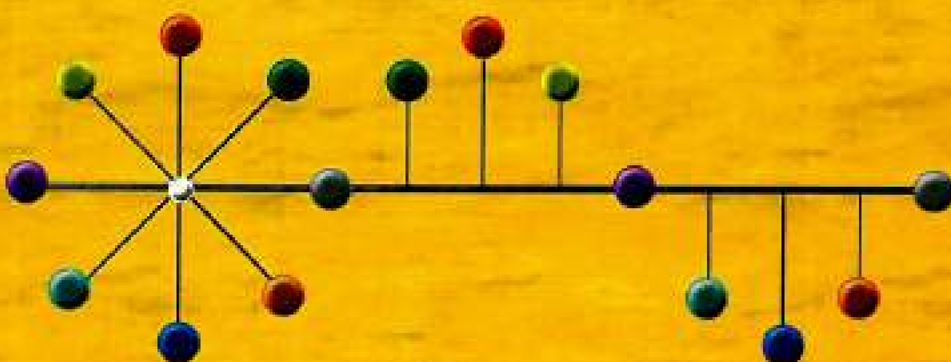
Боривоје Миладиновиќ
Никола Петрески

МАТЕМАТИКА

III година



ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ

Боривоје Миладиновиќ
Никола Петрески

МАТЕМАТИКА

III година

КОРИГИРАНО ИЗДАНИЕ

ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ

2020

ПРЕДГОВОР

Оваа книга ќе ти помогне при изучувањето на математиката во трета година. Биди активен и редовен во работата, а тоа ќе ти помогне самостојно да стекнуваш знаења што ќе ти донесе задоволство и успех во учењето.

Книгата е поделена на четири тематски целини. Тематските целини започнуваат со нивната содржина, а наставните единици се нумерирани.

Воочи ги ознаките во наставните единици и согледај ја нивната порака.

Потсети се! Наставните единици почнуваат со нешто што ти е познато. Треба да се потсетиш и да ги решиш дадените барања. Тоа ќе го олесни изучувањето на нивните содржини.

А, **Б**, **В**, ... Со овие ознаки наставната единица е поделена на делови (порции) што се однесуваат на нивните поими.

1, 2, 3, ... Со ваквите ознаки се означени активностите, прашањата и задачите што ќе ги решаваш на часот самостојно или со помош на твојот наставник, а тоа е во лекцијата.

● Со ознаката крукче ти е упатено прашање на кое треба да дадеш одговор.

■ Со оваа ознака е дадена информација за објаснување на новиот поим.

Запомни! Ова те упатува што е важно за новиот поим.

Воочи! Оваа порака ти дава на знаење да посветиш поголемо внимание.

Задачи

1, 2, 3, ... По секоја наставна единица дадени се задачи. Со редовно и самостојно решавање на овие задачи подобро ќе го разбереш изученото. Твоите одговори спореди ги со одговорите и решенијата што се дадени на крајот од учебников.

Кога ќе наидеш на тешкотии при изучувањето на одредени содржини, не се откажувај, обиди се повторно, биди упорен.

Ќе не радува ако оваа книга ти овозможи да постигнеш одличен успех.

Од авторите

ТЕМА 1

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

Во оваа тема ќе учиш за:

ТЕМА 1 ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

1 ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА. СВОЈСТВА НА ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНАТА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a,\ a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$
- $a^0 \overset{def}{=} 1$ и $a^{-n} \overset{def}{=} \dfrac{1}{a^n},\ a \neq 0.$
- $a^{\frac{m}{n}} \overset{def}{=} \sqrt[n]{a^m},\ a > 0,\ m, n \in \mathbb{N}.$

А Вредноста на степенот a^x, $a > 0$ е еднозначно определена за секој рационален број x.
Ова тврдење следува од дефиницијата за степенот со показател природен и рационален број.

Степенот a^x, $a > 0$, е исто така, еднозначно определен ако x е ирационален број. Ова тврдење нема да го докажуваме поради сложеност на доказот.

Значи, степенот a^x, $a > 0$ е еднозначно определен за секој реален број x.

Ограничувањето $a > 0$ е воведено поради тоа што при услов $a < 0$ степенот a^x за некои вредности на показателот x не е реален број. На пример за $a = -9$ и $x = \dfrac{1}{2}$ имаме $(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-9} = 3i \notin \mathbb{R}$.

Операциите со степени чиј показател е реален број се изведуваат според правилата што важат за степени со показател природен број.
Доказот на некои од нив е доста сложен, па нема да го изведуваме.

1 Изврши ги назначените операции:

а) $(x^2 \cdot x^3)^2 \cdot (x \cdot x^2)^{-3},\ x \neq 0;$ б) $(a^{-2} \cdot a)^3 \cdot (a \cdot a^2)^3,\ a \neq 0;$ в) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{2}};$

г) $a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{3}} : a^{-1}\right),\ a \neq 0;$ д) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}}.$

Согледај го решението:

- Операциите со степени се изведуваат според следниве правила

$1^\circ\ a^m \cdot a^n = a^{m+n};$ $2^\circ\ a^m : a^n = a^{m-n};$ $3^\circ\ (a^m)^n = a^{m \cdot n};$

$4^\circ\ (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m;$ $5^\circ\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ $b \neq 0,\ m, n \in \mathbb{R}.$

а) $(x^2 \cdot x^3)^2 \cdot (x \cdot x^2)^{-3} = x^{10} \cdot x^{-9} = x;$

д) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81.$

Б Според претходно кажаното степенот a^x, $a>0$ е еднозначно определен за секој реален број x, значи можеме да дефинираме едно пресликување $f: x \to a^x$ или $f(x)=a^x$, $a>0$, $a \neq 1$ со кое множеството $\mathbb{R}$ се пресликува во $\mathbb{R}^+$.

Запомни!

Функцијата $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ зададена со формулата $f(x)=a^x$, $a>0$ и $a \neq 1$ се вика експоненцијална функција со основа a.

Видовме зошто го воведовме ограничувањето $a>0$, а условот $a \neq 1$ е очигледен, бидејќи ако $a=1$, тогаш $y=1^x=1$ за секој $x \in \mathbb{R}$ па нема смисла да се разгледува функција која е константна.

2 Кои од функциите се експоненцијални:

а) $y=3{,}1^x$; б) $y=x^2$; в) $y=\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)^0\right)^x$; г) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$?

Согледај го одговорот:

- Само функциите а) и г) се експоненцијални.

3 Нацртај го графикот на функцијата:

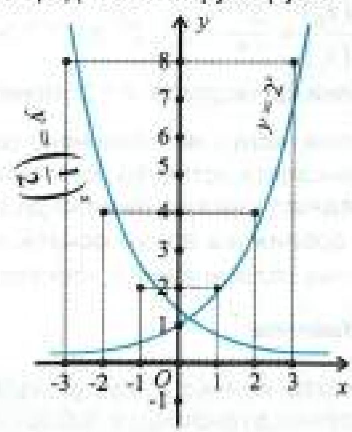
а) $y=2^x$; б) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; в) $y=3^x$; г) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Согледај го решението:

- Функциите прво ги претставуваме табеларно, при што за аргументот x даваме цели броеви заради полесно одредување на вредноста на функцијата.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

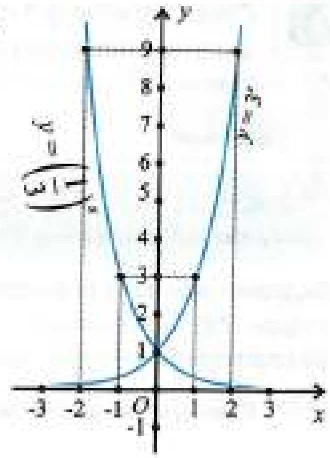


црт. 1

Графиците на функциите а) и б) се прикажани на црт.1, а в) и г) на црт.2.

Да разгледаме некои својства на функцијата $y = 2^x$.

1. Функцијата е дефинирана за сите реални броеви што следува од самата дефиниција D_f; $x \in \mathbb{R}$.
2. Вредностите на функцијата се позитивни реални броеви, следува од дефиницијата, т.е. V_f; $y \in \mathbb{R}^+$.
3. За $x = 0$ следува $y = 2^0 = 1$, т.е. графикот минува низ точката $(0, 1)$.



црт. 2

Потсети се!

- Функцијата $y = f(x)$ монотоно расте ако за кои било $x_1, x_2 \in D_f$ и $x_2 > x_1$, следува дека $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $\frac{f(x_2)}{f(x_1)} > 1$.
- Функцијата $y = f(x)$ монотоно опаѓа ако за кои било $x_1, x_2 \in D_f$ и $x_2 > x_1$, следува дека $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. $\frac{f(x_2)}{f(x_1)} < 1$.

4. Ако $x_2 > x_1 > 0$, тогаш $\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{2^{x_2}}{2^{x_1}} = 2^{x_2 - x_1} > 1$.

   Ако $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, а $x_2 > x_1$ во тој случај нека $x_1 = -k_1$, $(k_1 > 0)$, а $x_2 = -k_2$, $(k_2 > 0)$ и притоа $k_1 > k_2$, тогаш $\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{2^{-k_2}}{2^{-k_1}} = \frac{2^{k_1}}{2^{k_2}} = 2^{k_1 - k_2} > 1$.

   Ако $x_2 > 0$, $x_1 < 0$, тогаш $x_2 > x_1$. Нека $x_1 = -k_1$, $(k_1 > 0)$, тогаш

   $$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{2^{x_2}}{2^{-k_1}} = 2^{x_2} \cdot 2^{k_1} = 2^{x_2 + k_1} > 1.$$

   Значи, функцијата $y = 2^x$ монотоно расте на целата дефинициона област.

5. Воочи, кога x неограничено се намалува (налево од нулата) вредноста на функцијата останува позитивна и постојано се намалува, меѓутоа нејзината вредност никогаш не може да е еднаква на нула, т.е. графикот на функцијата се доближува до x – оската, но никогаш не ја сече ниту ќе ја допре. Во тој случај велиме дека x –оската е **асимптота** на кривата $y = 2^x$.

Запомни!

Правата кон која некоја крива постојано (до бескрај) се доближува, а не ја сече се вика **асимптота**.

Воочи!

- Својствата на функциите $y = 2^x$ и $y = 3^x$, $\left(y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ и } y = \left(\frac{1}{3}\right)^x\right)$ им се заеднички.

■ Графиците на функциите $y = a^x$ и $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$, $\left(y=2^x \text{ и } y=\left(\frac{1}{2}\right)^x;\right.$ $\left.y=3^x \text{ и } y=\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)$ се симетрични во однос на y – оската, т.е. ако точката $A(x_1, y_1)$ припаѓа на графикот на функцијата $y = a^x$, $a > 0$, тогаш точката $B(-x_1, y_1)$ припаѓа на графикот на функцијата $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$.

В Некои својства на експоненцијалната функција $y = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$.

1. Функцијата е дефинирана за сите реални броеви, т.е. D_f: $x \in \mathbb{R}$.
2. Вредности на функцијата е множеството на позитивни реални броеви, т.е. V_f: $x \in \mathbb{R}^+$. Значи, $y > 0$ за секое $x \in \mathbb{R}$.

   Овие својства следуваат од дефиницијата на функцијата.
3. За $x = 0$, $y = a^0 = 1$, т.е. графикот ја сече y –оската во точката $(0, 1)$.
4. а) За $a > 1$ функцијата монотоно расте, т.е. за $x_1, x_2 \in D_f$ и $x_2 > x_1$ следува
$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}=a^{x_2-x_1}>1.$$
   б) За $0 < a < 1$ функцијата монотно опаѓа, т.е. за $x_1, x_2 \in D_f$ и $x_2 > x_1$, следува $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}=a^{x_2-x_1}<1$.
5. x – оската е асимтота на експоненцијалната функција.

5 Испитај ги својствата на функциите $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (црт. 1) и $y = 3^x$ (црт. 2).

Задачи

1 Пресметај:

а) $\left(\frac{3}{5}-\left(\frac{4}{3}\right)^0\right)^{-1}$; б) $4^{-\frac{1}{2}}+8^{-\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{4}}$.

2 Спореди ги степените:

а) $\sqrt[3]{2^5}$ и $\sqrt[3]{2^6}$; в) $\pi^{\sqrt{2}}$ и $\pi^{\sqrt{3}}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$.

б) $\sqrt[3]{5^4}$ и $\sqrt[4]{5^7}$; г) $3^{\sqrt{6}}$ и $3^{\sqrt{8}}$;

3 Упрости ги изразите:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{8}} \cdot 4^{\sqrt{2}} \cdot 8^{\sqrt{8}}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\sqrt{3}} \cdot 4^{\sqrt{12}}$; в) $\left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{8}}$.

4 Докажи го идентитетот:

а) $\left(\left(\sqrt[4]{4}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-3\sqrt{8}} = \frac{1}{64}$; б) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}} = 81$.

5 Кои од функциите се растечки, а кои опаднувачки:

а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; б) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$; в) $y = \left(\sqrt{2}\right)^{-x}$; г) $y = \left(\frac{1}{0.5}\right)^x$?

6 Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите:

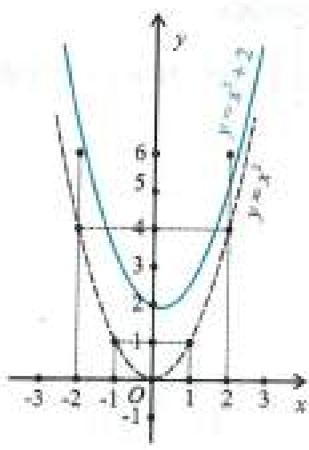
а) $y = \left(\frac{1}{0{,}25}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; б) $y = 10^x$ и $y = 10^{-x}$.

7 Со помош на графикот на функцијата $y = 2^x$, нацртај го графикот на функцијата $y = 3 \cdot 2^x$ и $y = -2^x$.

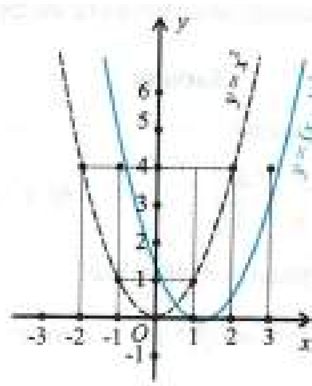
2 ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $y = a^{x-m} + n$

Потсети се!

Графикот на функцијата $y = x^2 + 2$ го цртаме така што графикот на функцијата $y = x^2$ го поместуваме по y – оска за 2 единици нагоре, црт.1.



црт. 1



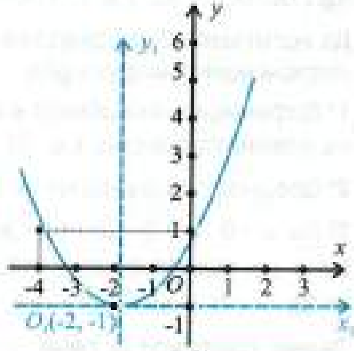
црт. 2

Графикот на функцијата $y = (x - 1)^2$ го цртаме така што графикот на функцијата $y = x^2$ го поместуваме по x – оската за 1 единица надесно, црт.2.

Графикот на функцијата $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ можеме да го нацртаме на два начина:

1° Со поместување на графикот на функцијата $y = ax^2$ по x – оската за вредноста на α, налево или надесно зависно од знакот на α, а потоа тој график го поместуваме за вредноста на β нагоре или надолу зависно од знакот на β.

2° Графикот на функцијата $y = ax^2$ го цртаме на помошен кординатниот систем $x_1O_1y_1$, (добиен со транслација на координатниот систем xOy) каде што $O_1(\alpha, \beta)$. На црт.3. претставен е графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$.



црт. 3

За да го нацртаме графикот на функцијата $y = a^{x-m} + n$ постапуваме на ист начин како при цртање на графикот на квадратна функција $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Ги одредуваме m и n, кои имаат исто значење како α и β на квадратна функција.

1 Нацртај го графикот на функцијата $y = 2^{x+3} - 2$ со:

а) транслација на графикот на функцијата $y = 2^x$;

б) транслација на координатниот систем.

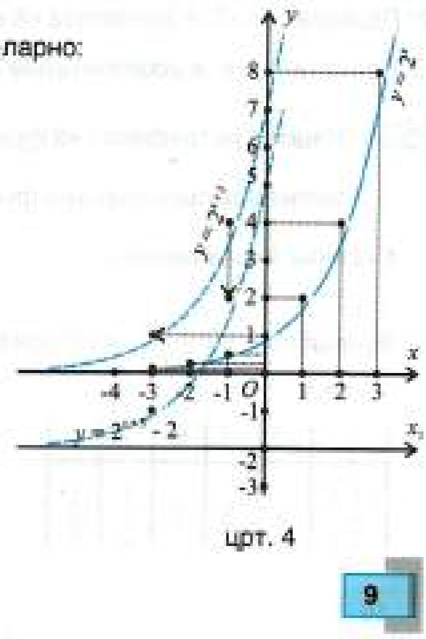
Согледај го решението:

Функцијата $y = 2^x$ ќе ја претставиме табеларно:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Воочи, споредувајќи ги функциите $y = a^{x-m} + n$ и $y = 2^{x+3} - 2$ имаме $m = -3$, а $n = -2$.

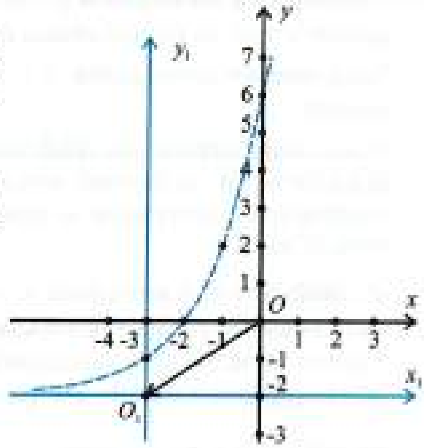
а) Значи, графикот $y = 2^x$ треба да го поместиме за 3 единици налево, а потоа добиениот график да го поместиме за 2 единици надолу, црт.4.



црт. 4

б) Го одредуваме координатниот почеток O_1 на помошниот координатен систем (го транслатираме координатниот систем xOy за векторот $\overrightarrow{OO_1}$).

На помошниот координатен систем $x_1O_1y_1$ го цртаме графикот на функцијата $y = 2^x$. (црт.5). $O_1(m, n)$, т.е. $O_1(-3, -2)$.



црт. 5

Да испитаме некои својства на дадената експоненцијална функција.

1° Дефиниционата област е множеството на реалните броеви, т.е. $D_f: x \in \mathbb{R}$.

2° Вредност на функцијата $V_f: y \in (-2, \infty)$.

3° За $x = 0$, $y = 2^3 - 2 = 6$, т.е. графикот ја сече y – оската во точката $(0, 6)$.

4° За $y = 0$ имаме $2^{x+3} - 2 = 0$, $2^{x+3} = 2$ или $x + 3 = 1$, $x = -2$.

Значи, графикот ја сече x – оската во точката $(-2, 0)$, т.е. $x = -2$ е нула на функцијата.

- Ако равенката $a^{x-m} + n = 0$ нема реални решенија, тогаш функцијата нема нула.

5° Знак на функцијата: $y > 0$ ако $2^{x+3} - 2 > 0$, $2^{x+3} > 2$ или $x + 3 > 1$ или $x > -2$, што се гледа и од графикот на функцијата, т.е. $y > 0$ за $x \in (-2, \infty)$.

$y < 0$ ако $2^{x+3} - 2 < 0$, $2^{x+3} < 2$ или $x + 3 < 1$ или $x < -2$, т.е. $y < 0$ за $x \in (-\infty, -2)$.

6° $a = 2 > 1$, значи функцијата монотоно расте на целата дефинициона област.

7° Правата $y = -2$ е асимптота на кривата.

- Правата $y = n$ е хоризонтална асимптота на функцијата $y = a^{x-m} + n$.

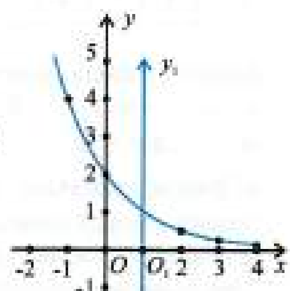
2 Нацртај го графикот на функцијата: а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; б) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+1$.

Испитај ги својствата на функциите.

Согледај го решението:

- Функцијата $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ ќе ја претставиме табеларно:

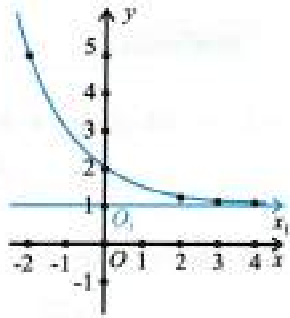
x	-2	-1	0	1	2
$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



црт. 6

а) $m = 1$, $n = 0$ па $O_1(1, 0)$. Значи, графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ е поместен за 1 единица надесно, (црт. 6).

б) $m = 0$, $n = 1$ па $O_1(0, 1)$. Значи, графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ треба да се помести за 1 нагоре, (црт. 7).



црт. 7

Согледај ги својствата на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

1° D_f; $x \in \mathbb{R}$.

2° V_f; $y \in (1, \infty)$.

3° За $x = 0$, $y = 2$, графикот ја сече y – оската во точката $(0, 2)$.

4° Функцијата монотоно опаѓа.

5° $y = 1$ е асимптота на функцијата.

Задачи

1 Користејќи ги својствата на експоненцијата функција спореди ги степените:

а) $(1,5)^{\frac{3}{4}}$ и $(1,5)^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ и $(0,5)^{\sqrt{3}}$; в) 7^{π} и $7^{\sqrt{3}}$;

2 Дадена е експоненцијалната функција $y = 2^x - 2$.

а) Пополни ја таблицата:

x	-3		-1	0		2	3
$2^x - 2$		-1,75			0		

б) Нацртај го графикот на функцијата.

в) За кои вредности на x е: 1. $y = 0$; 2. $y > 0$; 3. $y < 0$; 4. $-1 < y < 6$?

3 Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите:

а) $y = 3^x$, $y = 3^x - 1$; $y = 3^x + 2$;

б) $y = 2^x$, $y = 2^{x+1}$; $y = 2^{x-2}$.

Испитај ги својствата на функциите.

4 Нацртај го графикот на функциите и испитај го текот:

а) $y = 2^{x-1} + 2$; б) $y = 2^{2-x} - 1$.

3 ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- $2^x > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$.
- $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2$; $3^{x-2} = \dfrac{3^x}{3^2}$.
- $2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x$; $2^x = 3^x \Rightarrow x = 0$.
- $9^x = 3^{2x}$, $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$.
- Функцијата $y = f(x)$ е **инјективна** ако за секој $x_1, x_2 \in D_f$ и $x_1 \neq x_2$, следува $f(x_1) \neq f(x_2)$.

1 Одреди ги нулите на функцијата

$$y = 2^x - 16.$$

- $2^x - 16 = 0$; $2^x = 2^4$; $x = 4$.

Равенката во која непознатата е во експонентот на барем еден степен, чија основа е позитивен реален број различен од 1 се вика **експоненцијална равенка**.

2 Која од равенките е експоненцијална:

а) $\sqrt{3}^x + 1 = 2^x$; б) $x^{\sqrt{5}} - 1 = 2^{\sqrt{5}}$;
в) $4^x = 2^x - 3$?

Експоненцијалните равенки ќе ги решаваме во множеството на реалните броеви.

За решавање на експоненцијалните равенки не постои општ метод. Некои видови на експоненцијалните равенки со примена на идентични трансформации може да се доведат во одреден вид од каде што може да се одреди решението на равенката.

А Експоненцијални равенки кои можат да се доведат во следниот вид $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, $a > 1$ и $a \neq 1$, ќе ги решаваме врз основа на монотоност и инјективност на експоненцијалните функции, т.е. важи следнава еквиваленција:

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x).$$

3 Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $2^{x-3} = 16$; б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} = \dfrac{16}{81}$; в) $100 \cdot 10^{2x-2} = \sqrt[9]{1000^{x+1}}$; г) $9^{-3x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+5}$.

Согледај го решението:

а) $2^{x-3} = 16$;

$2^{x-3} = 2^4$;

$x - 3 = 4$;

$x = 7$;

в) $10^{2+2x-2} = \left(10^3\right)^{\frac{x+1}{9}}$;

$10^{2x} = 10^{\frac{x+1}{3}}$;

$2x = \dfrac{x+1}{3}$;

$x = \dfrac{1}{5}$;

г) $9^{-3x} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+5}$;

$3^{-6x} = 3^{-(x+5)}$;

$-6x = -x - 5$;

$x = 1$.

4 Реши ги експоненцијалните равенки:

а) $\frac{3^{x-1}}{3}=\frac{5^{x-1}}{5}$; б) $\frac{4^x}{4}=\frac{5^{2x-1}}{5}$; в) $2^{\frac{x+1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=1$; г) $4^x=2^{\frac{x+1}{x}}$.

Согледај го решението:

а) $\frac{3^{x-1}}{3}=\frac{5^{x-1}}{5}$;

$3^{x-1-1}=5^{x-1-1}$;

$x-2=0$;

$x=2$;

в) $2^{\frac{x+1}{x}}\cdot 2^{-(x+1)}=2^0$;

$\frac{x+1}{x}-x-1=0$;

$x+1-x^2-x=0$;

$x^2=1$; $x=1$ или $x=-1$;

Б **5** Реши ги експоненцијалните равенки.

а) $3^{x+2}-3^{x+1}+3^x=21$; б) $3^{x+2}-3^{x-2}=240$;

в) $2^{2x+2}-2^{2x+1}-2^{2x}=256$; ѓ) $2^x+2^{x-1}=3^x$; д) $5^x+5^{x-1}=6^x$;

Согледај го решението:

а) $3^x\cdot 3^2-3^x\cdot 3+3^x=21$;

$3^x(9-3+1)=21$;

$3^x=3$;

$x=1$;

ѓ) $2^x+\frac{2^x}{2}=3^x$;

$2^x\left(1+\frac{1}{2}\right)=3^x$;

$\frac{2^x}{3^x}=\frac{2}{3}$; $x=1$;

В **6** Реши ги експоненцијалните равенки што се сведуваат на квадратни:

а) $7^{2x}-8\cdot 7^x+7=0$; б) $9^x-3^x-6=0$; в) $3^{4x}-5\cdot 9^x-36=0$;

г) $3^{2x}+2\cdot 3^x-3=0$; д) $5^x-5^{3-x}=20$; ѓ) $3\sqrt[x]{81}-10\sqrt[x]{9}+3=0$.

Согледај го решението:

Равенките ќе ги решиме со воведување на смена, т.е. ќе ги сведеме на квадратни.

б) $(3^x)^2-3^x-6=0$. Со смена $3^x=y$ равенката е од видот: $y^2-y-6=0$;

$y_{1/2}=\frac{1\pm5}{2}$; $y_1=3$ или $y_2=-2$. За $y_1=3$ имаме $3^x=3$, па $x=1$.

За $y_2=-2$, равенката $3^x=-2$ нема решение. Зошто?

д) $5^x-\frac{5^3}{5^x}=20$. Со смена $5^x=y$ равенката го добива видот: $y-\frac{125}{y}=20$

или $y^2-20y-125=0$; $y_{1/2}=\frac{20\pm30}{2}$; $y_1=25$ или $y_2=-5$. За $y_1=25$ имаме $5^x=25$, па $x=2$. За $y_2=-5$, равенката $5^x=-5$ нема решение.

ѓ) Дадената равенка е еквивалентна со $3\left(\sqrt[x]{9}\right)^2 - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$. Со смена $\sqrt[x]{9} = y$, равенката е од видот: $3y^2 - 10y + 3 = 0$, чии решенија се $y_1 = 3$ или $y_2 = \frac{1}{3}$.

За $y = 3$ имаме $\sqrt[x]{9} = 3$ или $3^{\frac{2}{x}} = 3$, т.е. $x = 2$.

За $y = \frac{1}{3}$ имаме $\sqrt[x]{9} = \frac{1}{3}$ или $3^{\frac{2}{x}} = 3^{-1}$ т.е. $x = -2$.

Задачи

Реши ги експоненцијалните равенки:

1 а) $2^{x-1} = 1024$; б) $\left(\frac{5}{4}\right)^{0.2x} = \frac{64}{125}$; в) $\sqrt[x-3]{a^{x+1}} = \sqrt[x-2]{a^{x+2}}$.

2 а) $5^{x^2-3x+1} = \frac{1}{5}$; б) $3^{x^2-3x+3.5} = 27\sqrt{3}$.

3 а) $(2^{x+2})^{x+1} = 64$; б) $2^{x+2} \cdot 3^{x+2} = 36 \cdot 6^{2x-1}$.

4 а) $4^{x+1} + 4^x = 320$; б) $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$.

5 а) $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$; б) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

6 а) $4^x + 7 \cdot 2^x = 44$; б) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$.

7 а) $4^{x-1} = 2^{x+3} - 28$; б) $5 \cdot 2^{4x} - 3 \cdot 4^{x+1} = 32$.

8 а) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$; б) $5^x - 3 = \sqrt{9 - 5^x}$.

4 ПОИМ ЗА ЛОГАРИТАМ И ЛОГАРИТМИРАЊЕ

Потсети се!

- $2^5 = x \Rightarrow x = 32$.
  Вредноста на степенот се одредува со операцијата степенување.
- $x^5 = 32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{32}$.
  Основата на степенот се одредува со операцијата коренување.

А 1 Одреди го x од равенството:

а) $2^x = 32$; б) $2^x = 7$.

Согледај го одговорот:

а) $2^x = 2^5$ следува $x = 5$.

б) Не постои рационален број кој би бил решение на равенката.

Одредувањето на степеновиот показател од равенката $a^x = b$ во општ случај во множеството на рационалните броеви не е возможно.

Во претходните лекции рековме дека степенот, a^x, $a>0$ е еднозначно определен во множеството на реалните броеви.

Според тоа равенката:

$$a^x = b,\ a>0,\ a\neq 1 \text{ и } b>0$$

има единствено решение во множеството на реалните броеви.

Решението на равенката се вика **логаритам на бројот b за основа a**, а се означува $x=log_a b$.

Операцијата со која се одредува вредноста на логаритамот се вика **логаритмирање.**

За логаритамот на позитивен број важи следнава:

> **Дефиниција:** Логаритам на позитивен реален број b, за основа a ($a\neq 1$, $a>0$) е реален број x, со кој треба да се степенува основата a, за да се добие бројот b.

Од дефиницијата следува $log_a b = x$ ако и само ако $a^x = b$, т.е. равенствата $log_a b = x$ и $a^x = b$ се еквивалентни. Во едното равенство застапена е операцијата степенување, а во другото операцијата логаритмирање. Оттука следува точноста на равенството:

$$log_a(a^x) = x.$$

Во записот $log_a b$

a – се вика **основа** на логаритамот; b – се вика **логаритманд** или **нумерус**. Значи, логаритмирањето е инверзна операција на степенувањето.

2 Следниве равенства запиши ги во логаритамска форма:

а) $3^2=9$; б) $2^4=16$; в) $2^{-5}=\dfrac{1}{32}$; г) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}=\dfrac{3}{2}$.

Согледај го одговорот:

а) $log_3 9 = 2$; б) $log_2 16 = 4$; в) $log_2 \dfrac{1}{32} = -5$; г) $log_{\frac{2}{3}} \dfrac{3}{2} = -1$.

Од дефиницијата следува:

$$log_a b = x \overset{def}{\Leftrightarrow} a^x = b.$$

Бидејќи $a>0$ и $a\neq 1$ следува дека и $b>0$, што значи дека логаритам од 0 и кој било негативен број не постои во множеството на реални броеви.

Ако во равенката $a^x=b$, го замениме x со $log_a b$ ќе добиеме:

$$a^{log_a b} = b.$$

кој се вика **основен логаритамски идентитет**. Оттука следува дека **степенувањето е инверзна операција на логаритмирањето**.

Со примена на основниот логаритамски идентитет имаме:

$$2^{\log_2 3}=3;\quad 6^{\log_6 5}=5;\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}.$$

3 Пресметај: а) $4^{\log_2 3}$; б) $9^{\log_3 4}$; в) $2^{1+\log_2 5}$.

Согледај го решението:

Со примена на основниот логаритамски идентитет и правилата за степенување имаме:

а) $4^{\log_2 3}=2^{2\log_2 3}=\left(2^{\log_2 3}\right)^2=3^2=9$. в) $2^{1+\log_2 5}=2^1\cdot 2^{\log_2 5}=2\cdot 5=10$.

4 Провери ја точноста на равенствата:

а) $log_3 27=3$; б) $log_{10}0,01=-2$; в) $log_{64}8=\frac{1}{2}$; г) $log_8\frac{\sqrt{2}}{4}=-\frac{1}{2}$.

Согледај го решението:

Со примена на дефиницијата за логаритамот имаме:

а) $log_3 27=3 \Leftrightarrow 3^3=27$;

г) $\log_8\frac{\sqrt{2}}{4}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 8^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

5 Пресметај:

а) $log_{10}100$; б) $log_6 1$; в) $log_{\frac{1}{2}}64$; г) $log_a\frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}$.

Согледај го решението:

Од дефиницијата имаме:

а) $log_{10}100=x \Leftrightarrow 10^x=100,\ x=2$, т.е. $log_{10}100=2$;

б) $log_6 1=x \Leftrightarrow 6^x=1,\ x=0$, т.е. $log_6 1=0$;

г) $log_a\frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}=x \Leftrightarrow a^x=\frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}$; $a^x=a^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}},\ x=\frac{5}{6}$.

6 Одреди ја основата a, ако:

а) $log_a 25=2$; б) $log_a 64=3$; в) $log_a\sqrt{3}=-\frac{1}{4}$; г) $log_a\frac{1}{8}=-\frac{1}{3}$.

Согледај го решението:

Од дефиницијата имаме:

б) $log_a 64=3 \Leftrightarrow a^3=64,\ a^3=4^3,\ a=4$.

7 Одреди го x од равенството:

а) $log_5 x = 2$; б) $log_{2\sqrt{3}} x = 2$; в) $log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x = 2$.

8 Докажи ги идентитетите:

а) $log_a a = 1$; б) $log_a 1 = 0$; в) $log_a a^n = n$; г) $log_{a^m} a = \frac{1}{m}$; д) $log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$, $a > 0,\ a \neq 1$.

Согледај го доказот:

а) Нека $log_a a = x$, тогаш $a^x = a$, $x = 1$, т.е. $log_a a = 1$.

г) Нека $log_{a^m} a = x \Leftrightarrow (a^m)^x = a \Leftrightarrow a^{m \cdot x} = a \Leftrightarrow mx = 1$, $x = \frac{1}{m}$, т.е. $log_{a^m} a = \frac{1}{m}$.

Запомни!

Ако $a > 0,\ a \neq 1$, тогаш се точни равенствата:

1° $log_a a = 1$; **2°** $log_a 1 = 0$; **3°** $log_a a^n = n$; **4°** $log_{a^m} a = \frac{1}{m}$; **5°** $log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$, $a > 0,\ a \neq 1$.

9 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $log_2 128$; б) $log_{\sqrt{10}} 1000$; в) $log_{\sqrt{3}} 81$; г) $2log_2 8 + \frac{1}{2} log_3 81$.

Со примена на претходните равенства имаме:

а) $log_2 128 = log_2 2^7 = 7$; в) $log_{\sqrt{3}} 81 = log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^4 = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$;

г) $2log_2 8 + \frac{1}{2} log_3 81 = 2log_2 2^3 + \frac{1}{2} log_3 3^4 = 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 8$.

Задачи

1 Следниве равенства запиши ги во логаритмиска форма:

а) $6^2 = 36$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 64$; в) $7^0 = 1$; г) $\left(\sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{1}{2}$.

2 Пресметај ја вредноста на логаритамот:

а) $log_4 8$; б) $log_{\frac{1}{5}} 125$; в) $log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $log_{0.1} \sqrt[3]{100}$.

3 Одреди го x од равенката:

а) $\log_2 x = 6$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$; в) $\log_{3\sqrt{3}} x = -2$; г) $\log_{\sqrt{8}} x = -8$.

4 За која основа:

а) логаритам од 64 е 3; б) логаритам од 625 е 4;

в) логаритам од $\frac{1}{256}$ е 8; г) логаритам од $\frac{1}{128}$ е -7?

5 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $3\log_5 25 - 2\log_3 27 - \log_2 8$; б) $\log_3 81 \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \cdot \log_4 16$.

6 Пресметај: а) $\log_2(\log_2 256)$; б) $\log_4(\log_2 16) + \log_{\frac{1}{3}}(\log_3 27)$.

7 Пресметај: а) $2 \cdot 5^{\log_5 4} - 5 \cdot 3^{\log_3 2}$; б) $5^{2+\log_5 6}$; в) $3^{4-\log_3 27}$.

5 ГРАФИК НА ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Која операција е инверзна на операцијата степенување?
- Ако $2^3 = 8$, колку е $\log_2 8$?
- Ако $y = \log_2 x$, колку е x?
- x – оската е асимптота на функцијата $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
- Функцијата $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ е дефинирана за сите реални броеви, т.е. $D_f : x \in \mathbb{R}$.

А Во претходната лекција рековме дека $\log_a b$, $a > 1$, $a \neq 0$ има смисла за секој позитивен реален број b. Според тоа за секоја позитивна вредност на променливата x еднозначно е одреден реален број $\log_a x$.
На тој начин може да се дефинира едно пресликување $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Дефиниција: Функцијата $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ зададена со формулата $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ се вика **логаритамска функција** со основа a.

На пример логаритамски функции се $f(x) = \log_7 x$; $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

1 Кои од функциите се логаритамски:

а) $y = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x$; б) $y = \log_{0,1} x$; в) $y = x\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$?

Согледај го одговорот:

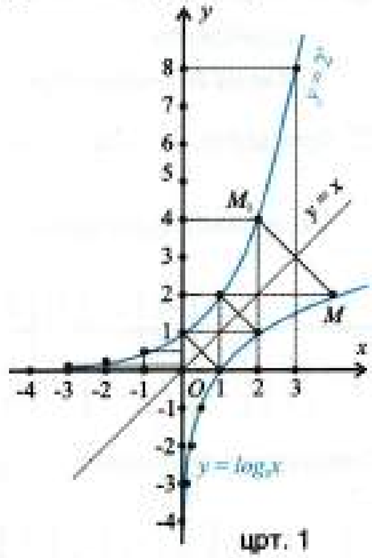
- Само функцијата $y = x\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$ не е логаритамска.

2 Нацртај го графикот на функцијата $y = log_2 x$. Испитај ги својствата на функцијата.

Согледај го решението:

- Функцијата ќе ја претставиме табеларно:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3



црт. 1

Графикот на функцијата е прикажан на црт.1. Рековме дека операциите степенување и логаритмирање се инверзни меѓу себе. Тоа значи на функцијата $y = log_2 x$ инверзна е функцијата $y = 2^x$.

- До инверзната функција доаѓаме врз основа на дефиницијата за логаритамот. Од $y = log_2 x$ следува $x = 2^y$. Со замена на местата на променливите x и y добиваме функција $y = 2^x$ која е инверзна на логаритамската функција.
- Инверзните функции го имаат својството ако точката $M(x_o, y_o)$ припаѓа на графикот на едната функција, тогаш точката $M_1(y_o, x_o)$ да припаѓа на графикот на другата, инверзна, функција.
- Графиците на инверзните функции се симетрични во однос на симетралата на I и III квадрант, т.е. во однос на правата $y = x$, црт. 1.

Б Некои својства на функцијата $y = log_2 x$.

- Од дефиницијата на логаритамската функција следува:

1° $D_f: x \in \mathbb{R}^+$, т.е. $x \in (0, \infty)$.

2° $V_f: y \in \mathbb{R}$, т.е. $y \in (-\infty, \infty)$.

3° За $x = 1$, $y = log_2 1 = 0$, графикот ја сече x – оската во точката $(1, 0)$, т.е. $x = 1$ е нула на логаритамската функција.

- Дали графикот ја сече y –оската? Зошто?

4° Знак на функцијата:

$y > 0$ за $x > 1$, т.е. $x \in (1, \infty)$.

$y < 0$ за $0 < x < 1$, т.е. $x \in (0, 1)$.

5° Функцијата $y = log_2 x$ монотоно расте.

6° y – оската е асимптота на кривата.

3 Нацртај график на функцијата $y = log_{\frac{1}{3}} x$. Испитај ги својствата на функцијата.

Согледај го решението:

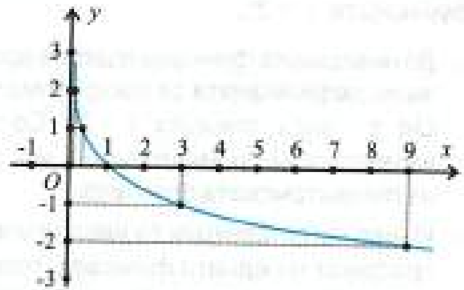
- Функциите $y = log_{\frac{1}{3}} x$ и $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ се инверзни. Во следната табела е претставена функцијата $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

x	-2	-1	0	1	2
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Ако точката $A(x_o, y_o)$ припаѓа на графикот на една функција, тогаш точката $A_1(y_o, x_o)$ припаѓа на графикот на инверзната функција.

Табелата на функцијата $y = log_{\frac{1}{3}} x$ е:

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	-2	-1	0	1	2



црт. 2

Графикот на функцијата $y = log_{\frac{1}{3}} x$ е претставен на црт. 2.

- Својствата на функцијата $y = log_{\frac{1}{3}} x$ се:

1° $D_f: x \in (0, \infty)$. 2° $V_f: y \in (-\infty, \infty)$.

3° $x = 1$ е нула на функцијата, т.е. за $x = 1$, тогаш $y = 0$.

4° $y > 0$ за $x \in (0, 1)$; $y < 0$ за $x \in (1, \infty)$.

5° Функцијата монотоно опаѓа.

6° y – оската е асимптотата на графикот на функцијата.

Воочи!

- Графикот на функциите $y=log_a x$ и $y = log_{\frac{1}{a}} x$ се симетрични во однос на x – оската, т.е. ако точката $M(x_o, y_o)$ припаѓа на функцијата $y = log_a x$, тогаш точката $M_1(x_o, -y_o)$ припаѓа на графикот на функцијата $y = log_{\frac{1}{a}} x$.

В Некои својства на логаритамската функција $y = log_a x$ се:

1° $D_f: x \in \mathbb{R}^+$; 2° $V_f: y \in \mathbb{R}$;

3° $x = 1$ е нула на функцијата, т.е. графикот ја сече x –оската во точката $(1, 0)$.

4° знак на функција:

за $a > 1$, $y > 0$ за $x \in (1, \infty)$

$y < 0$ за $x \in (0, 1)$

за $0 < a < 1$, $y > 0$ за $x \in (0, 1)$

$y < 0$ за $x \in (1, \infty)$.

5° За $a > 1$ функцијата монотоно расте. За $0 < a < 1$ функцијата монотоно опаѓа.

- Ако логаритмите на два броја при иста основа се еднакви, тогаш и самите броеви се еднакви, т.е.

$$log_a x_1 = log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1.$$

- Логаритамската функција нема екстремни вредности, бидејќи на целиот интервал функцијата или расте или опаѓа.

5° y – оската е асимптота на функцијата.

4 Одреди ја дефиниционата област на функциите:

а) $y = log_2(2x - 3)$; б) $y = log_4(3x - x^2)$; в) $y = log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4)$.

Согледај го решението:

- а) $2x - 3 > 0$, $x > \frac{3}{2}$ т.е. $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. б) $3x - x^2 > 0$, $x(3 - x) > 0$; $x \in (0, 3)$.

5 Кој број е поголем:

а) $\log_3 5$ или $log_3 7$; б) $log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$ или $log_{\frac{1}{2}} \pi$?

Согледај го решението:

- а) функцијата $y = log_3 x$, монотоно расте, па од $x_1 < x_2$ следува $log_3 x_1 < log_3 x_2$. Бидејќи $5 < 7$, следува $log_3 5 < log_3 7$.

6 Одреди меѓу кои цели броеви се наоѓа: а) $log_{\frac{1}{2}} 15$; б) $log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{5}$; в) $log_5 35$.

Согледај го решението:

- а) Бидејќи $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$, од $log_{\frac{1}{2}} 16 < log_{\frac{1}{2}} 8$, значи $-4 < log_{\frac{1}{2}} 15 < -3$.

в) Бидејќи $5^0 = 1$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, значи $log_5 25 < log_5 125$, т.е. $2 < log_5 35 < 3$.

Задачи

1 Нацртај го графикот на функцијата:

а) $y = log_{\frac{1}{2}} x$; б) $y = log_5 x$; в) $y = log_{10} x$.

Испитај го текот на функцијата.

2 Одреди ја дефиниционата област на функциите:

а) $y = log_2(-x)$; б) $y = log_2(1 - x)$; в) $y = log_3(x^2 - 4)$; г) $y = log_3(x^2 - 3x - 4)$.

3 Кои од функциите се растечки:

а) $y = log_{0,1} x$; б) $y = log_4 x$; в) $y = log_{\sqrt{5}} x$.

4 Користејќи ги својствата на логаритамската функција, одреди кој број е поголем:

а) $log_2 3$ или $log_2 \sqrt{2}$; б) $log_3 \frac{1}{5}$ или $log_3 0,5$;

в) $log_2 \sqrt{3}$ или $log_2 \pi$; г) $log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{9}$ или $log_{\frac{1}{5}} \frac{3}{13}$.

5 Одреди кој од броевите a или b е поголем, ако:

а) $log_3 a > log_3 b$; б) $log_{\frac{1}{3}} a > log_{\frac{1}{3}} b$; в) $log_{\sqrt{2}} a > log_{\sqrt{2}} b$; г) $log_{0,2} a < log_{0,2} b$.

6 За кои вредности на a се точни неравенствата

а) $log_a 7 < log_a 3$; б) $log_a 2,5 > log_a 1,5$; в) $log_a \frac{1}{2} > log_a \frac{1}{3}$.

7 Одреди меѓу кои цели броеви се логаритмите:

а) $log_2 3$; б) $log_2 9$; в) $log_{\frac{1}{2}} 7$; г) $log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3}$.

6 ПРАВИЛА ЗА ЛОГАРИТМИРАЊЕ

Операцијата логаритмирање има некои својства што ги нема ниту една друга операција. Тие својства се однесуваат на логаритмирање на алгебарските изрази.

Логаритмирањето на изразите го вршиме според следните правила (теореми):

Теорема: Логаритамот на производ од два позитивни броја со основа a е еднаков на збирот од нивните логаритми при истата основа, т.е.

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N, \text{ за } a > 0, \ a \neq 1 \text{ и } M, N > 0$$

Доказот ќе го изведеме на два начини:
Прв начин: Според основниот логаритамски идентитет имаме

$M = a^{\log_a M}$ и $N = a^{\log_a N}$.

Оттука следува: $M \cdot N = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N} = a^{\log_a M + \log_a N}$.

Според дефиницијата за логаритам имаме:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Втор начин: Нека $m = \log_a M$ и $n = \log_a N$. Оттука следува:

$$M = a^m, \text{ а } N = a^n, \text{ па}$$

$$M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ т.е. } \log_a(M \cdot N) = m + n = \log_a M + \log_a N.$$

Оваа теорема важи и за повеќе од два множители, т.е.

$$\log_a(M \cdot N \cdot P \cdot Q) = \log_a M + \log_a N + \log_a P + \log_a Q.$$

Овие теореми важат при која било основа па често пати нема да ја запишуваме.

Теорема: Логаритамот на количникот од два позитивни броја со основа a е еднаков на разликата од логаритмите на деленикот и делителот, т.е.

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N, \quad a > 0, \ a \neq 1 \text{ и } M, N > 0$$

Доказ: Нека $M = a^{\log_a M}$ и $N = a^{\log_a N}$.

Со делење на соодветните страни на равенствата имаме:

$$\frac{M}{N} = \frac{a^{\log_a M}}{a^{\log_a N}} = a^{\log_a M - \log_a N}.$$

Според дефиницијата на логаритамот имаме $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

1 Логаритмирај ги изразите: а) $x = 2ab$, б) $x = \frac{2a}{b}$, в) $x = \frac{4abc}{3pq}$.

Согледај го решението:

в) $\log x = \log 4abc - \log 3pq = \log 4 + \log a + \log b + \log c - (\log 3 + \log p + \log q)$.

Теорема: Логаритамот на степен на позитивен број е еднаков на производот од показателот на степенот и логаритамот на неговата основа, т.е.

$$\log_a M^n = n \cdot \log_a M, \quad a > 0, \ a \neq 1, \ M > 0, \ n \in \mathbb{R}.$$

Доказ: Ако $M > 0$, тогаш $M = a^{\log_a M}$. Со степенување на равенството со n, добиваме $M^n = \left(a^{\log_a M}\right)^n = a^{n \log_a M}$, т.е. $\log_a M^n = n \cdot \log_a M$.

Последица: $\log_a \sqrt[m]{M^n} = \log_a M^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} \log_a M$.

2 Логаритмирај ги изразите:

а) $x = 3a^3b$, б) $x = \sqrt[3]{a^2b}$, в) $x = \dfrac{2a\sqrt[3]{3ab}}{3b^2c}$; г) $x = \sqrt{\dfrac{2ab^2}{3xy^3}}$;

Согледај го решението:

в) $\log x = \log 2a\sqrt[3]{3ab} - \log 3b^2c =$

$$= \log 2 + \log a + \frac{1}{3}(\log 3 + \log a + \log b) - \log 3 - 2\log b - \log c =$$

$$= \log 2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)\log 3 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)\log a + \left(\frac{1}{3} - 2\right)\log b - \log c =$$

$$= \log 2 - \frac{2}{3}\log 3 + \frac{4}{3}\log a - \frac{5}{3}\log b - \log c.$$

Б **3** Одреди го x од равенството $\log_a x = 3\log_a 2 - \log_a 4$.

Согледај го решението:

$\log_a x = \log_a 2^3 - \log_a 4$ или $\log_a x = \log_a \dfrac{8}{4}$, т.е. $\log_a x = \log_a 2$.

Користејќи го својството $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, следува $x = 2$.
За решавање на задачи од типот на претходната, користи ги правилата (формулите):

$$\log_a M + \log_a N = \log_a MN; \quad \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

$$n\log_a M = \log_a M^n, \quad \frac{m}{n}\log_a M = \log_a \sqrt[n]{M^m}.$$

Определување на изразот ако е даден неговиот логаритам се вика **антилогаритмирање**.

4 Одреди го x од равенствата:

а) $\log x = 2\log b + 3\log a$; б) $\log x = 2\log a - 5\log b - 3\log c$;

в) $\log x = \dfrac{3}{2}\log b - \dfrac{2\log a}{3}$;

г) $\log x = \log a + \dfrac{1}{2}\left[\log(a+b) - \dfrac{1}{3}\log(a-b) + 2\log c\right]$.

Согледај го решението:

г) $\log x = \log a + \dfrac{1}{2}\left[\log(a+b) - \dfrac{1}{3}\log(a-b) + 2\log c\right]$;

$$logx = loga + \frac{1}{2}log\frac{(a+b)c^2}{\sqrt[3]{a-b}}; \quad logx = loga + log\sqrt{\frac{(a+b)c^2}{\sqrt[3]{a-b}}};$$

$$logx = loga\sqrt{\frac{(a+b)c^2}{\sqrt[3]{a-b}}} \quad \text{или} \quad x = ac\sqrt{\frac{a+b}{\sqrt[3]{a-b}}}.$$

Задачи

1 Ако се знае дека $log_{10}3 = 0{,}47712$, а $log_{10}2 = 0{,}30103$, пресметај:

а) $log_{10}6$; б) $log_{10}12$; в) $log_{10}648$.

Логаритмирај ги следниве изрази:

2 а) $x = 5a^2b^3$; б) $x = \frac{8a^2b^3}{5c}$; в) $x = \frac{a^2+2}{b-3}$.

3 а) $x = a\sqrt{a}$; б) $x = \frac{a^2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b^2}}$; в) $x = \frac{8a^4\sqrt{b}}{b^2\sqrt[3]{a}}$.

4 а) $x = 2(a+b)^3$; б) $x = 8a^3(a-b)^2$; в) $x = \frac{2(a+1)^2}{a^2-4}$.

5 а) $x = a\sqrt{a\sqrt{a}}$; б) $x = \frac{2a^2b\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$.

6 а) $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; б) $x = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{5(a-b)^2}}$.

Одреди го x ако неговиот логаритам е:

7 $logx = 2logm + 4logn - 3loga - 5logb$.

8 $logx = log5 + 2log4 - log8 - 3logn - 2logm$.

9 $logx = \frac{2}{3}log(a-2b) - \frac{1}{3}log(a+2b)$.

10 $logx = 2log(a+b) - \frac{2}{3}log(a-b) + 2loga$.

11 Пресметај:

а) $log_6 4 + log_6 9$; б) $log_{12}4 + log_{12}36$;

в) $log_{10}500 - log_{10}5$; г) $log_5\frac{1}{4} - log_5 0{,}01$.

7 ВРСКА МЕЃУ ЛОГАРИТМИТЕ ПРИ РАЗЛИЧНИ ОСНОВИ

Потсети се!

- $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$, $a \neq 1$ и $a > 0$.
- Кој број е поголем:

  а) $log_7 13$ или $log_7 15$;

  б) $log_8 100$ или $log_2 5$?

А 1. Одреди број кој помножен со $log_3 x$ е еднаков на $log_5 x$.

Согледај го одговорот:

- Од основниот логаритамски идентитет имаме $3^{log_3 x} = x$.
Со логаритмирање на изразот со основа 5 ќе добиеме:

$$log_5 (3^{log_3 x}) = log_5 x.$$

Со примена на правилото за логаритам на степен имаме $log_3 x \cdot log_5 3 = log_5 x$.
Значи, бараниот број е $log_5 3$.
Одредувањето на бараниот множител ни го овозможува следнава

Теорема: $log_a x = \dfrac{log_c x}{log_c a}$ за $\begin{cases} a > 0 \wedge a \neq 1 \\ c > 0 \wedge c \neq 1 \wedge x > 0. \end{cases}$

Теоремата претставува формула за премин на логаритамот со една основа во логаритам со друга основа.

Доказ: Ако основниот логаритамски идентитет $a^{\log_a x} = x$, го логаритмираме при основа c имаме $log_c(a^{log_a x}) = log_c x$, т.е.

$$log_a x \cdot log_c a = log_c x \text{ или } log_a x = \frac{log_c x}{log_c a}$$

Воочи!

$log_a x = \dfrac{1}{log_c a} \cdot log_c x = m \cdot log_c x$, каде што $m = \dfrac{1}{log_c a}$ е константа, не зависи од x.

2. Пресметај, без калкулатор

а) $log_2 3 \cdot log_3 4$; б) $log_5 3 \cdot log_3 25$; в) $log_3 8 \cdot log_4 81$; г) $\dfrac{log_2 7}{log_4 7}$.

Согледај го решението:

- Со примена на претходната теорема, премин на друга основа, во овој случај нека $c = 5$, имаме:

а) $log_2 3 \cdot log_3 4 = \dfrac{log_5 3}{log_5 2} \cdot \dfrac{log_5 4}{log_5 3} = \dfrac{log_5 2^2}{log_5 2} = \dfrac{2 log_5 2}{log_5 2} = 2.$

3 Докажи ги идентитетите:

а) $log_c x = \dfrac{1}{log_x c}$; $c, x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$;   б) $log_{a^n} x = \dfrac{1}{n} log_a x$;   в) $log_{a^n} x^n = log_a x$.

Сотледај то решението:

а) $log_c x = \dfrac{log_x x}{log_x c} = \dfrac{1}{log_x c}$;   б) $log_{a^n} x = \dfrac{1}{log_x a^n} = \dfrac{1}{n} log_a x$;

в) $log_{a^n} x^n = \dfrac{log_a x^n}{log_a a^n} = \dfrac{n\,log_a x}{n\,log_a a} = log_a x$;

4 Докажи дека вредноста на дропките: а) $\dfrac{log_x 2}{log_x 3}$; б) $\dfrac{log_2 x}{log_3 x}$; в) $\dfrac{log_5 x}{log_4 x}$

не зависи од x $(x > 0,\ x \neq 1)$.

Сотледај то решението:

а) $\dfrac{log_x 2}{log_x 3} = \dfrac{\dfrac{log_3 2}{log_3 x}}{\dfrac{log_3 3}{log_3 x}} = log_3 2$. До исто тврдење ќе дојдеш ако основата на премин е која било позитивен број.

5 Пресметај:

а) $log_2 \sqrt[3]{a}$, ако $log_a 8 = b$;   б) $log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$, ако $log_a 9 = b$;

в) $log_{96} 120$, ако $log_5 2 = a$ и $log_5 3 = b$;

г) $log_{30} 8$, ако $log_{10} 2 = a$ и $log_{10} 3 = b$;

Сотледај то решението:

б) $log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \dfrac{1}{6} \cdot 2 \cdot log_3 a = \dfrac{1}{3}\ log_{3^2} a^2 = \dfrac{2}{3} log_9 a = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{log_a 9} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{3b}$.

г) $log_{30} 8 = \dfrac{log_{10} 8}{log_{10} 30} = \dfrac{log_{10} 8}{log_{10} 10 \cdot 3} = \dfrac{log_{10} 2^3}{log_{10} 10 + log_{10} 3} = \dfrac{3 log_{10} 2}{1+b} = \dfrac{3a}{1+b}$.

Б Воочи во досегашниото разгледување дека основата на логаритамот може да биде која било позитивен реален број.

Дефиниција: Множеството на логаритмите на сите позитивни реални броеви при една иста основа a $(a > 0,\ a \neq 1)$ се вика **логаритамски систем при основа** a.

Во математиката најчесто се употребуваат два логаритамски системи:

1° **Декаден** (Бригсов) логаритамски систем, кој го сочинуваат логаритмите на сите позитивни броеви со основа 10 (десет), го означуваме $log_{10}x = lgx$.

2° **Природен** (Неперов) логаритамски систем чија основа е ирационалниот број $e = 2{,}71828...$ се означува $log_e x = lnx$.

Во елементарната математика се користи декадниот, додека во вишата математика Неперовиот логаритамски систем.

6 Одреди ја врската меѓу декадниот и природниот логаритам за ист позитивен број x.

Согледај го решението:

Во формулата $log_a x = \dfrac{1}{log_c a} \cdot log_c x$, заменуваме $a = e$, $c = 10$ па добиваме

$lnx = \dfrac{1}{lg\,e} \cdot lgx$, т.е. $lgx = lge \cdot lnx$.

Задачи

1 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $log_2 3 \cdot log_9 16$; б) $log_2 \sqrt{5} \cdot log_{25} \sqrt[3]{2}$; в) $lg56$, ако $lg2 = a$, а $lg7 = b$.

2 Пресметај:

а) $log_3 8 \cdot log_4 81$; б) $\dfrac{log_3 \sqrt{5}}{log_{27} \sqrt{5}}$; в) $log_{35} 28$, ако $log_{14} 7 = a$, $log_{14} 5 = b$.

3 Докажи го равенството

а) $log_3 2 \cdot log_4 3 \cdot log_3 4 \cdot log_4 5 \cdot log_5 6 \cdot log_6 7 \cdot log_7 8 \cdot log_8 9 = 1$;

б) $log_3 12 = 1 + log_5 4 \cdot log_6 5 \cdot log_3 6$.

4 Докажи ги неравенствата:

а) $log_2 3 + log_3 2 > 2$; б) $log_{\frac{1}{2}} 3 + log_3 \dfrac{1}{2} < -2$; в) $log_2 3 > log_3 4$.

5 Докажи дека:

а) $log_a b + log_{\frac{1}{a}} b = 0$; б) $3log_b a + 2\,log_b \dfrac{1}{a} = log_b a$;

в) $log_b a - log_b \dfrac{1}{a} - log_b a^2 = 0$; г) $log_{b+c} a + log_{c-b} a = 2log_{b+c} a \cdot log_{c-b} a$.

8 ДЕКАДЕН ЛОГАРИТАМ

А Множеството на логаритмите од сите позитивни реални броеви со основа 10 се вика декаден или Бригсов логаритамски систем, по англискиот математичар Бригс (Briggs). Во овој систем пресметани се логаритмите од сите позитивни реални броеви со основа 10.

1 Одреди го декадниот логаритам од броевите:

а) $1; 10; 100; 1000; 10000;$ б) $0,1; 0,01; 0,001;$ в) $\sqrt[3]{100}$; $\sqrt[5]{1000}$.

Согледај го решението:

- Во декадниот логаритамски систем основата не се запишува, т.е. наместо $log_{10}a$ ќе пишуваме lga.
- Од својството $log_a a = 1$, имаме $lg10 = 1$, а

а) $lg1 = 0$; $lg10 = 1$; $lg100 = lg10^2 = 2$; $lg1000 = lg10^3 = 3$; $lg10000 = lg10^4 = 4$.

б) $lg0,1 = lg10^{-1} = -1$; $lg0,01 = lg10^{-2} = -2$; $lg0,001 = lg10^{-3} = -3$.

в) $lg\sqrt{10} = lg10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; $lg\sqrt[3]{100} = lg10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$; $lg\sqrt[5]{1000} = lg10^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$.

Запомни!

Ако $x = 10^k$, тогаш $lgx = lg10^k = k$, каде што k е рационален број.

Теорема: Ако бројот x не може да се изрази во вид 10^k, k рационален број тогаш логаритамот од бројот x е ирационален број.

Доказ: Да претпоставиме дека логаритамот од бројот x е рационалниот број $\frac{p}{q}$, т.е. $lgx = \frac{p}{q}$.

- Според дефиницијата за логаритамот имаме:

$$10^{\frac{p}{q}} = x, \text{ т.е. } 10^p = x^q.$$

Според тврдењето x не може да се запише во вид 10^k, па оттука следува дека и x^q не може да се запише како 10^p. Значи lgx не е рационален број, туку ирационален број.

Теорема: Ако бројот x е меѓу два последователни декадни единици, тогаш lgx е меѓу два последователни природни броеви, т.е. ако $10^n < x < 10^{n+1}$, тогаш $n < lgx < n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказ: Ако $10^n < x < 10^{n+1}$, бидејќи функцијата $y = lgx$ е растечка на целата дефинициона област, тогаш $lg10^n < lgx < lg10^{n+1}$, т.е. $n < lgx < n + 1$.

Оттука следува дека $lgx = n + m$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in [0, 1]$, т.е. логаритам од кој и да било позитивен реален број x е збир од еден цел број n кој се вика **карактеристика** и еден децимален број m, $m \in [0, 1]$ кој се вика **мантиса**.

2 Одреди ја карактеристиката на декадниот логаритам на броевите:

а) $73{,}45$; б) $734{,}5$; в) 7345.

Соīледај īо одīоворот:

а) Од $10 < 73{,}45 < 100$ следува $lg10 < lg73{,}45 < lg100$, т.е. $1 < lg73{,}45 < 2$, па $lg73{,}45 = 1 + m$, $m \in [0, 1)$.

б) $100 < 734{,}5 < 1000$; $lg100 < lg734{,}5 < lg1000$; $2 < lg734{,}5 < 3$, т.е. $lg734{,}5 = 2 + m = 2{,}m$.

в) $lg7345 = 3 + m = 3{,}m$, $m \in [0, 1]$.

3 Одреди ја карактеристиката на декадниот логаритам на броевите:

а) $0{,}75$; б) $0{,}075$; в) $0{,}0075$.

Соīледај īо одīоворот:

а) Бројот $0{,}75$ е поголем од $0{,}1$, а помал од 1, т.е. $0{,}1 < 0{,}75 < 1$, па $lg10^{-1} < lg0{,}75 < lg10^{0}$, т.е. $-1 < lg0{,}75 < 0$, следува $lg0{,}75 = -1 + m$; $m \in [0, 1)$.

б) $0{,}01 < 0{,}075 < 0{,}1$; $lg0{,}01 < lg0{,}075 < lg0{,}1$; $-2 < lg0{,}075 < -1$; $lg0{,}075 = -2 + m$; $m \in [0, 1)$.

Зайомни!

Ако бројот $x > 1$, тогаш карактеристиката на неговиот декаден логаритам е за 1 помала од бројот на цифрите на неговиот цел дел.

Карактеристиката на логаритамот на бројот x, $0 < x < 1$ е негативен број чија апсолутна вредност е еднаква на бројот на нулите, во децималниот запис на бројот, пред првата цифра што не е нула.

Воочи!

Ако бројот се помножи или подели со декадна единица, се менува само карактеристиката на неговиот декаден логаритам, мантисата останува неизменета, т.е. $lgA \cdot 10^{k} = lgA + lg10^{k} = lgA + k = n + m + k = (n + k) + m$, $m \in [0, 1)$.

Б Според теоремата декаден логаритам од кој и да било позитивен реален број е ирационален број. Карактеристиката на декадниот логаритам е цел број, значи мантисата на декадниот логаритам е ирационален број, т.е. бесконечен непериодичен децимален број.

Од тие причини за мантиса се зема приближен број заокружен на 5 децимали.

Во практика се користи мантиса со 4, 6, 7 па и повеќе децимали што зависи од тоа колкава точност ни е потребна.

Мантисата не зависи од положбата на запирката во бројот, па за нејзиното определување на кој било број доволно е да се знаат мантисите на логаритмите од природните броеви.

За одредување на мантисата се користат логаритамски таблици. Во нив се пресметани мантисите на логаритмите на природните броеви од 1 до 10000.

Првите логаритамски таблици ги составил самиот Бригс во 1600 год.

B При одредување на декаден логаритам на кој било број ќе користиме калкулатор на кој има опција log, на следниов начин:

– го внесуваме дадениот број;

– со притискање на тастерот log, на дисплејот се појавува декаден логаритам на дадениот број.

На пример $lg43{,}25 = 1{,}635986112$, $lg432{,}5 = 2{,}635986112$.

Воочи!

Карактеристиката на првиот број е 1, а мантисата $m = 0{,}63598$. На вториот број карактеристиката е 2, а мантисата е еднаква на мантисата на првиот број. Зошто?

