената пирамида.

⑤ Основите на триаголна потсечена пирамида се рамнострани триаголници чии страни се $a=7\ cm$ и $a_1=3\ cm$. Еден бочен раб е долг $2\ cm$ и е нормален на основите. Одреди ги волуменот и плоштината на потсечената пирамида.

6 ЦИЛИНДАР. ПРЕСЕЦИ НА ЦИЛИНДАР СО РАМНИНА

Потсети се!

- На цртеж 1 е претставен прав цилиндар.
- Како се вика отсечката OO_1?
- За кој цилиндар велиме дека е прав?
- Дали има цилиндар што не е прав и како се вика?

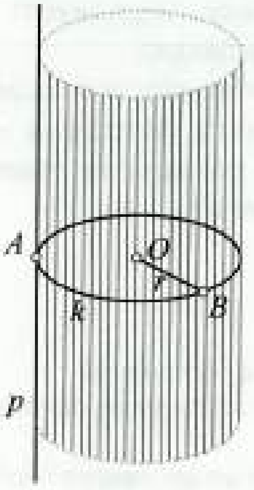


Црт.1

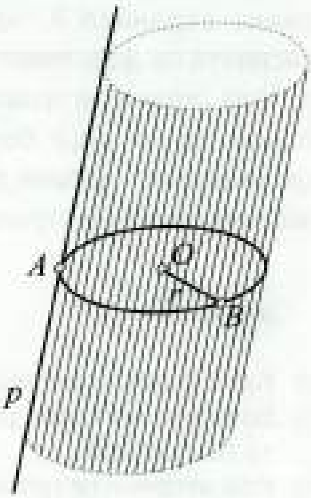
A Нека се дадени кружница $k(O, r)$ и права p што не лежи на рамнината на кружницата, а со неа има една заедничка точка.

- Правата p што се лизга по кружницата, така што останува паралелна со својата првобитна положба, опишува една крива површина која се вика ***цилиндрична површина***.

- Правата p се вика ***генератриса*** или ***изводница***, а кружницата по која лизга правата p, се вика ***директриса*** или ***водилка***.
- Ако генератрисата е нормална на рамнината на кружницата, тогаш се добива ***права кружна цилиндрична површина*** (црт. 2).Во спротивно се добива ***коса цилиндрична површина*** (црт. 3).
- Дел од просторот ограничен со дел од цилиндрична површина и круговите што таа ги отсекува од две рамнини кои се паралелни со рамнината на директрисата е геометриско тело што се вика ***кружен цилиндар***.



Црт.2

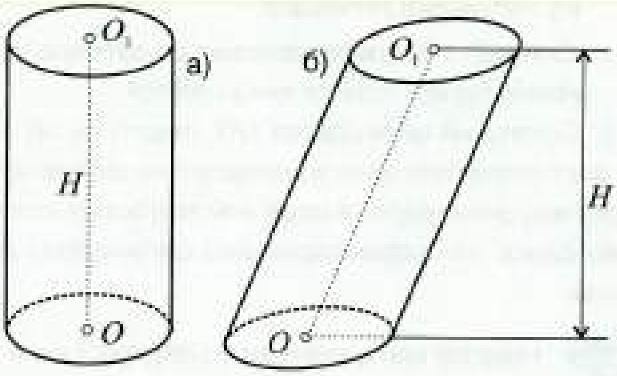


Црт.3

- Од која цилиндрична површина се добива ***прав кружен цилиндар*** (црт. 4а), а од која ***кос кружен цилиндар*** (црт. 4б)?

Понатаму, наместо кружен цилиндар ќе го употребуваме терминот цилиндар.

- Круговите што се добиваат како пресек на цилиндричната површина со двете рамни-ни се викаат ***основи***, а делот од цилиндричната површина меѓу основите се вика ***бочна површина на цилиндарот***.
- Отсечката чии крајни точки се центрите на основите на цилиндарот се вика ***оска на цилиндарот***.



Црт.4

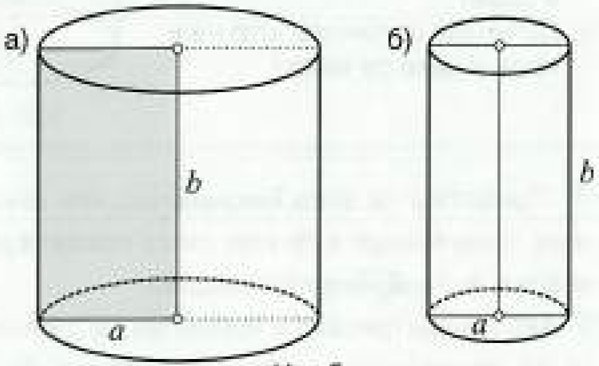
- Растојанието меѓу основите на цилиндарот се вика ***висина на цилиндарот***.
- Спореди ја должината на висината со должината на оската на правиот и на косиот цилиндар. Што заклучуваш од споредувањето?

Запомни!

Цилиндар на кој генератрисата е нормална на основите се вика ***прав цилиндар.***

Прав цилиндар може да се добие со ротација на правоаголник околу една негова страна (црт. 5а) или околу една негова оска на симетрија (црт. 5б).

- Ако правоаголникот со страни a и b ротира околу страната b, одреди ги радиусот и висината на добиениот цилиндар.
- Која страна од правоаголникот ја опишува основата, а која бочната површина на цилиндарот, добиен со ротација на правоаголникот околу страната a?



Црт.5

Потсети се!

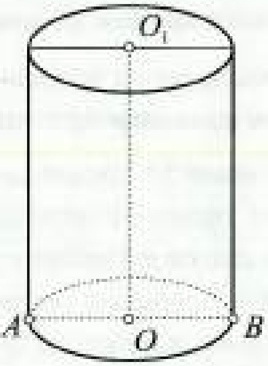
- Како ја цртаме скицата на призма?
- Во каква положба ја поставуваме основата на призмата?
- Кои отсечки ги цртаме во вистинска големина?

- Еден дијаметар на основата е паралелен со рамнината на таблата и тој го цртаме во вистинска големина.
- Основата ја претставуваме со затворена крива линија која се вика елипса.
- Оската на цилиндарот OO_1 ја цртаме во вистинска големина и нормално на дијаметарот ако цилиндарот е прав, или под остар агол во однос на дијаметарот ако цилиндарот е кос.

Б 1 Нацртај прав цилиндар со радиус $1{,}5\ cm$ и висина $4\ cm$.

- Согледај ја постапката:

Основата на цилиндарот ја поставуваме во хоризонтална рамнина (црт. 6).



Црт.6

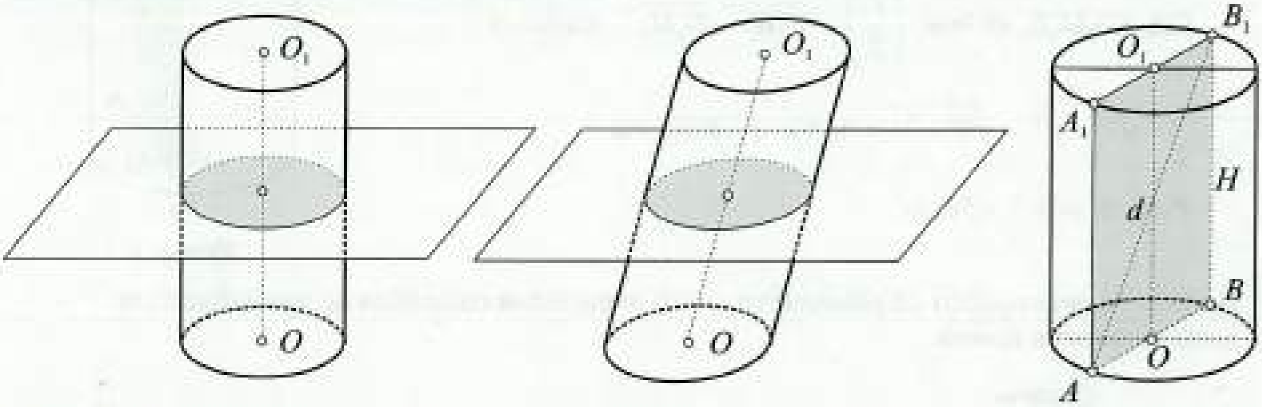
2 Нацртај кос цилиндар со радиус $2\ cm$ и оска $5\ cm$.

Потсети се!

- Какви фигури се основата и кој било паралелен пресек на призма со рамнина?
- Која отсечка е пресекот на дијагоналните пресеци на правилна четириаголна призма?

B **3** Нацртај го пресекот на цилиндарот со рамнина што е паралелна со основата и рамнина што минува низ оската на правиот цилиндар?

Согледај го решението:



Црт.7

Воочи!

Паралелниот пресек на цилиндар е круг складен со основата на цилиндарот. Осниот пресек на прав цилиндар е правоаголник, чии страни се дијаметарот на основата и оската (висината) на цилиндарот.

- Кој вид многуаголник е осниот пресек на кос цилиндар?

4 Одреди ја висината на прав цилиндар со радиус на основата $4{,}5\ cm$ и дијагонала на осниот пресек $15\ cm$.
Согледај го решението:

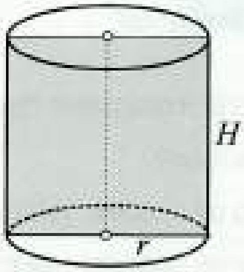
- Висината на правиот цилиндар е еднаква на изводницата, па од ΔABB_1 следува:

$$H^2=\overline{AB_1}^2-\overline{AB}^2,\ \text{т.е.}\ H=\sqrt{d^2-(2r)^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12cm.$$

5 Осниот пресек на еден цилиндар е квадрат со плоштина $36\ cm^2$. Одреди ги радиусот и висината на цилиндарот.

- Воочи, дијаметарот на основата е еднаков со висината на цилиндарот, т.е. $H=2r$.

Од $P=H^2$ следува $36=H^2$, т.е. $H=6\ cm$ и $r=3\ cm$.



Запомни!

Цилиндар, чиј осен пресек е квадрат, т.е. $H=2r$, се вика ***рамностран цилиндар***.

6 Висината на еден цилиндар е $7\ cm$, а радиусот на основата е $5\ cm$. Пресметај ја плоштината на надолжниот пресек што е на растојание $3\ cm$ од оската на цилиндарот.

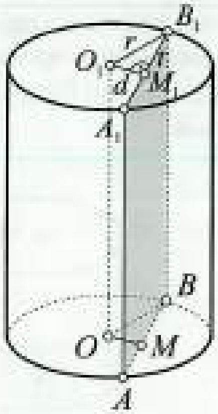
Согледај го решението:

- Која геометриска фигура е надолжниот пресек (црт. 8)?
- Една страна на надолжниот пресек е тетивата AB, чие централно растојание е $d = 3\ cm$.

Од $\Delta O_1M_1B_1$ имаме: $\left(\frac{t}{2}\right)^2=\overline{O_1B_1}^2-\overline{O_1M_1}^2$, односно

$\frac{t}{2}=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$, т.е. $t=8cm$, па

$P=t\cdot H=8\cdot 7=56cm^2$.



Цртеж 8

- Пресек на цилиндарот со рамнината што е паралелна со оската на цилиндарот се вика ***надолжен пресек***.

Задачи:

① Одреди ги радиусот и висината на цилиндарот што се добива со ротација на правоаголник со страни $a = 10\ cm$ и $b = 15\ cm$: а) околу страната a; б) околу страната б; в) околу симетралата на страната b.

② Плоштината на осниот пресек на еден цилиндар е $156\ \text{cm}^2$, а висината $12\ cm$. Одреди го радиусот на основата.

③ Висината на еден цилиндар е $16\ cm$, а радиусот на основата $17\ cm$. На кое растојание од оската треба да се постави рамнина, паралелна со оската, така што добиениот надолжен пресек е квадрат?

④ Еден надолжен пресек е на растојание $4\ cm$ од оската на цилиндарот и отсекува на основата кружен лак чиј централен агол е 120^0. Пресметај ја плоштината на пресекот, ако висината на цилиндарот е $5\sqrt{3}\ cm$.

7 ПЛОШТИНА НА ЦИЛИНДАР. ВОЛУМЕН НА ЦИЛИНДАР

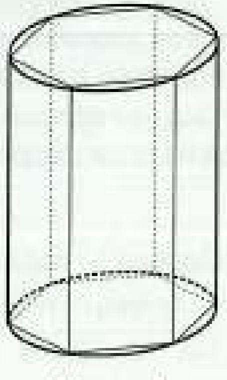
Потсети се!

- Како ја изведовме формулата за плоштина на круг?
- Како се пресметува плоштина на призма?
- Како се пресметува волумен на призма?

А

- За една призма велиме дека е впишана во цилиндар ако основите на призмата се впишани во основите на цилиндарот.

Во прав цилиндар, цртеж 1 е впишана правилна шестаголна призма.



Цртеж 1

■ Воочи дека плоштината на основата на цилиндарот е поголема од плоштината на основата на призмата. Исто така, бочната плоштина на цилиндарот е поголема од бочната плоштина на призмата.

Ако бројот на страните на основата на призмата се зголеми два пати, новиот број, пак, се удвои, итн., многуаголникот што е основа на призмата се стреми да премине во круг, т.е. периметарот на основата на призмата се стреми кон периметарот на кругот.

Значи, со зголемувањето на бројот на страните на основата на призмата, разликата меѓу бочните плоштини на цилиндарот и призмата ќе биде толку мала, што може да се занемари.

Бидејќи бочната плоштина на призмата е $M = L \cdot H$, следува дека бочната плоштина на цилиндарот е еднаква на производот од неговата висина и периметарот на основата, т.е.

$$M = 2r\pi \cdot H.$$

Плоштината на цилиндарот е еднаква на збирот од плоштините на основите и бочната плоштина, т.е.

$$P = 2B + M.$$

Бидејќи $B = r^2\pi$, а $M = 2r\pi H$ имаме:

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi H, \text{ т.е. } P = 2r\pi(r+H).$$

1 Радиусот на основата на еден цилиндар е $7\ cm$, а плоштината на неговиот осен пресек е $84\ cm^2$. Одреди ја плоштината на цилиндарот.

Согледај го решението:

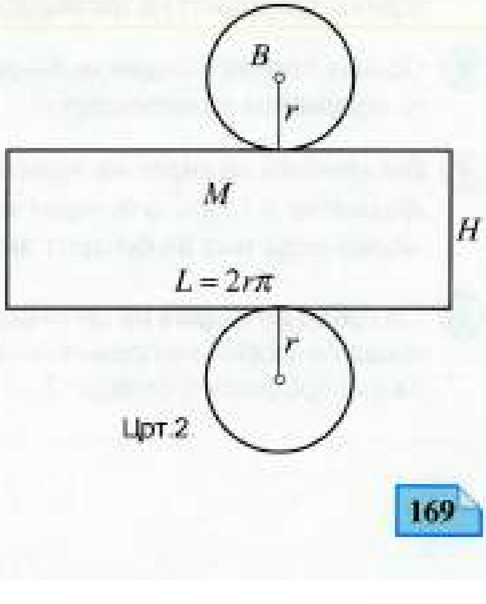
■ Осниот пресек е правоаголник, па од $P = 2r \cdot H$ следува $84 = 2r \cdot H$, т.е. $H = 6\ cm$. Плоштината на цилиндарот е

$$P = 2r\pi(r+H), \text{ односно } P = 2 \cdot 7\pi(7+6) = 182\pi\ cm^2.$$

2 Цилиндричен валјак долг $2{,}6\ m$ и со радиус $1{,}2\ m$ се завртел по улицата 300 пати. Колкава површина од улицата прегазил валјакот?

3 Даден е цилиндар со радиус на основата $1{,}5\ cm$ и висина $2\ cm$. Нацртај ја мрежата на цилиндарот и одреди ја нејзината плоштина.

Ако цилиндарот се исече по една изводница и по кружниците на основите, се добива мрежа на цилиндарот (црт. 2).



Црт.2

● Од што е составена мрежата на цилиндарот?

Воочи,

$P = 2B + M$, $B = r^2\pi$, $M = 2r\pi H$, па

$P = 2r\pi\ (r + H)$, т.е.

$P = 2 \cdot 1{,}5\pi(1{,}5+2) = 10{,}5\pi\ cm^2$.

Б Воочи дека цилиндарот има поголем волумен од призмата што е впишана во него (црт. 1). Меѓутоа, со зголемувањето на бројот на страните на основата на призмата, призмата се доближува до цилиндарот, па разликата меѓу нивните волумени ќе биде толку мала, што може да се занемари.

Бидејќи волуменот на призмата е $V = B \cdot H$ следува дека волуменот на цилиндарот е еднаков на производот од плоштината на основата и висината, т.е.

$$V = B \cdot H = r^2 \pi H.$$

4 Одреди го волуменот на цилиндар со радиус $5\ cm$ и плоштина на обвивката $70\pi\ cm^2$.

Согледај го решението:

Од $M = 2r\pi H$ следува $70\pi = 2 \cdot 5\pi H$, т.е. $H = 7\ cm$, па

$V = r^2\pi H = 5^2\pi \cdot 7 = 175\pi\ cm^3$.

Запомни!

Плоштина на цилиндар се пресметува со формулата $P = 2r\pi\left(r + H\right)$, а

волумен со формулата $V = r^2\pi H$.

r - радиус на основата на цилиндарот, а

H - висина на цилиндарот.

5 Дебелината на ѕидот на една оловна цевка е $4\ mm$, а внатрешниот дијаметар е $40\ mm$. Одреди ја масата на цевката ако таа е долга $5\ m$, а специфичната тежина на оловото е 11,4.

Задачи:

① Правоаголник со димензии $60\ cm$ и $40\ cm$ ротира прво околу едната страна, а потоа околу другата страна. Најди го односот од плоштините и односот од волумените на добиените цилиндри.

② Плоштината на цилиндар е $80\pi\ cm^2$, а разликата меѓу висината и радиусот е $2\ cm$. Одреди го волуменот на цилиндарот.

③ Осниот пресек на еден цилиндар е ромб со страна $10\ cm$ и остар агол од 30^0. Пресметај го волуменот на цилиндарот.

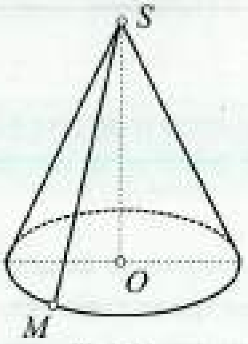
④ Дебелината на ѕидот на еден бунар што е во форма на цилиндар е $40\ cm$, внатрешниот дијаметар е $13\ dm$, а бунарот е длабок е $12\ m$. Колку метри кубни земја се ископани и колку вода има во бунарот ако висината на водениот столб е $4{,}5\ m$?

⑤ Од греда во форма на цилиндар со дијаметар $60\ cm$ и должина $5\ m$ треба да се направи греда во форма на правилна четириаголна призма, но со најмал отпад.
Колку проценти е отпадот?

8 КОНУС. ПРЕСЕЦИ НА КОНУС СО РАМНИНА

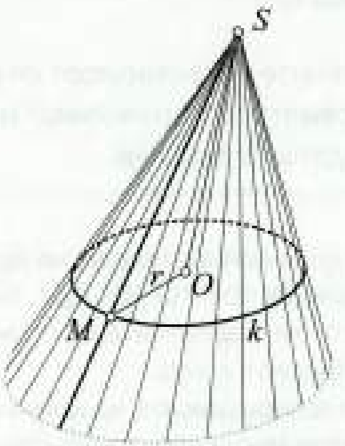
Потсети се!

- Како се добива цилиндрична површина?
- Како се добива прав цилиндар?
- Што е паралелен, а што осен пресек на цилиндар со рамнина?
- Во основното образование учеше за конус. На цртеж 1 е претставен прав конус.
- Како се вика точката S?
- Како се вика отсечката SO, а како отсечката SM?



Црт.1

Нека S е фиксна точка што лежи надвор од рамнината на дадената кружница $k(O, r)$, и нека полуправата SM ја допира кружницата во точката M (црт. 2).



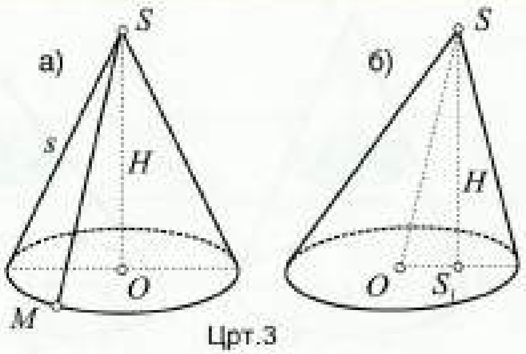
Црт.2

- Полуправата SM што се лизга по кружницата k опишува една крива површина која се вика ***кружна конусна површина*** или само ***конусна површина.***
- Како се вика полуправата SM, а како кружницата k ?
- Точката S се вика ***врв*** на конусната површина, а правата SO се вика ***оска*** на конусната површина.
- Ако оската SO е нормална на рамнината на кружницата k, тогаш се добива ***права кружна конусна површина***, во спротивно ***коса кружна конусна површина***.

Дел од просторот што е ограничен со дел од конусна површина и кругот што таа го отсекува од рамнината што е паралелна со рамнината на директрисата е геометриско тело што се вика ***кружен конус.***

- Од која конусна површина се добива прав кружен конус (црт. 3а), а од која кос кружен конус (црт. 3б)?

Понатаму, наместо кружен конус ќе го употребуваме терминот конус.



Црт.3

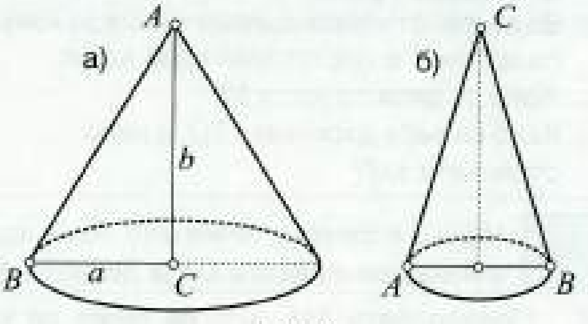
- Кругот што е пресек на конусната површина со рамнина се вика ***основа*** на конусот, а делот од конусната површина се вика ***бочна површина*** на конусот.
- Отсечката SO (крајни точки се врвот и центарот на основата) се вика ***оска*** на конусот.
- Растојанието меѓу врвот на конусот и неговата основа се вика ***висина*** на конусот.
- Отсечката чии крајни точки се врвот на конусот и која било точка од кружницата на основата се вика ***генератриса - изводница*** на конусот.

- Спореди ги висината и оската кај правиот и кај косиот конус. Што заклучуваш од споредувањето?
- Какви се по големина генератрисите на правиот конус, а какви на косиот конус?

Запомни!

Геометриското тело што е образувано од една права конусна површина и нејзиниот пресек со рамнината што е нормална на оската се вика прав конус (или конус).

Прав конус може да се добие со ротација на правоаголен триаголник околу една негова катета (црт. 4а) или со ротација на рамнокрак триаголник околу неговата оска на симетрија (црт. 4б).



Црт.4

Потсети се!

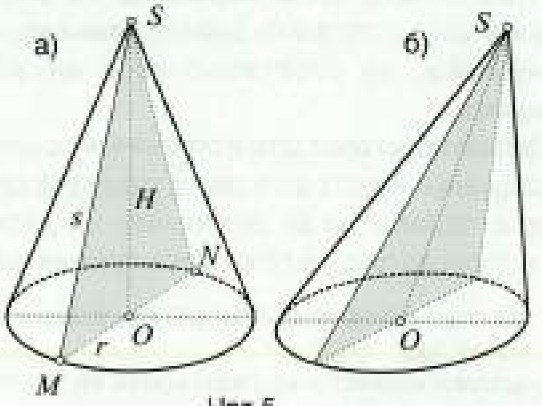
- За пресеците на цилиндарот со рамнина.
- На теоремата за паралелниот пресек на пирамидата со рамнина.

Б 1 Нацртај го пресекот на конус со рамнина што:

а) минува низ оската на конусот;

б) е паралелна со основата на конусот.

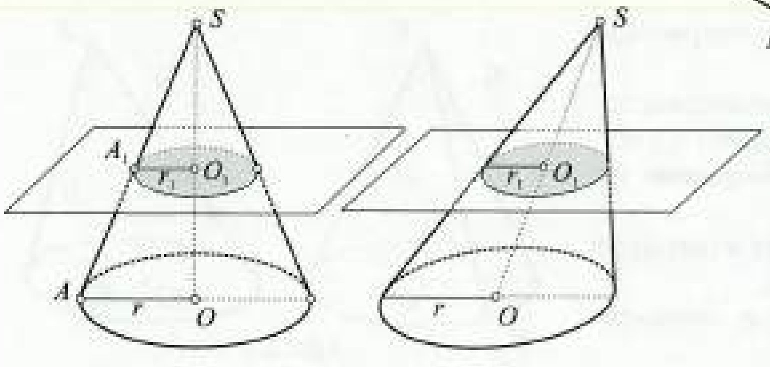
- Согледај го решението.



Црт.5

Воочуваш дека осниот пресек на правиот конус е рамнокрак триаголник (црт. 5а).

- Определи ги елементите на осниот пресек на правиот конус.
- Бидејќи генератрисите на косиот конус не се еднакви меѓу себе, тогаш која фигура е неговиот осен пресек (црт. 5б)?
- Дали некој осен пресек на кос конус може да е рамнокрак триаголник?



Црт.6

- Пресекот на конусот со рамнина што е паралелна на основата е круг. Да го разгледаме паралелниот пресек на цртеж 6.

Бидејќи $AO \parallel A_1O_1$, следува дека

$\Delta AOS \sim \Delta A_1O_1S$, па

$\overline{AO}:\overline{A_1O_1}=\overline{SO}:\overline{SO_1}=\overline{SA}:\overline{SA_1}$.

Од $\frac{r}{r_1}=\frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}}$ следува $\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}$, т.е. $\frac{B}{B_1}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}$, каде што B е плоштина на основата на конусот, а B_1 е плоштина на паралелниот пресек.

Со тоа ја докажавме следната

Теорема: Ако конусот се пресече со рамнина што е паралелна со основата на конусот, тогаш:

1. Генератрисата и висината на конусот се поделени со пресекот во ист однос.
2. Плоштините на основата и паралелниот пресек се однесуваат како квадратите на нивните растојанија до врвот на конусот.

2 Пресметај ја плоштината на осниот пресек на прав конус со висина $H = 8\ cm$ и генератриса (изводница) $s = 10\ cm$.

Согледај го решението:

■ Од ΔSMO (црт. 5а) имаме: $\overline{MO}^2=\overline{SM}^2-\overline{SO}^2$, односно $r^2=s^2-H^2$, т.е. $r=\sqrt{10^2-8^2}=6\,cm$. Плоштината на осниот пресек е $P=\frac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{SO}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48\,cm^2$.

3 Осниот пресек на еден прав конус е рамностран триаголник чиј периметар е $12\ cm$. Пресметај ја плоштината на тој пресек.

Согледај го решението:

■ Од $L = 12\ cm$ следува $s = 2r = 4\ cm$, па $P=\frac{s^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}\,cm^2$.

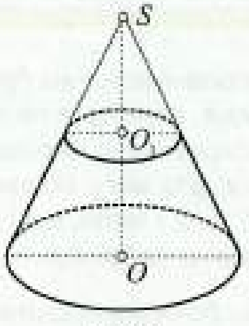
Запомни!

Конус чиј осен пресек е рамностран триаголник, т.е. $s = 2r$ се вика рамностран конус.

4 Плоштината на основата на конус е $175\pi\ cm^2$, а плоштината на еден негов паралелен пресек е $7\pi\ cm^2$. Одреди ја висината на конусот, ако растојанието меѓу основата и паралелниот пресек е $12\ cm$.

Согледај го решението:

■ Нека $\overline{OO_1}=12\,cm$, а $\overline{SO_1}=x$ (црт. 7). Тогаш од $\frac{B}{B_1}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}$ следува $\frac{175\pi}{7\pi}=\frac{(12+x)^2}{x^2}$ или $25=\left(\frac{12+x}{x}\right)^2$ или $\frac{12+x}{x}=5$, односно $12=4x$, т.е. $x=3$, па висината е $\overline{SO}=12+3=15\,cm$.



Црт.7

Запомни!

Дел од конусот ограничен со основата и еден паралелен пресек се вика потсечен конус.

Сигурно воочи дека при цртањето на конус ќе постапуваме на ист начин како и при цртањето на цилиндар. Имено, основата на конусот ја поставуваме хоризонтално, а оската на конусот и осниот пресек што е паралелен со рамнината на цртањето ги цртаме во вистинска големина.

Задачи:

① Пресметај плоштина на осниот пресек на прав конус со радиус на основата $6\ cm$, ако изводницата зафаќа агол од 60^0 со рамнината на основата.

② Најголемата и најмалата изводница на кос конус се $20\ cm$ и $12\ cm$, а радиусот на основата е $8\ cm$. Пресметај ја плоштината на осниот пресек на конусот.

③ Рамнокрак триаголник со основа $16\ cm$ и крак $17\ cm$ ротира околу симетралата на основата. Одреди ја плоштината на осниот пресек на добиеното ротационо тело.

④ Радиусот на основата на кос конус е $7\ cm$, а еден паралелен пресек на конусот ја дели оската на делови од $4\ cm$ и $10\ cm$. Одреди го радиусот на паралелниот пресек.

⑤ Низ врвот на конусот, под агол од 45^0 кон основата, поставена е рамнина, која отсекува четвртина од кружницата на основата. Одреди ја плоштината на пресекот ако висината на конусот е $6\ cm$.

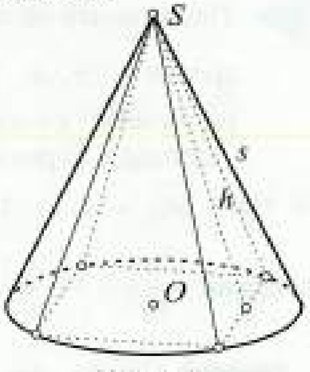
9 ПЛОШТИНА НА КОНУС. ВОЛУМЕН НА КОНУС

Потсети се!

- Како дојдовме до формулата за пресметување плоштина на цилиндар?
- Како дојдовме до формулата за пресметување волумен на цилиндар?
- Со која општа формула се пресметува плоштина на пирамида?
- Со која општа формула се пресметува волумен на пирамида?

За една пирамида велиме дека е впишана во конус ако основата на пирамидата е впишана во основата на конусот, а врвовите им се совпаѓаат.

Во конусот на цртеж 1 е впишана правилна четириаголна пирамида.



Цртеж 1

Со зголемување на бројот на основните рабови на впишаната пирамида, основата на пирамидата се доближува до круг, а бочната површина на пирамидата се доближува до конусна површина. Разликата меѓу бочните плоштини на конусот и пирамидата станува толку мала, што може да се занемари. Во тој случај, апотемата h на пирамидата се стреми кон изводницата s на конусот. Бидејќи бочната плоштина на правилна пирамида е $M = \frac{L \cdot h}{2}$, значи бочната плоштина на конусот е еднаква на полупроизводот од периметарот на основата и изводницата, т.е.

$$M = \frac{2r\pi \cdot s}{2} = r\pi s.$$

Плоштината на конус е еднаква на збирот од плоштината на основата и плоштината на бочната површина, т.е. $P = B + M$.

Бидејќи $B = r^2\pi$, а $M = r\pi s$ имаме:

$$P = r^2\pi + r\pi s \text{ или } \boxed{P = r\pi\left(r+s\right).}$$

1 Висината на еден конус е 5 cm, а периметарот на неговата основа е $24\pi\ cm$. Пресметај ја плоштината на конусот.

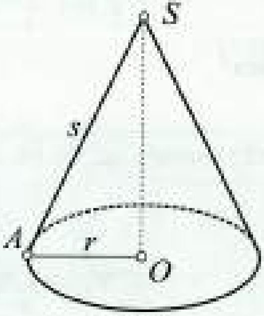
Согледај го решението:

Од условот $L = 2r\pi$ следува $2r\pi = 24\pi$, т.е. $r = 12\,cm$.

Од правоаголниот триаголник AOS (црт. 2) имаме:

$\overline{AS}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OS}^2$ или $s = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13cm$, па

$$P = \pi r\left(r+s\right) = 12\pi\left(12+5\right) = 204\pi\ cm^2.$$



Црт.2

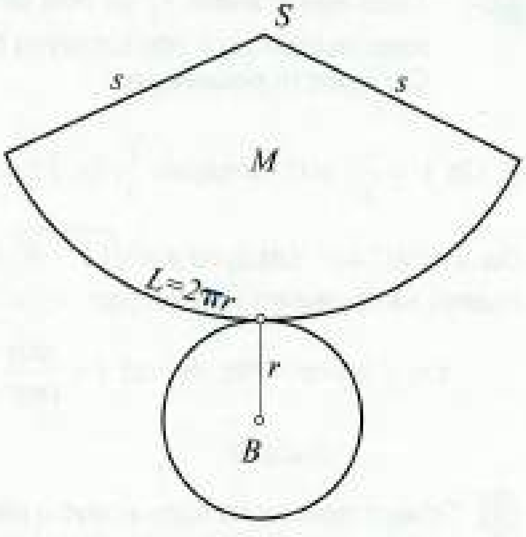
2 Даден е прав конус со радиус на основата 1,5 cm и изводница 4 cm. Нацртај мрежа на конусот и пресметај ја плоштината на конусот.

Ако дадениот конус се исече по една изводница и по кружницата на основата, тогаш може да се воочи дека неговата мрежа е составена од еден круг (основата) и еден кружен исечок (бочната површина), цртеж 3.

Плоштината на конусот е еднаква на плоштината на мрежата, т.е. $P = B + M$.

Бидејќи $B = r^2\pi$, плоштината на кружниот исечок е $M = \frac{1}{2}L \cdot s = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot s = r\pi s$. Според тоа $P = r^2\pi + r\pi s = r\pi\left(r+s\right)$.

Значи, $P = 1{,}5\pi\left(1{,}5+4\right) = 8{,}25\pi\ cm^2$.



Црт.3

Б

Веќе споменавме дека со зголемувањето на бројот на основните рабови, впишаната пирамида во конусот се доближува до конусот. Според тоа, разликата меѓу волуменот на конусот и волуменот на пирамидата се стреми кон нула и може да се занемари.

Бидејќи волуменот на пирамидата е $V = \frac{1}{3}BH$, следува дека волуменот на конусот е еднаков на третината од производот на плоштината на основата и висината на конусот, т.е.

$$\boxed{V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi H.}$$

3 Пресметај ги плоштината и волуменот на конус со радиус на основата 5 cm и плоштина на бочната површина $65\pi\ cm^2$.

Согледај го решението:

Од $M = r\pi s$ следува $5\pi s = 65\pi$, т.е. $s = 13\,cm$, а од $s^2 = H^2 + r^2$ следува $H^2 = 13^2 - 5^2$, т.е. $H = \sqrt{144} = 12\,cm$.

Според тоа, $P = r\pi(r+s) = 5\pi(5+13) = 90\pi\,cm^2$ и

$$V = \frac{r^2\pi H}{3} = \frac{5^2\pi\cdot 12}{3} = 100\pi\,cm^3.$$

Запомни!

Плоштината на конус се пресметува со формулата $P = r\pi(r+s)$, а волуменот со формулата $V = \frac{1}{3}r^2\pi H$.

r - радиус на основата, H - висина, а s - изводница на конусот.

4 Прав конус висок $12\,cm$ има волумен $324\pi\,cm^3$. Одреди го централниот агол на кружниот исечок што претставува бочна површина (обвивка) на конусот.

Согледај го решението:

Од $V = \frac{1}{3}r^2\pi H$ следува $\frac{1}{3}r^2\pi\cdot 12 = 324\pi$, т.е. $r = 9\,cm$.

Од $s^2 = H^2 + r^2$ следува $s = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\,cm$. Бидејќи изводницата на конусот претставува радиус на кружниот исечок (црт. 3), а периметарот на основата е должина на кружниот лак,

т.е. $\ell = 2r\pi = 18\pi\,cm$, од $\ell = \frac{s\pi\alpha}{180^0}$ следува $18\pi = \frac{s\pi\alpha}{180^0} = \frac{15\pi\alpha}{180^0}$, па $\alpha = 18\cdot 12^0 = 216^0$.

Задачи:

① Осниот пресек на еден конус е рамнокрак правоаголен триаголник со плоштина $36\,cm^2$. Одреди ги плоштината и волуменот на конусот.

② Радиусот и изводницата на еден прав конус се однесуваат како $8 : 17$, а неговата бочна плоштина е $4896\pi\,cm^2$. Пресметај го волуменот на конусот.

③ Најголемата и најмалата генератриса на еден конус се $20\,cm$ и $13\,cm$, а периметарот на основата е $21\pi\,cm$. Пресметај го волуменот на конусот.

④ Од лим во форма на кружен исечок со радиус $5\,dm$ и централен агол од 288^0, направена е инка во форма на конус. Пресметај го волуменот на инката.

⑤ Една копа сено има форма на цилиндар, а над него завршува со конусен врв. Копата е висока $4\,m$, цилиндричниот дел на копата е висок $2{,}2\,m$, а радиусот на основата е $2{,}5\,m$. Одреди ја масата на сеното ако неговата специфична тежина е $0{,}03$.

10 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПОТСЕЧЕН КОНУС

Потсети се!

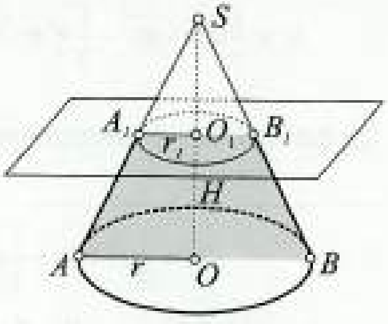
- На теоремата за паралелен пресек на конус.
- Како се пресметува плоштина на потсечена пирамида?
- Како се пресметува волумен на потсечена пирамида?
- Дел од конусот ограничен со основата и еден паралелен пресек (или со два паралелни пресеци) се вика ***потсечен конус***.

---

1 Пресметај ја плоштината на осниот пресек на потсечен конус ако радиусите на основите се $6\ cm$ и $2\ cm$, а висината на целиот конус е $6\ cm$.

Согледај го решението:

- Која фигура е осниот пресек на прав конус?



Црт.1

- Од сличноста на триаголниците SAO и SA_1O_1 имаме:

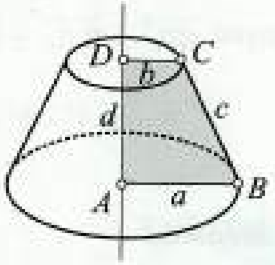
$$\frac{r}{r_1}=\frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}} \text{ или } \frac{6}{2}=\frac{6}{6-H}, \text{ т.е. } H=4\,cm.$$

Осниот пресек е рамнокрак трапез, па

$$P=\frac{(2r+2r_1)\cdot H}{2}=\frac{(2\cdot 6+2\cdot 2)\cdot 4}{2}=32\,cm^2.$$

- Правиот потсечен конус (понатаму ќе употребуваме само термин потсечен конус) е ротационо тело и се добива со ротација на правоаголен трапез околу помалиот крак или со ротација на рамнокрак трапез околу оската на симетрија.

- Кои отсечки при ротацијата ги формираат основите, а која отсечка ја формира бочната површина на потсечениот конус (црт. 2)?



Црт.2

2 Пресметај ги плоштината и волуменот на потсечен конус ако радиусите на основите се $9\ cm$ и $6\ cm$, а висина на конусот што го дополнува потсечениот конус до цел конус е $8\ cm$.

Согледај го решението:

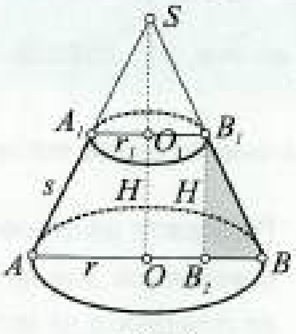
- Плоштината на потсечениот конус е еднаква на збирот од плоштините на основите и плоштината на бочната површина, т.е. $P=B+B_1+M$.

$B=r^2\pi,\ B_1=r_1^2\pi$, а

$$M=r\pi\cdot\overline{SA}-r_1\pi\cdot\overline{SA_1}=r\pi\left(s+\overline{SA_1}\right)-r_1\pi\,\overline{SA_1} \text{ или}$$

$$M=r\pi s+r\pi\cdot\overline{SA_1}-r_1\pi\cdot\overline{SA_1}, \text{ т.е.}$$

$$M=r\pi s+\pi\left(r-r_1\right)\cdot\overline{SA_1}.$$



Црт.3

Од сличноста на триаголниците SAO и SA_1O_1 (црт. 3) имаме:

$\frac{r}{r_1}=\frac{\overline{SA_1}+s}{\overline{SA_1}}$, т.е. $\overline{SA_1}=\frac{s\cdot r_1}{r-r_1}$, па следува $M=r\pi s+\pi\cdot\left(r-r_1\right)\cdot\frac{s\cdot r_1}{r-r_1}$, т.е. $M=\pi\left(r+r_1\right)\cdot s.$

Значи, $P=r^2\pi+r_1^2\pi+\pi\left(r+r_1\right)\cdot s$, т.е. $P=\pi\left(r^2+r_1^2+\left(r+r_1\right)\cdot s\right).$

Волуменот на потсечениот конус е еднаков на разликата од волуменот на целиот конус и волуменот на отсечениот конус (црт. 3), т.е.

$$V=\frac{1}{3}r^2\pi\cdot\overline{SO}-\frac{1}{3}r_1^2\pi\cdot\overline{SO_1}=\frac{1}{3}r^2\pi\left(H+\overline{SO_1}\right)-\frac{1}{3}r_1^2\pi\cdot\overline{SO_1}=\frac{1}{3}r^2\pi H+\frac{1}{3}\pi\left(r^2-r_1^2\right)\cdot\overline{SO_1}.$$

Од сличноста на триаголниците SAO и SA_1O_1 имаме: $\frac{r}{r_1}=\frac{\overline{SO_1}+H}{\overline{SO_1}}$ или $\overline{SO_1}=\frac{r_1\cdot H}{r-r_1}$, па

$$V=\frac{1}{3}r^2\pi H+\frac{1}{3}\pi\left(r-r_1\right)\left(r+r_1\right)\cdot\frac{r_1\cdot H}{r-r_1},\quad \text{т.е.}\quad V=\frac{H\pi}{3}\left(r^2+r_1^2+r\cdot r_1\right).$$

Од $\frac{r}{r_1}=\frac{\overline{SO_1}+H}{\overline{SO_1}}$ или $\frac{9}{6}=\frac{8+H}{8}$ добиваме $H=4\ cm$, а од правоаголниот триаголник BB_1B_2 следува $\overline{BB_1}^2=\overline{B_1B_2}^2+\overline{B_2B}^2$, т.е. $s=\sqrt{H^2+\left(r-r_1\right)^2}=\sqrt{4^2+\left(9-6\right)^2}=5cm$, па

$$P=\pi\left(9^2+6^2+\left(9+6\right)\cdot5\right)=192\pi\ cm^2 \quad \text{и} \quad V=\frac{4\cdot\pi}{3}\left(9^2+6^2+9\cdot6\right)=228\pi\ cm^3.$$

Запомни!

Плоштината на потсечен конус се пресметува со формулата $P=\pi\left(r^2+r_1^2+\left(r+r_1\right)\cdot s\right)$, а волуменот со формулата $V=\frac{H\pi}{3}\left(r^2+r_1^2+r\cdot r_1\right)$, каде r и r_1 се радиуси на основите, H - висина, а s - изводница на потсечениот конус.

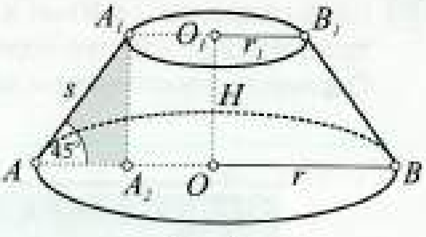
- Волуменот на кос потсечен конус се пресметува според истата наведена формула.

3 Радиусите на основите на потсечен конус се $5\ cm$ и $3\ cm$, а плоштината на бочната површина е $40\pi\ cm^2$. Пресметај го волуменот на потсечениот конус ако изводницата со рамнината на поголемата основа зафаќа агол од 45^0.

Согледај го решението:

Бидејќи по услов $\measuredangle A_1AA_2 = 45^0$, следува дека триаголникот A_1AA_2 е рамнокрак правоаголен (црт. 4), па $\overline{AA_2} = \overline{A_2A_1} = H = s\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\,cm$.

Од $M = \pi(r + r_1) \cdot s$ следува $40\pi = \pi(5+3) \cdot s$, т.е. $s = 5\,cm$.



Црт.4

Според тоа, $V = \frac{H\pi}{3}\left(r^2 + r_1^2 + r \cdot r_1\right)$,

$$V = \frac{5\sqrt{2}\pi}{3}\left(5^2 + 3^2 + 5 \cdot 3\right),$$

$$V = \frac{245\sqrt{2}\,\pi}{3} \approx 362,65\,cm^3.$$

4 Една кофа е направена од лим и има форма на прав потсечен конус со дијаметри на основите $24\,cm$ и $40\,cm$ и висина $35\,cm$.

Колку литри вода собира кофата?

Колку метри квадратни лим се набавени за изработка на 100 такви кофи, ако се знае дека 15% од употребениот лим е отпадок?

Согледај го решението:

- Волуменот на кофата е

$$V = \frac{H\pi}{3}\left(r^2 + r_1^2 + r \cdot r_1\right) = \frac{35\pi}{3}\left(12^2 + 20^2 + 12 \cdot 20\right) = 28720,5\,cm^3 \approx 28,7\,dm^3.$$

Според тоа, кофата собира 28,7 литри вода.

- Од $s^2 = H^2 + (r - r_1)^2$ следува $s = \sqrt{35^2 + (20-12)^2} = 35,9\,cm$.

Бидејќи кофата најчесто е отворена на поголемата основа, за изработка на една кофа употребени се:

$P = B_1 + M = r_1^2\pi + \pi(r + r_1) \cdot s = 12^2\pi + \pi(20+12) \cdot 35,9 = 4060\,cm^2 \approx 40,60\,dm^2$ лим. Значи, за 100 кофи е потребно $40,60 \cdot 100 = 4060\,dm^2 = 40,60\,m^2$ лим.

Отпадокот изнесува 15% од употребениот лим, т.е. $40,65 \cdot \frac{15}{100} = 6,10\,m^2$, што значи дека се набавени вкупно $40,60 + 6,10 = 46,7\,m^2$ лим.

Задачи:

① Изводницата на потсечен конус е $17\,cm$, а радиусите на основите се $19\,cm$ и $11\,cm$. Одреди го радиусот на основата на цилиндарот што има иста висина и иста бочна плоштина со потсечениот конус.

② Правоаголен трапез со основи $10\,cm$ и $6\,cm$ и плоштина $24\,cm^2$ ротира околу помалиот крак. Одреди ги плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело.

③ Плоштината на еден потсечен конус е $506\pi\,cm^2$, а радиусите на основите се разликуваат за $5\,cm$. Одреди го волуменот на тој конус ако изводницата е $13\,cm$.

④ Осниот пресек на еден потсечен кос конус е трапез со основи 24 *cm*, 10 *cm* и краци 13 *cm*, 15 *cm*. Одреди го волуменот на потсечениот конус.

⑤ Ромб со страна $a = 10\ cm$ и остар агол од 60^0 ротира околу правата што минува низ темето на остриот агол и е нормална на една негова страна.
Одреди ги плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело.

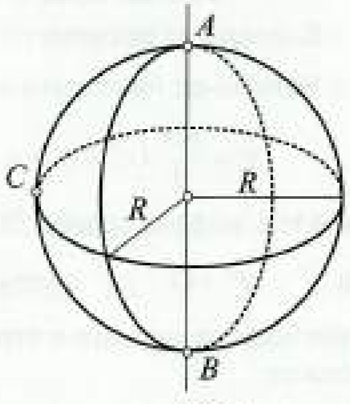
11 СФЕРА. ПЛОШТИНА НА СФЕРА И НЕЈЗИНИТЕ ДЕЛОВИ

Потсети се!

- Множеството од сите точки во рамнината што се на дадено растојание r од една точка O се вика кружница и се означува $k(O, r)$.
- Што е круг?
- Кои геометриски тела се ротациони?

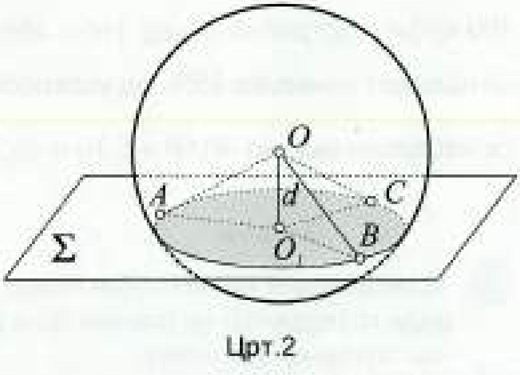
А Множеството од сите точки во просторот што се на дадено растојание R од една дадена точка O се вика ***сфера*** и се означува $S(O, R)$.

Точката O се вика центар на сферата.



Црт.1

- Отсечката чии крајни точки се центарот на сферата и која било точка од сферата се вика ***радиус*** на сферата. Радиус е даденото растојание R.
- Отсечката чии крајни точки се кои било две точки од сферата се вика ***тетива***.
- ***Дијаметар*** на сферата е тетивата што минува низ центарот на сферата.
- Сферата е ротациона површина, а се добива со ротација на полукружница околу дијаметарот. Скицата на сфера е прикажана на цртеж 1.
- Растојанието d, од центарот O на сферата до дадената рамнина Σ се вика ***централно растојание*** на рамнината и сферата.
- Ако $d > R$, тогаш сферата и рамнината немаат заеднички точки, т.е. $\Sigma \cap S(O, R) = \varnothing$.
- Ако $d = R$, тогаш сферата и рамнината имаат една заедничка точка, па рамнината ја допира сферата и се вика ***тангентна рамнина***.



Црт.2

Б Ако $d < R$, тогаш рамнината ја сече сферата, а пресекот е кружница (црт. 2).

Да претпоставиме дека точките $A, B, C, \ldots$ лежат на пресекот. Отсечката $\overline{OO_1} = d$ е нормална на рамнината Σ, па триаголниците OAO_1, OBO_1, OCO_1, ... се правоаголни. Зошто?

Точките $A, B, C, \ldots$ лежат на сферата, па $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\ldots=R$.

Бидејќи отсечката OO_1 е заедничка страна на тие триаголници, следува дека $\Delta OAO_1 \cong \Delta OBO_1 \equiv \Delta OCO_1 \equiv \ldots$ Оттука следува $\overline{O_1A}=\overline{O_1B}=\overline{O_1C}=\ldots$, т.е. точките $A, B, C, \ldots$ лежат на една кружница. Со тоа ја докажавме следната

Теорема: Пресекот на сфера со рамнина е кружница.

- Ако рамнината минува низ центарот на сферата, тогаш пресекот е најголемата кружница, а сферата е поделена на две полусфери.
- Сферата на цртеж 1 е претставена со три најголеми кружници што лежат во три заемно нормални рамнини.
- Во која положба се тие рамнини во однос на рамнината на таблата за цртање.
- Ако рамнината Σ ја сече сферата и не минува низ центарот, тогаш сферата е поделена на два нееднакви дела, а секој од нив се вика *калота*. Доколку поинаку не е речено, за калота ќе се смета помалиот дел од сферата. Воочи, калотата има своја *висина* h (црт. 3).