Понатаму мантисата ќе ја заокружуваме на 5 децимали.

Ако основата на логаритамот $a > 1$, тогаш $lgx < 0$ за $x \in (0, 1)$. Оттука следува за $0 < x < 1$; $lgx < 0$, па $lg0{,}738 = -0{,}13194$; $lg0{,}006785 = -2{,}16845$.

Од $lg0{,}738 = -0{,}13194$ веднаш не може да се одреди карактеристиката и мантисата, бидејќи калкулаторот го дава крајниот резултат, т.е. пресметана вредност од негативната карактеристика и позитивната мантиса.

Според тоа, карактеристиката и мантисата на бројот $lg0{,}738$ ќе ја одредиме на следниов начин: $-0{,}13194 = -0{,}13194 + 1 - 1 = -1 + 0{,}86806$, а за бројот $lg0{,}006785$ имаме: $-2{,}16845 = -2{,}16845 + 3 - 3 = -3 + 0{,}83155$ карактеристиката е -3, а мантисата $m = 0{,}83155$.

Одредувањето на логаритмандот (нумерусот) ако е даден неговиот логаритам се вика **антилогаритам**.

4 Одреди го x ако е дадено: а) $lgx = 2{,}34567$; б) $lgx = -1{,}34567$.

Согледај го одговорот:

а) Го внесуваме бројот 2,34567; го притискаме тастерот 2nd, инверзна операција, а потоа тастерот log. На дисплејот е бројот 221,6511557, значи бараниот број $x = 221{,}65$ (заокружен на две децимали).

б) $x = 0{,}045115938 \approx 0{,}045$.

Примената на логаритмите се состои во пресметувањето на вредноста на бројните изрази. Откривањето на логаритмите на почетокот на XVII век овозможува упростување на нумеричките пресметувања на изразите во кои се застапени операциите множење, делење, степенување и коренување.

5 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $x = \dfrac{\sqrt[3]{785} \cdot 4,32}{(0,78)^5}$; б) $x = \dfrac{(2,35)^4 \cdot 0,7856}{\sqrt[3]{(43,25)^2}}$.

Согледај го решението:

- Го одредуваме декадниот логаритам на изразот, т.е.

$lgx = lg\sqrt[3]{785} + lg4,32 - lg(0,78)^5$; $lgx = \dfrac{1}{3}lg785 + lg4,32 - 5lg0,78$;

$lgx = \dfrac{1}{3} \cdot 2,89487 + 0,63548 - 5 \cdot (-0,12494)$; $lgx = 0,96495 + 0,63548 + 0,6247$;
$lgx = 2,22513$; $x = 167,93$.

- Со калкулаторот ќе ја добиеме следнава вредност на изразот:

$$x = \frac{9,22479 \cdot 4,32}{0,237304} = \frac{39,851098}{0,237304} = 167,93$$

При одредувањето на $\sqrt[3]{785}$

$\boxed{785} \rightarrow \boxed{2nd} \rightarrow \boxed{\sqrt[x]{y}} \rightarrow \boxed{3} = 9,22479.$

Задачи

1 Одреди: а) $lg\sqrt[3]{0,00567}$; б) $lg(2,345)^5$; в) $lg\sqrt[7]{(8,786)^5}$.

2 Одреди го x, ако:
а) $lgx = 0,75642$; б) $lgx = 3 + 0,25643$;
в) $lgx = -3 + 0,25645$; г) $lgx = -1,35423$.

3 Одреди ја карактеристиката и мантисата на декадниот логаритам на бројот x, ако:
а) $lgx = 2,35426$; б) $lgx = 0,47856$; в) $lgx = -0,12345$; г) $lgx = -1,45678$.

4 Реши ги равенките: а) $10^x = 172$; б) $10^x = 0,524$; в) $2^x = 3$; г) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 5$.

5 Одреди го x, ако: а) $x = \dfrac{1}{2}log0,5$; б) $x = \dfrac{3}{4}lg7 - \dfrac{2}{5}lg0,7$.

6 Со помош на декаден логаритам одреди колку цифрен е бројот:
а) 2^{30}; б) 3^{1000}; в) $2^{20} \cdot 3^{30} \cdot 6^{60}$.

7. Приближната вредност на основата e на природниот (Неперов) логаритамски систем се одредува со формулата

$$e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Одреди го e ако $n \in \{5, 7, 10, 100\}$.

8. Со помош на декаден логаритам одреди ја вредноста на изразот:

а) $x=\sqrt{\dfrac{(34{,}52)^3\cdot 0{,}73}{(0{,}25)^3}}$; б) $x = 0{,}0009^{0{,}0009}$; в) $x = 3{,}42^{3{,}42}$; г) $x=\sqrt[10]{10}$.

9 ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Кои равенки ги дефинираме како експоненцијални?
- Одреди го x од равенството $lg_3x = 2$.
- Ако M и N се позитивни броеви, тогаш за нив важат следниве формули:

$$log_aM + log_aN = log_aM \cdot N$$

$$log_aM - log_aN = log_a\frac{M}{N}$$

$$nlog_aM = log_aM^n$$

$$\frac{m}{n}log_aM = log_a\sqrt[n]{M^m}$$

$a > 0,\ a \neq 1;\ m, n \in \mathbb{N}.$

А Равенки во кои непознатата се наоѓа во логаритмандот или во основата на барем еден логаритам се викаат **логаритамски равенки**.

Такви равенки се:

$$lg(x^2+1)=2;\quad lg_x9=\frac{1}{2};$$

$$lg_{\frac{1}{2}}(x-3)=1;\quad lg_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+3)=1.$$

1 Кои од следниве равенки се логаритамски:

а) $lg(x+2) - lg(x-1) = lg3$;

б) $log_{\frac{1}{5}}5 = x$;

в) $log_2x = 3$;

г) $x^2 - (1 + lg7)\cdot x = lg7$;

д) $x^{3-lgx} = 100$?

Согледај го одговорот:

- Логаритамски равенки се а), в) и д).

  Логаритамските равенки исто како и експоненцијалните ќе ги решаваме во множеството на реалните броеви. За решавањето на логаритамските равенки не постои општ метод, па затоа ќе решаваме само некои видови логаритамски равенки.

- При решавање на логаритамските равенки ќе ги користиме правилата за логаритмирањето и својствата на логаритамската функција.

Запомни!

Решение на логаритамската равенка е реалниот број за којшто равенката преминува во точно бројно равенство, при што логаритмандот и основата на логаритамот за тој број се позитивни броеви.

Б 2 Реши ги равенките:

а) $log_2(x - 3) = 3$; б) $log_3(x^2 - 2x + 6) = 2$; в) $log_{x-2}(2x - 1) = 2$.

Согледај го решението:

- Равенките од видот $log_a(f(x)) = b,\ a > 0, a \neq 1$, се решаваат со примена на дефиницијата за логаритам.

а) $log_2(x - 3) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x - 3;\ x = 11.$

За $x = 11$ логаритмандот $x - 3 = 11 - 3 = 8 > 0$, значи $x = 11$ е решение на равенката.

в) Решението на равенката треба да го задоволува ограничувањето:

$$x - 2 > 0,\ x - 2 \neq 1,\ 2x - 1 > 0 \text{ т.е. } x > 2 \text{ и } x \neq 3.$$

- Со примена на дефиницијата за логаритамот имаме:

$$2x - 1 = (x - 2)^2;\ x^2 - 4x + 4 - 2x + 1 = 0;\ x^2 - 6x + 5 = 0$$

Решенијата на оваа равенка се $x_1 = 5$ или $x_2 = 1$, од кои само $x = 5$ го задоволува ограничувањето. Значи $x = 5$ е решение на дадената равенка.

Воопшто равенката од видот $log_{g(x)}(f(x)) = h(x)$ е еквивалентна со конјункцијата

$$f(x) = (g(x))^{h(x)} \wedge \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$$

Често пати решавањето на системот неравенки $f(x) > 0,\ g(x) > 0$ и $g(x) \neq 1$, т.е. одредување на дефиниционото множество D на логаритамската равенка не е едноставно. Од тие причини равенката може да се решава и без одредување на множеството D, но во тој случај задолжително се утврдува кои од решенијата ги задоволуваат условите на ограничувањата, т.е. се проверува кои се решенија на дадената равенка.

3 Реши ги равенките:

а) $log_{\frac{1}{2}}(2x+3) = -2$; б) $log_3(x^2 - 5x + 15) = 2$; в) $log_{(x+2)}(2x + 12) = 2$.

В Логаритамските равенки кои со идентични трансформации можат да се доведат во видот:

$$log_a(f(x)) = log_a\varphi(x),\ a > 0, a \neq 1.$$

која има смисла за оние вредности на x за кои $f(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$, се решаваат со користење на еквиваленцијата

$$log(f(x)) = log(\varphi(x)) \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x).$$

4 Одреди го решението на логаритамските равенки:

а) $lg(2x - 3) - lg(x + 2) = lg3 - lg2$; б) $lg(4x + 5) = 2lg(x + 2)$.

Согледај го решението:

а) Од $2x - 3 > 0$ и $x + 2 > 0$ следува $x > \frac{3}{2}$ и $x > -2$, т.е. дефиниционото множество на равенката е $D: x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Со примена на правила за логаритмирање имаме $lg\frac{2x-3}{x+2} = lg\frac{3}{2}$, т.е. $\frac{2x-3}{x+2} = \frac{3}{2}$ или $x = 12$. Бидејќи $12 \in D$, значи $x = 12$ е решение на дадената равенка.

Логаритамски равенки кои со идентична трансформација се доведуваат во видот

$$F(log_a(f(x))) = 0, a \neq 1, a > 0$$

се решаваат со воведување на смена.

5 Реши ја равенката:

а) $lg^2(x) - 5lgx - 6 = 0$; б) $5lgx + 2log_x10 = 7$.

Согледај го решението:

$D: x \in (0, \infty)$, а бидејќи $lg^2x = (lgx)^2$ со смена $lgx = t$ равенката е од видот $t^2 - 5t - 6 = 0$.

Решение на равенката е $t_1 = 6$, $t_2 = -1$.

За $t_1 = 6$ следува $lgx = 6$, а $x = 10^6$.

За $t_2 = -1$ следува $lgx = -1$, а $x = 10^{-1}$.

б) Со примена на идентитетот $log_a b = \frac{1}{log_b a}$ равенката е од видот

$$5lgx + 2\,\frac{1}{lg\,x} = 7,$$

по смената $lgx = t$ имаме $5t + 2 \cdot \frac{1}{t} = 7$, т.е. $5t^2 - 7t + 2 = 0$ чии решенија се $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{2}{5}$.

За $t_1 = 1$ следува $lgx = 1$, па $x = 10$.

За $t_2 = \frac{2}{5}$ следува $lg\,x = \frac{2}{5}$, па $x = 10^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{100}$.

Логаритамските равенки во кои непознатата се наоѓа во експонентот се решаваат со логаритмирање на двете страни.

6 Реши ја равенката:

а) $x^{3-lgx} = 100$; б) $x^{2x-5} = x$.

Согледај го решението:

а) Од $x > 0$ следува $D: x \in (0, \infty)$.

Со логаритмирање на двете страни со основа 10 имаме:

$lg(x^{3-lgx}) = lg100$, т.е. $(3 - lgx) \cdot lgx = lg10^2$, а со смена $lgx = t$

$$(3 - t) \cdot t = 2, \text{ т.е. } t^2 - 3t + 2 = 0$$

$t_1 = 1$ или $t_2 = 2$, па за $t_1 = 1$ следува $lgx = 1$, $x = 10$.

$t_2 = 2$ следува $lgx = 2$, $x = 10^2 = 100$

б) $lg(x^{2x-5}) = lgx$, т.е. $(2x - 5) \cdot lgx - lgx = 0$ т.е. $lgx(2x - 5 - 1) = 0$.

Оттука следува $lgx = 0$ или $2x - 6 = 0$; т.е. $x = 10^0 = 1$ или $x = 3$.

Задачи

Реши ги логаритамските равенки:

1. а) $log_2(2x - 1) = 3$; б) $lg(x^2 - 5x + 3) = 0{,}47712$.
2. а) $log_{x+5}(3x - 5) = 1$; б) $log_{x-2}(x^3 - 56) = 3$.
3. а) $lg(x^2 + 2) = lg(2x + 1)$; б) $lg\sqrt{2x+7} - lg(x+2) = 0$
4. а) $lg(x + 2) - lg(x - 1) = lg3$; б) $log_2(x + 1) + log_2(3x - 1) = 5$.
5. а) $2lg(x + 3) + lgx^2 = 2$; б) $lg\sqrt{x+6} + \frac{1}{2}lg(x+1) = lg\,6$.
6. а) $\frac{lg(2x+5)}{lg(x^2-8)} = \frac{1}{2}$; б) $lg(x^2 - 8) - lg(x - 2) = lg19$.
7. а) $(2 - lgx)(1 - 2lgx) + 1 = 0$; б) $\frac{2}{2+lg\,x} + \frac{1}{4-lg\,x} = 1$.
8. а) $log_5x + log_x5 = 2{,}5$; б) $log_2x + log_3x = 1$.
9. а) $log_2x - log_4x + log_{16}x = 3$; б) $log_x4 + log_x256 = 5$.
10. а) $x^{lgx-1} = 100$; б) $0{,}1 \cdot x^{lgx-2} = 100$.

ТЕМА 2

ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

Во оваа шема ќе учиш за:

ТЕМА 2 ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

1 ПРОШИРУВАЊЕ НА ПОИМОТ ЗА АГОЛ. МЕРЕЊЕ НА АГЛИ

Потсети се!

- Геометриската фигура образувана од две полуправи со заедничка почетна точка и дел од рамнината ограничен со нив се вика агол.
- Кој агол е остар, а кој тап?
- Еден степен (1^o) е 180–ти дел од рамниот агол.
- Еден градус е 100–ти дел од правиот агол.

А 1 На цртежот 1 е прика1ан бунар за вадење вода.

Бунарот има макара, јаже, кофа и рачка за вртење.

При едно завртување на рачката (едно кружно завртување), јажето на макарата намотува една намотка, со две завртувања–две намотки итн.

црт. 1

Ако кофата е спуштена во бунарот, јажето е затегнато во почетната точка А на макарата. За да извадиме вода од бунарот рачката на макарата треба да се заврти пет пати.

а) Ако рачката на макарате е завртена еднаш, тогаш точката А се совпаднала со нејзината прво битна положба. Колку намотки ќе формира јажето на макарата? Кој агол ќе формира кракот на рачката?

б) Нека рачката на макарата е завртена три пати. Колку пати ќе се совпадне точката А со нејзината почетна положба? Колку намотки ќе формира јажето на макарата?

в) Нека рачката на макарата е завртена четири пати на лево, а потоа три пати на десно. Колку намотки од јажето ќе има на макарата?

- Нека при спуштање на кофата во бунарот рачката ја вртиме во насока на движење на стрелките на часовникот, а при вадење на кофата од бунарот рачката ја вртиме во спротивната насока од движењето на стрелките. Исто така, при едно кружно завртување на рачката на едната или другата насока, нејзиниот крак опишува ист агол, т.е. агол од 360^o. Но, кофата во едниот случај се спушта, а во другиот случај се подига. Според тоа, можеме да воочиме дека е битно да ги разликуваме тие два агла.
- Колкав агол ќе опише рачката на макарата ако таа се заврти, на пример три пати ќе дознаеш во нареднава содржина.

При изучувањето на аголот во геометријата според дефиницијата за агол, краците на аголот се рамноправни, т.е. нема разлика меѓу обележувањето на $\measuredangle AOB$ и $\measuredangle BOA$ (црт. 2). Операциите со агли во геометријата се ограничени, т.е. збирот на аглите не може да биде поголем од 360^0, а разликата на аглите не може да биде негативна.


црт. 2

Аголот AOB ќе го разгледаме како фигура која настанува со ротација на едниот крак околу точката O. Кракот OA е во почетната положба и го викаме почетен или **прв крак**, а кракот што ротира од почетната положба на кракот OA до точката B го викаме краен или **втор крак**.

Ако вториот крак ротира во спротивна насока од движењето на стрелките на часовникот, таа насока се вика позитивна насока, а ако вториот крак ротира во иста со движењето на стрелките, таа насика се негативна насока. Така формираниот агол насочен или ориентиран агол.

Дефиниција: Агол на кој едниот крак е земен за прв, а другиот за втор со назначена насока на ротација од првиот кон вториот се вика **насочен или ориентиран агол**. Се запишува како подреден пар $\measuredangle(OA,OB)$.

На црт. 3 $\measuredangle(OA,OB)$ е позитивно насочен агол, т.е. позитивен агол, а $\measuredangle(OB,OA)$ е негативно насочен агол, т.е. негативен агол.


црт. 3

Ако рачката на макарата се заврти три пати во позитивна насока таа ќе опише агол $3\cdot 360^0=1080^0$, а ако рачката се заврти три пати во негативна насока, таа ќе опише агол $3\cdot(-360^0)=-1080^0$.

2 Дадени се аглите $\alpha=-40^o$; $\beta=70^o$; $\gamma=-150^o$. Пресметај:

а) $\alpha+\beta+\gamma$; б) $2\alpha-\beta+2\gamma$; в) $3\alpha-\beta+\gamma$.

Согледај го одговорот:

б) $2\alpha-\beta+2\gamma=2(-40^o)-70^o+(-150^o)=-80^o-70^o-150^o=-300^o$.

3 Пресметај: а) $\alpha-\beta+\gamma$; б) $\alpha-3\beta+2\gamma$; ако $\alpha=30^o$; $\beta=-50^o$; $\gamma=120^o$.

Б Производот $230^0\cdot 5=1150^0$. Тоа е аголот $\varphi=1150^o=3\cdot 360^o+70^o$, а неговата конструкција е прикажана на црт. 4.

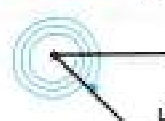

црт. 4

4 Конструирај го аголот:

а) 780^o; б) -1125^o; в) 2170^o.

Согледај го одговорот:

$\varphi=-1125^o=-(3\cdot 360^o+45^o)=-3\cdot 360^o-45^o$; а неговата конструкција е прикажана на црт. 5.


црт. 5

Запомни!

Кој било агол φ може да се запише во општ вид, т.е.

$$\varphi = k \cdot 360^0 \pm \alpha, \quad 0 \le \alpha < 360^0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Бројот k означува број на полни завртувања на кракот што ротира, т.е. $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Аголот α е големината на аголот што го образуваат неговите краци.

5. Даден е аголот: а) 690^o; б) 930^o; в) -1950^o.
Запиши го аголот во општ вид.

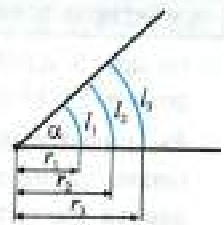
6. Кој агол ќе опише:
а) часовната стрелка; б) минутната стрелка;
за едно деноноќие?

B Од формулата за должина на кружниот лак $l = \dfrac{\pi r \alpha^o}{180^o}$, каде што аголот α е соодветен централен агол мерен во степени, имаме:

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi}{180^o} \cdot \alpha^o.$$

Оттука следува дека односот на кој било кружен лак и неговиот радиус е константа и е еднаков за сите лаци кои имаат ист централен агол, т.е.

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_3}{r_3} = \ldots = \frac{\pi}{180^o} \cdot \alpha^o, \text{ црт. 6.}$$



црт. 6

Бројот $\dfrac{l}{r}$ ја карактеризира големината на централниот агол α, па може да се земе како мерен број на должината на кружниот лак.

Ако $l = r$, тогаш $\dfrac{l}{r} = 1$, па тој централен агол е земен како единица мерка која се вика **радијан**, за кој важи следнава

Дефиниција: Радијан е централен агол што му одговара на кружен лак чија должина е еднаква на радиусот на кружницата.

7. Аглите од 360^0 и 180^0 запиши ги во радијани.

Согледај го решението:

На кружницата со периметар $L = 2\pi r$ и одговара централен агол од 360^0 (полн агол).

Полниот агол содржи $\frac{L}{r}\text{rad}$, т.е. $360^0 = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\,\text{rad}$. Според тоа:

$$360^0 = 2\pi\,\text{rad}; \quad 180^0 = \pi\,\text{rad}.$$

$$-330^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot(-330)\text{rad} = -\frac{11\pi}{6}\text{rad}.$$

$$1\,\text{rad} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17' 44{,}8''; \qquad \varphi\,\text{rad} = \frac{180^0}{\pi}\cdot\varphi.$$

Пример. Запиши: а) $\frac{5\pi}{6}\text{rad}$ во степени: б) -330^0 во радијани.

а) $\frac{5\pi}{6}\text{rad} = \frac{180^0}{\pi}\cdot\frac{5\pi}{6} = 150^0$; б) $-330^0 = \frac{\pi}{180}\cdot(-330)\text{rad} = -\frac{11\pi}{6}\text{rad}.$

8 Аглите: а) 30^o; б) 45^o; в) 90^o; г) 780^o; д) $48^o24'36''$ изрази ги во радијани.

Сошледај io решението:

д) $48^o24'36'' = 48^o + \left(\frac{24}{60}\right)^o + \left(\frac{36}{3600}\right)^o = 48{,}41^o$, па $\varphi = \frac{\pi\cdot 48{,}41^o}{180^o} \approx 0{,}845\,rad$.

Задачи

1. Запиши ги аглите во општ вид:
   а) 450^o; б) -164^o; в) 3000^o, г) -1000^o.

2. Пресметај го во степени и радијани аголот што ќе опише минутната стрелка на часовникот за:
   а) 5 min; б) 30 min; в) 1 час.

3. Радиусот на кружницата е $36\ cm$. Одреди ја должината на лакот чиј централен агол е $\frac{7\pi}{9}$ радијани.

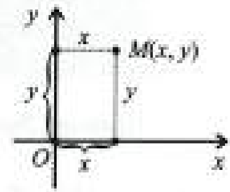
4. Изрази ги во радијани аглите:
   а) 36^o; б) 108^o; в) 210^o; г) $212^o24'$; д) $345^o36'$.

5. Изрази ги во степени аглите дадени во радијани:
   а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{7\pi}{8}$; д) 4 rad.

2 ТРИГОНОМЕТРИСКА КРУЖНИЦА. ДЕФИНИЦИЈА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

Потсети се!

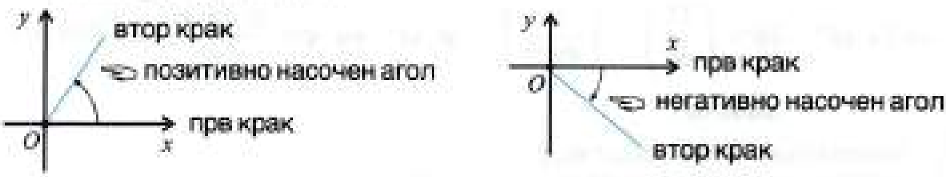
- Декартовиот координатен систем ја дели рамнината на 4 дела кои се викаат квадранти.
- На секоја точка од рамнината може да ѝ се придружи подреден пар (x, y) кои се викаат координати на точката.
- Дали важи обратното?



- На цртежот точката M е претставена во координатен систем со своите координати x и y.
  x – апсциса на точката.
  y – ордината на точката.
- Аголот $\varphi = \alpha + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$ запишан во радијани е $\varphi = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

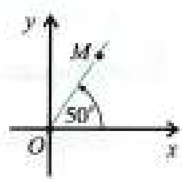
A 1 Нацртај позитивно и негативно насочен агол во координатна рамнина.

Согледај го решението:



црт. 1

- Воочи, првиот крак на насочениот агол се совпаѓа со позитивниот дел на x–оската, црт. 1.



црт. 2

- Позитивно насочениот агол, односно негативно насочениот агол се добива со ротација околу центарот О на вториот (подвижниот) крак во позитивна, односно негативна насока до одредена точка.

Насочен агол чие теме е во координатниот почеток може да добие со ротација на многу завртувања на вториот крак во позитивна, односно негативна насока до одредена точка.

Сите тие агли се разликуваат еден од друг за цел број на полни завртувања. Големината на кој било агол β од тоа множество е од видот $\beta = \alpha + k \cdot 360°$ или $\beta = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

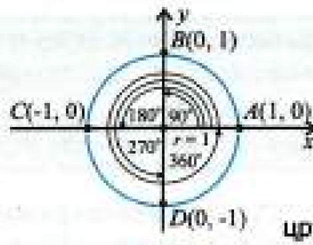
На пример, ако OM е втор крак на аголот $\alpha = 50°$ (црт. 2), тогаш тој е втор крак на аглите $50° + k \cdot 360°$, т.е. на аголот $50°$, $(k = 0)$, на $410°$ $(k = 1)$, на $770°$ $(k = 2)$, на $-310°$ $(k = -1)$ итн.

Дефиниција: Кружница со центар во координатниот почеток и радиус со должина 1 се вика **тригонометриска кружница**.

2 а) Одреди ги координатите на точките во кои тригонометриската кружница ги сече координатните оски.

б) Одреди ја положбата на вториот крак на аглите: $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$.

Соїледај їо решениеѿо:



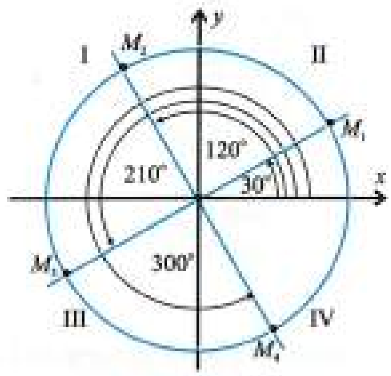
црт. 3

3 а) Одреди ја положбата на вториот крак на аглите: $30°, 120°, 210°, 300°$.

б) Одреди ги интервалите на аглите што ги опишува подвижниот крак во секој од квадрантите, ако тој се движи во позитивна насока.

Соїледај їо одїовороѿ:

- а) точката M_1 припаѓа во првиот квадрант, а аголот е во интервалот $(0, 90°)$. Точката M_2 припаѓа во вториот квадрант, а аголот е во интервалот $(90°, 180°)$. Точката M_3 е во третиот квадрант, а аголот е во интервалот $(180°, 270°)$. Точката M_4 припаѓа во четвртиот квадрант, а аголот е во интервалот $(270°, 360°)$, црт. 4.

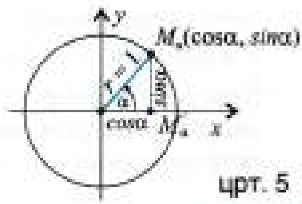


црт. 4

- Вториот крак на кој било агол чие теме е во координатниот почеток ќе ја сече тригонометриската кружница само во една точка.

Бидејќи положбата на секоја точка во рамнината е определена со своите координати, значи и точките од тригонометриската кружница се одредени со своите координати.

Б Нека е дадена тригонометриска кружница и остар агол α, црт. 5.
Со примена на дефиницијата на тригонометриски функции од остар агол, имаме:



црт. 5

$$\sin\alpha = \frac{\overline{M_\alpha M'_\alpha}}{\overline{OM_\alpha}} = \overline{M_\alpha M'_\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{\overline{OM'_\alpha}}{\overline{OM_\alpha}} = \overline{OM'_\alpha}, \text{ бидејќи } \overline{OM_\alpha} = 1.$$

Воочи, во првиот квадрант (т.е. за остар агол) координатите на точката на тригонометриската кружница се вредностите на тригонометриските функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Според тоа, за тригонометриските функции синус и косинус од произволен агол важат следниве дефиниции:

Дефиниција: Синус од произволен агол е ординатата на точката во која подвижниот крак на аголот ја сече тригонометриската кружница.

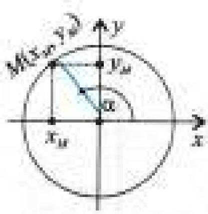
Дефиниција: Косинус од произволен агол е апсцисата на точката во која подвижниот крак на аголот ја сече тригонометриската кружница.

4 Претстави ги графички координатите на точките што се добиваат во пресек на подвижниот крак на аголот и тригонометриската кружница во:

а) II квадрант; б) III квадрант; в) IV квадрант.

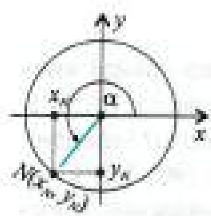
Согледај го одговорот:

а)



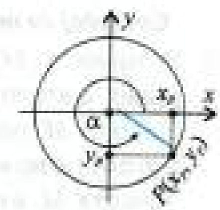
$\sin\alpha = y_M;$
$\cos\alpha = x_M;$

б)



$\sin\alpha = y_N;$
$\cos\alpha = x_N;$

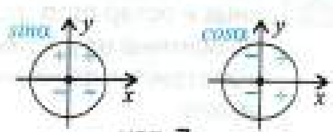
в)



$\sin\alpha = y_P;$
$\cos\alpha = x_P;$

црт. 6

- Познато е дека точките во I -от и II -от квадрант имаат позитивни ординати, а во III -от и IV -от негативни ординати.
- Според тоа, **синусот** од аглите чиј вториот крак е во I - от или II -от квадрант е позитивен, а во III -от и IV -от е негативен.
- Точките во I -от и IV -от квадрант имаат позитивна апсциса, а во II -от и III -от квадрант апсцисата е негативна.
- Според тоа, косинусот на аглите чиј втор крак е во I -от или IV -от квадрант е позитивен, а во II -от и III -от е негативен.
- Знакот на тригонометриските функции синус и косинус во секој од квадрантите прикажан е на црт. 7.



црт. 7

5. Одреди го знакот на производот:

а) $sin120^o \cdot cos120^o$; б) $sin50^o \cdot cos200^o$; в) $sin150^o \cdot sin200^o \cdot cos300^o$.

Согледај го одговорот:

- а) Аголот од 120^o е во II –от квадрант, во кој синусот е позитивен, а косинусот е негативен, т.е. $sin120^o > 0$, а $cos120^o < 0$, па $sin120^o \cdot cos120^o < 0$.

В

- Тангентата на тригонометриската кружница во пресечната точка со позитивниот дел на x – оската се вика **тангенсна оска**. Нејзините точки се со координати $(1, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

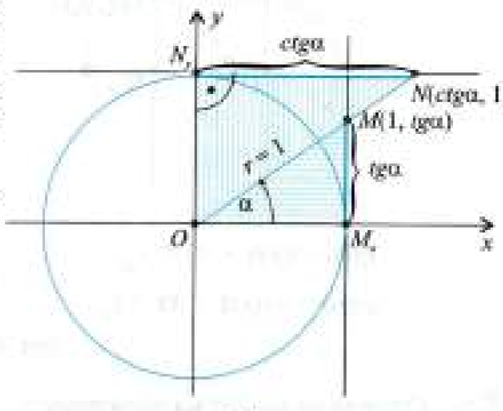
- Тангентата на тригонометриската кружница во пресечната точка со позитивниот дел на y – оската се вика котангенсна оска. Нејзините точки се со координати $(x, 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

- Нека е дадена тригонометриска кружница и остар агол α чиј подвижен крак ги сече тангенсната и контангенсната оска соодветно во точките M и N, црт. 8.

- Од дефиницијата за тангенс и контангенс од остар агол, имаме:

$$tg\alpha = \frac{\overline{MM_x}}{\overline{OM_x}} = \overline{MM_x} \quad \text{и}$$

$$ctg\alpha = \frac{\overline{NN_y}}{\overline{ON_y}} = \overline{NN_y}\,.$$



црт. 8

Подвижниот крак на кој било агол ја сече тангенсната и котангесната оска само во една точка.

Воочи, во првиот квадрант (за остар агол) ординатата на точката на тангенсната оска е вредност на тангенс од острииот агол, а апсцисата на точката на котангенсната оска е вредност на котангенс од острииот агол.

Според тоа, за тригонометриските функции тангенс и котангенс од произволен агол важат следниве дефиниции:

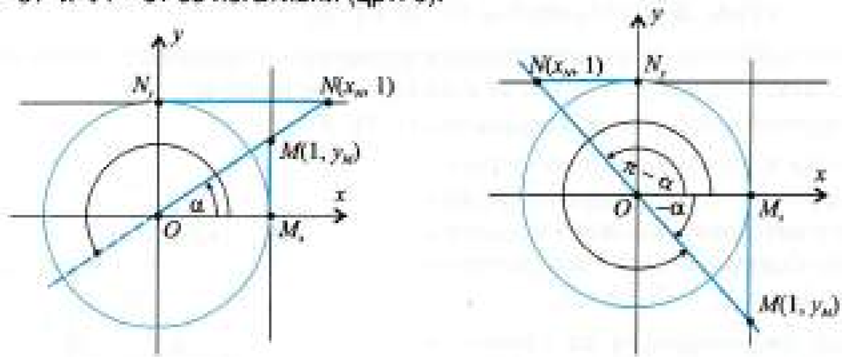
Дефиниција: Тангенс од произволен агол $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ е ординатата на точката во која подвижниот крак на аголот или неговото продолжение ја сече тангенсната оска.

Дефиниција: Котангенс од произволен агол $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ е апсцисата на точката во која подвижниот крак на аголот или неговото продолжение ја сече контангесната оска.

6 Претстави ги графички координатите на точките што се добиваат во пресекот на подвижниот крак на аголот со тангенсната и контангенсната оска, за аглите во II, III и IV квадрант.

Очигледно, од претходните два цртежи заклучуваме дека координатите на точките за аголот чиј подвижен крак завршува во превиот, односно третиот квадрант се позитивни, додека во II –от и IV –от се негативни.

Според тоа, тангенсот и котангенсот во I –от и III –от квадрант се позитивни, а во II –от и IV –от се негативни (црт. 9).



$tg\alpha = tg(\alpha + \pi) = y_M$ $\qquad$ $tg(\pi - \alpha) = tg(2\pi - \alpha) = y_M$

$ctg\alpha = ctg(\alpha + \pi) = x_N$ $\qquad$ $ctg(\pi - \alpha) = ctg(2\pi - \alpha) = x_N$

црт. 9

7 Одреди го знакот на производот:

а) $tg20^o \cdot ctg120^o$; б) $tg130^o \cdot ctg240^o$; в) $tg200^o \cdot ctg350^o$.

Согледај го одговорот:

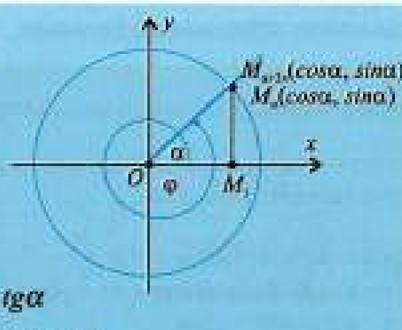
а) $tg20^o > 0$, $ctg120^o < 0$, па $tg20^o \cdot ctg120^o < 0$.

Треба да знаеш:

Бидејќи подвижниот крак на аголот α и на аголот $\varphi = \alpha \pm 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се совпаѓаат, тогаш и точките M_α и $M_{\alpha+2k\pi}$ се совпаѓаат. Што значи дека:

$$sin(\alpha + 2k\pi) = sin\alpha$$

$$cos(\alpha + 2k\pi) = cos\alpha,\ k \in \mathbb{Z}.$$



Од исти причини следува дека:

$$tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha$$

$$ctg(\alpha + k\pi) = ctg\alpha,\ k \in \mathbb{Z}.$$

8 Провери ја точноста на тврдењата: а) $cos800^o = cos80^o$; б) $tg1880^o = tg80^o$.

Задачи

1 Аглите: а) 760^o; б) 1420^o; в) 1080^o; г) 1830^o;
трансформирај ги во видот $k \cdot 360^o \pm \alpha$.

2 На тригонометриската кружница одреди ја точката во која:

а) $sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $cos\alpha = -\frac{2}{3}$; в) $sin\alpha = -\frac{3}{4}$.

3 Одреди го знакот на производот:

а) $sin115^o \cdot cos160^o$; б) $sin220^o \cdot cos130^o$;

в) $tg15^o \cdot ctg210^o$; г) $tg130^o \cdot ctg300^o$.

3 МЕНУВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ

Потсети се!

- Вредностите на синусот и косинусот за аголот што е во првиот квадрант се позитивни, додека во III –от се негативни.
- Каков знак има вредноста на функцијата синус за аглите што се во:
а) II – от квадрант; б) IV – от квадрант?
- Каков знак има вредноста на функцијата косинус за аглите што се во:
а) II – от квадрант; б) IV – от квадрант?
- Вредноста на тангенсот и котангенсот за аголот што е во I–от и III–от квадрант е позитивна.
- Каков знак имаат вредностите на функциите тангенс и котангенс за аголот што е во II–от или IV–от квадрант?

А 1 Одреди ги координатите на пресечните точки на тригонометриската кружница со координатните оски.

Согледај го решението:

- Бидејќи радиусот на кружницата е еднаков на 1, значи координатите на пресечените точки со x–оска се $(1, 0)$ и $(-1, 0)$, додека во y–оската се $(0, 1)$ и $(0, -1)$.
- Подвижниот крак за аглите од 0^o и 180^o се совпаѓа со x–оската, што значи $sin0^o = 0$, $sin180^o = 0$ и $sin360^o = 0$, додека $cos0^o = 1$, $cos180^o = -1$ и $cos360^o = 1$.
- Подвижниот крак за аглите од 90^o и 270^o се совпаѓа со y–оската, што значи $cos90^o = 0$ и $cos270^o = 0$, додека $sin90^o = 1$ и $sin270^o = -1$.

Добиените вредности на функциите синус и косинус ќе ги прикажеме во следнава табела:

	0^o	90^o	180^o	270^o	360^o
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1

Потсети се!

За функцијата $y=f(x)$ дефинирана во множеството D важи следнава

Дефиниција: а) Функцијата $y=f(x)$ монотоно расте ако за кои било $x_1,\ x_2\ \in D_f$ и $x_2>x_1$, следува $f(x_2)>f(x_1)$.

б) Функцијата $y=f(x)$ монотоно опаѓа ако за кои било $x_1,\ x_2\ \in\ D_f$ и $x_2>x_1$, следува $f(x_2)<f(x_1)$.

Нека α и β се остри агли и притоа $\alpha<\beta$. Според дефиницијата на тригонометриски функции од произволен агол, имаме:

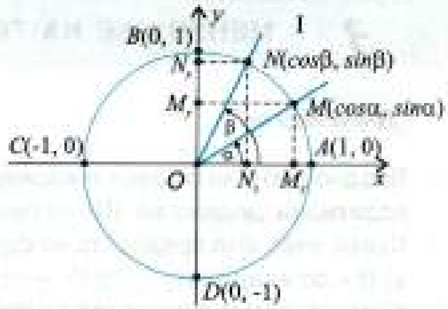
$$cos\,\alpha=\overline{OM_x}\quad \text{и}\quad cos\,\beta=\overline{ON_x}$$

$$sin\,\alpha=\overline{MM_x}\quad \text{и}\quad sin\,\beta=\overline{NN_x}$$

Очигледно е дека:

$$\overline{OM_x}>\overline{ON_x},\ \text{т.е.}\ \ cos\alpha>cos\beta$$

$$\overline{MM_x}<\overline{NN_x},\ \text{т.е.}\ \ sin\alpha<sin\beta$$

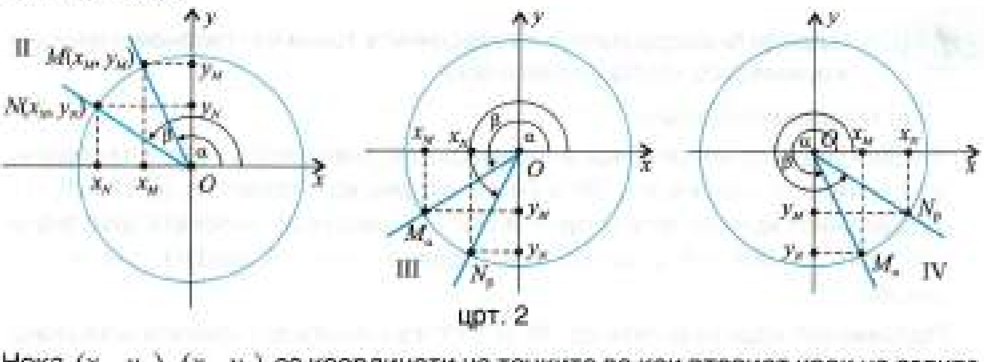


црт. 1

Според дефиниција за монотоност на функциите имаме:

Ако аголот расте во I–от квадрант, тогаш функцијата косинус опаѓа, од 1 до 0, а функцијата синус расте од 0 до 1.

Воочи ги менувањата на функциите синус и косинус во другите квадранти, црт. 2, при што $\alpha<\beta$.



црт. 2

Нека (x_M, y_M), (x_N, y_N) се координати на точките во кои вториот крак на аглите α и β ја сече тригонометриската кружница.

II квадрант	III квадрант	IV квадрант
$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = y_M \\ \sin\beta = y_N \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_M > y_N \text{, па} \\ \sin\alpha > \sin\beta \end{array}$;	$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = y_M \\ \sin\beta = y_N \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_M > y_N \text{, па} \\ \sin\alpha > \sin\beta \end{array}$;	$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = y_M \\ \sin\beta = y_N \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_M < y_N \text{, па} \\ \sin\alpha < \sin\beta \end{array}$;
$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = x_M \\ \cos\beta = x_N \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_M > x_N \text{, па} \\ \cos\alpha > \cos\beta \end{array}$;	$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = x_M \\ \cos\beta = x_N \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_M < x_N \text{, па} \\ \cos\alpha < \cos\beta \end{array}$;	$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = x_M \\ \cos\beta = x_N \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_M < x_N \text{, па} \\ \cos\alpha < \cos\beta \end{array}$;

Врз основа на дефиницијата за монотоноста на функциите следува, ако аголот α расте во:

II–от квадрант, тогаш функцијата синус опаѓа и косинус опаѓа.

III–от квадрант, тогаш функцијата синус опаѓа, а косинус расте.

IV–от квадрант, тогаш функцијата синус расте и косинус расте.

2 Спореди ги броевите:

а) $\sin 5^\circ$ и $\sin 85^\circ$; б) $\cos 130^\circ$ и $\cos 150^\circ$;

в) $\sin 220^\circ$ и $\sin 260^\circ$; г) $\cos 300^\circ$ и $\cos 310^\circ$.

3 Одреди го знакот на разликата:

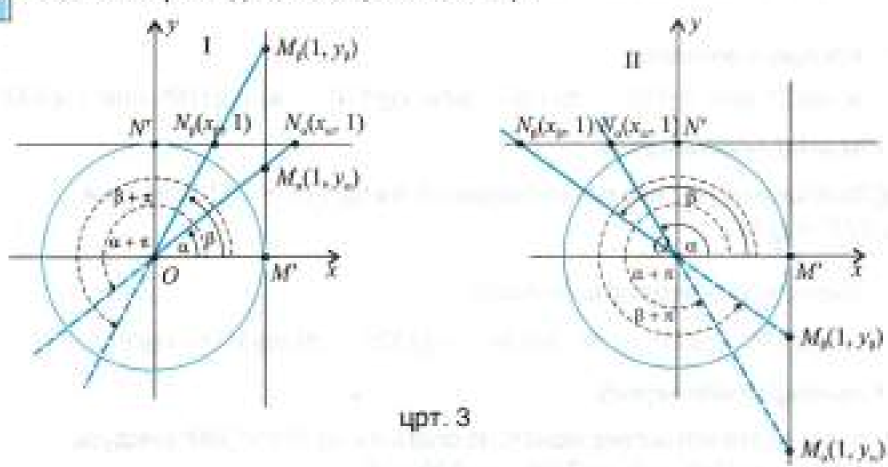
а) $\sin 100^\circ - \sin 130^\circ$; б) $\cos 15^\circ - \cos 85^\circ$; в) $\cos 215^\circ - \cos 220^\circ$.

Согледај го решението:

а) функцијата $\sin\alpha$ во вториот квадрант опаѓа.

Бидејќи $100^\circ < 130^\circ$ следува $\sin 100^\circ > \sin 130^\circ$, т.е. $\sin 100^\circ - \sin 130^\circ > 0$.

Б Нека α и β се два агла при што $\alpha < \beta$.



црт. 3

Нека x_α, y_α, x_β, y_β се координати на точките во кои вториот крак или неговото продолжение ги сече тангенсната или котангенсната оска, црт. 3.

За аглите во I и III квадрант

$$\left.\begin{aligned} tg\alpha &= y_\alpha \\ tg\beta &= y_\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y_\alpha &< y_\beta \text{, па} \\ tg\alpha &< tg\beta \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} ctg\alpha &= x_\alpha \\ ctg\beta &= x_\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_\alpha &> x_\beta \text{, па} \\ ctg\alpha &> ctg\beta \end{aligned}$$

За аглите во II и IV квадрант

$$\left.\begin{aligned} tg\alpha &= y_\alpha \\ tg\beta &= y_\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y_\alpha &< y_\beta \text{, па} \\ tg\alpha &< tg\beta \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} ctg\alpha &= x_\alpha \\ ctg\beta &= x_\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_\alpha &> x_\beta \text{, па} \\ ctg\alpha &> ctg\beta \end{aligned}$$

- Подвижниот крак на аголот од 0^o и 180^o се совпаѓа со x – оската, значи $tg0^o = tg180^o = 0$. Функцијата котангенс од 0^o и 180^o, т.е. за секој агол од видот $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, не е дефинирана, бидејќи вториот крак на тие агли не ја сече котангенсната оска.
- Подвижниот крак на аголот од 90^o и 270^o се совпаѓа со y – оската, значи $ctg90^o = ctg270^o = 0$. Функцијата тангенс од 90^o и 270^o, т.е. за секој агол од видот $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ не е дефинирана, бидејќи вториот крак од тие агли не ја сече тангенсната оска.

Воочи, кога аголот α расте од 0^o до 90^o или 180^o до 270^o функцијата тангенс расте од 0 до ∞.

Кога аголот α расте од 90^o до 180^o или од 270^o до 360^o, тогаш вредностите на функцијата тангенс се негативни и исто така функцијата непрекинато расте од $-\infty$ до 0.

Според тоа функцијата тангенс монотоно расте од $-\infty$ до $+\infty$ на целата дефинициона област.

4 Испитај ја монотоноста на функцијата $ctg\alpha$.

5 Кој број е поголем:

а) $tg12^o$ или $tg152^o$; б) $ctg7^o$ или $ctg170^o$; в) $ctg310^o$ или $ctg300^o$?

Согледај го одговорот:

- а) Функцијата тангенс монотоно расте, па од $125^o < 152^o$, следува $tg125^o < tg152^o$.

6 Одреди го знакот на разликата:

а) $tg253^o - tg235^o$; б) $ctg130^o - ctg132^o$; в) $ctg310^o - ctg300^o$.

Согледај го одговорот:

- в) функцијата котангенс монотоно опаѓа па од $310^o > 300^o$ следува $ctg310^o < ctg300^o$, т.е. $ctg310^o - ctg300^o < 0$.

Монотоноста на тригонометриските функции ќе ја прикажеме во следнава табела:

α	0	I кв.	$\frac{\pi}{2}$	II кв.	π	III кв.	$\frac{3\pi}{2}$	IV кв.	2π
$sin\alpha$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$cos\alpha$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$tg\alpha$	0	${}_{0}\nearrow^{+\infty}$	$\parallel$	${}_{-\infty}\nearrow^{0}$	0	${}_{0}\nearrow^{+\infty}$	$\parallel$	${}_{-\infty}\nearrow^{0}$	0
$ctg\alpha$	$\parallel$	${}^{+\infty}\searrow_{0}$	0	${}^{0}\searrow_{-\infty}$	$\parallel$	${}^{+\infty}\searrow_{0}$	0	${}^{0}\searrow_{-\infty}$	$\parallel$

Задачи

1 Кој број е поголем:

а) $sin25^\circ$ или $sin15^\circ$; б) $cos130^\circ$ или $cos120^\circ$; в) $sin20^\circ$ или $sin320^\circ$,

г) $tg38^\circ$ или $tg62^\circ$; д) $ctg280^\circ$ или $ctg300^\circ$?

2 Одреди го знакот на разликата:

а) $sin10^\circ - sin15^\circ$; б) $cos15^\circ - cos25^\circ$;

в) $tg135^\circ - tg150^\circ$; г) $ctg230^\circ - ctg260^\circ$.

3 Подреди ги по големина почнувајќи од најмалиот:

а) $sin126^\circ, sin123^\circ, sin212^\circ, sin225^\circ$; б) $tg48^\circ, tg52^\circ, tg45^\circ, tg154^\circ, tg142^\circ$.

4 Одреди го знакот на количникот:

а) $\dfrac{sin48^\circ - sin64^\circ}{tg15^\circ - tg50^\circ}$; б) $\dfrac{1-sin\alpha}{1-tg\alpha}$, ако $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5 Одреди го знакот на изразот:

а) $\dfrac{ctg320^\circ \cdot tg214^\circ}{tg150^\circ + tg165^\circ}$; б) $\dfrac{tg63^\circ \cdot ctg173^\circ}{sin38^\circ \cdot cos110^\circ}$.

6 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $sin0^\circ + sin90^\circ$; б) $cos0^\circ \cdot cos180^\circ$; в) $cos180^\circ - sin270^\circ$;

г) $\dfrac{sin2\pi + cos2\pi}{tg\pi - cos\pi}$; д) $\dfrac{sin\frac{\pi}{2} + sin\frac{3\pi}{2}}{2cos\pi}$.

4 ОСНОВНИ ЗАВИСНОСТИ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

Потсети се!

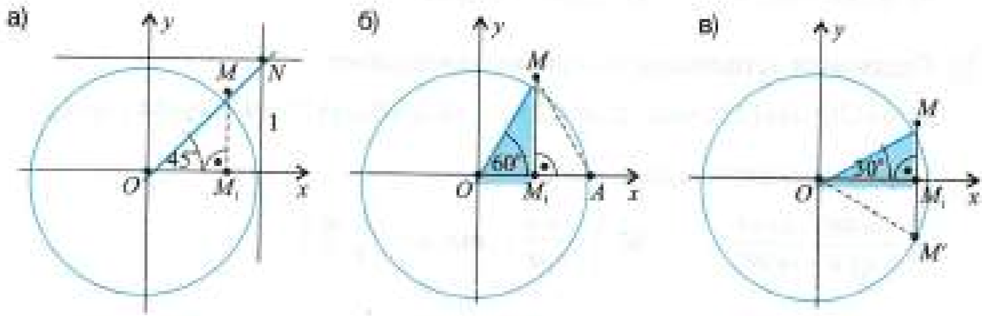
- За дефиницијата на тригонометриските функции од произволен агол.
- Висина на рамностран триаголник со страна a е $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- За основните тригонометриски зависности од остар агол.

А 1 Одреди ја вредноста на тригонометриските функции од аглите: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{6}$.

Согледај го решението:

- Триаголникот OM_1M е рамнокрак правоаголен, т.е. $\overline{OM_1}=\overline{M_1M}=x$, па $\overline{OM_1}^2+\overline{M_1M}^2=\overline{OM}^2$, т.е. $2x^2=1$ или $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x>0$.

- Значи точката M има координати $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, па $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg\frac{\pi}{4}=1$, $ctg\frac{\pi}{4}=1$ (црт. 1а).



црт. 1

- Триаголникот OAM е рамностран (зошто?), па $\overline{MM_1}=\frac{\overline{OA}\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\overline{OM_1}=\frac{\overline{OA}}{2}=\frac{1}{2}$ (црт. 1б).

- Значи точката M има координати $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, па $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$,

$$tg\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{MM_1}}{\overline{OM_1}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3},\quad ctg\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{OM_1}}{\overline{MM_1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Триаголниците OM_1M и OM_1M' се симетрични во однос на x – оската, па $\Delta MM'O$ е рамностран (црт. 1в). Од исти причини како и во претходниот случај точката M има координати $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Значи $sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Вредностите на тригонометриските функции од аглите $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ запишани се во табелата.

2 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $2sin30^o cos30^o$; б) $2sin60^o cos30^o$; в) $cos45^o - sin45^o cos0^o$;

г) $cos0^o - sin90^o \cdot cos60^o$; д) $tg30^o \cdot ctg30^o - 1$.

Соїледај їо одїоворот:

в) $cos45^o - sin45^o cos0^o = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = 0$.

Б **3** Докажи дека $sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$ каде што $\varphi = k \cdot 360^o + \alpha$, $0 \leq \alpha < 360^o$.

Соїледај їо доказоѿ:

Од правоаголниот триаголник OM_1M следува (црт. 2):

$$\overline{MM_1}^2 + \overline{OM_1}^2 = 1$$

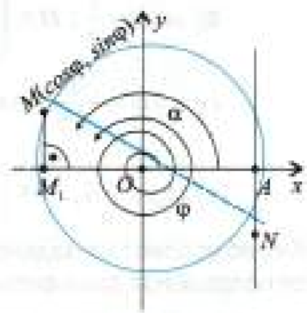
$$(sin\,\varphi)^2 + (cos\,\varphi)^2 = 1$$

$$sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1$$

За $\varphi = k \cdot 360^o + \alpha$ имаме

$sin^2(k \cdot 360^o + \alpha) + cos^2(k \cdot 360^o + \alpha) = 1$.

т.е. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.



црт. 2

Од сличноста на ΔONA и ΔOMM_1 и $\varphi = k \cdot 360^o + \alpha$ следува:

$\frac{\overline{AN}}{\overline{MM_1}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OM_1}}$, т.е. $\frac{tg\varphi}{sin\varphi} = \frac{1}{cos\varphi}$ или $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, а $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$.

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1.$$

4 Докажи ги формулите: $sin\alpha = \dfrac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ и $cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$.

Согледај го одговорот:

- Ако двете страни на основниот идентитет ги поделиме со $cos^2\alpha$, а потоа со $sin^2\alpha$, добиваме:

$$\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}+\frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{1}{cos^2\alpha} \qquad \text{и} \qquad \frac{sin^2\alpha}{sin^2\alpha}+\frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}=\frac{1}{sin^2\alpha}$$

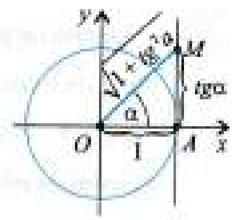
$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{cos^2\alpha} \qquad\qquad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{sin^2\alpha}$$

$$cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad\qquad sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Знакот пред коренот зависи од знакот на бараната функција во соодветниот квадрант.

- До истиот заклучок може да се дојде ако го разгледаме цртеж 3.
- Од дефиницијата на тригонометриските функции од остар агол имаме:

$$sin\alpha=\frac{\overline{AM}}{\overline{OM}},\quad sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}},\ \text{а}\ cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$



црт. 3

5 Одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции, ако е дадено:

а) $sin\alpha=\dfrac{3}{4}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$; б) $sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$, $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$; в) $cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $cos\alpha=-\dfrac{24}{25}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$; д) $tga=1$; ѓ) $tg\alpha=-\sqrt{3}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$;

е) $ctga=-1$, $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$; ж) $ctg\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ако во условот на задачата не е дадено во кој квадрант се наоѓа аголот, тогаш се подразбира дека аголот е во првиот квадрант.

Согледај го решението:

а) Од основниот идентитет $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$, имаме:

$$cos^2\alpha=1-sin^2\alpha=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}\ \text{или}\ cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{3}{4}:\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{7}}{7}\ \text{и}\ ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

д) $sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $ctg\alpha = 1$.

6 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $5sin\alpha cos^2\alpha - sin^2\alpha$ за $cos\alpha = \frac{3}{5}$; б) $cos^2\alpha - 3sin^2\alpha cos\alpha$ за $sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\frac{1+tg\alpha}{1+ctg\alpha}$ за $cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Соīледај īо решениеīо:

а) $sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ или $sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Вредноста на изразот е:

$5sin\alpha cos^2\alpha - sin^2\alpha = 5 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{36}{25} - \frac{16}{25} = \frac{4}{5}$.

7 Упрости ги изразите:

а) $\frac{1}{1-cos\alpha} + \frac{1}{1+cos\alpha}$, $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{1+sin\alpha}{cos\alpha} - \frac{cos\alpha}{1-sin\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

в) $(tg\alpha + ctg\alpha)^2 - (tg\alpha - ctg\alpha)^2$;

г) $\left(\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}\right)^2$.

Соīледај īо решениеīо:

а) $\frac{1}{1-cos\alpha} + \frac{1}{1+cos\alpha} = \frac{1+cos\alpha+1-cos\alpha}{(1-cos\alpha)(1+cos\alpha)} = \frac{2}{1-cos^2\alpha} = \frac{2}{sin^2\alpha}$.

8 Докажи ги идентитетите:

а) $\frac{1}{1+sin\alpha} + \frac{1}{1-sin\alpha} = \frac{2}{cos^2\alpha}$; б) $\frac{sin\alpha}{ctg\alpha+1} + \frac{cos\alpha}{tg\alpha+1} = \frac{1}{sin\alpha+cos\alpha}$;

в) $sin^2\alpha\,(ctg\alpha - 3)\,(3ctg\alpha - 1) + 10sin\alpha cos\alpha = 3$.

Соīледај īо решениеīо:

б) $\frac{sin\alpha}{ctg\alpha+1} + \frac{cos\alpha}{tg\alpha+1} = \frac{sin\alpha}{\frac{cos\alpha}{sin\alpha}+1} + \frac{cos\alpha}{\frac{sin\alpha}{cos\alpha}+1} = \frac{sin^2\alpha+cos^2\alpha}{sin\alpha+cos\alpha} = \frac{1}{sin\alpha+cos\alpha}$.

Задачи

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $sin60^o \cdot cos30^o \cdot cos0^o$; б) $tg\dfrac{\pi}{4}+ctg\dfrac{\pi}{4}-2$; в) $\dfrac{sin60^o}{1+cos60^o}+\dfrac{1}{tg30^o}$.

2. Ако е даден $cos\alpha=\dfrac{2}{3}$, одреди ја вредноста на другите тригонометриски функции.

3. Одреди ја вредноста на изразот $\dfrac{1-2tg\alpha}{1+2tg\alpha}$, ако $sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

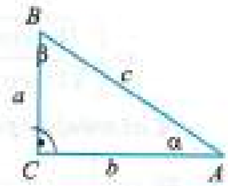
4. Упрости ги изразите: а) $\dfrac{sin^3\alpha+cos^3\alpha}{sin\alpha+cos\alpha}$; б) $\dfrac{sin\alpha}{ctg^2\alpha+1}-\dfrac{cos\alpha}{tg^2\alpha+1}$.

5. Докажи ги идентитетите:

а) $\dfrac{ctg^2\alpha-1}{ctg\alpha}\cdot\dfrac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=1$; б) $\dfrac{sin^2\alpha}{1+ctg\alpha}+\dfrac{cos^2\alpha}{1+tg\alpha}=1-sin\alpha\, cos\alpha$.

5 СВЕДУВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ

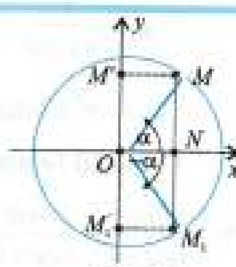
Потсети се!



- $sin\alpha=\dfrac{a}{c}$; $cos\alpha=\dfrac{b}{c}$; $tg\alpha=\dfrac{a}{b}$; $ctg\alpha=\dfrac{b}{a}$.

- Напиши ги тригонометриските функции за аголот β.
- Колкав е збирот на острите агли во правоаголен триаголник и како се викаат?
- Дадена е вредноста на една функција. Изрази ги вредностите на другите функции.

А 1 Одреди ја вредноста на тригонометриските функции од негативниот агол α.



црт. 1

Согледај го решението:

- Точката M од кружницата е симетрична на точката M_1 во однос на x – оската, па $\sphericalangle(ON, OM)=\alpha=|-\alpha|$. Ако точката M е со координати $(cos\alpha, sin\alpha)$, тогаш координатите на точката M_1 се $(cos\alpha, -sin\alpha)$.

Оттука следува $\boxed{cos(-\alpha) = cos\alpha.}$

а вредностите на $sin(-\alpha)$ и $sin\alpha$ се со спротивни броеви, па

$$\boxed{sin(-\alpha) = -sin\alpha.}$$

- $tg(-\alpha)=\dfrac{sin(-\alpha)}{cos(-\alpha)}=\dfrac{-sin\alpha}{cos\alpha}=-tg\alpha$ и
- $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha.$

2 Одреди го знакот на изразот:

а) $sin(-\alpha) \cdot cos(-\alpha) \cdot tg(-\alpha)$; б) $-x, x \in D_f$. .

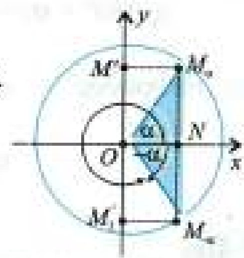
- За парноста, односно непарноста на функцијата $y = f(x)$ важи следнава:

Дефиниција: Функцијата $y = f(x)$ е парна ако $f(-x) = f(x)$, а е непарна ако $f(-x) = -f(x)$; $-x, x \in D_f$.

- Значи, функцијата $cosx$ е парна, а функциите $sinx$, tgx, $ctgx$ се непарни.
- При сведувањето на тригонометриските функции од произволен агол на остар агол α, аголот α секогаш ќе биде $0^o < \alpha < 90^o$.

Б Тригонометриски функции за агли од видот $360^o - \alpha$.

- Поради симетричност на точките $M_{-\alpha}$ и M_α во однос на x – оската и двете точки лежат на иста тригонометриска кружница, па вредностите



црт. 2

$$cos(360^o - \alpha) = cos\alpha;$$

$$sin(360^o - \alpha) = sin(-\alpha) = -sin\alpha,$$

$$tg(360^o - \alpha) = \frac{sin(360^o - \alpha)}{cos(360^o - \alpha)} = \frac{-sin(\alpha)}{cos\alpha} = -tg\alpha;$$

$$ctg(360^o - \alpha) = ctg(-\alpha) = -ctg\alpha.$$

В Тригонометриски функции за агли од видот $180^o - \alpha$.

- Од симетричноста на точките M_α и $M_{180^o-\alpha}$ во однос на y – оската имаме:

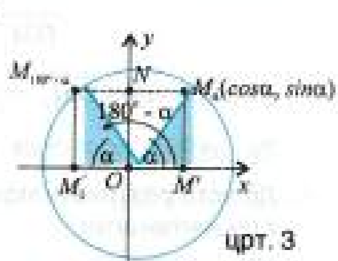
Точката M_α е со координати $(cos\alpha, sin\alpha)$, а точката $M_{180-\alpha}$ е со координати $(-cos\alpha, sin\alpha)$.

- Оттука следува:

$sin(180^o - \alpha) = sin\alpha$, $cos(180^o - \alpha) = -cos\alpha.$

За тангенс и котангенс, имаме:

$tg(180^o - \alpha) = -tg\alpha$; $ctg(180^o - \alpha) = -ctg\alpha.$



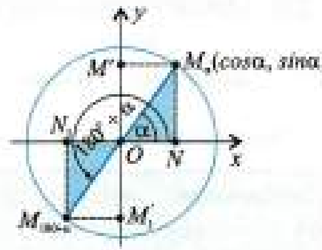
црт. 3

■ На пример: $ctg120^\circ = ctg(180^\circ - 60^\circ) = -ctg60^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

$$sin120^\circ = sin(180^\circ - 60^\circ) = sin60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тригонометриски функции за агли од видот $180^\circ + \alpha$.

■ Од симетричноста на точките M_α и $M_{180^\circ+\alpha}$ во однос на координатниот почеток (црт. 4) имаме: Точката M_α е со координати $(cos\alpha, sin\alpha)$, а точката $M_{180^\circ+\alpha}$ е со координати $(-cos\alpha, -sin\alpha)$.



црт. 4

■ Оттука следува:

$$sin(180^\circ + \alpha) = -sin\alpha, \quad cos(180^\circ + \alpha) = -cos\alpha.$$

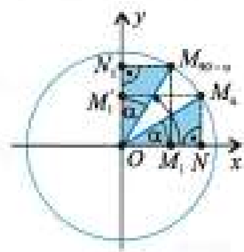
За тангенс и котангенс, имаме:

$$tg(180^\circ + \alpha) = tg\alpha; \quad ctg(180^\circ + \alpha) = ctg\alpha.$$

■ На пример: $cos210^\circ = cos(180^\circ + 30^\circ) = -cos30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$$tg240^\circ = tg(180^\circ + 60^\circ) = tg60^\circ = \sqrt{3}.$$

Тригонометриски функции за агли од видот $90^\circ - \alpha$.



црт. 5

■ Да ги разгледаме ΔONM_α и $\Delta OM_{90^\circ-\alpha}N_1$.

$\sphericalangle NOM_\alpha = \sphericalangle M_{90^\circ-\alpha}ON_1$; $\overline{OM}_\alpha = \overline{OM}_{90^\circ-\alpha} = r$

и $\sphericalangle N = \sphericalangle N_1 = 90^\circ$.

Значи, $\Delta ONM_\alpha \equiv \Delta OM_{90-\alpha}N_1$.

■ Ако точката M_α е со координати (x_α, y_α), тогаш од складноста на триаголниците следува:

$$\overline{OM_1} = \overline{NM_\alpha} = y_\alpha \text{ и } \overline{ON_1} = \overline{ON} = x_\alpha, \text{ т.е.}$$

$$cos(90^\circ - \alpha) = \overline{OM_1} = y_\alpha = sin\alpha; \quad sin(90^\circ - \alpha) = \overline{ON_1} = x_\alpha = cos\alpha;$$

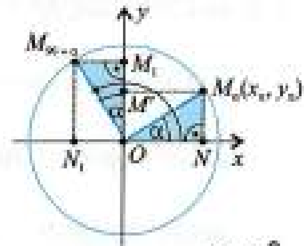
За $tg(90^\circ - \alpha) = ctg\alpha$, а $ctg(90^\circ - \alpha) = tg\alpha$.

■ До исти резултати може да се дојде и со користење на својството на комплементен агол.

Тригонометриски функции за агли од видот $90^o + \alpha$.