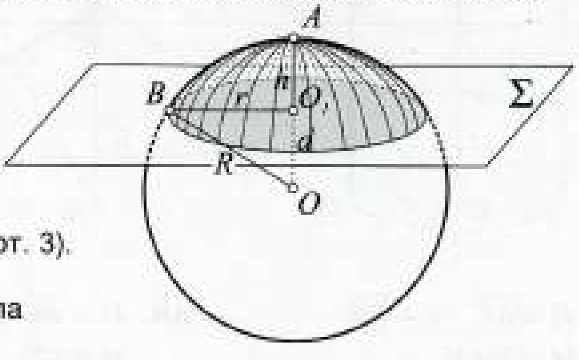
1 Една сфера е пресечена со рамнина на растојание $d=10\ cm$ од центарот. Периметарот на пресекот е $48\pi\ cm$. Одреди ја висината на калотата.

Согледај го решението:

- Нека $\overline{OO_1}=d$ и $\overline{O_1B}=r$, радиус на пресекот (црт. 3).

  Тогаш $R^2=d^2+r^2$, т.е. $R=\sqrt{24^2+10^2}=26\,cm$, па

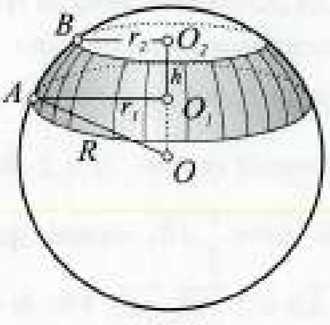
  $h=R-d=26-10=16\,cm$.



Црт.3

- Дел од сферата што е зафатен меѓу два паралелни пресеци се вика *појас* или *зона* (црт. 4).
- Растојанието меѓу двата паралелни пресеци е *висина* на појасот. На цртеж 4, висина на појасот е отсечката $\overline{O_1O_2}=h$.

Ако $d_1=\overline{OO_1}$ и $d_2=\overline{OO_2}$ се централните растојанија на пресеците, тогаш $h=|d_2-d_1|$ ако пресеците се од истата страна во однос на центарот, а $h=d_1+d_2$ ако пресеците се на различна страна во однос на центарот.



Црт.4

1 Одреди ја висината на зоната ако радиусот на сферата е $25\ cm$, а централните растојанија на пресеците се $20\ cm$ и $15\ cm$.

Од ΔOO_1A следува $d_1=\overline{OO_1}=\sqrt{R^2-r_1^2}=\sqrt{25^2-20^2}=15\,cm$, а од ΔOO_2B следува $d_2=\overline{OO_2}=\sqrt{R^2-r_2^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20\,cm$. Бидејќи не е определена положбата на пресеците во однос на центарот, имаме: $h=d_2-d_1=20-15=5\,cm$ или $h=d_2+d_1=20+15=35\,cm$.

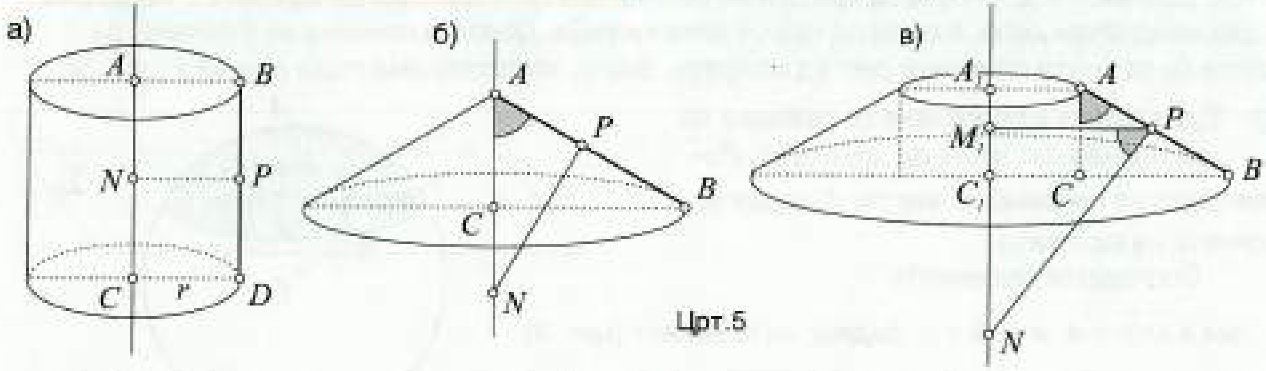
Потсети се!

- Права што ротира околу оска опишува ротациона површина, а и отсечка што ротира околу оска опишува ротациона површина.
- Каква заемна положба имаат отсечката и оската на ротација, ако опишаната бочна површина е дел од:
  а) цилиндар; б) конус; в) потсечен конус?
- На формулите за пресметување плоштина на бочната површина на: цилиндар, конус и потсечен конус.

Ќе докажеме дека за пресметување на плоштината на бочната површина на: цилиндар, конус и потсечен конус важи заедничкото правило:

Бочната плоштина на цилиндар, конус и потсечен конус е еднаква на производот од висината на телото и периметарот на кружницата чиј радиус е еднаков со должината на нормалата повлечена од средната точка на генератрисата до пресекот со оската на ротација.

Согледај го доказот:



Црт.5

$H=\overline{AC}$, $r=\overline{PN}$, $M=2r\pi H$

$s=\overline{AB}$, $H=\overline{AC}$, $r=\overline{BC}$, $M=r\pi s$

$s=\overline{AB}$, $r=\overline{BC_1}$, $r_1=\overline{AA_1}$, $H=\overline{AC}$, $M=\pi\left(r+r_1\right)\cdot s$

Треба да докажеме дека за трите тела важи $M=2\pi\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, каде што PN и AC се по должина различни за секое тело.

а) За цилиндарот доказот е очигледен, бидејќи $r=\overline{PN}$, $H=\overline{AC}$, $M=2r\pi H=2\pi\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}$.

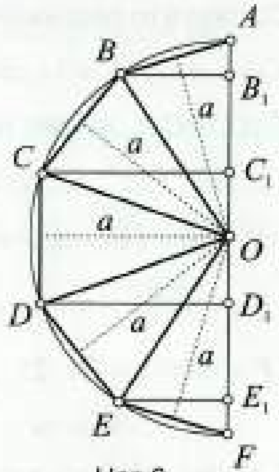
б) За конусот имаме: $M=\pi\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AB}$. Од $\Delta ACB\sim\Delta ANP$ следува $\overline{BC}:\overline{PN}=\overline{AC}:\overline{AP}$, а бидејќи $\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, имаме: $\overline{BC}\cdot\overline{AP}=\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, или $\overline{BC}\cdot\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, односно $\overline{BC}\cdot\overline{AB}=2\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, т.е. $M=\pi\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AB}=\pi\cdot2\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}=2\pi\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}$.

в) За потсечениот конус имаме: $M=\pi\left(\overline{BC_1}+\overline{AA_1}\right)\cdot\overline{AB}$.

Од трапезот A_1C_1BA следува $\overline{PM_1}=\frac{1}{2}\left(\overline{BC_1}+\overline{AA_1}\right)$, т.е. $\overline{BC_1}+\overline{AA_1}=2\cdot\overline{PM_1}$, па $M=2\pi\cdot\overline{PM_1}\cdot\overline{AB}$. Бидејќи $\Delta ACB\sim\Delta PM_1N$, ($\measuredangle BAC=\measuredangle NPM_1$, агли со нормални краци), имаме $\overline{AC}:\overline{PM_1}=\overline{AB}:\overline{PN}$ или $\overline{PM_1}\cdot\overline{AB}=\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, па $M=2\pi\cdot\overline{PM_1}\cdot\overline{AB}=2\pi\cdot\overline{PN}\cdot\overline{AC}$, што требаше да се докаже.

- Со ротација на која фигура се добива сфера?

Нека во полукружницата со дијаметар AF е впишана правилна искршена линија $ABCDE$... чии страни се на растојание a од центарот O (црт. 6).



Црт.6

Ако искршената линија ротира околу дијаметарот на полукружницата, тогаш секоја страна на искршената линија опишува бочна површина на цилиндар, конус или потсечен конус, во зависност од нејзината положба во однос на дијаметарот AF. Нека плоштините на тие површини се M_1, M_2, M_3, ... Тогаш, според претходниот доказ имаме:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5,$$

$$M = \overline{AB_1} \cdot 2\pi a + \overline{B_1C_1} \cdot 2\pi a + \overline{C_1D_1} \cdot 2\pi a + \overline{D_1E_1} \cdot 2\pi a + \overline{E_1F} \cdot 2\pi a,$$

$$M = 2\pi a\left(\overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{D_1E_1} + \overline{E_1F}\right),$$

$$M = 2\pi a \cdot \overline{AF} = 2\pi a \cdot 2R.$$

Ако бројот на страните на искршената линија постојано се зголемува, тогаш таа се доближува до полукружница, а ротационата површина се доближува до сфера. Во тој случај растојанието a се стреми кон радиусот R на полукружницата, односно сферата.

Според тоа, плоштината на сферата е

$$P = 2\pi a \cdot 2R = 2\pi R \cdot 2R = 4R^2\pi.$$

На сличен начин, ако ја разгледаме ротацијата на искршената линија впишана во лакот AB, ја изведуваме формулата за плоштина на калота и имаме:

$$P = 2\pi a \cdot \overline{AB_1} = 2\pi R \cdot h.$$

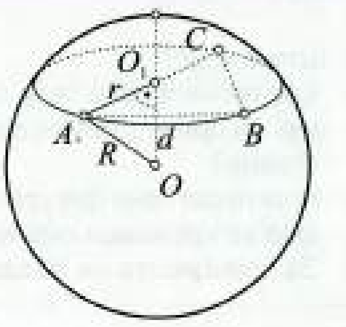
Аналогно, плоштината на појасот е

$$P = 2\pi R \cdot h.$$

Запомни!

Плоштината на сфера се пресметува со формулата $P = 4R^2\pi$, а на калота и појас со формулата $P = 2R\pi \cdot h$, каде R е радиус на сферата, а h е висина на калотата или појасот.

3 На сферата $S(O,\ 13\ cm)$ лежат точките A, B и C. Растојанијата меѓу нив се: $6\ cm$, $8\ cm$ и $10\ cm$. Одреди ја плоштината на калотата што рамнината на триаголникот ABC ја отсекува од сферата (црт. 7).



Црт.7

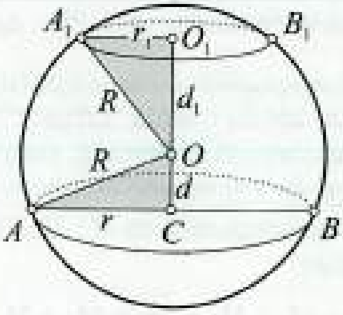
Согледај го решението:

- Триаголникот ABC е правоаголен, па радиусот на пресекот е $r = 5\ cm$. Од ΔOO_1A следува $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, па висината на калотата е $h = 13 - 12 = 1\ cm$. Според тоа,

$$P = 2R\pi h = 2\pi \cdot 13 \cdot 1 = 26\pi\ cm^2.$$

5 Од различни страни во однос на центарот на една сфера се конструирани два паралелни пресеци со радиуси $7\ cm$ и $15\ cm$ (црт. 8). Пресметај ја плоштината на сферниот појас, ако растојанието меѓу пресеците е $44\ cm$.

Согледај го решението:



Црт.8

- Од $h = d + d_1 = 44\ cm$ следува $d = 44 - d_1$.

Од ΔOO_1A_1 имаме $R^2 = d_1^{\,2} + 7^2$, а од ΔOAC следува $R^2 = d^2 + 15^2$. Оттука следува равенката

$d_1^{\,2} + 49 = (44 - d_1)^2 + 225$, од каде $d_1 = 24\ cm$, па

$R = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25\,cm$. Според тоа,

$P = 2R\pi \cdot h = 2\pi \cdot 25 \cdot 24 = 1200\pi\ cm^2 = 12\pi\ dm^2$.

Задачи:

① Колку најмногу заеднички точки можат да имаат права и сфера?

② Низ средината на еден радиус на дадена сфера е поставена рамнина нормална на него. Во кој однос рамнината ја дели плоштината на сферата?

③ Висината на една калота е $9\ cm$, а радиусот на нејзината основа е $15\ cm$. Одреди го растојанието на пресекот од центарот на сферата.

④ Радиусите на две сфери се $25\ cm$ и $29\ cm$, а растојанието меѓу нивните центри е $36\ cm$. Одреди ја должината на пресекот на сферите.

⑤ Колкава површина од Земјата се гледа од точката која е оддалечена $140\ m$ од нејзината површината? (радиус на Земјата е $6370\ m$.)

12 ТОПКА. ВОЛУМЕН НА ТОПКА И НЕЈЗИНИТЕ ДЕЛОВИ

Потсети се!

- Што е круг?
- Кое геометриско тело се добива со ротација на правоаголник околу една негова страна?
- Која просторна фигура се добива со ротација на кружница околу дијаметарот?
- За принципите на Кавалиери.

A Познато ти е дека сфера се добива со ротација на полукружница околу нејзиниот дијаметар.

Запомни!

Делот од просторот што е заграден со една сфера се вика ***топка***.

- Центарот на сферата е центар на топката, а радиусот на сферата е радиус на топката.

Запомни!

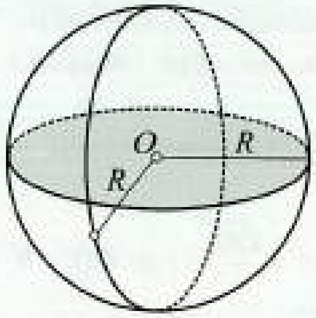
Пресекот на топката со рамнина е круг.

Доказот на ова тврдење е идентичен со доказот за пресекот на сфера со рамнина.

- Ако рамнината минува низ центарот на топката, тогаш топката е поделена на два складни дела - ***полутопки***, а пресекот се вика ***главен круг - голем круг*** на топката.

На цртеж 1 е прикажана скица на топка со три главни кругови, кои лежат во три заемно нормални рамнини.

- Топката е ротационо тело и се добива со ротација на полукруг околу неговиот дијаметар.



Црт.1

1 Една топка е пресечена со две паралелни рамнини. Дијаметрите на пресеците се 24 dm и 18 dm, а растојанието меѓу нив е 21 dm. Одреди ја плоштината на главниот круг.

Согледај го решението:

- Радиусот на главниот круг е радиус на топката (црт. 2).

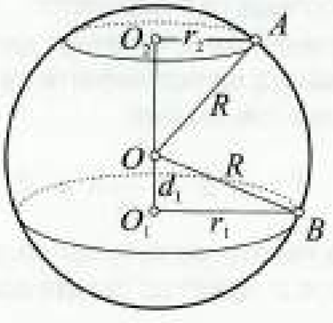
Нека $\overline{O_1B} = r_1 = 12\,dm$, $\overline{O_2A} = r_2 = 9\,dm$, $\overline{OO_1} = d_1$, $\overline{OO_2} = 21 - d_1$.

Од ΔOO_1B следува $R^2 = d_1^{\ 2} + 12^2$, а од ΔOO_2A имаме

$R^2 = (21 - d_1)^2 + 9^2$. Од равенката $d_1^{\ 2} + 144 = 441 - 42d_1 + d_1^{\ 2} + 81$

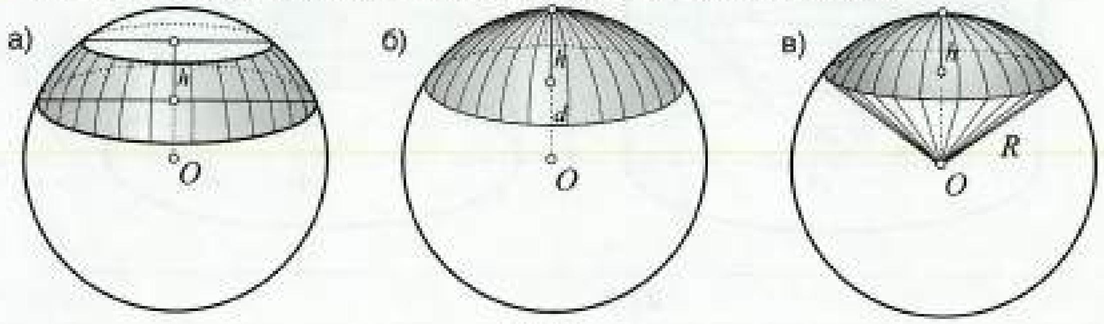
следува $d_1 = 9\ cm$, па $R = \sqrt{9^2 + 144} = 15\,cm$ и

$$P = R^2\pi = 225\pi\ cm^2.$$



Црт.2

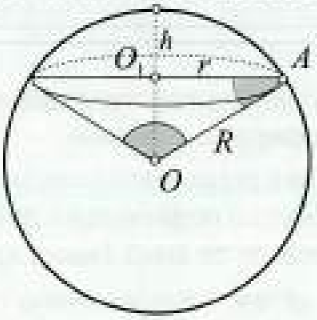
Б Рамнината што не минува низ центарот на топката ја дели топката на два нееднакви дела и секој од нив се вика ***сегмент*** или ***топкин отсечок***.



Црт.3

- Топкиниот отсечок е ограничен со калота и круг. Висината на калотата е висина на топкиниот отсечок (црт. 3а).
- Делот од топката што е составен од топкин отсечок и конус чија основа е основата на топкиниот отсечок, а врв е центарот на топката се вика ***топкин исечок*** или ***сектор*** (црт. 3б).
- Делот од топката зафатен меѓу два паралелни пресеци се вика ***топкин слој***. Границите на топкиниот слој се два круга и сферен појас (црт. 3в).

2 Плоштината на основата на топкин отсечок е $81\pi\ cm^2$, а лакот на оскиниот пресек на отсечокот има централен агол од 120^0. Одреди ги радиусот на топката и висината на отсечокот.



Црт.4

Согледај го решението:

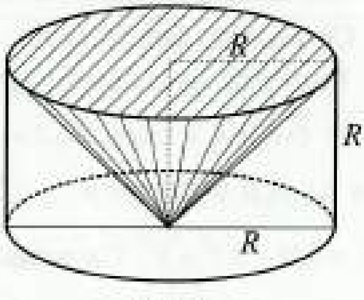
■ Од $r^2\pi = 81\pi$ следува $r = 9\,cm$. Од правоаголниот триаголник OAO_1 имаме: $\cos 30^0 = \frac{\overline{O_1A}}{R}$, т.е. $R = \frac{\overline{O_1A}}{\cos 30^0} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3}\,cm$;

$tg\,30^0 = \frac{\overline{OO_1}}{r}$, т.е. $\overline{OO_1} = 9\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}\,cm$, па $h = R - \overline{OO_1} = 3\sqrt{3}\,cm$.

B **3** Даден е цилиндар со радиус на основата R и висина $H = R$. Од цилиндарот е отфрлен еден конус чија основа се совпаѓа со основата на цилиндарот, а врв е центарот на другата основа на цилиндарот. Одреди го волуменот на останатиот дел од цилиндарот.

■ Согледај го решението:

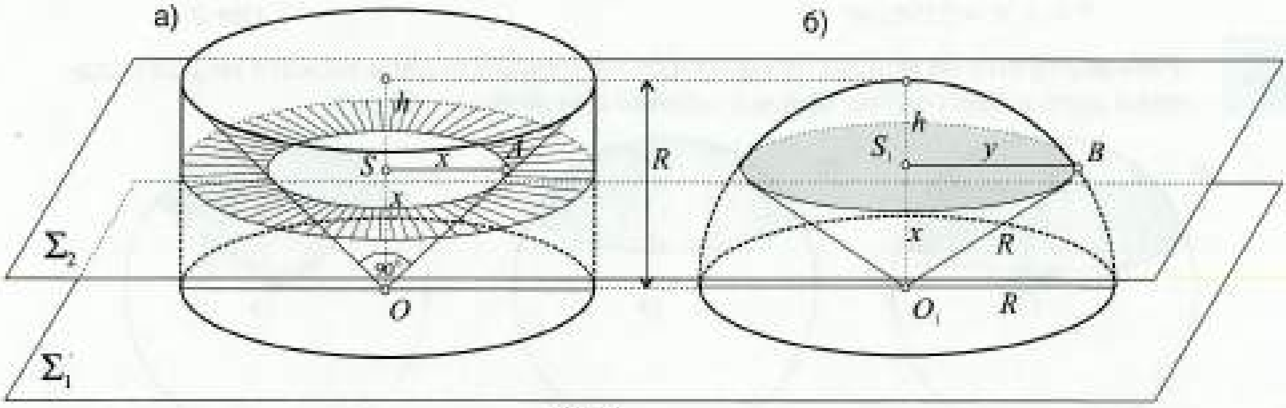
Волуменот на останатиот дел од цилиндарот е еднаков на разликата од волумените на цилиндарот и конусот (црт. 5). Според тоа, имаме:



Црт.5

$$V = R^2\pi\cdot R - \frac{1}{3}R^2\pi\cdot R,\ \text{т.е.}\ V = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Нека телото чиј волумен го одредивме и полутопката со радиус R лежат со своите основи на рамнината Σ_1 (црт. 6).



Црт.6

Рамнината Σ_2 е паралелна со рамнината Σ_1 и ги сече поставените тела. Пресекот на рамнината Σ_2 и првото тело е кружен прстен со радиуси R и x (црт. 6а), па неговата плоштина е $P_1 = \pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Пресекот на полутопката и рамнината Σ_2 е круг со радиус y (црт. 6б), па неговата плоштина е $P_2 = \pi y^2$.

Триаголникот OAS (црт. 6а) е рамнокрак правоаголен, значи $\overline{OS} = \overline{SA} = x$. Бидејќи

$\overline{OS} = R - h$

и $\overline{O_1S_1} = R - h$, следува $OS = \overline{O_1S_1} = x = R - h$. Од триаголникот O_1S_1B добиваме $y^2 = R^2 - x^2$. Бидејќи $P_1 = \pi\left(R^2 - x^2\right) = \pi y^2$ и $P_2 = \pi y^2$, следува дека $P_1 = P_2$. Според принципот на Кавалјери, следува дека двете тела имаат еднакви волумени, па оттука следува дека волуменот на полутопката е $V = \frac{2}{3}R^3\pi$, а волуменот на топката е $\boxed{V = 2\cdot\frac{2}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}R^3\pi.}$

4 Од три оловни топки, со претопување е направена една топка. Одреди го радиусот на таа топка ако радиусите на трите топки се $3\ cm$, $4\ cm$ и $5\ cm$.

Согледај го решението:

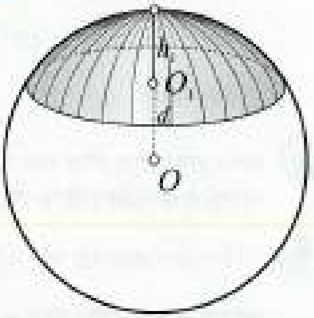
- Нека волумените на трите топки се $V_1 = \frac{4}{3}R_1^3\pi = \frac{4}{3}\cdot 3^3\pi = 36\pi\ cm^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\cdot 4^3\pi = \frac{256\pi}{3}\ cm^3$ и $V_3 = \frac{4}{3}\cdot 5^3\pi = \frac{500\pi}{3}\ cm^3$. Волуменот на добиената топка е $V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{864\pi}{3}\ cm^3$.

Од $\frac{4}{3}R^3\pi = \frac{864}{3}\pi$ следува $R^3 = 216$, т.е. $R = 6\,cm$.

T Волуменот на топкиниот отсечок (црт. 6б) го означуваме со Vт.о. и е еднаков со волуменот на телото што е над рамнината $\sum_2$ (црт. 6а), т.е. на разликата од волумените на цилиндарот (со висина h и радиус R) и потсечениот конус (со висина h, а радиуси R и $x = R - h$).

Vт.о.$= \pi h\cdot R^2 - \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + (R-h)^2 + R(R-h)\right)$, т.е. $\boxed{V\text{т.о.} = \frac{\pi h}{3}(3R - h).}$

5 Една рамнина е нормална на дијаметарот на топка и го дели дијаметарот на делови од $3\ cm$ и $9\ cm$. Пресметај ги волумените на добиените делови од топката.



Согледај го решението:

- Висината на едниот топкин отсечок е $3\ cm$, а на другиот $9\ cm$.

$V_1 = \frac{3^2\pi}{3}(3\cdot 6 - 3) = 45\pi\ cm^3$ и $V_2 = \frac{9^2\pi}{3}(3\cdot 9 - 3) = 648\pi\ cm^3$.

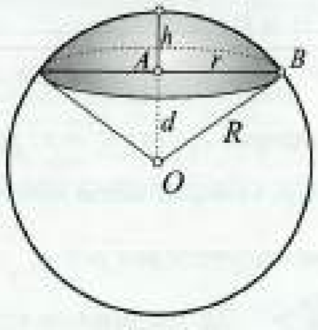
- Волуменот на топкиниот исечок (Vт.и.), (црт. 6б) е еднаков на збирот од волумените на топкиниот отсечок (со висина h и радиус y) и конусот (со висина $x = R - h$ и радиус y).

Бидејќи $y^2 = R^2 - x^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2$, имаме: Vт.и.$= \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) + \frac{\pi}{3}y^2(R - h)$ или

Vт.и.$= \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) + \frac{\pi}{3}\left(2Rh - h^2\right)(R - h)$, т.е. $\boxed{V\text{т.и.} = \frac{2}{3}R^2\pi h.}$

6 Одреди го волуменот на топкин исечок ако радиусот на неговата основа е 60 cm, а радиусот на топката е 75 cm.

Согледај го решението:



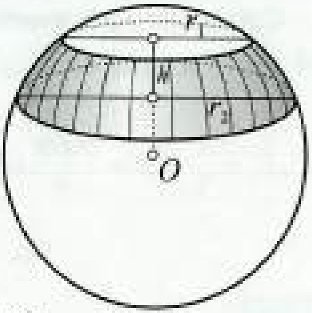
Црт.7

- Од $\Delta\ AOB$ имаме $d^2 = R^2 - r^2$, односно $d = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45\,cm$,

па $h = 75 - 45 = 30\ cm$ (црт. 7). Според тоа, $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = 225\,dm^3$.

- Волуменот на топкин слој (црт. 8) е еднаков на разликата од волумените на двата топкини отсечоци што се од иста страна на центарот на топката, т.е.

$$V = \frac{\pi h}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right).$$



Црт.8

7 Топка со радиус 35 cm е пресечена со две паралелни рамнини од иста страна во однос на центарот. Рамнините се на растојание 11 cm и 17 cm од центарот на топката. Пресметај го волуменот на топкиниот слој.

Согледај го решението (црт. 9):

- Волуменот ќе го одредиме како разлика на два отсечоци, чии висини се $h_1 = R - \overline{OO_1} = 35 - 11 = 24 cm$ и $h_2 = R - \overline{OO_2} = 35 - 17 = 18\,cm$.

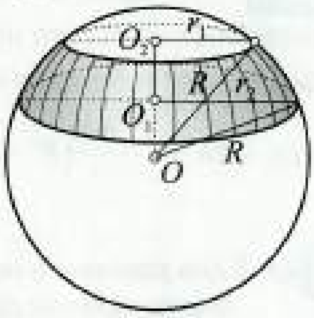
$$V = \frac{\pi h_1^2}{3}(3R - h_1) - \frac{\pi h_2^2}{3}(3R - h_2),\ V = \frac{\pi \cdot 24^2}{3}(3\cdot 35 - 24) - \frac{\pi \cdot 18^2}{3}(3\cdot 35 - 18),$$

$$V = 192\pi \cdot 81 - 108\pi \cdot 87 = 6156\pi\ cm^3.$$

Волуменот можеш да го одредиш со примена на формулата:

$$V = \frac{\pi h}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right),\ h = 17 - 11 = 4\ cm,$$

$$r_1^2 = R^2 - 17^2 \text{ и } r_2^2 = R^2 - 11^2.$$



Црт.9

Задачи:

① Ако радиусите на три топки се однесуваат како 1 : 2 : 3, тогаш волуменот на најголемата топка е три пати поголем од збирот на волумените на другите две топки. Докажи!

② Плоштината на една калота е $\frac{2}{5}$ од плоштината на сферата. Одреди ги плоштината на калотата и волуменот на топкиниот отсечок ако радиусот на нивната заедничка основа е $2\sqrt{6}\,cm$.

③ Големиот круг на топка е основа на конус чија висина е еднаква со дијаметарот на топката. Пресметај го волуменот на топката ако радиусот на пресекот на сферата и конусната површина имаат радиус 12 cm.

④ Во коцка со страна a е впишана топка, а околу коцката е опишана топка. Одреди го односот од плоштините и односот од волумените на топките.

⑤ Еден топкин слој и еден цилиндар имаат заедничка основа и заедничка висина. Разликата на нивните волумени е $36\pi\ cm^3$. Одреди ја нивната висина.

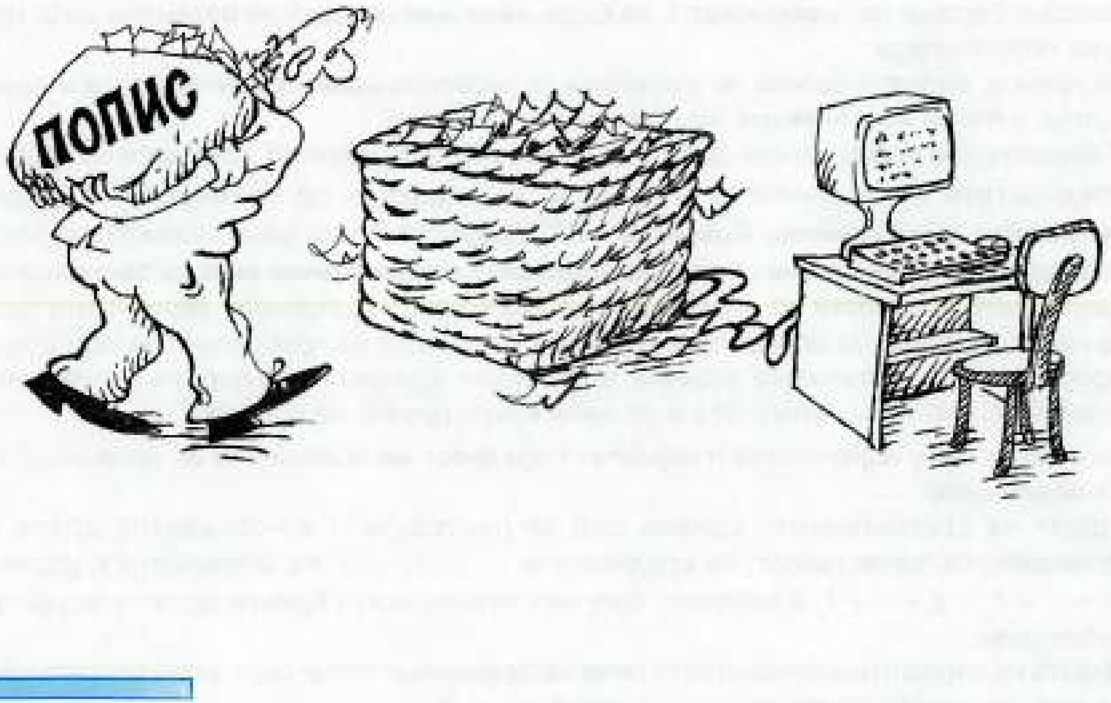
ТЕМА 8

ОБРАБОТКА НА ПОДАТОЦИ

> *Што е точно во математиката освен точноста?” И не ли е тоа последица од внатрешното чувство за вистинитоста.”*
>
> Гете (1749-1832)

Во оваа тема ќе учиш за:

- мерки за простирање на податоци, интервал, опсег;
- мерка за расејување (дисперзија) на податоците и стандардна девијација;
- стандардизирање на податоци, споредување на распределба на обележја;
- графичко претставување и определување на интервали и опсег на истите.



1 ПОПУЛАЦИЈА, ОБЕЛЕЖЈЕ, ПРИМЕРОК, АРИТМЕТИЧКА СРЕДИНА, МОДА, МЕДИЈАНА

Потсети се!

- Што подразбираме под поимот *статистика*?
- Кои фази ги содржат статистичките истражувања?

- Множеството од еднородни објекти или резултати на некоја операција, кои имаат некоја заедничка карактеристика, се нарекува ***популација.***

- Елементите на статистичкото множество се ***статистички единици.*** На пример, учениците од едно училиште, жителите на еден град, јаболковите стебла во еден овоштарник и сл.
- Заедничката карактеристика што се набљудува на елементите од популацијата ја нарекуваме *обележје* (белег).

  Статистичките обележја ги делиме на квалитативни и квантитативни.

  - Квалитативните обележја на претходниот пример се: полот на учениците, образовната структура на жителите во градот, сортите на јаболката и сл.

  - Квантитативните обележја се изразуваат со реални броеви. Во нашиов пример, за учениците се висина, маса; за жителите може да се земе нивната старосна структура, за јаболката приносот во килограми јаболка по стебло и сл.

  Во математичката статистика се смета дека секое обележје X е ***случајна променлива.***

  Квантитативните обележја можат да бидат ***прекинати*** (дискретни) и ***непрекинати.***

  Пример за прекинати обележја - број на изостаноците на ученик или клас.

  Пример за непрекинати обележја - висината, возраст, маса на учениците во едно училиште.
- Делот (подмножеството) од популацијата, на која се извршуваат потребните испитувања го нарекуваме ***примерок*** или мостра.

  Основно барање на примерокот е да биде ***мини-модел***, односно правилно да ја претставува популацијата.

  На пример, редните броеви на учениците ги забележуваме на ливчиња и ги мешаме во кутија, а потоа извлекуваме, на пример, пет ливчиња.

  Учениците чии редни броеви се случајно извлечени сочинуваат примерок на паралелката.
- Вредностите на обележјето X добиени за единките од примерокот определуваат ***множество статистички податоци*** за X. Вредностите од едно статистичко множество подредени во низа што не опаѓа, определуваат ***статистичка низа*** за обележјето X.
- Различните вредности во примерокот се нарекуваат ***варијанти.*** Варијантите подредени во низа што расте, ја определуваат низата вредности на примерокот за обележјето X.
- Бројот на статистичките единки што имаат еднакви вредности на обележјето е подмножество на популацијата и се вика ***класа (група)*** на обележјето.
- Разликата меѓу најголемата и најмалата вредност на обележјето се вика ***опсег*** или ***ранг*** на обележјето.
- Бројот на статистичките единки што се повторуваат во соодветна класа се вика фрекфенција (зачестеност) на вредностите $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ на обележјето x, додека $N = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n$ е вкупниот број на статистичките единки во популацијата која се набљудува.
- Низата на варијанти и соодветната низа на фреквенциите, ја определуваат распределбата на фреквенцијата на примерокот за обележјето X.

1 Успехот (оценките) на учениците во еден клас по предметот математика ќе го дадеме во табела, односно во статистичка низа која не опаѓа:

1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	3	3	3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	5	5	5	5	5

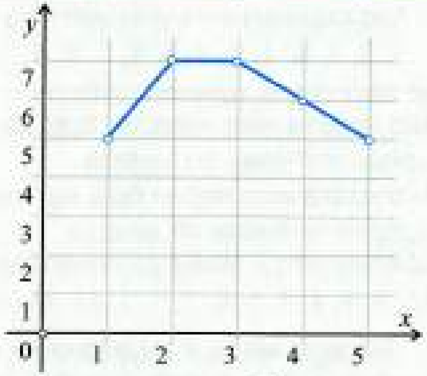
Очигледно, бројот на фрекфенциите е следниот:

$f_1 = 5$, $f_2 = 7$, $f_3 = 7$, $f_4 = 6$ и $f_5 = 5$.

Статистичката табела изгледа вака:

Вредност на обележјето x	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=4$	$x_5=5$	
f: Број на оценки статистички единки што се повторуваат	5	7	7	6	5	$\sum=30$

Ако во координатната рамнина xOy, на x-оската ги нанесеме вредностите на обележјето, а на y-оската фрекфенцијата, го добиваме ***дијаграмот*** на фрекфенцијата.



2 Во 24 домаќинства испитувана е месечната потрошувачка на масло за јадење, изразена во литри. По испитувањето добиени се следниве податоци:

2	3	5	2	1	6	7	2
1	3	5	4	2	1	3	2
6	4	2	3	2	1	6	4

Изврши распределба на фрекфенцијата и состави статистичка таблица.

- ***Кумулативна (натрупана) фрекфенција*** на обележјето X_1 е f_1; на X_2 е $f_1 + f_2$; на X_3 е $f_1 + f_2 + f_3$; на обележјето X_4 е $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ итн.

Б Карактеристика на една статистичка низа е ***аритметичката средина*** на сите вредности на статистичкото обележје.

- Аритметичка средина на реализиран примерок $x_1, x_2, ..., x_n$, со обем n (бројот на елементите од популацијата) за обележје X е бројот.

$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$, или запишано кратко

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

3 Еден ученик на крајот на учебната година, по предметите ги има следните оценки: 4, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 4, 4, 3, 5, 5, 5. Одреди го средниот успех на ученикот.

Согледај го решението:

- Успехот на ученикот е обележјето X, а оценките по предметите се вредности на обележјето. Според тоа,

$$\bar{x} = \frac{4+3+4+5+3+4+5+4+5+3+5+5+5}{13} = 4{,}15.$$

До решението може да се дојде и по пат на групирање, т.е.

x	3	4	5
f	3	4	6

од каде $\bar{x}=\frac{3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 6}{3+4+6}=4,15$

4 На писмената работа по математика во една паралелка постигнат е следниот успех: оценка 5 добиле 3 ученици, оценка 4 добиле 8 ученици, оценка 3 добиле 6 ученици, оценка 2 добиле 9 ученици и оценка 1 добиле 6 ученици. Одреди ја средната оценка на паралелката постигната на писмената работа.

- Бројот (вредност на примерокот) што ја дели соодветната статистичка низа на два еднакви дела се вика ***медијана*** и ја означуваме со $Me\ (x)$.
- Бројот (вредмост на примерокот) што најчесто се јавува во статистичката низа се вика ***мода*** и ја означуваме со $Mo\ (x)$.

Медијана и мода се позициони средни вредности, а нивната вредност зависи од позицијата што ја заземаат во статистичката низа.

5 Ако оценките на ученикот од претходниот пример ги подредиме во низа која расте: 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, тогаш според дефиницијата за медијана, односно мода имаме $Me\ (x) = 4$, односно $Mo\ (x) = 5$.

- Ако низата има непарен број на членови, тогаш медијаната е еднаква на вредноста на средниот член во низата.
- Ако нзата има парен број на членови тогаш медијаната е аритметичка средина од двата средни членови во низата.
- Обележјето X може да нема мода (3, 4, 6, 8, 10), може да има и повеќе модални вредности (2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8) $Mo\ (x) = 4$ и $Mo\ (x) =7$.

6 Одреди мода и медијана на обележјето чие статистичко множество е: 2, 3, 4, 2, 3, 5, 2, 2, 1, 4, 5, 1, 3, 3, 4, 1, 1, 3, 2,2.

Задачи:

① На крајот на учебната година, наставникот по математика ги запишал на табла оценките на учениците од таа паралелка, на следниот начин:

4	3	5	1	2	3	5	4	2	1
5	2	4	3	1	2	4	3	3	2
1	1	2	4	1	5	1	3	3	3

Одреди ја статистичката низа и состави статистичка табела.

② Распределбата на фрекфенцијата на некое обележје е даденА со табелата:

Обележје x		4	5	8	9	11	15	20
f	3	4	3	8	4	6	2	

Одреди го бројот на единките на статистичкото множество чии вредности се:

а) помали или еднакви на 8;

б) помали од 15.

③ На еден натпревар по математика учествувале 120 ученици. Постигнати се следните резултати:

Интервал на бодови	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	80-100
Број на ученици	2	5	10	21	43	30	9

Претстави ја графички распределбата на фрекфенцијата .

④ Едно статистичко обележје има вредности: 1, 2, 3, 5, 2, 4, 1, 3, 2, 2, 5, 5, 3, 4, 2. Одреди аритметичка средина, медијана и мода на обележјето.

2 МЕРКА ЗА ПРОСТИРАЊЕ НА ПОДАТОЦИТЕ (ОПСЕГ, КВАРТИЛИ, ИНТЕРКВАРТИЛНО ОТСТАПУВАЊЕ)

Потсети се!

- Што е интервал?
- Какви интервали имаме?

А Од претходната лекција видовме колкаво значење има средната вредност. Меѓутоа, средната вредност понекогаш може да даде нејасна слика за опишување на обележјата и нивната споредба. На пример, иако два ученика имаат иста просечна оценка по еден наставен предмет, едниот може да покажува континуирано исто знаење, а другиот да варира со знаењето.

Рековме дека аритметичката средина и другите средни вредности го карактеризираат дадено статистичко множество како мерки на вредностите од некое негово обележје. Но, тие не се доволни карактеристики, бидејќи постојат статистички множества кои можат да имаат исти средни вредности, а различно простирање на вредностите. На пример, обележјата чии вредности се 28, 30, 32, односно 2,30, 58 имаат иста аритметичка средина 30 ($\bar{x}=\frac{90}{3}=30$), но кај првото обележје вредностите малку отстапуваат од аритметичката средина (28 - 30 = -2, 30 - 30 = 0, 32 - 30 = 2), кај второто обележје отстапувањата се поголеми и изнесуваат 2 - 30 = -28, 30 - 30 = 0, 58 - 30 = 28. Затоа, аритметичката средина $\bar{x}=30$ со поголема точност го репрезентира првото отколку второто обележје.

Б Разликата меѓу најголемата и најмалата вредност на обележјето се вика ***опсег*** или ***ранг*** на обележјето: $R=X_{\max}-X_{\min}$

Опсегот се применува кога статистичкото множество има мал број елементи, обично до десет и затоа се применува при контрола на квалитетот на производот.

На пример, во претходните две статистички множества (28, 30, 32) и (2, 30, 58), вредноста на рангот е $R_1=32-28=4$, $R_2=58-2=56$, што покажува дека поголема е концентрацијата на елементите околу аритметичката средина во првото отколку во второто обележје.

1 Одреди ја вредноста на рангот на обележјето чии вредности се
(16, 20, 24) и (4, 20, 36).

2 Во статистичките множества (1, 5, 10, 40, 70, 75, 79) и (1, 38, 39, 40, 41, 42, 79), одреди ја аритметичката средина и рангот.

Упатство. Воочуваш дека нивните аритметички средини $\bar{x}_1=40=\bar{x}_2$ се еднакви, а исто така и рангот $R_1=R_2=79-1=78$ е еднаков, иако групирањето околу средината е поголемо во второто, отколку во првото множество.

Од овој пример се гледа дека рангот има недостаток како мерка за простирање на податоците, бидејќи не се води сметка за секој елемент во статистичкото множество, односно за нивната оддалеченост од средниот член во множеството.

Рангот е само должината на интервалот на вредности на x и не го одразува отстапувањето на вредностите на примерокот од $\bar{x}$.

В Често во разгледувањето на статистичко множество влегуваат некои елементи кои инаку не му припаѓаат. Обично тие елементи имаат екстремна тековна вредност на случајна променлива во тоа множество, па со определување на рангот добиваме погрешна слика за статистичкото множество.

За да се избегне влијанието на овие екстремни вредности (црт. 1) ги отстрануваме десно од долната x_{min} и лево од горната x_{max} граница по 25% на сите фрекфенции и така добиваме ***интерквартилно отстапување*** $(x_{0,25}; x_{0,75})$ кое содржи 50% фрекфенции, каде што $Q_1 = x_{0,25}$ и $Q_3 = x_{0,75}$ се викаат долен и горен ***квартил***.

Полуразликата $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$, се вика ***интерквартилно отстапување***.

Медијаната ги дели сите членови во множеството на два еднакви дела. Ако се пресмета медијаната за секој од тие два дела, се добива долен квартил Q_1 и горен квартил Q_3, така што медијаната можеме да ја означиме $Me=Q_2$. На тој начин квартилите и медијаната го делат статистичкото множество на четири еднакви дела од по 25% од сите елементи на статистичкото множество.

3 Во статистичкото множество од деветнаесет елементи (N=19): 1, 3, 3, 4, (4), 4, 6, 7, 9, (11), 11, 11, 13, 15, (16), 17, 17, 18, 20, одреди ги долниот и горниот квартил.

Согледај го решението:

- Медијаната е $Me = \frac{X_N + 1}{2} = X_{10} = 11$. Статистичкото множество го делиме на две подмножества од по девет елементи чии медијани се бараните квартили:

$$Q_1 = x_5 = 4 \text{ и } Q_3 = x_{15} = 16.$$

Овие податоци можеме да ги претставиме во табела, во која се внесуваат фрекфенциите и кумулативната фрекфенција. Со интерквартилното отстапување е извршена елиминација на екстремните и сомнителните елементи во даденото статистичко множество.

x	f	f_k
1	1	1
3	2	3
4	3	6
6	1	7
7	1	8
9	1	9
11	3	12
13	1	13
15	1	14
16	1	15
17	2	17
18	1	18
20	1	19

4 Во статистичкото множество од петнаесет елементи (N=15) : 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 18, одреди го долниот и горниот квартил.

Задачи:

① Определи ја вредноста на рангот на обележјата чии вредности се: (18, 15, 12) и (16, 15, 14).

② Во статистичките множества (1, 4, 9, 39, 69, 74, 78) и (1, 39, 40, 41, 42, 80), одреди ја аритметичката средина и рангот.

③ Во статистичките множества од 17-члена (N=17): 2, 2, 3, 3, 3, 4, 6, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, одреди го долниот и горниот квартил.

3 МЕРКИ ЗА РАСЕЈУВАЊЕ (ДИСПЕРЗИЈА) НА ПОДАТОЦИТЕ (ВАРИЈАНСА И СТАНДАРДНА ДЕВИЈАЦИЈА)

Потсети се!

- За медијана и мода.
- За аритметичка средина.
- За квартилно отстапување.

A Покрај модата, медијаната, аритметичката средина и другите средни вредности што го определуваат на некој начин центарот на распределбата на обележјето, неопходно е да се има и информација за ***расејувањето*** и отстапувањето на податоците од избраната средина.

Имено, многу често се случува две обележја да имаат приближно иста средна вредност, а да примаат вредности на различни интервали по положба и должина или, пак, кога се определени на исто множество, кај едното да бидат почести вредностите околу средината, а кај другото оние од краевите.

Бројна карактеристика на примерокот, која е мерка за отстапувањето на податоците од нивната аритметичка средина е дисперзија на примерокот.

Варијансата на обележјето X со негрупирани вредности $x_1, x_2, x_3, \dots x_N$ е дефинирана со формулата

$$\delta^2 = \frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(x_N-\overline{x}\right)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$$

каде што $\overline{x}$ е аритметичка средина на обележјето X.

Варијансата на примерок за обележјето X за кое е направена распределба на фрекфенцијата што е дадена со формулата

$$\delta^2 = \frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2 f_1+\left(x_2-\overline{x}\right)^2 f_2+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right) f_n}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-x\right)^2 f_i$$

каде $N=\sum_{i=1}^{n} f_i$, $\overline{x}$ е аритметичка средина на обележјето X со вредности $x_1, x_2, \dots x_k$, ако групирањето е извршено по големина.

Определувањето на дисперзијата во случај кога не се користи калкулатор, обично се извршува со следнава работна табела.

x	f	xf	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$	$(x-\overline{x})^2 f$
x_1	f_1	$x_1 f_1$	$x_1-\overline{x}$	$(x_1-\overline{x})^2$	$(x_1-\overline{x})^2 f_1$
x_2	f_2	$x_2 f_2$	$x_2-\overline{x}$	$(x_2-\overline{x})^2$	$(x_2-\overline{x})^2 f_2$
x_3	f_3	$x_3 f_3$	$x_3-\overline{x}$	$(x_3-\overline{x})^2$	$(x_3-\overline{x})^2 f_3$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
x_n	f_n	$x_n f_n$	$x_n-\overline{x}$	$(x_n-\overline{x})^2$	$(x_n-\overline{x})^2 f_n$
Вкупно:	N	$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$		$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{n}\left(xi-\overline{x}\right)^2 f_i$

Б Дисперзијата на примерокот има широка примена во статистичките испитувања, но бидејќи нејзината вредност е изразена во квадратни единици на мерките со коишто се мерени вредностите на обележјето X, како мерка на дисперзијата се зема позитивниот квадратен корен од варијансата δ^2 и се нарекува стандардно отстапување или ***стандардна девијација*** на примерокот, т.е.

$\delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$, ако вредностите не се групирани, а $\delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 f_i}$, ако вредностите на обележјето се групирани.

1 Приносот на пченица во mc/ha на едно домаќинство во текот на седум години е даден со следните вредности: 39 40 45 50 53 58 65.

Одреди ја варијансата и стандардната девијација на приносот на пченица.

Согледај го решението:

Одредувањето ќе го извршиме според работната табела, во која

								Вкупно
x	39	40	45	50	53	58	65	350
$x - \bar{x}$	-11	-10	-5	0	3	8	15	0
$(x - \bar{x})^2$	121	100	25	0	9	64	225	540

$$\bar{x} = \frac{350}{7} = 50,$$

$$\delta^2 = \frac{544}{7} = 77,714, \text{ и } \delta = 8,816.$$

2 Да се одреди варијансата и стандардната девијација за обележјето чии вредности се:

а) 3, 4, 7, 4, 4, 5; б) 1, 2, 5, 7, 7, 8, 10, 1.

3 За одредување на просечната висина на учениците од едно училиште избран е примерок од 20 ученици. Со мерење на нивната висина добиени се следните податоци:

Висина во m	1,53	1,54	1,57	1,69	1,70	1,71	1,73	
Број на ученици	2	1	5	9	1	1	1	20

Да се определи просечната висина на учениците и стандардното отстапување на висините на учениците од просечната висина.

Согледај го решението:

Просечната висина е аритметичка средина:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\left(1,53\cdot 2 + 1,54\cdot 1 + 1,57\cdot 5 + 1,69\cdot 9 + 1,70\cdot 1 + 1,71\cdot 1 + 1,73\cdot 1\right)$$

По средување на изразот во заградата добиваме $\bar{x} = 1,64m$.

За статистичката дисперзија δ^2, добиваме:

$$\delta^2 = \frac{1}{20}\Big[2\left(1,53-1,64\right)^2 + \left(1,54-1,64\right)^2 + \left(1,57-1,64\right)^2\cdot 5 + \left(1,69-1,64\right)^2\cdot 9 +$$
$$+\left(1,70-1,64\right)^2 + \left(1,71-1,64\right)^2 + \left(1,73-1,64\right)^2\Big] = 0,00489,$$

од каде што, по пресметувањето на квадратниот корен, добиваме: $\delta = 0,07m$.

Забележуваме дека стандардното отстапување е блиско до нула, а тоа значи дека растурањето на висините на учениците од просечната висина е мало. Голем број варијанти на висината на учениците се наоѓаат помеѓу $1,57m$ и $1,71m$, т.е. во интервалот $\left(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta\right)$ со должина 28.