- $\Delta ONM_\alpha \equiv \Delta OM_1 M_{90^o+\alpha}$. (Зошто?)

Од складноста на триаголниците следува $\overline{OM_1} = \overline{ON} = x_\alpha$ и $\overline{ON_1} = \overline{NM_\alpha} = y_\alpha$.



црт. 6

- Од дефиницијата на тригонометриските функции синус и косинус, водејќи сметка за знакот на функциите во вториот квадрант имаме:

$$cos(90^o + \alpha) = -y_\alpha = -sin\alpha,$$
$$sin(90^o + \alpha) = x_\alpha = cos\alpha.$$

- За функцијата $tg(90^o+\alpha) = \dfrac{sin(90^o+\alpha)}{cos(90^o+\alpha)} = \dfrac{cos\alpha}{-sin\alpha} = -ctg\alpha$, а

$ctg(90^o + \alpha) = -tg\alpha$.

- Доказот на овие тврдења е сличен на претходните.
- За аглите од видот $270^o - \alpha$ имаме:

$sin(270^o - \alpha) = -cos\alpha$; $\quad cos(270^o - \alpha) = -sin\alpha$;

$tg(270^o - \alpha) = ctg\alpha$; $\quad ctg(270^o - \alpha) = tg\alpha$.

- За аглите од видот $270^o + \alpha$ имаме:

$sin(270^o + \alpha) = -cos\alpha$; $\quad cos(270^o + \alpha) = sin\alpha$;

$tg(270^o + \alpha) = -ctg\alpha$; $\quad ctg(270^o - \alpha) = -tg\alpha$.

Воочи и запомни

- При сведувањето на тригонометриските функции на аглите од видот $180^o \pm \alpha$ и $360^o \pm \alpha$ (на остар агол α) функцијата не се менува, а нејзиниот знак е знакот на функцијата за аголот во тој квадрант.
- При сведување на тригонометриските функции на аглите од видот: $90^o \pm \alpha$ и $270^o \pm \alpha$ (на остар агол α) функцијата преминува во кофункција (синус во косинус и обратно, тангенс во котангенс и обратно), а нејзиниот знак е знакот на функцијата за аголот во тој квадрант.

3 Сведи ги на остри агли тригонометриските функции од агол:

а) 140^o; б) 220^o; в) 290^o; г) 320^o.

Согледај го решението:

- б) $sin220^o = sin(180^o + 40^o) = -sin40^o$; $\quad cos220^o = cos(270^o - 50^o) = -sin50^o$;

$tg220^o = tg(180^o + 40^o) = tg40^o$; $\quad ctg220^o = ctg(180^o + 40^o) = ctg40^o$.

4 Одреди ја вредноста на тригонометриските функции од аголот:

а) 120°; б) 240°; в) 1470°; г) -750°.

Согледај го решението:

а) $sin120^\circ = sin(90^\circ + 30^\circ) = cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$cos120^\circ = cos(180^\circ - 60^\circ) = -cos60^\circ = -\frac{1}{2}$;

$tg120^\circ = tg(90^\circ + 30^\circ) = -ctg30^\circ = -\sqrt{3}$;

$ctg120^\circ = ctg(90^\circ + 30^\circ) = -tg60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

г) $sin(-750^\circ) = -sin(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = -sin30^\circ = -\frac{1}{2}$;

$cos(-750^\circ) = cos750^\circ = cos(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$tg(-750^\circ) = -tg750^\circ = -tg(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = -tg30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$ctg(-750^\circ) = -ctg(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = -ctg30^\circ = -\sqrt{3}$.

5 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $sin330^\circ + tg240^\circ + 4cos150^\circ - 3ctg120^\circ$;

б) $\frac{5}{6}cos1320^\circ \cdot ctg2010^\circ - \frac{3}{4}sin945^\circ \cdot tg570^\circ$;

в) $2sin\frac{3\pi}{2} \cdot ctg\frac{5\pi}{2} + 3cos\frac{7\pi}{3} \cdot tg\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Согледај го решението:

а) $sin(360^\circ - 30^\circ) + tg(180^\circ + 60^\circ) + 4cos(90^\circ + 60^\circ) - 3ctg(90^\circ + 30^\circ) =$

$= -sin30^\circ + tg60^\circ - 4sin60^\circ + 3tg30^\circ = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\frac{1}{2}$.

6 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{sin\alpha - sin\beta}{tg\alpha \cdot ctg\beta}$, ако $sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$;

б) $\frac{cos\beta + ctg\alpha}{tg\beta - sin\alpha}$, ако $cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Согледај го решението:

б) $sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$; $sin\beta = sin(90^o - \alpha) = cos\alpha = \frac{3}{5}$;

$cos\beta = cos(90^o - \alpha) = sin\alpha = \frac{4}{5}$; $tg\beta = \frac{sin\beta}{cos\beta} = \frac{3}{4}$;

$ctg\alpha = ctg(90^o - \beta) = tg\beta = \frac{3}{4}$;

$$\frac{cos\beta + ctg\alpha}{tg\beta - sin\alpha} = \frac{\frac{4}{5} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{31}{20}}{-\frac{1}{20}} = -31.$$

7 Докажи ги идентитетите:

а) $sin(2\pi + \alpha) \cdot ctg(3\pi + \alpha) - cos(2\pi - \alpha) \cdot tg(3\pi - \alpha) = sin\alpha + cos\alpha$;

б) $\left[cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + cos(2\pi - \alpha)\right]^2 + \left[sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + sin(\pi - \alpha)\right]^2 = 2$.

Согледај го решението:

а) $sin(2\pi + \alpha) \cdot ctg(3\pi + \alpha) - cos(2\pi - \alpha) \cdot tg(3\pi - \alpha) =$

$= sin\alpha \cdot ctg\alpha - cos\alpha \cdot (-tg\alpha) = sin\alpha \cdot \frac{cos\alpha}{sin\alpha} + cos\alpha \cdot \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = cos\alpha + sin\alpha.$

Задачи

1 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $sin390^o + tg780^o - 2cos585^o - 3ctg960^o$;

б) $sin\frac{5\pi}{6} - tg\frac{5\pi}{3} + cos\frac{5\pi}{4} + ctg\frac{9\pi}{4}$.

2 Упрости го изразот:

а) $sin(90^o - \alpha) - sin(\alpha - 180^o) + sin(270^o - \alpha) - sin(\alpha - 360^o) + sin\alpha$;

б) $tg(\alpha + 45^o) \cdot tg(45^o - \alpha)$.

3 Докажи ги идентитетите:

а) $\frac{cos(\alpha + 270^o) sin(\alpha - 180^o) tg(\alpha - 90^o)}{tg(\alpha + 270^o) ctg(\alpha - 90^o) cos(-\alpha)} = sin\alpha$;

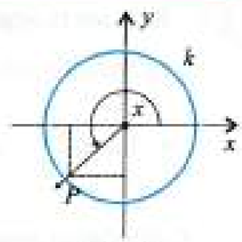
б) $cos575^o \cdot cos865^o + sin505^o \cdot sin395^o + tg1104^o \cdot tg606^o = 2$.

6 ПОИМ И ДЕФИНИЦИЈА НА ТРИГОНОМЕТРИСКА ФУНКЦИЈА ОД РЕАЛЕН АРГУМЕНТ

Потсети се!

- Радијан е централен агол, што му одговара на кружен лак чија должина е еднаква на радиусот на кружницата.
- $k \in \mathbb{Z}$. $1rad = \frac{180^o}{\pi}$.
- Колкава е радијанската мерка за 360^o?
- Нека радијанската мерка на α^o е $x\ rad$, колкава е радијанската мерка на аголот $\alpha^o \pm k \cdot 360^o$?

А Од дефиницијата на тригонометриските функции од кој било агол следува дека вредностите зависат од координатите на пресечната точка на подвижниот крак од аголот и тригонометриската кружница, а не зависат од мерната единица со која е измерен аголот.



црт. 1

- Пред да ја дефинираме тригонометриската функција во множеството на реалните броеви ќе напомeнеме дека, на должината на кој било кружен лак што го отсекува вториот крак на аголот од тригонометриската кружница му соодветствува еден и само еден реален број, и обратно.

За таа цел се користи должинска единица мерка за аголот, т.е. радијан.

Ако подвижниот крак на аголот, чиј мерен број е $x\ rad$, ја сече кружницата во точката P, црт. 1, тогаш должината на лакот е бројот x, бидејќи радиусот на кружницата е еднаков на 1.

Оттука следува дека на секој реален број x може да се придружи единствена точка P во која вториот крак од аголот ја сече тригонометриската кружница.

Според тоа ја имаме следнава:

Дефиниција: Секоја од функциите $f(x) = sinx,\ x \in \mathbb{R}$; $f(x) = cosx,\ x \in \mathbb{R}$; $f(x) = tgx,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0,5\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ и $f(x) = ctgx,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ се вика **тригонометриска функција од реален аргумент**.

- Функцијата $y = f(x)$ дефинирана во множеството D, која има својство да постои позитивен број T, $T \neq 0$ така што ако $x \in D$, тогаш $(x \pm T) \in D$ и за секое $x \in D$ важи $f(x \pm T) = f(x)$ се вика периодична функција со период T.

Тригонометриските функции $y = sinx$ и $y = cosx$ се периодични со период 2π, а функциите $y = tgx$ и $y = ctgx$ се периодични со период π.

Периоди на функциите $sinx$ и $cosx$ се и броевите: $\pm 4\pi$; $\pm 6\pi$; ..., но бројот 2π се вика основен период на функциите $y = sinx$ и $y = cosx$.

Б 1 Нацртај го графикот на функцијата:

а) $y = sinx$; б) $y = cosx$ во интервалот $[0, 2\pi]$.

- Секоја функција може да се претстави аналитички (во вид на формула), табеларно и графички.

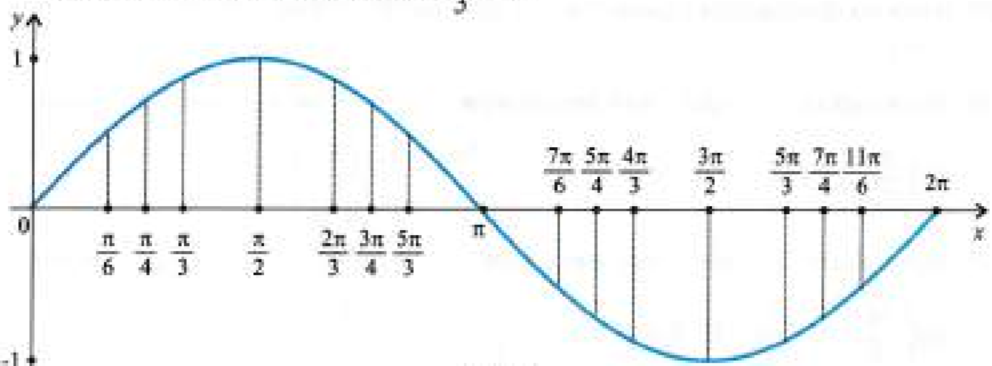
Согледај го решението:

- а) Функцијата $y = sinx$ ќе ја претставиме табеларно.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

- При графичкото претставување треба да се има предвид дека реалниот аргумент е претставен во радијани, црт. 2.

Од $\pi\, rad = 3{,}14$, следува дека $\frac{\pi}{3} \approx 1$.

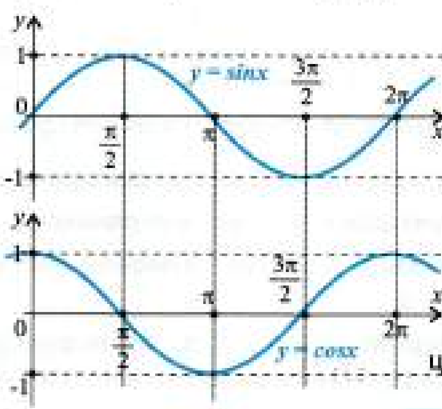


црт. 2

- Понатаму заради практичност и брзо цртање, графиците на функциите $y = sinx$ и $y = cosx$ ќе ги цртаме со карактеристични точки на функцијата, т.е. точките во кои функцијата има нули, минимум и максимум, црт. 3.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sinx$	0	1	0	-1	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$cosx$	1	0	-1	0	1



црт. 3

Бидејќи $sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=cos\,x$, значи графикот на функцијата $y=cosx$ можеме да го нацртаме така што графикот на функцијата $y=sinx$ ќе го поместиме за $\frac{\pi}{2}$ налево.

Функцијата $y=sinx$ ги има следниве својства:

1° Од дефиницијата на тригонометриска функција следува функцијата $y=sinx$ е **дефинирана** за секој реален број, т.е. $x\in(-\infty,\infty)$.

2° Функцијата $y=sinx$ е **ограничена**, т.е. $-1\leq sinx\leq 1$.

3° Функцијата $y=sinx$ е **периодична** функција со период 2π, т.е. $sin(x+2k\pi)=sinx,\ k\in Z$.

4° Од својството $sin(-x)=-sinx$ следува дека функцијата $y=sinx$ е непарна, па нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

5° **Нули** на функцијата (вредности на аргументот за кои $sinx=0$) се $x=k\pi$, $k\in Z$.

6° Функцијата $y=sinx$ има **максимум** $y_{max}=1$, за $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, бидејќи $sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1$, $k\in Z$, т.е. $x\in\left\{\ldots,-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\ldots\right\}$.

7° Функцијата $y=sinx$ има **минимум** $y_{min}=-1$, за $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, бидејќи $sin\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)=-1$, $k\in Z$, т.е. $x\in\left\{\ldots,-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{11\pi}{2},\ldots\right\}$.

8° Потсети се: функцијата синус во интервалот од $(0,2\pi)$ расте во I –от и IV –от квадрант, а опаѓа во II –от и III –от квадрант.

Функцијата $y=sinx$ монотоно расте од -1 до 1 ако $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, а монотоно опаѓа од 1 до -1 ако $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Функцијата $y=cosx$, ги има следниве својства:

1° Функцијата $y=cosx$ е **дефинирана** за секој реален број x, т.е. $x\in(-\infty,\infty)$.

2° Функцијата $y=cosx$ е **ограничена**, т.е. $-1\leq cosx\leq 1$.

3° Функцијата $y=cosx$ е **периодична**, со период 2π, т.е. $cos(x+2k\pi)=cosx$, $k\in Z$.

4° Бидејќи $cos(-x)=cosx$, значи функцијата $y=cosx$ е парна, т.е. нејзиниот график е симетричен во однос на y – оската.

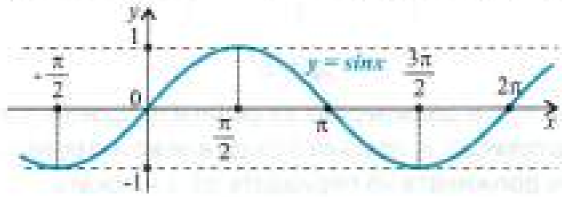
5° **Нулите** на функцијата $y = cosx$ се во пресекот со x –оската, т.е. $cosx = 0$ за $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ или $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots \right)$.

6° Функцијата $y = cosx$ има **максимум**, $y_{max} = 1$, за $x = 2k\pi$, $k \in Z$, т.е. $x \in \{\dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots\}$.

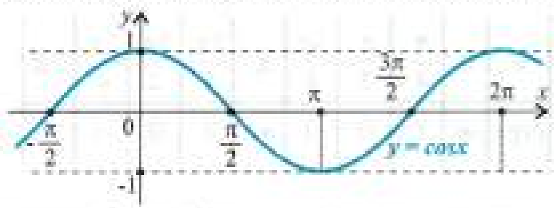
7° Функцијата $y = cosx$ има **минимум**, $y_{min} = -1$, за $x = (2k + 1)\pi$, $k \in Z$, т.е. $x \in \{\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots\}$.

8° Функцијата $y = cosx$ монотоно опаѓа од 1 до – 1 ако $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, а монотоно расте од – 1 до 1 ако $x \in (2k\pi - \pi, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Графиците на функциите $y = sinx$ и $y = cosx$ во интервалот $(-\infty, \infty)$ ќе ги цртаме така што графикот што е на интервалот од $(0, 2\pi)$ го пренесуваме на секој интервал со должина 2π, т.е. од $(2\pi, 4\pi)$, $(4\pi, 6\pi)$, $(-2\pi, 0)$ итн, црт. 4.



Графикот на функцијата $y = sinx$ се вика **синусоида.**



Графикот на функцијата $y = cosx$ се вика **косинусоида**.

црт. 4

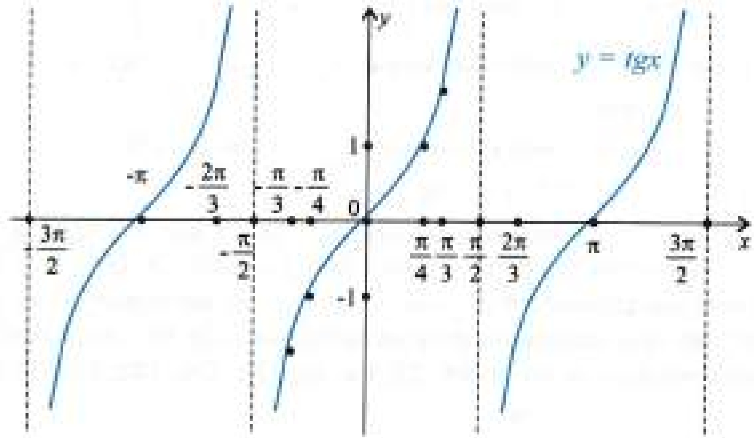
В График и својства на функцијата $y = tgx$ и функцијата $y = ctgx$.

Функцијата $y = tgx$ е дефинирана за реалните броеви $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Таа е периодична со основен период π. За да го нацртаме нејзиниот график, доволно е да го нацртаме графикот во интервалот од $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а потоа да го транслатираме за должината на периодот по x –оската.

Функцијата $y = tgx$ ќе ја претставиме табеларно.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
tgx	0	1	‖	-1	0	1	‖	1	0

Графикот на функцијата $y = tgx$ се вика тангенсоида и е претставен на црт. 5.



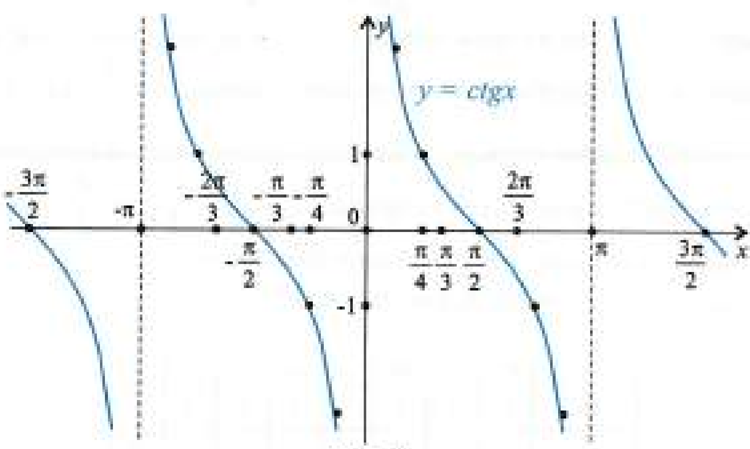
црт. 5

Функцијата $y = ctgx$ е дефинирана за реалните броеви $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Таа е периодична со периода π, графикот го цртаме во интервал $(0, \pi)$, а потоа го поместуваме за должината на периодата по x – оската.

Функцијата $y = ctgx$ ќе ја претставиме табеларно.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$ctgx$	∞	1	0	-1	∞	1	0	-1	0

Графикот на функцијата $y = ctgx$ се вика котангенсоида и е претставен на црт. 6.



црт. 6

Воочи, функцијата $y = tgx$ не е дефинирана за $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а $y = tgx$ не е дефинирана за $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Графикот на функцијата $y = tgx$ се вика **тангенсоида**, а на функцијата $y = ctgx$, **котангенсоида**.

Својства на функцијата $y = tgx$.

1° Функцијата $y = tgx$ е дефинирана за секој реален број $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2° Функцијата е **неограничена**, т.е. $-\infty < tgx < +\infty$.

3° Функцијата е **периодична**, со период π, т.е. $tg(x + k\pi) = tgx$, $k \in \mathbb{Z}$.

4° Бидејќи $tg(-x) = -tgx$, значи функцијата $y = tgx$ е **непарна**.

5° **Нулите** на функцијата се $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е. $x \in \{..., -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$.

6° Функцијата $y = tgx$ **расте** од $-\infty$ до $+\infty$) ако $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

7° Правите $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се вертикални **асимптоти** на тангенсоидата.

Својства на функцијата $y = ctgx$.

1° Функцијата $y = ctgx$ е дефинирана за секој реален број $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, ...$

2° Функцијата е **неограничена**, т.е. $-\infty < ctgx < +\infty$.

3° Функцијата е **периодична**, со период π, т.е. $ctg(x + k\pi) = ctgx$, $k \in \mathbb{Z}$.

4° Функцијата е **непарна**, т.е. $ctg(-x) = -ctgx$.

5° **Нулите** на функцијата се $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е. $x \in \left\{..., -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...\right\}$.

6° Функцијата $y = ctgx$ **опаѓа** од $+\infty$ до $-\infty$ ако $x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$.

7° Правите $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ се вертикални **асимптоти** на котангенсоидата.

7 ГРАФИК И СВОЈСТВА НА ФУНКЦИИТЕ $y = asin(x + c)$ и $y = acos(x + c)$

А Функцијата $y = sinx$ е ограничена т.е. $-1 \leq sinx \leq 1$, и функцијата $y = asinx$ е ограничена, т.е. $-|a| \leq asinx \leq |a|$, a $a \neq 0$. Истото важи и за функцијата $y = acosx$, т.е. $-|a| \leq cosx \leq |a|$. Графикот на функцијата $y = asinx$ и $y = acosx$ се наоѓа меѓу правите $y = a$ и $y = -a$.

Бројот a се вика амплитуда на функцијата.

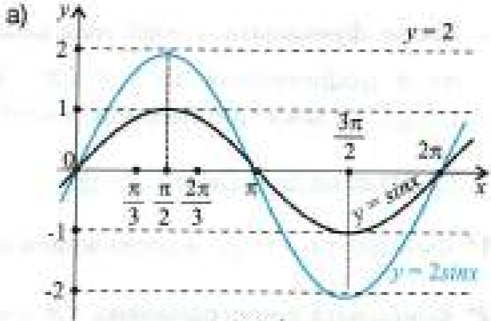
1 Нацртај го графикот на функциите:

а) $y = 2sinx$; б) $y = \frac{1}{2}\cos x$; в) $y = -2cosx$.

а) Графикот на функцијата $y = 2sinx$ ќе го нацртаме на следниот начин:

1° Го цртаме графикот $y = sinx$;

2° Го цртаме графикот $y = 2sinx$, така што амплитудата на претходниот график ја зголемуваме двапати, црт. 1, т.е. $y_{max} = 2, y_{min} = -2$.



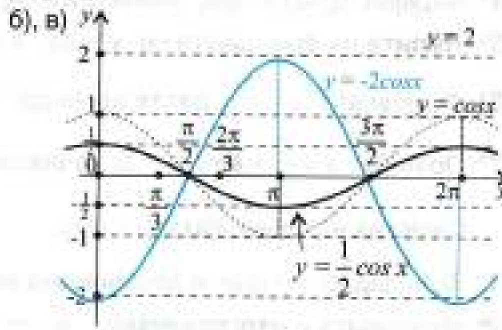
црт. 1

б) Графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}cos\, x$ ќе го нацртаме на следниот начин:

1° Го цртаме графикот $y = cosx$;

2° Го цртаме графикот $y = \frac{1}{2}cos\, x$, така што амплитудата на претходниот график ја намалуваме двапати.

в) Функцијата $y = -2cosx$ е нацртана така што амплитудата на основната функција $y = cosx$ е помножена со -2.



црт. 2

2 Графички претстави ги функциите:

а) $y = \frac{1}{2}sin\, x$; б) $y = -2sinx$; в) $y = 2cosx$; г) $y = -\frac{1}{2}cos\, x$.

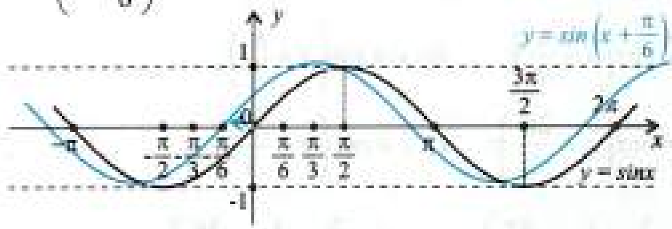
Функцијата $y = sin(x + c)$ има исти својства **1°**, **2°** и **3°** како и функцијата $y = sinx$.

- Нулите на функцијата се одредуваат со решавање на равенката $x + c = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Максимумот на функцијата го добиваме од равенката $x + c = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Минимумот на функцијата го добиваме од равенката $x + c = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Графикот на функцијата $y = sin(x + c)$ може да се конструира со помош на графикот на функцијата $y = sinx$, со паралелно поместување на истиот налево за вредноста на $|c|$ ако $c > 0$, или надесно ако $c < 0$.

3 Графички претстави ја функцијата:

а) $y = sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = 2cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

а) Го цртаме графикот на функцијата $y = sinx$, а потоа со паралелно поме-
стување на тој график за $\frac{\pi}{6}$ налево $\left(c = \frac{\pi}{6} > 0\right)$ се добива графикот на функцијата $y = sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, црт. 3



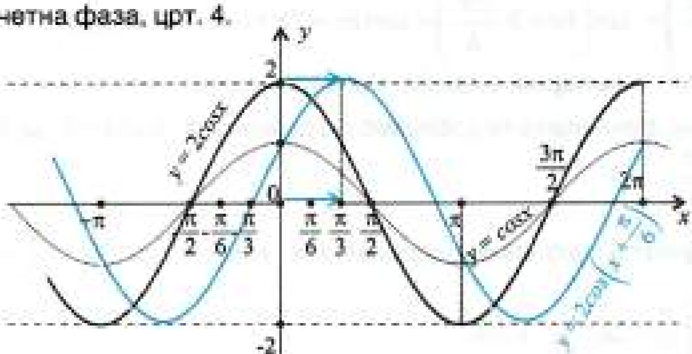
црт. 3

Бројот c покажува за колку треба да се помести графикот на функцијата $y = sinx$, по x –оската. Ваквото поместување се вика **фазно поместување**.

Решението на равенката $x + c = 0$, т.е. $x = -c$ се вика **почетна фаза**.

Во дадениов случај имаме $x + \frac{\pi}{6} = 0$, т.е. $x = -\frac{\pi}{6}$ е почетна фаза.

б) Графикот на функцијата $y = 2cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ќе го нацртаме со поместување на графикот на функцијата $y = 2cosx$ за $\frac{\pi}{3}$ надесно, бидејќи од $x - \frac{\pi}{3} = 0$ следува $x = \frac{\pi}{3}$ е почетна фаза, црт. 4.



црт. 4

4 Нацртај го графикот на функциите:

а) $y = -2\,sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \frac{3}{2}cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Задачи

Графички претстави ги функциите:

1 а) $y = -sinx$; б) $y = \frac{1}{2}sinx$; в) $y = -\frac{1}{2}cosx$; г) $y = 3cosx$.

2 а) $y = cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$; г) $y = cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

3 а) $y = \frac{1}{2}sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$; б) $y = -\frac{3}{2}cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

8 ГРАФИК И СВОЈСТВА НА ФУНКЦИИТЕ $y = asinbx$ и $y = acosbx$

A Функцијата $y = sinbx$ ги има следниве својства:*

1° **Дефинирана** е за секој реален број x.

2° Функцијата е **ограничена**, т.е. $-1 \leq sinbx \leq 1$.

3° Функцијата $y = sinbx$ е **периодична** со периода $T = \frac{2\pi}{|b|}$. за $b \neq 0$

$sin\,b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right) = sin\left(bx + b \cdot \frac{2\pi}{b}\right) = sin(bx + 2\pi) = sin\,bx.$. Бидејќи $T > 0, T = \frac{2\pi}{|b|}$.

4° Функцијата е **непарна**, бидејќи $sin(-bx) = -sinbx$.

5° **Нулите** на функцијата ги добиваме од равенката: $sinbx = 0$ за $bx = k\pi$, т.е. за $x = \frac{k\pi}{b}$, $k \in \mathbb{Z}$.

6° **Максимумот** го добиваме од равенката: $sinbx = 1$ за $bx = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, т.е.

за $x = \frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7° **Минимумот** го добиваме од равенката: $sinbx = -1$ за $bx = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, т.е.

за $x = \frac{1}{b}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

1 Нацртај го графикот на функциите: а) $y=\frac{3}{2}\sin 2x$; б) $y=\sin\frac{x}{2}$.

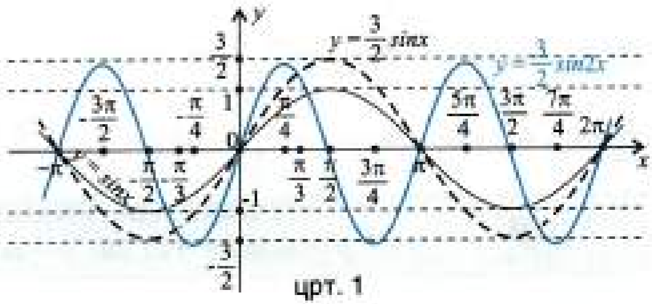
а) Графикот на функцијата $y=\frac{3}{2}\sin 2x$ ќе го нацртаме на следниов начин:

1. Го цртаме графикот на функцијата $y=\sin x$.

2. Го цртаме графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}\cos x+1$.

3. Периодот на функцијата $y=\frac{3}{2}\sin 2x$ е π. Бидејќи за $b=2, \frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Значи, во однос на синусоидата, графикот на функцијата $y=\frac{3}{2}\sin 2x$ е "збиен" во правец на x – оската, т.е. една периода на синусоидата $(0, 2\pi)$ ќе биде "збиена" на интервалот $(0, \pi)$, црт. 1.



црт. 1

Б 2 Нацртај го графикот на функциите: а) $y=2\cos\frac{x}{2}$; б) $y=-\frac{1}{2}\cos 2x$.

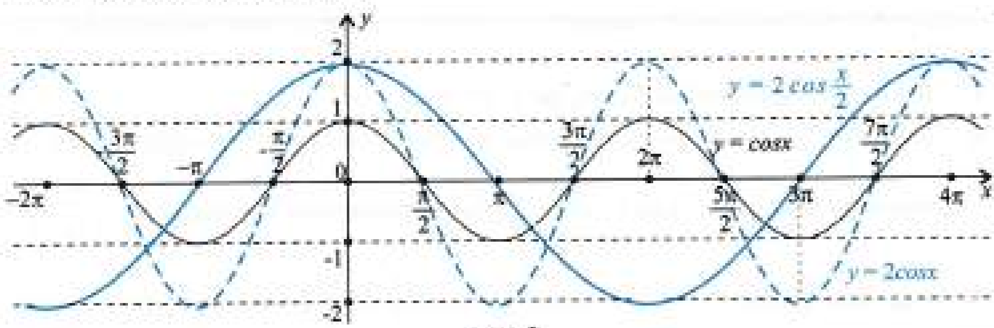
Сoгледај го решението:

а) Графикот на функцијата $y=2\cos\frac{x}{2}$ ќе го нацртаме на следниов начин.

1. Го цртаме графикот на функцијата $y=\cos x$.

2. Го цртаме графикот $y=2\cos x$. **3.** Периодот на функцијата е $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

Значи, во однос на функцијата $y=2\cos x$ графикот ќе биде "растегнат" во правец на x – оската, т.е. периодот $(0, 2\pi)$ на косинусоидата ќе биде растегнат на интервалот $(0, 4\pi)$, црт. 2.



црт. 2

Својствата на функцијата $y = 2\cos\frac{x}{2}$ се:

1° $D_f: x \in \mathbb{R}$. **2°** $V_f: y \in [-2, 2]$. **3°** Функцијата е парна, бидејќи $2\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\cos\frac{x}{2}$. **4°** $y = 0$ за $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **5°**. $y_{max} = 2$ за $x = 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **6°** $y_{min} = -2$ за $x = 2\pi + 4k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; **7°** Функцијата е периодична со основен период 4π.

Задачи

Нацртај го графикот на функциите:

(1) а) $y = \sin 3x$; б) $y = \sin\frac{x}{3}$; в) $y = 2\sin\frac{x}{2}$; г) $y = -\frac{1}{2}\sin 2x$.

(2) а) $y = \cos 3x$; б) $y = \cos\frac{x}{3}$; в) $y = \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}$; г) $y = -\frac{3}{2}\cos 2x$.

9 ГРАФИК НА ФУНКЦИИТЕ
$y = a\sin(bx + c)$ и $y = a\cos(bx + c)$

- Функцијата $y = a\sin(bx + c)$, може да се напише во следниов вид:

$$y = a\sin b\left(x + \frac{c}{b}\right).$$

- Бројот a ја одредува аплитудата на функцијата.
- Бројот b ја одредува фреквенцијата (зачестеноста), т.е. периодата на функцијата, $T = \frac{2\pi}{|b|}$.
- Изразот $bx + c$ се вика фаза на дадената функција. Вредноста на фазата за $x = 0$, е бројот c кој се вика почетна фаза.
- Бројот $\frac{c}{b}$ е фазно поместување.

Според тоа графикот на фунцкијата $y = a\sin(bx + c)$ ќе го нацртаме на следниов начин:

1. Го цртаме графикот на функцијата $y = \sin x$.

2. Го цртаме графикот на функцијата $y = \sin bx$, така што периодот $(0, 2\pi)$ на синусоидата го сместуваме ("збиваме" или "растегаме") во период $\left(0, \frac{2\pi}{|b|}\right)$.

3. Го цртаме графикот на функцијата $y = \sin b\left(x + \frac{c}{b}\right)$, така што претходниот график го поместуваме по x оската за вредноста на $\left|\frac{c}{b}\right|$, налево ако $\frac{c}{b} > 0$, или надесно ако $\frac{c}{b} < 0$.

4. Амплитудата на претходната функција ја зголемуваме, намалуваме a пати.

1 Нацртај го графикот на функциите:

а) $y = sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = -\frac{3}{2} sin\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right)$.

***Согледај го решението* а):**

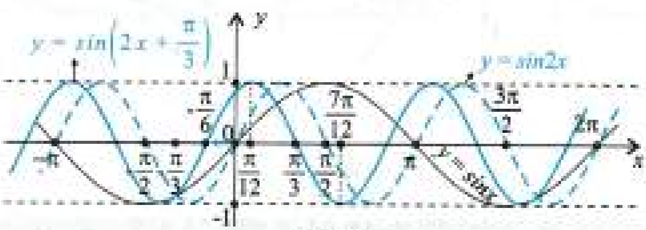
1. Го цртаме графикот на функцијата $y = sinx$.

2. Го цртаме графикот на функцијата $y = sin2x$, така што периодот $(0, 2\pi)$ на синусоидата го "збиваме" во период од $(0, \pi)$.

3. Го цртаме графикот на функцијата $y = sin2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, така што графикот на претходната функција го поместуваме за $\frac{\pi}{6}$ налево.

4. Воочи, $a = 1$.

Графикот на дадената функција е прикажан на црт.1.



црт. 1

2 Нацртај го графикот на функцијата:

а) $y = 3cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \frac{1}{2} cos(3x - \pi)$.

Согледај го решението:

а) Од дадената функција $y = 3cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; $\left(a = 3, b = \frac{1}{2}, c = \frac{\pi}{4}\right)$ следува:

- $a = 3$, значи графикот е меѓу правите $y = 3$ и $y = -3$.
- Периодот на функцијата е $T = 4\pi$.
- Фазното поместување е $\frac{c}{b} = \frac{\pi}{2}$.

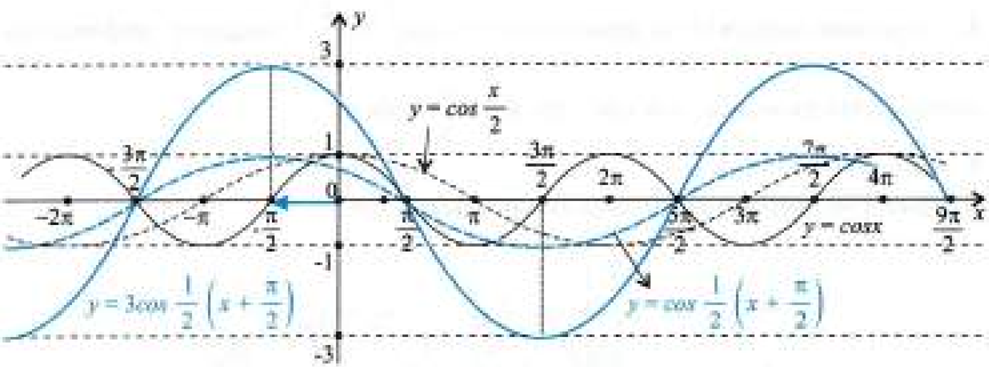
Графикот на дадената функција ќе го нацртаме на следниов начин.

1. Го цртаме графикот на фунцкијата $y = cosx$.

2. Го цртаме графикот на функцијата $y = cos\frac{x}{2}$, така што претходниот график што е во интервалот $(0, 2\pi)$ го "растегаме" во интервалот $(0, 4\pi)$.

3. Го цртаме графикот на функцијата $y = cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ така што претходниот график го поместуваме за $\frac{\pi}{2}$ (фазно поместување) налево.

4. Бараниот график на функцијата $y = 3cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ го добиваме со менување на амплитудата така што растојанието на минимумот и максимумот од x–оската се зголемува три пати. Графикот е прикажан на црт.2.



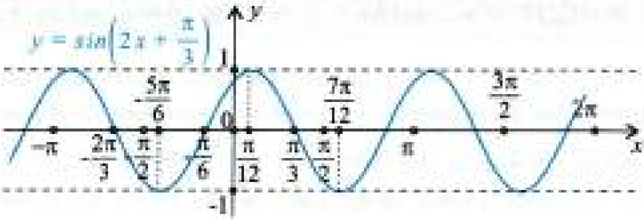
црт. 2

Графикот на секоја функција може да се нацрта и со одредување на карактеристичните точки на функцијата, т.е. со одредување на нулите на функцијата, на точките во кои функцијата има минимум, односно максимум.

За функцијата $y = sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ имаме:

Нули: $y = 0$:	**max:** $y = 1$:	**min:** $y = -1$:
$2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;	$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;	$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
k = 0 $x=-\frac{\pi}{6}=-\frac{2\pi}{12}$;	**k = 0** $x=\frac{\pi}{12}$;	**k = 0** $x=\frac{7\pi}{12}$;
k = 1 $x=\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{12}$;	**k = -1** $x=-\frac{11\pi}{12}$;	**k = 1** $x=\frac{19\pi}{12}$;
k = -1 $x=-\frac{2\pi}{3}=-\frac{8\pi}{12}$;	**k = 1** $x=\frac{13\pi}{12}$;	**k = -1** $x=-\frac{5\pi}{12}$.

Графикот на функцијата е прикажан на црт.3.



црт. 3

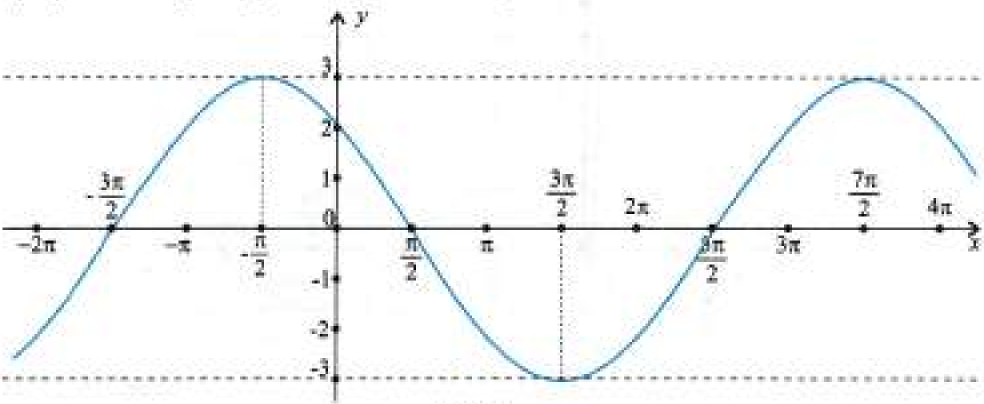
За функцијата $y = 3cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Нулите се $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ...\right\}$.

2. $y_{max} = 3$ за $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, ...\right\}$.

3. $y_{min} = -3$ за $x \in \left\{-\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...\right\}$.

Графикот на функцијата е прикажан на црт.4.



црт. 4

Задачи

Нацртај го графикот на функциите:

1 а) $y = cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = sin\left(\frac{4x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.

2 а) $y = cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = -\frac{1}{2}sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

10 ГРАФИЦИ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ОД ВИДОТ $y = a\sin(bx + c) + d$ и $y = a\cos(bx + c) + d$

Бројот d ги зголемува (ако $d > 0$), намалува (ако $d < 0$) ординатите на секоја точка од графикот на функцијата $y = a\sin(bx + c)$ или $y = a\cos(bx + c)$.

Графикот се црта така што графикот на функцијата $y = a\sin(bx + c)$ или $y = a\cos(bx + c)$ го поместуваме за вредноста на $|d|$ по y – оската нагоре ако $d > 0$, надолу ако $d < 0$.

1 Нацртај го графикот на функциите:

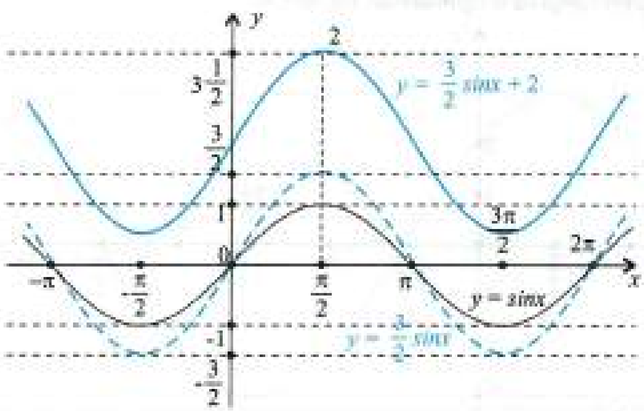
а) $y = \frac{3}{2}\sin x + 2$; б) $y = -\frac{1}{2}\cos x + 1$.

Согледај го решението:

а) **1.** Го цртаме графикот $y = \sin x$;

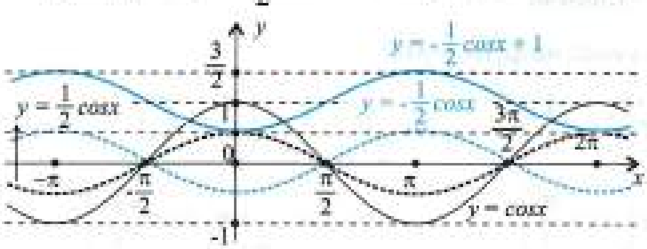
2. Го цртаме графикот $y = \frac{3}{2}\sin x$,

3. $d = 2$, па претходниот график го поместуваме за 2 единици по y –оската нагоре, црт. 1.



црт. 1

б) Графикот на функцијата $y = -\frac{1}{2}\cos x + 1$ е претставен на црт. 2.



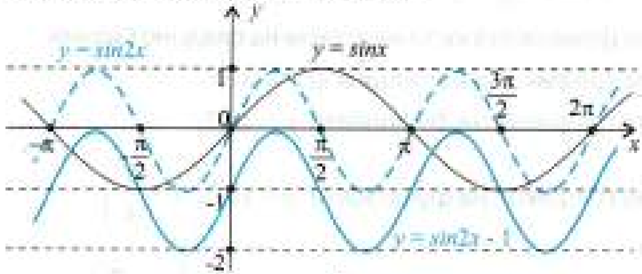
црт. 2

2 Нацртај го графикот на функциите: а) $y=\frac{3}{2}sin\,2x-1$; б) $y = 2cosx - 1$.

3 Нацртај го графикот на функциите: а) $y = sin2x - 1$; б) $y=2cos\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$.

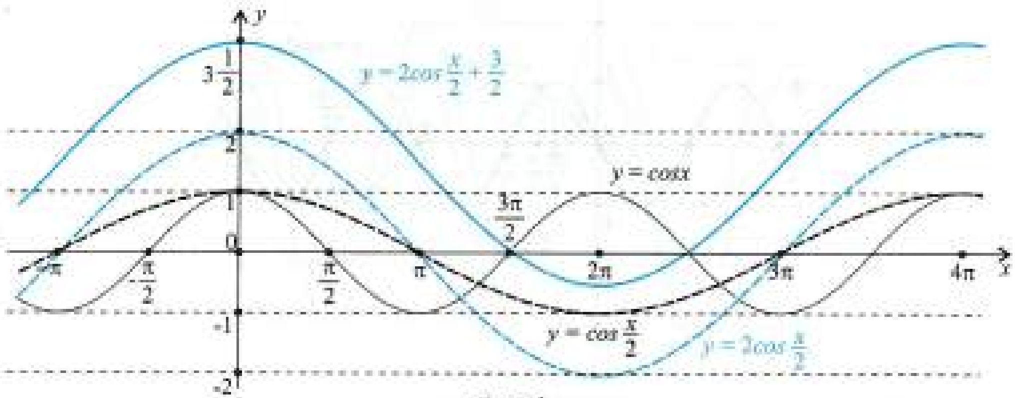
Погледај го решението:

а) Го цртаме графикот на функцијата $y = sin2x$, а потоа тој график го поместуваме по y–оската надолу за 1 (црт.3).



црт. 3

б) Го цртаме графикот на функцијата $y=2cos\frac{x}{2}$, а потоа по y оската, нагоре го поместуваме за $d=1\frac{1}{2}$, црт. 4.



црт. 4

4 Нацртај го графикот на функциите: а) $y=2sin\frac{x}{2}-2$; б) $y = -cos2x - 1$.

5 Нацртај го графикот на функциите:

а) $y=2sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-1$; б) $y=\frac{3}{2}cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1$.

Согледај го решението:

а) Воочи $a = 2$; $b = 2$; $c = \dfrac{\pi}{2}$ и $d = -1$.

- Периодот на функцијата е $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.
- Фазно поместување $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\pi}{4}$.
- Графикот на функцијата ќе го нацртаме на следниот начин:

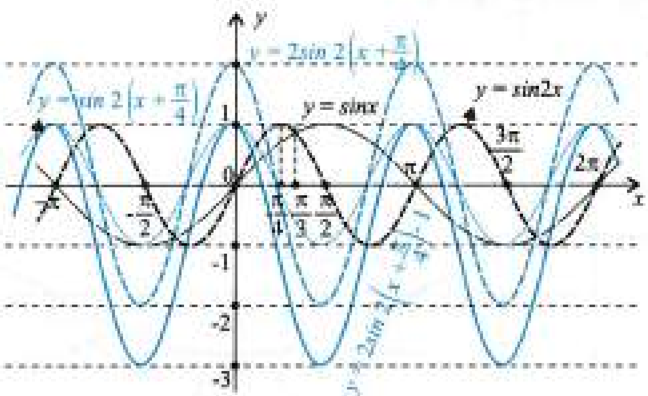
  1. Го цртаме графикот на функцијата $y = sinx$.

  2. Го цртаме графикот на функцијата $y = sin2x$.

  3. Го цртаме графикот на функцијата $y = sin2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

  4. Го цртаме графикот на функцијата $y = 2sin2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

  5. Го цртаме графикот на функцијата $y = 2sin2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)-1$.



црт. 5

б) Го цртаме графикот на функцијата $y = \dfrac{3}{2}cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$, со помош на графикот на функцијата $y = \dfrac{3}{2}cos\,x$, кој го поместуваме за $\dfrac{\pi}{6}$ надесно. Така добиениот график го поместуваме по y – оска за $d = -1$ надолу.

Графикот на функцијата нацртај го сам.

Задачи

Графички претстави ги функциите:

1. а) $y = -2\sin x + 1$; б) $y=\frac{1}{2}\cos x-2$.

2. а) $y=3\sin\frac{x}{2}-1$; б) $y = -2\cos 2x + 1$.

3. а) $y=-\frac{3}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$; б) $y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+1$.

11 ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ СИНУС И КОСИНУС ОД ЗБИР И РАЗЛИКА НА ДВА АГЛИ

Потсети се!

- За вредностите на тригонометриските функции од $30°$, $60°$, $45°$.
- За дефиницијата на тригонометриските функции од остар агол во правоаголен триаголник.
- Аглите со заемно паралелни краци се еднакви или суплементни.
- Какви се аглите со заемно нормални краци?
- $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

А 1 Провери ја точноста на равенството:

$$\sin(30° + 90°) = \sin 30°\cos 90° + \sin 90°\cos 30°$$

Согледај го решението:

$$\sin(30° + 90°) = \cos 30° = \frac{1}{2}\cdot 0+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ или } \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значи, равенството е точно.
За синус и косинус од збир на два агли важи следнава

Теорема. Ако α и β се кои било два агли, тогаш:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

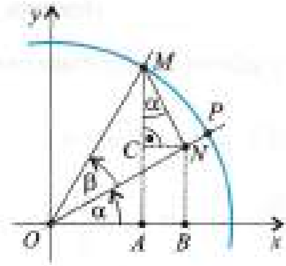
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Доказ. Нека се α и β централни агли во тригонометриска кружница, кои немаат заедничка внатрешна област, а имаат заеднички крак OP и радиус $\overline{OM}=1$ црт. 1.

- Конструираме $MN \perp OP$, $MA \perp OX$, $NB \perp OX$ и $NC \perp MA$.
- Според дефиницијата на синус од произволен агол, следува:

$$sin(\alpha+\beta) = \overline{MA} = \overline{MC} + \overline{CA} = \overline{MC} + \overline{NB},$$

бидејќи $\overline{CA} = \overline{NB}$.



црт. 1

- Од ΔOBN следува $sin\alpha = \dfrac{\overline{NB}}{\overline{ON}}$, т.е. $\overline{NB} = \overline{ON}\,sin\alpha$.

Од ΔONM следува $cos\,\beta = \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OM}}$, т.е. $cos\,\beta = \overline{ON}$, бидејќи $\overline{OM} = 1$.

Од двете равенки следува $\overline{NB} = cos\,\beta\,sin\alpha$.

- $\measuredangle NMC = \alpha$ (како агли со нормални краци).
- Од ΔMCN следува $cos\,\alpha = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{MN}}$, т.е. $\overline{MC} = \overline{MN}\,cos\,\alpha$.
- Од ΔONM следува $sin\,\beta = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{OM}} = \overline{MN}$, па $\overline{MC} = sin\,\beta\,cos\,\alpha$.

Според тоа $sin(\alpha+\beta) = \overline{MC} + \overline{NB} = sin\beta cos\alpha + cos\beta sin\alpha$, т.е.

$$sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha.$$

2 Пресметај ја вредноста на тригонометриската функција:

а) $sin75^o$, б) $sin105^o$, в) $sin240^o$.

Согледај го решението:

а) $sin75^o = sin(45^o+30^o) = sin45^o cos30^o + sin30^o cos45^o =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

- Теоремата $cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$ докажи ја сам, на ист начин како претходната.
- Истата теорема ќе ја докажеме со користење на својството на комплементни агли, т.е. од $cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = sin\alpha$, имаме $cos(\alpha+\beta) = sin\left[\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right] =$

$$= sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+(-\beta)\right] = sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)cos(-\beta) + sin(-\beta)cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) =$$

$= cos\alpha cos\beta - sin\beta sin\alpha$, т.е.

$$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta.$$

3 Пресметај: а) $cos75^o$, б) $cos105^o$, в) $cos150^o$.

Согледај го решението:

б) $cos105^o = cos(60^o + 45^o) = cos60^o cos45^o - sin60^o sin45^o =$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right).$$

Б За синус и косинус од разлика на два агли важи следнава

Теорема. Ако α и β се кои било два агли, тогаш

$$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha cos\beta - sin\beta cos\alpha$$

$$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$$

Доказ. Бидејќи $sin(-\alpha) = -sin\alpha$, $cos(-\alpha) = cos\alpha$, имаме $sin(\alpha - \beta) = sin[\alpha + (-\beta)]=$ $= sin\alpha cos(-\beta) + sin(-\beta)cos\alpha = sin\alpha cos\beta - sin\beta cos\alpha$.

Втората теорема докажи ја сам.

4 Одреди ја вредноста на $sin15^o$ и $cos15^o$, без употреба на калкулатор.

Согледај го решението:

а) $sin15^o = sin(45^o - 30^o) = sin45^o cos30^o - sin30^o cos45^o =$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

5 Докажи:

а) $sin(180^o - \alpha) = sin\alpha$, б) $cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-sin\alpha$;

в) $sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-cos\alpha$, г) $cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=-sin\alpha$.

Согледај го решението:

в) $sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = sin\frac{3\pi}{2}cos\alpha - sin\alpha\, cos\frac{3\pi}{2} = (-1)cos\alpha - sin\alpha \cdot 0 = -cos\alpha.$.

6 Пресметај: а) $sin(\alpha + \beta)$; б) $cos(\alpha - \beta)$ ако е $sin\alpha = \frac{1}{2}$, $cos\beta = \frac{3}{5}$,

$0^o < \alpha, \beta < 90^o$.

Согледај го решението:

а) Бидејќи $sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+sin\beta cos\alpha$, треба да се пресмета $cos\alpha$ и $sin\beta$. Од основните тригонометриски зависности, имаме.

$$cos\,\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

На ист начин се пресметува $sin\,\beta=\sqrt{1-cos^2\beta}=\frac{4}{5}$.

Според тоа $sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{10}\left(3+4\sqrt{3}\right)$.

7 Пресметај: а) $cos(\alpha+\beta)$, б) $sin(\alpha-\beta)$ ако $sin\,\alpha=\frac{4}{5}$ и $sin\,\beta=-\frac{2}{3}$, а

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

Согледај го решението:

а) Треба да се пресмета $cos\alpha$ и $cos\beta$. Бидејќи $cos\alpha<0$ во третиот квадрант

имаме $cos\,\alpha=-\sqrt{1-sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$, слично $cos\,\beta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Според тоа :

$$cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{15}\left(3\sqrt{5}+8\right).$$

8 Упрости го изразот:

а) $sin55°sin65°-sin25°sin35°$; б) $cos70°cos75°+cos20°cos5°$.

Согледај го решението:

а) Бидејќи $sin55°=sin(90°-35°)=cos35°$ и $sin65°=cos25°$, имаме:

$$sin55°sin65°-sin25°sin35°=cos35°cos25°-sin25°sin35°=$$
$$=cos(35°+25°)=cos60°=\frac{1}{2}.$$

9 Докажи ги идентитетите:

а) $sin(30°-\alpha)+sin(30°+\alpha)=cos\alpha$; б) $cos(60°+\alpha)+cos(60°-\alpha)=\cos\alpha$.

Согледај го решението:

а) $sin(30°-\alpha)+sin(30°+\alpha)=sin30°cos\alpha-sin\alpha cos30°+sin30°cos\alpha+sin\alpha cos30°=$

$=2sin30°cos\alpha=2\cdot\frac{1}{2}cos\alpha=cos\alpha$.

Запомни!

Теоремите:

$sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm sin\beta cos\alpha$ и $cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta$

се викаат адициони теореми.

Задачи

1. Пресметај $cos(\alpha - \beta)$, ако е $sin\alpha = \frac{3}{4}$, $sin\beta = \frac{2}{3}$ (α и β се остри агли).

2. Пресметај $sin(\alpha + \beta)$, ако $sin\alpha = \frac{4}{5}$, $sin\beta = \frac{24}{25}$ (α и β се остри агли).

3. Пресметај $cos(\alpha - \beta)$, ако $cos\alpha = -0{,}96$, $sin\beta = -\frac{12}{13}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

4. Одреди го $sin\alpha$, ако $\alpha + \beta = 60^\circ$, $cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упрости ги изразите:

5. а) $sin20^\circ cos10^\circ + sin10^\circ cos20^\circ$; б) $cos35^\circ cos25^\circ - sin35^\circ sin25^\circ$.

6. $sin(\alpha + 15^\circ)sin(\alpha - 15^\circ) + cos(\alpha + 15^\circ)cos(\alpha - 15^\circ)$.

7. $\dfrac{sin\,20^\circ\,cos\,40^\circ - sin\,40^\circ\,cos\,20^\circ}{cos\,75^\circ\,cos\,85^\circ - cos\,5^\circ\,cos\,15^\circ}$.

Докажи ги идентитетите:

8. а) $cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta) = 2sin\alpha sin\beta$.

9. $cos(\alpha - \beta) \cdot cos(\alpha + \beta) = cos^2\alpha - sin^2\beta$.

12 ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ОД ЗБИР И РАЗЛИКА НА ДВА АГЛИ

Потсети се!

- $tg\alpha = \dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}$; $ctg\alpha = \dfrac{cos\alpha}{sin\alpha}$
- За вредностите на тригонометриските функции од 30°, 45°, 60°.
- Воочи: $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{\frac{a}{m} + \frac{b}{m}}{\frac{c}{m} + \frac{d}{m}}$, $m \neq 0$.
- $tg(-\alpha) = -tg\alpha$; $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$.

За тангенс од збир и разлика на два агли важи следнава

Теорема: Ако α и β се кои било два агли, такви што

$$\alpha, \beta, \alpha+\beta, \alpha-\beta \notin \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}, \text{ тогаш}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}; \qquad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Доказ: $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{sin(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{sin\alpha\cos\beta+sin\beta\cos\alpha}{cos\alpha\cos\beta-sin\alpha\sin\beta}$.

Броителот и именителот го делиме со $cos\alpha\cdot cos\beta$.

$$\frac{\dfrac{sin\alpha\cos\beta}{cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{sin\beta\cos\alpha}{cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha\cos\beta}{cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{sin\alpha\sin\beta}{cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}.$$

Вториот дел од теоремата докажи ја користејќи го својството $tg(-\beta)=-tg\beta$.

1 Одреди ги вредностите на: а) $tg105^\circ$; б) $tg15^\circ$; в) $tg135^\circ$.

Согледај го решението:

$tg105^\circ = tg(45^\circ+60^\circ)=\dfrac{tg45^\circ+tg60^\circ}{1-tg45^\circ\cdot tg60^\circ}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-\left(2+\sqrt{3}\right)$

2 Пресметај: а) $tg(60^\circ-\alpha)$, ако $ctg\alpha=\dfrac{3}{4}$; б) $tg(45^\circ+\alpha)$, ако $sin\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Согледај го решението:

б) $cos\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а $tg\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, па

$$tg(45^\circ+\alpha)=\frac{tg45^\circ+tg\alpha}{1-tg45^\circ\cdot tg\alpha}=\frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}.$$

За котангес од збир и разлика од два агли важи следнава

Теорема: Ако α и β се кои било два агли, такви што

$$\alpha, \beta, \alpha+\beta, \alpha-\beta \notin \{\pi+k\pi / k\in\mathbb{Z}\}, \text{ тогаш}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}; \qquad ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

а) Доказот е идентичен на доказот на претходната теорема.
Истата теорема ќе ја докажеме:
а) користејќи го својството на комплементни агли, т.е. од $ctg(90^\circ - \alpha) = tg\alpha$, имаме:

$$ctg(\alpha + \beta) = tg[90^\circ - (\alpha + \beta)] = tg[(90^\circ - \alpha) - \beta] = \frac{tg(90^\circ - \alpha) - tg\beta}{1 + tg(90^\circ - \alpha)\cdot tg\beta} =$$

$$= \frac{ctg\alpha - tg\beta}{1 + ctg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{ctg\alpha - \dfrac{1}{ctg\beta}}{1 + ctg\alpha \cdot \dfrac{1}{ctg\beta}} = \frac{ctg\alpha ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}.$$

б) Користејќи го равенството $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$ (докажи ја сам).

3 Одреди: а) $ctg15^\circ$; б) $ctg75^\circ$; в) $ctg330^\circ$.

Соīледај іо решениеīо:

б) $ctg75^\circ = ctg(45^\circ + 30^\circ) = \dfrac{ctg45^\circ ctg30^\circ - 1}{ctg45^\circ + ctg30^\circ} = \dfrac{1\cdot\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$

4 Докажи дека:

а) $tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$; б) $ctg\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = tg\alpha$; в) $ctg\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -tg\alpha$.

Соīледај іо решениеīо:

а) $tg(\pi - \alpha) = \dfrac{tg\pi - tg\alpha}{1 + tg\pi \cdot tg\alpha} = \dfrac{0 - tg\alpha}{1 + 0\cdot tg\alpha} = -tg\alpha$.

5 Пресметај го $tg(\alpha + \beta)$, ако $tg\alpha = \dfrac{1}{2}$ и $sin\,\beta = \dfrac{7}{25}$ (α, β се остри агли).

Соīледај іо решениеīо:

За пресметување на изразот потребно е $tg\beta$, односно $cos\beta$.

$cos\,\beta = \sqrt{1 - sin^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{49}{625}} = \sqrt{\dfrac{576}{625}} = \dfrac{24}{25}$, од каде

$tg\,\beta = \dfrac{sin\,\beta}{cos\,\beta} = \dfrac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \dfrac{7}{24}$. За вредноста на изразот, имаме:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{24}}{1 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{24}} = \frac{\dfrac{19}{24}}{\dfrac{41}{48}} = \frac{38}{41}.$$

6 Пресметај ја вредноста на изразот $ctg(\alpha - \beta)$, ако е дадено $ctg\alpha = 2$ и $cos\beta = \frac{24}{25}$ (α, β се остри агли).

7 Упрости го изразот: $\frac{tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha-\beta)} + \frac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha+\beta)}$.

8 Докажи го идентитетот: $1 + tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{cos(\alpha-\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta}$.

Согледај го доказот:

$$1 + tg\alpha \cdot tg\beta = 1 + \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \cdot \frac{sin\beta}{cos\beta} = \frac{cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta}{cos\alpha cos\beta} = \frac{cos(\alpha-\beta)}{cos\alpha cos\beta}$$

9 Докажи го идентитетот: $ctg\alpha + ctg\beta = \frac{sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha \cdot sin\beta}$.

Задачи

1. Пресметај го $tg(\alpha - \beta)$, ако $sin\alpha = \frac{15}{17}$, $cos\beta = \frac{35}{37}$; (α, β се остри агли).
2. Одреди ја вредноста на $tg\alpha$, ако $tg(\alpha - 45^\circ) = 2$.
3. Упрости го изразот: а) $tg(\alpha + \beta) - tg(\alpha - \beta)$; б) $\frac{tg\alpha + tg\beta}{tg(\alpha+\beta)} + \frac{tg\alpha - tg\beta}{tg(\alpha-\beta)}$.

Докажи ги идентитетите:

4. $\frac{tg\beta + 1}{tg\beta - 1} = -tg\alpha$, ако $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.
5. а) $(tg\alpha + 1)(tg\beta + 1) = 2$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$; б) $(ctg\alpha - 1)(ctg\beta - 1) = 2$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

13 ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ДВОЕН АГОЛ

Потсети се!

Провери ја точноста на равенствата:

а) $sin2\alpha = 2sin\alpha$; б) $cos2\alpha = 2cos\alpha$

за $\alpha = 30^\circ$.

А **1** Провери ја точноста на равенствата:

а) $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$;

б) $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$.

за $\alpha = 30^\circ$.

Согледај го решението:

а) $sin(2 \cdot 30^\circ) = 2sin30^\circ \cdot cos30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

За тригонометриските функции од двоен агол важи следнава:

Теорема: Ако α е кој било агол, тогаш:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha},\ \ \alpha \in \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$$
$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha},\ \ \alpha \in \{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$$

Доказ. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$tg2\alpha = tg(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1-tg\alpha\cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}.$$

■ Слично се докажува и за $\cos 2\alpha$ и $ctg2\alpha$.

2 Пресметај: а) $\cos 120^\circ$; б) $\sin 2\alpha$; ако $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

в) $tg2\alpha$; ако $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; г) $ctg2\alpha$; ако $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Согледај го решението:

а) $\cos 120^\circ = \cos 2\cdot 60^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.

в) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{3}$.

3 Примени ја теоремата за функциите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ и $ctg\alpha$.

Согледај го одговорот:

■ $\sin\alpha = \sin 2\cdot\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$;

■ $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$;

■ $tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$; ■ $ctg\alpha = \frac{ctg^2\frac{\alpha}{2}-1}{2ctg\frac{\alpha}{2}}$.

4 Примени ја теоремата за изразите: $\sin 4\alpha$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg3\alpha$, $ctg5\alpha$.

Согледај го решението:

■ $\sin 4\alpha = \sin 2\cdot 2\alpha = 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$

$= 4\sin\alpha\cos\alpha(1 - 2\sin^2\alpha)$.

5 Одреди ја вредноста на:

а) $sin2\alpha$, ако $sin\alpha = \frac{3}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

б) $cos2\alpha$, ако $cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Согледај го решението:

а) $cos\alpha = \sqrt{1-sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$, $sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

6 Функциите $sin2\alpha$, $cos2\alpha$ изрази ги со помош на функцијата $tg\alpha$.

Согледај го решението:

$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha = \frac{2sin\alpha cos\alpha}{sin^2\alpha + cos^2\alpha} = \frac{\frac{2sin\alpha cos\alpha}{cos^2\alpha}}{\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha}} = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}.$$

Слично се докажува дека $cos2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$.

7 Без употреба на калкулатор, пресметај:

а) $2sin15^\circ cos15^\circ$; б) $sin22^\circ30' \cdot sin67^\circ30'$.

Согледај го решението:

б) $sin22^\circ30' \cdot sin67^\circ30' = \frac{1}{2} \cdot 2sin22^\circ30' cos22^\circ30' = \frac{1}{2} sin2 \cdot (22^\circ30') = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

8 Без употреба на калкулатор, пресметај:

а) $cos^2 15^\circ - cos^2 75^\circ$; б) $cos^2 22{,}5^\circ - sin^2 22{,}5^\circ$.