4 Да се определи стандардното отстапување на обележјето X чија распределба на фрекфенциите е дадена со следната табела:

x	1	2	3	4	5	6	
f	4	10	7	6	3	5	35

Задачи:

① Да се определи аритметичката средина $\overline{x}$ и стандардното отстапување δ за обележјето X чијашто распределба на фрекфенциите е дадена со следнава табела.

x	6	7	8	10	11	
f	2	3	6	4	1	23

② Пет монети се фрлаат, истовремено, 1000 пати и при секое фрлање се запишува бројот на грбовите. Добиените резултати се внесени во следнава таблица:

Број на грбови	0	1	2	3	4	5	
Број на фрлања	38	144	342	287	164	25	100

③ Приносот на јачмен во тони во едно стопанство од 1991 до 2000 год. се движел како во табелата:

Година	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Јачмен во тони	53	26	27	30	30	27	27	31	31	30

Да се пресмета:

а) просечниот годишен принос;
б) стандардното отстапување.

4 СТАНДАРДИЗИРАЊЕ (НОРМИРАЊЕ) НА ПОДАТОЦИТЕ

Потсети се!

- За аритметичка средина.
- За дисперзија (варијанса).

Во задачите за одлучување често е потребно да се споредуваат обележја изразени со величини од различен ред. Во таков случај основните бројни карактеристики и распределбите не можат да се споредуваат непосредно.

Освен тоа, за користење на табелите за различни распределби, податоците најчесто треба да се прилагодат.

Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ е примерок за обележјето X со аритметичка средина $\overline{x}$ и дисперзија δ^2.

Трансформацијата $z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\delta}$, $i = 1, 2, ..., n$ се нарекува ***нормирање или стандардизирање на податоците***.

Аритметичката средина $\overline{z}$ и дисперзијата δ_Z^2 на стандардизираните податоци ќе бидат:

$$\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\delta}\right) = \frac{1}{n\delta}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right) = 0,$$

$$\delta_Z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \overline{z}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \frac{1}{n\delta^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right) = 1.$$

Значи, аритметичката средина и дисперзијата на нормирани податоци се $\overline{z} = 0$ и $\delta_Z^2 = 1$.

4 Во некоја фабрика набљудувана е работата на комплекс електромотори и за таа цел регистриран е бројот на резервни делови употребени за време на работата на 59 електромотори.

x_i	n_i	$f_i x_i$
0	3	0
1	17	17
2	10	20
3	18	54
4	12	48
5	7	35
6	2	12
Σ	59	176

Добиените податоци дадени се во табелата.

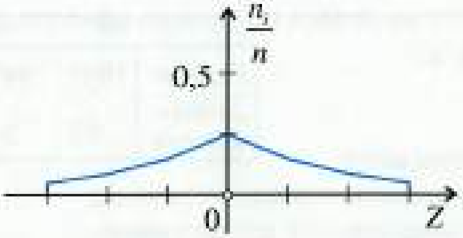
Да се изврши нормирање на податоците.

Согледај го решението:

- Аритметичката средина е $\bar{x} = \frac{170}{59} = 2,98 \approx 3$, додека дисперзијата е $\delta = 1,688$.

Прегледот за нормирање на податоците даден е во табелата.

x_i	$x_i - x$	z_i	n_i / n
0	-3	-1,78	0,051
1	-2	-1,19	0,119
2	-1	-0,59	0,168
3	0	0,00	0,305
4	1	0,59	0,203
5	2	1,19	0,119
6	3	1,78	0,034
Σ	0	0	1,000



Тематска контролна вежба

① Дадена е распределбата на фрекфенцијата во следната табела:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	13	6	9	18	4	11	2	10	7

Формирај табела на кумулативната фрекфенција.

② Нацртај го полигонот на кумулативната фрекфенција според податоците во табелата:

Интервал на бодови	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
Фрекфенција	2	5	10	21	43	30	9
Кумулативна фрекфенција	2	7	17	38	81	111	120

③ Одреди аритметичка средина, медијана и мода на обележјето дадено со вредностите 1, 2, 2, 1, 3, 4, 4, 1, 2, 5, 4, 5, 1, 4.

④ Во статистичкото множество:

а) (1, 3, 5, 6, 7, 9, 11);   б) (2, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 17, 20);

одреди ја аритметичката средина, рангот и долниот и горниот квартил.

⑤ Одреди ја варијансата и стандардната девијација за обележјата:

а) 4, 5, 8, 5, 5, 6;   б) 2, 3, 6, 8, 8, 9, 11, 2.

ТЕМА 1

ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

1 ① $\alpha_1 = 21^0 35'$. ② а) $480'$; б) $120'$; в) $301'$. ③ а) $15^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 15\,rad = \frac{\pi}{12}\,rad = 0{,}26\,rad$;

б) 0,78 rad; в) 3,66 rad; г) 5,23 rad. ④ а) $\alpha = \frac{3}{2}\pi\,rad = \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{180^0}{\pi} = 270^0$; б) 420^0; в) 165^0.

2 ① а) (бидејќи $\frac{3}{4} < 1$); в); г). ② $\sin\alpha = \frac{28}{100} = 0{,}28$; $\cos\alpha = \frac{96}{100} = 0{,}96$; $tg\,\alpha = \frac{28}{96} = 0{,}291(6)$;

$ctg\,\alpha = \frac{96}{28} = 3{,}4285...$ ③ $tg\,50^0 = \frac{H}{5}$ или $H = 5{,}958$. ④ Упатство. Од $\frac{a}{b} = \frac{8}{15}$, следува $a = \frac{8}{15}b$

и $c = \frac{17}{15}b$. $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{15}b : \frac{17}{15}b = \frac{8}{17} = 0{,}470$; $\cos\alpha = \frac{15}{17}$; $tg\,\alpha = \frac{8}{15}$; $ctg\,\alpha = \frac{15}{8}$.

3 ① а) $\alpha = 20^0$; б) $\alpha = 38^0 15'$; в) $\alpha = 54^0 40'$; г) $\alpha = 89^0 37'$; д) $\alpha = 45^0$; ѓ) $\alpha = 35^0$.

② а) Од $\cos 20^0 = \sin 70^0$ и $\sin 20^0 = \cos 70^0$ имаме:

$$\frac{3\sin 70^0 - 2\cos 20^0}{2\sin 20^0 + \cos 70^0} = \frac{3\sin 70^0 - 2\sin 70^0}{2\cos 70^0 + \cos 70^0} = \frac{\sin 70^0}{3\cos 70^0} = \frac{1}{3} tg\,70^0;\ \text{б) } \frac{2}{5}.$$

③ а) $2\sin\alpha$; б) $2\sin\alpha$; в) $2\sin^2\alpha$.

4 ① а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) -2. ③ а) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\,m$, б) 8 m; в) $8\sqrt{3}\,m$.

5 ① Упатство. а) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$, $tg\,\alpha = \frac{5}{12}$, $ctg\,\alpha = \frac{12}{5}$;

б) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $tg\,\alpha = \frac{24}{7}$, $ctg\,\alpha = \frac{7}{24}$. ② а) $ctg\,\alpha = \frac{12}{35}$, $\sin\alpha = \frac{35}{37}$, $\cos\alpha = \frac{12}{37}$; б) $tg\,\alpha = \frac{21}{20}$,

$\sin\alpha = \frac{20}{29}$, $\cos\alpha = \frac{21}{29}$. ③ б) $L = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$

$$= \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 1 + 2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2}{\sin\alpha} = D.$$

6 ① а) $\sin 12 < \sin 25^0 < \sin 75^0$; б) $\sin 20^0 < \sin 23^0 < \cos 35^0 < \cos 15^0$;

в) $tg\,10^0 < tg\,15^0 < ctg\,40^0 < ctg\,20^0$. ② а) негативен; б) позитивен; в) негативен; г) позитивен.

7 ① Упатство: а) $b = a \cdot ctg\,\alpha = 5 \cdot ctg\,40^0 = 5{,}959$; $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin 40^0} = 7{,}776$; $\beta = 50^0$.

б) $b = 25 \cdot tg\,72^0 30' = 79{,}289$; $c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{5}{\cos 72^0 30'} = 16{,}(6)$; $\alpha = 17^0 30'$.

в) $b = 15cm$, $\sin\alpha = \frac{8}{17} = 0{,}470$, $\alpha = 28^0 2'$; $\beta = 61^0 58'$. г) $c = 25cm$, $tg\,\alpha = \frac{7}{24} = 0{,}291$, $\alpha = 16^0 15'$; $\beta = 73^0 45'$.

② Упатство. а) $\frac{a}{2}=b\cos\alpha$ или $a=17,998cm$, $L=47,998cm$, б) $\frac{a}{2}=h_a\cdot tg\frac{\gamma}{2}$ или $a=42,004cm$, $b=58,501$ $L=159,006cm$. ③ Упатство. $a=\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}=34cm$, $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{16}{30}$ или $\alpha=56^0 10^{'}$, $\beta=123^0 50^{'}$. ④ Упатство. $\cos\alpha=\frac{\frac{a-b}{2}}{c}=\frac{5}{13}$ или $\alpha=67^0 22^{'}$, $\beta=112^0 38^{'}$.

⑤ Упатство. $tg\,9^0=\frac{\ell}{150}$ или $\ell=150\cdot tg\,9^0=23,756$.

ТЕМА 2

КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

1 ① а) Сите бројни множества. б) Сите бројни множества без $\mathbb{N}$. в) Сите бројни множества без $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$. г) Само бројното множество $\mathbb{R}$. д) Ниту едно бројно множество. ② а) $(x+5i)(x-5i)$; б) $(x+i\sqrt{13})(x-i\sqrt{13})$; в) $(x+yi)(x-yi)$. ③ а) -*i*; б) -1; в) -*i*; г) 2; д) -*i*.

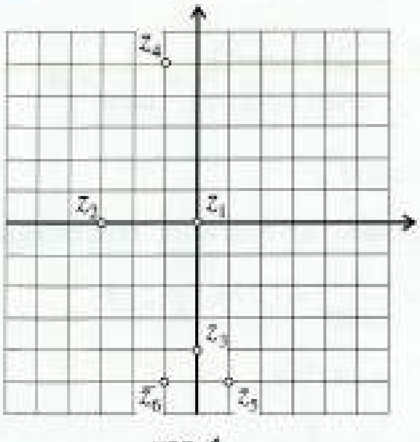
④

2 ① а) $z=-1-3i$, $-z=1+3i$, $\bar{z}=-1+3i$; б) $z=0-3i$, $-z=0+3i$, $\bar{z}=0+3i$; в) $z=-4+0i$, $-z=4+0i=4$, $\bar{z}=-4-0i=-4$. ② $z=3+2i$; $13=9+4=(3+2i)(3-2i)$.

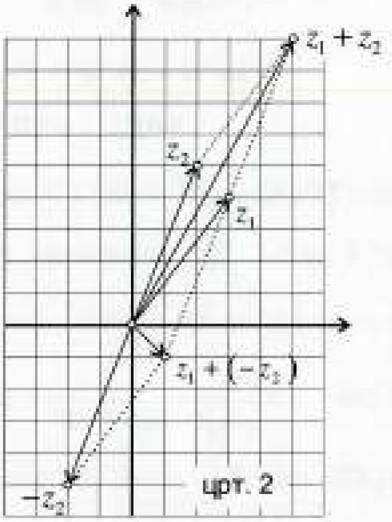
③ $\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\Rightarrow a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$. ④ а) $x=2$ и $y=-3$; б) $x=1$ и $y=1$.

3 ① а) 5*i*; б) $\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{2}{3}i$; в) $\frac{3\sqrt{2}}{20}+\frac{3}{30}i$; г) $2+\sqrt{2}i$. ② а) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{i}=-\bar{Z}$; б) слично како под а); ③ а) 2-10*i*; б) $\frac{1}{2}-5i$. ④ а) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$; б) $-\frac{9}{10}+\frac{7}{10}i$.

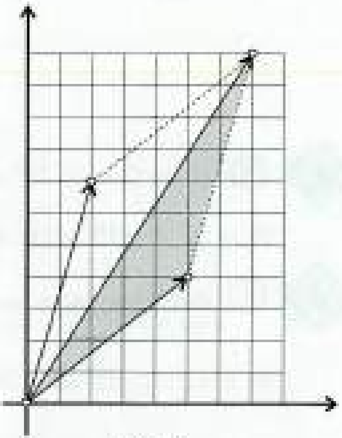
4 ① а) (2,-3); б) (31,-1). ② x=-6; y=7. ③ (црт. 1) ④ (црт. 2)



црт. 1



црт. 2



црт. 3

5 ① а) 1; б) 3; в) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; г) $7\sqrt{7}$. ② а) $a+i$; б) $\sqrt{a}-i\sqrt{b}$. ③ а) $6\pm 8i$; $8\pm 6i$.

④ Од ΔOM_1M_2 следува точноста. (црт. 3)

ТЕМА 3

КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

1 ① а) $12x^2-38x-5=0$; б) $4x^2+13x+11=0$; в) $5x^2-4x-7=0$; г) $(3-k)x^2+(2k+1)x-2+k^2=0$.

② а) $k\neq-\frac{2}{3}$; б) $k=\frac{2}{5}$; в) $k=-2$. ③ а) $x_1=0,\ x_2=0$; б) $x_1=0$ и $x_2=0$ за $a\neq-2$, за $a=-2$, бесконечно многу решенија; в) $x_1=0$ и $x_2=0$, за $a+b\neq c$, за $a+b=c$, бесконечно многу решенија. ④ а) $x_1=10,\ x_2=-10$; б) $x_1=4i,\ x_2=-4i$. ⑤ $M\in(-\infty,2)$;

⑥ а) $x_1=4,\ x_2=-5$; б) $x_1=\frac{2k}{3},\ x_2=-\frac{3k}{4}$, за $k\in\mathbb{R}$. ⑦ а) $x_1=0,\ x_2=\frac{44}{9}$; б) $x_1=0,\ x_2=3$.

2 ① а) $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{2}{3}$; б) $x_1=x_2=\frac{3}{2}$; в) $x_1=2-3i,\ x_2=2+3i$. ② а) $x_1=\sqrt{7},\ x_2=\sqrt{5}$; б) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{a}$, за $a\neq1$, за $a=1$, $x_1=x_2=1$.

3 ① а) $x_1=5,\ x_2=3$; б) $-1\pm2i$; в) $x_1=x_2=\frac{1}{2}$. ② а) $x_1\neq x_2,\ \ x_1,x_2\in\mathbb{R}$; б) $x_1=x_2\in\mathbb{R}$; в) $x_1,x_2\in\mathbb{C}$. ③ $D=0,\ m^2=8m+12=0,\ m_1=6$ или $m_2=2$. ④ За $k=-\frac{1}{8}$, $x_1=x_2\in\mathbb{R}$; $k>-\frac{1}{8}$, $x_1\neq x_2,\ \ x_1,x_2\in\mathbb{R}$; $k<-\frac{1}{8}$, $x_1=\overline{x_2}\in\mathbb{C}$.

4 ① а) $x^2-2x+\frac{5}{3}=0$; $p=-2,\ q=\frac{5}{3}$; б) $x^2-\frac{m+2}{m}x-5=0$; $p=-\frac{m+2}{m},\ q=-5$.

② Од $(x_1+x_2)^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)$ следува $x_1^3+x_2^3=$ $=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)^3=(-p)^3-3q(-p)=3pq-p^3$. ③ $x_1+x_2=-\frac{B}{A}=2,\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}=q$;

$p=-2,\ q=\frac{1}{2}$. а) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{\left(x_1^2\cdot x_1^2\right)}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1\cdot x_2)^2}=\frac{2^2-2\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=12$; б) $x_1^2x_2+x_2x_1^2=$

$=x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{1}{2}\cdot2=1$; в) $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1\cdot x^2}=\frac{3pq-p^3}{q}=\frac{3(-2)\cdot\frac{1}{2}-(-2)^3}{\frac{1}{2}}=10$.

5 ① $x^2-8x+65=0$. ② а) $\frac{6}{25}$; б) $-\frac{162}{25}$. ③ а) $m=3$; б) $m=-12$. ④ а) $m=2$; б) $m=\pm3$.

6 ① $\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$. ② Решенија се: $2a$ или $-5a$, за $a\neq0$; и $x_1=x_2=0$, за $a=0$.

③ 12 часа.

7 ① а) $x_{1/2/3/4}=0$; б) $x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$, $x_{3/4}\pm i\sqrt{3}$; в) $x_{1/2}=0$, $x_{3/4}=\pm 2i$. ② а) $\left\{-\frac{5}{2},\frac{5}{2},-i,i\right\}$; б) $\left\{-6,-2\sqrt{3},2\sqrt{3},6\right\}$; Упатство: користи $(y-y_1)(y-y_2)=0$ и $x^2=y$. ③ Одговорот е $x^4-2x^2-63=0$. ④ 5,12. Упатство: означи ги страните на правоаголникот со x, $\frac{60}{x}$ и примени Питагорова теорема.

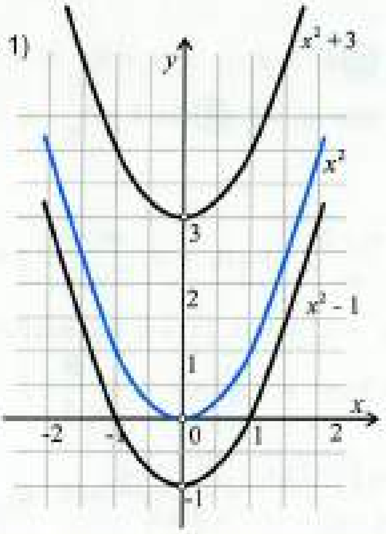
8 ① а) Равенката нема решение бидејќи $D\neq 0$; б) Равнката е невозможна, бидејќи левата страна е позитивен број. ② а) 3; б) 9 или $\frac{51}{4}$. ③ а) ± 5; б) воведи смена $\sqrt{x^2-3x+5}=y$; $x_1=-1$ или $x_2=4$. в) замени $\sqrt[3]{x}=y$, $x\in\{1,27\}$.

9 ① а) $\{(0,1)(-2,0)\}$; б) $\left\{(4,5)\left(-\frac{5}{9},\frac{4}{9}\right)\right\}$. ② $\{(3a,2a),(2a,3a)\}$. ③ $\frac{2}{5}$ или $\frac{5}{2}$.

ТЕМА 4 КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА И КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА

1 ① а, б, г. ② а) $V_x=\{8,3,0,-1\}$; б) $V_x=[-1,8]$. ③ $c=6$, $b=5$, $a=1$, $f_{(x)}=x^2+5x+6$.

2 ① а) (црт. 1)



црт. 1

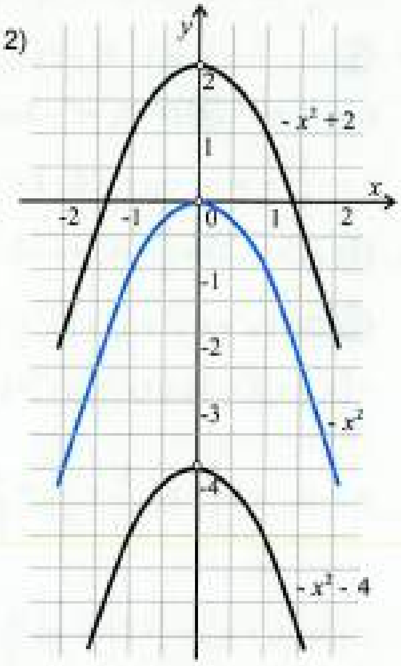
а) $T(0,0)$, б) $T(0,-1)$, в) $T(0,3)$;

$V_f=[0,\infty)$, $V_f=[-1\infty)$, $V_f=[3\infty)$.

за $x\in(-\infty,0)$ - опаѓа;

за $x\in(0,\infty)$ - расте (црт. 1)

б) (црт. 2)



црт. 2

а) $T(0,0)$, б) $T(0,2)$, в) $T(0,-4)$;

$V_f=(-\infty,0]$, $V_f=(-\infty,2]$, $V_f=(-\infty,4]$;

за $x\in(-\infty,0)$ - расте;

за $x\in(0,\infty)$ - опаѓа (црт. 2)

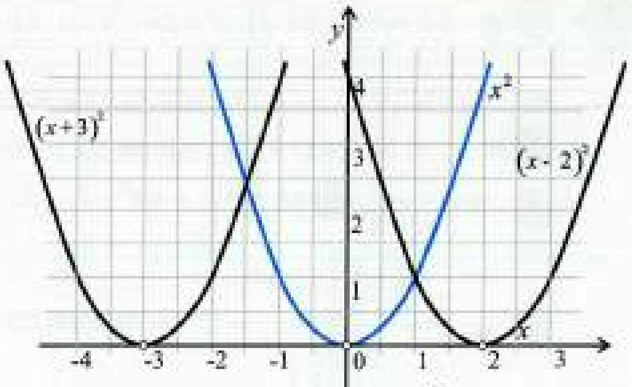
3 ① а) $T(0,0)$, $T(2,0)$, $T(-3,0)$;

$V_f = [0,\infty)$; $x \in (-\infty,0)$ - опаѓа;

$x \in (-\infty,2)$ - опаѓа; $x \in (-\infty,-3)$ - расте;

$x \in (0,\infty)$ - расте; $x \in (2,\infty)$ - расте;

$x \in (-3,\infty)$ - расте. (црт. 3)



црт. 3

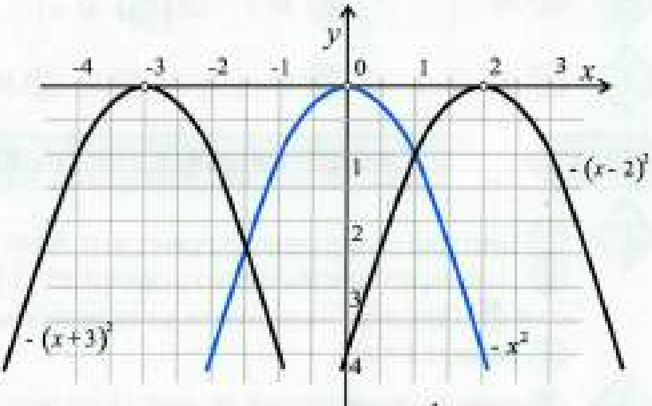
б) $T(-3,0)$, $T(0,0)$, $T(3,0)$;

$V_f = (-\infty,0]$; $x \in (-\infty,-3)$ - расте;

$x \in (-\infty,0)$ - расте; $x \in (-\infty,2)$ - расте

$x \in (-3,\infty)$ - опаѓа; $x \in (0,\infty)$ - опаѓа

$x \in (2,\infty)$ - опаѓа. (црт. 4)



црт. 4

4 ① $y = -3(x-1)^2 + 5$. ② 1) $T(2,-4)$, $y_1 = x_1^2$;

x_1	0	-1	1	-2	2
y_1	0	1	1	4	4

2) $T(2,-4)$, за $y=0$, $x_1 = 0$ или $x_2 = 4$; за $x=0$, $y=0$. 3) $y=(x-2)^2-4$. Транслација на $y = x^2$, десно за две и надолу за четири единици.

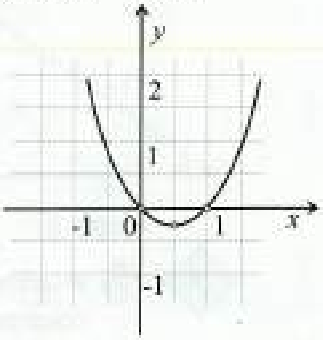
5 ① Права $x=2$; $V_f = [-3,\infty)$. ② $x \in (-\infty,1)$, $f(x)$ - расте; $x \in (1,\infty)$, $f(x)$ - опаѓа.

③ $x \in (-\infty,2) \cup (3,\infty)$, $f(x)>0$; $x \in (2,3)$, $f(x)<0$.

6 ① а) 1) $D_f = \mathbb{R}$. 2) $T\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$. 3) $(0,0),(1,0)$. 4) За $x=\frac{1}{2}$, $y_{\min} = -\frac{1}{4}$.

5) $x = \frac{1}{2}$. 6) $V_f = \left[-\frac{1}{4},\infty\right)$. 7) $x \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ - опаѓа; $x \in \left(\frac{1}{2},\infty\right)$ - расте.

8) $x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$, $f(x)>0$; $x \in (0,1)$, $f(x)<0$. (црт. 5)



црт. 5

б) 1) $D_f = R$. 2) $T(0,4)$. 3) нема нули. 4) $y_{min} = 4$ за $x=0$.

5) $x=0$. 6) $V_f = [4,\infty)$. 7) $x \in (-\infty,0)$ - опаѓа, $x \in (0,\infty)$ расте. 8) $y>0$ за $x \in R$.

7 ① а) $x \in (-\infty,-6) \cup (4,\infty)$, $x^2+2x-24>0$; $x \in (-6,4)$, $x^2+2x-24<0$. б) $x \in (-4,1)$, $-x^2-3x+4<0$; $x \in (-\infty,-4) \cup (1,\infty)$, $-x^2-3x+4<0$. б) $x \in (-4,1) - x^2-3x+4>0$. ② а) $x \in \left(-2,\frac{1}{2}\right)$; б) $x \in \mathbb{R}$; в) $x \in \varnothing$.
③ а) $y>0$ за $x \in (-4,0)$; $y<0$ за $x \in (-\infty,-4) \cup (0,\infty)$; б) $y>0$ за $x \in \varnothing$, $y<0$ за $x \in \mathbb{R}$.
④ $x \in \left(\frac{1}{4},\infty\right)$; ⑤ за $k=2$, $y=x^2-2x-3$. $y>0$ за $x \in (-\infty,-1) \cup (3,\infty)$; $y<0$ за $x \in (-1,3)$.

⑥ $y_{\max} = \dfrac{4\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1-4^2}{4\left(-\frac{1}{3}\right)} = 13$, па најмала вредност на дропката е $\dfrac{2}{y_{\max}} = \dfrac{2}{13}$.

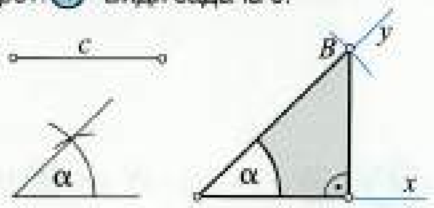
8 ① $M = \left(-\frac{1}{2},3\right)$. ② $M = [-5,5]$. ③ $M = \left[\frac{3}{2},2\right]$.

9 ① $M = (-2,-1)$. ② $M = [-4,-3] \cup [4,5]$. ③ $M = \left(1,\frac{8}{3}\right)$. ④ $k \in (-12,6)$.

ТЕМА 5 КОНСТРУКЦИЈА НА ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

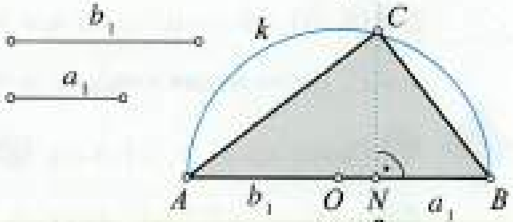
1 ① Центарот на опишаната кружница на ΔABC е во пресекот на симетралите на неговите страни. ② Центарот на впишаната кружница во ΔABC е во пресекот на симетралите на неговите агли. ③ Пресекот на висините во триаголникот е ортоцентарот. ④ Види задача 8.
⑤ Види задача 7.

2 ① Види го решението на задачата 6 од претходната лекција. ② Кружницата $k(A,C) \cap A_y = \{B\}$. Во B конструираме $B_n \perp A_x$, $B_n \cap A_x = \{C\}$. (црт. 1)

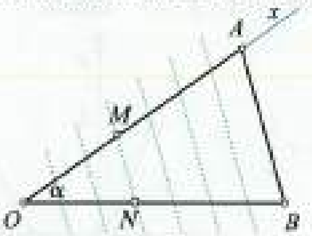


црт. 1

③ Упатство. Над отсечката $AB = a_1 + b_1$ (црт. 2) опишуваме полукружница k. Нормалата повлечена во точката $N\left(\overline{AN} = b_1, \overline{BN} = a_1\right)$ ја сече полукружницата k во бараната точка C.



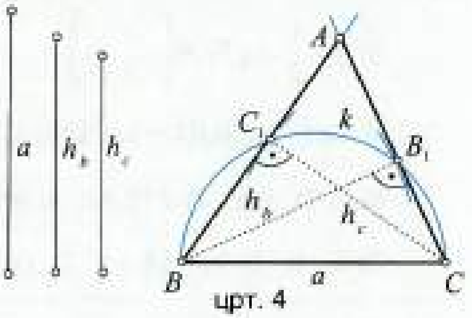
црт. 2



црт. 3

④ На кракот O_X на произволен агол α нанесуваме $7=3+4$ еднакви делови, а понатаму конструкцијата е очигледна, т.е. $\overline{ON} : \overline{MB} = 3:4$.

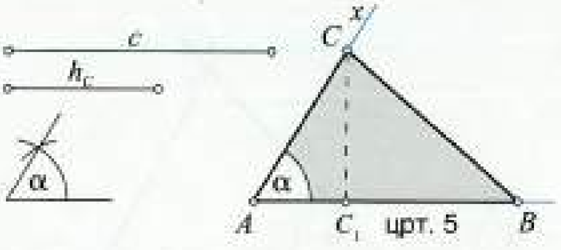
3 ① Упатство. Над $\overline{BC} = a$ како дијаметар конструираме полукружница k. (црт. 4)
Во пресекот на кружниците $k_1(B,h_b)$ и $k_2(C,h_c)$ со k ги добиваме точките B_1 и C_1 соодветно. Зошто $\measuredangle B_1 = \measuredangle C_1 = 90^0$? Како ќе го определиш темето A?



црт. 4

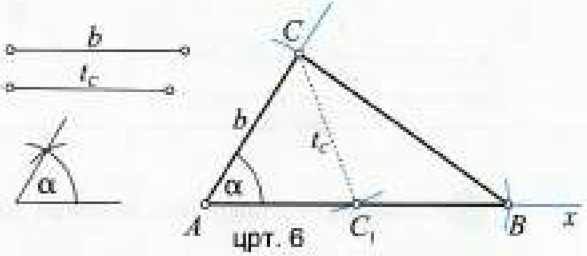
② Упатство. Центарот на бараната кружница е во пресекот на симетралата на аголот α и симетралата на отсечката MN. (Направи цртеж) ③ Упатство. Конструирај кружница k од каде отсечката AC се гледа под агол β. Пресекот на правата паралелна со AC што е на растојание h_b, ја сече кружницата k во бараната точка A, односно A_1. Ако правата не ја сече кружницата, тогаш задачата нема решение.

4 ① Упатство. Конструирај правоаголен триаголник AC_1C со $\overline{CC_1}=h_c$ и $\measuredangle ACC_1=90^0-\alpha$ (црт. 5).



црт. 5

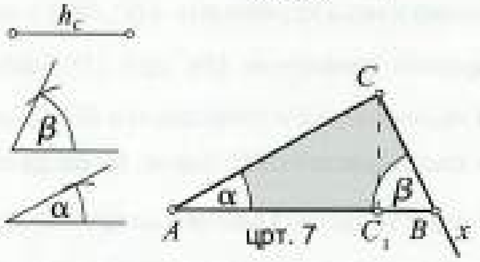
② Упатство. Со дадените елементи α, $\overline{AC}=b$ и $\overline{CC_1}=t_c$ конструирај го триаголникот AC_1C (црт. 6). Колку решенија има задачата зависи од тоа во колку точки кружницата $k(C,t_c)$ го сече кракот Ax на аголот α.



црт. 6

③ Упатство. Конструирај правоаголен триаголник AC_1C со елементи $\overline{CC_1}=h_c$ и $\measuredangle C_1AC=90^0-\alpha$, а потоа конструирај $\measuredangle C_1Cx=90^0-\beta$, таков што нема заедничка внатрешна област со аголот C_1CA.

$AC_1\cap Cx=\{B\}$ (црт. 7).

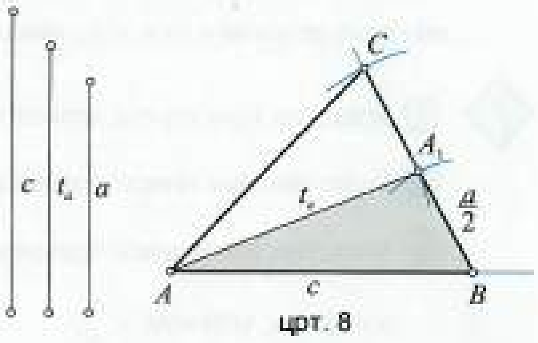


црт. 7

5 ① Упатство. Аголот на основата е $\alpha=\frac{1}{2}\left(180^0-\gamma\right)$. ② Упатство. Конструирај ΔABB_1 со елементи α, c и t_b. Задачата има едно, две или нема решение, во зависност од тоа колку пресечни точки има кружницата $k(B,t_b)$ со кракот Ax на аголот α.

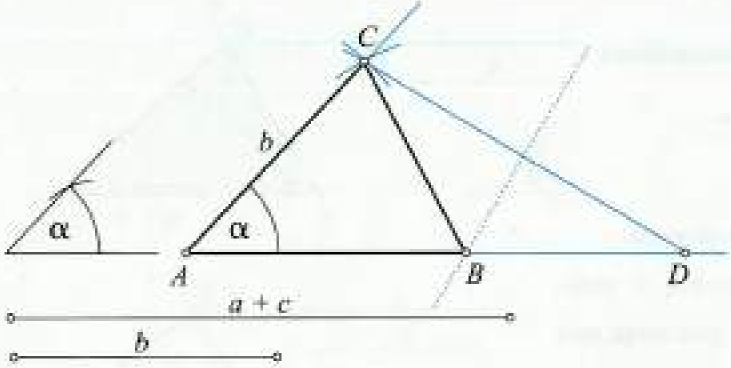
6 ① Упатство. Конструирај правоаголен триаголник со елементи $\overline{CC_1}=h_c$, $\measuredangle C_1CB=90^0-\beta$.

② Упатство. Го конструираме помошниот триаголник ABA_1 со страни $\overline{AB}=c$, $\overline{BA_1}=\frac{a}{2}$ и $\overline{AA_1}=t_a$. (црт. 8) Понатамошната конструкција е очигледна. ③ Упатство. Го конструираме помошниот триаголник ADC со страни $\overline{AD}=c+a$, $\overline{AC}=b$ и аголот меѓу нив α (црт. 9). Симетралата на DC ја сече страната AD во бараната точка B.

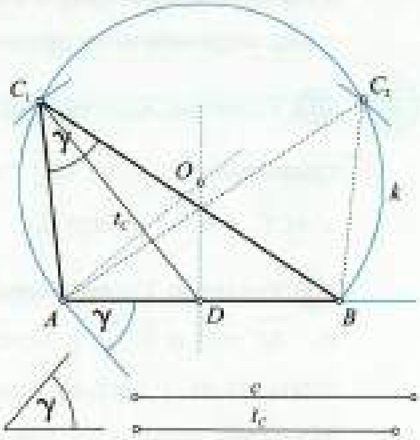


црт. 8

④ Упатство. Ја конструираме кружницата k, што е г.м.т. од кое отсечката AB се гледа под агол γ. $k_1(D,t_c)\cap k=\{C_1,C_2\}$. Задачата може да има едно, две или да нема решение (црт. 10).

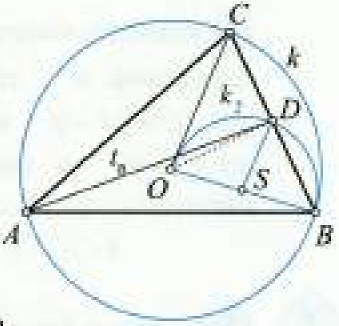


црт. 9



црт. 10

⑤ Согледај го решението. *Анализа*. Да претпоставиме дека задачата е решена и нека кружницата $k(O,OB)$ е опишана кружница околу бараниот триаголник ABC (црт. 11). Бараното реме C е во пресекот на кружницата k и полуправата BD. Отсечката SD е средна линија на триаголникот OBC. Значи, треба да се определи точката D. Бидејќи точката D припаѓа на кружницата $k_1(A,t_a)$ и на кружницата со дијаметар OB, тоа се наоѓа во пресекот на тие две геометриски места од точки. *Конструкција*. Конструираме кружница $k\left(O,\overline{OB}=R\right)$ и тетива $\overline{AB}=c$. Потоа имаме: $k_1(A,t_a)\cap k_2\left(S,\frac{R}{2}\right)=\{D\}$, а потоа $BD\cap k=\{C\}$, црт. 11. *Доказ*: Бидејќи $D\in \mathrm{k}_1$, $D\in k_2$ и $\overline{CO}=\overline{OB}$, следува дека $\overline{DC}=\overline{DB}$, а $\overline{AD}=t_a$. Дискусија: За $R<C<2R$ и $t_a>R$, задачата има две решенија. Ако $t_a=R$, задачата има едно решение и за $t_a<R$, нема решение.



црт. 11

7

① Упатство. Конструирај правоаголен триаголник AD_1D со страна $\overline{AD}=a$ и висина $\overline{DD_1}=h$.

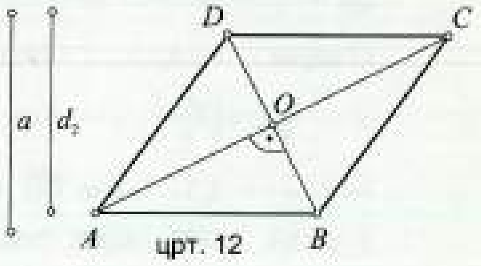
② Упатство. Конструирај правоаголен триаголник AD_1D со страна $\overline{AD}=b$ и висина $\overline{DD_1}=h$.

③ Упатство. Конструирај правоаголен триаголник ABD со страна $\overline{BD}=d_1$ и

$$\measuredangle ABD=\measuredangle ADB=90^0-\frac{\alpha}{2}.$$

8 ① Упатство. Конструирај рамнокрак триаголник ABC со страни $\overline{AC}=d_2$ и $\overline{AB}=\overline{BC}=a$ (црт. 12)

② Констрруирај правоаголен триаголник AD_1D со страни $\overline{AD_1}=\dfrac{a-b}{2}$ и $\overline{DD_1}=h$.

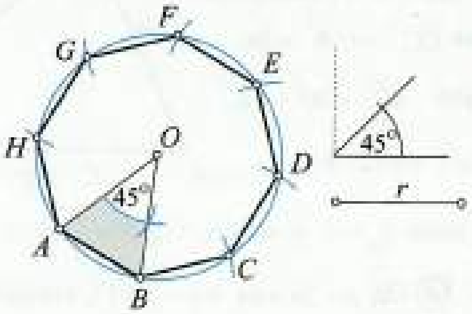


црт. 12

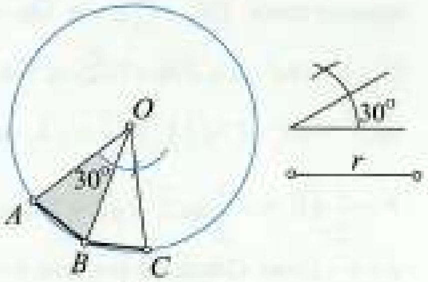
9 ① Упатство. Конструирај правоаголен триаголник AC_1O со елементи $\overline{C_1O}=r$ и $\measuredangle C_1OA=60^0$.

② Упатство. Конструирај рамнокрак триаголник ABO со крак $\overline{AO}=\overline{BO}=r$ и $\measuredangle AOB=45^0$ (црт. 13).

③ Упатство. Конструирај кружница со радиус r, а потоа конструирај карактеристичен триаголник со агол при врвот еднаков $360^0:12=30^0=\alpha$ (црт. 14).



црт. 13



црт. 14

④ Види го решението на задачата 5 во лекцијата.

ТЕМА 6

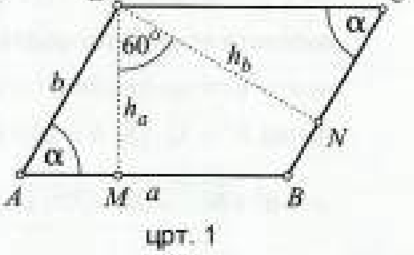
ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКИ ФИГУРИ

1 ① а) Од $a:b=4:9$ следува $a=4k,\ b=9k$, па $144=4k\cdot 9k=36k^2$, $k=2\cdot a=8m,\ b=18m$.

б) $2(a+b)=74;\ a+b=3,7m$ и $a\cdot b=3$ имаме $\begin{cases}a+b=3,7\\ a\cdot b=3\end{cases}$; Страните на правоаголникот се 2,5 m и 1,2 m.

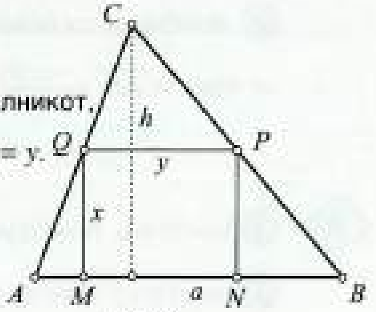
② $AB\perp DM$ и $AD\perp DN$, значи $\measuredangle DAB=60^0$ како агли со нормални краци. $\sin 60^0=\dfrac{h_a}{b};\ b=\dfrac{h_a}{\sin 60^0}=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{6}{\sqrt{3}};$

$P=b\cdot h_b=\dfrac{6}{\sqrt{3}}2\sqrt{3}=12cm^2$. (црт. 1)



црт. 1

③ Слично на претходната задача одреди ги висините h_a и h_b. Од условот $P = ah_a = b \cdot h_b$, следува $a : b = h_b : h_a$. $a = 24cm$ и $b = 16cm$. ④ Од $P = \frac{d_1 d_2}{2}$ следува $d_2 = 3dm$, а $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$, $a = 2{,}5dm$, $L = 4 \cdot 2{,}5 = 10dm$, а $h = 6 : a = 6 : 2{,}5 = 2{,}4dm$. ⑤ Нека x и y се страните на правоаголникот, $x \cdot y = 63$. $\Delta ABC \sim \Delta QPC$ (зошто). $\overline{AB} : h = \overline{QP} : (h - x)$; $3(10 - x) = y$.

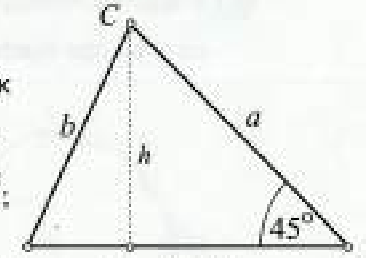


црт. 2

Решение на системот $\begin{cases} y = 3(10 - x) \\ x \cdot y = 63 \end{cases}$ е парот $(7,9)$ и $(3,21)$.

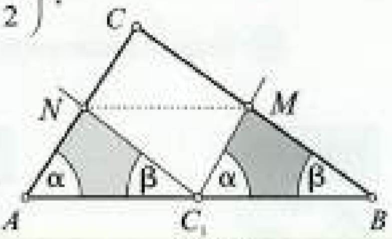
Значи, можат да се впишат два правоаголници чии страни се: 7 cm и 9 cm; 3 cm и 21 cm. (црт. 2)

2 ① Триаголникот со две дадени страни има најголема плоштина ако страните се катети на правоаголниот триаголник. а) да; б) не; в) да. ② Нека $b = 10cm$, $a = 14cm$, а C_1 подножна точка на висината h_c. ΔCC_1B е рамнокрак правоаголен, $\overline{CC_1} = \overline{C_1B} = h$. Од ΔCC_1B следува $\overline{CC_1}^2 + \overline{C_1B}^2 = \overline{BC}^2$; $h^2 + h^2 = 14^2$; $h = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}cm$. Од ΔAC_1C следува: $\overline{AC_1}^2 = 10^2 - \overline{CC_1}^2$; $\overline{AC_1}^2 = 10^2 - \left(7\sqrt{2}\right)$; $\overline{AC_1} = \sqrt{2}$, па $\overline{AB} = \sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, а



црт. 3

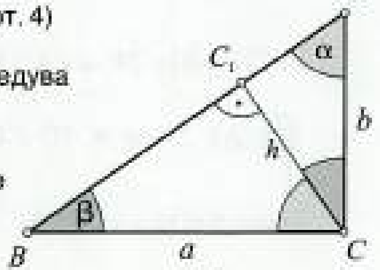
$P = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h = \frac{1}{2} 8\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 56cm^2$. (црт. 3) ③ Нека $h_a = 4$, $h_b = 6cm$. Од $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$ и $a + b = 15cm$. Следува $a = 9cm$, $b = 6cm$, $P = 18cm^2$. ④ Од $a + 2b = 64$ и $b - a = 11$, следува $a = 14cm$. и $b = 25cm$. Висината кон основата $h_a^{\,2} = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $h_a^{\,2} = 25^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2$; $h_a = 24cm$, $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}14 \cdot 24 = 168cm^2$. ⑤ Од конструкцијата следува дека точките M и N се средини на страните AC и BC, па MN е средна линија на ΔABC. Триаголниците AC_1N, C_1BM, NC_1M и NMC се складни, имаат еднакви страни и еднакви агли.



црт. 4

Триаголниците имаат еднакви плоштини, па $P_{NC_1MC} = \frac{1}{2}P_{\Delta ABC}$. (црт. 4)

⑥ Ако $CC_1 \perp AB$, тогаш $\alpha = \measuredangle BCC_1$ и $\beta = \measuredangle C_1CA$. Оттука следува $\Delta BCC_1 \sim \Delta C_1CA$; па $\overline{BC_1} : \overline{CC_1} = \overline{CC_1} : \overline{C_1A}$, $\overline{CC_1}^2 = \overline{BC_1} \cdot \overline{C_1A}$, т.е. висината кон хипотенузата е геометриска средина на отсечките на кои е поделена хипотенузата. Ако $\overline{BC_1} = 32cm$, $\overline{C_1A} = 18cm$, тогаш $h^2 = 32 \cdot 18$, $h = 24cm$. Од ΔBCC_1 следува



црт. 5

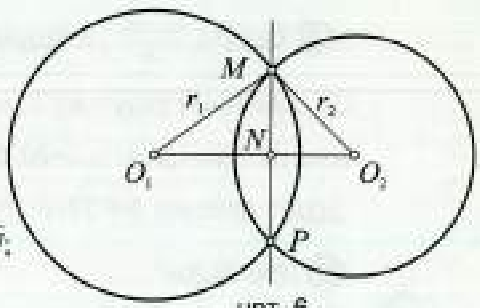
$a^2 = h^2 + \overline{BC_1}^2 = 24^2 + 32^2$; $a = 40cm$, а $b^2 = h^2 + \overline{C_1A}^2 = 24^2 + 18^2$; $b = 30cm$. $P = \frac{30 \cdot 40}{2} = 6dm^2$. (црт. 5)

3 ① Нека $r_1 = 39cm$, $r_2 = 17cm$, а $\overline{O_1O_2} = 44cm$. Според Хероновата формула $s = \dfrac{39+17+44}{2} = 50cm$, па

$P_{\Delta O_1O_2M} = \sqrt{50(50-39)(50-17)(50-44)}$; $P_{\Delta O_1O_2M} = \sqrt{50 \cdot 11 \cdot 33 \cdot 6} =$

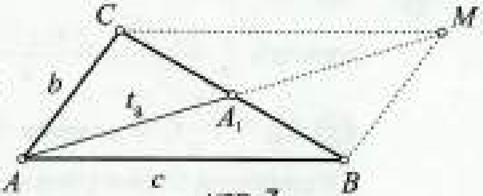
$= \sqrt{5^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = 330cm^2$. $P = 330 = \dfrac{1}{2}\overline{O_1O_2} \cdot \overline{MN}$; $330 = \dfrac{1}{2} \cdot 44 \cdot \overline{MN}$;

$\overline{MN} = 15cm$, а $\overline{MP} = 2 \cdot 15 = 30cm$. (црт. 6)



црт. 6

② Нека страната $b = 27cm$, $c = 29cm$, а $t_a = 26cm$. Со продолжување на тежишната линија $t_a = \overline{AA_1}$ за t_a се добива паралелограм $ABCM$ со страни $\overline{AB} = c$, $\overline{BM} = b$ и $\overline{AM} = 2t_a$. Според Хероновата формула $P_{\Delta ABC} = 270cm^2$. (црт. 7)



црт. 7

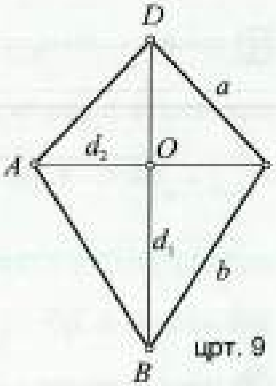
③ Од условот $a:b:c = 9:10:17$ следува $a:9 = b:10 = c:17 = k$; $a = 9k$, $b = 10k$, $c = 17k$. Со примена на Хероновата формула имаме $36k^2 = 144$; $k^2 = 144:36 = 4$; $k = 2$, а страните се $a = 18$, $b = 20$ и $c = 34cm$. ④ Нека е $c = 20cm$, а $a = 12cm$, $b^2 = c^2 - a^2$; $b^2 = 20^2 - 12^2$; $b = 16$, а $L = 20 + 12 + 16 = 48$. Од $L : L_1 = a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$ следува $48:60 = 12:a_1$; $a_1 = 15cm$. $48:60 = 16:b_1$, $b_1 = 20cm$, а $P_1 = \dfrac{a_1 \cdot b_1}{2} = \dfrac{20 \cdot 15}{2} = 150cm^2$. ⑤ Од $\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{35^2}{14^2}$; $\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{25}{4}$ и $P - P_1 = 105$ следува $P_1 = 20cm^2$, а $P = 125cm^2$.

4 ① Од условот $a:b:c = 10:4:5$ следува $\dfrac{a}{10} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{5} = k$; $a = 10k$, $b = 4k$ и $c = 5k$, а $h^2 = c^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$;

$h^2 = 25k^2 - 9k^2 = 16k^2$; $h = 4k$. Од $P = \dfrac{(a+b)h}{2}$ следува $112 = \dfrac{(10k+4k) \cdot 4k}{2}$; $112 = 28k^2$; $k = 2$. $a = 20cm$, $b = 8cm$ и $c = 10cm$, $L = 20 + 8 + 2 \cdot 10 = 48cm$. ② Од точката D повлечи $DM \parallel CD$. Пресметај ја плоштината на ΔAMD чии страни се $a - b = 14cm$, $13cm$ и $15cm$ со Хероновата формула. $P_{\Delta AMD} = 84cm$. Од $P_{\Delta AMD} = \dfrac{1}{2}(a-b) \cdot h$ следува $84 = \dfrac{1}{2} \cdot 14 \cdot h$, $h = 12cm$, а $P = \dfrac{(a+b)h}{2} = \dfrac{34 \cdot 12}{2} = 204cm^2$.

③ Конструирај $CM \parallel DB$. Докажи $\overline{DC} = \overline{BM} = b$, па $P_{ABCD} = P_{AMC} = \dfrac{(a+b) \cdot h}{2}$. Плоштината на ΔAMC, ќе ја одредиш со Хероновата формула. $P = 84cm^2$. (црт. 8)

црт. 8



црт. 9

④ Од $P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$, следува $480=\frac{24\cdot d_2}{2}$, $d_2=40cm$.

Од добиениот резултат $d_2=40cm$ следува дека $d_1=24cm$ не е оска на симетрија. Зошто? Од ΔDOC следува $\overline{DO}=5cm$, а од ΔOBC следува $b=37cm$, па $L=2a+2b=1m$. (црт. 9)

⑤ $P=28,5m^2$.

5 ① Плоштината на собата е $24,31m^2$, а плоштината на една плочка е $\frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3\cdot 0,12^2\sqrt{3}}{4}=0,018684m^2$. Бројот на плочките е: $24,31:0,018684=1301$.