9 Упрости ги изразите: а) $(1 + cos2\alpha)tg\alpha$, б) $\frac{tg\alpha}{tg\alpha+1} - \frac{tg\alpha}{tg\alpha-1}$.

Согледај го решението:

а) $(1 + cos2\alpha)tg\alpha = (sin^2\alpha + cos^2\alpha + cos^2\alpha - sin^2\alpha)tg\alpha =$

$= 2cos^2\alpha \cdot \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = sin2\alpha$.

10 Упрости ги изразите: а) $2cos(45^\circ + \alpha)cos(45^\circ - \alpha)$; б) $cos^2 50^\circ - cos^2 40^\circ$.

11 Докажи го идентитетот: $\frac{1-cos2\alpha + sin2\alpha}{1+cos2\alpha + sin2\alpha} = tg\alpha$.

Согледај го решението:

$$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha.$$

Задачи

1. Пресметај го $\cos 2\alpha$, ако $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$.
2. Пресметај го $\sin 3\alpha$, ако $\cos\alpha=0{,}6$; $270^\circ<\alpha<360^\circ$.
3. Без употреба на калкулатор, пресметај $\frac{2tg75^\circ}{1-tg^2 75^\circ}$.
4. Упрости ги изразите:

   а) $\frac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$; б) $\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{1-\sin 2\alpha}$; в) $\frac{1}{ctg\alpha+1}+\frac{1}{ctg\alpha-1}$.
5. Да се определи $\sin 2\alpha$, ако $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{tg^2\alpha}+\frac{1}{ctg^2\alpha}=7$.
6. Докажи ги идентитетите:

   а) $\frac{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=ctg\alpha$; б) $\frac{4\cos^2\alpha-1}{1-4\sin^2\alpha}=tg3\alpha\cdot ctg\alpha$.
7. Докажи ги идентитетите:

   а) $8\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 10^\circ=ctg10^\circ$;

   б) $16\cdot\cos 80^\circ\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ=1$.

14 ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПОЛУАГЛИ

А 1 Провери ја точноста на равенствата:

а) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; б) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, ако $\alpha=60^\circ$.

Согледај го решението:

а) $1-\cos 60^\circ=2\sin^2\frac{60^\circ}{2}$; $1-\frac{1}{2}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$ т.е. $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

За тригонометриските функции од полуагли важи следнава

Теорема: Ако α е кој било агол, тогаш

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \text{ за } \alpha\neq\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}; \quad ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, \text{ за } \alpha\neq 2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Знакот + или – се зема во зависност во кој квадрант е вториот крак од аголот $\frac{\alpha}{2}$.

Доказ. $\begin{cases} \sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1 \\ \cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha \end{cases}$. Ако ги собереме равенките ќе добиеме

$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$ или $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$. Ако ги одземеме равенките ќе

добиеме $2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$ или $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Запомни ги формулите:

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \quad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

2 Пресметај: а) $\sin 15^\circ$; б) $\cos\frac{\pi}{8}$; в) $tg 15^\circ$.

Согледај го решението:

а) $\sin 15^\circ=\sin\frac{30^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

3 Пресметај $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ ако: а) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; б) $tg\alpha=\sqrt{3}$.

Согледај го решението:

а) $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

На ист начин го добиваме $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4 Пресметај $tg\frac{\alpha}{2}$ и $ctg\frac{\alpha}{2}$, ако: а) $cos\alpha=\frac{7}{25}$; б) $sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(0^o<\alpha<90^o)$.

Согледај го решението:

б) $cos\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

На ист начин го добиваме $ctg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3}$.

5 Упрости ги изразите: а) $\frac{1+cos80^o}{2cos^2 40^o}$; б) $\frac{1-sin\alpha}{1+sin\alpha}$.

Согледај го решението:

а) $\frac{1+cos80^o}{2cos^2 40^o}=\frac{1+cos80^o}{2cos^2\frac{80^o}{2}}=\frac{1+cos80^o}{2\frac{1+cos80^o}{2}}=1$;

б) $\frac{1-sin\alpha}{1+sin\alpha}=\frac{1-cos(90^o-\alpha)}{1+cos(90^o-\alpha)}=tg^2\frac{(90^o-\alpha)}{2}$.

6 Упрости ги изразите: а) $\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}$; б) $\frac{sin^2 35^o}{1-cos70^o}$.

7 Докажи го идентитетот: $\frac{sin\alpha+cos\alpha}{cos\alpha-sin\alpha}=\frac{1+sin2\alpha}{cos2\alpha}$.

Согледај го решението:

$$\frac{1+sin2\alpha}{cos2\alpha}=\frac{sin^2\alpha+cos^2\alpha+2sin\alpha cos\alpha}{cos^2\alpha-sin^2\alpha}=\frac{(sin\alpha+cos\alpha)^2}{(cos\alpha-sin\alpha)(cos\alpha+sin\alpha)}=$$
$$=\frac{sin\alpha+cos\alpha}{cos\alpha-sin\alpha}.$$

8 Докажи го идентитетот: $\frac{sin\alpha+tg\alpha}{sin\alpha-tg\alpha}=-ctg^2\frac{\alpha}{2}$.

Задачи

1. Без употреба на калкулатор, пресметај: а) $cos15^o$; б) $sin\frac{\pi}{8}$; в) $tg67^o30'$.
2. Пресметај: $sin\frac{\alpha}{2}$; $cos\frac{\alpha}{2}$; $tg\frac{\alpha}{2}$, ако: а) $cos\alpha=\frac{4}{25}$; б) $sin\alpha=\frac{3}{5}$.
3. Одреди ги $tg\frac{\alpha}{2}$ и $ctg\frac{\alpha}{2}$, ако $ctg\alpha=-2{,}4$; $270^o<\alpha<360^o$.

4 Упрости ги изразите а) $(1+\cos 2\alpha)\cdot tg\alpha$; б) $(1-\cos\alpha)\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

Докажи ги идентиетите:

5 а) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}=tg\frac{\alpha}{2}$; б) $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha+1}{1-\sin\alpha-\cos\alpha}=-ctg\frac{\alpha}{2}$.

6 а) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=tg\frac{\alpha}{2}$; б) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=tg\frac{\alpha}{2}$; в) $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=tg^2\frac{\alpha}{2}$.

15 ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ЗБИР И РАЗЛИКА ВО ПРОИЗВОД

A 1 Пресметај го збирот $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$.

Соїледај їо решениеїо:

Користејќи ги адиционите теореми, имаме:

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \sin 30^\circ\cos 45^\circ,$$
$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 30^\circ\cos 45^\circ.$$

Собирајќи ги овие две равенства, добиваме:

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin 45^\circ\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Значи, збирот го пресметуваме така што го трансформираме во производ.

Според тоа за збир и разлика од синус на два агли важи следнава

Теорема: Ако α и β се кои било агли, тогаш:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{и} \quad \sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Доказ. Од адиционите теореми, имаме:

$$\begin{cases}\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x\\ \sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x.\end{cases}$$

Со собирање на равенствата, добиваме:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y.$$

Нека $\begin{cases}x+y=\alpha\\ x-y=\beta\end{cases}$, тогаш $\begin{cases}x=\frac{\alpha+\beta}{2}\\ y=\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$, следува: $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Со одземање на равенствата, добиваме

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\sin y\cos x.$$

Со замена за $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$ имаме $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$, т.е.

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

2 Трансформирај во производ:

а) $\sin 70^\circ + \sin 20^\circ$; б) $\sin 40^\circ - \cos 70^\circ$; в) $\sin 70^\circ + \cos 70^\circ$;

г) $\cos 25^\circ + \sin 25^\circ$; д) $1+\sin\alpha$.

Согледај го решението:

а) $\sin 70^\circ + \sin 20^\circ = 2\sin\frac{70^\circ+20^\circ}{2}\cdot\cos\frac{70^\circ-20^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ\cos 25^\circ = \sqrt{2}\cos 25^\circ.$

г) $\cos 25^\circ + \sin 25^\circ = \sin 65^\circ + \sin 25^\circ = 2\sin 45^\circ\cos 20^\circ = \sqrt{2}\cos 20^\circ.$

Б 3 Пресметај го збирот $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$.

Согледај го решението:

$$\begin{cases}\cos 105^\circ = \cos(60^\circ+45^\circ) = \cos 60^\circ\cos 45^\circ - \sin 60^\circ\sin 45^\circ\\ \cos 15^\circ = \cos(60^\circ-45^\circ) = \cos 60^\circ\cos 45^\circ + \sin 60^\circ\sin 45^\circ.\end{cases}$$

Собирајќи ги равенствата добиваме:

$$\cos 105^\circ + \cos 15^\circ = 2\cos 60^\circ\cos 45^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Воочи дека збирот $\cos 105^\circ + \cos 15^\circ$ може да се пресмета со трансформација во производ.

Според тоа за збир и разлика на косинуси од два агли важи следнава

Теорема: Ако α и β се кои било агли, тогаш:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{и} \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Доказ. Според адиционите теореми, имаме:

$$\begin{cases}\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y\\ \cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y.\end{cases}$$

Со собирање на равенствата, добиваме:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y.$$

Нека $\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{cases}$, тогаш $\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ y=\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$, па:

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Со одземање на претходните равенства, добиваме

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\cos y.$$

Со замена за $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$ и $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, т.е.:

$$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

4 Трансформирај ги во производ изразите:

а) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ$; б) $\cos 50^\circ - \sin 50^\circ$; в) $1 + \cos\alpha$.

Согледај го решението:

а) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ = 2\cos\dfrac{20^\circ+40^\circ}{2}\cos\dfrac{20^\circ-40^\circ}{2} = 2\cos 30^\circ\cos(-20^\circ) = \sqrt{3}\cos 20^\circ$.

б) $\cos 50^\circ - \sin 50^\circ = \cos 50^\circ - \cos 40^\circ = -2\sin\dfrac{50^\circ+40^\circ}{2}\sin\dfrac{50^\circ-40^\circ}{2} = -\sqrt{2}\sin 5^\circ$.

в) $1 + \cos\alpha = \cos 0^\circ + \cos\alpha = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

5 Трансформирај ги во производ изразите:

а) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ$; б) $\cos 50^\circ + \cos 70^\circ$;

в) $1 - \cos\alpha$; г) $1 + \cos 2\alpha$.

6 Трансформирај ги во производ изразите:

а) $tg\alpha + tg\beta$; б) $tg\alpha - tg\beta$; в) $ctg\alpha + ctg\beta$; г) $ctg\alpha - ctg\beta$.

Согледај го решението:

а) $tg\alpha + tg\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

б) Аналогно и $tg\alpha - tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

в) $ctg\alpha + ctg\beta = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

г) Аналогно и $ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

7 Трансформирај ги во производ изразите:

а) $tg25^\circ + tg35^\circ$; б) $ctg15^\circ - ctg45^\circ$; в) $tg50^\circ - tg10^\circ$; г) $ctg25^\circ + ctg20^\circ$.

Согледај го решението:

а) $tg25^\circ + tg35^\circ = \frac{\sin(25^\circ + 35^\circ)}{\cos 25^\circ \cos 35^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 25^\circ \cos 35^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2\cos 25^\circ \cos 35^\circ}$;

б) Аналогно и $ctg15^\circ - ctg45^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ \sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2\sin 15^\circ}$.

8 Упрости ги изразите:

а) $\frac{\sin 37^\circ - \sin 19^\circ}{\cos 37^\circ - \cos 19^\circ}$; б) $\frac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{\sin 3\alpha + \sin\alpha}$; в) $\frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin\alpha - \sin 3\alpha}$.

Согледај го решението:

а) $\frac{\sin 37^\circ - \sin 19^\circ}{\cos 37^\circ - \cos 19^\circ} = \frac{2\cos\frac{37^\circ + 19^\circ}{2}\sin\frac{37^\circ - 19^\circ}{2}}{-2\sin\frac{37^\circ + 19^\circ}{2}\sin\frac{37^\circ - 19^\circ}{2}} = -\frac{\cos 28^\circ}{\sin 28^\circ} = -ctg28^\circ$;

б) $\frac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{\sin 3\alpha + \sin\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha\cos\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\alpha} = ctg2\alpha$.

Запомни!

Формулите:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

се познати како формули за трансформација на тригонометриски функции од збир и разлика во производ.

Задачи

1 Трансформирај ги во производ изразите:

а) $\sin 80^\circ + \sin 70^\circ + \sin 20^\circ + \sin 10^\circ$; б) $\cos 2\alpha + 2\cos\alpha + 1$; в) $\frac{1}{2} + \cos\alpha$;

г) $1 - 2\cos\alpha$; д) $\sqrt{3} + 2\cos\alpha$; ѓ) $1 - \sqrt{2}\sin\alpha$.

2) Провери ја точноста на равенствата:

а) $cos70^o + sin40^o = cos10^o$; б) $cos20^o - sin50^o = sin10^o$.

3) Докажи ги идентиетите:

а) $\frac{sin\alpha + cos\alpha}{sin\alpha - cos\alpha} = ctg(\alpha - 45^o)$; б) $\frac{ctg\alpha + 1}{ctg\alpha - 1} = ctg(45^o - \alpha)$.

4) Упрости го изразот: а) $1 - cos\alpha + sin\alpha$; б) $1 + cos\alpha + sin\alpha$.

5) Докажи го идентитетот $\frac{sin3\alpha + sin2\alpha + sin\alpha}{cos3\alpha + cos2\alpha + cos\alpha} = tg2\alpha$.

6) Докажи ги идентитетите:

а) $\frac{1 - sin\alpha + cos\alpha}{1 - sin\alpha - cos\alpha} = -ctg\frac{\alpha}{2}$; б) $\frac{sin3\alpha + sin2\alpha - sin4\alpha - sin\alpha}{cos\alpha - cos2\alpha + cos3\alpha - cos4\alpha} = tg\alpha$.

7) Докажи дека функциите:

а) $y = sinx$ и $y = cosx$ имаат период 2π;

б) $y = tgx$ и $y = ctgx$ имаат период π.

16 ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОД ВО ЗБИР

А Во претходната лекција видовме како збир на тригонометриски функции се трансформира во производ.

Сега ќе го разгледаме обратниот случај како производ од тригонометриски функции се трансформира во збир.

За таа трансформација важи следнава

Теорема: Ако се α и β кои било агли, тогаш

$$sin\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left[sin(\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta)\right];$$

$$cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$sin\alpha sin\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)\right]$$

Доказот користејќи ги адиционите теореми, имаме:

$$\begin{cases} sin(\alpha+\beta)= sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha \\ sin(\alpha-\beta)= sin\alpha cos\beta - sin\beta cos\alpha \end{cases}$$

Со собирање на двете равенства, добиваме:

$sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta) = 2sin\alpha cos\beta$, т.е.

$$sin\alpha cos\beta = \frac{1}{2}\left[sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)\right].$$

Останатите тврдења докажи ги сам.

1 Производот:

а) $sin45^\circ cos15^\circ$; б) $cos45^\circ cos30^\circ$; в) $sin60^\circ sin45^\circ$;

трансформирај го во збир.

Согледај го решението:

а) $sin45^\circ cos15^\circ = \frac{1}{2}\left[sin(45^\circ - 15^\circ)+sin(45^\circ + 15^\circ)\right] = \frac{1}{2}\left[sin30^\circ + sin60^\circ\right]$.

2 Докажи дека:

а) $sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-cos2\alpha)$; б) $cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+cos2\alpha)$.

Согледај го решението:

$sin^2\alpha = sin\alpha \cdot sin\alpha = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\alpha)-cos(\alpha+\alpha)\right] = \frac{1}{2}(1-cos2\alpha)$.

3 Трансформирај ги во збир производите:

а) $4cos80^\circ cos50^\circ sin20^\circ$; б) $4cos15^\circ sin20^\circ sin40^\circ$.

Согледај го решението:

а) $4sin20^\circ cos50^\circ cos80^\circ = 4sin20^\circ \cdot \frac{1}{2}(cos30^\circ + cos130^\circ) =$

$= 2sin20^\circ cos30^\circ + 2sin20^\circ cos130^\circ =$

$= -sin10^\circ + sin50^\circ - sin110^\circ + sin150^\circ =$

$= -sin10^\circ + sin50^\circ - sin70^\circ + \frac{1}{2}$.

4 Докажи ги идентитетите:

а) $cos(\alpha + x)cos(\alpha - x) = cos^2\alpha - sin^2x$;

б) $2sin2\alpha sin\alpha + cos3\alpha = cos\alpha$;

в) $cos20^\circ + 8sin70^\circ sin50^\circ sin10^\circ = 2sin^280^\circ$.

Следај го решението:

- в) $\cos 20^\circ + 8\sin 70^\circ \sin 50^\circ \sin 10^\circ = \cos 20^\circ + 4\sin 70^\circ(\cos 40^\circ - \cos 60^\circ) =$
$= \cos 20^\circ + 4\sin 70^\circ \cos 40^\circ - 2\sin 70^\circ =$
$= \cos 20^\circ + 2(\sin 30^\circ + \sin 110^\circ) - 2\cos 20^\circ =$
$= 1 + 2\sin 110^\circ - \cos 20^\circ = 1 + 2\cos 20^\circ - \cos 20^\circ =$
$= 1 + \cos 20^\circ = 2\cos^2 10^\circ = 2\sin^2 80^\circ.$

5 Докажи ги идентитетите:

а) $\cos 2\alpha + 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$

б) $2\sin^2\alpha\cos\alpha + 2\cos^3\alpha = 2\cos\alpha.$

Задачи

Трансформирај ги во збир, производите:

1. а) $\sin 15^\circ \cos 5^\circ$; б) $\sin 7^\circ \sin 3^\circ$.

2. $2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right).$

3. $\cos 2\alpha + 2\sin(\alpha + 60^\circ)\sin(\alpha - 60^\circ).$

Докажи ги идентитетите:

4. $2\sin 185^\circ(\sin 130^\circ + \sin 140^\circ) + \cos 35^\circ + \cos 125^\circ = 0.$

5. $2\sin(15^\circ - \alpha)\sin(15^\circ + \alpha) + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

6. $2\sin(60^\circ - \beta)\sin(60^\circ + \beta) + \sin^2\beta = \frac{1}{2} + \cos^2\beta.$

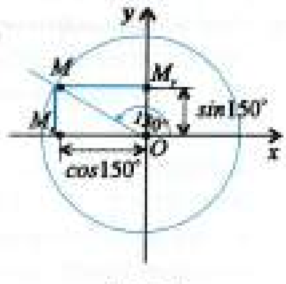
7. $\sin\alpha \cdot \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha).$

17 ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- За дефинициите на тригонометриските функции од произволен агол.
- Тригонометриските, функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ се периодични со периода 2π, а $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ се периодични со периода π.
- $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,$ $tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha,$
  $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,$ $ctg(\alpha + k\pi) = ctg\alpha.$
- Во кои квадранти функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ се позитивни, а во кои се негативни?

А 1 Графички одреди ја вредноста на функциите $sin150°$ и $cos150°$.



црт. 1

Согледај го решението:

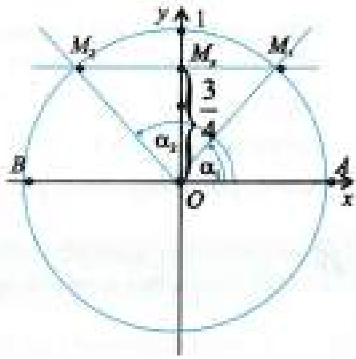
- Од дефиницијата на тригонометриските функции од произволен агол следува дека координатите на точката во која подвижниот крак ја сече тригонометриската кружница се $M(cos\alpha, sin\alpha)$, црт.1.

Значи, $sin150° = \overline{OM_y}$. Функцијата $cos\alpha$ во вториот квадрант е негативна, па $cos150° = -\overline{OM_x}$.

Б 2 Ако $sin\alpha = \frac{3}{4}$, одреди го аголот α во интервалот $(0, 2\pi)$.

Согледај го решението:

- Оваа задача е обратна на претходната. Значи, на ординатната оска, т.е. y – оската треба да најдеме точката M_y, така што $\overline{OM_y} = \frac{3}{4}$.
- Функцијата $sin\alpha$ е позитивна во I и II квадрант. Значи подвижниот крак ја сече кружницата во две точки. Едната точка е во I квадрант, а другата во II квадрант.
- Бараните точки M_1 и M_2 се во пресек на кружницата и правата што минува низ точката M_y, а е паралелна со x – оската.



црт. 2

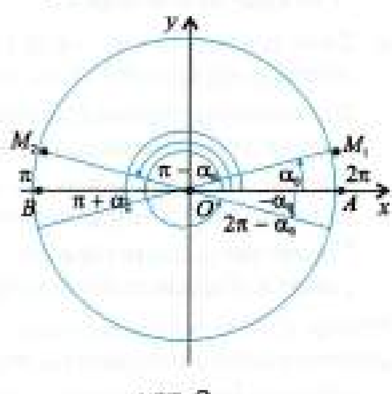
- Бараните агли се: $\alpha_1 = \measuredangle AOM_1$ и $\alpha_2 = \measuredangle AOM_2$, црт.2.

Познато е дека при сведувањето на тригонометриските функции на остар агол, за аглите од видот $180° \pm \alpha$, или $360° \pm \alpha$ функцијата не се менува.

Од тие причини аглите што се во II квадрант ќе ги запишуваме во видот $180° - \alpha_o$, во третиот квадрант со $180° + \alpha_o$, а во IV квадрант $360° - \alpha_o$ или само $- \alpha_o$, каде што $0 < \alpha_o < 90°$.

Поради симетричноста на тригонометриската кружница во однос на координатниот почеток и на координатните оски имаме:

$\alpha_1 = \measuredangle AOM_1 = \measuredangle BOM_2 = \alpha_o$, па $\alpha_1 = \alpha_o$, а $\alpha_2 = \pi - \alpha_o$; $0 < \alpha_o < 90°$, црт.3.



црт. 3

- Ако во барањето на задачата нема ограничување за аголот α, тогаш секој агол што ќе се добие со ротација на подвижниот крак OM_1 или OM_2 за 360°, т.е. 2π произволен број пати во позитивна или негативна насока е, исто така, решение за бараниот агол α.
- Според тоа постојат бесконечно многу агли чиј општ запис е $\alpha_1 = \alpha_o + 2k\pi$ или $\alpha_2 = \pi - \alpha_o + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, што се решенија на поставената задача. k – означува број на полни завртувања во позитивна или негативна насока на подвижниот крак на аголот.

Воочи!

Одредување на аголот ако е дадена вредност на тригонометриската функција, всушност е решавање на соодветна тригонометриска равенка.

Потсети се!

- Равенката во која непознатата е во логаритамот или во основата на логаритамот се вика логаритамска равенка.
- $log_3(x+2) = 2$; $log_{x-2}9 = 3$ се логаритамски равенки.
- Зошто равенките $2^{x+3} = 4$; $2^{2x} - 2^x - 3 = 0$ се викаат експоненцијални равенки?
- Колку решенија може да има линеарна, а колку квадратната равенка?

В Равенка во која непознатата се наоѓа само во аргументот на тригонометриската функција се вика **тригонометриска равенка**.

3 Кои од равенките се тригонометриски:

а) $sinx = 1$; б) $2cos3x - 1 = 0$; в) $sin2x + cos2x = 1$;

г) $x + cos2x = 3$; д) $tg2x + 2tgx - 3 = 0$; ѓ) $x + ctg30^\circ + tg(x - \frac{\pi}{4}) = 1$?

Согледај го одговорот:

- Само равенките г) и ѓ) не се тригонометриски затоа што непознатата се наоѓа и надвор од аргументот на тригонометриската функција.
- Да се реши тригонометриската равенка значи да се најде множеството решенија, ако има, за коишто равенката поминува во точно бројно равенство.
- Тригонометриските равенки ако имаат решение, тогаш, поради својството на периодичноста на функциите, тие имаат бесконечно множество решенија.
- Тригонометриските равенки не можат да се класифицираат како алгебарските равенки, поради што не е можно да се даде општ метод за нивното решавање.

Во овој дел ќе покажеме како се решаваат некои видови на тригонометриски равенки кои се сведуваат на решавање на

Основни тригонометриски равенки:

$$sinx = a; \quad cosx = a; \quad tgx = a \text{ и } ctgx = a, \ a \in \mathbb{R}.$$

4 Реши ја равенката: $sinx = a,\ a \in \mathbb{R}$.

Согледај го решението:

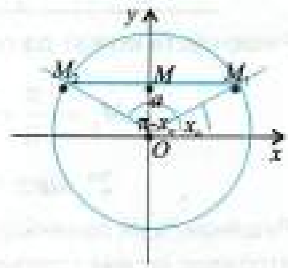
Функцијата $y = sinx$ е ограничена, т.е. $-1 \leq sin\,x \leq 1$, значи равенката има решение само ако $-1 \leq a \leq 1$. Ќе ги разгледаме следниве случаи:

$$1^{o}\quad sinx = a,\ 0 < a < 1.$$

Решението на равенката $sinx = a,\ 0 < a < 1$, се сведува на одредување на аголот ако е дадена вредност на тригонометриската функција, задача 2, црт. 2.

Бидејќи $sinx > 0$ во I и II квадрант, значи вториот крак на аголот е во првиот или вториот квадрант, црт. 4.

Според решението на задачата 2, во интервалот $(0, 2\pi)$ решението на равенката е $x = \alpha_o$ или $x = \pi - \alpha_o,\ 0 < \alpha_o < 90^{o}$.



црт. 4

Острииот агол α_o ќе го обележуваме со x_o, т.е $x_o = \alpha_o$, а ќе го одредуваме со инверзна функција на тригонометриските функции кои се викаат **arcus** функции: т.е. $x_o = arcsin|a|$.

На пример: $arcsin\left|\frac{1}{2}\right| = 30^{o} = \frac{\pi}{6}$, бидејќи $sin\,30^{o} = \frac{1}{2}$; $arccos\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 30^{o}$, затоа што $cos\,30^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $arctg1 = 45^{o}$, затоа што $tg45^{o} = 1$.

Според тоа решението на равенката $sinx = a,\ 0 < a < 1$ во интервалот $(0, 2\pi)$ е $x = x_o$ или $x = \pi - x_o,\ x_o = arcsina$.

Запомни!

Општо решение на равенката $sinx = a,\ 0 < a < 1$ е

$$x = x_o + 2k\pi \text{ или } x = \pi - x_o + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}, \text{ а}$$

$$x_o = arcsin\,a,\quad 0^{o} < x_o < 90^{o}.$$

5 Реши ја равенката $sinx = \frac{1}{2}$.

Согледај го решението:

Решението на равенката во интервалот од 0^{o} до 2π е $x = x_o$ или $x = \pi - x_o$, бидејќи $x_o = arcsin\frac{1}{2} = 30^{o} = \frac{\pi}{6}$, имаме $x = \frac{\pi}{6}$ или $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, а општото решение на равенката е $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Множеството решенија на равенката прикажано е во табелата.

k	...	-2	-1	0	1	...
$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$	...	$-\frac{23\pi}{6}$	$-\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$	...
$x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$	...	$-\frac{19\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{6}$	...

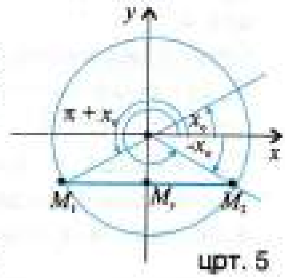
Решенијата можат да се запишат и во вид на множество, т.е.

$$M_1=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \text{а}\ M_2=\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2° $\sin x=a,\ -1<a<0.$

Решението на равенката $\sin x=a,\ -1<a<0$ е агол чиј втор крак ја сече тригонометриската кружница во III или IV квадрант, црт. 5.

- Решението на равенката во интервалот $(0,2\pi)$ е $x=\pi+x_o$ или $x=2\pi-x_o,\ x_o=\arcsin|a|$.
- Решението $x=2\pi-x_o$ што е во IV квадрант можеме да го запишеме и во следниов вид $x=-x_o$.



црт. 5

Запомни!

Множеството решенија на равенката $\sin x=a,\ -1<a<0$ е

$x=\pi+x_o+2k\pi$ или $x=-x_o+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, а $x_o=\arcsin|a|,\ 0^\circ<x_o<90^\circ$.

6 Реши ја равенката $\sqrt{3}+2\sin x=0$.

Согледај го решението:

- Равенката ја доведуваме во следниов вид $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Решението на равенката во интервалот $(0,2\pi)$, е аголот чиј втор крак е во III или IV квадрант, црт. 5, т.е. од видот $x=\pi+x_o$ или $x=-x_o$, а општото решение е $x=\pi+x_o+2k\pi$ или $x=-x_o+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ x_o=\arcsin\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\pi}{3}$.

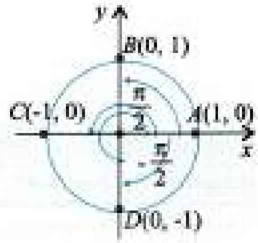
Множеството решенија на равенката е:

$$x=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\ \text{или}\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Решенијата можат да се запишат и во вид на множество, т.е.

$$M_1=\left\{\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \text{а}\ M_2=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

3^o $\sin x = 0$, $a = 0$.



црт. 6

- Решението на равенката $\sin x = 0$ е аголот чиј втор крак ја сече кружницата во точките чија ордината е еднаква на 0.
  Тоа се точките на x – оската $(1, 0)$ или $(-1, 0)$, црт.6.
- Решенијата на равенката, $\sin x = 0$ се $x = 0 + 2k\pi$ или $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, кои се разликуваат за π, па двете решенија можат да се запишат во следниов вид $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Запомни!

Множеството решенија на равенката

$$\sin x = 0 \text{ е } x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4^o $\sin x = 1$, $a = 1$

- Каде се наоѓа точката на тригонометриската кружница чија ордината е еднаква на 1?
- Колкав е аголот што го формира вториот крак на аголот кој минува низ точката B, црт.6?

Запомни!

Множеството решенија на равенката

$$\sin x = 1 \text{ е } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5^o $\sin x = -1$, $a = -1$

- Каде се наоѓа точката на тригонометриската кружница чија ордината е еднаква на -1?
- Колкав е аголот што го формира вториот крак на аголот кој минува низ точката D, црт.6?

Запомни!

Множеството решенија на равенката

$$\sin x = -1 \text{ е } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Истото решение може да се запише во следниов вид

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

7 Реши ја равенката:

а) $2sinx + \sqrt{2} = 0$; б) $sinx = -\frac{1}{2}$; в) $2sinx - \sqrt{3} = 0$; г) $2sinx - 4 = 0$.

Решавајќи ја равенката $sinx = a$, $|a| \le 1$ ние, всушност, ја докажавме следнава

Теорема: За кој било реален број a, $|a| \le 1$, постои бесконечно множество решенија за аголот x, за коишто $sinx = a$.

Решавањето на основните тригонометриски равенки се содржи во следниве чекори:

1. Се утврдува дали за реалниот број a равенката има решение.

2. Според знакот на тригонометриската функција се одредува во кој квадрант е вториот крак од аголот.

3. Се одредува решението во интервалот $(0, 2\pi)$, а потоа општото решение.

4. Се одредува остриот агол x_o.

8 Реши ја равенката $sinx = -\frac{5}{8}$.

Согледај го решението:

- $sinx < 0$ во III и IV квадрант, т.е. вториот крак на аголот е во III или IV квадрант, па решението е од видот $x = \pi + x_o + 2k\pi$ или $x = -x_o + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

  а $x_o = arcsin\left|-\frac{5}{8}\right|$, па $x = \pi + arcsin\frac{5}{8} + 2k\pi$ или $x = -arcsin\frac{5}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Во овој случај остриот агол x_o ќе го одредиме со помош на калкулатор на следниов начин:

  – го внесуваме бројот $\frac{5}{8} = 0{,}625$;

  – го притискаме копчето 2nd ;

  – го притискаме копчето sin^{-1}.

- Ако на дисплејот е опцијата DEG, тогаш добиената вредност за аголот е во степени, т.е. $x_o = 38,68218°$.

  – Со повторно активирање на 2nd и DMS аголот е претворен во степени и минути, т.е. $x_o = 38°40'$, па $x = \pi + 38°40' + 2k\pi = 218°40'$ или $x = -38°40' + 2k\pi$.

- Ако на дисплејот е опцијата RAD, тогаш аголот е искажан во радијани, т.е. $x_o = 0{,}675$ rad, па решението на равенката е $x = \pi + 0{,}675 + 2k\pi$ или $x = -0{,}675 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

9 Реши ја равенката

а) $3sinx - 1 = 0$; б) $4sinx - 3 = 0$; в) $6sinx + 7 = 0$.

На сличен начин се решава секоја основна тригонометриска равенка.

10 Реши ја равенката:

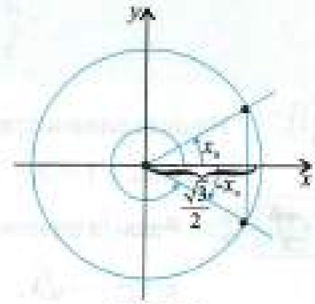
а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos x = 0$; г) $\cos x = 1$.

Треба да знаеш:

Равенката $\cos x = a$ има решение само ако $|a| \leq 1$.

Согледај го решението:

а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



црт. 7

- $\cos x > 0$ во I и IV квадрант, т.е. вториот крак од аголот е во I или IV квадрант, црт. 7.
- Решението во интервалот $(0, 2\pi)$ е $x = x_o$ или $x = 2\pi - x_o$. Решението $x = 2\pi - x_o$ може да се запише и во следниов вид $x = -x_o$.

  Општото решение е

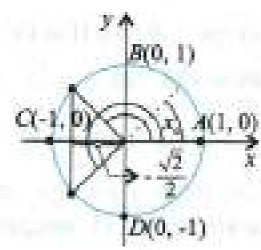
  $$x = x_o + 2k\pi \text{ или } x = -x_o + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x_o = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30^o = \frac{\pi}{6}, \text{ па } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ или } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Функцијата $\cos x$ е парна па заради тоа својство решенијата можеме да ги запишеме и во следниов вид:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



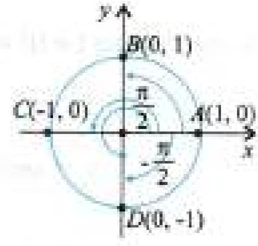
црт. 8

- $\cos x < 0$ во II и III квадрант, па решението е

  $$x = \pi - x_o + 2k\pi \text{ или } x = \pi + x_o + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

  $$x_o = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ или}$$

  $$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ црт. 8.}$$



црт. 9

- Косинус од кој било агол е еднаков на апсцисата на точката од тригонометриската кружница, црт. 9. Според тоа, решението на равенката:

$$\cos x = 1 \text{ е } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0 \text{ е } x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \text{ е } x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Запомни!

Множеството решенија на равенката $cosx = a$, $|a| \leq 1$, за

$$0 < a < 1 \text{ е } x = \pm x_o + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$-1 < a < 0 \text{ е } x = \pi \pm x_o + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$a = 0 \text{ е } x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$a = 1 \text{ е } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$a = -1 \text{ е } x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$x_o = arccos|a|,\ 0^o < x_o < 90^o.$$

11 Реши ја равенката:

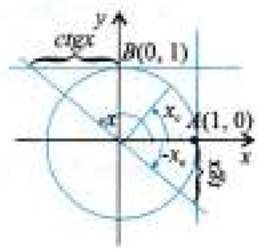
а) $2cosx + 1 = 0$; б) $2cosx + \sqrt{3} = 0$; в) $3cosx - 2 = 0$; г) $4cosx - 7 = 0$.

12 Реши ја равенката:

а) $tgx = -\sqrt{3}$; б) $ctgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $tgx = 0$; г) $ctgx = 0$.

Согледај го решението:

Тангенс од кој било агол е еднаков на ординатата на точката од тангентната оска, значи равенката $tgx = a$ е дефинирана за секое $a \in \mathbb{R}$.



црт. 10

Од $tg(x + \pi) = tgx$ следува дека равенката $tgx = a$ во интервалот $(0, 2\pi)$ има едно решение црт. 10..

а) $tgx < 0$ во II и IV квадрант, па решението на равенката $tgx = -\sqrt{3}$ е $x = \pi - x_o + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, а

$x_o = \text{arctg}|-\sqrt{3}| = 60^o = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi - \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{2\pi}{3} + k\pi$.

Од $tg(\pi - x_o) = -tgx_o$ следува дека за решението на равенката може да се земе и аголот во IV квадрант, т.е.

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) $ctgx > 0$ во I и III квадрант, па решението на равенката $ctgx = \frac{\sqrt{3}}{3}$ е

$$x = x_o + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$x_o = arcctg\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = 60^o = \frac{\pi}{6},\ \text{т.е. } x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

в) $tgx = 0$, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. г) $ctgx = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12 Реши ја равенката

а) $tgx - 1 = 0$; б) $ctgx + 1 = 0$; в) $ctgx = -\sqrt{3}$; г) $2tgx - 3 = 4$.

Запомни!

Множеството решенија на равенката $tgx = a$ и $ctgx = a$ $a \in \mathbb{R}$, за

$$0 < a < \infty \text{ е } x = x_0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$-\infty < a < 0 \text{ е } x = \pi - x_0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$x_0 = arctg|a| \text{ или } x_0 = arcctg|a|.$$

$$a = 0 \text{ е } tgx = 0,\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ а}$$

$$ctgx = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Задачи

1 Реши ги равенките:

а) $2sinx = \sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}\,sinx + 1 = 0$; в) $4sinx + \sqrt{12} = 0$; г) $3sinx - 5 = 0$.

2 Одреди го множеството решенија на равенките:

а) $2cosx - 1 = 0$; б) $6cosx + \sqrt{27} = 0$; в) $2cosx + 5 = 0$; г) $5cosx + 2 = 0$.

3 Реши ги равенките:

а) $3tgx + \sqrt{3} = 0$; б) $tgx = \sqrt{3}$; в) $tgx + 1 = 0$; г) $2tgx + 6 = 0$.

4 Реши ги равенките:

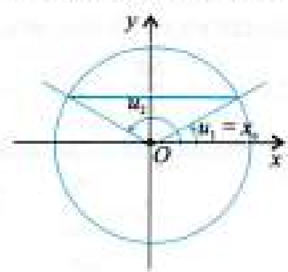
а) $3ctgx + \sqrt{3} = 0$; б) $ctgx - \sqrt{3} = 0$; в) $ctgx - 1 = 0$; г) $3ctgx = 5$.

18 ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ

А Равенката од видот $asin(bx + c) + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ со смената $bx + c = u$ и $-\frac{d}{a} = m$ се сведува на основна тригонометриска равенка $sinu = m$.

1 Реши ја равенката $2sin(3x - \frac{\pi}{3}) - 1 = 0$.

Согледај го решението:



црт. 1

- Воведувајќи ја смената $3x - \frac{\pi}{3} = u$, добивме

$$sinu = \frac{1}{2}.$$

■ $\sin u > 0$, значи аголот u е во I или во II квадрант, па решението е од видот:

$$u_1 = x_o + 2k\pi \text{ или } u_2 = \pi - x_o + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \text{ црт.1.}$$

$x_o = \arcsin\dfrac{1}{2} = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$, па со враќање на смената решенијата се од видот:

$$3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ или } 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

■ Решавајќи ги двете равенки по x имаме:

$$3x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad\qquad 3x = \pi + 2k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \qquad \text{или} \qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

2 Реши ги равенките:

а) $2\sin(2x + 10^\circ) - \sqrt{3} = 0$; б) $4\sin(3x - 45^\circ) + \sqrt{8} = 0$.

Б Равенката од видот $a\cos(bx + c) + d = 0$ со смената $u = bx + c$ и $m = -\dfrac{d}{a}$, ја сведуваме на основна тригонометриска равенка $\cos u = m$.

3 Реши ја равенката $6\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \sqrt{27} = 0$.

Согледај го решението:

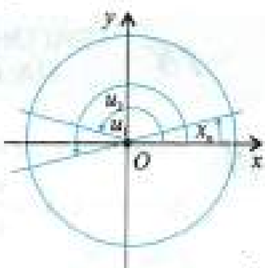
Од равенката следува $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Со воведување на смената $u = 2x - \dfrac{\pi}{2}$, добиваме $\cos u = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, чии решенија се:

■ $\cos u < 0$, значи аголот u е во II и III квадрант,
па $u = \pi - x_o + 2k\pi$ или $u = \pi + x_o + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$, црт. 2.

$$x_o = \arccos\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 30^\circ = \frac{\pi}{6},$$

$$u = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ или } u = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$



црт. 2

Со враќање на смената, имаме:

$$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \text{ или } 2x - \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

■ Решавајќи ги равенките по x имаме

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{или} \quad 2x = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \qquad\qquad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

4 Реши ги равенките:

а) $cos\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$; б) $10cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{50}=0$.

Б Равенките од видот $atg(bx+c)+d=0$ или $actg(bx+c)+d=0$, со воведување на смената $bx+c=u$ и $-\frac{d}{a}=m$, ги сведуваме на основна тригонометриска равенка:

$$tgu=m \quad \text{или} \quad ctgu=m.$$

5 Реши ги равенките: а) $3tg\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+3=0$; б) $3ctg\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{27}=0$.

Согледај го решението:

а) Со смената $u=2x+\frac{2\pi}{3}$, ја добиваме равенката $tgu=-1$, чие решение е:

$$u=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Со враќање во смената имаме:

$$2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ \text{т.е.}\ x=\frac{\pi}{24}+\frac{1}{2}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Со смената $u=4x-\frac{\pi}{6}$, ја добиваме равенката $ctgu=\sqrt{3}$, чие решение е:

$$u=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Со враќањето во смената имаме:

$$4x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ \text{т.е.}\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

6 Реши ги равенките:

а) $3tg\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)+\sqrt{3}=0$; б) $\sqrt{2}\,ctg\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{8}=0$.

Корисно е да знаеш! Множеството решенија на една равенка може да се запишува на повеќе начини, во зависност дали ќе се користи и негативен агол.

Тоа ќе го покажеме преку следниов пример: $sinx=-\frac{1}{2}$.

Множеството решенија ќе бидат:

1) $\left[\begin{array}{l} x_1=-30^\circ+360^\circ\cdot k \\ x_2=-150^\circ+360^\circ\cdot k \end{array}\right.$; 2) $\left[\begin{array}{l} x_1=-30^\circ+360^\circ\cdot k \\ x_2=210^\circ+360^\circ\cdot k \end{array}\right.$;

3) $\left[\begin{array}{l} x_1=330^\circ+360^\circ\cdot k \\ x_2=-150^\circ+360^\circ\cdot k \end{array}\right.$; 4) $\left[\begin{array}{l} x_1=330^\circ+360^\circ\cdot k \\ x_2=210^\circ+360^\circ\cdot k,\ (k\in\mathbb{Z}). \end{array}\right.$

Задачи

Реши ги равенките:

1) а) $sin(x - 10°) = sin40°$; б) $cos(30° - x) = sin70°$.

2) а) $sin(x + 15°) = \frac{1}{2}$; б) $cos(x + 20°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) а) $tg(25° - x) = -1$; б) $ctg(18° + x) = \sqrt{3}$.

4) а) $cos3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $sin2x = -\frac{1}{2}$.

5) а) $2sin\frac{2x}{3} - \sqrt{3} = 0$; б) $\sqrt{3}\, cos(2x + 30°) = \frac{3}{2}$.

6) а) $\sqrt{3}\, tg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$; б) $\sqrt{3}\, ctg(\pi - 3x) = 1$.

7) а) $\frac{3+8\sin x}{\sin x} = 2$; б) $\frac{1-3\cos x}{\cos x} = -1$.

8) а) $\frac{3tgx-1}{6tgx+5} = \frac{tgx-3}{2tgx+1}$; б) $\frac{10\sin x+4}{4\sin x+1} - \frac{5\sin x+24}{2\sin x+6} = 0$.

19 ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ КОИ СЕ СВЕДУВААТ НА КВАДРАТНИ

Потсети се!

Решението на квадратна равенка $ax^2 + bx + c = 0$ се одредува со формулата

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Реши ја квадратната равенка

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Која од равенките е квадратна тригонометриска:

$asinx + bcosx^2 = 0$,

$3sin^2x - 4sinx + 1 = 0$,

$3sin^2 30° + 2sinx - 1 = 0$?

А Равенката од видот $a(f(x))^2 + bf(x) + c = 0$, каде што $f(x)$ е некоја тригонометриска функција се вика квадратна тригонометриска равенка.

Со смената $f(x) = y$, равенката се сведува на квадратна равенка:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

1 Реши ја равенката

$$2sin^2x - sinx - 1 = 0$$

Согледај го решението:

Равенката ја трансформираме во видот $2(sinx)^2 - sinx - 1 = 0$, која со смената $sinx = y$, го добива видот $2y^2 - y - 1 = 0$, чии решенија се $y_1 = -\frac{1}{2}$ и $y_2 = 1$.

Со враќање во смената $sinx = y$, ги добиваме равенките:

$sin\,x = -\frac{1}{2}$ чие решение е: $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, и

$sinx = 1$ чие решение е: $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2 Реши ги тригонометриските равенки:

а) $2sin^2x - sinx = 0$; б) $cos^2x + cosx = 0$;

в) $tg^2x - 1 = 0$; г) $2cos^2x + cosx - 1 = 0$.

Б **3** Реши ја равенката $tg^2 2x - 2tg2x - 3 = 0$.

Согледај го решението:

Со смената $tg2x = y$ ја добиваме квадратната равенка $y^2 - 2y - 3 = 0$, чии решенија $y_1 = -1$ или $y_2 = 3$, т.е. $tg2x = -1$, $tg2x = 3$.

Решенијата на равенките се:

$$2x = \pi - \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{или} \quad 2x = arctg3 + k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{или} \quad x = 35^\circ 46' + \frac{k\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

4 Реши ги тригонометриските равенки:

а) $2cos^2 2x + 3cos2x + 1 = 0$; б) $5tgx + 7ctgx = 12$.

В **5** Реши ја тригонометриската равенка $2\cos x + \frac{3 - 7\cos x}{2 + \cos x} = \frac{2}{2 + \cos x}$.

Согледај го решението:

Бидејќи $2 + cosx \neq 0$ (зошто?), следува

$$4cosx + 2cos^2x + 3 - 7cosx = 2 \quad \text{или} \quad 2cos^2x - 3cosx + 1 = 0$$

Со воведување на смената $cosx = y$, ја добиваме равенката $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

чии решенија се $y_1 = \frac{1}{2}$ или $\cos x = \frac{1}{2}$ Од каде $x_{1/2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$y_2 = 1$ $\cos x = 1.$ $x_3 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

6 Реши ја тригонометриската равенка $\frac{\sin x}{\sin x - 2} - \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} = 1$.

7 Реши ја тригонометриската равенка $4cos^2x + 4cosx + sin^2x = 0$.

Согледај го решението:

Со замена за $sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$, добиваме

$$3cos^2x + 4cosx + 1 = 0$$

Воведувајќи ја смената $cosx = y$, ја добиваме равенката

$$3y^2 + 4y + 1 = 0,$$

чии решенија се: $y_1 = -1$, $y_2 = -\frac{1}{3}$ или $\cos x = -1$, $\cos x = -\frac{1}{3}$.

Решенијата на равенките се: $x = \pi + 2k\pi$, $x = \pi \pm arccos\left|-\frac{1}{3}\right| + 2k\pi$, $k \in Z$.

8 Реши ја тригонометриската равенка $6sin^2x - sinx - 4cos^2x + 1 = 0$.

Задачи

Реши ги равенките:

1. а) $2sin^2x - \sqrt{2}\,sinx = 0$; б) $2cos^2x - cosx = 0$.
2. а) $6sin^2x - 7sinx + 2 = 0$; б) $2cos^2x - cosx - 1 = 0$.
3. а) $3tg^2x + \sqrt{3}\,tgx = 0$; б) $ctgx - ctg^2x = 0$.
4. а) $sin^2x + 4cosx + 4cos^2x = 0$; б) $cos^2x - 3sin^2x = 0$.
5. а) $sin^2x - cos^2x - cosx = 0$; б) $sin^2x - 2cos^2x - 3sinx + 2 = 0$.
6. а) $4sin^2x + tg^2x = 0$; б) $3ctgx + 2sinx = 0$.

20 ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ ШТО СЕ РЕШАВААТ СО ПРИМЕНА НА НЕКОИ ТРАНСФОРМАЦИИ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ИЗРАЗИ

Потсети се!

Равенката производ

$$x(x - 1)(x - 2) = 0$$

е еквивалентна со дисјункцијата:

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \quad \text{т.е.} \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$$

А 1 Реши ја тригонометриската равенка:

$$sinx(1 - sinx)(1 + sinx) = 0.$$

Согледај го решението:

Равенката е еквивалентна со дисјункцијата на равенките:

$sinx = 0$ или $1 - sinx = 0$ или $1 + sinx = 0$

чии решенија се $x = k\pi$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Решенијата $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, може да се запишат како $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2 Реши ја равенката $\cos x\left(1 - \cos\frac{2x}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3 Одреди го множеството решенија на равенките:

а) $\sin 2x - \sin x = 0$; б) $\sin 2x + 2\cos x = 0$.

Согледај го решението:

а) $2\sin x\cos x - \sin x = 0$, $\sin x(2\cos x - 1) = 0$. Оттука следува:

$\sin x = 0$: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

$\cos x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; или $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4 Реши ги тригонометриските равенки:

а) $\sin 2x = \operatorname{ctg} x$; б) $\sin 2x = 2\cos x$.

5 Реши ја тригонометриската равенка $\cos 2x = \cos^2 x - 1$.

Согледај го решението:

Со примена на формулата $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ имаме

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1$ или $\sin^2 x = 1$.

Оттука следува дека $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$, па

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

6 Реши ги тригонометриските равенки:

а) $\cos^2 x - \sin 2x = \cos 2x$; б) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$.

7 Реши ја равенката $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.

Согледај го решението:

$2\sin x\cos x = \cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x$

$4\sin x\cos x = 1$, т.е. $2\sin 2x = 1$, па

$\sin 2x = \frac{1}{2}$, а $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ или $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

8 Реши ја равенката $\sin 2x - \sin^2 x = \cos 2x$.

9 Реши ја равенката $1 - \cos x = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Согледај го решението:

Бидејќи $1 - cosx = 2sin^2\frac{x}{2}$, имаме: $2sin^2\frac{x}{2} = \frac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}$ или

$$2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}sin\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2} = 0, \quad \text{т.е. } sin\frac{x}{2}(sinx - 1) = 0.$$

Оттука следува: $sin\frac{x}{2} = 0$ или $sinx - 1 = 0$, а нивните решенија се: $x = 2k\pi$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

10 Реши ја равенката $(1 + sin2x)(1 - tgx) = 1 - tgx$.

11 Реши ја равенката $sin^4x - cos^4x = \frac{1}{2}$.

Согледај го решението:

$(sin^2x - cos^2x)(sin^2x + cos^2x) = \frac{1}{2}$ или $cos^2x - sin^2x = -\frac{1}{2}$, т.е. $cos2x = -\frac{1}{2}$,

а решенијата се: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ или $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12 Реши ја равенката $sin3x + sinx = 0$.

Согледај го решението:

Со примена на формулата $sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, дадената равенка е од видот $2sin2xcosx = 0$, т.е.

$$sin2x = 0 \quad \text{или} \quad cosx = 0, \text{ а}$$

$$x = \frac{k\pi}{2}; \qquad x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

13 Реши ги равенките:

а) $sin3x + sin2x + sinx = 0$; б) $cos3x - cos2x + cosx = 0$.

Задачи

Реши ги равенките:

1. а) $sin^2x + cos2x = \frac{3}{4}$; б) $tgx - \frac{1}{2}sin2x = 0$.

2. $cos2x + cos^2x(1 + tgx) = sin^2x(1 + ctgx)$.

3. $cos2x + sinx = 1 + sinxcos2x$.

4. $tgx \cdot sinx + \sqrt{3}\, sinx - tgx - \sqrt{3} = 0.$

5. $cosx + cos3x = cos2x + cos4x.$

6. $4sin^3x + cosx = cos3x.$

21 СИНУСНА ТЕОРЕМА

Потсети се!

- Кои се елементи на триаголникот?
- За страните во триаголникот важи:

$$|b - c| < a < b + c$$

- За аглите α, β и γ во триаголникот важи:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}.$$

- Спротивните агли во тетивен четириаголник се суплементни.
- Одреди ги елементите на правоаголниот триаголник, ако хипотенузата $c = 12$ mm и аголот $\beta = 60^{\circ}$.

Минатата учебна година се запознавме со решавањето на правоаголен триаголник. Сега ќе се запознаеме со решавање на произволен триаголник. За таа цел треба да ги знаеме зависностите меѓу страните и аглите во триаголникот. Една од нив е искажана со следнава

Теорема: Во секој триаголник страните се пропорционални со синусите на спротивните агли, т.е.

$$a : b : c = sin\alpha : sin\beta : sin\gamma \text{ или}$$

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$$

Доказ: Ќе ги разгледаме трите можни случаи:

1. ΔABC е остроаголен; 2. ΔABC е правоаголен; 3. ΔABC е тапоаголен.

И во трите случаи ќе покажеме дека важат равенствата:

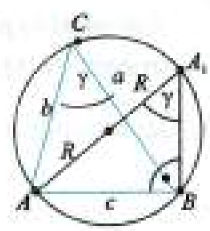
1. $a = 2Rsin\alpha$, т.е $\dfrac{a}{sin\alpha} = 2R$; **2.** $b = 2Rsin\beta$, т.е $\dfrac{b}{sin\beta} = 2R$;

3. $c = 2Rsin\gamma$, т.е $\dfrac{c}{sin\gamma} = 2R$, R – радиус на опишана кружница.

Ќе го докажеме третото равенство:

1° ΔABC е остроаголен (црт.1)

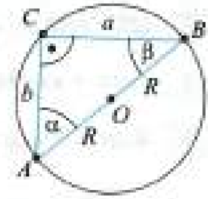
- Околу ΔABC опишуваме кружница со радиус R.
- Низ темето A го повлекуваме дијаметарот AA_1 на опишаната кружница и A_1 го сврзуваме со B.
- ΔABA_1 е правоаголен, $\sphericalangle ABA_1 = 90^{\circ}$, $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle ACB = \gamma$, (како периферни агли над ист кружен лак).
- Од ΔABA_1 имаме: $\dfrac{c}{2R} = sin\gamma$, т.е. $c = 2Rsin\gamma$.



црт. 1

2° ΔABC е правоаголен црт. 2.

- Опишуваме кружница со радиус R околу правоаголниот ΔABC.
- Хипотенузата на овој триаголник е еднаква на $2R$, т.е. $c = 2R = 2R \cdot 1 = 2R\sin 90^\circ = 2R\sin\gamma$.

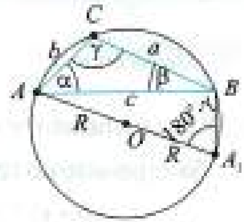


црт. 2

3° ΔABC е тапоаголен црт. 3.

- Околу ΔABC опишуваме кружница со радиус R.
- Низ темето A го повлекуваме дијаметарот AA_1. Добиениот четириаголник AA_1BC е тетивен.
- $\sphericalangle\gamma$ и $\sphericalangle AA_1B$ се спротивни агли во тетивниот четириаголник AA_1BC, па нивниот збир е 180°, т.е. $\sphericalangle AA_1B = 180^\circ - \gamma$.
- Од правоаголниот триаголник ABA_1 следува дека:

$$\frac{c}{2R} = \sin\left(180^\circ - \gamma\right) = \sin\gamma \text{, односно } c = 2R\sin\gamma.$$



црт. 3

Значи, докажавме дека $c = 2R\sin\gamma$, за кој било триаголник.

На сличен начин се докажуваат и останатите равенства.

Имајќи ги предвид горните равенства добиваме

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

со што теоремата е докажана.

Синусната теорема се применува при решавање на разни задачи врзани за произволен триаголник, од кои следниве две се основни:

1. Решавање на триаголник ако е дадена една страна и два агла.
2. Решавање на триаголник ако се дадени две страни и агол што лежи спроти една од нив

Освен двете основни задачи, постојат и други задачи во кои дадените елементи на триаголникот се во некоја релација, на пример:

$$a,\ \alpha,\ b+c; \quad a,\ R,\ b+c; \quad b,\ \beta,\ a-c; \quad R,\ a+b+c,\ \alpha \text{ и други.}$$

1 Реши го триаголникот зададен со: $a = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

Следај го решението:

- Аголот $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 75^\circ$.
- Од синусната теорема имаме: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$, од каде $b = \dfrac{a}{\sin\alpha}\sin\beta$.

$$b = \frac{3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}\sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = 2\sqrt{3}.$$

Страната c ја одредуваме со повторна примена на синусната теорема, т.е.

$$\frac{a}{sin\alpha}=\frac{c}{sin\gamma} \Rightarrow c=\frac{a}{sin\alpha}sin\gamma .$$

$$c=\frac{3\sqrt{2}}{sin60^o}sin75^o=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right),\quad c=\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Забелешка: Со дадени два агли и една страна, задачата секогаш има единствено решение.

2 Реши го триаголникот ABC зададен со две страни и агол спроти едната од нив:

а) $a=12,\ b=15,\ \beta=59°21'$; б) $a=4,\ c=13,\ \alpha=14°15'$;

в) $b=5,\ c=3,\ \gamma=45°$.

Согледај го решението:

а) Од $\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}$ следува $sin\alpha=\frac{a}{b}sin\beta$, $sin\alpha=\frac{12}{15}sin59°21'$,

$sin\alpha=0,8\cdot0,8602974=0,6882379.$

Од $a<b \Rightarrow \alpha<\beta$, што значи α може да биде само остар агол, па задачата има едно единствено решение, иако равенката $sin\alpha=0,6882379$ има две решенија: α и $\pi-\alpha$.

Според тоа: $\alpha=43°29'27''$

Аголот $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$; $\gamma=179°59'60''-102°50'27''$; $\gamma=77°9'33''$.

б) $a=4,\ c=13,\ \alpha=14°15'$.

Од $\frac{a}{sin\alpha}=\frac{c}{sin\gamma}$ добиваме $sin\gamma=\frac{c}{a}sin\alpha=\frac{13}{4}sin14°15'$,

$sin\gamma=3,25\cdot0,2461532=0,7999982<1.$

Од $c>a$ следува $\gamma>\alpha$ што значи дека γ може да биде и тап агол, па задачата има две решенија: γ или $\pi-\gamma$.

$$\gamma_1=53°7'48'',\quad \gamma_2=180°-\gamma_1=126°52'12''$$

Соодветните вредности за третиот агол се:

$\beta_1=180°-(\alpha+\gamma_1)$, $\beta_2=180°-(\alpha+\gamma_2)$

$\beta_1=112°37'12''$, $\beta_2=38°52'48''$

Страната b ја одредуваме со повторна примена на синусната теорема, т.е.

од $\frac{a}{sin\alpha}=\frac{b}{sin\beta}$ добиваме $b=\frac{a\,sin\beta}{sin\alpha}$.

$$b_1=\frac{4\cdot sin112°37'12''}{sin14°15'};\qquad b_2=\frac{4\cdot sin38°52'48''}{sin14°15'}$$

$b_1=15$; $b_2=10,2$.

Значи:

$$b_1 = 15; \quad \beta_1 = 112°37'12''; \quad \gamma_1 = 53°7'48''.$$
$$b_2 = 10{,}2; \quad \beta_2 = 38°52'48''; \quad \gamma_2 = 126°52'12''.$$

- За да се увериме дека задачата има две решенија, конструирај триаголник ABC, со $a = 4$ cm, $c = 13$ cm и $\alpha = 15°$.

в) $b = 5, c = 3, \gamma = 45°$.

Од $\frac{b}{sin\,\beta} = \frac{c}{sin\,\gamma}$ добиваме $sin\,\beta = \frac{b}{c} sin\,\gamma$, т.е.

$$sin\,\beta = \frac{b}{c} sin\,\gamma = \frac{5}{3} sin\,45° = \frac{5}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}1785113 > 1.$$

Значи, $sin\beta > 1$, што не е можно па заклучуваме дека задачата нема решение.

- За да се увериш дека задачата нема решение, пробај да конструираш триаголник ABC, со $a = 4$ cm, $c = 13$ cm и $\alpha = 45°$.

Задачи

1. Реши го ΔABC ако: а) $b = 2, \alpha = 60°, \gamma = 105°$;
   б) $a = 2\sqrt{15}$, $b = 4\sqrt{5}$, $\alpha = 60°$; в) $b = \sqrt{6}$, $c = 2\sqrt{3}$, $\beta = 30°$.

2. Реши го ΔABC, зададен со страна и два агли:
   а) $a = 17, \alpha = 48°19', \beta = 56°35'$; б) $b = 11, \alpha = 77°, \gamma = 57°34'$;
   в) $c = 7, \alpha = 21°47'12'', \beta = 107°27'$; г) $a = 23{,}47; \beta = 51°32', \gamma = 70°54'$.

3. Реши го ΔABC, зададен со две страни и агол спроти едната од нив:
   а) $a = 450, b = 530, \alpha = 53°48'$; б) $b = 2{,}9; c = 2{,}1; \beta = 98°56'$;
   в) $a = 40{,}8; b = 25{,}7, \beta = 34°16'$; г) $b = 6; c = 4; \gamma = 60°$.

4. Реши го ΔABC, ако
   а) $R = 2\sqrt{6}$, $\alpha = 45°, \beta = 60°$; б) $R = 1, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{2}$;
   в) $R = 3\sqrt{2}$, $a = 6, \gamma = 60°$; г) $R = 23, a = 31, b = 28$.

5. Реши го ΔABC, ако:
   а) $R = 8{,}125, a = 13, h_b = 12$; б) $R = 7\sqrt{3}$, $b = 24, h_c = 12\sqrt{3}$;
   в) $R = 1, a + b + c = 3 + \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$.

6. Докажи дека за секој триаголник важи: $abc = 8R^3 sin\alpha \cdot sin\beta \cdot sin\gamma$.

7. Две страни во триаголникот се однесуваат како 4 : 11, а спротивните агли како 1 : 3. Одреди ги аглите во триаголникот.

8. Пресметај ги плоштината и периметарот на паралелограм со дијагонала $d_1 = 25$ и аголот $\alpha = 61°55'$.

22 КОСИНУСНА ТЕОРЕМА

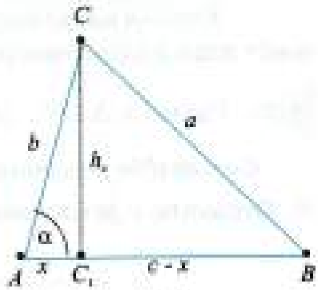
При решавање на разни задачи поврзани со произволен триаголник, освен синусната теорема се користи и следнава

Теорема: Квадратот на која било страна на триаголникот е еднаков на збирот од квадратите на другите две страни, намален за двојниот производ на тие две страни и косинусот на аголот меѓу нив, т.е.

$$\mathbf{1.}\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha;$$
$$\mathbf{2.}\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta;$$
$$\mathbf{3.}\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

Доказ: Доказот ќе го изведеме за третото равенство во следните случаи:
1. ΔABC е остроаголен; 2. ΔABC е тапоаголен; 3. ΔABC е правоаголен.

1° ΔABC е остроаголен (црт.1)



црт. 1

- Со повлекување на висината CC_1 триаголникот ABC го делиме на два правоаголни триаголници: AC_1C и CC_1B.
- Со примена на Питагоровата теорема имаме:

$$a^2 = h_c^2 + (c - x)^2$$
$$h_c^2 = b^2 - x^2.$$

- Изразот за h_c^2 го заменуваме во првото равенство, па имаме

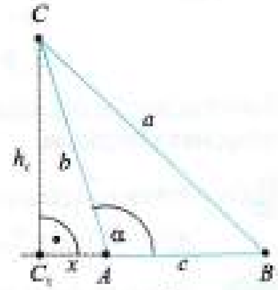
$$a^2 = b^2 - x^2 + (c - x)^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2, \text{ т.е. } a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

- Од ΔAC_1C имаме $\dfrac{x}{b} = \cos\alpha$, т.е. $x = b\cos\alpha$.
- Изразот за x го заменуваме во равенството $c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$, по што добиваме:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

што требаше да се докаже.

2° ΔABC е тапоаголен црт. 2.



црт. 2

- Со повлекување на висината CC_1 триаголникот ABC го делиме на два правоаголни триаголници: AC_1C и CC_1B.
- Со примена на Питагоровата теорема добиваме:
$a^2 = h_c^2 + (c + x)^2$ и $h_c^2 = b^2 - x^2$. Оттука следува:

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2, \text{ т.е.}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

- Од ΔACC_1 имаме $\frac{x}{b} = cos(180^0 - \alpha) = -cos\alpha$, па оттука $x = -bcos\alpha$.
- Изразот за x го заменуваме во равенството $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$ и добиваме:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$$

што требаше да се докаже.

3° ΔABC е правоаголен (α е прав агол) црт. 2.

- ΔABC е правоаголен, па за него важи Питагоровата теорема, т.е. $c^2 = a^2 + b^2$.
- Бидејќи $cos90^o = 0$, за c^2 може да запишеме:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos90^o$$

со што теоремата е докажана.

Косинусната теорема се применува ако:

1. се дадени две страни и агол зафатен со нив;

2. се дадени трите страни.

Косинусната теорема може да се примени во решавањето на триаголникот ако е дадена некоја релација меѓу елементите на триаголникот.

1 Реши го ΔABC, ако: $a = 8$, $b = 7$, $\gamma = 21^o47'$.

Согледај го решението:

- Страната c ја наоѓаме од равенството

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma, \text{ т.е.}$$

$$c = \sqrt{8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot cos21^o47'} = \sqrt{64 + 49 - 111 \cdot 0{,}9285938}$$

$$c = \sqrt{9{,}92609} = 3{,}15.$$

За пресметување на еден од аглите α или β, исто така, може да се примени косинусната теорема.

- Од $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$, имаме:

$$cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{49 + 9 - 64}{2 \cdot 7 \cdot 3} = -0{,}1428571$$

Бидејќи $0^o < \alpha < 180^o$, за α имаме:

$$\alpha = arccos(-0{,}1428571), \text{ т.е. } \alpha = 98^o12'\,48'',$$

$$\text{а } \beta = 180^o - (\alpha + \gamma), \text{ добиваме } \beta = 60^o0'12''.$$

Забелешка: За одредување на еден од аглите α или β може да се примени и синусната теорема.

2 Реши го триаголникот ABC, ако:

а) $a = 17$, $c = 22$, $\beta = 56^o35'$; б) $b = 16$, $c = 15$, $\gamma = 107^o27'$.

3 Реши го триаголникот ABC, ако $a = 6$, $b = 7$, $c = 11$.

Согледај го решението:

Од равенството $cos\,\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, добиваме:

$$cos\,\alpha = \frac{49+121-36}{2\cdot 7\cdot 11} = 0{,}8701298, \text{ а } \alpha = 29^o31'34''.$$

$cos\,\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{36+121-49}{132} = 0{,}818181$, т.е. $\beta = 35^o05'48''$, а аголот γ ќе биде: $\gamma = 180^o - (\alpha+\beta)$ т.е. $\gamma = 115^o22'37''$.

4 Реши го триаголникот ABC, ако:

а) $a = 17, b = 12, c = 9$; б) $a = 2{,}3; b = 1{,}7; c = 1{,}5$.

5 Докажи дека за секој триаголник важат равенствата:

$a = bcos\gamma + ccos\beta$, $b = ccos\alpha + acos\gamma$, $c = acos\beta + bcos\alpha$.

Согледај го решението:

Според косинусната теорема имаме:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot cos\alpha \quad \text{и} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot cos\beta.$$

Со собирање на соодветните страни на овие две равенства добиваме:

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - 2c(bcos\alpha + acos\beta)$$

од каде $c = bcos\alpha + acos\beta$ што и требаше да се докаже.

Останатите две равенства докажи ги сам.

Задачи

1 Реши го триаголникот ABC ако:

а) $a^2 + b^2 = 34, c = 7, \gamma = 120^o$; б) $a = 8, bc = 60, \alpha = 53^o7'50''$.

2 Без употреба на калкулатор пресметај ги непознатите страни во триаголникот, ако:

а) $a + b = 20, c = 15, \beta = 60^o$; б) $c - a = 30, b = 33, \gamma = 120^o$.

3 Без употреба на калкулатор, пресметај го аголот α во триаголникот ABC, ако меѓу неговите страни постои релацијата.

а) $a^2 = b^2 + c^2 - bc$; б) $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}$;

4 Без употреба на таблица, пресметај ја непознатата страна во триаголникот ABC, ако:

а) $a = 7, b = 5, \alpha = 2\beta$; б) $a = 6, c = 4, \alpha = 2\gamma$.

Упатство: а) Со примена на синусната теорема ќе добиеме $cos\,\beta = \dfrac{7}{10}$, а потоа примени ја косинусната теорема.

(5) Реши го триаголникот ABC, ако:

а) $a = 27,\ b = 29,\ t_c = 26$; б) $b = 13,\ c = 15,\ t_a = 7$.

Упатство: Продолжи ја тежишната линија t_c за должината $\overline{C_1D} = t_c$.

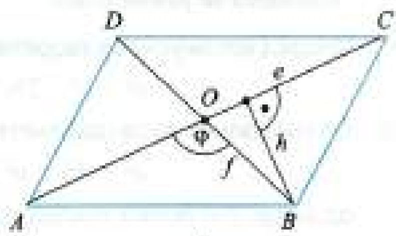
(6) Страните во триаголникот се однесуваат како $5 : 16 : 19$. Колкав е најголемиот агол?

(7) Докажи дека за тежишната линија во ΔABC важи формулата $t_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

23 ПРИМЕНА НА СИНУСНА И КОСИНУСНА ТЕОРЕМА

1 Одреди ја плоштината на паралелограм чии дијагонали се e и f, а аголот меѓу нив φ.

Согледај го решението:



црт. 1

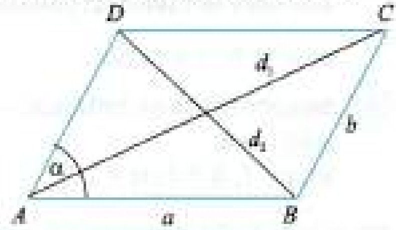
- Од $P_{\Delta ABO} = P_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}\overline{AO} \cdot h$ следува паралелограмот е поделен на четири триаголници кои имаат еднакви плоштини. Според тоа плоштината на паралелограмот е $P = 4 \cdot \frac{\overline{AO} \cdot \overline{BO} \cdot \sin\varphi}{2}$.

- Бидејќи $\overline{AO} = \frac{e}{2}$, $\overline{BO} = \frac{f}{2}$, за плоштината добиваме: $P = \frac{4 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \sin\varphi}{2}$,

т.е. $P = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$.

2 Паралелограмот $ABCD$ е зададен со страните $a = 4$, $b = 8$ и аголот меѓу нив $\alpha = 48°24'$. Да се пресмета должината на дијагоналите d_1 и d_2.

Согледај го решението:



црт. 2

- Со примена на косинусната теорема на ΔABC и ΔABD добиваме:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$$

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180° - \alpha) = $$
$$= a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha$$

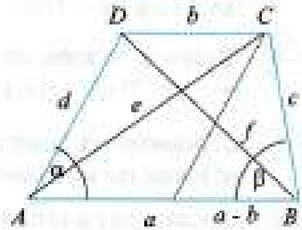
Со замена на дадените вредности добиваме:

$$d_2^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \cos 48°24' = 80 - 64 \cdot 0{,}663926 = 37{,}51 ; \;\; d_2 = 6{,}12.$$

$$d_1^2 = 80 + 42{,}49 = 122{,}49 ; \;\; d_1 = 11{,}07.$$

3 Во секој трапез, збирот на квадратите на дијагоналите е еднаков на збирот на квадратите на краците и двојниот производ од основите. Докажи!

Согледај го решението:



црт. 3

Ако со e и f ги означиме дијагоналите на трапезот (црт. 3), тогаш според косинусната теорема имаме:

$$e^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta,$$

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha.$$

Собирајќи ги соодветните страни на горните две равенства добиваме:

$$e^2 + f^2 = 2a^2 + c^2 + d^2 - 2a(c\cos\beta + d\cos\alpha).$$

Имајќи предвид дека $c\cos\beta + d\cos\alpha = a - b$ добиваме:

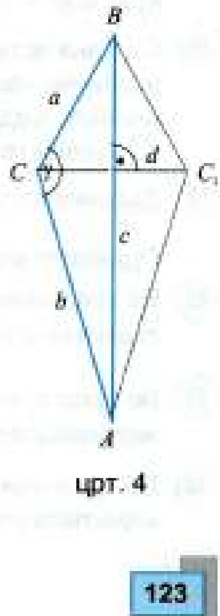
$$e^2 + f^2 = 2a^2 + c^2 + d^2 - 2a(a - b) = 2a^2 + c^2 + d^2 - 2a^2 + 2ab, \text{ т.е.}$$

$$e^2 + f^2 = c^2 + d^2 + 2ab,$$

што требаше да се докаже.

4 Триаголник со страни $a = 3$, $b = 5$ и агол $\gamma = 120°$ се пресликува симетрично во однос на најдолгата страна. Одреди ги дијагоналите на добиениот делтоид.

Согледај го решението:



црт. 4

Која страна е најдолга и зошто?

Страната c ќе ја добиеме со користење на косинусната теорема, т.е.

$$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120°$$

$$c^2 = 9 + 25 + 30 \cdot \sin 30°$$

$$c^2 = 49, \;\; c = 7.$$

Ако другата дијагонала на делтоидот е d, тогаш

$$ab \cdot \sin\gamma = \frac{cd}{2} \;\; \text{од каде} \;\; d = \frac{2ab \cdot \sin\gamma}{c} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120°}{7},$$

$$\text{т.е.} \;\; d = \frac{15\sqrt{3}}{7}.$$

Задачи

1. Докажи дека за страните и дијагоналите на паралелограмот важи: $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$.

2. Синусите на аглите во триаголникот се однесуваат како $13 : 14 : 15$. Пресметај ги аглите во триаголникот.

3. Пресметај ги дијагоналите на делтоидот со страни $a = 70$, $b = 80$ и агол меѓу нив $\varphi = 120^o$.

4. Даден е трапез со основи $a = 49$, $b = 10$ и агли при големата основа $\alpha = 22^o37'12''$, $\beta = 14^o15'$. Пресметај ги краците и плоштината на трапезот.

5. Страните на триаголникот се $a = 11$, $b = 24$ и $c = 31$. Пресметај ја должината на симетралата на најголемиот агол во триаголникот.

6. Докажи дека аголот меѓу дијагоналите во правоаголникот се пресметува по формулата

$$tg\varphi = \frac{2ab}{a^2 - b^2}, \ (b < a).$$

7. Во кружница k дадени се тетивите $\overline{AB} = 8$ и $\overline{AC} = 5$, кои меѓу себе формираат агол од 60^o. Пресметај го радиусот на кружницата.

8. Нека M и N се средини на страните , на паралелограмот $ABCD$ со дол–жини a и b. Докажи дека: $\overline{AN}^2 + \overline{DM}^2 = 1{,}25\left(a^2 + b^2\right)$.

9. Докажи дека, ако за еден триаголник ABC важи:

   а) $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, тогаш $\alpha = 60^o$.

   б) $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, тогаш $\alpha = 120^o$.

10. Од една иста точка истовремено тргнуваат двајца велосипедисти во две различни насоки. Едниот се движи со брзина 9 m/s, а другиот со 15 m/s. Колкава е оддалеченоста помеѓу велосипедистите после половина час од тргнувањето, ако нивните насоки на движење зафаќаат агол од 60^o?

11. Дадени се страните на триаголникот ABC: $b = 3$, $c = 2\sqrt{3}$, и аголот $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

    Одреди го аголот γ на триаголникот, без калкулатор.

12. Во триаголникот ABC дадени се: $\alpha = 30^o$, $\beta = 45^o$ и $b = 10\sqrt{2}$. Одреди ја страната a на триаголникот, без калкулатор.

13. Во триаголникот ABC дадени се: $\alpha = 30^o$, $\beta = 75^o$ и $a = \sqrt{18}$. Одреди ја најголемата страна на триаголникот, без калкулатор.

14. Во триаголникот ABC дадени се: $\alpha = 100^o$, $\gamma = 45^o$ и $c = 8{,}2$. Одреди ја најмалата страна на триаголникот.

ТЕМА 3

ЕЛЕМЕНТИ ОД КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЈАТНОСТ

Во оваа тема ќе учиш за:

1 МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

Аксиоматско изучување на аритметиката на природните броеви го овозможуваат Пеановите аксиоми. (**Guiseppe Peano**, 1858-1932), а тие се:

I. 1 е природен број.

II. Секој природен број има точно еден следбеник.

III. Два различни броја не можат да имаат ист следбеник.

IV. 1 не е следбеник на ниту еден природен број.

V. Секое подмножество M на множеството $\mathbb{N}$ што го содржи бројот 1 и го содржи следбеникот на секој свој елемент, ги содржи сите природни броеви, т.е. $M = \mathbb{N}$.

1 Пресметај го збирот на првите 100 природни броеви.

Согледај го решението:

$$1+2+3+...+98+99+100;$$

$$1+2=3=\frac{2\cdot(1+2)}{2};$$

$$1+2+3=6=\frac{3\cdot(1+3)}{2};$$

$$1+2+3+4=10=\frac{4\cdot(1+4)}{2};$$

Воочуваш дека збирот на првите четири природни броеви е еднаков на полупроизводот од бројот на собироците и збирот на првиот и четвртиот собирок.

Провери дали истото правило важи за збирот на првите 10 природни броеви.

Може да се заклучи дека тврдењето важи и за збирот на првите 100 природни броеви, т.е.:

$$1+2+3+...+98+99+100=\frac{100\cdot(1+100)}{2}=5050.$$

Ваквиот начин на размислување води до претпоставката дека за кој било природен број n важи:

$$1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(1+n)}{2}.$$

2 Пресметај го збирот на првите 100 непарни природни броеви.

Согледај го решението:

$$1+3+5+7+...+199;$$

$1+3=4=2^2$; $\quad 1+3+5=9=3^2$; $\quad 1+3+5+7=16=4^2$;

Воочуваш дека збирот на првите два, три или четири непарни природни броеви е еднаков на квадратот на бројот на собироците. Според тоа, може да се заклучи дека

$$1+3+5+7+...+199=100^2=10000.$$

Дали оваа претпоставка важи за кој било природен број n, т.е.

$$1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2\,?$$

Изведените заклучоци во двете задачи не се докази што важат во општ случај, иако нивната точност може да се провери за кој било број n. Проверката не ни дава гаранција дека тврдењето важи и за наредниот природен број $n+1$.

За да се докаже дека тврдењето важи за кој било природен број, треба да се спроведе една логичка постапка со која ќе се потврди дека даденото тврдење е точно за кој било природен број. Постапката која овозможува доказ на вакви тврдења се вика ***принцип на математичка индукција***, кој се состои во следново:

Нека $p(n)$ е некое тврдење чија точност зависи од природен број n.
1. Ако $p(1)$ е точно.
2. Ако од претпоставката за точност на тврдењето $p(k)$ следува точноста и на $p(k+1)$, тогаш тврдењето $p(n)$ е точно за секој природен број n.

Доказот на импликацијата $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ е од особен интерес. Имено, за $n=1$ се покажува дека исказот $p(1)$ е точен. Земајќи $k=1$, според импликацијата $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ следува дека од $p(1) \Rightarrow p(2)$, т.е. $p(2)$ е точен исказ. Оттука, пак, имаме: $p(2) \Rightarrow p(3)$, $p(3) \Rightarrow p(4)$ итн.

Секој доказ изведен со принципот на математичка индукција се состои од следниве три фази:

1. Проверка дека даденото тврдење е точно за $n=1$.

2. Претпоставка дека тврдењето е точно за $n=k, k \in \mathbb{N}$, која се вика индуктивна претпоставка.

3. Доказ дека тврдењето е точно и за наредниот природен број $n=k+1$.

3 Докажи дека тврдењето $1+2+3+4+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ е точно за секој природен број n.

Согледај го доказот:

1. Проверуваме дали тврдењето е точно за $n=1$:

$p(1)$: $1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$, значи тврдењето е точно.

2. Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k$, т.е.

$p(k)$: $1+2+3+...+k=\dfrac{k\cdot(k+1)}{2}$ е точно.

3. Треба да докажеме дека тврдењето е точно и за $n=k+1$, т.е.

$$p(k+1):\ 1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}.$$

Од претпоставката имаме:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Според тоа, бидејќи за $n=1$ исказот $p(1)$ е точен, а од претпоставката дека за $n=k$ е точно тврдењето $p(k)$, ја докажавме точноста на импликацијата

$p(k) \Rightarrow p(k+1)$, според принципот на математичка индукција следува дека тврдењето е точно за секој природен број n.

4 Докажи дека за секој природен број n е точно: $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

5 Со математичка индукција докажи го тврдењето:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \quad \forall n\in \mathbb{N}.$$

Согледај го доказот:

1. За $n=1$, $p(1)$ е точно, бидејќи $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

2. Претпоставуваме дека за $n=k$, $p(k)$: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ е точно.

3. Треба да докажеме дека за $n=k+1$,

$$p(k+1):\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Од претпоставката имаме:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}\right)+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Често пати во некои природни науки со конечно многу направени обиди или извршени набљудувања на некои појави се изведува општ заклучок или се утврдува општ закон за тие појави.

Таквата индукција се вика емпириска или непотполна индукција. Изведувањето на заклучок со емпириска индукција е врз основа на непотполни податоци, на непотполни множества на набљудуваните примери и може да се случи појавите или примерите што не се разгледувани да не се согласуваат со утврдените закони. Во математиката емпириската индукција може да доведе до неточни заклучоци.

6 Нека $p(n)=n^2-79n+1601$. Дали $p(n)$ е прост број?

Согледај го решението:

Со проверка утврдуваме дека:

$p(1)=1^2-79\cdot 1+1601=1523$;

$p(2)=2^2-79\cdot 2+1601=1447$;

$p(3)=3^2-79\cdot 3+1601=1373$ итн.

$p(4)$, $p(5)$, ..., $p(79)$ се прости броеви.

Со емпириска индукција може да се заклучи дека тврдењето $p(n)$ е точно за секој природен број. Меѓутоа за $n=80$, $p(80)=80^2-79\cdot80+1601=1681$, а овој број е сложен, бидејќи 1681 е делив со 41. Значи, тврдењето не е точно за секој природен број.

7 Дали тврдењето $2+4+6+8+\ldots+2n=n^2+n+1$ е точно за секој природен број n?

Принципот на математичка индукција се темели на следнава:

Аксиома: Ако за едно множество M на природните броеви важи: $1\in M$ и ако $n\in M\Rightarrow(n+1)\in M$, за секој $n\in M$, тогаш $M=\mathbb{N}$, позната како петта Пеанова аксиома.

Задачи

Со примена на математичка индукција докажи ги тврдењата:

1 $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

2 $2+5+8+\ldots+(3n-1)=\dfrac{n(3n+1)}{2}$.

3 $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

5 $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

6 $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

7 $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

8 $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2n-1)x=\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

9 Докажи дека за секој природен број:

а) 7^n+3n-1 е делив со 9;

б) $2^{3(n+1)}-7n+41$ е делив со 49;

в) $3^{2(n+1)}-8n-9$ е делив со 64.

2 ПЕРМУТАЦИИ

А Нека е дадено едно конечно множество $A_n = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, чии елементи можат да бидат лица, предмети, растенија, животни, броеви, знаци, настани и др. Од даденото конечно множество можат на различни начини да се формираат различно подредени множества и подмножества. Во некои од тие множества некои елементи можат да се повторуваат, т.е. да се јавуваат повеќе пати.

Делот од математиката што го изучува формирањето на овие множества и подмножества и можниот поредок и редослед на елементите се вика ***комбинаторика***.

Комбинаториката ги изучува пермутациите, варијациите и комбинациите на конечните множества, за кои важи следнава:

Дефиниција: За едно множество A велиме дека е конечно ако $A = \varnothing$ или ако постои природен број n, така што на секој елемент од множеството $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ може да му се придружи единствен елемент од множеството $\{1, 2, 3, ..., n\}$ и обратно.

На пример, учениците во твојот клас, во твоето училиште, во Република Македонија се конечни множества. Множеството $B = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ е конечно множество.

Б 1 Дадено е множеството $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Запиши го секој можен распоред на елементите од даденото множество.

Согледај го решението:

- Едно од подредувањата на овие елементи е $a_1\ a_2\ a_3$ што се вика ***почетна пермутација***.
- Нова пермутација е $a_1\ a_3\ a_2$ добиена со разместување на последните два елементи a_2 и a_3.
- Следната пермутација е $a_2\ a_1\ a_3$, добиена со разместување на првиот и вториот елемент a_1 и a_2 на почетната пермутација итн.

Решението најчесто го прикажуваме на следниот начин:

$a_1\ a_2\ a_3$	$a_2\ a_1\ a_3$	$a_3\ a_1\ a_2$
$a_1\ a_3\ a_2$	$a_2\ a_3\ a_1$	$a_3\ a_2\ a_1$

Воочи: трите елементи на даденото множество можат да се подредат на 6 различни начини $(6 = 1 \cdot 2 \cdot 3)$.

Запомни!

Секое подредување на елементите од едно конечно множество во кое што ниту еден елемент не се повторува е ***пермутација без повторување***.

- Две пермутации се различни ако им се елементите различно подредени од едно исто множество.

2 Дадено е множеството $A=\{1,2,3,4\}$. Запиши ги сите четирицифрени брови со различни цифри, чии цифри се елементи на даденото множество.

Согледај го решението:

- Бараните броеви се пермутации на елементите на даденото множество.

Почетната пермутација најчесто е дадениот распоред на елементите, ако поинаку не е речено. Според тоа имаме:

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

Воочи го начинот на формирањето на пермутациите:

- Во првата колона цифрата 1 е на првото место, а останатите цифри во бројот се добиваат со пермутации на цифрите 2, 3 и 4.
- Втората колона е добиена така што цифрата 2 доаѓа на првото место, а останатите цифри се добиваат со пермутации на цифрите 1, 3 и 4 итн.
- Со дадените цифри можат да се запишат вкупно 24 четирицифрени броеви со различни цифри $(24=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)$

3 Колку различни n - цифрени броеви можат да се запишат со n различни цифри во кои ниту една цифра не се повторува?

Согледај го решението:

- Првата цифра може да се избере на n различни начини.
- Втората цифра може да се избере на $n-1$ начин, една цифра помалку.

Значи, првите две цифри можат да се изберат на $n\cdot(n-1)$ начини.

- За третото место постојат $n-2$ цифри (две цифри веќе се земени). Значи, првите три цифри во бројот можат да се изберат на $n(n-1)(n-2)$ начини.

Продолжувајќи ја постапката, за последното место во бројот ќе остане само една цифра.

Според тоа, од n различни цифри можат да се запишат

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots3\cdot2\cdot1 \text{ броеви.}$$

Запомни!

Производот на првите n природни броеви се вика "***ен - факториел***" и се означува со $n!$, т.е. $1\cdot2\cdot3\cdots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n=n!$.

$1!=1;\ 2!=1\cdot2=2;\ 3!=1\cdot2\cdot3=6;\ 4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ итн, а

$0!$ по дефиниција е еднаков на 1, т.е. $0!\overset{def}{=}1$.

Теорема: Бројот на пермутации без повторување од n елементи изнесува

$$P(n)=n!$$

Доказ: Теоремата ќе ја докажеме со примена на математичка индукција.
За $n=1$ тврдењето е очигледно.
Да претпоставиме дека за $n=k$ тврдењето е точно, т.е. ако едно множество има k елементи, тогаш од нив се добиваат $k!$ пермутации.
Нека $n=k+1$, односно множеството има $k+1$ елемент. Од тоа множество може да се формираат $k+1$ подмножества, така што секое подмножество има по k елементи. Според индуктивната претпоставка од елементите на секое подмножество може да се добие $k!$ пермутации, т.е.

$$P(k)=k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1=k!$$

Вкупниот број на пермутации од $k+1$ елемент е еднаков на:

$$P(k+1)=(k+1)\cdot P(k)=(k+1)\cdot k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1=(k+1)!$$

Според принципот на математичката индукција тврдењето е точно за секој природен број n.

Од теоремата следува дека $P(n)=n\cdot P(n-1)$. Значи, ако множеството има n елементи, тогаш бројот на пермутации кои започнуваат со ист елемент е еднаков со бројот на пермутации од преостанатите елементи, т.е. $P(n-1)=(n-1)!$.

4 Колку петцифрени броеви со различни цифри можат да се формираат од цифрите 0, 3, 4, 5 и 6? Колку од нив:

а) започнуваат со 43 и кои се тие; б) започнуваат со 5, а завршуваат со 6;
в) се непарни; г) не започнуваат и не завршуваат со парна цифра?

Следај го решението:

Секој петцифрен број со различни цифри е пермутација без повторување на дадените цифри, а нив, според теоремата, ги има

$$P(5)=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120.$$

Во тие 120 броеви се и броевите: 03456, 03465, 03645 итн. кои не се петцифрени. Тие броеви се од видот $0(3456)$. Записот $0(3456)$ означува дека бараните броеви се добиваат со пермутации на цифрите 3, 4, 5 и 6. Нивниот број е

$$P(4)=4!=24.$$

Вкупно петцифрени броеви што можат да се запишат со цифрите 0, 3, 4, 5 и 6 се

$$P(5)-P(4)=5!-4!=96.$$

а) Петцифрените што започнуваат со 43 се од видот $43(056)$, а ги има

$$P(3)=3!=6.$$

Тие се: 43056 43506 43560

43065 43605 43650

б) Броевите што започнуваат со 5 се од видот $5(0346)$, а што завршуваат на 6 се од видот $5(034)6$. Такви броеви има вкупно

$$P(4)-P(3)=4!-3!=18.$$

в) Непарните броеви се од видот $(0346)5$ или $(0456)3$, од кои $0(346)5$ и $0(456)3$ не се петцифрени. Сите непарни броеви се

$$2\cdot P(4)-2\cdot P(3)=2\cdot 4!-2\cdot 3!=36.$$

г) Тоа се броевите чии крајни цифри се непарни, т.е. од видот $3(046)5$ или $5(046)3$, а вкупно ги има

$$2\cdot P(3)=2\cdot 3!=12.$$

5 Дадено е множеството $A=\{4,6,7,8\}$.

а) Колку четирицифрени броеви со различни цифри можат да се формираат од елементите на даденото множество?

б) Колку од формираните броеви се парни, а колку непарни? Запиши ги тие броеви.

B **6** Запиши ги сите пермутации од елементите a, a, a и b.

Согледај го решението:

- Воочи, елементот a се повторува 3 пати. Секое подредување на тие елементи се вика ***пермутација со повторување***.
- Ако сите елементи се различни, ќе има $P(4)=4!=24$ пермутации.
- Во овој случај ги имаме следниве пермутации: $aaab$, $aaba$, $abaa$, $baaa$.
- Во даденото множество има една група од 3 еднакви елементи, па $3!=6$ пермутации од тие елементи се, всушност, една пермутација.
- Бројот на пермутациите со повторување е толку пати помал од вкупниот број на пермутации, колку што е бројот на пермутациите од елементите што се повторуваат, т.е. $24:6=4$, а запишуваме: $P_3(4)=\frac{4!}{3!}=4$.

Запомни!

Бројот на пермутации со повторување од n елементи од кои еден елемент се повторува k пати $(k<n)$ се пресметува со формулата

$$P_k(n)=\frac{n!}{k!}.$$

7 Колку пермутации може да формира ДРАГАНА од буквите на своето име?

8 Колку пермутации можат да се формираат од буквите на зборот МАТЕМАТИКА?

Следи го решението:

- Зборот МАТЕМАТИКА содржи 10 букви, па бројот на пермутациите е

$$P(10)=10!.$$

- Буквата *А* се повторува 3 пати, $P(3)=3!=6$.
- Буквата *М* се повторува 2 пати, $P(2)=2!=2$.
- Буквата *Т* се повторува 2 пати, $P(2)=2!=2$.
- Бројот на сите различни пермутации е $6\cdot 2\cdot 2=24$ пати помал од вкупниот број на пермутации, а тоа го запишуваме

$$P_{3,2,2}(10)=\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=151200.$$

Запомни!

Бројот на пермутации со повторување од *n* елементи меѓу кои има повеќе групи од по $k_1, k_2, \ldots, k_m$ идентични елементи се пресметува со формулата

$$P_{k_1 k_2 \ldots k_m}(n)=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_m!},\quad k_1+k_2+\ldots+k_m=m\leq n,\ m\leq n.$$

9 Колку седумцифрени броеви можат да се запишат од цифрите 1, 2 и 3, така што во секој број да има 2 тројки, 3 двојки и 2 единици?

Задачи

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

   а) $8!+9!$; б) $10!-1!$; в) $\frac{102!}{100!}$; г) $\frac{6!-5!}{120}$.

2. Упрости го изразот: а) $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$; б) $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$.

3. Скрати ја дропката: а) $\frac{(m+3)!}{m!}$; б) $\frac{n!}{(n-2)!}$.

4. Реши ја равенката:

   а) $P(x)=24x$; б) $P(x+1)-8\cdot P(x-1)=8\cdot P(x)$; в) $P(x):P(x-2)=90$.

5. Запиши ги сите пермутации од буквите на името ЗОРА. Која по ред е пермутацијата РОЗА, ако почетната пермутација е:

   а) дадената;

   б) лексикографскиот (азбучен) распоред на буквите?

6 На колку начини можат да се распоредат 5 книги на една клупа, ако една книга секогаш треба да биде во средина?

7 Колку пермутации од елементите $1,2,3,4,5,6,7,8$ започнуваат со:

а) 5; б) 123; в) 8642?

8 На колку начини 6 лица можат да седнат на една тркалезна маса?

9 На колку начини 6 лица можат да седнат на една тркалезна маса, ако две лица од нив сакаат да седат секогаш еден до друг?

10 Одреди го бројот на сите различни пермутации од цифрите $1,1,1,2,2,2$.

11 Колку различни седумцифрени броеви можат да се формираат од цифрите $0,0,0,0,1,2,3$?

12 Колку пермутации од елементите $a, a, a, a, a, b, b, b, c$ почнуваат со:

а) a; б) b; в) c?

13 Колку пермутации од елементите $1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4$ почнуваат со:

а) 22; б) 313; в) 1234?

3 ВАРИЈАЦИИ

Потсети се!

- Од цифрите 1, 2 и 3 запиши ги сите двоцифрени броеви со различни цифри.
- Што е подмножество на дадено множество?
- Запиши ги сите подмножества на множеството $A=\{1,2,3\}$.

А 1 Дадено е множеството $A=\{1,2,3,4\}$.

Запиши ги сите:

а) двоцифрени;

б) трицифрени броеви со различни цифри што се елементи на даденото множество.

Согледај го начинот на формирањето на броевите:

Од 1, 2, 3, 4 имаме:

а)

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

б)

123	213	312	412
124	214	314	413
134	231	321	421
132	234	324	423
142	241	341	431
143	242	342	432

Воочи!

- Сите двоцифрени броеви се пермутации на елементите на подмножествата $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ од даденото множество.
- Трицифрените броеви се пермутации на елементите на подмножествата $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}$ и $\{2,3,4\}$.

Запомни!

Секое подредено подмножество на едно конечно множество од различни елементи е ***варијација без повторување***.
Ако множеството има n елементи, а подмножеството k елементи $(k \leq n)$, тогаш варијацијата е од n елементи од класа k.

Во даденото множество на задачата, двоцифрените броеви се варијации без повторување од втора клса, а трицифрените броеви се варијации без повторување од трета класа.

2 Запиши ги сите варијации од елементите a, b, c, d од:
а) класа 1;   б) четврта класа.

Што претставуваат варијациите од четврта класа на даденото множество?

Две варијации од иста класа се различни ако се разликуваат или по распоредот на елементите, или, пак, по елементите.

Бројот на варијациите од n елементи од класа k, без повторување се означува V_n^k.

За првата задача имаме: $V_2^4 = 12 = 4 \cdot 3$ и $V_4^3 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Во втората задача сигурно доби: $V_4^1 = 4$ и $V_4^4 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Воочи дека бројот на пермутациите без повторување е еднаков на производот од толку последователни природни броеви, колку што е класата k на варијацијата, а најголемиот (првиот) множител е еднаков на бројот n на елементите на множеството.

На пример: $\boxed{V_8^3 = \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6}_{3}}$; $V_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$, или воопшто за бројот на варијациите без повторување од класа k за n - елементи важи следнава:

Теорема. Бројот на варијации од n елементи од класа k без повторување е:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1)).$$

Доказот ќе го изведеме со математичка индукција.

Тврдењето за $n = 1$ е точно, бидејќи $V_1^1 = 1$.

За $n = i$; $1 \leq k \leq i$, да претпоставиме дека тврдењето е точно, т.е.

$$V_i^k = i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdots (i-(k-1)),$$

кое се вика индуктивна претпоставка.

Нека $n = i+1$ и нека $1 \leq k < i+1$.

Ако од едно множество кое содржи $i+1$ елементи изоставиме "по ред" еден елемент, ќе се добиат $i+1$ подмножества кои содржат по i елементи. Бројот на варијациите од класа k од елементите на секое од тие подмножества, според индуктивната претпоставка, е еднаков на:

$$V_i^k = i\cdot(i-1)\cdot(i-2)\cdots(i-(k-1)).$$

Ако на секоја од овие варијации на прво место го додадеме изоставениот елемент, тогаш ќе добиеме варијации од класа $k+1$. Вкупниот број на варијации од $i+1$ елементи од класа $k+1$ е еднаков на:

$$V_{i+1}^{k+1} = (i+1)\cdot V_i^k = (i+1)\cdot i\cdot(i-1)\cdot(i-2)\cdots(i-(k+1)).$$

Според принципот на математичката индукција тврдењето е точно за секој природен број $\mathbb{N}$ со што теоремата е докажана.

Бројот на варијациите од n - та класа на n елементи е

$$V_n^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!,$$

т.е. е еднаков со бројот на пермутациите од n елементи.

3 Во еден комитет од 11 члена треба да се избере претседателство од 3 члена. На колку начини може да се избере тоа претседателство, ако секој член на комитетот може да биде избран?

Согледај го решението:

- Изборот на претседателството е подредена тројка, т.е. варијации од трета класа од 11 елементи. Според тоа, $V_{11}^3 = 11\cdot 10\cdot 9 = 990$.
- Формулата $V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k+1))$ може да се запише во друг вид. Ако дадената формула ја помножиме и поделиме со природните броеви $(n-k),(n-k-1),(n-k-2),\ldots,2,1$ ќе добиеме:

$$V_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k-1)\cdot(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

4 Колку зборови од 5 различни букви можат да се образуваат од буквите на македонската азбука, без оглед на тоа што некои од зборовите ќе немаат никакво значење?

Согледај го решението:

- Бараните зборови се варијации од 5 - та класа од 31 елемент, т.е.

$$V_{31}^5 = \frac{31!}{(31-5)!} = \frac{31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26!}{26!} = 20389320.$$

5 Колку четирицифрени броеви, со различни цифри, можат да се формираат од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9?

Потсети се!

- Што е декартов производ на две множества?
- $A\times B = \{(x,y) \mid x\in A \wedge y\in B\}$.
- $\{a,b\}\times\{a,b\} = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

В 6 Запиши ги сите двоцифрени броеви од цифрите 1, 2 и 3.

Согледај го решението:

- Запиши ги елементите на декартовиот производ $\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}$.

$$\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}.=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1)(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

- Бараните броеви се:

1 1	2 1	3 1
1 2	2 2	3 2
1 3	2 3	3 3

Вкупно се $9\left(9=3\cdot 3=3^2\right)$.

- Во некои од броевите цифрите се повторуваат, тоа се варијации со повторување од втора класа од три елементи, а се означуваат

$$\overline{V}_3^2=3^2.$$

Запомни!

Секој елемент на декартовиот производ $A\times A$ се вика варијација со повторување од втора класа, од толку елементи, колку што елементи има множеството A.

7 Запиши ги сите трицифрени броеви од цифрите 1, 2 и 3.

Согледај го решението:

- Запиши го декартовиот производ $A\times A\times A$. Бидејќи декартовиот производ $A\times A$ го имаме, производот $A\times A\times A=(A\times A)\times A=(A\times A)\times\{1,2,3\}=$

$$=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),\ldots,(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3)\}.$$

- Воочи го начинот на формирањето на $A\times A\times A$:

На секој елемент од $A\times A$ му се придружува елемент од множеството $\{1,2,3\}$.

- Бараните броеви се:

111	121	131	211	...	331
112	122	132	212		332
113	123	133	213		333

Овие броеви претставуваат варијации со повторување од класа 3 од 3 елементи.

- Вкупно има 27 трицифрени броеви, т.е. $\overline{V}_3^3=3^3=27$.

8 Запиши ги сите трицифрени броеви со цифрите 1 и 2.

Запомни!

Нека е дадено множеството $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$. Секој елемент од декартовиот производ $A\times A\times A\cdots A$ (множеството A како фактор е земено k пати) се вика ***варијација со повторување*** од класа k од n елементи. Бројот на варијациите со повторување се означува со $\overline{V}_n^k$, а е еднаков на

$$\overline{V}_n^k=n^k.$$

9 Колку Морзеови букви можат да се формираат од основните знаци "·" и "—", ако една буква се запишува најмногу со 4 основни знаци?

Согледај го решението:

- Со еден основен знак можат да се запишат $\overline{V}_2^1 = 2$ букви.
- Со два знака се запишуваат $\overline{V}_2^2 = 2^2 = 4$ букви.
- Со три знаци $\overline{V}_2^3 = 2^3 = 8$ букви.
- Со четири знаци се запишуваат $\overline{V}_2^4 = 2^4 = 16$ букви.

Вкупниот број на запишани букви е:

$$\overline{V}_2^1 + \overline{V}_2^2 + \overline{V}_2^3 + \overline{V}_2^4 = 30.$$

10 Колку има трицифрени броеви образувани од цифрите 3, 4, 5, 6 и 7?

Задачи

1. Запиши ги сите варијации без повторување од прва, втора и трета класа од елементите a, b, c и d.

2. Пресметај: а) V_{12}^3; б) $V_{10}^6 : V_{10}^5$.

3. Реши ги равенките: а) $V_x^2 = 380$; б) $9 \cdot V_n^3 = 5 \cdot \overline{V}_n^3$.

4. Колку различни сигнали можат да се упатат со 5 различни знамиња ако се употребуваат: по едно, по две, по три, четири и сите пет знамиња заедно?

5. Колку петцифрени броеви можат да се образуваат од цифрите 0, 1, 3, 5, 7 и 9 во кои ниту една цифра не се повторува?

6. Колку петцифрени броеви можат да се формираат од цифрите 0, 1, 3, 5, 7 и 9 во кои цифрата 0 не се наоѓа на првото место ниту на последното место и ниту една цифра да не се повторува?

7. Колку петцифрени броеви со различни цифри можат да се образуваат од десетте цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? Колку меѓу нив има што:
   а) почнуваат со цифрата 5;
   б) завршуваат со цифрата 3;
   в) почнуваат со цифрата 1, а завршуваат со цифрата 4?

8. На една железничка станица се даваат сигнали со помош на стрелките од 5 семафори. Колку различни сигнали можат да се дадат ако стрелките на секој семафор можат да заземаат 3 различни положби?

9. Со помош на цифрите 4 и 5 запиши ги сите:
   а) двоцифрени броеви;
   б) трицифрени броеви;
   в) четирицифрени броеви.

10 На тикетот за спортска прогноза се наоѓаат 13 средби. На колку различни начини треба да се пополни тикетот за да добијат 13 погодоци ако:

а) не се знае со сигурност ниту еден резултат;

б) се знаат резултатите на 5 средби;

в) се знае дека 7 средби не завршуваат нерешено?

11 На колку начини може да биде оценет еден ученик на крајот на учебната година по 10 предмети ако:

а) по сите предмети може да добие оценка од 1 до 5;

б) по два предмети не може да добие оценка поголема од 3, а по три предмети помала од 4?

4 КОМБИНАЦИИ

Комбинација е латински збор, а значи:

- распоредување на работите на различни начини;
- комбинирање на разни работи за да се добие целина;
- начин на играње или работење.

А **1** Дадено е множеството $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

Одреди ги сите подмножества на даденото множество што имаат по 3 елементи.

Согледај го решението:

Редоследот на запишување на елементите во даденото множество не е битен, па бараните подмножества се: $\{a_1,a_2,a_3\}$, $\{a_1,a_2,a_4\}$, $\{a_1,a_3,a_4\}$ и $\{a_2,a_3,a_4\}$. Овие множества претставуваат комбинации од трета класа од 4 елементи.

Запомни!

Секое подмножество од k елементи од некое множество со n елементи $(k \le n)$ се вика комбинација без повторување од класа k од n елементи.

2 Запиши ги сите комбинации од втора класа од елементите a_1, a_2, a_3, a_4.

Согледај го решението:

$a_1\ a_2$

$a_1\ a_3$
$a_2\ a_3$

$a_1\ a_4$
$a_2\ a_4$
$a_3\ a_4$

Две комбинации од иста класа се различни ако имаат барем еден различен елемент.

Пермутациите $a_1\,a_2$ и $a_2\,a_1$ или $a_2\,a_3$ и $a_3\,a_2$ претставуваат една иста комбинација. Исто така, сите (6) пермутации од елементите 1, 2, 3 претставуваат една иста комбинација.

3 Запиши ги сите комбинации од 3 - та класа од елементите 1, 2, 3, 4, 5.

Б Бројот на комбинациите без повторување од k - та класа од n елементи го означуваме со C_n^k.

- Во задачата 1 имаме $C_4^3 = 4$.
- Боројот на варијациите $V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ е 6 пати поголем од бројот на комбинациите од истата класа и од истиот број на елементи, затоа што сите варијации од елементите a_1, a_2, a_3, а нив ги има $3! = 6$, претставуваат една иста комбинација.

Теорема. Бројот на комбинциите без повторување од класа k од n елементи е
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказ. Ако разгледаме една која било комбинација од класа k и направиме пермутации од нејзините елементи, добиваме $P(k) = k!$ пермутации, а сите тие претставуваат една комбинација. Според тоа, бројот на комбинации без повторување од класа k од n елементи е $k!$ $\left(P(k) = k!\right)$ пати помал од бројот V_n^k, т.е.
$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P(k)}.$$

Бидејќи $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ и $P(k) = k!$, следува дека
$$C_n^k = \frac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

4 Во еден клас учениците изучуваат 10 предмети и имаат по 6 часа дневно. На колку различни начини може да се направи распоред на предметите по часови, така што сите 6 часа да се од различни предмети?

Сӣледај ӷо решението:

- Направените распореди претставуваат комбинации без повторување од 6-та класа од 10 елементи, па
$$C_{10}^6 = \frac{V_{10}^6}{P(6)} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 210.$$

Од решените примери воочуваш дека бројот на комбинациите е природен број, т.е. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}$.

- Често пати бројот на комбинациите C_n^k се означува со $\binom{n}{k}$, т.е.
$$C_n^k = \binom{n}{k}, \ (k \le n) \text{ (се чита “ен над ка”).}$$

На пример: $C_5^4 = \binom{5}{4} = \dfrac{5!}{4!(5-4)!} = 5$ или $C_6^4 = \binom{6}{4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15.$

Бидејќи $0! \overset{def}{=} 1$, следува дека

$$C_n^0 = \binom{n}{0} \overset{def}{=} 1 \quad \text{и} \quad C_n^n = \binom{n}{n} \overset{def}{=} 1, \text{ а } C_n^1 = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

5 Докажи дека а) $C_n^k = C_n^{n-k}$; б) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.

Согледај го доказот:

а) Од $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ и $C_n^{n-k} = \binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

следува $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ова својство е познато како својство на симетричност на комбинациите. На пример: $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$ или $\binom{15}{6} = \binom{15}{15-6} = \binom{15}{9}$ итн.

б) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} =$

$$= \frac{n!}{k(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n-k+1)! + n!\,k}{k(k-1)!\,(n-k)!\,(n-k+1)} =$$

$= \dfrac{n!\,(n-k+1+k)}{k!\,(n-k+1)!} = \dfrac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$. Ова е адитивно својство на комбинациите. На пример: $\binom{10}{4} + \binom{10}{3} = \binom{11}{4}$ или $\binom{8}{5} + \binom{8}{4} = \binom{9}{5}$ итн.

6 На натпреварот по математика треба да учествува екипа од 4 ученици од едно училиште. На колку различни начини може да се состави екипата, ако со право за учество на натпреварот се стекнале 12 ученици од тоа училиште?

В Ако од n различни елементи образуваме комбинации од класа k, така што еден елемент може да се повторува k пати, тогаш добиваме комбинации со повторување од класа k од n елементи.

7 Запиши ги сите комбинации со повторување од: а) втора; б) трета класа од елементите 1, 2.

Согледај го решението:

а) 11, 12, 22; б) 111, 112, 122, 222.

Бројот на комбинациите со повторување се означува со $\overline{C}_n^k$ (во овој случај, k може да биде и поголем од n).

Воочи, $\overline{C}_2^2 = 3$, а $\overline{C}_2^3 = 4$.

8 Запиши ги сите комбинации со повторување од: а) втора; б) трета класа од елементите 1, 2, 3, 4.

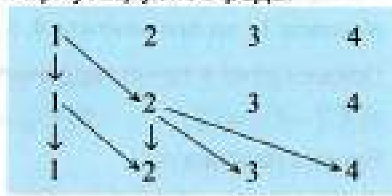
Соїледај їо решението:

а)

11,	12,	13,	14
	22,	23,	24
		33,	34
			44

$\overline{C}_4^2 = 10.$

б) Запиши ја првата основна пермутација во 3 реда:



Комбинациите со повторување се формираат на следниот начин:

Од првиот ред се зема кој било елемент и му се придружува од вториот ред елементот што е под земениот или десниот, потоа од третиот ред се зема елементот што е под веќе земениот од вториот ред или десниот елемент итн. Со примена на оваа постапка за секој елемент од првиот ред ќе се добијат сите можни комбинации со повторување од 3 - та класа.

111	122	133	222	233	333	444
112	123	134	223	234	334	
113	124	144	224	244	344	
114						

Комбинации со повторување од класа k се формираат на ист начин, но во тој случај пермутацијата е запишана во k редови.

Запомни!

Бројот на комбинации со повторување се пресметува со формулата

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

За претходната задача имаме:

$$\overline{C}_4^3 = C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3} = 20.$$

9 Една продавница располага со цветови во 5 различни бои. На колку начини може да се направи букет од 3 цветови?

Соїледај їо решението:

Во букетот може сите цветови да бидат во иста боја, сите цветови да се со различна боја или два цвета со една, а третиот со друга боја. Значи, тоа се комбинации со повторување од 3 - та класа од 5 елементи, па

$$\overline{C}_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35.$$

10 На еден шаховски турнир учествуваат 10 шахисти. Колку вкупно партии ќе се одиграат, ако секој треба да одигра по една партија со секого?

Задачи

1. Во што е разликата меѓу варијациите и комбинациите од класа k од n елементи?

2. Запиши ги сите комбинации без повторување од: а) класа 1; б) класа 2; в) класа 3, од елементите 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Покажи дека е точно тврдењето:

   а) $C_7^4 + C_7^3 = C_8^4$; б) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$.

4. Реши ја равенката:

   а) $C_n^2 = 3n$; б) $5 \cdot C_n^3 = C_{n+2}^4$; в) $C_n^k = 35$ и $V_n^k = 840$.

5. Колку различни триаголници ќе се добијат чии темиња се темињата на шестаголник?

6. Колку различни одбори составени од 5 ученици и 2 професори може да се формираат од вкупно 10 ученици и 4 професори?

7. Колку комбинации од 4 - та класа од елементите a, b, c, d, e, f, g ги содржат елементите b, c и e? Запиши ги тие комбинации.

8. Колку комбинации од 3 - та класа од елементите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 не ги содржат елементите 2, 4 и 6?

9. Колку најмногу прави можат да се повлечат низ 10 точки што лежат на една рамнина, од кои: 4 точки лежат на една права, 3 точки лежат на друга права, а останатите се во произволна положба?

10. Во колку точки се сечат 30 прави што лежат на една рамнина, ако 16 од нив се паралелни, а 12 минуваат низ една точка?

11. Запиши ги сите комбинации со повторување од 5 - та класа од елементите 1, 2, 3.

12. Колку комбинации со повторување можат да се формираат од 3 елементи од 6 - та класа?

5 БИНОМНА ФОРМУЛА

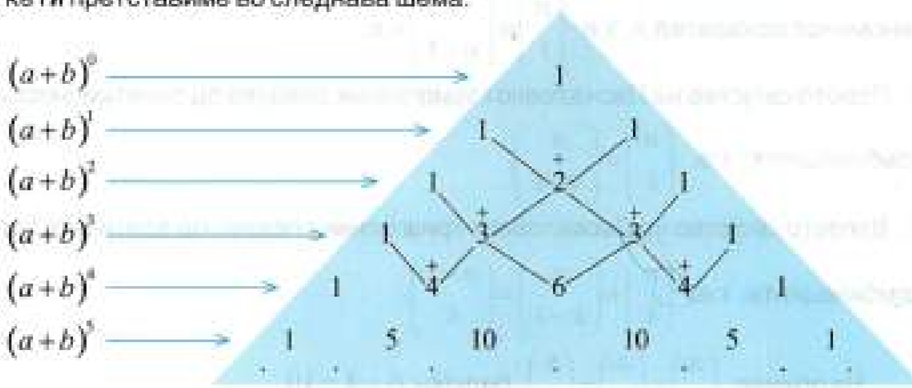
Потсети се!

- а) $(a+b)^0 \overset{def}{=} 1,\ a+b \neq 0$;
- б) $(a+b)^1 = a+b$;
- в) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- г) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- д) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Воочи: Запишаните примери покажуваат дека степенот на биномот има некоја правилна форма.

- Развиената форма на степенот на бином е полином.
- Бројот на мономите во полиномот е секогаш за еден поголем од биномниот показател.
- Степенот на секој моном е еднаков на биномниот показател.

Коефициентите на мономите во развиената форма на степенот на биномот ќе ги претставиме во следнава шема.



Оваа шема се вика ***Паскалов триаголник***.

Разгледувајќи го Паскаловиот триаголник можеме да ги воочиме следниве особини:

1. Триаголникот е рамнокрак и е симетрична фигура во однос на висината кон основата. Во секој ред првиот и последниот коефициент се еднакви. Исто така, еднакви се и коефициентите што се подеднакво оддалечени од крајните, вториот и претпоследниот итн.

2. Во секој ред, членот после првиот е еднаков на збирот од двата члена што се непосредно над него.

1 Користејќи ги овие сознанија пресметај: а) $(a+b)^5$; б) $(a+b)^6$.

Согледај го решението:

- б) Ако го продолжиме Паскаловиот триаголник за уште еден ред, ќе ги добиеме коефициентите на биномот $(a+b)^6$, а тие се:

$$1, \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15, \quad 6, \quad 1, \text{ па}$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Секако, овој начин за одредување на коефициентите на мономите во развојот на биномот, кои се викаат ***биномни коефициенти***, не е едноставен и најпогоден, особено ако биномниот показател е голем број.

Да го разгледаме уште еднаш Паскаловиот триаголник.

Очигледно е дека биномните коефициенти се природни броеви, исто како и бројот на комбинациите и ќе покажеме дека тие можат да се изразат со бројот на комбинациите.

Биномните коефициенти на првиот и последниот член се еднакви на 1, т.е.

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1.$$

Биномните коефициенти на вториот и претпоследниот член се еднакви на биномниот показател n, т.е. $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$.

Првото својство на Паскаловиот триаголник следува од симетричноста на комбинациите, т.е. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Второто својство на Паскаловиот триаголник следува од адитивноста на комбинациите, т.е. $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$.

На пример, $\binom{4}{2}+\binom{4}{1}=\binom{5}{2}$, бидејќи $6+4=10$.

Според тоа, биномните коефициенти претставуваат комбинации C_n^k, при што $k\in\{0,1,2,3,...,n-1,n\}$.

За развивање на степенот на биномот $(a+b)^n$ важи следнава

Теорема. За секој природен број n важи:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n,$$

каде што $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{k},\ldots,\binom{n}{n}$ се биномни коефициенти.

Оваа формула се вика ***биномна формула*** или ***Њутнова формула***, која ќе ја прифатиме за точна без доказ.

2 Со примена на биномната формула степенувај го биномот $(x+2)^6$.

Согледај го решението:

$$(x+2)^6=\binom{6}{0}x^6+\binom{6}{1}x^5\cdot 2+\binom{6}{2}x^4\cdot 2^2+\binom{6}{3}x^3\cdot 2^3+\binom{6}{4}x^2\cdot 2^4+\binom{6}{5}x\cdot 2^5+\binom{6}{6}2^6.$$

Според својството за симетричност на биномните коефициенти имаме:

$$\binom{6}{0}=\binom{6}{6}=1;\ \binom{6}{1}=\binom{6}{5}=6;\ \binom{6}{2}=\binom{6}{4}=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=15;\ \binom{6}{3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20.$$

Оттука следува $(x+2)^6=x^6+6x^5\cdot2+15x^4\cdot4+20x^3\cdot8+15x^2\cdot16+6x\cdot32+64=$

$$=x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+64.$$

3 Разви го степенотна биномот: а) $(3+2x)^5$; б) $(2x-5)^4$.

4 Одреди го збирот на сите биномни коефициенти на биномот $(a+b)^n$.

Согледај го решението:

Во биномната формула

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n,$$

со замена на a и b со 1, добиваме $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{k}+\ldots+\binom{n}{n}$.

Запомни!

Збирот на сите биномни коефициенти на степенот на биномот $(a+b)^n$ е:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{k}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

5 Одреди го осмиот член во развојот на степенот на биномот $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{72}}-\sqrt[7]{\frac{1}{11}}\right)^{12}$.

Согледај го решението:

Коефициентот на осмиот член во развојот на дадениот бином е од видот

$$\binom{n}{7}=\binom{12}{7}=\frac{12!}{7!\,5!}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7!}{7!\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=792,$$ а членот е

$$T_8=\binom{12}{7}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[5]{72}}\right)^{12-7}\cdot\left(-\sqrt[7]{\frac{1}{11}}\right)^7=11\cdot9\cdot8\cdot\frac{1}{72}\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)=-1.$$

Внимавај, k ги добива по ред вредностите $0, 1, 2, \ldots n$, па за осмиот член $k=7$.

Запомни!

Кој било член во развојот на степенот на биномот $(a+b)^n$ е еднаков на

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k,\ k\le n.$$

6. Одреди го средниот член во развојот на степенот на биномот $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-x\right)^{8}$.

Задачи

1. Разви го степенот на биномот:

а) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{y}\right)^{4}$; б) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{5}$; в) $\left(x+\sqrt{x}\right)^{6}$.

2. Пресметај:

а) $\left(1-\sqrt{2}\right)^{7}$; б) $(1+i)^{8}$; в) $(2-i)^{4}$.

3. Со примена на биномната формула пресметај:

а) $0{,}9^{5}$; б) $1{,}03^{10}$ со точност на четири децимали.

4. Одреди го збирот на биномните коефициенти во развојот на степенот на биномот:

а) $(1+x)^{10}$; б) $(1-x)^{10}$; в) $\left(\dfrac{8}{x}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$.

5. Одреди го:

а) седмиот член во развојот на степенот на биномот $\left(a+\sqrt[6]{3}\right)^{12}$;

б) средниот член во развојот на степенот на биномот $\left(\dfrac{a}{x}-\sqrt{x}\right)^{16}$;

в) тринаесеттиот член во развојот на степенот на биномот $\left(9x-\dfrac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{n}$,

ако биномниот коефициент на третиот член е 105.

6. Одреди го оној член во развојот на степенот на биномот:

а) $\left(x+\dfrac{1}{x^{2}}\right)^{12}$ кој не зависи од x; б) $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)^{11}$ кој содржи x^{5}.

7. Збирот на биномните коефициенти на првиот, вториот и третиот член во развојот на степенот на биномот $\left(x^{2}+\dfrac{1}{x}\right)^{n}$ е 46. Одреди го членот што не содржи x.

8. Третиот член во развојот на степенот на биномот $\left(x+x^{\lg x}\right)^{5}$ е еднаков на 1000000. Одреди го x.

6 ЕКСПЕРИМЕНТ. НАСТАН. СЛУЧАЕН НАСТАН. ВИДОВИ НАСТАНИ

А Природата се наоѓа во едно постојано движење. Тоа движење се карактеризира со постојана променливост на состојбите. Секоја промена на една состојба во друга е настан. Настан е кога денот ќе ја смени ноќта, кога по топлото лето ќе дојде дождлива есен, кога ќе се добие на лото, кога ќе се роди тројка деца, кога на улица ќе сретнеш стара љубов, кога ќе се случи земјотрес или поплава. Настан е кога на парламентарните избори ќе дојде до смена на власта итн. итн.

Случувањето на некои настани може точно да се предвиди и настанот да се објасни. На пример, кога ќе настапи затемнувањето на Сонцето или Месечината, кога ќе се изврши пописот на населението, бидејќи точно се знаат причините за овие појави и условите под кои настануваат. Меѓутоа, утврдувањето на врската меѓу условите во еден настан или процес не е секогаш лесно. Постојат процеси или настани чии услови не можат да се набљудуваат и за кои не е можно да се откријат причините. Во тој случај не постои можност да се утврди правило (закон) за определување и точно предвидување на тие настани. На пример, случувањето на земјотрес не е можно точно да се предвиди, бидејќи не се располага со доволно факти што го предизвикува. Добивката на лото не може да се предвиди. Зачнувањето на машко или женско дете, исто така, не може да се предвиди. Сепак, настаните имаат и општи карактеристики и закономерности кои се предмет на проучување на дисциплината **Веројатност и статистика**.

Теоријата на веројатност е дел од математиката, чии зачетоци се поврзани со имињата на француските математичари *Б. Паскал* (1623 - 1662) и *П. Ферма* (1601 - 1665), посветени на игрите на среќа. Теоретските основи на оваа дисциплина ги поставил рускиот математичар *А. Колмогоров* 1933 година.

Денес теоријата на веројатност наоѓа широка примена во разни области: астрономијата, билогијата, генетиката, техничката економија, општествено-политичкиот живот итн. Денес во светот не постои област во која не се експериментира, истражува, оценува и проценува за случувањето на некој настан. Основна задача на Теоријата на веројатност е изнаоѓање на врските меѓу случајните настани, одредување на законите кои важат, нивните веројатности и дефинирање на функциите што ќе овозможат нивна примена во други науки и во практиката.

Б Познато е дека проучувањето на природните и општествените појави настанува како резултат на разни испитувања, експерименти или набљудувања. Да ги разгледаме следниве експерименти.

1. Од кутија во која има 5 бели топчиња нумерирани со броевите од 1 до 5, извлекуваме едно топче.

Резултатот на извршениот експеримент е извлечено едно кое било топче.

Колку пати може да се извлече по едно топче?

2 За успешно полетување на авионот треба да се изврши одредено набљудување:

- авионот да е технички исправен;
- на аеродромот да функционираат сите технички уреди;
- да се поволни временските услови.

По извршеното набљудување можен е исходот авионот "да полета" или "да не полета".

Колку можни исходи има овој експеримент?

3 На маса се фрлени две хомогени коцки кои на своите страни имаат втиснати 1, 2, 3, 4, 5 или 6 точки.

Резултатот на овој експеримент може да се претстави како подреден пар (x, y), при што x е број на точките од горната страна на едната коцка, а y е број на точките на горната страна на другата коцка. Сите можни исходи на експериментот можат да опишат со множеството $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$, а елементите се:

$\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,(6,4),(6,5),(6,6)\}$, ги има вкупно $\overline{V}_6^2 = 6^2 = 36$ елементи. (Потсети се на варијациите со повторување.)

Запомни!

Под ***експеримент*** се подразбира секоја реализација на одредено множество од комплекс услови.

Секој резултат или исход од некој експеримент се вика ***настан*** за тој експеримент.

Терминот експеримент во поширока смисла во себе ги вклучува експериментите што се организираат и реализираат во лабораторија, но ги вклучува, исто така, и разните видови набљудувања при кои експериментаторот има пасивна улога. Друга особеност на експериментот е во тоа што резултатите не се еднозначно определени.

4 На масата е фрлена монета.

Кои настани како исход на овој експеримент можат да се реализираат, ако се набљудува горната страна на монетата?

Очигледно е дека со познавањето на условите за изведување на еден експеримент не може да се предвиди дали еден настан ќе се случи или нема да се случи. Таквиот настан се вика ***случаен настан***. Случајни настани се: добивка на лото; појава на "грб" или "писмо" при фрлање на монета; извлекување на бело топче од кутија во која има бели и црвени топчиња; појава на парен број точки на горната страна од фрлена коцка итн.

Запомни!

За еден настан велиме дека е случаен кога неговото настапување при изведување на некој експеримент или набљудување не може со сигурност да се предвиди.

Случајните настани понатаму ќе ги викаме само настани и ќе ги означуваме со A, B, C, D, ... Во наведените примери секој експеримент, во непроменети услови може да се повтори произволен број пати, но резултатот не може со сигурност да се предвиди.

Запомни!

Во секој експеримент постои множество на поединечни настани.
Множеството на поединечните настани кои претставуваат реализација (исход) на еден експеримент така што при реализција на есперимeнтот настапува еден и само еден од нив, се викаат **елементарни настани**, а множеството од сите елементарни настани се вика **множество на елементарни настани** за дадениот експеримент.
Елементарните настани ќе ги означуваме со E_1, E_2, E_3,..., а множеството на елементарните настани со Ω.

Во задачата 1 елементарните настани се: E_1 - извлечено топче со бројот 1; E_2 - извлечено топче со бројот 2 итн. Множеството на елементарните настани е $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$. Во задачата 2 елементарните настани се: E_1 - авионот да полета и E_2 - авионот да не полета, а $\Omega = \{E_1, E_2\}$. Во задачата 3 секој исход, т.е. секој подреден пар е елементарен настан. Настанот $E_1 = (1,1)$ значи на горната страна на коцките има по една точка. Настанот $E_2 = (1,2)$ значи на горната страна на првата коцка има 1 точка, а на втората 2 точки. Настанот $E_7 = (2,1)$ е различен од настанот E_2, бидејќи подредениот пар $(1,2) \neq (2,1)$. Настанот $E_7 = (2,1)$ значи дека на првата коцка има 2 точки, а на втората 1 точка. Во задачата 4 елементарните настани се E_1 - "падна грб" и E_2 - "падна писмо", а $\Omega = \{E_1, E_2\}$.

5 На масата се фрлени две коцки. Опиши ги настаните:

$A = \{$ На секоја коцка на горната страна има еднаков парен број точки $\}$.

$B = \{$ Збирот од бројот на точките на горната страна на коцките е 2 $\}$.

$C = \{$ Производот од бројот на точките на горната страна на коцките не е поголем од 4 $\}$.

Согледај го решението:

Настанот A настапува кога на двете коцки на горната страна ќе се појави еднаков парен број на точки, па $A=\{E_2,E_4,E_6\}$, каде што $E_2=(2,2)$, $E_4=(4,4)$ и $E_6=(6,6)$. Другите настани се:

$B=\{(1,1)\}$ и $C=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(4,1)\}$.

Настаните A и C се сложени настани, бидејќи секој од нив е составен од повеќе елементарни настани. Сложениот настан се реализира ако кој било негов елементарен настан е исход од експериментот.

6 На масата е фрлена коцка за играње. Одреди ги елементарните настани на експериментот. Одреди го множеството на елементарните настани. Опиши ги настаните:

$A=\{$ На горната страна на коцката е парен број на точки $\}$.

$B=\{$ На горната страна на коцката е непарен број на точки $\}$.

$C=\{$ Бројот на точките на горната страна на коцката е поголем од 6 $\}$.

В За некои настани во природата, општеството и секојдневниот живот можеме со сигурност да тврдиме дека ќе се случат, а за некои настани, пак дека нема да се случат. Одредени настани настапуваат случајно, некои имаат поголема, а некои помала шанса за реализација. Во зависност од претходното имаме:

1. Сигурни настани. Еден настан се вика сигурен, ако тој при дадени услови сигурно ќе се случи.

- Сигурно е дека по денот настапува ноќ, а по ноќта настапува ден.
- Сигурно е дека водата е основна материја на Земјата.
- Сигурно е дека општеството социолошки еволуира.
- Сигуно е дека основата на материјалниот живот е продуктивноста на трудот.
- Сигурно е дека од кутијата во која се наоѓаат само бели топчиња ќе извлечеме бело топче.

Сигурниот настан ги содржи сите елементарни настани, т.е. множеството на сигурните настани е Ω.

2. Невозможни настани. Еден настан се вика невозможен, ако тој при дадени услови не може да се случи.

- Не е можно Земјата да престане да се врти околу Сонцето и околу својата оска.
- Не е можно да снема плима и осека.
- Не е можно во составот на водата да се јави и трет елемент.
- Не е можно враќање на стариот општествен систем и робовладетелски или феудален поредок во нивната класична форма.

- Не е можно од кутијата полна со црни топчиња да извлечеме бело топче.
- Не е можно при фрлање на две коцки збирот од точките на горната страна да е поголем од 12.

Множеството на елементарните настани од невозможните настани е празно множество, т.е. $\Omega = \varnothing$.

Невозможни настани има исто толку, колку што има сигурни настани. Вообичаено, негацијата на сигурен настан е невозможен настан и обратно.

3. Спротивни настани. Спротивниот настан на настанот A го означуваме $\overline{A}$ и тој настанува тогаш и само тогаш кога не настанува настанот A.

- При фрлање на монета имаме два елементарни настани, или појава на грб или појава на писмо. Ако едниот од нив е настан A, тогаш другиот е спротивниот настан $\overline{A}$.

- При фрлање на коцка нека настанот $A = \{$ падна парен број на точки $\} = \{2,4,6\}$.

Спротивниот настан на овој настан е $\overline{A} = \{$падна непарен број на точки $\} = \{1,3,5\}$.

Какви се меѓу себе сигурниот и невозможниот настан?

Од дефиницијата за множество на елементарни настани следува $A \cup \overline{A} = \Omega$.

7 На масата е фрлена коцка.
Настанот $A = \{$ На горната страна на коцката има 5 точки $\}$. Опиши го настанот $\overline{A}$.

4. Единствено можни настани. Настаните $A, B, C, \ldots$ се единствено можни ако барем еден од нив ќе се реализира како резултат на експериментот.

- При фрлање на монета единствено можни настани се: појава на грб или појава на писмо. Трет настан нема.
- При фрлање на коцка единствено можни настани се: појава на 1, 2, 3, 4, 5 или 6 точки на горната страна на коцката. Седмиот настан не е можен.

Единствено можните настани формираат потполн систем на настани.

5. Еднакво можни настани. Настаните се еднакво можни, ако при исти услови нема објективни причини според кои еден од настаните би можел да настапува почесто од другите.

- Појавата на грб или писмо при фрлање на монета се еднакво можни настани.
- Ако во кутија има 6 бели и 10 црни топчиња, тогаш извлекувањето на бело топче не е еднакво можен настан со настанот извлекување на црно топче.

6. Несогласни настани. Настаните A и B се несогласни или дисјунктни, ако појавата на едниот настан ја исклучува можноста за појава на другиот настан, т.е. тие не можат да се реализираат во исто време.