② Од $P=\frac{1}{2}L\cdot h$ следува $240=\frac{1}{2}\cdot 60h$ следува $h=8cm$, т.е. $r=h=8cm$. ③ Петаголникот е поделен на 6 триаголници чии пет централни агли се дадените, а шестиот е, исто така, 60^0. Со користење на формулата $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, па имаме:

$$P=\frac{1}{2}r^2\sin 30^0+\frac{1}{2}r^2\sin 60^0+\frac{1}{2}r^2\sin 90^0+\frac{1}{2}r^2\sin 120^2+\frac{1}{2}r^2\sin 60^0;\ P=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

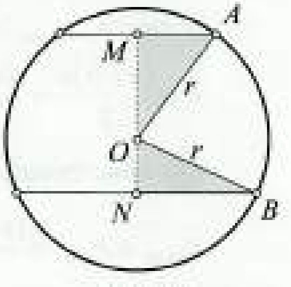
$$=\frac{1}{2}r^2\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right);\ P=\frac{6^2\left(3+3\sqrt{3}\right)}{4}=9\left(3+3\sqrt{3}\right)=27\left(1+\sqrt{3}\right)cm^2.$$ ④ Ако a е страна на триаголникот, b на шестаголникот, тогаш $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3b^2\sqrt{3}}{2}$, т.е. $a=b\sqrt{6}$. $\frac{L}{L_1}=\frac{3a}{6b}=\frac{3b\sqrt{6}}{6b}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

⑤ Правоаголните шестоаголници се слични, па $h_1:h_2=a_1:a_2$, т.е. $a_1:a_2=2:3$, $a_1=\frac{2a_2}{3}$. Од $P_2-P_1=160\sqrt{3}$ следува $\frac{3a_2{}^2\sqrt{3}}{2}-\frac{3a_1{}^2\sqrt{3}}{2}=160\sqrt{3}$, т.е. $3a_2{}^2-3a_1{}^2=320$; $3a_2{}^2-3\left(\frac{2a_2}{3}\right)^2=320$; $3a_2{}^2-3\frac{4a_2{}^2}{9}=320$; $5a_2{}^2=3\cdot 320$; $a_2{}^2=192$, па $P_2=\frac{3\cdot 192\sqrt{3}}{2}=288\sqrt{3}\,cm^2$, а $P_1=128\sqrt{3}\,cm^2$.

6 ① Од $\pi r^2=2\pi r$ следува $r=2cm$. ② Нека $r_1=4r$ следува а) $L_1=2\pi r_1$; $L_1=2\pi\cdot 4r=$ $=4(2\pi r)=4L$ - ќе се зголеми 4 пати; б) $P_1=\pi r_1^2=\pi\cdot(4r)^2=16\pi r^2=16P$ - ќе се зголеми 16 пати.

③ Точката ќе измине пат $L=2\pi r\cdot 80$, $L=2\pi\cdot 0,7\cdot 80=351,6m$ во минута, а брзината е $5,86\ m/sek$.

④ $P=\pi r^2=3,14\cdot 10,5^2{}^2=346,2m^2$.



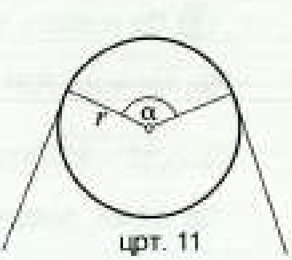
црт. 10

⑤ Нека $\overline{ON}=x$, $\overline{OM}=39-x$, $\overline{MA}=7\,dm$, $\overline{NB}=20\,dm$. Од ΔOMA следува $r^2=7^2+(39-x)^2$. Од ΔONB следува $r^2=20^2+x^2$ па $400+x^2=49+1521-78x+x^2$; $78x=1170$; $x=15dm$, а $r^2=20^2+15^2$; $r=25dm$, па $P=625\pi\ dm^2$. (црт. 10) Ако ги нацрташ двете тетиви од иста страна на центарот тогаш ќе добиеш $x=-15$.

Бидејќи должината на отсечката не може да биде негативна, значи дека двете тетиви мора да се од различна страна на центарот.

7 ① $L=2\pi r$ следува $540=2\pi r$; $r=\frac{270}{\pi}$, $\ell=\frac{\pi r\alpha}{180}$; $200=\frac{\pi\cdot\frac{270}{\pi}\cdot\alpha}{180}$;

$200=\frac{270\alpha}{180}$; $200=\frac{3\alpha}{2}$; $\alpha=400^0:3$; $\alpha=133^0 20'$. (црт. 11)



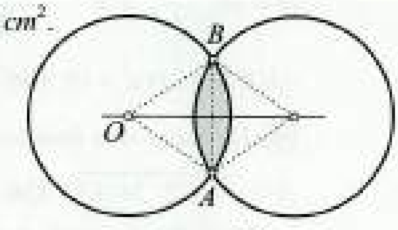
црт. 11

② $r=1200m$, $\ell=450m$, $\alpha=?$; $450=\frac{\pi\cdot r\alpha}{180}$; $450=\frac{\pi\cdot 1200\cdot\alpha}{180}=\frac{\pi\cdot 20\alpha}{3}$;

$\alpha=\frac{3\cdot 450}{\pi\cdot 20}=21{,}5^0=21^0 30'$. ③ $3\pi=\frac{\pi r^2 30^0}{360^0}$; $r=6$, а $P=\pi r^2=36\pi\,cm^2$.

④ Триаголникот AOB е рамнокрак. Бараната плоштина

$P=2(P_{ки}-P_{\Delta})$; $P=2\left(\frac{\pi\cdot 4^2\cdot 60}{360}-\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right)=2{,}9cm^2$. (црт. 12)



црт. 12

⑤ $P=a^2$.

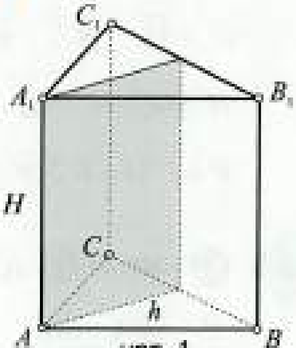
ТЕМА 7

ЕЛЕМЕНТИ ОД СТЕРЕОМЕТРИЈА

1 ① Секој паралелен пресек на призмата е складен со основата.

$P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$; $P=120cm^2$.

$a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2$; $a=13cm$, $L=4a=52cm$.



црт. 1

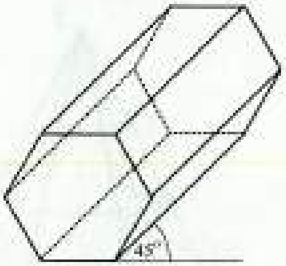
② Пресекот е правоаголник чии страни се висина на основата и бочниот раб.

$P=h\cdot H$; $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$; $H=a=4$; $P=8\sqrt{3}cm^2$. (црт. 1)

③ Ако бочниот раб е $s=15cm$, тогаш $H=s\cdot\sin 30^0=7{,}5cm$.

④ Основите на призмата ќе бидат во вистинска големина. Скицата е направена при избор на аголот $\alpha=45^0$ и

$q=\frac{2}{3}$. (црт. 2)



црт. 2

2 ① а) $6a^2=24$, $a=2$, $V=a^3=2^3=8m^3$; б) $16\sqrt{2}=a\sqrt{2}\cdot a$, $a=4$, $V=64m^3$;

в) $6=a\sqrt{2}$, $a=3\sqrt{2}$, $V=\left(3\sqrt{2}\right)^3=54\sqrt{2}\,m^3$.

② Од $a:b:c=3:4:7$ следува $a=3k$, $b=4k$, $c=7k$. $1098=2(3k\cdot 4k+3k\cdot 7k+4k\cdot 7k)$;

$1098=2\cdot 61k^2$; $k^2=9$; $k=3$, а $a=9cm$, $b=12cm$, $c=21cm$. $V=9\cdot 12\cdot 21=2268dm^3$.

③ Од условот ACC_1A_1 е ромб со страна d - дијагонала на трапазот.

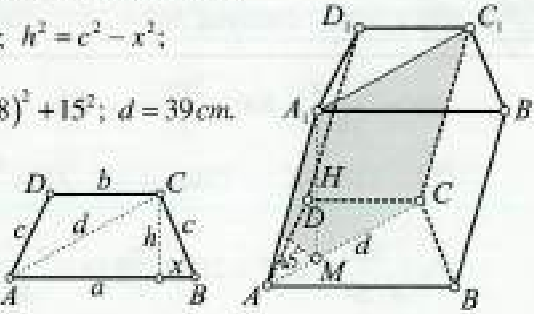
Од трапезот ABCD следува $x=\frac{a-b}{2}=\frac{44-28}{2}=8;\ h^2=c^2-x^2;$

$h=\sqrt{17^2-8^2}=15cm;\ d^2=(a-x)^2+h^2;\ d^2=(44-8)^2+15^2;\ d=39cm.$

Од ΔAMA_1 следува $AA_1=d=39cm,\ \sin 45^0=\frac{H}{d};$

$H=39\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\ V=\frac{(44+28)\cdot 15}{2}\cdot\frac{39\sqrt{2}}{2}=$

$=10530\sqrt{2}\,cm^3\approx 14,9\,dm^3$. (црт. 3)



црт. 3

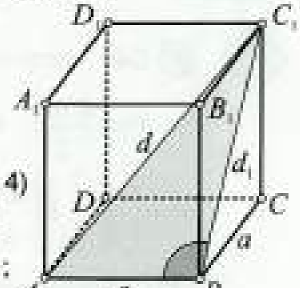
④ Плоштината на еден нормален пресек $B_1=\sqrt{s(s-a_1)(s-b_1)(s-c_1)};\ s=\frac{a_1+b_1+c_1}{2}=39;$ $B_1=\sqrt{39\cdot 2\cdot 24\cdot 13}=156$. Од условот $B_1=M$ следува $156=(a_1+b_1+c_1)\cdot s;\ 156=(37+15+26)\cdot s;$ $s=2cm.$ Волуменот на коса призма е $V=B\cdot H$ или $V=B_1\cdot s;\ V=156\cdot 2=312\,cm^3.$

⑤ $CB\perp AB$, а CB е ортогонална проекција на отсечката C_1B, па според теоремата за трите нормали следува $C_1B\perp AB$, т.е. ΔABC_1 е правоаголен со прав агол во темето B.

$a^2=\overline{AC_1}-\overline{BC_1}^2;\ a=\sqrt{7^2-5^2};\ a=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$. Од ΔBCC_1 следува

$H^2=d_1^2-a^2;\ \ H=\sqrt{5^2-\sqrt{24}^2}=1cm.\ \ P=2B+M;\ P=2a^2+4aH;$

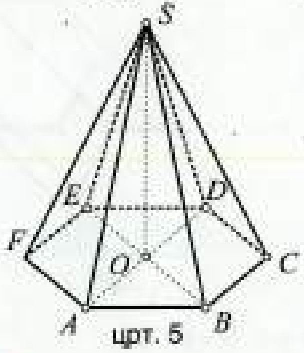
$P=2\cdot 24+4\cdot 2\sqrt{6}\cdot 1;\ \ P=6\left(8+\sqrt{6}\right)cm^2.\ V=B\cdot M=24\cdot 1=24cm^3$. (црт. 4)



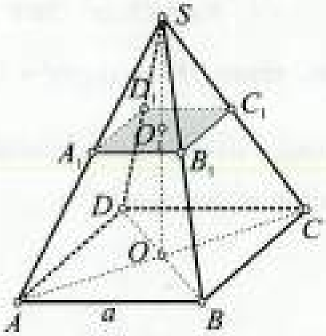
црт. 4

3 ① (црт. 5) ② $\overline{SO}=\overline{SO_1}+\overline{O_1O}=\overline{SO_1}+14;\ \frac{P}{P_1}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2};\ \frac{150}{54}=\frac{\left(\overline{SO_1}+14\right)^2}{\overline{SO_1}^2};$

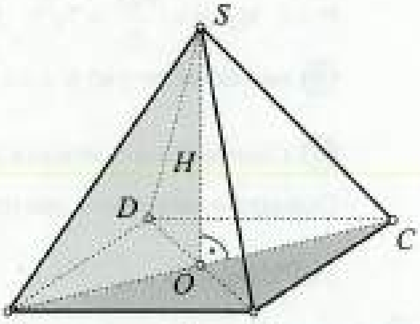
$\frac{25}{9}=\frac{(SO_1+14)^2}{\overline{SO_1}^2};\ \ \frac{5}{3}=\frac{\overline{SO_1}+14}{SO_1};\ \overline{SO_1}=21cm.\ H=21+14=35cm.$ (црт. 6)



црт. 5



црт. 6



црт. 7

③ $P=a^2=16^2=256cm^2,\ P_1=120cm^2$. Од $\frac{P}{P_1}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2}$, следува $\overline{SO_1}=\frac{3\sqrt{30}}{2}$. Од ΔAOS следува: $\overline{SA}^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2+\overline{SO}^2;\ \overline{SA}=\sqrt{272}$. Од $\frac{\overline{SA}}{SA_1}=\frac{\overline{SO}}{SO_1}$, следува $\overline{SA_1}=11,3cm$. ④ Најголемиот дијагонален пресек е рамностран триаголник со основа $2a=12\,cm$, па $P=\frac{12^2\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}\,cm^2$.

⑤ Од условот $\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}=\overline{SD}$ и SO нормална на рамнината, следува ΔSOA, ΔSOB, ΔSOC, ΔSOD се правоаголни и складни, значи $\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OA}=\overline{OB}$, т.е. точката O и центар на опишаната кружница околу правоаголникот $ABCD$. Точката O е пресек на дијагоналите. Од ΔSAO следува $H^2=\overline{SA}^2-\overline{AO}^2$; $AO=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}$; $\overline{AO}=5cm$, а $H=\sqrt{13^2-5^2}=12$. (црт. 7)

Запомни! Ако бочните рабови на една пирамида се еднакви меѓу себе, тогаш подножната точка на висината е во центарот на опишаната кружница околу основата.

4 ① а) $V=4cm^3$. б) $d=a\sqrt{2}=12\sqrt{2}$; $H=\sqrt{12^2-\left(\frac{1}{2}12\sqrt{2}\right)^2}=6\sqrt{2}$. $V=\frac{1}{3}a^2\cdot H=\frac{1}{3}\cdot 12^2\cdot 6\sqrt{2}=288\sqrt{2}cm^3$.

в) $d=a\sqrt{2}=24\sqrt{2}$; $36=\frac{1}{2}\cdot 24\sqrt{2}\cdot H$; $H=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. $V=\frac{1}{3}\cdot 24^2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $V=288\sqrt{2}\,cm^3$.

② Од условот $a+h=5$ и $a^2+2ah=16$ следува $a=2dm$, $h=3dm$, па $H^2=h^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2$, $H=2\sqrt{2}$, а $V=\frac{1}{3}a^2\cdot H=\frac{8\sqrt{2}}{3}dm^3$. ③ Од условот дека $\measuredangle SMO=\measuredangle SNO=\measuredangle SPO$ следува дека ΔSOM, ΔSON, ΔSOP се правоаголни и складни, па $\overline{OM}=\overline{ON}=\overline{OP}=r$ на впишаната кружница во ΔABC. Значи $\overline{OM}=\overline{ON}=\overline{OP}=h$ – висина на бочниот ѕид.

$B=s(s-a)(s-b)(s-c)$; $s=\frac{a+b+c}{2}=66$; $B=\sqrt{66(66-26)(66-51)(66-55)}=660cm^2$. (црт. 8)

Од $V=\frac{1}{3}B\cdot H$ следува $H=\frac{3V}{B}=12cm$. Од $P_\Delta=r\cdot s$ следува $r=\frac{P_\Delta}{s}=\frac{660}{66}=10cm$, па

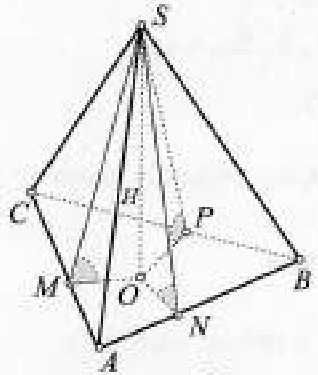
$h^2=\overline{SO}^2+\overline{ON}^2$; $h=\sqrt{12^2+10^2}=\sqrt{244}=15,6cm$. $M=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot h=66\cdot 15,6=1031cm^3$.

④ Триаголникот ABC е рамнокрак, па $h_a=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$; $h=\sqrt{37^2-35^2}=12cm$.

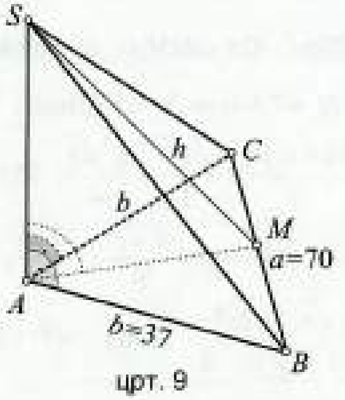
$B=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\cdot 70\cdot 12=420cm^2$. $V=\frac{1}{3}B\cdot H=\frac{1}{3}420\cdot 16=2240cm^3$. Од $SA\perp\Delta ABC$ следува, триаголниците SAB и SAC се правоаголни, а ΔSBC е рамнокрак. Од ΔSAM следува $h^2=\overline{SA}^2+\overline{AM}^2$;

$h=\sqrt{16^2+12^2}=20cm$. $P=B+M$; $M=2\cdot\frac{1}{2}b\cdot\overline{SA}+\frac{1}{2}a\cdot\overline{SM}=37\cdot 16+35\cdot 20=1292$.

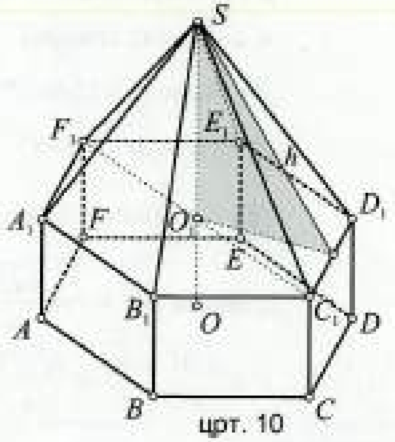
$P=420+1292=1712cm^2$. (црт. 9)



црт. 8



црт. 9



црт. 10

⑤ Волуменот на арената е збир од волуменот на призмата и пирамидата.

$V = B\cdot\overline{OO} + B\cdot\overline{SO_1}$; $V = B\left(\overline{OO}+\overline{SO_1}\right)$; $V = \frac{3\cdot 6^2\sqrt{3}}{2}(2,5+3) = 514,42m^3$. Бројот на најмногу гледачи што можат да присуствуваат на претставата е 514,42:3,5=146,97 т.е. 147. Набавеното платно е употребено за правење на обвивката на призмата и покривот, т.е. обвивката на пирамидата, па $M = 6aH + 6\cdot\frac{ah}{2}$. Од ΔSO_1M следува $h^2 = \overline{SM}^2 = \overline{SO_1} + \overline{O_1M}^2$; $h = \sqrt{3^2 + \left(\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 6m$, а $M = 6\cdot 6\cdot 2,5 + 3\cdot 6\cdot 6 = 198m^2$. Кон оваа количина треба да се додадат уште 10% за отпадок. Според тоа, набавено е вкупно $198 + 10\%\cdot 198 = 217,8m^2$ платно. (црт. 10)

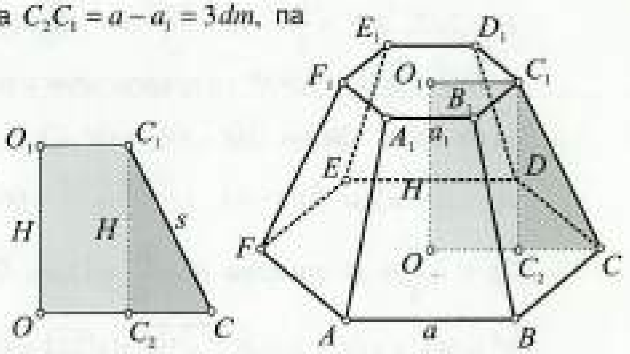
5 ① Од правоаголниот трапез OCC_1O_2 следува $\overline{C_2C_1} = a - a_1 = 3dm$, па

$H^2 = s^2 - \overline{C_2C}^2$, $H = 3dm$.

$B = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 166,28dm^2$, $B_1 = 6\frac{a_1\sqrt{3}}{4} = 64,95dm^2$.

$$V = \frac{\left(B + B_1 + \sqrt{BB_1}\right)H}{3} = 335,15dm^2.$$

$T = V\cdot s = 335,15\cdot 0,075 \approx 33,52kg$. (црт 11)



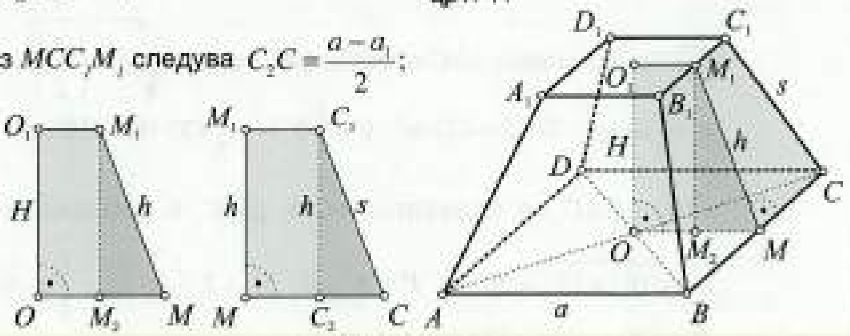
црт. 11

② Од правоаголниот трапез MCC_1M_1 следува $C_2C = \frac{a-a_1}{2}$;

$\left(\frac{a-a_1}{2}\right)^2 = s^2 - h^2 = 15^2 - 12^2$;

$a - a_1 = 18cm$. Од $M = 4\frac{a+a_1}{2}\cdot h$ имаме $1008 = 2(a+a_1)\cdot 12$;

$a + a_1 = 42cm$. Од $a - a_1 = 18$ и $a + a_1 = 42$ следува



црт. 12

$a = 30cm$, $a_1 = 12cm$, $P = 2052cm^2$. Од OMM_1O_1 следува $\overline{M_2M} = \frac{a-a_1}{2} = 9cm$.

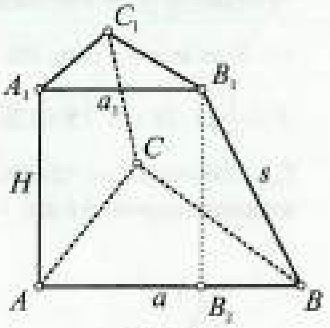
$H^2 = h^2 - \overline{M_2M^2} = 12^2 - 9^2$; $H = 7.94cm$. $V = 3610cm^3$. (црт. 12)

③ Од $M = B + B_1$ следува $3\frac{(a+a_1)h}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4}$; $75h = 562,9$; $h = 7,5cm$. Од трапезот $ONMO_1$ следува $\overline{ON} = r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = 5\sqrt{3}$, $\overline{O_1M} = r_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$; $H = 6.9cm$.

$$V = \frac{6,9}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} + \frac{aa_1\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2,3\cdot\sqrt{3}}{4}(900 + 400 + 600);\ V = 189cm^3 = 1,890dm^3.$$

④ Нека $a = 27cm$, $b = 29cm$ и $c = 52cm$ се страни на едната основа и a_1, b_1, и c_1 страни на другата основа на потсечената пирамида. Основата и паралелниот пресек на пирамидата се слични фигури, па $\frac{L}{L_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$; $\frac{108}{72} = \frac{27}{a_1}$; $a_1 = 18cm$. Според Хероновата формула $s = 54$. $B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 220cm^2$. Од сличноста на основите следува $B : B_1 = a^2 : a_1^2$;

$B_1 = \frac{B \cdot a_1^2}{a^2} = \frac{220 \cdot 18^2}{27^2} = 97,7cm^2$. $V = 154,8cm^3$.



црт. 13

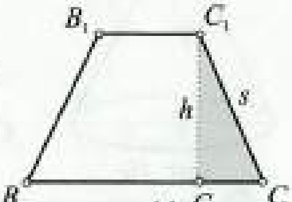
⑤ $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$, $B_1 = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$;

$V = \left(\frac{58\sqrt{3}}{4} + \frac{21\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{79\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3}$; $V = \frac{79\sqrt{3}}{6} cm^3$. Од ΔB_2BB_1 следува $\overline{BB_1}^2 = \overline{B_2B_1}^2 + \overline{B_2B}^2$; $s^2 = 2^2 + (7-3)^2$; $s = \sqrt{20}$ (црт. 13).

Од складноста на трапезите ABB_1A_1 и ACC_1A_1 следува

$\overline{BB_1} = \overline{CC_1} = 2\sqrt{2}$, т.е. BCC_1B_1 е рамнокрак трапез.

$\overline{C_1C_2}^2 = \overline{CC_1}^2 - \overline{C_2C}^2$; $h^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 - \left(\frac{7-3}{2}\right)^2$; $h = \sqrt{20-4} = 4cm$ (црт. 14)



црт. 14

$M = 2\frac{(a+a_1)H}{2} + \frac{(a+a_1)h}{2}$; $M = 20 + 20 = 40cm^2$;

$P = \frac{49\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + 40 = \frac{58\sqrt{3}}{4} + 40 = 65,11cm^2$.