- Појавата на два исти броја од 1 до 39 при едно извлекување на лото не може да се случи.
- Спротивните настани A и $\overline{A}$ се несогласни настани. Обратно не важи, т.е. два несогласни настани не се секогаш спротивни. На пример, настанот A - појава на парен број на точки при фрлање на коцката е составен од елементарните настани E_2, E_4 и E_6 кои се дисјунктни, но не се спротивни.

8 На масата е фрлена една коцка. Дадени се настаните:

$A = \{$ На горната страна на коцката има парен број на точки $\}$.

$B = \{$ На горната страна на коцката има број на точки делив со 3 $\}$.

$C = \{$ На горната страна на коцката има непарен број на точки $\}$.

Опиши ги настаните A, B и C. Кои од дадените настани се несогласни?

Задачи

1 Од множеството на едноцифрените природни броеви се избира еден број. Одреди го множеството на елементарните настани. Опиши ги настаните:
A - избран е број делив со 3; B - избран е непарен број делив со 3;
C - избран е непарен број; D - избран е број што не е помал од 7;
E - избран е број што е поголем од 9.

2 Запиши го множеството на елементарните настани на експериментот:
а) двојно фрлање на монета; б) двојно фрлање на коцка;
в) истовремено фрлање на монета и коцка.

3 Една машина за тестирање на исправноста на определен вид предмети функционира така што: ако предмтот е исправен, ќе се запали зелената светилка, а ако е неисправен, ќе се запали црвената светилка. Се тестираат 3 предмети. Одреди го множеството на елементарните настани. Опиши ги следните настани:
A: точно еден предмет е исправен; B: точно два предмети се исправни;
C: барем еден предмет е исправен; D: барем два предмети се исправни.

4 На масата се фрлени две хомогени коцки за играње. Опиши ги настаните:
A: збирот на точките појавени на горните страни на двете коцки е парен број;
B: збирот на точките појавени на горните страни на двете коцки е поголем од 12;
C: на двете коцки се појавува ист број на точки;
D: на двете коцки се појавени точки чиј збир е поголем од 9.

5 На масата се фрлени три хомогени коцки за играње. Опиши го множеството на сите елементарни настани.

7 КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ

А Многу често во секојдневниот живот слушаме или велиме: веројатно денес ќе врне дожд, или: веројатно утре ќе биде сончев ден. Исто така, вакви констатации се прават и во многу поважни и пошироки околности, природни и социолошки. На пример, во текот на наредните десет години веројатно ќе се направи лабораторија на Месечината, во наредните 20 години веројатно ќе се најде нов вид енергетско гориво што ќе ја замени нафтата, веројатно ќе се најде лек против ракот и сидата итн. Исто така, често велиме: помалку е веројатно дека ќе добиеме премија на лото, поверојатно е дека ќе добиеме некоја помала добивка, но највероjатно е дека ќе немаме добивка.

Ваквите констатации ги донесуваме ***субјективно***, врз основа на податоците со кои располагаме, врз основа на информациите и искуствата кои сами сме ги стекнале. Затоа е важно ***објективно*** да се оценуваат можностите некој случаен настан да се реализира, под однапред познати услови. Бројната карактеристика која објективно го карактеризира степенот на можноста некој настан да се реализира под некои определени околности кои можат да се повторуваат многу пати (дури и бесконечно) се вика ***веројатност*** (или ***математичка веројатност***).

1 Во една кутија има десет топчиња, од кои едно е бело, а останатите се црни. Да се одреди веројатност на настанот A: да се извлече бело топче.

Согледај го решението:

- Во овој експеримент извлекувањето на едно топче е елементарен настан. Претпоставуваме дека сите елементарни настани се еднакво можни и еднакво веројатни. Извлекувањето на бело топче ќе го сметаме за поволен настан, а извлекувањето на црно топче за неповолен настан.
- Множеството на елементарни настани е $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, \ldots, E_{10}\}$, значи има 10 елементарни настани, од кои само еден е поволен (има само 1 бело топче), а девет се неповолни настани.
- Бројот на поволни и неповолни настани покажува дека во една серија од 10 извлекувања постои една можност да извлечеме бело топче (поволен настан), а девет можности да извлечеме црно топче. Тоа не значи дека во секоја серија од по 10 извлекувања, извршени на тој начин што по извлекувањето топчето се враќа во кутијата, ќе извлечеме едно бело и 9 црни. Може да се случи во првите неколку серии од по 10 извлекувања белото топче да го извлечеме еднаш, двапати, трипати или повеќе пати, а може да се случи и воопшто да не го извлечеме.
- Истражувањата покажуваат дека во голем број серии при настанувањето на некои настани постои одредена закономерност на случајните настани.
- Во следнава табела ќе покажеме дека белото топче ќе се појави околу 10%

од бројот на извлекувањата. Во овој пример $n=10$ е број на елементарни настани, а $m=1$ е број на поволни настани. $N(n)$ е број на сите настани во една серија, а k е број кој покажува колку пати е реализиран поволниот настан во соодветната серија, т.е. колку пати е извлечено белото топче во таа серија.

Бројот $f_n(A)=\frac{k}{n}$ се вика фреквенција (зачестеност) на настанот A.

Серија	$N(n)$	k	$f_n(A)=\frac{k}{N(n)}$	$\frac{m}{n}$
I	100	9	0,09	0,1
II	200	22	0,11	0,1
III	1000	108	0,108	0,1
IV	4080	426	0,104	0,1
V	12000	1240	0,103	0,1
VI	24000	2452	0,102	0,1

Податоците во табелата значат: на пример, во III серија 1000 пати е извлечено едно топче (по извлекување топчето се враќа во кутијата), притоа, белото топче е извлечено 108 пати, а фреквенцијата е 0,108.

Од табелата се гледа дека фреквенцијата на настанот A - влечење на бело топче се стреми кон $0,1=\frac{1}{10}$, што претставува количник од бројот на поволните настани и вкупниот број на елементарните настани за дадениот експеримент.

Веројатноста дека ќе настапи настанот A - извлечено бело топче е $\frac{1}{10}$, а ја означуваме со $P(A)=\frac{1}{10}$ (P е првата буква во латинскиот збор *probabilitas*, што значи веројатност).

Б Класичната дефиниција за веројатност ја дал францускиот математичар *Лаплас* (1749 - 1827) во 1812 година.

Запомни!

Нека множеството на елементарните настани Ω е конечно и нека n е бројот на елементарните настани кои се единствено можни, еднакво можни и дисјунктни настани за дадениот експеримент.

Ако m $(0 \leq m \leq n)$ е број на поволни настани на случајниот настан A, тогаш количникот $\frac{m}{n}$ се вика веројатност на настанот A и се означува со $P(A)$,

т.е. $P(A)=\frac{m}{n}$.

2 Колкава е веројатноста при фрлање на коцка да се реализира настанот:

$A=\{$На горната страна на коцката да се појави непарен број на точки $\}$;

$B=\{$На горната на коцката се точки чиј број е поголем од $5\}$;

$C=\{$На горната страна на коцка се точки чиј број е делив со $9\}$?

Согледај го решението:

- Според класичната дефиниција на веројатноста имаме:

$$P(A)=\frac{\text{Број на поволни елементарни настани}}{\text{Број на можни елементарни настани}}$$

- Множеството на елементарните настани е $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, т.е. $n=6$.

  Настанот $A=\{1,3,5\}$, т.е. $m=3$, па $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

  Настанот $B=\{6\}$, а $m=1$, па $P(B)=\frac{1}{6}$.

  Настанот $C=\{3,6\}$, $m=2$, па $P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

- Вака дефинираната веројатност се вика ***математичка*** или ***теориска веројатност***.

3 Колкава е веројатноста при фрлање на монета на горната страна да се појави грб?

4 Во една кутија има 45 црвени, 25 сини и 30 жолти топчиња. Која е веројатноста да се извлече црвено топче?

Согледај го решението:

- Бројот на можните настани е $n=45+25+30$.
- Бројот на поволните настани е $m=45$.
- Веројатноста е $P(A)=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}$.

Според дефиницијата за веројатност, за да се определи количникот $P(A)=\frac{m}{n}$, треба ***однапред*** да се знае (*a priori*) бројот на поволните елементарни настани и бројот на сите можни настани (поволни и неповолни). Тоа е лесно изводливо при некои едноставни системи настани (коцка, монета, влечење на топчиња), каде што m и n се фиксни. Во овој случај веројатноста се определува пред да се добие некое искуство во врска со познавањето на текот на настанот, т.е. без изведување на експериментот.

5 Која е веројаноста дека две фрлени коцки за играње ќе покажат број на точки чиј збир е поголем од 9?

Согледај го решението:

Множеството на елементарните настани се состои од секоја страна на едната коцка, со секоја страна од другата коцка, т.е. $\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}=$ $\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(1,6),(2,1),(2,2),...,(2,6),...,(6,1),(6,2),...,(6,6)\}$, па $n=\overline{V}_6^2=6^2=36$.

Поволните настани се настаните при кои збирот на точките е 10, 11 или 12, т.е. настанот $A=\{(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$, значи, $m=6$.

Бараната веројатност е $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Класичната дефиниција на веројатност (*a priori*) се засновува врз математичката идеализација на настаните, поаѓајќи од идеалната претпоставка дека сите случајни настани се еднакво можни и еднакво веројатни при исти услови. Таквата идеализација во реалниот свет тешко може да се постигне. Но, сепак, во некои случаи, правилна и хомогена коцка, правилна и хомогена монета, извлекување на карти, извлекување на броеви на лото, може да се очекува дека сите елементарни настани се еднакво можни и еднакво веројатни, па класичната дефиниција за веројатност може со успех да се применува.

Во голем број примери, особено во статистиката, биологијата, економијата, демографијата и други науки, вројатноста *a priori* не може успешно да се применува.

Затоа, во природата и техниката се применува веројатност *a posteriori* (отпосле), која се вика ***статистичка*** (***емпириска***) веројатност.

6 Колкава е веројатноста дека збирот на точките појавени на горните страни на две фрлени коцки ќе биде 7?

Задачи

1. Климе ја заборавил последната цифра од телефонскиот број на својата девојка. Која е веројатноста дека Климе со едно бирање ќе го погоди точниот број?

2. Во една кутија има 12 бели, 23 црвени и 27 црни топчиња. Која е веројатноста дека со едно извлекување ќе извлечеме црвено топче?

3. Во една кутија има 80 ливчиња нумерирани од 1 до 80. Колкава е веројатноста при едно извлекување да се појави ливче со број:
а) кој е помал од 9; б) кој е делив со 5;
в) кој е поголем од 45, а помал од 70?

4. Од шпил со 32 карти играчот извлекува една карта. Колкава е веројатноста дека извлечената карта е:
а) дама; б) пик?

5. Фрлени се две коцки на масата. Што е поверојатно, да има ист број на точки или збирот на точките да е помал од 5?

6. Колкава е веројатноста дека две фрлени коцки ќе покажат точки чиј збир е парен број?

7. Во една кутија има 5 бели и 4 црни топчиња. Која е веројатноста дека со едно извлекување ќе извлечеме:
а) едно бело топче; б) две бели топчиња;
в) едно бело и едно црно топче?

8. Од шпил со 32 карти играчот добива две карти. Колкава е веројатноста дека играчот ќе добие два "аса"?

9. Едновремено се фрлени три коцки. Одреди ја веројатноста на настанот:
а) A: збирот на точките на горните страни на коцките да е 11;
б) B: збирот на точките на горните страни на коцките да е 12.

10. На девет ливчиња се напишани буквите $A, B, E, I, L, O, P, R, H$. Ливчињата сосема случајно се наредени едно покрај друго. Колкава е веројатноста дека на тој начин ќе биде напишан зборот *HIPERBOLA*?

8 СВОЈСТВА НА ВЕРОЈАТНОСТ

Потсети се!

Множеството од елементарни настани на даден експеримент го сочинуваат сите поволни и неповолни елементарни настани за дадениот експеримент.

Веројатноста на случајниот настан A е $P(A)=\frac{m}{n}$,
m - број на поволни елементарни настани,
n - број на сите елементарни настани.

1 Во една кутија има 10 бели топчиња. Колкава е веројатноста дека:
а) A: ќе извлечеме бело топче;
б) B: ќе извлечеме црно топче?

Следај го решението:

а) Множеството на елементарните настани има 10 елементи, т.е. $n=10$.

Извлекувањето на бело топче претставува поволен настан, т.е. $m=10$.

Веројатноста е $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{10}=1$.

б) Бројот на можните настани е $n=10$. Бројот на поволните настани е $m=0$, бидејќи од кутијата во која има само бели топчиња не можеме да извлечеме црно топче.

Веројатноста е $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{0}{10}=0$.

Од кој вид е настанот A, а од кој вид е настанот B?

Ќе наведеме некои својства на веројатноста кои следуваат од класичната дефиниција за веројатност.

1. Веројатноста за кој било настан не може да биде помала од нула, ниту поголема од еден, т.е. од $P(A)=\frac{m}{n}, 0 \le m \le n$, следува $0 \le P(A) \le 1$.

Ова својство е очигледно, бидејќи дропката $\frac{m}{n}$ е ненегативен реален број што не е поголем од 1, т.е. $0 \le \frac{m}{n} \le 1$.

Зависно од вредноста на $P(A)$ за случајниот настан A велиме:

- Настанот A е малку веројатен ако $0 < P(A) < \frac{1}{2}$.
- Настанот A е неизвесен ако $P(A)=\frac{1}{2}$.
- Настанот A е многу веројатен ако $\frac{1}{2} < P(A) < 1$.

2. Веројатноста на невозможниот настан A, $A=\varnothing$, е еднаква на нула, т.е. $P(\varnothing)=0$.

- Ако $m=0$, т.е. нема можност да настане настанот A, па $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{10}=0$.

3. Веројатноста на сигурниот настан A, $A=\Omega$, е еднаква на еден, т.е. $P(\Omega)=1$.

- Ако $m=n$, т.е. ако сите можни елементарни настани се и поволни, тогаш настанот A сигурно ќе настапи, па $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$.

4. Нека настанот A и настанот B се дисјунктни, множеството на елементарните настани за настанот $A+B$ ќе ги содржи сите поволни елементарни настани и за A и за B, па $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

- Нека n е бројот на сите елементарни настани. Ако m_1 е бројот на поволни елементарни настани за A, а m_2 е бројот на поволни елементарни настани за B, тогаш m_1+m_2 ќе биде бројот на поволни елементарни настани за $A+B$.

Според тоа имаме:

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

2 При фрлање на монета можат да настанат следните настани:
A: појава на грб на горната страна на монетата;
B: појава на писмо на горната страна на монетата.
Одреди ја веројатноста на настанот $A+B$.

Согледај го решението:

Бидејќи настаните A и B се единствено можни, еднакво можни и дискјунктни, имаме: $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, па $P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Теоремата за збир на две веројатности важи и за збир на три, четири и воопшто конечно многу несогласни настани, т.е.

$$P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n).$$

3 Колкава е веројатноста дека од шпил со 52 карти ќе извлечеме или "ас", или "џандар", или "дама" или "поп"?

Согледај го решението:

Бројот на елементарните настани е $n=52$.

A - извлекување на "ас", $m_1=4$; $P(A)=\frac{4}{52}$;

B - извлекување на "џандар", $m_2=4$; $P(B)=\frac{4}{52}$;

C - извлекување на "дама", $m_3=4$; $P(C)=\frac{4}{52}$;

D - извлекување на "поп", $m_4=4$; $P(D)=\frac{4}{52}$.

Бидејќи настаните A, B, C и D се еднакво можни и дисјунктни, за веројатноста имаме: $P(A+B+C+D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$.

4 Во една кутија има 5 бели, 7 црни, 8 црвени и 10 сини топчиња. Колкава е веројатноста дека ќе извлечеме обоено топче? (Белото топче не е обоено.)

5. Веројатноста на настанот $\overline{A}$ што е спротивен на настанот A е

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Бидејќи настаните A и $\overline{A}$ се дисјунктни, значи $A+\overline{A}=\Omega$, па според претходната теорема имаме $P(A+\overline{A})=P(\Omega)$, т.е. $P(A)+P(\overline{A})=1$. Оттука следува $P(\overline{A})=1-P(A)$.

5 Во една кутија има 4 бели, 5 сини и 6 жолти топчиња. Колкава е веројатноста дека нема да извлечеме обоено топче? (Белото топче не е обоено).

Согледај го решението:

Вкупниот број на елементарните настани е $n=4+5+6=15$. Настанот A: да не извлечеме обоено топче има $m=5+6=11$ поволни настани, па веројатноста е $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{11}{15}$.

Спротивниот настан $\overline{A}$ е извлекување на бело топче. Поволен број да настане настанот $\overline{A}$ е $m_1 = 4$, па веројатноста е $P(\overline{A}) = \frac{m_1}{n} = \frac{4}{15}$. Според претходната теорема имаме: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, т.е. $P(A) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$.

Воочи!

Веројатноста на некој настан A може да се одреди со помош на веројатноста на спротивниот настан $\overline{A}$.

Задачи

1. На масата е фрлена една коцка. Одреди ја веројатноста:
A: појава на парен број на точки на горната страна на коцката;
B: појава на точки чиј број е помал од 5.

2. Колкава е веројатноста од 32 карти да извлечеме или "пик" или "каро"?

3. На масата се фрлени две коцки. Колкава е веројатноста дека на горните страни на коцките ќе се појават точки чиј збир е или парен или непарен број?

4. На масата се фрлени две коцки. Колкава е веројатноста дека тие ќе покажат или еднаков број на точки, или броеви на точки чиј збир е 7, или броеви на точки чиј збир е 9?

5. Во една кутија има 4 бели, 5 црни и 6 зелени топчиња. Извлекуваме по две топчиња одеднаш. Колкава е веројаноста да извлечеме или едно бело и едно црно, или едно црно и едно бело топче?

6. Настаните A, B, C и D го сочинуваат множеството на елементарните настани Ω, т.е. $\Omega = \{A, B, C, D\}$. Ако $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,3$; $P(C) = 0,4$; тогаш колкава веројатност има настанот D?

7. Во една кутија поизволна се ставени 20 производи од одреден вид, меѓу кои се 5 стандардни. Работникот сосема случајно вади три производи. Колкава е верojаноста дека барем еден од извадените производи ќе биде стандарден?

8. Кружна мета е поделена на три концентрични зони. Веројатноста со еден куршум да се погоди првата зона е $0,16$, втората $0,24$, а третата $0,28$. Колкава е веројатноста да не се погоди метата?

9 СТАТИСТИЧКА ВЕРОЈАТНОСТ

Потсети се!

Класичната дефиниција на веројатност може да се примени ако однапред се знаат бројот на поволните елементарни настани и бројот на сите можни (поволни и неповолни) елементарни настани.

При примена на класичната дефиниција на веројатност се претпоставува дека случајните елементарни настани се еднакво можни и единствено можни настани.

Математичката веројатност што ја разгледувавме досега се определува врз основа на однапред познат број можни настани и познат број поволни настани. Меѓутоа, во практиката, при испитување на природни или други појави такви податоци обично не се познати ниту дадени, па математичката веројатност, или како што се вика веројатност *a priori*, не може со успех да се примени. Од овие причини, вројатноста на тие настани ја определуваме со помош на изведување на серија експерименти во неизменети услови.

Запомни!

Ако со m го означиме бројот на настанувањата на настанот A во n независни експерименти, изведени при исти услови, тогаш бројот $f_n(A)=\frac{m}{n}$ се вика релативна фреквенција на настанот A.

1 Да ги разгледаме резултатите од експериментот "фрлање на монета" што го извеле францускиот научник Ж. Бифон (1838 - 1883) и англискиот математичар К. Пирсон (1857 - 1936), прикажани во табелата што следува.

Експериментатор	Број на фрлања (n)	Број на паѓања на грб (m)	Фреквенција $f_n(A)=\frac{m}{n}$
Ж. Бифон	4040	2048	0,5069
К. Пирсон	12000	6019	0,5016
К. Пирсон	24000	12012	0,5005

Од табелата се гледа дека релативната фреквенција на настанот A се стреми кон $\frac{1}{2}$, а бројот $\frac{1}{2}$ е математичка веројатност на настанот A - "паѓање на грб".

2 Во табелата што следува се прикажани резултатите од експериментот A: "Фрлање на коцка".

Број на фрлања на	Реализација на елементарните настани					
	1	2	3	4	5	6
600	82	130	106	92	106	84
6000	953	1053	1027	1028	982	957
60000	9880	9989	9888	10026	10190	9847
120000	19759	20065	19795	20232	20213	19936

Во табелата ќе ја пресметаме релативната фреквенција на експериментот.

Број на фрлања на	Фреквенција $f_n(A)=\frac{m}{n}$					
	1	2	3	4	5	6
600	0,140	0,220	0,180	0,150	0,180	0,140
6000	0,159	0,176	0,171	0,171	0,164	0,160
60000	0,165	0,166	0,165	0,170	0,170	0,164
120000	0,165	0,167	0,165	0,169	0,168	0,166

Од табелата воочуваш дека со зголемувањето на бројот на изведените експерименти релтивната фреквенција $f_n(A)$ се стреми кон $\frac{1}{6}=0,166...$, а математичката веројатност при фрлањето на коцката да се појави еден од броевите 1, 2, 3, 4, 5 или 6 е еднаква на $\frac{1}{6}$. Овие и многу други примери покажуваат дека кај случајните настани за кои не може да се примени класичната дефинција за веројатност, фреквенцијата на настанот во поголем број на експерименти, по правило е многу блиска до веројатноста на настанот. Од тие причини можеме да извлечеме заклучок дека постои реална константа околу која се натрупува фреквенцијата. Таа константа, како објективна нумеричка карактеристика на настанот A се вика веројатност на настанот. За бројна вредност на таа константа, при голем број на експерименти може да се земе или фреквенцијата на настанот А или бројот што е блику до фреквенцијата. На овој начин не се добива формално математичка дефиниција на веројатност, туку се покажува дека постои веројатност на настанот при одредени услови, како и метод за нејзината приближна оценка.

Запомни!

Релативната фреквенција $f_n(A)=\frac{m}{n}$ за случајниот настан A се вика ***статистичка веројатност*** или ***емпириска веројатност***.

Формулите $P(A)=\frac{m}{n}$ и $f_n(A)=\frac{m}{n}$ иако надворешно се слични, сепак суштински се разликуваат.

Со формулата $P(A)=\frac{m}{n}$ теоретски ја одредуваме веројатноста на настанот A.

Со $f_n(A)=\frac{m}{n}$ експериментално ја одредуваме веројатноста на настанот A.

За да ја одредиме веројатноста треба да имаме експериментален, статистички материјал. Веројатноста се определува по изведување на експериментот и добивањето на некои емпириски факти.

Статистичката веројатност се вика веројатност *a posteriori* (отпосле).

За случајниот настан A може да се одреди статистичката веројатност ако се исполнети условите:

1. Експерименот може да се изведува неограничено многу пати во неизменети услови во кои настанот A може да се појави или да не се појави.

2. Релативните фреквенции на настанот A во секоја од изведените форми на експериментот незначително се разликуваат меѓу себе, т.е. приближно се еднакви на веројатноста на настанот.

Оваа особина на релативната фреквенција се вика статистичка стабилност на настанот.

Статистичката стабилност на фреквенцијата прв пат била воочена во демографијата или наука за населението. Уште во стариот век било воочено дека односот на бројот на родените машки деца и вкупниот број на родени деца со години бил непроменет и приближно изнесувал $0,5$. Лаплас, врз основа на голем број на статистички податоци заклучил дека фреквенцијата $f_n(A)$ на родените машки деца за Лондон, Берлин, Петроград и цела Франција била иста. Сите тие односи во текот на повеќе од една деценија се движеле околу бројот што е приближно еднаков на $\frac{22}{43}=0,51162$.

Сето ова нè води до еден основен закон во теоријата на веројатност, наречен **Закон на големите броеви**, искажан од швајцарскиот математичар Јакоб Бернули (1667 - 1748). Законот покажува дека доколку е поголем бројот N на експериментите, дотолку помалку се разликуваат релативната фреквенција на настанот A и неговата теориска веројатност $P(A)$. За голем број n на елементарни настани, бројот $|f_n(A)-P(A)|$ може да се направи произволно мал, па оттаму следува дека статистичката веројатност $f_n(A)$ се стреми кон теориската веројатност $P(A)$.

Во задачата 1, за $n=2400$, $f_n(A)=0,5005$, а математичката веројатност е $P(A)=0,5$.

3 Одреди ја вредноста $|f_n(A)-P(A)|$ во задачата 2.

Законот на големите броеви има карактер на аксиома, карактер на природен закон. Кога се работи за случајни настани, тој ни укажува на она што индивидуално се прикажува како случајно, во голема маса се јавува како нужно, законито.

Постојат и други случајни настани кај кои не може да се примени класичната дефиниција на веројатност.

Задачи за повторување и утврдување

1 Со принципот на математичка индукција докажи дека
$$2+5+8+...+(3n-1)=\frac{n(3n+1)}{2}.$$

2 Дадено е множеството $A=\{4,6,7,8\}$.
а) Колку четирицифрени броеви со различни цифри можат да се формираат со цифрите на даденото множество?
б) Колку од формираните броеви се парни, а колку непарни? Запиши ги.

3 Напиши ги сите петцифрени броеви од цифрите $1, 1, 1, 2, 2$.

4 Реши ја равенката $V_x^2=380$.

5 На една железничка станица се даваат синали со помош на стрелки од 5 семафори. Колку различни сигнали можат да се дадат, ако стрелките на секој семафор можат да заземат три различни положби?

6 Колку различни одбори можат да се формираат од 10 ученици и 4 професори, ако секој одбор е составен од 5 ученици и 2 професори?

7 Одреди ги n и k, ако $C_n^k=35$ и $V_n^k=840$.

8 Во колку точки се сечат 30 прави што лежат во една рамнина, ако 16 од нив се паралелни, а 12 минуваат низ една точка?

9 Одреди го тринаесеттиот член во развојот на биномот $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$, ако биномниот коефициент на третиот член е 105.

10 Развиј го биномот $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$.

11 Запиши го множеството на елементарните настани на експериментот:
а) два пати, едно по друго е фрлена монета;
б) два пати, едно по друго е фрлена коцка;
в) истовремено се фрлени коцка и монета.

12 Колкава е веројатноста дека збирот на точките на две фрлени коцки ќе биде 7?

13 Од шпил со 32 карти играчот добива две карти. Колкава е вројатноста дека играчот ќе добие еден "џандар" и еден "поп"?

14 Фрлени се две коцки. Колкава е веројатноста дека на горните страни на коцките ќе се појават точки чиј збир е или помал од 4 или поголем од 10?

ТЕМА 4

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Во оваа тема ќе учиш за:

1 ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

Потсети се!

- Што е вектор?
- Кои вектори се колинеарни?
- Во иста рамнина дадени се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определи:

а) $\vec{a}+\vec{b}$;

б) $\vec{a}-\vec{b}$.

- Ако $k \in \mathbb{R}$, тогаш $k\vec{a}$ е вектор колиенарен со $\vec{a}$ и има должина еднаква на $|k||\vec{a}|$.
- Векторот $k\vec{a}$ има иста насока со векторот $\vec{a}$, ако $k>0$, а спротивна насока со векторот $\vec{a}$ ако $k<0$.

А Вектор, чија должина е единица, се вика единичен вектор и најчесто се обележува со $\vec{e}$.

1 Нека е даден единичниот вектор $\vec{e}$. Нацртај ги векторите:

а) $\vec{a}=4\vec{e}$; б) $\vec{b}=-3\vec{e}$.

Согледај го решението:

Нека единичниот вектор e "$\longrightarrow$", тогаш:

а)

$\vec{a}=4\vec{e}$

$\vec{a}=4\vec{e}=|\vec{a}|\vec{e}$

б)

$\vec{b}=-3\vec{e}$

$\vec{b}=-3\vec{e}=-|\vec{b}|\vec{e}$

- Единичниот вектор $\vec{e}$, кој е истонасочен со векторот $\vec{a}$, се вика **орт** на векторот $\vec{a}$ и се означува со $ort\,\vec{a}$.

Единичните вектори $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ што се заемно нормални и имаат заедничка почетна точка и се викаат ортови. Нив ги означуваме со $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Б Со помош на единичните вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$ ќе дефинираме правоаголен координатен систем во рамнина.

Множеството кое се состои од една произволна точка O и два заемно нормални единични вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$, чиј почеток е во точката O, си вика **правоаголен координатен систем** во рамнината π, го означуваме со $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Понатаму ќе го викаме само координатен систем.

Точката О се вика **координатен почеток**, а правите определени со векторите $\vec{i}=\overline{OE_1}$ и $\vec{j}=\overline{OE_2}$ се викаат **координатни оски**, црт. 1.

Правата определена со векторот $\vec{i}$ се вика **апсцисна оска** (x – оска), а правата определена со векторот $\vec{j}$ се вика **ординатна оска** (y –оска)

Рамнината во која е зададен координатен систем се вика **координатна рамнина** Oxy.

Црт. 1

Вектор чиј почеток е во координатниот почеток O, а крајот во која било точка M од координатната рамнина, се вика **радиус вектор** на точката M.

2 Нека M е произволна точка во координатниот систем $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Одреди ги координатите на радиус векторот $\overrightarrow{OM}$.

Сочледај го решението:

- Нека $\overrightarrow{OM}$ е радиус вектор каде што точката M е одредена со своите координати, (црт. 1), а $\overrightarrow{OM_x}$ и $\overrightarrow{OM_y}$ се проекции на радиус векторот врз координатните оски x и y.

  Оттука следува $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$.

  Бидејќи векторите $\overrightarrow{OM_x}$ и $\overrightarrow{OM_y}$ се колинеарни со векторите $\vec{i}$ и $\vec{j}$, постојат единствени реални броеви x и y така што

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

На овој начин, всушност, е извршено разложување на радиус векторот $\overrightarrow{OM}$ по ортовите $\vec{i}$ и $\vec{j}$ во правоаголниот координатен систем. Ваквото разложување е секогаш можно и единствено. Реалните броеви x и y се координати на радиус векторот $\overrightarrow{OM}$ и ги означуваме, $\overrightarrow{OM} = (x, y)$.

Воедно, x и y се координати на точката M, ги означуваме $M(x, y)$.

Првата координата x на точката M, т.е. на радиус векторот $\overrightarrow{OM}$ се вика **апсциса**, а втората координата y – **ордината** на точката M.

На тој начин на секоја точка M од рамнината Oxy ѝ одговара единствена подредена двојка реални броеви x и y.

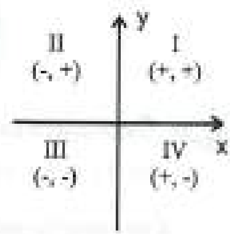
Важи и обратното: за произволна двојка реални броеви x и y постои единствена точка M од рамнината Oxy, за која x е апсциса, а y е ордината.

На тој начин е воспоставено обратно еднозначно соодветство помеѓу рамнината π како множество точки и множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ од сите подредени двојки реални броеви.

- Координатните оски ја разделуваат рамнината на четири делови, кои се викаат квадранти: I, II, II, IV, црт.2.

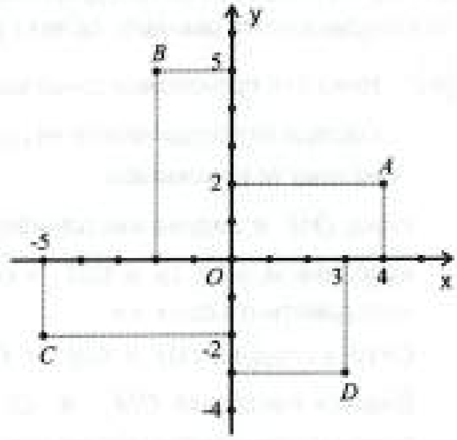
- Во ист квадрант координатите на која било точка имаат знаци како што е прикажано на црт.2.

- Точката A што лежи на x – оската е со координати $A(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, т.е. ординатата е еднаква на нула, точката B од y – оската е $B(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, т.е. апсцисата е нула, а координатниот почеток $O(0, 0)$.



црт. 2

На пример, на точката A од рамнината Oxy ѝ одговара единствена подредена двојка реални броеви $(4, 2)$, а на точката B – подредената двојка $(-2, 5)$, црт. 3.
И обратно, за подредената двојка реални броеви $(-5, -2)$ постои единствена точка C од рамнината Oxy за која -5 е апсциса, а -2 е ордината. За подредената двојка реални броеви $(3, -3)$ постои единствена точка D од рамнината Oxy, за која апсциса е 3, а -3 е ордината.
Имајќи го предвид тоа, често пати точката M ја поистоветуваме со на неа придружената двојка реални броеви (x, y), а рамнината π со множеството $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



црт. 3

3 Во координатен систем $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ дадени се точките: $A(-3, 4)$, $B(2, -5)$, $C(-2, -1)$ и $D(5, 0)$. Разложи ги радиус векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ по ортовите.

Согледај го решението:

- $\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$;
- $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$;
- $\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$;
- $\overrightarrow{OD} = 5\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} = 5\overrightarrow{i}$.

4 Дадени се радиус векторите со нивните координати:

$$\overrightarrow{OA} = (-2,4); \quad \overrightarrow{OB} = (0,-3); \quad \overrightarrow{OC} = (5,-2) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OD} = (-4,-2).$$

а) Претстави ги во правоаголен координатен систем.

б) Разложи ги по координатните оски (ортовите).

- Ако $\overrightarrow{OM_1} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j}$ и $\overrightarrow{OM_2} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j}$ се радиус вектори, тогаш тие се еднакви ако и само ако имаат еднакви соодветни координати, т.е.

$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2}$ ако и само ако $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

5 Одреди ги реалните броеви x и y од релациите:

а) $3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} = (x+1)\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$; б) $x\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} = -3\overrightarrow{i} + (y-2)\overrightarrow{j}$.

Согледај го решението:

- а) Од равенството следува $\begin{cases} x+1=3 \\ y=2 \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Задачи

1 Претстави ги во координатен систем радиус векторите дадени со своите координати:

а) $\overrightarrow{a}=(2,3)$; $\overrightarrow{b}=(-1,5)$; $\overrightarrow{c}=(4,-2)$; $\overrightarrow{d}=(-1,-3)$; $\overrightarrow{e}=(8,-5)$;

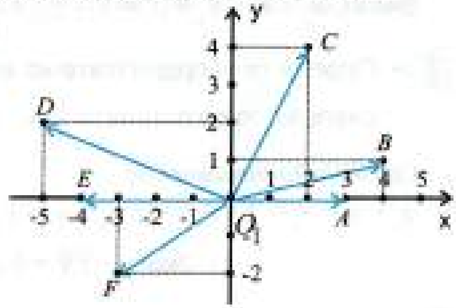
б) $\overrightarrow{a}=(4,0)$; $\overrightarrow{b}=(0,-2)$; $\overrightarrow{c}=(0,3)$; $\overrightarrow{d}=(-5,0)$;

в) $\overrightarrow{a}=(3,3)$; $\overrightarrow{b}=(-5,-5)$; $\overrightarrow{c}=(-2,2)$; $\overrightarrow{d}=(-4,4)$.

Каква е заемната положба на векторите под б), и ортовите $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$?

2 Одреди ги координатите на радиус векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, дадени на црт. 4.

3 Радиус векторите $\overrightarrow{a}=(4,1)$, $\overrightarrow{b}=(0,-3)$, $\overrightarrow{c}=(-1,0)$, $\overrightarrow{d}=(1,-1)$, $\overrightarrow{e}=(-2,5)$ разложи ги по ортовите $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$.



црт. 4

4 Одреди ги координатите на векторите: $\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-8\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{d}=-14\overrightarrow{i}+9\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{e}=-\overrightarrow{j}$.

2 КООРДИНАТИ НА ВЕКТОР ВО ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

Потсети се!

- Собирањето на вектори има комутативно и асоцијативно својство:

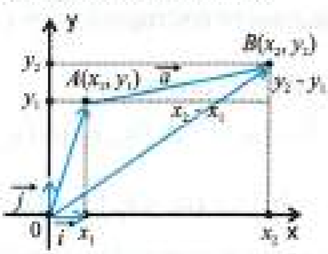
$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a} \text{ и}$$
$$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right).$$

- За множењето на вектор со број важат следните закони:

$$(k\cdot m)\overrightarrow{a}=k\cdot\left(m\cdot\overrightarrow{a}\right);$$
$$(k+m)\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{a}+m\overrightarrow{a};$$
$$k\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=k\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}.$$

1 Во правоаголен координатен систем $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ даден е векторот $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$, чии крајни точки се: $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$. Одреди ги координатите на векторот $\overrightarrow{a}$.

Согледај го решението:



црт. 1

Координатите на векторот $\overrightarrow{a}$ ги означуваме со a_x и a_y, црт. 1.

Векторот $\overrightarrow{AB}$ не е радиус вектор, но тој може да се претстави како разлика од два радиус вектори, т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

при што $\overrightarrow{OB} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{OA} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{AB} = \left(x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j}\right) - \left(x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j}\right)$;
$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j}$.

Значи, $a_x = x_2 - x_1$ и $a_y = y_2 - y_1$, т.е. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

2 Одреди ги координатите на векторот $\overrightarrow{AB}$, ако $A(2, -4)$, $B(1, 3)$, а потоа разложи го по ортовите $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$.

Согледај го решението:

$a_x = x_2 - x_1 = 1 - 2 = -1$, $a_y = y_2 - y_1 = 3 - (-4) = 7$.

Значи, $\overrightarrow{AB} = (-1, 7)$, т.е. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$.

3 На векторот $\overrightarrow{a} = -5\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$ почетна точка му е $A(2, -1)$. Одреди ги координатите на неговата крајна точка B.

Согледај го решението:

$a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$;
$-5 = x_2 - 2$, $-4 = y_2 - (-1)$;
$x_2 = -3$. $y_2 = -5$.
Значи, $B(-3, -5)$.

Запомни!

Ако се дадени точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, тогаш координати на векторот $\overrightarrow{AB}$ е парот $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ т.е. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Б Операциите: собирање на два или повеќе вектори, одземање на вектори и множење на вектор со број, досега ги изведувавме геометриски, бидејќи и самите вектори беа задавани геометриски (како насочени отсечки). Сега ќе покажеме како ги изведуваме тие операции, ако векторите се зададени со своите координати во координатен систем $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

4 Дадени се векторите: $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$; $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y)$. Одреди го нивниот збир.

Согледај го решението:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_x, a_y) + (b_x, b_y) = \left(a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j}\right) + \left(b_x\overrightarrow{i} + b_y\overrightarrow{j}\right) =$$

$$= (a_x + b_x)\overrightarrow{i} + (a_y + b_y)\overrightarrow{j} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

Дали важи истото правило ако бројот на собироците е поголем од два?

5 Дадени се векторите $\vec{a}=(3,-2)$, $\vec{b}=(2,0)$ и $\vec{c}=(-1,-4)$.

Одреди: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Согледај го решението:

а) $\vec{a}+\vec{b}=(3,-2)+(2,0)=(3+2,-2+0)=(5,-2)$.

Запомни!

Збир на два или повеќе вектори е вектор чии координати се еднакви на збирот на нивните соодветни координати, т.е. ако $\vec{a}=(a_x,a_y)$, $\vec{b}=(b_x,b_y)$, $\vec{c}=(c_x,c_y)$, тогаш $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(a_x+b_x+c_x,a_y+b_y+c_y)$.

6 Одреди ја разликата на векторите $\vec{a}=(a_x,a_y)$ и $\vec{b}=(b_x,b_y)$.

Согледај го решението:

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x,a_y)-(b_x,b_y)=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j})-(b_x\vec{i}+b_y\vec{j})=$$
$$=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}=(a_x-b_x,a_y-b_y)$$

7 Одреди ја разликата на векторите: $\vec{a}=(5,-2)$ и $\vec{b}=(-1,-4)$.

Согледај го решението:

$$\vec{a}-\vec{b}=(5,-2)-(-1,-4)=(5-(-1),-2-(-4))=(6,2)$$

Запомни!

Разликата на два вектори е вектор чии координати се еднакви на разликите на нивните соодветни координати, т.е. ако $\vec{a}=(a_x,a_y)$, $\vec{b}=(b_x,b_y)$, тогаш

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y).$$

8 Векторот $\vec{a}=(a_x,a_y)$ помножи го со бројот λ.

Согледај го решението:

$$\lambda\vec{a}=\lambda(a_x,a_y)=\lambda(a_x\vec{i}+a_y\vec{j})=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}=(\lambda a_x,\lambda a_y).$$

9 Ако $\vec{a}=(3,-2)$, одреди го векторот: а) $5\vec{a}$; б) $-\frac{1}{3}\vec{a}$.

Согледај го решението:

а) $5\vec{a}=5\cdot(3,-2)=(5\cdot 3,5\cdot(-2))=(15,-10)$.

Запомни!

Вектор со број се множи така што секоја координата на векторот се множи со тој број, т.е. ако $\overrightarrow{a}=(a_x, a_y)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, тогаш $\lambda\overrightarrow{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y)$.

10 Дадени се векторите: $\overrightarrow{a}=(3,-2)$, $\overrightarrow{b}=(2,0)$ и $\overrightarrow{c}=(-1,-4)$.

Одреди ги векторите:

а) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$; б) $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$; в) $-2\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}$.

Согледај го решението:

а) $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(3,-2)+(2,0)=(3+2,\ -2+0)=(5,-2)$

б) $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}=(2,0)-(-1,-4)=(2-(-1),0-(-4))=(3,4)$

в) $-2\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}=-2(3,-2)+\frac{1}{2}(2,0)+3(-1,-4)=$
$=(-6,+4)+(1,0)+(-3,-12)=(-8,-8)$

11 Дадени се векторите: $\overrightarrow{a}=(-1,5)$ и $\overrightarrow{b}=\left(\frac{1}{2},-2\right)$. Одреди ги векторите:

а) $3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$; б) $-\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}$; в) $\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-6\overrightarrow{b}$.

Задачи

1 Одреди го збирот и разликата на векторите:

а) $\overrightarrow{a}=(3,-1)$ и $\overrightarrow{b}=(5,4)$; б) $\overrightarrow{p}=(-1,2)$ и $\overrightarrow{q}=(5,0)$.

2 Дадени се векторите: $\overrightarrow{a}=(2,-3)$; $\overrightarrow{b}=(-1,2)$; $\overrightarrow{c}=(1,1)$.
Одреди ги координатите на векторите:

а) $2\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$; б) $3\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}$; в) $2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}+\frac{1}{4}\overrightarrow{c}$; г) $\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.

3 Одреди ги реалните броеви x и y ако:

а) $2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}=x\overrightarrow{i}+(2y-1)\overrightarrow{j}$; б) $(2x-y+1)\overrightarrow{i}+(y-3)\overrightarrow{j}=\overrightarrow{0}$;

в) $(3-x)\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}=(y+4)\overrightarrow{i}-(1-2x)\overrightarrow{j}$.

4 Одреди ги координатите на векторот $\overrightarrow{AB}$, ако:

а) $A(5,-1)$, $B(3,4)$; б) $A(3,0)$, $B(0,5)$;

в) $A(-4,7)$, $B(1,0)$; г) $A(81,-32)$, $B(87,-33)$.

5 Одреди ги координатите на крајната точка B на векторот $\overline{AB}$, ако:

а) $A(0, 0)$; $\overline{AB} = (-2, 5)$; б) $A(3, -1)$; $\overline{AB} = (4, 3)$;

в) $A(-1, 2)$; $\overline{AB} = (5, -10)$; г) $A(0, -2)$, $\overline{AB} = (-3, 0)$.

6 Одреди ги координатите на почетната точка A на векторот $\overline{AB}$, ако:

а) $B(0, 0)$, $\overline{AB} = (3, -2)$; б) $B(5, 0)$, $\overline{AB} = (-2, 1)$;

в) $B(-3, 4)$, $\overline{AB} = (4, -3)$; г) $B(0, -1)$, $\overline{AB} = (-2, -5)$.

7 Користејќи координати на вектори докажи ја теоремата за средна линија на трапез.

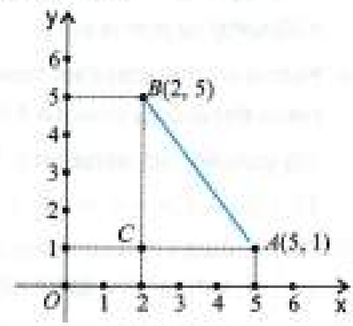
3 РАСТОЈАНИЕ МЕЃУ ДВЕ ТОЧКИ

А 1 Точките $A(5, 1)$ и $B(2, 5)$ претстави ги во правоаголен координатен систем, а потоа одреди го растојанието меѓу нив.

Согледај го решението:

- Низ точките A и B повлекуваме прави паралелни со координатните оски, црт. 1.
- Кои се координатите на пресечната точка C?
- Каков е ΔABC?
- Одреди ги должините на отсечките AC и BC.
- Воочи дека $\overline{AC} = 5 - 2 = 3$, $\overline{BC} = 5 - 1 = 4$;

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.



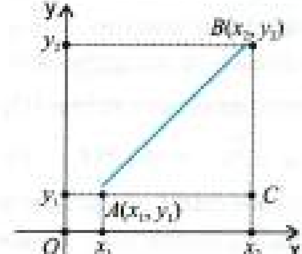
црт. 1

2 Во рамнината се дадени точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Одреди го растојанието меѓу нив.

Согледај го решението:

- ΔABC е правоаголен со катети $\overline{AC} = x_2 - x_1$ и $\overline{BC} = y_2 - y_1$, црт. 2.
- Бараното растојание е $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

или $d = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



црт. 2

3 Одреди го растојанието меѓу точките:

а) $A(7, 9)$ и $B(10, 3)$; б) $A(-4, -5)$ и $B(3, -4)$;

в) $A(\cos\alpha, 0)$ и $B\left(\sin\alpha, \sqrt{\sin 2\alpha}\right)$.

4 На x – оската одреди точка која е еднакво оддалечена од точките $A(0, 5)$ и $B(4, 2)$.

Согледај го решението:

- Колку е ординатата на точката што лежи на x – оската?
- Нека бараната точка е $M(x, 0)$.
- $\overline{MA} = \sqrt{(0-x)^2 + (5-0)^2}$; $\overline{MB} = \sqrt{(4-x)^2 + (2-0)^2}$
- Од условот $\overline{MA} = \overline{MB}$ имаме $\sqrt{x^2 + 25} = \sqrt{16 - 8x + x^2 + 4}$;

$x^2 + 25 = 16 - 8x + x^2 + 4$ од каде

$x = -\frac{5}{8}$, т.е. $M\left(-\frac{5}{8}, 0\right)$.

5 На y – оската одреди точка која е еднакво оддалечена од точките $A(-3, -5)$ и $B(4, -3)$.

6 На y – оската да се одреди точка што од точката $A(4, -6)$ е оддалечена за 5 единици.

Согледај го решението:

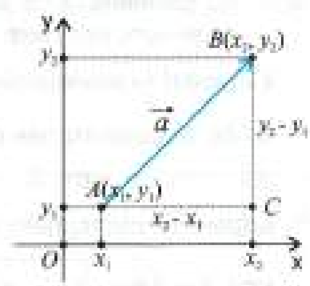
- Колку е апсцисата на точка што лежи на y – оската?
- Нека бараната точка е $M(0, y)$.
- Од условот на задачата $\overline{MA} = 5$, т.е. $\sqrt{(4-0)^2 + (-6-y)^2} = 5$;

$16 + 36 + 12y + y^2 = 25;\ y^2 + 12y + 27 = 0.$

- По решавањето на квадратната равенка ги добиваме вредностите $y_1 = -9$ и $y_2 = -3$, што значи дека постојат две такви точки: $M_1(0, -9)$ и $M_2(0, -3)$.

7 На x – оската да се одреди точка што од точката $A(5, 12)$ е оддалечена за 13 единици.

Б Формулата за растојание меѓу две точки може да се примени и за пресметување должина на кој било вектор $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, ако се познати неговите координати a_x и a_y во правоаголен координатен систем $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Нека е даден вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, каде $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Тогаш должината на векторот $\vec{a}$, што се означува со $|\vec{a}|$, е, всушност, растојанието меѓу точките A и B црт. 3, т.е.



црт. 3

$$|\vec{a}| = d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- Бидејќи $x_2 - x_1 = a_x$, $y_2 - y_1 = a_y$ имаме

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

8 Одреди ја должината на векторот $\vec{a}$, ако:

а) $\vec{a}=\left(\sqrt{11},-\sqrt{5}\right)$; б) $\vec{a}=\sqrt{3}\,\vec{i}-4\,\vec{j}$.

Сојледај ја решениејо:

а) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{11+5}=4$.

9 Одреди ја должината на векторот $\overrightarrow{AB}$, ако:

а) $A(-2,5)$, $B(-1,-3)$; б) $A(3,2)$, $B(-2,10)$.

Сојледај ја решениејо:

а) $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$; $\overrightarrow{AB}=(-1+2,-3-5)$; т.е. $\overrightarrow{AB}=(1,-8)$, па

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+\left(-8\right)^2}=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}.$$

Задачи

1. Точките $A(3,4)$, $B(-2,4)$ и $C(2,2)$ се темиња на еден триаголник. Одреди го периметарот на триаголникот.

2. Докажи дека триаголникот чии темиња се $A(-1,1)$, $B(1,3)$ и $C\left(-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right)$ е рамностран.

3. Докажи дека триаголникот со темиња $A(2,3)$, $B(-2,5)$ и $C(-1,-3)$ е правоаголен.

4. Одреди ја равенката на геометриското место на точки кои се еднакво оддалечени од точките $A(2,2)$ и $B(4,4)$.

5. Одреди ги координатите на точката што е еднакво оддалечена од точките

   а) $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,2)$; б) $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(0,4)$.

6. Точката $M(x,y)$ е еднакво оддалечена од точките $A(3,5)$ и $B(-2,4)$. Нејзиното растојание до y – оската е два пати поголемо од растојанието до x – оската. Определи ги нејзините координати.

7. Дадени се две соседни темиња на квадратот $A(3,-7)$ и $B(-1,4)$. Пресметај ја неговата плоштина.

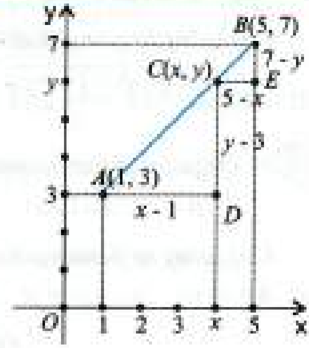
8. Една подвижна точка, што имала почетна положба $M_0(3,8)$, се преместува паралелно со y – оската. Да се определи нејзината положба кога таа ќе биде на еднакво растојание од точките $M_1(4,7)$ и $M_2(-3,2)$.

9. Една подвижна точка, што имала почетна положба $M_0(2,1)$ се преместува паралелно со x –оската. Да се определи нејзината положба кога таа ќе биде на растојание еднакво на 13 единици од точката $M(4,6)$.

10. Докажи аналитички дека во правоаголниот триаголник отсечката d, која го поврзува темето на правиот агол со средината на хипотенузата, е еднаква на половина од хипотенузата.

4 ДЕЛЕЊЕ НА ОТСЕЧКА ВО ДАДЕН ОДНОС

А 1 Одреди ги координатите на точката C, која отсечката AB, $A(1, 3)$ и $B(5,7)$ ја дели во однос 3 : 1.



црт. 1

Согледај го решението:

- Низ точката A повлекуваме права паралелна со x – оската, а низ C права паралелна со y – оската. Пресечната точка ја означуваме со D.
  Низ C повлекуваме права паралелна со x – оската, а низ B права паралелна со y – оската. Пресечната точка ја означуваме со E. (црт.1).
- Бидејќи точката C е меѓу точките A и B, следува дека броевите $x - 1$ и $5 - x$ се со исти знаци.
- $\Delta ADC \sim \Delta CEB$ (како правоаголни триаголници, со еднакви агли).
- Од сличноста на триаголниците следува дека соодветните страни се пропорционални, т.е.

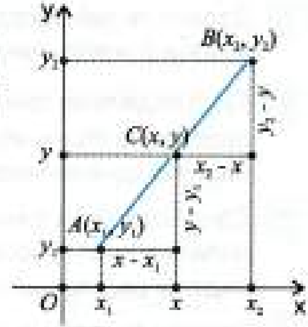
$\overline{AC} : \overline{CB} = (x - 1) : (5 - x)$, и
$\overline{AC} : \overline{CB} = 3 : 1$ следува
$(x - 1) : (5 - x) = 3 : 1;$
$x - 1 = 15 - 3x;$
$4x = 16;\ x = 4.$

$\overline{AC} : \overline{CB} = (y - 3) : (7 - y)$ и
$\overline{AC} : \overline{CB} = 3 : 1$, следува
$(y - 3) : (7 - y) = 3 : 1;$
$y - 3 = 21 - 3y;$
$4y = 24;\ y = 6.$

Бараната точка е $C(4, 6)$.

2 Одреди ги координатите на точката C, која отсечката AB, $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ ја дели во даден однос $m : n = \lambda$.

Согледај го решението:



црт. 2

- Бидејќи точката C лежи меѓу точките A и B, црт.2, броевите $x - x_1$ и $x_2 - x$ се со исти знаци, па од сличноста на триаголниците и условот на задачата имаме:

$\overline{AC} : \overline{CB} = (x - x_1) : (x_2 - x)$ и $\overline{AC} : \overline{CB} = \lambda$

т.е. $(x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda;$

$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x;$

$x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2$, т.е.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

На сличен начин за ординатата y добиваме $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

Бараната точка е $C\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

3 Определи ги координатите на точката C што отсечката AB ја дели во однос λ:

а) $A(-6, -2)$, $B(2, 10)$, $\lambda = 3$; б) $A(-1, 2)$, $B(5, 2)$, $\lambda = \frac{1}{2}$;

в) $A(3, 5)$, $B(-8, 1)$, $\lambda = \frac{2}{7}$.

Соīледај īо решението:

б) $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$;

$$x=\frac{-1+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=1; \qquad y=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{1}}{\frac{3}{2}}=2;$$

Значи, $C(1, 2)$.

Ако точката C е средишна точка на отсечката AB, тогаш:

$\overline{AC}:\overline{CB}=1$, т.е. $\lambda = 1$.

Кои се координатите на точката C?

Запомни!

Координатите на точка, која дадена отсечка $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ ја дели во однос $m : n = \lambda$, се одредуваат по формулите:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Координатите на средишната точка на отсечката се:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

4 Одреди ги координатите на тежиштето на триаголникот чии темиња се точките:

а) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$; б) $A(2, 3)$, $B(-10, -4)$, $C(2, -8)$.

Соīледај īо решението:

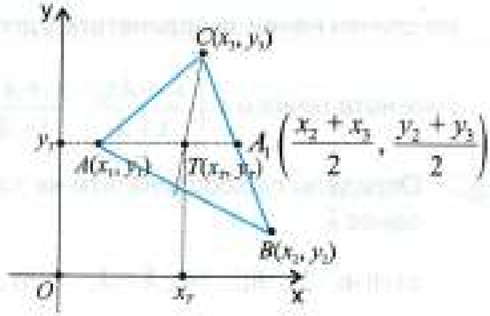
а) $A(x_1, y_1)$; $A_1\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$, црт. 3. Ако T е тежиште на ΔABC, тогаш:

$$\overline{AT}:\overline{TA_1}=2:1=\lambda, \quad \lambda = 2.$$

$$x_T=\frac{x_1+2\dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y_T=\frac{y_1+2\dfrac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Значи, $T\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.



црт. 3

5 Отсечката AB, $A(-9, 5)$ и $B(11, -3)$ со точките M, N и P е поделена на четири еднакви делови. Одреди ги координатите на точките M, N и P.

Согледај го решението:

- Точката M ја дели отсечката AB во однос $\lambda = 1 : 3$, црт. 4, па

црт. 4

$$x_m=\frac{-9+\frac{1}{3}\cdot 11}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{-27+11}{3}}{\frac{4}{3}}=-4;\qquad y_m=\frac{5+\frac{1}{3}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{4}{\frac{4}{3}}=3.$$

Значи, $M(-4, 3)$.

- Координатите на точките N и P одреди ги сам.

Задачи

1. Одреди ги координатите на точката C која отсечката $A(-3, 1)$, $B(2, 5)$ ја дели во однос $3 : 1$.

2. Одреди ги координатите на тежиштето на триаголникот:

   а) $A(2, 3)$, $B(3, 4)$, $C(-8, 2)$; б) $A(-5, 2)$, $B(-1, -6)$, $C(3, 4)$.

3. Отсечката $A(3, -6)$, $B(10, 8)$ е поделена со точките C, D, E и F на пет еднакви делови. Кои се координатите на тие точки?

4. Одреди ги координатите на четвртото теме на паралелограмот, ако три негови темиња се:

   а) $A(1, 2)$, $B(-5, -3)$, $C(7, -6)$; б) $A(-10, 7)$, $B(5, -13)$, $C(14, 7)$.

5. Докажи дека правата што минува низ средините на две страни на триаголникот е паралелна со третата страна.
   Упатство: ΔABC постави го во координатен систем така што страната AB да лежи на x – оската, а темето A да се совпаѓа со координатниот почеток.

6. Отсечката AB, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ има должина d. Продолжи ја отсечката преку точката B за a единици. Кои се координатите на крајната точка на добиената отсечка?

7) Отсечката AB, $A(1, -1)$ и $B(4, 5)$ да се продолжи во насока AB до точката C, така што нејзината должина да се зголеми три пати. Одреди ги координатите на точката C.

8) Одреди ја плоштината на триаголникот, чии темиња се:

а) $A(1, 0)$, $B(3, 1)$, $C(0, 2)$; б) $A(-4, -3)$, $B(5, 1)$, $C(-3, 5)$;

в) $A(a, 0)$, $B(a + b, a)$, $C(0, b)$.

9) Одреди ја плоштината на четириаголникот, чии темиња се:

а) $A(2, 3)$, $B(-3, 4)$, $C(-1, -4)$, $D(3, -1)$; б) $A(-1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(0, 5)$, $D(-2, 3)$.

10) Точките $A(3, 5)$, $B(12, 2)$ и $C(8, 12)$ се темиња на триаголник. Одреди го:

а) периметарот на триаголникот;

б) координатите на средишните точки на страните;

в) координатите на тежиштето;

г) плоштината на триаголникот ABC.

11) Точките $A(-2, -1)$, $B(0, 2)$ и $C(4, y_3)$ се темиња на триаголникот ABC, чија плоштина е $P = 7$. Одреди ја ординатата y_3 на точката C.

5 ОПШТ ВИД РАВЕНКА НА ПРАВА

Потсети се!

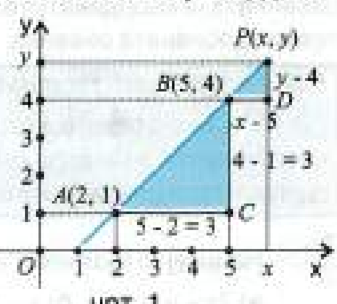
- Со колку точки е определена една права?
- Колку прави минуваат низ една точка?
- Низ кои било две различни точки минува една и само една права.
- Нацртај го графикот на линеарната функција $2x - y = 1$.

А Една од задачите на аналитичката геометрија е: ако е дадена равенката на некоја функција, да се нацрта нејзиниот график.

Втора задача на аналитичката геометрија е ако се познати својствата на некоја функција, да ја напишеме нејзината равенка.

Знаејќи дека низ две различни точки минува само една права, наша задача е да ја напишеме нејзината равенка.

1) Дадени се точките $A(2, 1)$ и $B(5, 4)$. Одреди ја зависноста меѓу координатите на точките A и B, и која било точка $P(x, y)$ од правата што минува низ точките A и B.



црт. 1

Согледај го решението:

- Низ точките A и B повлекуваме прави паралелни со x – оската.
- Низ точките B и P повлекуваме прави паралелни со y – оската.
- Какви се меѓу себе ΔACB и ΔBDP?

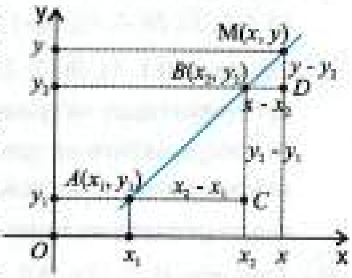
- $\Delta ACB \sim \Delta BDP$, па од сличноста следува $(x - 5) : 3 = (y - 4) : 3$ од каде $x - 5 = y - 4$, т.е. $x - y - 1 = 0$.

Воочуваш дека зависноста меѓу координатите на точките A, B и P е искажана со една линеарна равенка.

Теорема: Секоја права во координатната рамнина може да се изрази со равенка од прв степен, во однос на координатите x и y на која било точка од правата.

Доказ:

- Нека $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ се дадени точки и нека $M(x, y)$ е која било точка од правата што минува низ точките A и B.
- Низ точките A и B повлекуваме прави паралелни со x – оската.
- Низ точките B и M повлекуваме прави паралелни со y – оската.
- Нека пресечните точки на повлечените прави се C и D.



црт. 2

- $\Delta ACB \sim \Delta BDM$. Зошто?

Од сличноста на триаголниците следува $\dfrac{\overline{DM}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$ т.е. $\dfrac{y - y_2}{x - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ од каде $(y - y_2)(x_2 - x_1) = (x - x_2)(y_2 - y_1)$.

По извршеното сведување се добива равенката

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

Разликите $y_1 - y_2$, $x_2 - x_1$ и $x_1y_2 - x_2y_1$ се константни броеви за која било точка M, па можеме да ги означиме со A, B и C соодветно. Тогаш равенката е од видот

$$Ax + By + C = 0$$

кој се вика **општ вид равенка на права**.

Таа го изразува условот при кој точката $M(x, y)$ лежи на правата p. Значи, координатите на секоја точка $M(x, y)$ што лежи на правата p ја задоволуваат равенката, а координатите на точките што не лежат на правата p, не ја задоволуваат добиената равенка.

Важи и обратната теорема:

Секоја равенка од видот $Ax + By + C = 0$, каде A, B и C се константни коефициенти и такви што барем еден од коефициентите A или B е различен од нула, претставува равенка на права.

2 Нацртај го графикот на равенките:

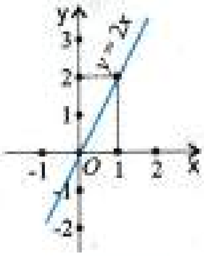
а) $2x - y = 0$; б) $x - 2 = 0$; в) $3y + 5 = 8$.

Согледај го решението:

а) Колку е коефициентот C во оваа равенка?

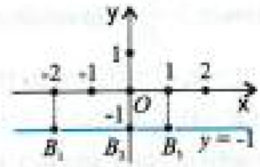
x	0	1
y	0	2

Воочи дека графикот минува низ $O(0, 0)$ (црт.3).



црт. 3

црт. 4



црт. 5

б) Правата $x - 2 = 0$ е идентична со $x + 0 \cdot y - 2 = 0$, која ја задоволуваат координатите на точките $A(2, y)$, каде што y е кој било реален број, т.е. $A_1(2, -1)$, $A_2(2, 0)$, $A_3(2, 2)$ итн. црт. 4.

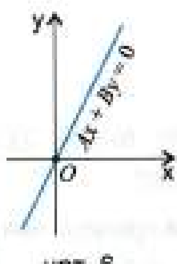
в) Правата $3y - 5 = -8$ е идентична со $0 \cdot x + 3y + 3 = 0$, која ја задоволуваат координатите на точките $B(x, -1)$, каде што x е кој било реален број, т.е. $B_1(-2, -1)$, $B_2(0, -1)$, $B_3(1, -1)$ итн. црт. 5.

Б 3 Каква положба има правата $Ax + By + C = 0$, во рамнината ако:

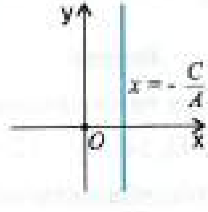
а) $C = 0$; б) $B = 0$; в) $A = 0$; г) $A = 0, C = 0$; д) $B = 0, C = 0$.

Согледај го решението:

а) Ако $C = 0, A \neq 0$ и $B \neq 0$ тогаш равенката е од видот $Ax + By = 0$. Координатите на координатниот почеток $O(0, 0)$ ја задоволуваат равенката, $Ax + By = 0$. Значи, правата од видот $Ax + By = 0$ минува низ координатниот почеток црт. 6.



црт. 6



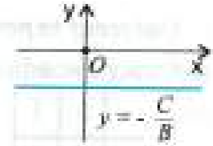
црт. 7

б) Ако $B = 0$, $A \neq 0, C \neq 0$, тогаш равенката е од видот $Ax + C = 0$ или $x = -\frac{C}{A}$.

Тоа значи дека сите точки на правата имаат иста апсциса $x = -\frac{C}{A}$, т.е. правата е паралелна со y – оската и е на растојание $\left|-\frac{C}{A}\right|$ единици од неа црт.7.

в) Ако $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, тогаш равенката е од видот

$By + C = 0$ или $y = -\frac{C}{B}$.



црт. 8

Тоа значи дека сите точки на правата имаат иста ордината $y = -\frac{C}{B}$, т.е., правата е паралелна со x – оската и е на растојание $\left|-\frac{C}{B}\right|$ единици од нея црт.8.

г) Ако $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$, тогаш $y = 0$, е равенка на x – оската.

д) Ако $B = 0$, $C = 0$, $A \neq 0$, тогаш $x = 0$ е равенка на y – оската.

Решавајќи ја оваа задача ја докажавме обратната теорема.

4 Одреди ги пресечните точки на правата $x - y + 1 = 0$ со координатните оски.

5 Одреди ги пресечните точки на правата $Ax + By + C = 0$ со координатните оски.

Согледај го решението:

- Пресечната точка со x – оската има ордината $y = 0$.
- Заменувајќи во равенката добиваме $Ax + C = 0$ од каде $x = -\frac{C}{A}$.

  Значи, пресекот со x – оската е $M\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$.
- Пресечната точка со y – оската има апсциса $x = 0$.
- Заменувајќи во равенката добиваме $By + C = 0$ од каде $y = -\frac{C}{B}$.

  Значи, пресекот со y – оската е $N\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

Задачи

1. Која точка лежи на правата: а) $M(2, 3)$, $4x - y = 0$; б) $M(4, -2)$, $8x - 7y = 46$; в) $P(-3, -1)$, $5x - 3y + 12 = 0$; г) $Q(-4, 7)$, $x - 2y = 10$?
2. Каква положба имаат во координатната рамнина правите, чии равенки се: а) $3x + 6 = 0$; б) $2y - 3 = 0$; в) $3x - y = 0$; г) $2y = 0$; д) $3x = 0$. Нацртај ги нивните графици.
3. Во следните равенки одреди го непознатиот коефициент, така што точката M да лежи на правата p.

   а) $Ax + 3y - 7 = 0$, $M(-2, 9)$; б) $2x + By + 6 = 0$, $M(-6, -5)$;

   в) $2x + 3y + C = 0$, $M(-4, 3)$

4. Дадена е општата равенка на правата $2x - y + 3 = 0$. Одреди ги пресечните точки со координатните оски.

5. Во равенката на правата $(m+2)x + (2m-3)y + 3m + 5 = 0$ одреди го параметарот m, така што правата:

а) даминува низ координатниот почеток; б) да е паралелна со x – оската;

в) да е парелелна со y – оската; г) да минува низ точката $M(2, -2)$.

6 РАВЕНКА НА ПРАВА НИЗ ДВЕ ТОЧКИ. СЕГМЕНТЕН ВИД НА РАВЕНКА НА ПРАВА

А 1. Дадени се точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Напиши ја равенката на правата одредена со тие точки.

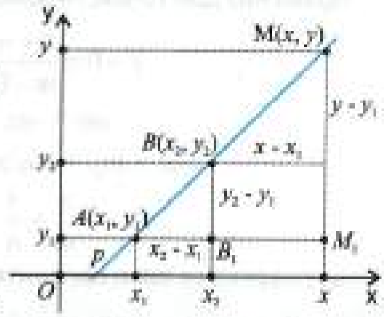
Согледај го решението:

- Низ точките A и B минува единствена права. Нека точката $M(x, y)$ е која било точка од правата.
- $\Delta AM_1M \sim \Delta AB_1B$. (Зошто?)
- Од сличноста на триаголниците (црт.1)

следува $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ или

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$$

што претставува **равенка на права низ две точки**.



црт. 1

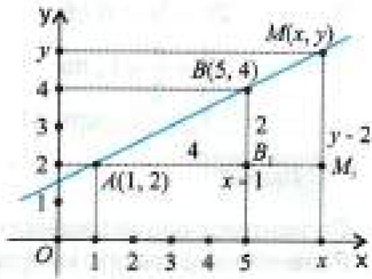
2. Дадени се точките $A(1, 2)$ и $B(5, 4)$. Напиши ја равенката на правата одредена со тие точки.

Согледај го решението:

- $\Delta AM_1M \sim \Delta AB_1B$.
- $\dfrac{y-2}{x-1} = \dfrac{2}{4}$; $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x-1)$; $x - 2y + 3 = 0$.
- Со примена на формулата

$y - y_1 = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$ имаме:

$y - 2 = \dfrac{4-2}{5-1}(x-1)$, т.е. $x - 2y + 3 = 0$.



црт. 2

3. Даден е триаголникот ABC, $A(2, 3)$, $B(-4, 1)$ и $C(2, -3)$. Напиши ја равенката на

а) страната AB; б) тежишната линија повлечена од темето A.

Ако точките A и B лежат на права што е паралелна со y – оската, тогаш равенката на права низ две точки користи ја во следниов вид:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1).$$

Запомни!

Равенката:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

претставува равенка на права што минува низ точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

4 Напиши равенка на права што минува низ точките $A(m, 0)$ и $B(0, n)$.

Согледај го решението:

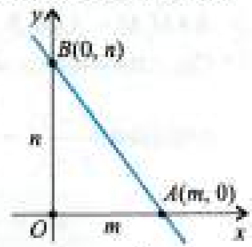
Низ точките A и B минува единствена права. Во формулата за равенка на права низ две точки, ги заменуваме координатите на дадените точки, т.е.

$$y - 0 = \frac{0 - n}{m - 0}(x - m);$$

$$my = -nx + mn;$$

$$nx + my = mn / :mn, \ (mn \neq 0)$$

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$



црт. 3

Оваа равенка се вика **сегментен вид** равенка на права.

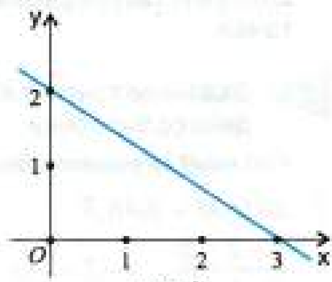
5 Равенката на правата $2x + 3y - 6 = 0$ доведи ја во сегментен вид. Нацртај го графикот на правата користејќи ги сегментите.

Согледај го решението:

$$2x + 3y = 6 / :6;$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1, \text{ па}$$

$$m = 3, n = 2; \text{ (црт. 4).}$$



црт. 4

Воочи!

Сегментниот вид на равенка на права овозможува брза конструкција на правата. Равенка на права што минува низ координатниот почеток, не може да се запише во сегментен вид, бидејќи во тој случај $m = 0$ и $n = 0$.

Според тоа, секоја права што не минува низ координатниот почеток, може да се претстави со равенка во сегментен вид и обратно, секоја равенка од видот $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ определува права што на координатните оски x и y отсекува отсечки со должина $|m|$ и $|n|$ соодветно.

B 6 Равенката на правата $Ax + By + C = 0$ доведи ја во сегментен вид.

Согледај го решението:

- $Ax + By = -C$; $\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$; $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$, следува $m = -\frac{C}{A}$, $n = -\frac{C}{B}$.

7 Напиши равенка на права, ако m и n соодветно се:

а) 1 и -1; б) 2 и -3; в) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

Согледај го решението в):

- $\frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$; $\frac{3x}{2} + \frac{4y}{3} = 1$, т.е. $9x + 8y - 6 = 0$.

Запомни!

Равенката $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ се вика сегментен вид равенка на права.

m – сегмент (дел) на x – оската; n – сегмент (дел) на y – оската.

8 Одреди ја плоштината на триаголникот што правата $4x + 3y - 12 = 0$ го формира со координатните оски.

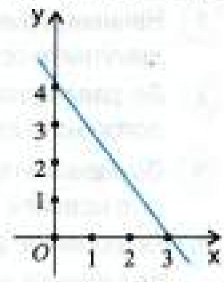
Согледај го решението:

- Дадената равенка треба да ја доведеме во сегментен вид, т.е.

$\frac{4x}{12} + \frac{3y}{12} = 1$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$. Значи, $m = 3$, $n = 4$.

- Триаголникот е правоаголен со катети m и n, па

$P = \frac{m \cdot n}{2}$, т.е. $P = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.



црт. 5

9 Во равенката на правата $\lambda x + (\lambda - 2)y - 6 = 0$ да се определи λ така, што должината на отсечката на x – оската да биде два пати поголема од должината на отсечката на y –оската.

Согледај го решението:

- $\lambda x + (\lambda + 2)y - 6 = 0$ /:6; $\frac{\lambda x}{6} + \frac{(\lambda + 2)y}{6} = 1$; $\frac{x}{\frac{6}{\lambda}} + \frac{y}{\frac{6}{(\lambda + 2)}} = 1$; $m = \frac{6}{\lambda}$; $n = \frac{6}{(\lambda + 2)}$.

- Од условот на задачата $m = 2n$, имаме: $\frac{6}{\lambda} = 2\frac{6}{(\lambda + 2)}$; $\lambda + 2 = 2\lambda$; $\lambda = 2$.

10 Во равенката на правата $6x + 5y - 12\lambda = 0$ да се определи λ така, што производот од должините на отсечките на координатните оски да биде 12.

Задачи

1 Напиши равенка на права што минува низ точките

а) $A(-1, 2)$ и $B(2, 1)$; б) $A(3, -4)$ и $B(-2, -3)$.

Добиените равенки на права запиши ги во општ и сегментен вид.

2 Дијагоналите на ромбот, $d_1 = 10$, $d_2 = 4$ земени се за координатни оски. Напиши ги равенките на страните на ромбот, ако за x – оска е земена поголемата дијагонала.

3 Дадена е отсечката AB, $A(2, -1)$ и $B(7, 9)$.
Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $C(1, -2)$ и ја дели отсечката AB во однос $2 : 3$.

4 Равенката на правата напиши ја во сегментен вид, а потоа нацртај го нејзиниот график:
а) $3x - 4y - 24 = 0$; б) $4x + 9y - 6 = 0$;
в) $6x - 20y + 15 = 0$; г) $35x + 9y + 15 = 0$.

5 Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $M(3, 5)$ и на координатните оски отсекува отсечки чии должини се однесуваат како $3 : 4$.

6 Една права минува низ точката $M(4, 1)$, а на координатните оски отсекува отсечки чиј збир на должините е 10. Напиши ја нејзината равенка.

7 Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $B(-5, 4)$, а со координатните оски формира триаголник со плоштина $P = 5$.

8 Во равенката на правата $12x + \lambda y - 60 = 0$ да се определи λ така што должината на отсечката од таа права меѓу координатните оски да биде 13.

9 Во равенката на правата $(2\lambda + 1)x + (3\lambda - 5)y + 4\lambda = 0$ да се определи λ така што правата да биде паралелна со: а) x – оската; б) y – оската.

10 Во равенката $Ax + By - 45 = 0$ да се определат A и B така што збирот од должините на отсечките на координатните оски да биде 14, а нивната разлика да е 4.

7 ЕКСПЛИЦИТЕН ВИД НА РАВЕНКА НА ПРАВА. РАВЕНКА НА ПРАВА ШТО МИНУВА НИЗ ЕДНА ТОЧКА

А **1** Состави равенка на права која на позитивниот дел од y – оската отсекува отсечок со должина 2, а со позитивниот дел на x – оската зафаќа агол $\alpha = 45°$.

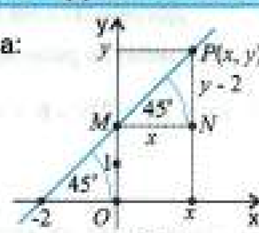
Согледај го решението:

Од ΔMNP следува:

$$\frac{y-2}{x} = tg\alpha$$

$$y - 2 = x \cdot tg45°$$

$$y = x + 2$$

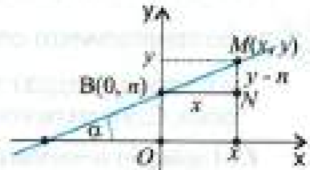


црт. 1

2 Состави равенка на права која на y – оската отсекува отсечок со должина n, а со позитивниот дел на x – оската зафаќа агол α.

Соіледај іо решениеїо:

На цртеж 2 е претставена правата p. Нејзината положба во однос на декартовиот координатен систем е определена со отсечката $\overline{OB} = n$ што правата ја отсекува на y – оската и аголот α што таа го образува со позитивниот дел на x – оската.



црт. 2

Нека $M(x, y)$ е која било точка од правата p. Изрази ја зависноста меѓу координатите x и y на точката M, аголот α и отсечката n.

Низ точката B повлекуваме права паралелна со x – оската, а низ M права паралелна со y – оската. Пресечната точка ќе ја обележиме со N.

Од триаголникот MBN следува $tg\alpha = \dfrac{y-n}{x}$, т.е. $y = tg\alpha \cdot x + n$. Ако $tg\alpha = k$, тогаш равенката е од видот

$$y = kx + n.$$

кој се вика **експлицитен вид равенка на права**.

k – се вика коефициент на правец на правата,

n – отсечка (сегмент) што правата ја отсекува на y – оската.

3 Напиши ја равенката на правата која на ординатната оска отсекува отсечка со должина 5, а со позитивниот дел на x – оската формира агол $\alpha = 225°$.

Соіледај іо решениеїо:

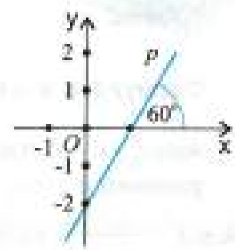
$n = 5$, $k = tg\alpha = tg225° = tg(180° + 45°) = tg45° = 1$, па $y = x + 5$.

4 Нацртај ја правата $y = x\sqrt{3} - 2$.

Соіледај іо решениеїо:

Од равенката на правата $y = x\sqrt{3} - 2$ следува:

$k = \sqrt{3}$, $tg\alpha = \sqrt{3}$, а $\alpha = 60°$ и $n = -2$, црт. 3.



црт. 3

5 Напиши ја равенката на правата која поминува низ координатниот почеток и со позитивниот дел на x – оската зафаќа агол од 135°.

Соіледај іо решениеїо:

$n = 0$, $n = tg135° = -1$.

Значи, $y = -x$ е равенката на правата, која е симетрала на II и IV квадрант.

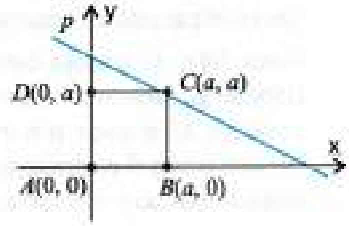
6 Напиши ја равенката на правата што е паралелна со x – оската, а на ординатната оска отсекува отсечка со должина 3.

Согледај го решението:

- Аголот меѓу паралелни прави е 0^o или 180^o, па $tg0^o = tg180^o = 0$, т.е. $k = 0$; $y = 0 \cdot x + 3$.
  Значи, бараната равенка е $y = 3$.

7 Во триаголникот определен со правата $y = -\frac{1}{2}x + 3$ и координатните оски, е впишан квадрат така што две негови страни лежат на координатните оски. Одреди ги координатите на неговите темиња.

Согледај го решението:



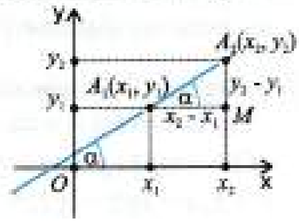
црт. 4

- Нека страната на квадратот е a.
- Координатите на темиња на квадратот се: $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, a)$ и $D(0, a)$.
- Точката C лежи на правата p, па нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, т.е. $a = -\frac{1}{2}a + 3$ од каде што следува

$a = 2$. Значи, точките $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 2)$ и $D(0, 2)$ се темиња на квадратот.

Б **8** Дадени се координатите на две точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$. Да се определи коефициентот на правецот за правата што минува низ точките.

Согледај го решението:



црт. 5

- $\sphericalangle A_2A_1M = \alpha$ (како агли со паралени краци).
- Од ΔA_1MA_2 следува $k = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Воочи!

- Формулата $k = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ има смисла само за $x_2 - x_1 \neq 0$.
- Ако $x_2 - x_1 = 0$, т.е. $x_2 = x_1$, тогаш правата е нормална на x – оската и нејзината равенка е $x = x_1$.

Ако $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ го замениме во равенката на права што минува низ две точки, тогаш равенката е од видот

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

која се вика **равенка на права низ една точка**, со коефициент на правец k.

- Овој вид равенка на права се применува ако е дадена една точка и коефициентот на правецот или некој услов кој треба да го задоволува коефициентот на правецот на правата.

9 Напиши ја равенката на правата која минува низ точките $A(-3, 2)$, а со позитивниот дел од x – оската образува агол $\alpha = 150^o$.

Согледај го решението:

Равенката е од видот $y - y_1 = k(x - x_1)$; $k = tg150^o = tg(90^o + 60^o) = -ctg60^o = = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, па равенката е $y - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + 3)$ или $x\sqrt{3} + 3y + 3\sqrt{3} - 6 = 0$.

Запомни!

Равенката $y = kx + n$ е експлицитен вид равенка на права, а равенката $y - y_1 = k(x - x_1)$ е равенка на права што минува низ една точка.

10 Одреди ги аглите што правите ги образуваат со позивната насока на x – оската, како и отсечката што тие прави ја отсекуваат на ординатната оска:

а) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}}$; б) $y = -7$; в) $x = 3$.

11 Напиши ги равенките на страните на рамнокракиот трапез чии основи се $a = 10$, $b = 6$, а аглите на поголемата основа се 60^o.
За координатни оски да се земаат: големата основа за апсцисна оска, а оската на симетрија на трапезот за ординатна оска.

Согледај го решението:

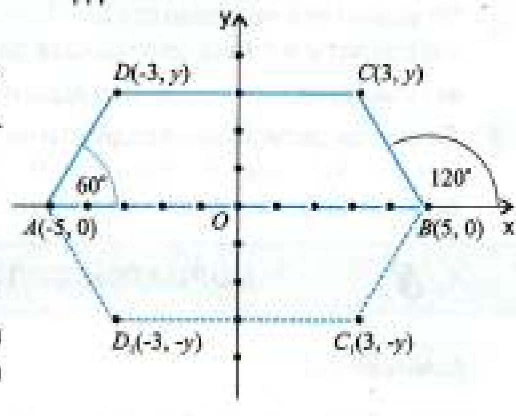
Задачата има две решенија, црт. 6

Според условот на задачата темиња на едниот трапез се:

$A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(3, y)$ и $D_1(-3, y)$,

а на другиот

$A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $D_1(-3, -y)$ и $C(3, -y)$.



црт. 6

Правата BC минува низ точката $B(5, 0)$ и со x – оската формира агол од 120^o. Равенката на правата BC е:

$y - y_1 = k(x - x_1)$, $k = tg120^o = -\sqrt{3}$,

$$y = -\sqrt{3}(x - 5), \text{ т.е.}$$

$$BC: x\sqrt{3} + y - 5\sqrt{3} = 0.$$

Точката $C(3, y)$ лежи на правата BC, па од $3\sqrt{3} + y - 5\sqrt{3} = 0$ следува $y = 2\sqrt{3}$, што претставува равенка на страната CD.

Напиши ги равенките на другите страни на трапезот.

Задачи

1. Одреди ја равенката на права која со позитивната насока на x – оската зафаќа агол $\alpha = 30^o$, а на ординатната оска отсекува отсечка со должина 3.

2. Напиши ја равенката на правата која минува низ точката M и со позитивниот дел на x – оската формира агол α:

   а) $M(2, 5)$, $\alpha = 45^o$; б) $M(-1, 3)$, $\alpha = 135^o$;

   в) $M(-3, -2)$, $\alpha = 300^o$; г) $M(2, 3)$, $\alpha = 150^o$.

3. Во триаголникот определен со правата $y = -3x + 2$ и координатните оски е впишан правоаголник така што две негови страни лежат на координатните оски. Да се определат координатите на неговите темиња, ако се знае дека:

   а) едната страна е три пати поголема од другата;

   б) едната страна е за 1 поголема од другата.

4. Да се определи равенката на правата што минува низ точката $A(3, 1)$, а на ординатната оска отсекува отсечката со должина 5.

5. Да се напише равенката на правата што минува низ точката $A(-1, -5)$, а има аглов коефициент 3.

6. Во равенката на правата $2x - (5\lambda - 2)y - 3 = 0$ да се определи λ така што правата со x – оската да формира агол од 45^o.

7. Во равенката на правата $(3a - 2b + 5)x - (a - b)y + 2a - 5b + 1 = 0$ да се определат a и b така што правата да биде симетрала на:

   а) I квадрант; б) II квадрант.

8. Да се определи за кои вредности на a и b правата $(a + 2b - 3)x + (2a - b + 1)y + 6a + 9 = 0$ е паралелна со апсцисната оска, а ординатната оска ја сече во точката $(0, -3)$.

8 НОРМАЛЕН ВИД РАВЕНКА НА ПРАВА

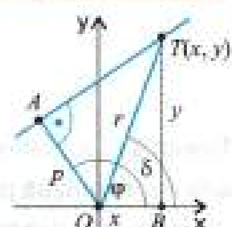
Потсети се!

- $cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta$.
- $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

А Во досегашните разгледувања на права видовме со кои елементи е одредена една права. Правата може да биде определена и со:

– должината p на нормалата повлечена од координатниот почеток до правата ($p > 0$);

– аголот φ што нормалата на правата повлечена од координатниот почеток го зафаќа со позитивниот дел на x – оската, при што $0^o < \varphi < 360^o$.



црт. 1

Нека $T(x, y)$ е која било точка од правата, а δ е аголот што $OT = r$ го формира со позитивниот дел на x – оската.

Од ΔOAT имаме $\frac{p}{r} = \cos(\varphi - \delta)$ или $p = r\cos(\varphi - \delta) = r\cos\varphi\cos\delta + r\sin\varphi\sin\delta$.

Од ΔOBT имаме $x = r\cos\delta$, $y = r\sin\delta$ па растојанието p од координатниот почеток до правата е $p = x\cos\varphi + y\sin\varphi$ или равенката

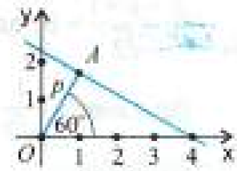
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

Ова се вика нормален или Хессеов вид равенка на права.

1 Нацртај го графикот и напиши ја равенката на права, ако $\varphi = 60^o$ и $p = 2$.

Согледај го решението:

$x\cos60^o + y\sin60^o - 2 = 0$; $x\frac{1}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = 0$; $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$, црт. 2.



црт. 2

Б 2 Равенката $Ax + By + C = 0$ доведи ја во нормален вид

Согледај го решението:

- Ако равенката $Ax + By + C = 0$ ја помножиме со некој број λ, $(\lambda \neq 0)$ ќе се добие равенка $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ која е еквивалентна на дадената.
- Равенките $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ и $x\cos\varphi + y\sin\varphi + p = 0$ се еквивалентни ако нивните коефициенти се еднакви т.е.

$$\lambda A = \cos\varphi, \quad \lambda B = \sin\varphi, \quad \lambda C = -p.$$

- Со квадрирање и собирање на првите две равенства, добиваме:

$$\lambda^2(A^2 + B^2) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

- Оттука следува

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \text{ па } \cos\varphi = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\ \sin\varphi = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\ p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

По замената на λ во равенката $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$, имаме $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$.

Од $p > 0$, следува дека знакот пред коренот треба да е спротивен на знакот од слободниот член.

3 Правата: а) $12x + 5y - 10 = 0$; б) $2x + y - 4 = 0$; трансформирај ја во нормален вид.

Согледај го решението:

- а) Во равенката на правата $A = 12$, $B = 5$, $C < 0 \Rightarrow \lambda > 0$, т.е.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{1}{\sqrt{169}} = \frac{1}{13}, \text{ па } 12x + 5y - 10 = 0 \,/\cdot\frac{1}{13};$$

$\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-\frac{10}{13}=0$ или ако ја примениме формулата $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$, добиваме

$$\frac{12x+5y-10}{\sqrt{12^2+5^2}}=0\text{, т.е. }\frac{12x+5y-10}{13}=0.$$

4 Одреди го аголот што нормалата на правата $x - y + 1 = 0$ повлечена од координантниот почеток го зафаќа со позитивниот дел на x – оската, како и должината на таа нормала.

Согледај го решението:

Ќе ја сведеме равенката во нормален вид: $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\frac{x-y+1}{-\sqrt{2}}=0$, од каде што следува: $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Од $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ следува $\varphi = 135^o$.

Запомни!

Нормален вид на равенка на права $Ax + By + C = 0$, е:

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

каде квадратниот корен и слободниот член C се со спротивни знаци.

5 Равенката на правата $y = kx + n$ доведи ја во нормален вид.

Согледај го решението:

Од кој вид е дадената равенка?

Равенката ја доведуваме во општ вид, т.е. $kx - y + n = 0$, а нормалниот вид е:

$$\frac{kx-y+n}{\pm\sqrt{k^2+1}}=0,$$

каде пред квадратниот корен се зема знак спротивен на знакот на n.

Задачи

1 Напиши равенка на права, ако е:

а) $\varphi = 30^o$, $p = 2$; б) $\varphi = 150^o$, $p = 2$;

в) $\varphi = 45^o$, $p = 1$; г) $\varphi = 135^o$, $p = 1$.

2 Следните равенки на права запиши ги во нормален вид:

а) $4x + 3y + 30 = 0$; б) $7x - 24y - 100 = 0$; в) $x - y + 2 = 0$;

г) $y = ax + 2$; д) $4y + 3 = 0$; ѓ) $4x + 3 = 0$;

е) $x\sqrt{3} - y\sqrt{6} + 7 = 0$; ж) $y = -\frac{3}{4}x + 5 = 0$; з) $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$.

3 Одреди го аголот што нормалата на правата го формира со позитивниот дел на x – оската:

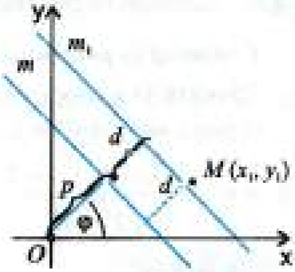
а) $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$; б) $\sqrt{3}x - y - 4 = 0$; в) $x + y + 2 = 0$.

9 РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ПРАВА

Потсети се!

- Што е растојание од точка до права?
- Што е растојане меѓу две паралелни прави?

1 Дадена е равенката на правата $m: Ax + By + C = 0$ и точката $M(x_1, y_1)$ што не лежи на дадената права. Одреди го растојанието од точката M до правата m.



црт. 1

Согледај го решението:

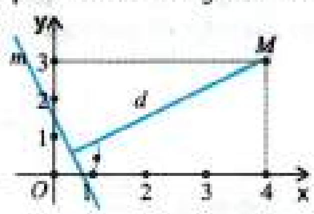
I случај: Точката M и координатниот почеток лежат на различни страни од правата m, црт. 1.

- Нека е $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ равенката на правата m во нормален вид.
- Низ точката M повлекуваме права m_1 која е определена со аголот φ и растојанието од координатниот почеток $p + d$. Нормалниот вид на правата m_1 е:
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - (p + d) = 0.$$
- Бидејќи точката $M(x_1, y_1)$ лежи на правата m_1, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, т.е.
$$x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - (p + d) = 0.$$
Оттука следува дека $d = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p$ е бараното растојание.
- Ако равенката на правата е дадена во општ вид, тогаш претходно треба да ја трансформираме во нормален вид.
Во овој случај растојанието d од точката $M(x_1, y_1)$ до правата $Ax + By + C = 0$ ќе се пресмета по формулата
$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$
пред коренот се зема знак спротивен на слободниот член C.

2 Одреди го растојанието од точката $M(4, 3)$ до правата m: $2x + y - 2 = 0$.

Согледај го решението:

- Точката M и координатниот почеток лежат на различни страни од правата m, црт. 2.
$$d = \frac{2\cdot 4 + 1\cdot 3 - 2}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$



црт. 2

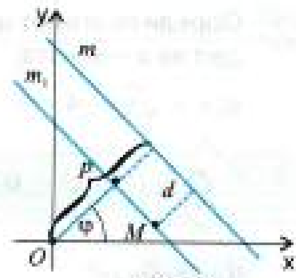
II случај: Точката M и координатниот почеток лежат од иста страна на правата m, црт. 3.

- Во овој случај нормалниот вид на равенката на правата m_1 е:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - (p - d) = 0, \text{ т.е.}$$
$$x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - (p - d) = 0,$$

од каде што

$$d = -(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p) \text{ или}$$



црт. 3

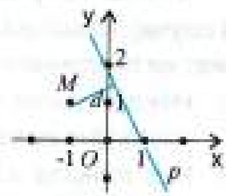
- $d = -\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$, пред коренот се зема знак спротивен на знакот на C.

3 Одреди го растојанието од точката $M(-1, 1)$ до правата p: $2x + y - 2 = 0$.

Согледај го решението:

- Точката M и координатниот почеток лежат од иста страна на правата p, црт.4.

- $d = -\dfrac{2\cdot(-1)+1\cdot1-2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.



црт. 4

Запомни!

Растојанието од дадена точка $M(x_1, y_1)$ до дадена права $Ax + By + C = 0$ се одредува со формулата $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

4 Одреди го растојанието од координатниот почеток до правата $3x - 4y + 6 = 0$.

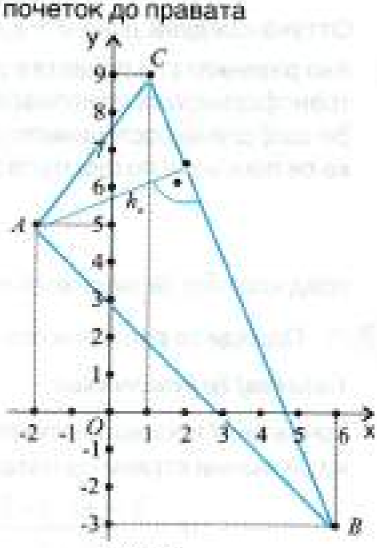
5 Одреди ги висините на ΔABC, ако се познати координатите на неговите темиња: $A(-2, 5)$, $B(6, -3)$ и $C(1, 9)$.

Согледај го решението:

- Одреди ја равенката на правата што минува низ точките B и C, црт. 5.
- Ако точно работиш, треба да ја добиеш равенката $12x + 5y - 57 = 0$.
- Одреди го растојанието од точката A до правата BC.

$$d = \frac{|12\cdot(-2)+5\cdot5-57|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{56}{13}$$

Значи, $h_a = \dfrac{56}{13}$.



црт. 5

6 Одреди го растојанието меѓу двете паралелни прави $3x - 4y - 10 = 0$, $6x - 8y + 5 = 0$.

Согледај го решението:

Оваа задача можеме да ја решиме на повеќе начини. Ќе се задржиме на два од нив.

I начин: На една од правите земаме произволна точка $M(x_1, y_1)$ и го бараме нејзиното растојание до другата права.

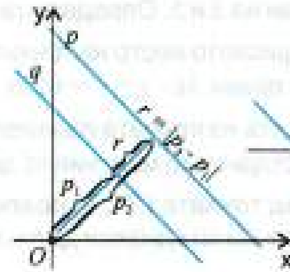
Нека $M(2, y_1)$ лежи на правата $3x - 4y - 10 = 0$.

Оттука следува: $3 \cdot 2 - 4y_1 - 10 = 0$; $4y_1 = -4$; $y_1 = -1$.

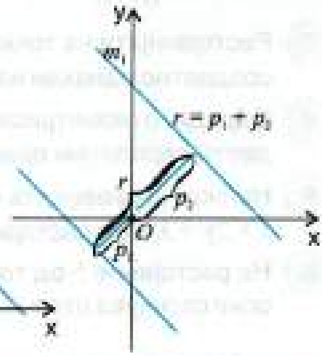
Значи $M(2, -1)$, а нејзиното растојание до правата $6x - 8y + 5 = 0$ е:

$$d = \frac{|6 \cdot 2 - 8(-1) + 5|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{12 + 8 + 5}{10} = \frac{25}{10} = 2{,}5 .$$

II начин (упатство): Одреди ги растојанијата p_1 и p_2 од координатниот почеток до едната и другата права. Ако координатниот почеток е од иста страна на правите тогаш $d = |p_1 - p_2|$, црт. 6, ако координатниот почеток O е меѓу правите тогаш $d = p_1 + p_2$, црт. 7.



црт. 6



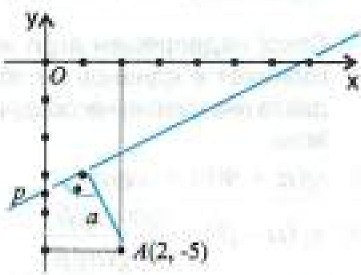
црт. 7

7 Точката $A(2, -5)$ е теме на еден квадрат, а една негова страна се наоѓа на правата p: $x - 2y - 7 = 0$. Да се пресмета неговата плоштина.

Согледај го решението:

Растојанието од точката $A(2, -5)$ до правата p: $x - 2y - 7 = 0$ е еднакво со страната a на квадратот, т.е.

$$a = \left| \frac{1 \cdot 2 - 2(-5) - 7}{\sqrt{1+4}} \right| = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} .$$



црт. 8

Плоштината на квадратот е $P = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$.

8 Дадени се равенките на две страни на еден правоаголник $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ и едно негово теме $A(-2, 1)$. Пресметај ја неговата плоштина.

Задачи

1 Пресметај го растојанието d од дадената точка до дадената права, ако:

а) $A(2, 7)$, p: $12x + 5y - 7 = 0$; б) $A(-3, 2)$, p: $4x - 7y + 26 = 0$.

(2) Провери дали правите $2x + \sqrt{5}y - 15 = 0$ и $\sqrt{11}x - 5y + 30 = 0$ допираат еден ист круг чиј центар е во координатниот почеток. Колкав е радиусот на тој круг?

(3) Пресметај го растојанието од правата p: $a(x - a) + b(y - b) = 0$ до координатниот почеток.

(4) Дијагоналите на ромбот со должина 30 и 16 се земени за координатни оски. Пресметај го растојанието меѓу страните на ромбот.

(5) На ординатната оска одреди ја точката што е еднакво оддалечена од координатниот почеток и од правата $3x - 4y + 12 = 0$.

(6) На апсцисната оска одреди ја точката што се наоѓа на растојание $d = a$ од правата $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

(7) Растојанијата на точката M од правите $5x - 12y - 13 = 0$ и $3x - 4y - 19 = 0$ се соодветно еднакви на 3 и 5. Определи ги координатите на точката M.

(8) Одреди го геометриското место на точките што се еднакво оддалечени од двете паралелни прави $3x - y + 7 = 0$, $3x - y - 3 = 0$.

(9) Напиши ја равенката на правата пареллелна со правите $x + 2y = 1$ и $x + 2y = 3$, која растојанието меѓу нив го дели во однос $1 : 3$.

(10) На растојание 5 од точката $C(4, 3)$ повлечи права која на координатните оски отсекува отсечки со еднакви должини.

10 АГОЛ МЕЃУ ДВЕ ПРАВИ

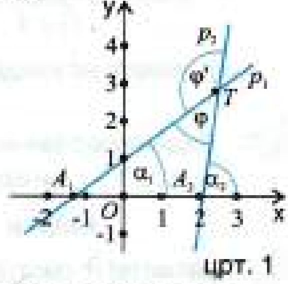
Потсети се!

- Секој надворешен агол на триаголникот е еднаков на збирот на двата внатрешни несоседни со него агли.
- $tg(\alpha + 90^\circ) = -ctg\alpha$
- $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$
- Две прави што се сечат образуваат четири агли.
- Какви се тие агли меѓу себе?

А 1 Одреди го аголот меѓу правите $y = \frac{3}{4}x + 1$ и $y = 7x - 14$.

Согледај го решението:

- Правите ќе ги претставиме графички, црт. 1.



црт. 1

- Воочи, правите формираат остар агол φ или тап агол $\varphi' = 180^\circ - \varphi$.

Вообичаено под агол меѓу две прави го земаме помалиот (остриот) агол.

■ Аголот α_2 е надворешен агол на ΔA_1A_2T црт. 1 па оттука следува:

$$\varphi + \alpha_1 = \alpha_2, \text{ т.е. } \varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

■ Со примена на адиционите теореми $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1}$.

■ Од равенките на правите имаме $tg\alpha_1 = \dfrac{3}{4}$; $tg\alpha_2 = 7$, па

$$tg\varphi = \frac{7 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}\cdot 7} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{4}} = 1. \text{ Значи } \varphi = 45^o.$$

2 Одреди го аголот меѓу правите $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

Согледај го решението:

■ Ако во равенството $tg\varphi = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1}$ замениме $tg\alpha_1 = k_1$ и $tg\alpha_2 = k_2$, тогаш аголот меѓу две прави е даден со:

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}}$$

каде што k_1 е коефициент на правец на едната права; k_2 е коефициент на правец на другата права.

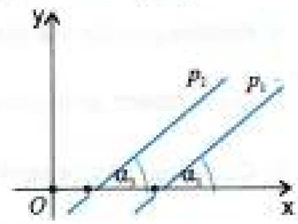
■ Со примена на оваа формула се одредува или $tg\varphi > 0$, или $tg\varphi < 0$. Во првиот случај е определен остар, а во вториот тап агол меѓу дадените прави.

Б Две прави се паралелни ако и само ако имаат еднакви коефициенти на правец, црт. 2.

Согледај го решението:

■ Ако правите p_1 и p_2 се паралелни, тогаш тие зафаќаат исти агли со позитивниот дел на x – оската, т.е. $\alpha_2 = \alpha_1$, па и $tg\alpha_2 = tg\alpha_1$.
Од $tg\alpha_2 = k_2$ и $tg\alpha_1 = k_1$, следува:

$$\boxed{k_2 = k_1}$$



црт. 2

■ Обратно, ако $k_2 = k_1$ тогаш $tg\alpha_2 = tg\alpha_1$ т.е. $\alpha_2 = \alpha_1$, што значи дека правите p_1 и p_2 се паралелни.

3 Низ точката $A(-3, 2)$ повлечи права p_2 што е паралелна со правата p_1: $2x - 3y + 4 = 0$.

Согледај го решението:

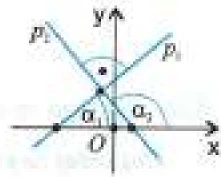
■ Равенката на правата p_1 ја доведуваме во експлицитен вид т.е. $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$.

следува, $k_1 = \frac{2}{3}$. Коефициентот на правецот на правата $Ax + By + C = 0$ може да се одреди и со примена на формулата $k = -\frac{A}{B}$.

- Од условите за паралелност на правите p_1 и p_2 следува $k_2 = k_1 = \frac{2}{3}$.
- Од равенката на правата низ една точка имаме

$$y - y_1 = k(x - x_1) \text{ т.е. } y - 2 = \frac{2}{3}(x + 3) \text{ или } 2x - 3y + 12 = 0.$$

4 Докажи дека правите се заемно нормални, ако и само ако коефициентите на правите им се реципрочни со спротивен знак.



црт. 3

Согледај го доказот:

- Ако правите p_1 и p_2 се заемно нормални тогаш е $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^o$, црт. 3.

$$tg\alpha_2 = tg\,(\alpha_1 + 90^o) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1}, \text{ т.е. } k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ или } k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Обратно, ако е $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, тогаш $tg\alpha_2 = -\frac{1}{tg\alpha_1} = -ctg\alpha_1 = tg\,(\alpha_1 + 90^o)$.

Оттука следува $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^o$, значи правите p_1 и p_2 се заемно нормални.

5 Низ точката $A(-3, 2)$ повлечи права p_2 што е нормална на правата p_1: $2x - 3y + 4 = 0$.

Согледај го решението:

- Коефициентот на правецот на дадената права $k_1 = -\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$.
- Од условот за нормалност следува $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{2}$.
- Со замена во равенката на права низ една точка $y - y_1 = k(x - x_1)$ имаме

$$p_2\text{: } y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 3) \text{ т.е. } 3x + 2y + 5 = 0.$$

6 Дадени се две прави p_1: $3x - 4y + 8 = 0$, p_2: $5y - 4mx - 7 = 0$. Одреди го m така што правите да се заемно:

а) нормални; б) паралелни.

Согледај го решението:

- а) Равенките на правите ги доведуваме во експлицитен вид:

$$p_1\text{: } y = \frac{3}{4}x + 2, \quad k_1 = \frac{3}{4}; \qquad p_2\text{: } y = \frac{4}{5}mx + \frac{7}{5}, \quad k_2 = \frac{4}{5}m.$$

Од условот за нормалност $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ следува $\frac{4}{5}m = -\frac{1}{\frac{3}{4}}$, т.е. $m = -\frac{5}{3}$.

7 Дадени се равенките на правите p_1: $4x - 3y + 1 = 0$, p_2: $2x - my + 5 = 0$. Одреди го m така што правите да се сечат под агол од 45°.

Согледај го решението:

Од равенките на правите: $p_1: y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$, $\quad k_1 = \frac{4}{3}$, а од

$p_2: y = \frac{2}{m}x + \frac{5}{m}$, $\quad k_2 = \frac{2}{m}$, па од $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = tg\varphi$ имаме:

$$\frac{\frac{2}{m} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{2}{m}\cdot\frac{4}{3}} = 1 \qquad \text{или} \qquad \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{m}}{1 + \frac{2}{m}\cdot\frac{4}{3}} = -1;$$

$$6 - 4m = 3m + 8; \qquad 4m - 6 = 3m + 8;$$

$$m = -\frac{2}{7} \qquad \text{или} \qquad m = 14.$$

Значи, за $m = -\frac{2}{7}$ или $m = 14$ дадените прави образуваат агол од 45°.

8 Низ точката $A(1,2)$ повлечи права: а) паралелна; б) нормална; на правата $y = \frac{2}{3}x - 1$.

Задачи

1. Напиши ја равенката на симетралата на отсечката AB, $A(5, 7)$, $B(9, 5)$.

2. Даден е ΔABC, $A(3, 3)$, $B(11, 6)$, $C(7, 12)$. Одреди ја равенката на висината повлечена од темето C.

3. Одреди го аголот помеѓу правите:

   а) $y = x$, $y = 3x + 5$; б) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

4. Одреди ги аглите на триаголникот ABC, $A(1, 3)$, $B(5, 1)$, $C(3, 7)$.

5. Низ точката $M(3, 5)$ повлечи права која со правата $3x - 2y + 7 = 0$ формира агол од 45°.

6. За кој агол треба да се заврти правата $3x + y - 6 = 0$ околу својата пресечна точка со y – оската за да ја сече правата $x - 3y - 6 = 0$ под агол од 45°?

7) За кој агол треба да се заврти правата $2x - 3y + 5 = 0$ околу својата точка $M(2, 3)$ за да на x – оската отсекува отсечка со должина 4?

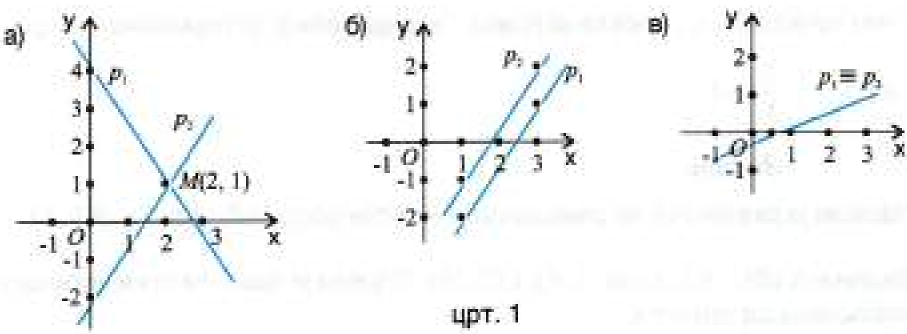
8) Одреди го геометриското место на точки што се еднакво оддалечени од краците на аголот што го формираат правите $x - 3y + 5 = 0$, $3x - y - 2 = 0$.

11 ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ ПРАВИ

Потсети се!

- Системот равенки $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ може да: а) има единствено решение; б) нема ниту едно решение; в) има бесконечно многу решенија.
- Каква заемна положба може да имаат две прави во рамнина?
- Две прави се паралелни ако нивните коефициенти на правци се еднакви.

1 Нека се дадени правите p_1 и p_2: а) $3x + 2y - 8 = 0$ и $3x - 2y - 4 = 0$;
б) $3x - 2y - 7 = 0$ и $6x - 4y - 10 = 0$; в) $2x - 5y - 1 = 0$ и $4x - 10y - 2 = 0$.
Одреди ја заемната положба на правите.



црт. 1

Воочи!

а) Правите се сечат во точката $M(2, 1)$; б) правите се паралелни;
в) правите се совпаѓаат, црт. 1.

2 Нека се дадени правите p_1 и p_2, чии равенки се: $p_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $p_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$.
Одреди ги условите кога правите:
а) се сечат; б) се паралелни; в) се совпаѓаат.

Согледај го решението:

а) Пресечната точка $M_0(x_0, y_0)$ лежи на двете прави, па затоа нејзините координати ќе ги задоволуваат истовремено равенките на правите. Координатите на M_0 ќе ги добиеме како решение на системот

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$$x_0 = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

1. Системот има единствено решение, т.е. правите се сечат само ако

$$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0, \text{ т.е. } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

2. Ако $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ и барем еден од изразите $C_1B_2 - C_2B_1$ или $A_1C_2 - A_2C_1$ не е еднаков на нула, тогаш системот нема решение, т.е. правите се паралелни и различни.

Од $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ следува $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, од $C_1B_2 - C_2B_1 \neq 0$ следува $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

Оттука следува $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

3. Ако $A_1B_1 - A_2B_2 = 0$, $C_1B_2 - C_2B_1 = 0$ и $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$, тогаш системот има бесконечно решенија, т.е. правите се совпаѓаат.

Оттука следува дека $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Одреди го односот на коефициентите на правите во задачата 1.

3 Одреди ги координатите на тежиштето на триаголникот чии равенки на страните се: a: $7x + y + 20 = 0$, b: $x - 2y - 10 = 0$, c: $x + y - 4 = 0$.

4 Напиши равенка на права која минува низ пресекот на правите p: $x - y + 4 = 0$ и q: $4x - 2y - 20 = 0$, а е: а) паралелна; б) нормална со правата r: $2x - 3y - 1 = 0$.

Согледај го решението:

а) Го одредуваме пресекот на правите $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 14 \\ y = 18 \end{cases}$, $M(14, 18)$.

Бидејќи правата треба да биде паралелна со правата r, $k = k_r = \frac{2}{3}$.

Бараната права минува низ точката $M(14, 18)$ и има коефициент на правец $k = \frac{2}{3}$, т.е. $y - y_1 = k(x - x_1)$; $y - 18 = \frac{2}{3}(x - 14)$; $2x - 3y + 26 = 0$.

5 Одреди за која вредност на коефициентот k, правата $y = kx + 3$ минува низ пресекот на правите $y = 2x + 1$ и $x - y + 5 = 0$.

Запомни!

Правите $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ се:

1. сечат, ако $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$; 2. паралелни и различни ако $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

3. совпаѓаат ако $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Задачи

1. Дадени се две точки: $A(-4, 2)$ и $B(3, 1)$.
Одреди ја равенката на правата што е паралелна со AB, а y – оската ја сече во точката $C(0, -2)$.

2. За која вредност на параметарот m правите $(m - 2)x + my - 2 = 0$ и $6x + (m + 8)y - m - 2 = 0$ се совпаѓаат?

3. Одреди го m така да правите $mx - 3y - 2 = 0$ и $3x - my - m + 1 = 0$:
а) се паралелни; б) се совпаѓаат.

4. Напиши равенка на права што минува низ точката $A(1, 2)$, така што точките $B(3, 3)$ и $C(5, 2)$ да се на еднакво растојание од правата.

5. Равенките на страните на триаголникот се: $y - x + 3 = 0$, $7y - 2x + 6 = 0$, $3y + 2x + 14 = 0$. Одреди:
а) периметарот; б) плоштината; в) должината на висините;
г) должината на тежишните линии на триаголникот.

6. Состави равенка на права што минува низ пресечната точка на правите $2x + y - 2 = 0$ и $x - 5y - 23 = 0$ и низ средишната точка на отсечката MN, $M(5, -6)$ и $N(-1, -4)$.

7. Напиши ја равенката на правата што минува низ пресекот на правите $2x + 7y - 8 = 0$ и $3x + 2y + 5 = 0$, а со правата $2x + 3y - 7 = 0$ формира агол од $45°$.

8. Одреди ја ортогоналната проекција на точката $A(2, 4)$ врз правата
$x + 3y - 3 = 0$.

9. Одреди ја точката A што е симетрична на точката $B(-3, -4)$ во однос на правата $2x + 3y + 5 = 0$.

12 КРУЖНИЦА

Потсети се!

- Што е кружница?
- Со формулата

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ се одредува растојанието меѓу точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

- Одреди го растојанието меѓу точките $A(3, -1)$, $B(-1, -4)$.

А Во претходниот дел од аналитичката геометрија ја изучивме правата како една од наједноставните линии. Во овој дел, методот на координати ќе го прошириме и на криви линии: кружница, елипса, хипербола и парабола. За нив знаеле уште и старите Грци. Бидејќи методот на координати им бил непознат, тие кривите ги разгледувале како конусни пресеци. Ние ќе ги разгледуваме како *геометриско место на точки* во рамнина.

Запомни!

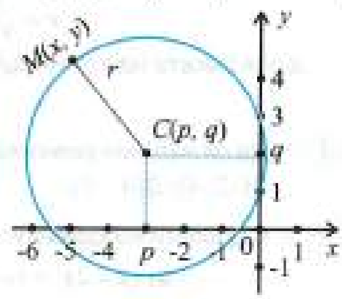
Геометриско место на точки во рамнина е некое множество точки коишто поседуваат некое својство карактеристично само за нив, својство што ги издвојува од сите други точки од рамнината.

Б Кружница е геометриско место на точки во рамнината кои се еднакво оддалечени од една дадена точка од истата рамнина. Дадената (фиксна) точка се вика центар на кружницата, го означуваме $C(p,q)$, а растојанието r, радиус на кружницата.

1 Одреди ја равенката на геометриското место на точки во рамнината што се од точката $C(p, q)$ оддалечени за r.

Согледај го решението:

- Бараното геометиско место на точки $M(x, y)$ од рамнината лежи на кружницата со центар е во точката C и радиус r (црт.1).



црт. 1

- Потребен и доволен услов точката $M(x, y)$ да лежи на дадената кружница е $\overline{CM}=r$, $(r>0)$.
- Според формулата за растојание меѓу две точки имаме:

$$\overline{CM}=\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}, \quad \text{т.е.} \quad \sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=r.$$

Бидејќи $r>0$ следува

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Оваа равенка се вика равенка на кружница (нормален вид равенка на кружница), со центар во точката $C(p, q)$ и радиус r.

2 Напиши ја равенката на кружница со даден центар C и радиус r:

а) $C(-4, 2)$, $r = 1$; в) $C(-1, 0)$, $r = \sqrt{5}$;

б) $C(0, 3)$, $r = 2$; г) $C(0, 0)$, $r = 2{,}5$.

Согледај го решението:

а) Со замена на $p = -4$, $q = 2$ и $r = 1$ во равенката на кружницата имаме:

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

г) Бидејќи $C(0, 0)$, значи $p = q = 0$, па равенката на кружницата е

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 6{,}25.$$

Запомни!

Ако точката $C(p, q)$ е центар на кружницата, а r радиус, тогаш равенката

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

е равенка на кружница дадена во *нормален вид*.

Ако $p = q = 0$, тогаш равенката се вика *централна равенка на кружница*.

$$x^2 = y^2 = r^2$$

3 Да се напише равенка на кружница што минува низ точката $M(7, -3)$, а центарот е во точката $C(3, 0)$.

Согледај го решението:

Радиус на кружницата е $r = \overline{CM}$

$$r = \sqrt{(7-3)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5,$$

а равенката на кружницата е

$$(x - 3)^2 + y^2 = 25.$$

4 Да се напише равенка на кружница чиј дијаметар е отсечката AB, $A(-2, 4)$; $B(4, -5)$.

5 Одреди ги координатите на центарот и радиусот на кружниците чии равенки се:

а) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$; в) $(x + 3)^2 + y^2 = 1$;

б) $x^2 + (y + 4)^2 = 7$; г) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

Согледај го решението:

б) $C(0, -4)$, $r = \sqrt{7}$. Центарот лежи на y – оска.

г) $C(2, 2)$, $r = 2\sqrt{2}$. Бидејќи $p = q$, центарот лежи на симетралата на првиот и третиот квадрант т.е. на правата $y = x$.

6 Која од точките $A(3, 1)$; $B(-2, 0)$, $C(-1, \sqrt{3})$, $D(0, 0)$ лежи на кружницата $x^2 + y^2 = 4$.

Согледај го решението:

- Точката лежи на кружницата ако со замена на координатите на точката во равенката на кружницата, таа станува точно бројно равенство.
  а) $3^2 + 1^2 = 4$, равенството не е точно, значи точката A не лежи на кружницата.

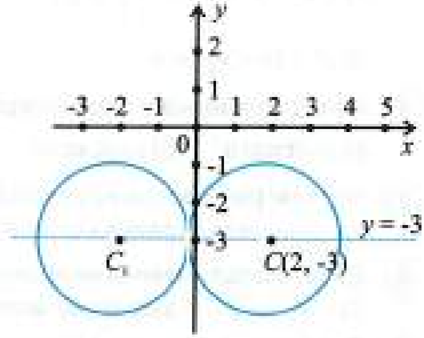
7 Напиши равенка на кружница што ја допира y – оската во точката $M(0, -3)$ со радиус $r = 2$.

Согледај го решението:

- Центарот $C(p, q)$ на кружницата што ја допира y – оската лежи на правата $y = q$, а $p = 2$ или $p = -2$, црт.2.
- Постојат две кружници што го задоволуваат барањето. Центарот на едната кружница е $C(2, -3)$, а на другата $C_1(-2, -3)$.

Бараните равенки се:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4 \text{ или}$$
$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4.$$



Црт. 2

8 Напиши равенка на кружница што ја допира x–оската во точката $M(-3, 0)$ и радиус $r = 3$.

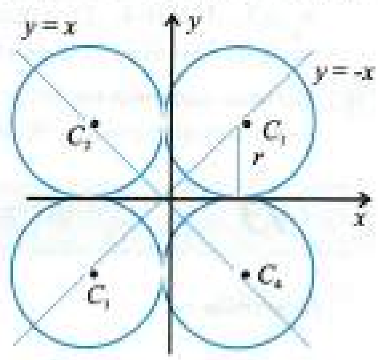
9 Напиши равенка на кружница што ги допира двете координатни оски, а радиусот $r = 3$.

Согледај го решението:

- Според решението на задачата 5.г).
  Центарот на кружницата лежи на правата $y = x$ или $y = -x$, т.е. $|p| = |q| = r$. Задачата има четири решенија, црт. 3.
  Координати на центрите се $C(\pm3, \pm3)$, а равенките на кружниците се

$$(x \pm 3)^2 + (y \pm 3)^2 = 9.$$

Воочи ако кружницата ја допира едната или двете оски треба да се внимава. Задачата може да има едно или две или четири решенија.



Црт. 3

Задачи

1 Да се напише равенка на кружница ако:

а) центарот е $C(0, 0)$, $r = 7$;

б) центарот е $C(-2, 4)$, $r = \frac{5}{2}$;

в) центарот е $C(-3, 4)$, а минува низ координатен почеток;

г) центарот е $C(2, 8)$, а минува низ точка $A(-2, 5)$.

2. Одреди ја положбата на точките $A(-1, -4)$; $B(2, -4)$; $C(-5, 3)$, $D(-3, -2)$ во однос на кружницата $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$.

3. Одреди ги координатите на центарот и радиусот на кружницата ако нејзината равенка е:

а) $(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2$; в) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+y^2=9$;

б) $x^2 + (y - 3)^2 = 4$; г) $x^2 + y^2 = 36$.

4. Напиши равенка на кружница чиј центар е во точката $C(-2, 4)$, а ја допира а) x–оската; б) y–оската.

5. Напиши равенка на кружница што ја допира x–оската во точката $A(5, 0)$, а на y–оската отсекува отсечка со должина 10.

6. Да се напише равенка на кружница чиј еден дијаметар е отсечката од правата $3x - 4y + 12 = 0$ зафатена меѓу координатните оски.

7. Да се напише равенка на кружница ако нејзините два дијаметри лежат на правите $x + y - 14 = 0$ и $2x - 3y + 12 = 0$, а минува низ координатниот почеток.

8. Напиши равенка на кружница која минува низ точките $A(0, -2)$ и $B(4, 6)$, а центарот лежи на: а) x–оската; б) y–оската.

9. Напиши равенка на кружница што минува низ точките:
а) $A(5, -3)$ и $B(4, -2)$, а радиус $r = 5$;
б) $A(-1, 3)$ и $B(3, 1)$, а центарот лежи на правата $3x - y - 2 = 0$.

10. Напиши равенка на кружница која минува низ точката $A(-5, 7)$, а ја допира x–оската во точката $B(-4, 0)$.

13 ОПШТ ВИД НА РАВЕНКА НА КРУЖНИЦА

Потсети се!

- Степенувај ги биномите: $(2x-3)^2$; $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.
- Равенката $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ се вика квадратна равенка со една непозната.
- Кој од подредените парови $(x, y) \in \{(1, 2); (1, -2); (3, -2); (3, 3)\}$ е решение на системот равенки $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x^2+xy+y^2=7? \end{cases}$
- Равенката $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ е општ вид на квадратна равенка со две непознати ако барем еден од коефициентите A, B или C е различен од нула.

1 Напиши равенка на кружница, ако $r = 1$ со центар во точката $C\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

Согледај го решението:

- Бараната равенка на кружница е:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=1^2.$$

- По извршеното степенување и сведување, се добива равенката

$$4x^2 + 4y^2 + 12x - 16y + 21 = 0$$

Воочи, секоја равенка на кружница

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

може да се доведе во следниов вид

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0$$

- Добиената равенка е квадратна равенка со две непознати.

- Кои услови треба да ги задоволуваат коефициентите на равенката $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ за таа да претставува равенка на кружница?

Споредувајќи ја оваа равенка со претходната треба:

1. коефициентите пред x^2 и y^2 да се еднакви, т.е. $A = C \neq 0$;

2. Да го нема членот $x \cdot y$, т.е. $B = 0$.

При овие услови равенката е од видот

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ т.е. } x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0.$$

- Воочи го споредувањето на равенките

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0 \quad \text{и} \quad x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0,$$

1. $-2p=\frac{D}{A}$, а $p=-\frac{D}{2A}$; 2. $-2q=\frac{E}{A}$, а $q=-\frac{E}{2A}$,

3. $p^2 + q^2 - r^2 = \frac{F}{A}$, или по замена на p и q, добиваме $r^2=\frac{1}{4A^2}\left(D^2+E^2-4AF\right)$,

т.е. $r=\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF}$, $A > 0$. Бидејќи $r \in \mathbb{R}^+$, следува $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

Запомни!

Квадратната равенка со две непознати од видот $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ претставува **општ вид равенка на кружница** ако коефициентите го задоволуваат условот $A \neq 0$ и $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.
Координатите на центарот $C(p, q)$ се

$$p=-\frac{D}{2A}, \quad q=-\frac{E}{2A} \quad \text{и} \quad r^2=p^2+q^2-\frac{F}{A}.$$

2 Која од следниве равенки претставува равенка на кружница:
а) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 16y - 11 = 0$; б) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 18 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$?

Согледај го решението:

а) $A = 4$; $D = -12$, $E = 16$ и $F = -11$, а $D^2 + E^2 - 4FA = 144 + 256 - 4 \cdot 4(-11) = 576 > 0$.

Значи, дадената равенка е равенка на кружница: $p = -\frac{D}{2A} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$,

$q = -\frac{E}{2A} = -\frac{16}{8} = -2$, па нејзиниот центар е во точката $C\left(\frac{3}{2}, -2\right)$, а

$r^2 = p^2 + q^2 - \frac{F}{A} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2 + \frac{11}{4} = 9$, т.е. $r = 3$.

б) $A = 1$, $D = 6$, $E = -4$, $F = 18$, а $D^2 + E^2 - 4AF = 36 + 16 - 72 = -20 < 0$.

Значи, дадената равенка не е равенка на кружница.

в) $A = 1$, $D = -4$, $E = 2$ и $F = 5$, а $D^2 + E^2 - 4AF = 16 + 4 - 20 = 0$.

Значи равенката не е равенка на кружница.

Дадената равенка може да се напише во следниот вид $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$.

Збирот на квадратите е нула ако и само ако $x - 2 = 0$ и $y + 1 = 0$, т.е. $x = 2$ и $y = -1$.

Геометриски тоа значи дека координатите на точката $(2,-1)$ и само тие ја задоволуваат равенката, т.е. со дадената равенка е определена точката $(2,-1)$.

3 Дадена е равенката $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$.
Ако равенката претставува кружница, запиши ја во нормален вид.

Согледај го решението:

- $D^2 + E^2 - 4AF = 4 + 16 + 124 = 144 > 0$. Значи дадената равенка е равенка на кружница.
- **Прв начин:**

Според формулите: $p = -\frac{D}{2A} = 1$; $q = -\frac{E}{2A} = 2$ и $r^2 = p^2 + q^2 - \frac{F}{A}$,

$r^2 = 12 + 22 + 31 = 36$, па равенката во нормален вид е $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$.

- **Втор начин:**

Со дополнување до бином на квадрат:

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 2^2) - 2^2 - 31 = 0$$
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 36.$$

4 Одреди ги координатите на центарот и радиусот на кружницата дадена со равенката:

а) $4x^2 + 4y^2 = 49$; б) $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$; в) $x^2 + y^2 + 4y - 16 = 0$;
г) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$; д) $x^2 + y^2 + 7x - 4y + 19 = 0$.

5 За која вредност на параметарот λ, кружницата:

а) $x^2 + y^2 + \lambda x - (2\lambda - 7)y + \lambda + 3 = 0$, ја допира x – оската?

б) $x^2 + y^2 + (\lambda + 4)x + (3\lambda + 1)y + 4\lambda = 0$, ја допира y – оската?

Погледај го решението:

а) Од равенката следува $p = -\dfrac{\lambda}{2}$; $q = -\dfrac{2\lambda - 7}{2}$ и $r^2 = p^2 + q^2 - \dfrac{F}{A}$. Од условот $|q| = r$, следува $q^2 = r^2$, па од $r^2 = p^2 + q^2 - \dfrac{F}{A}$, следува $p^2 - \dfrac{F}{A} = 0$, т.е.

$$\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (\lambda + 3) = 0.$$

Решение на равенката е $\lambda = 6$ или $\lambda = -2$. За $\lambda = 6$, дадената равенка го добива следниот вид $x^2 + y^2 + 6x - 5y + 9 = 0$, која е равенка на кружница со $C\left(-3, \dfrac{5}{2}\right)$ и $r^2 = 9 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 9$, т.е. $r = \dfrac{5}{2}$, а за $\lambda = -2$, дадената равенка преминува во равенка на кружница $x^2 + y^2 - 2x + 11y + 1 = 0$.

6 Да се напише равенка на кружница која минува низ точките $A(-2, 4)$, $B(5, -3)$, $C(7, 1)$.

Погледај го решението:

Да се напише равенка на кружницата, треба да се одредат координатите на центарот и радиусот на кружницата.
Задачата може да се реши на повеќе начини.

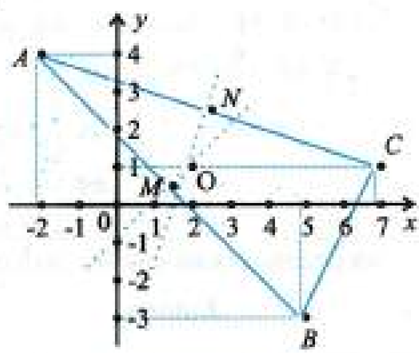
I начин:

- Точките A, B и C се темиња на триаголникот, црт.1.
- Центарот на опишаната кружница околу триаголникот се наоѓа во пресекот на симетралите на страните на триаголникот.

Нека M е средина на страната AB;

$M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$, т.е. $M\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$,

а N средина на AC, $N\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.



црт. 1

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1;\ \ k_{AC} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}.$$

Равенките на симетралите се:

$$s_{AB}: y-\frac{1}{2}=\left(x-\frac{3}{2}\right); \qquad s_{AC}: y-\frac{5}{2}=3\left(x-\frac{5}{2}\right);$$

$$y = x - 1; \qquad y = 3x - 5;$$

$s_{AB} \cap s_{AC} = \{O\}$; $O(2, 1)$,

а радиусот $r=\overline{AO}=\sqrt{(2+2)^2+(1-4)^2}=5$. Равенката на кружницата во нормален вид е $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

II начин:

Со замена на координатите на секоја точка во равенката $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ имаме:

$$\begin{cases}(-2-p)^2+(4-q)^2=r^2\\(5-p)^2+(-3-q)^2=r^2\\(7-p)^2+(1-q)^2=r^2.\end{cases}$$

Решението на системот ги дава вредностите на непознатите p, q и r.

III начин:

Ако во равенката $x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0$ замениме $a=-2p$, $b=-2q$ и $c=p^2+q^2-r^2$ ќе добиеме $x^2+y^2+ax+by+c=0$ која претставува општ вид равенка на кружница.

Со замена на координатите на точките A, B и C во последната равенка имаме:

$$\begin{cases}(-2)^2+4^2-2a+4b+c=0\\5^2+(-3)^2+5a-3b+c=0\\7^2+1^2+7a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=2a-4b-20\\5a-3b+c=-34\\7a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=2a-4b-20\\7a-7b=-14\\7a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c=2a-4b-20\\a-b=-2\\3a-b=-10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-4\\b=-2\\c=-2,\end{cases}$$

па равенката на кружницата во општ вид е: $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

Задачи

1. За која вредност на параметарот $\lambda \in \{0, 1, 5\}$ равенката:

$$(x-1)^2+(y-2)^2-4+\lambda(x^2+y^2+9)=10$$

претставува равенка на кружница?

2. Во равенката $x^2+y^2+\lambda x+3\lambda y-7=0$, одреди го параметарот λ така што равенката да претставува кружница што минува низ точката $(1, 0)$.

3. За која вредност на параметарот λ, кружницата

$$x^2 + y^2 + (\lambda - 6)x - (\lambda + 2)y + 3\lambda - 2 = 0$$

ги допира двете координатни оски?

4. Одреди го центарот и радиусот на кружницата дадена со равенката:

а) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$; б) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 3x = 0$; г) $2x^2 + 2y^2 - 5y = 0$.

5. Напиши равенка на кружница чиј центар се совпаѓа со центарот на кружницата $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$, а радиусот е за 2 поголем од радиусот на дадената кружница.

6. Напиши равенка на кружница која минува низ точката $A(3, -5)$ и ја сече y-оската во точките $M(0, 4)$ и $N(0, -2)$.

7. Напиши равенка на кружница која минува низ точките:

а) $A(2, -2)$; $B(7, 3)$, $C(6, 0)$; б) $A(1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(9, 6)$.