6 ① а) $r = 15cm$, $H = 10cm$; б) $r = 10cm$, $H = 15cm$; в) $r = 7,5cm$, $H = 10cm$. ② Од $P = 2r \cdot H$ следува $156 = 2r \cdot 12$; $r = 6,5cm$. ③ Види црт. 8.6 во лекцијата. $t = A_1B_1 = 16cm$. Од $\Delta O_1M_1B_1$ следува $\overline{O_1M_1}^2 = \overline{O_1B_1}^2 - \overline{M_1B_1}^2$; $d = \overline{O_1M_1} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}$; $d = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15cm$. ④ Од ΔO_1M_1B седува $\measuredangle B_1O_1M_1 = 60^0$, па $tg\,60^0 = \frac{\frac{t}{2}}{d} = \frac{t}{2d}$. Бидејќи $d = 4$, $t = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot 4 = 8\sqrt{3}$, $P = t \cdot H$; $P = 8\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 120cm^2$.

7 ① Нека $a = 60cm$, $b = 40cm$. Ако ротира околу a, тогаш $H = 60$, а $r = 40cm$, па $P_1 = 2r\pi(r+H) = 2 \cdot 40\pi(60+40) = 8000\pi\, cm^2$. $V_1 = r^2\pi H = 40^2\pi \cdot 60 = 96000\pi\, cm^3$. Ако ротира околу b, тогаш $H = 40cm$, $r = 60cm$, па $P_2 = 2 \cdot 60\pi(60+40) = 12000\pi\, cm^2$, $V_2 = 60^2\pi \cdot 40 = 144000\pi\, cm^3$.
$P : P_1 = 2 : 3$; $V_1 : V_2 = 2 : 3$.

② Од $80\pi = 2r\pi(r+H)$ и $H - r = 2$ следува $r = 4cm$, $H = 6cm$, $V = r^2\pi \cdot H = 96\pi\, cm^3$.

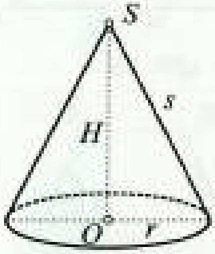
③ $\sin 30^0 = \frac{H}{a}$; $H = a \cdot \sin 30^0 = 5cm$, $r = 5cm$, а
$V = r^2\pi \cdot H = 5^2 \cdot \pi \cdot 5 = 125\pi\, cm^3$. (црт. 15)

црт. 15

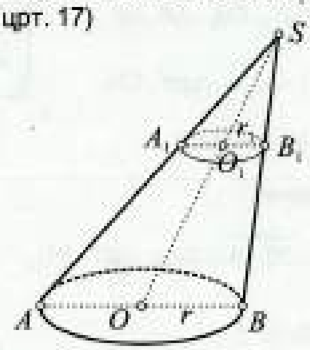
④ Радиусот на ископаниот бунар е $r = 0,65 + 0,40$; $r = 1,05m$, па ископаната земја е $V = 1,05^2\pi \cdot 12 = 41,5m^3$. Во бунарот има $V \doteq 0,65^2 \cdot \pi \cdot 4,5 = 5,97m^3$ вода.

⑤ $V_1 = 0,3^2\pi \cdot 5 = 1,413m^3$. Основниот раб на призмата е $a = 0,3\sqrt{2}$, а $V = \left(0,3\sqrt{2}\right)^2 5 = 0,9m^3$. Отпадокот е $1,413 - 0,9 = 0,513m^3$, т.е. $36,3\%$.

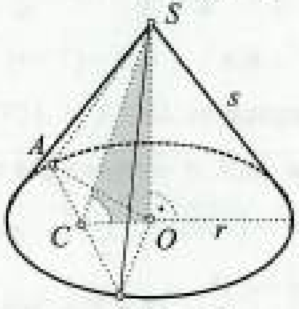
8 ① Бидејќи осниот пресек е рамнокрак триаголник со агол на основата 60^0, значи тој е рамностран, па $P=\frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4}=36\sqrt{3}\,cm^2$. ② Дијаметарот $\overline{AB}=2r=16cm$. Бидејќи $16^2+12^2=20^2$, значи осниот пресек SAB е правоаголен триаголник со хипотенуза $\overline{SA}=20\,cm$. Според тоа $P=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{SB}=\frac{1}{2}\cdot16\cdot12=96cm^2$. Ако не воочиш дека ΔABS е правоаголен, тогаш неговата плоштина пресметај ја со Хероновата формула. (црт. 19) ③ Добиеното ротационо тело е прав конус со $r=8cm$ и $s=17cm$, па $H^2=s^2-r^2$, $H=\sqrt{17^2-8^2}=15cm$. Плоштината на осниот пресек е $P=\frac{1}{2}2r\cdot H=8\cdot15=120\,cm^2$. (црт. 16) ④ Задачата има две решенија. Прво: Нека $SO_1=4\,cm$. Од сличноста на триаголниците SAO и SA_1O_1 следува $\frac{r}{r_1}=\frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}}$; $\frac{7}{r_1}=\frac{14}{4}$; $r_1=2\,cm$. Одреди го второто решение.(црт. 17)



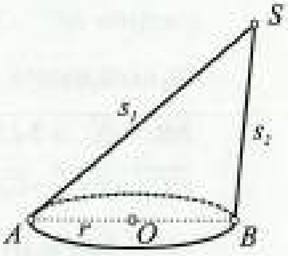
црт. 16



црт. 17



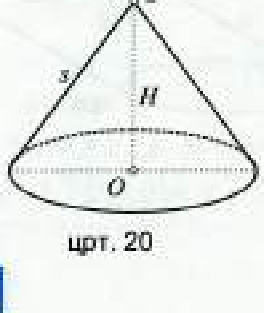
црт. 18



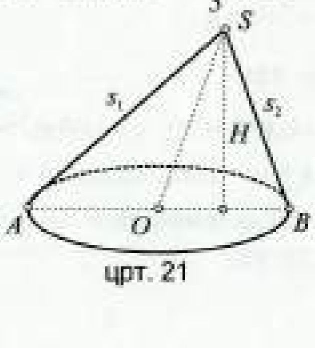
црт. 19

⑤ Триаголникот SCO е рамнокрак правоаголен, бидејќи $\measuredangle SOC=90^0$, а $\measuredangle SCO=45^0$, па $\overline{OC}=\overline{OS}=6cm$. Триаголникот AOB е, исто така, рамнокрак правоаголен, па и ΔOCB е рамнокрак правоаголен. Значи $\overline{OC}=\overline{CB}=6cm$, а $\overline{AB}=12cm$. Од ΔSCO следува $\overline{SC}=6\sqrt{2}$, па $P=\frac{1}{2}AB\cdot SC=\frac{1}{2}\cdot12\cdot6\sqrt{2}=36\sqrt{2}\,cm^2$. (црт. 18)

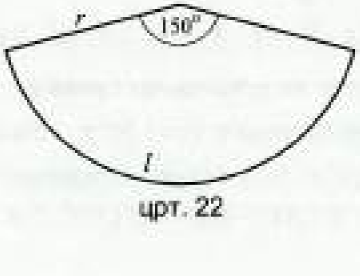
9 ① Од $P=\frac{s^2}{2}$ следува $36\cdot2=s^2$, $s=6\sqrt{2}\,cm$, а $r=H=6cm$. $P=\pi r\left(r+s\right)=6\pi\left(6+6\sqrt{2}\right)=$ $=36\pi\left(1+\sqrt{2}\right)cm^2$. $V=\frac{1}{3}\pi r^2H=\frac{1}{3}\pi\cdot b^2\cdot6=72\pi\,cm^3$. (црт. 20) ② Од $M=rs\pi$ следува $rs=4896$. Од $r:s=8:17$ следува $r=8k$, $s=17k$, па $8k\cdot17k=4896$; $k^2=36$, $k=6$. $r=48cm$, $s=102cm$, $H=\sqrt{s^2-r^2}=90cm$. $V=\frac{1}{3}r^2\pi\cdot H=\frac{1}{3}\cdot48^2\pi\cdot90=69120\pi\,cm^3=69{,}12\pi\,dm^3$. ③ Од $L=2r\pi$, следува $2r=21cm$. Плоштината на ΔABS ќе ја пресметаме со Хероновата формула. $P=\sqrt{s(s-s_1)(s-s_2)(s-2r)}$; $s=\frac{20+13+21}{2}=27$; $P=\sqrt{27(27-20)(27-13)(27-21)}=252cm^2$. Од $P=\frac{1}{2}2r\cdot H$ следува $H=24cm$. $V=\frac{1}{3}\pi r^2H=\frac{1}{3}\pi\cdot10{,}5^2\cdot24=882\pi\,cm^3$. (црт. 21)



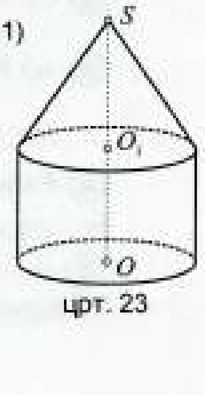
црт. 20



црт. 21



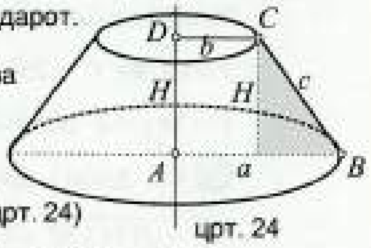
црт. 22



црт. 23

④ $\ell=\frac{\pi r\alpha}{180^0}=\frac{5\cdot\pi\cdot 288^0}{180^0}=8\pi\,cm.$ Должината на лакот е периметар на основата на конусот, а радиусот на лакот е изводница на конусот, т.е. $s=r=5\,dm.$ Од $L=\ell=8\pi=2\pi r_1$ следува дека радиусот на основата на конусот е $r_1=4\,cm.$ Висината на конусот $H=\sqrt{s^2-r^2}=3\,dm.$ $V=\frac{1}{3}\pi r_1^2H=\frac{1}{3}\pi 4^2\cdot 3=16\pi\,dm^3$.(црт. 22) ⑤ $V=\pi r^2\cdot\overline{OO_1}+\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\overline{SO_1};\ V=\pi r^2\left(\overline{OO_1}+\frac{1}{3}\overline{SO_1}\right);$ $V=2{,}5^2\pi\left(2{,}2+\frac{1}{3}\cdot 18\right)=54{,}95\,m^3.\ T=V\cdot s=54{,}95\cdot 0{,}03=1{,}65\,t.$ (црт. 23)

10 ① Висината на потсечениот конус $H=\sqrt{s^2-(r-r_1)^2};\ H=\sqrt{17^2-8^2}=15\,cm.$ Од $\pi(r+r_1)\cdot s=2\pi R\cdot H,$ имаме $\pi(19+11)\cdot 17=2\pi R\cdot 15,\ R=17\,cm-$радиус на основата на цилиндарот.



црт. 24

② Од $P=\frac{(a+b)h}{2}$ следува $24=\frac{(10+6)h}{2};\ h=3.$ Од условот следува $H=3\,cm,\ a=r=10\,cm,\ b=r_1=6\,cm,$ а $s=c=\sqrt{H^2+(r-r_1)^2}=5\,cm.$

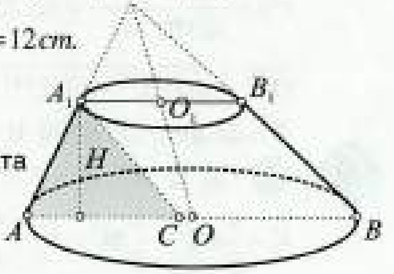
$V=\frac{\pi\cdot 3}{3}\left(10^2+6^2+10\cdot 6\right)=196\pi\,cm^3.\ P=\pi\left(10^2+6^2+(10+6)\cdot 5\right)=226\pi\,cm^2.$ (црт. 24)

③ Од $506\pi=\pi\left(r^2+r_1^2+(r+r_1)s\right)$ и $r=r_1+5$ следува $506=(r_1+5)^2+r_1^2+(2r_1+5)\cdot 13;$ $r_1^2+18r_1-208=0.\ r_1=8\,cm,$ а $r=8+5=13\,cm,\ H=\sqrt{s^2-(r-r_1)^2}=12\,cm.$

$V=\frac{12\pi}{3}\left(13^2+8^2+13\cdot 8\right)=1348\pi\,cm^3.$ ④ Од ΔACA_1 следува $AC=24-10=14\,cm,\ \overline{AA_1}=13\,cm$ и $\overline{CA_1}=15\,cm.$ Според Хероновата формула $P_\Delta=\sqrt{s(s-14)(s-13)(s-15)};\ s=(14+13+15):2=21$

$P_\Delta=84\,cm^2.$ Од $P_\Delta=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot H;\ 84=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot H;\ H=12\,cm.$

$V=\frac{12\pi}{3}\left(12^2+5^2+12\cdot 5\right)=916\pi\,cm^3.$ (црт. 25)



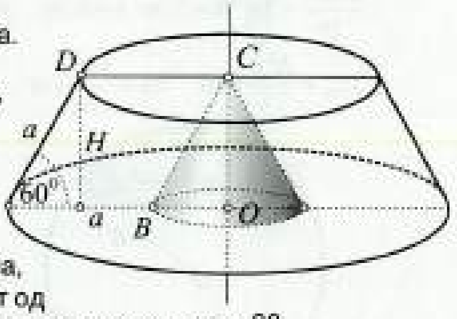
црт. 25

⑤ Добиеното ротационо тело е потсечен конус од којшто е изваден еден конус чиј радиус е $r_2=\overline{BO}=\frac{a}{2}=5\,cm,$ а врвот е во центарот на горната основа.

Елементи на потсечениот конус се: $\sin 60^0=\frac{H}{a};\ H=5\sqrt{3}\,cm,$

$r_2=\overline{BO}=5\,cm,\ r=10+5=15\,cm,\ r_1=10\,cm,$ па

$V=\frac{5\sqrt{3}\pi}{3}\left(15^2+10^2+15\cdot 10\right)-5^2\pi\cdot 5\sqrt{3};\ V=716{,}6\sqrt{3}\pi\,cm^3.$



црт. 26

Бидејќи секоја отсечка што ротира опишува некоја површина, значи плоштината на ротационото тело е еднаква на збирот од плоштините што се добиваат како ротациони плоштини на секоја отсечка што ротира.

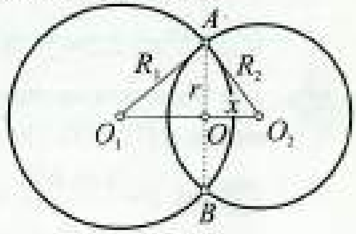
Во овој случај отсечката AB опишува кружен прстен. Отсечката BC опишува обвивка на конусот. Отсечката AD опишува обвивка на потсечениот конус. Отсечката DC опишува круг, горната основа на потсечениот конус. Според тоа:

$P=M_{\text{пк}}+M_{\text{к}}+B_1+(B-B_2);\quad P=\pi(r+5+r_1)s+r_2\pi s+r_1^2\pi+\left((r+r_2)^2-r_2^2\right)\pi;$

$P=\pi\cdot 25\cdot 10+5\cdot 10\pi+10^2\pi\left(15^2-5^2\right)\pi;\quad P=600\pi\,cm^2.$ (црт. 26)

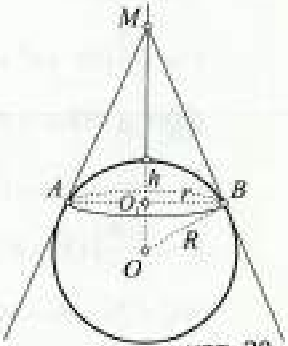
11 ① Најмногу 2 точки. ② Со пресекот добиени се две калоти чии висини се $h_1 = \frac{R}{2}$ и $h_2 = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$, па $\frac{P_1}{P_2} = \frac{2\pi Rh_1}{2\pi R_2} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{2R}{2}} = \frac{1}{3}$. ③ $R = d+9$; $R^2 = 15^2 + d^2$; $(d+9)^2 = 225 + d^2$; $d = 8cm$.

④ $O_1O_2 = 36cm$, $R_1 = 29cm$, $R_2 = 25cm$. Пресекот е кружница чиј дијаметар е зедничката тетива. Нека $\overline{OO_2} = x$; $\overline{O_1O} = 36 - x$. Од ΔAOO_2 следува $r^2 = R_2{}^2 - x^2$. Од ΔAOA_1 следува $r^2 = R_1{}^2 - (36-x)^2$.
Решението на системот е $25^2 - x^2 = 29^2 - 36^2 + 72x - x^2$,
$x = 15$, па $r^2 = 25^2 - 15^2$; $r = \sqrt{625-225} = 20cm$,
$L = 2\pi r = 2 \cdot 20\pi = 40\pi\, cm^2$. (црт. 17)



црт. 27

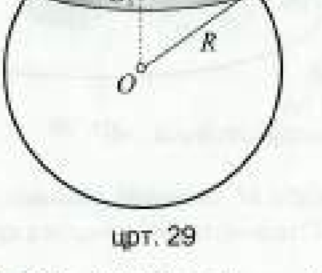
⑤ Од ΔMBO следува $\overline{MB}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{OB}^2 = 6370{,}14^2 - 6370^2$;
$\overline{MB} = \sqrt{1783{,}62} = 42{,}233$. Од $P_{\Delta MOB} = \frac{1}{2}\overline{MB} \cdot R = \overline{MO} \cdot r$ следува
$r = \frac{42{,}233 \cdot 6370}{6370{,}14} = 42{,}231$. Од ΔO_1OB следува
$\overline{OO_1} = \sqrt{6370^2 - 42{,}231^2} = 6369{,}86\,km$. $h = R - \overline{OO_1} = 0{,}13999$.
$P = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 6370 \cdot 0{,}13999 \approx 5600\,km^2$. (црт. 28)



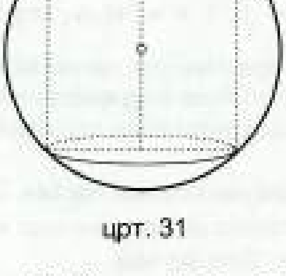
црт. 28

12 ① Од $R_1 : R_2 : R_3 = 1:2:3$ следуива $R_1 = k$, $R_2 = 2k$, $R_3 = 3k$;
$V_1 = \frac{4}{2}\pi R_1^2 = \frac{4}{3}\pi k^3$; $V_2 = \frac{4}{3}\pi(2k)^3$; $V_2 = \frac{32}{3}\pi k^3$ и $V_3 = \frac{4}{3}\pi(3k)^3 = \frac{108}{3}\pi k^3 = 36\pi k^3 = 36\pi k^3$.
$V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi k^3 + \frac{32}{3}\pi k^3 = 12\pi k^3$, т.е. $V_3 = 3(V_1 + V_2)$.

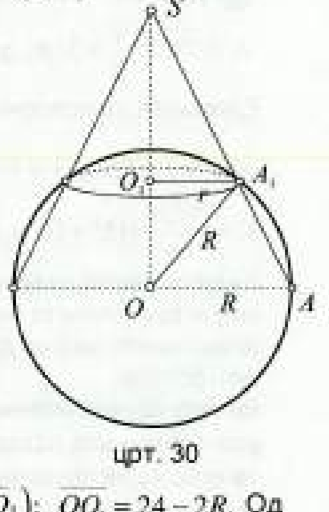
② $P_K = \frac{2}{5} \cdot 4\pi R^2$; $2\pi Rh = \frac{8\pi}{5}R^2$; $h = \frac{4}{5}R$; $\overline{OO_1} = R - \frac{4}{5}R = \frac{1}{5}R$, $R^2 - \left(\frac{1}{5}R\right)^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2$;
$\frac{24R^2}{25} = 24$; $R = 5cm$. $h = 1cm$. $P_K = 2\pi Rh = 2\pi 10 \cdot 1 = 10\pi\, cm^2$. (црт. 29)
$V_{TO} = \frac{h^2\pi}{3}(3R - h) = \frac{14\pi}{3}cm^3$.



црт. 29



црт. 31



црт. 30

③ $\overline{SO} = 2R$; $\overline{OA_1} = 12cm$. $\Delta AOS \sim \Delta O_1A_1S_1$, па $R:12 = 2R:\left(2R - \overline{OO_1}\right)$; $\overline{OO_1} = 24 - 2R$. Од ΔOA_1O_1 следува $R^2 = \overline{OO_1}^2 + 12^2$; $R^2 = (24-2R)^2 + 144$. $R = 20cm$, $V = \frac{4}{3}\pi 20^3 = \frac{32\pi}{3}dm^3$.(црт 31)

④ Радиусот на впишаната топка е $R=\frac{a}{2}$, а на опишаната $R=\frac{D}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. $\frac{P_1}{P_2}=\frac{4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}$; $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$. ⑤ Пресеците се од различна страна на цилиндарот и имаат ист радиус r.

Бидејќи $H_C=H_{TC}$ имаме: $V_{TC}=\frac{\pi H}{6}\left(3r^2+3r^2+H^2\right)$; $V_C=\pi r^2 H$, па $\frac{\pi H}{6}\left(6r^2+H^2\right)-\pi r^2 H=36\pi$, следува $H=6cm$. (црт. 31)

ТЕМА 8

ОБРАБОТКА НА ПОДАТОЦИ

1

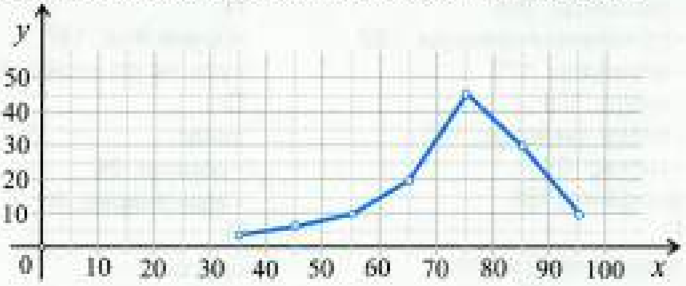
① Статистичката низа која не опаѓа е следната:

1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5

Статистичката табела е следната:

	Вредност на обележјето x	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=3$	$x_4=4$	$x_5=5$	
f_i	Број на слаби статистички единки што се повторуваат	7	5	8	6	4	Σ=30

② а) Очигледно, бројот на статистичките единки чија вредност е помала или еднаква на 8 е 3+4+3=10 (кумулативна фрекфенција). б) Вредноста која е помала или еднаква на 15 е 3+4+3+8+4=22. ③ Непрекинатото статистичко обележје што е дадено во групни интервали, графички се претставува со хистограм. Хистограмот е правоаголник чија една страна лежи на x-оската и е еднаква на должината на интервалот на распределбата, а другата страна е еднаква на големината на фрекфенцијата за соодветниот интервал. Полигонот на фрекфенцијата се добива со поврзување на точките $M_1(x_1,f_1)$, $M_2(x_2,f_2)$, $M_2(x_3,f_3)$, ..., $M_k(x_k,f_k)$ каде што $x_1,x_2,\dots x_k$ се средини на групните интервали, т.е. $x_1=\frac{30+40}{2}$, $x_2=\frac{40+50}{2}$ итн. ④ Статистичката низа е 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5.



Аритметичката средина е $x=\frac{1\cdot2+2\cdot5+3\cdot3+4\cdot2+5\cdot2}{14}=2,64$. - Низата има парен број членови, па медијаната е $M_e(x)=\frac{2+3}{2}=2,5$. - За мода имаме $M_0(x)=2$.

2

① $R_1=18-12=6$; $R_2=16-14=2$. ② $\overline{x_1}=39$, $\overline{x_2}=40$; $R_1=76$, $R_2=78$. ③ Медијаната $M_e=\frac{19+1}{2}=x_{10}=9$ го дели множеството на две подмножества од по девет членови чии медијани се бараните квартили: $Q_1=x_5=3$ и $Q_3=x_{15}=16$.

3

① $\bar{x}=\frac{1}{35}(1\cdot4+2\cdot10+3\cdot7+4\cdot6+3\cdot5+6\cdot5)=\frac{114}{35}=3,22$

$d^2=\frac{1}{35}\left[4(1-3,22)^2+10(2-3,22)^2+7(3-3,22)^2+6(4-3,22)^2+3(5-3,22)^2+5(6-3,22)^2\right]=2,095$ или $d=\sqrt{2,095}\approx1,45$. ② $d=1,11$. ③ а) $\bar{x}=29,4$; б) $d=2,58$.

ПРЕГЛЕД НА ПОИМИТЕ

СОДРЖИНА

Автори: Боривоје Миладиновиќ,
Трајче Ѓорѓијевски,
Никола Петрески

Рецензенти: **Асен Радојков** - Педагошки Факултет-Штип
Катица Спасовска Бинчева - професор во гимназија "Р. Ј. Корчагин" - Скопје
Драган Ѓеоргиев - професор во гимназија "Ј. Б. Тито"-Скопје

Уредник: **Јово Стефановски**

Со Решение од Министерот на Министерството за образование и наука на Република Македонија бр. 11-518311 од 30.09.2002 година оваа книга е одобрена за употреба во средното гимназиоско образование.

CIP - Каталогизација во публикација на Народна и универзитетска
библиотека "Св. Климент Охридски" - Скопје
51 (075.3)

МИЛАДИНОВИЌ, Боривоје
Математика: за II година гимназија / Боривоје Миладиновиќ,
Трајче Ѓорѓијевски, Никола Петрески. - Скопје : Алби, 2002. - 220
стр. : илустр. ; 26 cm

ISBN 9989 - 919 - 28 - 3
1. Ѓорѓијевски, Трајче 2. Петрески, Никола

Издавач
ДРУШТВО ЗА ИЗДАВАЧКА ДЕЈНОСТ
"А л б и" Билјана и др. д. о. о. Скопје
ул. "Осло" бр. 19, Скопје
Директор: Билјана Стефановска

*

Боривоје Миладиновиќ, Трајче Ѓорѓијевски, Никола Петрески
МАТЕМАТИКА
II година гимназиско образование

*

Лектура
Сузана Стојкоска

*

Компјутерска обработка
Милчо Аврамоски, Дејан Крстевски, Блаже Тофиловски

*

Коректура
Автори

*

Ракописот е издаден во печат во октомври 2002 година.
Печатењето е завршено во октомври 2002 година.
Обем 224 страници, формат 21 x 26 cm
Тираж 5000 примероци.
Отпечатено во "АБАКУС КОМЕРЦ" Скопје