8. Одреди ја плоштината и волуменот на топката чијшто најголем круг минува низ точките $M_1(1, 2)$, $M_2(3, 4)$, $M_3(6, 4)$.

9. Даден е ΔABC, $A(7, 1)$, $B(5, 5)$, $C(-2, 4)$. Напиши равенка на кружница што минува низ средините на страните на триаголникот.

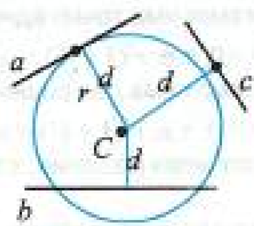
10. Напиши равенка на кружница опишана околу триаголникот, чии равенки на страните се AB: $3y + x - 7 = 0$; BC: $y - x + 3 = 0$ и AC: $2y - x - 3 = 0$.

14 ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И КРУЖНИЦА

Потсети се!

- Кога една квадратна равенка има: реални и еднакви, реални и различни или конјугирано комплексни корени?
- Одреди ја пресечната точка на правите $2x - y = 1$ и $x + y = 5$.
- Две прави се паралелни ако имаат еднакви коефициенти на правци.
- Во кој однос се коефициентите на правци на заемно нормалните прави?

А Растојанието d од центарот на кружницата до права се вика централно растојание, црт. 1.



црт. 1

Од порано ти е познато:

1. Ако $d = r$, тогаш правата ја допира кружницата, т.е. имаат една заедничка точка.

2. Ако $d < r$, тогаш правата ја сече кружницата, т.е. тие имаат две заеднички точки.

3. Ако $d > r$, тогаш, правата и кружницата немаат заеднички точки.

Знаејќи го аналитичкиот запис на двете линии, т.е. нивните равенки, пресечните точки на линиите, ако ги има, ќе ги одредиме решавајќи го системот од нивните равенки.

1 Одреди ги координатите на пресечните точки на правата $3x + y - 6 = 0$ и кружницата $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Согледај го решението:

$$\begin{cases} y = 6 - 3x \\ (x-3)^2 + (4-3x)^2 = 25 \end{cases}; \begin{cases} y = 6 - 3x \\ x^2 - 6x + 9 + 16 - 24x + 9x^2 - 25 = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = 6 - 3x \\ 10x^2 - 30x = 0 \end{cases}.$$

Решението на системот $x_1 = 0, y_1 = 6$ или $x_2 = 3, y_2 = -3$, т.е. пресечните точки на правата и кружницата се: $A(0, 6)$ и $B(3, -3)$.

2 Испитај ја положбата на правата $y = kx + n$ и кружницата $x^2 + y^2 = r^2$.

Согледај го решението на системот:

$$\begin{cases} y = kx + n \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

Со замена на y во втората равенка имаме:

$$x^2 + (kx + n)^2 = r^2;$$

$$x^2 + k^2x^2 + 2kxn + n^2 - r^2 = 0;$$

$$(1 + k^2)x^2 + 2kxn + n^2 - r^2 = 0.$$

Решението на квадратната равенка зависи од нејзината дискриминанта.

$$D = (2kn)^2 - 4(1 + k^2)(n^2 - r^2);$$

$$D = 4((1+k^2)r^2 - n^2).$$

1. Ако $D = 0$, т.е. $r^2(1 + k^2) = n^2$, квадратната равенка има единствено решение, па и системот има точно едно решение, т.е. правата ја допира кружницата.

2. Ако $D > 0$, т.е. $r^2(1 + k^2) > n^2$, квадратната равенка има две реални решенија, па и системот има две решенија, т.е. правата ја сече кружницата.

3. Ако $D < 0$, т.е. $r^2(1 + k^2) < n^2$ квадратната равенка нема реални решенија, па и системот нема решение, т.е. правата нема заеднички точки со кружницата.

3 Одреди ја положбата на правата во однос на кружницата:

а) $2x - y + 5 = 0$ и $x^2 + y^2 = 50$; б) $x - 2y + 5 = 0$ и $x^2 + y^2 = 5$.

Прв начин:

Согледај го решението на системот:

б) $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = 2y - 5 \\ (2y-5)^2 + y^2 = 5 \end{cases}; \begin{cases} x = 2y - 5 \\ y^2 - 4y + 4 = 0. \end{cases}$

$x = -1$ и $y = 2$, т.е. правата ја допира кружницата во точката $A(-1, 2)$.

- **Втор начин:**

Од правата $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, следува $k=\frac{1}{2}$, $n=\frac{5}{2}$, а радиус на кружницата $r^2=5$.

Овие вредности го задоволуваат условот $(1+k^2)r^2=n^2$, $\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot 5=\left(\frac{5}{2}\right)^2$, т.е. правата ја допира кружницата.

Запомни!

Правата $y=kx+n$ ја допира кружницата $x^2+y^2=r^2$ (централна равенка на кружница) ако е исполнет условот

$$(1+k^2)r^2=n^2$$

кој се вика услов за допир.

4 Во равенката на правата $\lambda x-y+5=0$, одреди го параметарот λ, така што правата ја допира кружницата $x^2+y^2=5$.

Согледај го решението:

- Од правата $y=\lambda x+5$ следува $k=\lambda$, $n=5$, а радиусот на кружницата е $r^2=5$.
- Со замена во условот за допир имаме:

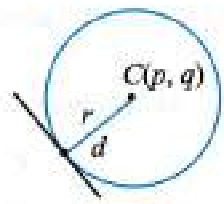
$$(1+k^2)r^2=n^2;\quad (1+\lambda^2)5=25;\quad \lambda=\pm 2.$$

Б **5** Одреди го условот правата $Ax+By+C=0$ да ја допира кружницата $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$.

Согледај го решението:

- Прaвата е тангента (ја допира) кружницата ако $d=r$, црт. 2.
- Растојанието од точката $A(x_1,y_1)$ до правата $Ax+By+C=0$ се пресметува по формулата

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$



Црт. 2

Ако точката $C(p,q)$ е центар на кружницата и $d=r$, тогаш имаме

$$r=\frac{|Ap+Bq+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},\text{ т.е. } (A^2+B^2)\cdot r^2=(Ap+Bq+C)^2$$

е бараниот услов за допир.

Ако правата е запишана во експлицитен вид, т.е. $y=kx+n$, тогаш условот е

$$(1+k^2)\,r^2=(kp-q+n)^2.$$

6 Одреди ја положбата на правата и кружницата:

а) $x+y-9=0$ и $(x-2)^2+(y-1)^2=25$; б) $x+y+4=0$ и $x^2+y^2+2y-3=0$.

Согледај го решението:

а) Центарот на кружницата $C(2, 1)$, а $r = 5$.

$d = \dfrac{|1\cdot 2+1\cdot 1-9|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} < r$, значи правата ја сече кружницата.

7 Одреди го параметарот λ така што правата да ја допира кружницата:

а) $x + \lambda y + 1 = 0$; $x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$; б) $y = -\lambda x + 8$; $(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 20$.

Согледај го решението:

а) Од равенката на кружница имаме: $p = -\dfrac{D}{2A} = \dfrac{10}{2} = 5$; $q = 0$;

$r^2 = p^2 + q^2 - \dfrac{F}{A} = 25 - 7 = 18$, па со замена во условот за допир имаме:

$$(A^2 + B^2)r^2 = (Ap + Bq + C)^2;$$
$$(1 + \lambda^2)\cdot 18 = (1\cdot 5 + \lambda\cdot 0 + 1)^2;$$
$$(1 + \lambda^2)\cdot 18 = 36;$$
$$\lambda^2 = 1, \text{ т.е. } \lambda = \pm 1.$$

8 Напиши ги равенките на тангентите на кружницата што минуваат низ точката:

а) $M(3, 2)$; $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$; б) $N(2, 1)$; $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 18$.

Согледај го решението:

б) Бараната тангента t: $y = kx + n$ минува низ точката $M(3, 2)$ значи $2 = 3k + n$, т.е. $n = 2 - 3k$.

Од равенката на кружницата $p = -\dfrac{D}{2A} = 2$; $q = -\dfrac{E}{2A} = -1$, а

$r^2 = p^2 + q^2 - \dfrac{F}{A} = 5$ и условот за допир имаме:

$$(1 + k^2)r^2 = (kp - q + n)^2, \text{ па со замена } n = 2 - 3k;$$

имаме

$$(1 + k^2)\cdot 5 = (3 - k)^2;$$
$$5 + 5k^2 = 9 - 6k + k^2;$$
$$2k^2 + 3k - 2 = 0;$$
$$k_1 = \frac{1}{2};\ k_2 = -2, \text{ а } n_1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, n_2 = 8.$$

Бараните тангенти се: t_1: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; t_2: $y = -2x + 8$.

9 Да се напише равенката на тангента на кружницата $x^2 + y^2 = 5$ паралелна со правата p: $2x - y + 1 = 0$.

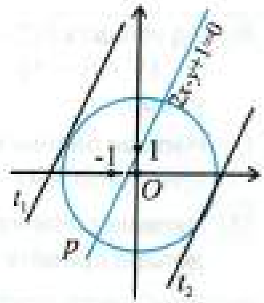
Согледај го решението:

- Од условот за паралелност на две прави следува: $k_t = k_p = 2$, па t: $y = kx + n$, т.е. $y = 2x + n$.
- Од равенката на кружницата имаме: $p = q = 0$, $r^2 = 5$, па од $(1 + k^2)r^2 = n^2$ следува

$$(1 + 2^2) \cdot 5 = n^2; \quad n = \pm 5.$$

Бараните тангенти се:

t_1: $y = 2x + 5$ и t_2: $y = 2x - 5$, црт.3.



црт. 3

10 Напиши равенка на тангентата на кружницата $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 5$ што е нормална на правата p: $2x - y + 7 = 0$.

Задачи

1 Одреди ги пресечните точки на правата и кружницата:

а) $2x - y + 5 = 0$, $x^2 + y^2 = 50$; б) $x - 3y - 5 = 0$, $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$.

2 Одреди ја положбата на правата во однос на кружницата не решавајќи го системот:

а) $x + 3y - 15 = 0$, $x^2 + y^2 = 25$;

б) $x - 2y = 10$, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$;

в) $7x + y = 25$, $x^2 + y^2 + 14x + 2y + 25 = 0$;

3 Одреди го непознатиот коефициент така да правата ја допира кружницата:

а) $x + By + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$;

б) $Ax + 4y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$.

4 Одреди ги p и q така да правата ја допира кружницата:

а) $x + y - 3 = 0$, $(x - p)^2 + (y - 3)^2 = 18$;

б) $x - 2y + 1 = 0$, $(x - 5)^2 + (y - q)^2 = 20$.

5 Напиши равенка на тангента на кружницата која минува низ точката:

а) $P(-5, 0)$; $x^2 + y^2 = 9$; б) $P(-3, 6)$; $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$.

6 Напиши равенка на тангента на кружницата $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ која е паралелна на правата $4x - 3y - 12 = 0$.

7 Напиши равенка на тангента на кружницата $x^2 + y^2 = 5$ која е нормална на правата $x - 2y - 3 = 0$.

8 Под кој агол се гледа кружницата:

а) $x^2 + (y - 4)^2 = 16$ од точката $M(8, 4)$;

б) $x^2 + y^2 - 2x - 14y + 25 = 0$ од координатниот почеток?

9 Напиши равенка на права што ја допира кружницата $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 5$, а x–оската ја сече во точката $C(6, 0)$.

(10) Од точката $P(2, -3)$ повлечени се тангенти на кружницата $(x-1)^2+(y+5)^2=4$. Напиши равенка на права што минува низ допирните точки.

(11) Напиши равенка на кружница чиј центар е во точката $C(p, 1)$, а ги допира правите $3x-4y+35=0$, $4x+3y-20=0$.

(12) Напиши равенка на кружница чиј центар лежи на правата $2x+y=0$, а ги допира правите $4x-3y+10=0$ и $4x-3y-30=0$.

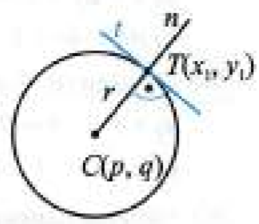
15 РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА НА КРУЖНИЦА ВО ДАДЕНА ТОЧКА

Потсети се!

- Равенка на права низ една точка $y-y_1=k(x-x_1)$
- Равенка на права низ две точки
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$
- Услов за нормалност на две прави чии коефициенти на правци се k_1 и k_2, е $k_1\cdot k_2+1=0$.
- Тангентата на кружницата е нормална на радиусот во допирната точка.
- Правата што е нормална на тангентата на кружницата и минува низ допирната точка се вика нромала на кружница.

1 Напиши равенка на тангентата во точката $T(x_1, y_1)$ на кружницата $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$.

Согледај го решението:



црт. 1

- Нормалата на кружницата минува низ центарот $C(p, q)$ и точката $T(x_1, y_1)$, црт.1. па нејзината равенка е:
$$n:\ y-q=\frac{y_1-q}{x_1-p}(x-p).$$

Коефициентот на правецот на нормалата е $k_n=\dfrac{y_1-q}{x_1-p}$.

Од условот за нормалноста $k_t\cdot k_n=-1$, следува

$$k_t=-\frac{x_1-p}{y_1-q}$$, па равенката на тангентата е:

$$t:\ y-y_1=-\frac{x_1-p}{y_1-q}(x-x_1),\ \text{т.е.}\ (x_1-p)(x-x_1)+(y-y_1)(y_1-q)=0.$$

- Точката $T(x_1, y_1)$ лежи на кружницата, па имаме $(x_1-p)^2+(y_1-q)^2=r^2$. Собирајќи ги последниве две равенки, имаме:
$$(x_1-p)(x-x_1)+(x_1-p)^2+(y-y_1)(y_1-q)+(y_1-q)^2=r^2;$$
$$(x_1-p)(x-x_1+x_1-p)+(y_1-q)(y-y_1+y_1-q)=r^2.$$

Бараната равенка на тангентата е

$$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2.$$

2 Напиши равенка на тангента и нормала во точката $T(4, 1)$ на кружницата $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$.

Согледај го решението:

- Точката T лежи на кружницата, бидејќи $(4 - 2)^2 + (1 + 3)^2 = 22 + 42 = 20$.
- Од кружницата следува $p = 2$, $q = -3$, $r^2 = 20$, со замена во равенката на тангентата имаме:

$$t: (4 - 2)(x - 2) + (1 + 3)(y + 3) = 20;$$
$$x + 2y - 6 = 0.$$

- Равенка на нормалата е

$$n: y - y_1 = k_n(x - x_1),$$

Од равенката на тангентата следува $k_t = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{2}$, а од условот за нормалноста $k_n = -\frac{1}{k_t} = 2$, па равенката на нормалата е $n: y - 1 = 2(x - 4)$, т.е.

$$2x - y - 7 = 0.$$

Запомни!

Равенката на тангента на кружницата $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ во точката $T(x_1, y_1)$ е

$$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2.$$

Ако центарот на кружницата е во координатен почеток, т.е. $p = q = 0$, тогаш тангентата е: $xx_1 + yy_1 = r^2$.

3 Правата $3x + y = 1$ ја сече кружницата $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$.

а) Напиши ги равенките на тангентите во пресечните точки.

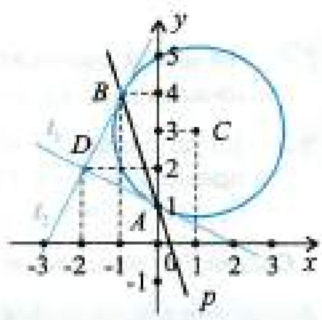
б) Одреди ја плоштината на триаголникот ограничен со дадената права и двете тангенти.

Согледај го решението:

- $p = 1$, $q = 3$, $C(1, 3)$, $r^2 = 1^2 + 3^2 - 5 = 5$. (црт. 2).

$y = -3x + 1$,

x	-1	0	1
y	4	1	-2



црт. 2

- Решението на системот $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \end{cases}$

се координата на пресечните точки A и B.

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = 1 - 3x \\ x^2 + x = 0 \end{cases}; \ A(0, 1),\ B(-1, 4).$$

а) Тангентите се:

t_1: $(x - 1)(0 - 1) + (y - 3)(1 - 3) = 5$; $\quad$ t_2: $(x - 1)(-1 - 1) + (y - 3)(4 - 3) = 5$;

$x + 2y - 2 = 0$; $\quad$ $2x - y + 6 = 0$.

Пресечната точка на тангентите се добива со решавање на системот:

$$\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases}, \; D(-2, 2).$$

б) Плоштина на триаголникот ABD: $A(0, 1)$, $B(-1, 4)$, $D(-2, 2)$.

$$P = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|;$$

$$P = \frac{1}{2}\left|0(4-2) + (-1)(2-1) + (-2)(1-4)\right| = 5.$$

4 Напиши равенка на тангента на кружницата $x^2 + y^2 = 13$, во точката $T(-2, y_1 > 0)$.
Колку решенија има задачата ако не е дадено ограничувањето?

Согледај го решението:

Точката T лежи на кружницата, па

$(-2)^2 + y_1^2 = 13$; т.е. $y_1^2 = 9$;

$y_1 = 3$ или $y_1 = -3$, црт. 3.

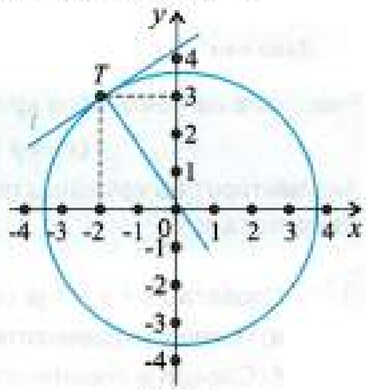
Тангента минува низ точката $T(-2, 3)$.

Бидејќи $p = q = 0$, следува:

t: $xx_1 + yy_1 = r^2$;

$-2x + 3y = 13$;

$2x - 3y + 13 = 0$.



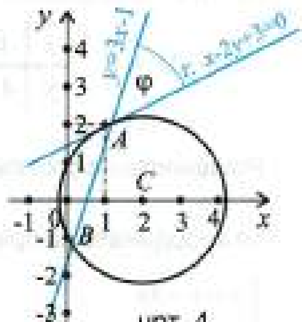
црт. 3

5 Напиши ја равенката на тангента на кружницата $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$ во точката $D(1, y)$, $y < 0$.

6 Да се определи аголот под којшто се сечат правата $3x - y - 1 = 0$, и кружницата $(x - 2)^2 + y^2 = 5$.

Согледај го решението:

Аголот под којшто се сечат правата и кружницата е агол што го образуваат правата и тангентата на кружницата во пресечната точка, црт.4.



црт. 4

■ Решението на системот $\begin{cases} 3x-y-1=0 \\ (x-2)^2+y^2=5 \end{cases}$ се координати на пресечните точки A и B.

$$\begin{cases} y=3x-1 \\ x^2-4x+4+(3y-1)^2=5; \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x-1 \\ x^2-x=0; \end{cases} \quad A(1, 2), \quad B(0, -1).$$

■ Равенка на тангента на кружницата во точката $A(1, 2)$ е

$$t\colon (x-2)(x_1-2)+yy_1=5;$$
$$(x-2)(1-2)+2y=5;$$
$$x-2y+3=0.$$

■ Агол меѓу две прави се одредува со формулата $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1-k_1k_2}$, па имаме:

$$k_t=\frac{1}{2},\ k_p=3,\ \text{а}\ tg\varphi=\frac{\frac{1}{2}-3}{1+\frac{1}{2}\cdot 3}=\frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}=-1;\ \ \varphi=\mathrm{arctg}|-1|;\ \ \varphi=45^\circ.$$

Истата вредност за аголот ќе ја добиеме и во точката B.

Задачи

1. Напиши равенка на тангента во точката A од кружницата:
   а) $A(-1, 2)$, $x^2+y^2=5$; б) $A(5, 1)$, $(x-2)^2+(y+3)^2=25$;
   в) $A(0, -3)$, $x^2+y^2+8x-9=0$.

2. Напиши равенка на тангента на кружницата во точката T:
   а) $(x+3)^2+(y-1)^2=20$, $T(1, y)$, $y>0$; б) $x^2+y^2=10$, $T(x<0, -1)$.

3. Дадена е кружницата $x^2+y^2-4x-2y=0$.
   а) Напиши ги равенките на тангентите во точката $T(1, y)$ од кружницата.
   б) Одреди го аголот меѓу тангентите.

4. Во пресечните точки на правата $x-3y+5=0$ и кружницата $(x-2)^2+(y+1)^2=50$ повлечи тангенти на кружницата.
   Одреди ја плоштината на триаголникот што го формираат дадената права и двете тангенти.

5. Правата $2x+y=10$ ја сече кружницата $x^2+y^2=25$.
   Одреди го аголот којшто го образуваат тангентите повлечени во пресечните точки од кружницата.

6. Одреди го аголот под кој правата $x-3y-5=0$ ја сече кружницата $(x-1)^2+(y+3)^2=5$.

7. Одреди ги пресечните точки на кружниците:

а) $x^2 + y^2 = 8$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

б) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$.

в) $x^2 + y^2 - 8x - 18y + 93 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0$.

8. Одреди го аголот под кој што се сечат кружниците:

а) $x^2 + y^2 = 3$, $(x - 1)^2 + y^2 = 4$;

б) $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$, $x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0$.

16 ЕЛИПСА. ЦЕНТРАЛНА РАВЕНКА НА ЕЛИПСА

А Обиди се да го изведеш следниот експеримент.

На рамна површина на одредено растојание забодуваме две клинчиња. За клинчињата ги врзуваме краевите на еден конец, чија должина е поголема од растојанието меѓу клинчињата, црт.1.

Ако конецот го оптегнеме со еден молив, при така оптегнат конец, моливот ќе испише крива затворена линија која се вика *елипса*.

Францускиот математичар Рене Декарт (1596–1650), кој се смета за основач на аналитичката геометрија, вака механички конструираната елипса ја нарекол "градинарска конструкција".

Црт. 1

- Воочи, точките што лежат на елипсата го имаат својството збирот од растојанијата на секоја од нив до двете дадени точки да е константен.

Според тоа, за елипсата важи следнава

Дефиниција: Елипса е геометриско место на точки во рамнина чиј збир на растојанијата до две дадени (фиксни) точки од истата рамнина е константен. Збирот на растојанијата треба секогаш да е поголем од растојанието меѓу дадените точки.

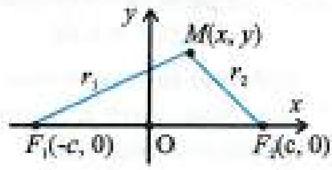
- Дадените точки се викаат фокуси на елипсата, се означуваат со F_1 и F_2, а растојанието $\overline{F_1F_2} = 2c$ се вика фокусно растојание.
- Константата (збирот на растојанијата на која било точка од елипсата до фокусите) ја означуваме со $2a$ ($a > 0$).

Б 1 Напиши ја равенката на елипсата ако се знае фокусното растојание $\overline{F_1F_2} = 2c$ и константното растојание $2a$.

Согледај го решението:

- Треба да најдеме равенка што ќе ја задоволуваат координатите на произволна точка од елипсата (и само тие).

За таа цел поставуваме правоаголен координатен систем така што x–оската да минува низ фокусите F_1 и F_2, а координатниот почеток – да е на средина на отсечката F_1F_2, црт. 2.



црт. 2

При вака избран координатен систем имаме:

$F_1F_2 = 2c$, па $F_1(-c, 0)$, а $F_2(c, 0)$.

Ако точката $M(x, y)$ е која било точка од елипсата, тогаш:

$$r_1 = \overline{F_1M} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ;\ \ r_2 = \overline{F_2M} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

се викаат фокусни радиуси.

Од дефиницијата за елипсата следува:

$r_1 + r_2 = 2a$, т.е. равенството $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, е равенка на елипса изразена во координатна форма.
Оваа равенка со идентични трансформации ќе ја сведеме во поедноставна форма.
Од равенката следува:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Од дефиницијата следува $2a > \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, по квадрирањето добиваме равенство што е еквивалентно на даденото:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Со повторно квадрирање имаме:
$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2x + x^2c^2$, т.е. $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Од неравенствата за страните на ΔF_1F_2M следува:

$$r_1 + r_2 > \overline{F_1F_2} \text{ или } 2a > 2c, \text{ т.е. } a > c.$$

Оттука следува дека $a^2 > c^2$, т.е. $a^2 - c^2 > 0$, па со воведување на смената

$$a^2 - c^2 = b^2,\ (b > 0),$$

равенката на елипса е:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

По делењето на равенката со a^2b^2, $(a > 0,\ b > 0)$ имаме:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

која се вика **централна** или **канонична равенка на елипса**.

Позитивните броеви a и b се викаат полуоски на елипсата.

2 Одреди ги полуоските a и b и координатите на фокусите на елипсата $9x^2 + 25y^2 = 900$.

Согледај го решението:

Ако равенката ја поделиме со 900, тогаш равенката ќе биде запишана во каноничен вид, т.е.

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$$

Оттука следува $a^2 = 100$, $b^2 = 36$, т.е. $a = 10$ и $b = 6$.

Од условот $a^2 - c^2 = b^2$ следува $c^2 = a^2 - b^2$; $c^2 = 100 - 36 = 64$, па $c = 8$, а фокусите се $F_1(-8, 0)$ и $F_2(8, 0)$.

3 Напиши равенка на елипса ако се дадени полуоските:

а) $a = 5$, $b = 3$; б) $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{3}$.

Согледај го решението:

а) Ако $a = 5$ и $b = 3$ ги замениме во равенката на елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ имаме $3^2x^2 + 5^2y^2 = 3^25^2$ или $9x^2 + 25y^2 = 225$.

4 Напиши равенка на елипса ако двете нејзини темиња се точките $A_1(-13, 0)$ и $A_2(13, 0)$, а фокусите $F_1(-5, 0)$ и $F_2(5, 0)$.

Согледај го решението:

Бидејќи фокусите лежат на x–оската значи големата полуоска $a = 13$, а $c = 5$.

Од условот $a^2 - c^2 = b^2$ следува $b^2 = 132 - 52 = 144$, па равенката на елипсата е:

$$\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{12^2}=1.$$

5 Напиши равенка на елипса ако малата оска $b = 2\sqrt{5}$, а $F_1(-4, 0)$.

6 Напиши равенка на елипса која минува низ точката $A(3, \sqrt{2})$, а големата полуоска е $a = \sqrt{15}$.

Согледај го решението:

Со замена во равенката на елипсата имаме: $\frac{3^2}{(\sqrt{15})^2}+\frac{(\sqrt{2})^2}{b^2}=1$; $\frac{9}{15}+\frac{2}{b^2}=1$;

$\frac{2}{b^2}=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$; $b^2 = 5$. Равенката на елипсата е:

$$\frac{x^2}{(\sqrt{15})^2}+\frac{y^2}{5}=1 \text{ или } x^2 + 3y^2 = 15.$$

В Формата на елипсата ќе ја согледаме од анализата на нејзината равенка.

Од равенката $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ следува $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$ и $x^2=\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-y^2\right)$, или

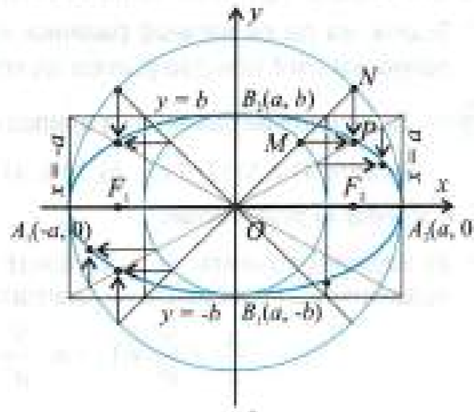
$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ и $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$.

- Оттука следува:
  $y\in\mathbf{R}$ ако $a^2-x^2\geq 0$, т.е. $-a\leq x\leq a$, а $x\in\mathbf{R}$ ако $b^2-y^2\geq 0$, т.е. $-b\leq y\leq b$.
  За $x=\pm a$ следува $y=0$, т.е. елипсата ја сече x – оската во точките $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$. За $y=\pm b$ следува $x=0$, т.е. елипсата ја сече y – оската во точката $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$.

- Точките A_1, A_2, B_1 и B_2 се викаат темиња на елипсата. Од решенијата

  $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ и $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$

  следува дека елипсата е симетрична во однос на координатните оски.



црт. 3

- Бидејќи променливите x, y на равенката се на степенов показател, значи ако точката $T(x,y)$ лежи на елипсата, тогаш и точката $T_1(-x_1,-y_1)$ лежи на елипсата, т.е. елипсата е симетрична и во однос на координатниот почеток.

  Од оваа дискусија следува дека точките од елипсата се наоѓаат во правоаголникот $-a\leq x\leq a$, $-b\leq y\leq b$, црт.3.

- На црт. 3, прикажан е еден начин на конструкција на елипса со концентрични кружници чии дијаметри се $2a$ и $2b$.

- Од пресечните точки M и N на дијаметарот ON и двете кружници повлекуваме прави паралелни со Ox и Oy оската, соодветно.

- Пресекот P на тие паралени прави е точка од елипсата.

- На ист начин се одредува точка од елипсата на кој било повлечен дијаметар.

- Должината на отсечката $\overline{A_1A_2}=2a$ се вика голема оска, а отсечката $\overline{B_1B_2}=2b$ мала оска на елипсата.

- Бројот $c=\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$ се вика линеарен ексцентрицитет.

Запомни!

Равенката на елипса со центар во координатниот почеток е од видот $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ или $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, точките $F_1(-C, 0)$ и $F_2(C, 0)$ се викаат фокуси на елипсата, а $c=\sqrt{a^2-b^2}$, за $a > b$, линеарен ексцентрицитет.

Ако $b > a$, тогаш равенката $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ е, исто така, равенка на елипса, чии фокуси лежат на y – оската и притоа $c^2 = b^2 - a^2$. Во тој случај $\overline{B_1B_2}=2b$ е голема оска, а $\overline{A_1A_2}=2a$ мала оска на елипсата.

- Воочи, за да се напише равенка на елипса треба да се знаат нејзините полуоски a и b или два услова од кои ќе се одредат полуоските.

7 Да се напише равенка на елипса којашто минува низ точките:

а) $M(9, 4)$ и $N(12, 3)$; б) $M(6, 4)$ и $N(-8, 3)$.

Согледај го решението:

- а) Бидејќи точките M и N лежат на елипсата, нивните координати ја задоволуваат равенката на елипсата:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{, т.е. }\frac{9^2}{a^2}+\frac{4^2}{b^2}=1\text{ и }\frac{12^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1.$$

- Системот $\frac{81}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1$ и $\frac{144}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$ ќе го решиме со метод на спротивни коефициенти на следниот начин:

$$\begin{cases}\frac{81}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1/\cdot 9\\ \frac{144}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1/\cdot(-16)\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{729}{a^2}+\frac{144}{b^2}=9\\ -\frac{2304}{a^2}-\frac{144}{b^2}=-16\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{81}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\\ -\frac{729}{a^2}-\frac{2304}{a^2}=9-16\end{cases};$$

$$\begin{cases}\frac{81}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\\ -\frac{1575}{a^2}=-7\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{16}{b^2}=1-\frac{81}{225}\\ a^2=225\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{16}{b^2}=\frac{144}{225}\\ a^2=225\end{cases};\quad \begin{cases}b^2=25\\ a^2=225.\end{cases}$$

- Равенката на елипсата е: $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{25}=1$ или $x^2+9y^2=225$.

8 Напиши равенка на елипса чии две темиња имаат координати $(\pm 6, 0)$, а фокусите се совпаѓаат со фокусите на елипсата $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Соѓледај ѓо решението:

- Од дадената елипса следува $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, а $c^2 = 26 - 9 = 16$, т.е. фокусите се $F_1(-4, 0)$ и $F_2(4, 0)$.
- Бидејќи полуоската на бараната елипса $a = 6$, следува $b^2 = a^2 - c^2$; $b^2 = 6^2 - 4^2 = 20$, па равенката на елипсата е

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1 \text{ или } 5x^2 + 9y^2 = 180.$$

Запомни!

Две елипси на кои фокусите им се совпаѓаат се викаат *конфокални елипси*.

9 Нацртај (скицирај) ги елипсите чии полуоски се: а) $a = 6$, $b = 4$; б) $a_1 = 6$, $b_1 = 2{,}5$ во ист координатен систем.

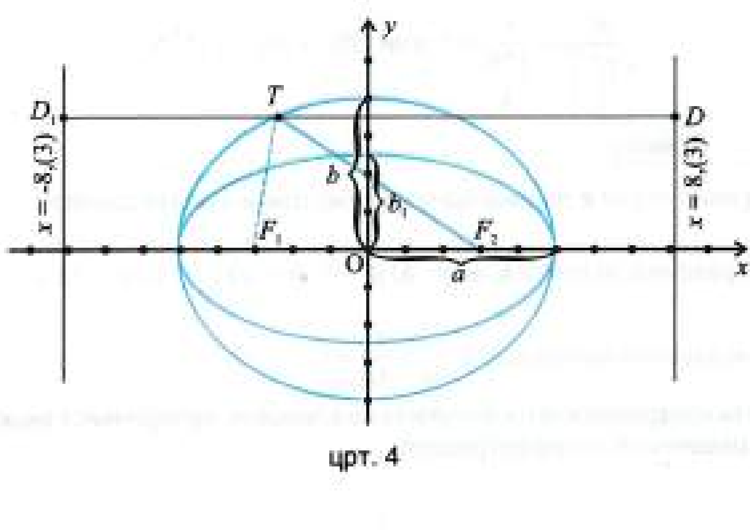
- Двете елипси прикажани се на црт. 4.
- Воочуваш дека елипсите имаат различна форма, едната е повеќе сплесната.
- Формата на елипсата зависи од бројот $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, кој се вика *нумерички ексцентрицитет*.

Бидејќи $c < a$, значи $0 \le \varepsilon < 1$.

За елипсата а) $c^2 = a^2 - b^2$; $c^2 = 25 - 16$; $c = 3$, па $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$.

За елипсата б) $c_1^2 = 5^2 - 2{,}5^2$; $c_1 = \sqrt{18{,}75}$; $c_1 = 4{,}33$, па $\varepsilon_1 = \dfrac{4{,}33}{5} = 0{,}866$.

Фокусното растојание $c_1 > c$, а оттука следува при константна вредност на големата оска $\varepsilon_1 > \varepsilon$, што значи дека малата оска е помала, па втората елипса е повеќе збиена (сплесната).



црт. 4

Ако $\varepsilon = 0$, тогаш $c = 0$, па $b = a$ и во тој случај равенката на елипсата е од видот $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ или $x^2+y^2=a^2$, т.е. елипсата преминува во кружница со радиус $r = a$ и центар во координатниот почеток. Според тоа кружницата може да се смета за елипса со екцентрицитет $\varepsilon = 0$.

Правите $x=\frac{a}{\varepsilon}$ и $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ се викаат *директриси* на елипсата.

Бидејќи $\varepsilon < 1$, следува дека $\frac{a}{\varepsilon} > a$, па директрисите не ја сечат елипсата.

Директриси на елипсата $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ се $x=\pm\frac{5}{0,6}=\pm 8,(3)$ (црт. 4).

Директрисата на елипсата го има следново својство: односот на растојанието од произволна точка T од елипсата до фокусот, што е поблиску до директрисата, и растојанието од таа точка до директрисата е константен, еднаков со нумеричкиот ексцентрицитет, т.е.

$$\overline{TF_2}:\overline{TD}=\overline{TF_1}:\overline{TD_1}=\varepsilon.$$

10 Напиши равенка на елипса, ако:

а) $b=6\sqrt{3}$, $\varepsilon=0,5$; б) $\varepsilon=\frac{2}{3}$, $F(\pm 5,0)$.

Согледај го решението:

б) Од $F(\pm 5, 0)$ следува $c = 5$, а од $\varepsilon=\frac{c}{a}$ следува $\frac{2}{3}=\frac{5}{a}$; $a=\frac{15}{2}$.

Од $b^2 = a^2 - c^2$; $b^2=\left(\frac{15}{2}\right)^2-5^2=\frac{225-100}{4}=\frac{125}{4}$.

Равенката на елипсата е:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{15}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{125}{4}}=1 \text{ или } 20x^2+36y^2=1125.$$

Задачи

1. Нацртај елипса ако е дадена една нејзина точка и двата фокуси.

2. Напиши равенка на елипса, ако: а) $a = 7$, $b=\sqrt{13}$; б) $a = 3$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$;

3. Дадена е равенка на елипсата $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$.

   Одреди ги координатите на фокусите на елипсата, нумеричкиот ексцентрицитет и равенките на директрисите.

4. Напиши равенка на елипсата која минува низ точката $M(-5, 4)$, а линеарен ексцентрицитет ѝ е $3\sqrt{2}$.

5. Напиши равенка на елипсата која минува низ точките:

а) $M(-4, 1)$, $N(2, -3)$; б) $M(6, \frac{28}{5})$, $N(-8, \frac{21}{5})$;

6. Напиши равенка на елипса ако растојанието од еден фокус до темињата на големата оската се 2 и 8.

7. Одреди ја положбата на точката $A(6, -3)$, $B(-2, 5)$, $C(3, -6)$, $D(-4, 2\sqrt{6})$ во однос на елипсата $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$.

8. Напиши ги равенките на фокалните радиуси на елипсата $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ во точката $T(\ 8, y<0)$.

9. Напиши равенка на елипсата ако големата оска е 16, а е конфокална со елипсата $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{30}=1$.

10. Дадена е елипсата $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Напиши ја равенката на елипсата која минува низ фокусите на дадената елипса, а нејзините фокуси се во темињата на дадената елипса што се на y – оската.

17 ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И ЕЛИПСА

Потсети се!

- За природата на решенијата на квадратната равенка.
- Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$$

- Заедничките точки на права и кружница ги одредуваме со решавање на системот од нивните равенки.

А 1 Одреди ја заемната положба на елипсата $x^2+3y^2=36$ и правата:

а) $x-3y=0$; б) $y=x-8$;

в) $x-3y+12$.

Согледај го решението:

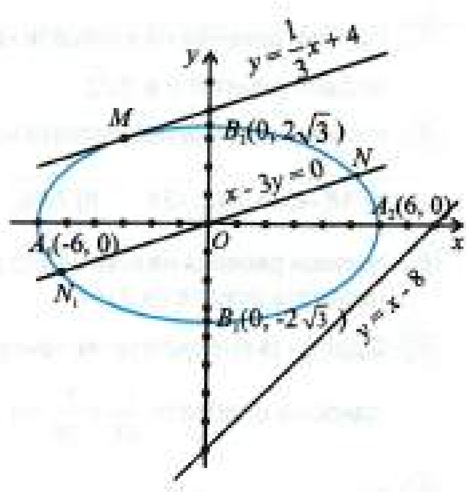
- Заемната положба на правата и елипсата ќе ја утврдиме со решавање на системот од нивните равенки.

а) Системот на равенките е:

$$\begin{cases} x^2+3y^2=36 \\ x=3y. \end{cases}$$

Решението на системот е:

$$\begin{cases} x=\pm 3\sqrt{3} \\ y=\pm 3. \end{cases}$$ Значи правата ја сече елипсата во точките $N(3\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и $N_1(-3\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.



црт. 1

б) Системот од равенките е: $\begin{cases} x^2+3y^2=36 \\ y=x-8. \end{cases}$

За решението на системот имаме:

$x^2+3(x-8)^2=36;\ x^2-12x+39=0.$

Дискриминантата на оваа квадратна равенка е:

$D=b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot 39=-12<0$, па равенката нема реални корени.
Тоа значи дека и системот нема реални решенија, т.е. правата и елипсата немаат заеднички точки.

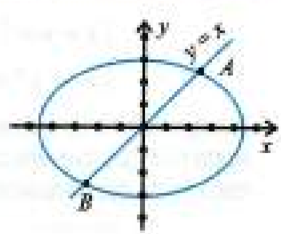
в) Системот од равенките е $\begin{cases} x^2+3y^2=36 \\ x-3y+12=0. \end{cases}$

За решението на системот имаме: $\begin{cases} (3y-12)^2+3y^2=36 \\ x=3y-12 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2-6y+9=0 \\ x=3y-12. \end{cases}$

Дискриминантата на квадратната равенка $D=(-6)^2-4\cdot 9=0$, па $y=\frac{-b}{2a}=3$, а $x=3\cdot 3-12=-3$.
Тоа значи дека правата и елипсата имаат една заедничка точка, т.е. правата ја допира елипсата во точката $M(-3, 3)$.

Според тоа правата може да ја сече, допира или со елипсата да нема заеднички точки што може да се види и од црт.1.

2 Пресметај ја должината на отсечката што елипсата $x^2+2y^2=18$ ја отсекува на симетралата на I и III квадрант.



Црт. 2

Следај го решението:

Равенка на симетралата на I и III квадрант е $y=x$, а системот од равенките е $\begin{cases} x^2+2y^2=18 \\ y=x, \end{cases}$ чие решение е

$x = \pm\sqrt{6}$; $y = \pm\sqrt{6}$. Пресечните точки се $A(\sqrt{6}, \sqrt{6})$, $B(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$, црт. 2. па

должината на тетивата $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

$\overline{AB} = \sqrt{(-\sqrt{6} - \sqrt{6})^2 + (-\sqrt{6} - \sqrt{6})^2}$; $\overline{AB} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

3 Одреди ја заемната положба на правата $y = kx + n$ и елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Согледај го решението:

- Положбата на правата во однос на елипсата ќе ја утврдиме со решение на системот

$$\begin{cases} y = kx + n \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \end{cases}$$

- Со замена имаме: $b^2x^2 + a^2(kx + n)^2 = a^2b^2$;

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2knx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0.$$

- Дискриминанта на оваа равенка е

$$D = (2a^2kn)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2n^2 - a^2b^2);$$
$$D = 4a^2b^2(a^2k^2 + b^2 - n^2).$$

Запомни!

1. Ако $D > 0$, т.е. $a^2k^2 + b^2 - n^2 > 0$, тогаш правата ја сече елипсата.
2. Ако $D = 0$, т.е. $a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0$, тогаш правата ја допира елипсата (правата е тангента на елипсата).
3. Ако $D < 0$, т.е. $a^2k^2 + b^2 - n^2 < 0$, тогаш правата и елипсата немаат заеднички точки.

4 Одреди ја заемната положба на елипсата и правата:

а) $x^2 + 2y^2 = 54$, $x - y - 9 = 0$; б) $x^2 + 4y^2 = 25$, $x + 2y - 7 = 0$;

в) $3x^2 + 16y^2 = 48$, $x + y = 16$.

Согледај го решението:

а) Од равенката на елипсата следува $a^2 = 54$, $b^2 = 27$, а од правата $y = x - 9$, следува $k = 1$, $n = -9$.

Од условот:

$a^2k^2 + b^2 - n^2 = 54 \cdot 1^2 + 27 - (-9)^2 = 54 + 27 - 81 = 0$, следува дека $D = 0$, т.е. правата ја допира елипсата.

Со решавање на системот одреди ја допирната точка $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 54 \\ x = y + 9. \end{cases}$

5 Одреди го c во равенката $x + 2y = c$, така што правата да биде тангента на елипсата $x^2 + 2y^2 = 12$.

Согледај го решението:

Од равенката на елипсата $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$ следува $a^2 = 12$, $b^2 = 6$. Од равенката на правата $y=-\frac{1}{2}x+\frac{c}{2}$, следува $k=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{c}{2}$, па со замена во условот за допир $a^2k^2 + b^2 - n^2 = 0$, имаме $12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+6=\left(\frac{c}{2}\right)^2$, т.е. $c = \pm 6$.

Запомни!

Правата $y = kx + n$ ја допира елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ако е исполнет условот за допир $a^2k^2 + b^2 = n^2$.

Ако правата е во општ вид $Ax + By + C = 0$, тогаш условот за допир е од видот
$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2.$$

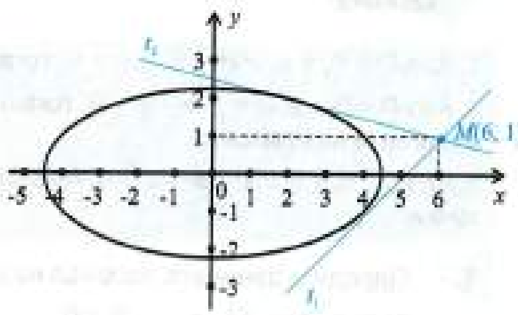
6 За која вредност на параметарот λ правата $\lambda x + y - 3 = 0$ ја допира елипсата $x^2 + 2y^2 = 6$?

7 Напиши ги равенките на тангентите на елипсата $x^2 + 4y^2 = 20$ повлечени од точката $M(6, 1)$.

Согледај го решението:

Бараната тангента е права што минува низ точката M и ја допира дадената елипса, црт. 3.

Од равенката $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ следува $a^2 = 20$, $b^2 = 5$.



црт. 3

Од равенката на права низ една точка имаме:

$$t: y - y_1 = k(x - x_1)$$
$$y - 1 = k(x - 6)$$
$$kx - y + 1 - 6k = 0$$

Коефициентот k ќе го одредиме од условот за допир:

$$a^2A^2 + b^2B^2 = c^2$$

$$20\cdot k^2 + 5\cdot(-1)^2 = (1 - 6k)^2; \quad 20k^2 + 5 = 1 - 12k + 36k^2; \quad 4k^2 - 3k - 1 = 0$$

$$k_1 = 1 \text{ или } k_2 = -\frac{1}{4}.$$

Со замена во равенката на тангентата t имаме:

$$t_1: 1 \cdot x - y + 1 - 6 \cdot 1 = 0; \qquad t_2: -\frac{1}{4}x - y + 1 - 6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = 0\ ;$$

$$x - y - 5 = 0 \qquad\qquad x + 4y - 10 = 0.$$

8 Напиши равенка на тангента на елипсата $x^2 + 3y^2 = 28$ што е нормална на правата $3x - 2y + 11 = 0$.

Согледај го решението:

- Од равенката на елипсата следува $a^2 = 28,\ b^2 = \frac{28}{3}$.

- Од равенката на правата следува $k_p = -\frac{A}{B} = \frac{3}{2}$, а од условот за нормалноста

$k_t = -\frac{1}{k_p} = -\frac{2}{3}$, па: $t: y = kx + n;\quad y = -\frac{2}{3}x + n$ или $2x + 3y - 3n = 0$.

- Од условот за допир имаме:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2,\ \text{т.е.}\ \ 28\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{28}{3} = n^2;\ \ n = \pm\frac{14}{3},\ \text{па}$$

$$t_1:\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3};\quad t_2:\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{14}{3};$$

Задачи

1 Одреди ја заемната положба на правата и елипсата:

а) $x + y = 8,\ 3x^2 + 5y^2 = 120$; б) $5x - 3y = 14,\ x^2 + 3y^2 = 28$;

в) $2x^2 + 5y^2 = 40,\ x - y = 20$.

2 Одреди ги пресечните точки на правата и елипсата:

а) $y = 2x - 9,\ x^2 + 3y^2 = 36$; б) $x - y + 20 = 0,\ 2x^2 + 5y^2 = 40$.

3 За кои вредности на n, правата $y = -x + n$:

а) ја сече елипсата $x^2 + 4y^2 = 20$;

б) ја допира елипсата $4x^2 + 5y^2 = 20$;

в) минува надвор од елипсата $x^2 + 3y^2 = 12$?

4 Одреди го параметарот p така што правата $x + py - 10 = 0$ да ја допира елипсата $x^2 + 4y^2 = 20$.

5 Одреди го аголот под кој се гледа елипсата $3x^2 + y^2 = 48$ од точката $M(8, 0)$.

6 Напиши равенка на тангента на елипсата $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ што е паралелна со правата $2x - y + 17 = 0$.

7 Напиши равенка на тангента на елипсата $2x^2 + 3y^2 = 35$ што е нормална на правата $3x - 8y - 24 = 0$.

8 Напиши равенка на тангента на елипсата $x^2 + 3y^2 = 28$ која со правата $x - 5y = 20$ образува агол од $45°$.

9 Напиши равенка на елипса што ја допира правата $x + 4y - 10 = 0$ во точката $M(2, y)$.

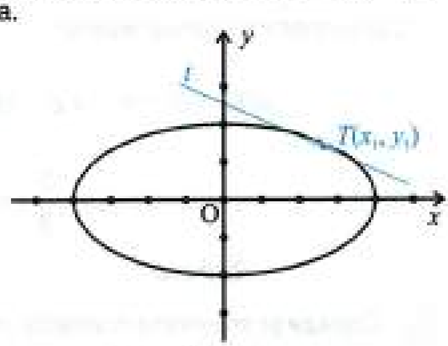
10 Напиши равенка на елипса чии тангенти се правите $x + y - 8 = 0$ и $x + 3y + 16 = 0$.

18 ТАНГЕНТА НА ЕЛИПСА

А 1 Да се напише равенката на тангентата на елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ во точката $T(x_1, y_1)$ од елипсата.

Согледај го решението:

- Тангента на елипса е секоја права што ја допира елипсата, т.е. со елипсата има само една заедничка точка.
- Бараната тангента минува низ точката T, црт.1. па според равенката на правата низ една точка имаме:
t: $y - y_1 = k(x - x_1)$ или $y = kx + y_1 - kx_1$.
- Коефициентот на правецот k ќе го одредиме од условот за допир на правата и елипсата.



црт. 1

- Со замена $n = y_1 - kx_1$ во условот за допир имаме $a^2k^2 + b^2 = (y_1 - kx_1)^2$.
- По извршено степенување и сведување на равенката по степенот на k, равенката е од видот:

$$(a^2 - x_1^2)k^2 + 2x_1y_1 \cdot k + b^2 - y_1^2 = 0.$$

- Бидејќи во точката T може да се повлече само една тангента, значи равенката по непозната k има само едно решение. Тоа е возможно само ако $D = 0$.

Во тој случај $k_1 = k_2 = k$, па $k = -\dfrac{2x_1y_1}{2\left(a^2 - x_1^2\right)} = -\dfrac{x_1y_1}{a^2 - x_1^2}$.

- Точката $T(x_1, y_1)$ лежи на елипсата, па $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$. Оттука по делење со b^2 имаме $x_1^2 + \dfrac{a^2y_1^2}{b^2} = a^2$, т.е. $\dfrac{a^2y_1^2}{b^2} = a^2 - x_1^2$.
- Со замена во $k = -\dfrac{x_1y_1}{a^2 - x_1^2}$ имаме $k = -\dfrac{x_1y_1}{\dfrac{a^2y_1^2}{b^2}} = -\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

Со замена на коефициентот k во равенката на тангентата имаме:

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1).$$

По сведувањето, на равенката добиваме:

$$a^2yy_1-a^2y_1^2=-b^2xx_1+b^2x_1^2;$$
$$b^2xx_1+a^2yy_1=b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2.$$

Според тоа бараната равенка на тангентата е:

$$b^2xx_1+a^2yy_1=a^2b^2 \text{ или } \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

2 Во точките $A(8, 3)$ и $B(6, -4)$ од елипсата $x^2+4y^2=100$, повлечени се тангенти. Одреди го аголот меѓу тангентите.

Согледај го решението:

Од равенката на елипсата $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ следува $a^2=100$, $b^2=25$.

Равенката на тангента во точка од елипсата е од видот $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$, па:

$$t_A:\ \frac{x\cdot 8}{100}+\frac{y\cdot 3}{25}=1; \qquad t_B:\ \frac{x\cdot 6}{100}+\frac{y\cdot(-4)}{25}=1;$$

$$2x+3y-25=0; \qquad 3x-8y-50=0.$$

$$k_1=-\frac{2}{3}; \qquad k_2=\frac{3}{8}$$

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1-k_1\cdot k_2}; \qquad tg\varphi=\frac{\frac{3}{8}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}}=\frac{\frac{9+16}{24}}{\frac{24-6}{24}}=\frac{25}{18};$$

$$\varphi=arctg\frac{25}{18}=72^\circ15'$$

3 Во пресечна точка на правата $5x-3y-14=0$ и елипсата $x^2+3y^2=28$, повлечени се тангенти на елипсата. Напиши ги равенките на тангентите.

Задачи

1. Напиши ја равенката на тангентата на елипсата $5x^2+20y^2=100$ во точката $M(2, 2)$.

2. Напиши ја равенката на тангентата на елипсата $9x^2+25y^2=225$, во точката $T\left(x, \frac{12}{5}\right)$, $x>0$.

3 Напиши равенка на нормала во допирната точка на правата $x - 2y + 9 = 0$ и елипсата $9x^2 + 45y^2 = 405$.

4 Напиши ги равенките на тангентите на елипсата $x^2 + 4y^2 = 20$ во нејзините пресечни точки со правата $3x + 2y = 10$.
Одреди ја плоштината на триаголникот што е ограничен со дадената права и двете тангенти.

5 Напиши ги равенките на тангентите на елипсата $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ во точките $M(4, 3)$ и $N(-4, -3)$. Каква е заемната положба на тангентите?

6 Во пресечните точки на правата $3x + 2y - 7 = 0$ и елипсата $3x^2 + 8y^2 = 35$ повлечени се тангенти на елипсата. Одреди го аголот меѓу нив.

7 Ако нормалата во секоја точка од елипсата минува низ центарот на елипсата тогаш елипсата е кружница. Докажи!

8 Во точката $M(2, y > 0)$ од елипсата $4x^2 + 9y^2 = 36$ повлечена е тангента на елипсата. Од фокусите на елипсата повлечени се нормали на тангентата. Напиши ги равенките на нормалите на таа тангента.

19 ХИПЕРБОЛА. ЦЕНТРАЛНА РАВЕНКА НА ХИПЕРБОЛА

Потсети се!

- За дефиницијата на елипса.
- Што се фокуси на елипса?
- Каква е големата оска на елипса во однос на фокусното растојание?

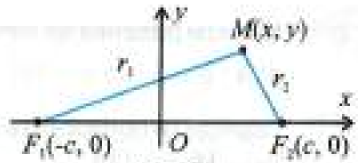
А Елипсата ја дефинираме како множество од точки во рамнинатата чијшто збир на растојанијата (радиус векторите) до две постојани точки секогаш е константен.
Ако наместо збирот се разгледува разликата на растојанијата, т.е. радиус векторите, ќе добиеме крива линија која се вика хипербола, чиишто фиксни точки F_1 и F_2 се викаат фокуси на хиперболата.
Според тоа за хипербола важи следнава

Дефиниција: Хипербола е геометриско место на точки во рамнината кои го имаат својството апсолутната вредност на разликата од растојанијата до две дадени (фиксни) точки од таа рамнина да е константа.

За да ја напишеме равенката на хипербола постапуваме како кај елипсата.

- Поставуваме правоаголен координатен систем, така што x – оската минува низ фокусните, а координатниот почеток да е на средина на отсечката $\overline{F_1F_2}$, која се вика фокусно растојание, црт.1.

При вака избран координатен систем имаме:



црт. 1

- $\overline{F_1F_2} = 2c$; $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$. Бројот $c = \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$ се вика *линеарен ексцентрицитет*.
- Константата што е еднаква на разликата на фокусните радиуси се вика реална оска на хиперболата и се означува со $2a$, $a > 0$ и $a < c$.
- Ако точката $M(x, y)$ е која било точка од хиперболата, тогаш
$$r_1 = \overline{F_1M} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ и } r_2 = \overline{F_2M} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
се викаат фокусни радиуси.
- Од дефиницијата на хиперболата следува
$$|r_1 - r_2| = 2a, \text{ т.е. } \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$
е равенката на хипербола запишана во координатна форма.
- Равенката запишана без апсолутната вредност е од видот
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$
Од равенката се гледа дека, всушност, имаме две равенки, а секоја од нив го изразува условот точката M да лежи на хиперболата. Тоа покажува дека хиперболата е составена од две гранки.
- Понатаму во сведувањето на равенката постапуваме како кај елипса, па имаме:
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a;$$
$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2;$$
$$(-cx - a^2) = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
Со повторено степенување и сведување ја добиваме равенката
$$(c^2 - a^2) \cdot x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$
Бидејќи $c > a$ следува дека $c^2 - a^2 > 0$, па ако извршиме замена
$$c^2 - a^2 = b^2,$$
равенката е од видот
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
која се вика **централна или канонична равенка на хипербола**.
Позитивните броеви a и b се викаат **полуоски на хиперболата**.

1 Напиши равенка на хипербола ако: а) $a = 3$, $b = 7$; б) $b = 6$, $c = 2\sqrt{14}$.

Согледај го решението:

б) Од условот $c^2 - a^2 = b^2$ следува $a^2 = c^2 - b^2$; $a^2 = 56 - 36 = 20$, па равенката на хиперболата е $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{36} = 1$.

2 Напиши равенка на хиперболата ако

а) $a : b = 3 : 4$; $c = 15$; б) $a + c = 25$, $b = 5$.

3 Одреди ги полуоските и координатите на фокусите на хиперболата $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Согледај го решението:

- Равенката запишана во каноничен вид е $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Оттука следува $a^2 = 16$, т.е. $a = 4$; $b^2 = 9$, т.е. $b = 3$, а $c^2 = a^2 + b^2$, т.е. $c^2 = 25$, $c = 5$ па $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$.

4 Напиши равенка на хипербола ако $a = 2$, а минува низ точката $M(4, 3)$.

Б Формата на хиперболата ќе ја согледаме од анализата на нејзината равенка.

Од равенката $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ следува

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \text{и} \quad x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + y^2),$$

$$\text{т.е.} \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{и} \quad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

- Оттука следува:

$y \in \mathbb{R}$ ако $x^2 - a^2 \geq 0$, т.е. $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$, а $x \in \mathbb{R}$ за секој $y \in \mathbb{R}$, бидејќи $b^2 + y^2 > 0$ за кој било реален број y.

Хиперболата е составена од две гранки:

– едната гранка е дефинирана за $x \in (-\infty, -a]$,

– а другата за $x \in [a, \infty)$.

За $x = \pm a$ следува $y = 0$, т.е. хиперболата ја сече x – оската во точките $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$, кои се викаат темиња на хиперболата, а отсечката $\overline{A_1A_2} = 2a$ се вика реална оска на хиперболата.

- Од решението $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$ се гледа дека за секој $y \in \mathbb{R}$ вредноста на $x \neq 0$, значи хиперболата не ја сече y – оската.

- Бројот $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ се вика имагинарна полуоска, а должината на отсечката $\overline{B_1B_2} = 2b$ која лежи на y – оската, се вика имагинарна оска.

- Од решенијата $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ и $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$ следува дека хиперболата е симетрична во однос на координатните оски, т.е. има две оски на симетрија.

- Ако точката $T(x, y)$ лежи на хиперболата, тогаш и точката $T_1(-x, -y)$ исто така, лежи на хиперболата, а должината на отсечката $\overline{TT_1}$, чија средишна точка е координатен почеток, се вика дијаметар на хиперболата. Координатниот почеток O е центар на хиперболата.

B Да ја разгледаме равенката $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ во следниот вид:

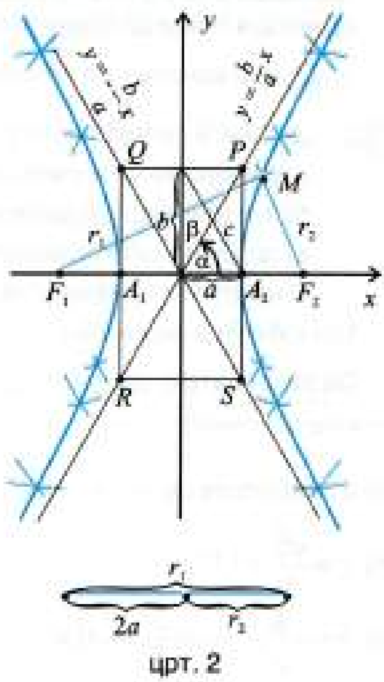
$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

- Ако апсцисата x расте по апсолутна вредност кон бесконечно големи броеви, тогаш количникот $\frac{a^2}{x^2}$ се намалува и се стреми кон 0, па разликата $1 - \frac{a^2}{x^2}$ се стреми кон 1 и во тој случај равенката ќе премине во следниов вид $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Значи, ако апсцисата x расте по апсолутна вредност, ординатите на соодветните точки на хиперболата $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ и на правите $y = \pm\frac{b}{a}x$ стануваат се поблиски една на друга, т.е. графикот на хиперболата се доближува до правите $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Запомни!

> Правите $y = \pm\frac{b}{a}x$ се викаат *асимптоти на хиперболата*.



црт. 2

Асимптотите се користат за попрецизно цртање на хипербола.

Ако се конструира правоаголник $MNPQ$ чии страни се паралелни со координатните оски, а се со должина $2a$ и $2b$, црт. 2, тогаш асимптотите лежат на дијагоналите на правоаголникот бидејќи нивните коефициенти на правци се $tg\alpha = \frac{b}{a}$; $tg\beta = tg(180 - \alpha) = -tg\alpha = -\frac{b}{a}$.

- На црт. 2. нацртан е правоаголник, повлечени се асимптотите и прикажана е една геометриска конструкција на хипербола.
- Ги одредуваме темињата A_1 и A_2 на хиперболата и фокусите $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.
- Избираме произволен радиус $r_1 > 2a$.
- Опишуваме кружни лаци $k_1(F_1, r_1)$ и $k_2(F_2, r_1)$.

- Го одредуваме $r_2 = r_1 - 2a$.
- Опишуваме кружен лак $k_3(F_1, r_2)$ и $k_4(F_2, r_2)$.
- Пресечните точки на овие лаци определуваат 4 точки од хиперболата, бидејќи $\overline{F_1M} - \overline{F_2M} = r_1 - (r_1 - 2a) = 2a$.
- Со повторување на оваа постапка за друга вредност на r_1 се добиваат 4 нови точки итн.

Хиперболата во која $b = a$ се вика *рамнострана хипербола*, а нејзината равенка е $x^2 - y^2 = a^2$.

- Формата на хиперболата зависи од бројот $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ кој се вика *нумерички ексцентрицитет*.

Бидејќи $c > a$ следува дека $\varepsilon > 1$. Доколку ексцентрицитетот на хиперболата е поголем, дотолку хиперболата ќе биде поотворена, т.е. нејзините гранки се пооддалечени од x – оската.

- Правите $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ се викаат директриси на хиперболата.

Бидејќи $\varepsilon > 1$, следува дека $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$ и $-\dfrac{a}{\varepsilon} > -a$, т.е. директрисите не ја сечат хиперболата. За директрисите важи следново својство: ако r е растојание од произволна точка на хиперболата до еден од нејзинитие фокуси, а d растојание од истата точка до директрисата што е поблиску до избраниот фокус, тогаш односот е константна величина, т.е. $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$.

5 Дадена е хиперболата $x^2 - 4y^2 = 4$. Одреди ги:

а) равенките на асимптотите на хиперболата;

б) нумеричкиот ексцентрицитет;

в) директрисите на хиперболата;

г) нацртај го графикот на хиперболата.

Согледај го решението:

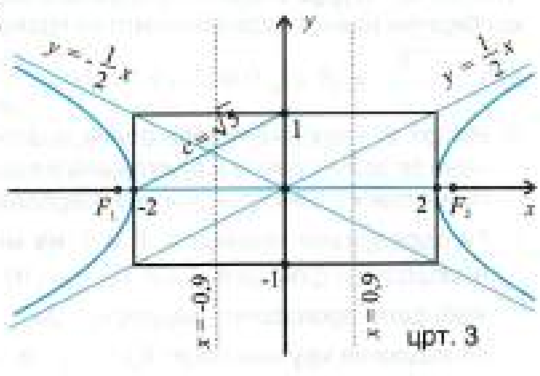
- Од равенката следува $a = 2$, $b = 1$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$;

а) асимптотите се $y = \pm\dfrac{1}{2}x$;

б) $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}12$;

в) $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$; $x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -0{,}9$;

$x = \dfrac{a}{\varepsilon}$; $x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}9$, црт. 3.



црт. 3

Запомни!

Равенката на хиперболата со центар во координатниот почеток е од видот

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ или $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Точките $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ се викаат фокуси на хиперболата, при што

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

6 Напиши равенка на хипербола, ако:

а) $a = 12,\ \varepsilon = 1{,}25;$ б) $c = 4\sqrt{2}$, $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Согледај го решението:

б) Од $c^2 - a^2 = b^2$ и $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ следува $\left(4\sqrt{2}\right)^2 - a^2 = b^2$ и $\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{a}$.

Оттука следува $a = 4$, и $b^2 = 16 \cdot 2 - 16 = 16$, па равенката на хиперболата е

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1,\ \text{т.е. } x^2 - y^2 = 16,$$

хиперболата е рамнострана.

7 Равенките на асимптотите се $y = \pm\dfrac{5}{12}x$, а реалната оска 48.

Напиши ја равенката на хиперболата.

Согледај го решението:

Од равенките на асимптотите следува $\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{12}$ и $2a = 48$. Оттука следува

$a = 24,\ b = \dfrac{5}{12} \cdot a = 10$. Равенката на хиперболата е $\dfrac{x^2}{576} - \dfrac{y^2}{100} = 1$.

8 Напиши равенка на хипербола која минува низ точките $A(2, 1)$; $B(10, 7)$.

Согледај го решението:

Координатите на точките A и B, ја задоволуваат равенката на хиперболата

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, па $\dfrac{2^2}{a^2} - \dfrac{1^2}{b^2} = 1$ и $\dfrac{10^2}{a^2} - \dfrac{7^2}{b^2} = 1$.

Го решаваме системот

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 1 / \cdot (-25) \\ \dfrac{100}{a^2} - \dfrac{49}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{100}{a^2} + \dfrac{25}{b^2} = -25 \\ \dfrac{100}{a^2} - \dfrac{49}{b^2} = 1 \end{cases}$$

После собирањето на двете равенки имаме:

$$\frac{25}{b^2} - \frac{49}{b^2} = -25 + 1;\ -\frac{24}{b^2} = -24;\ b^2 = 1.$$

со замена на $b^2 = 1$ во една равенка имаме $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{1} = 1$, т.е. $\frac{4}{a^2} = 2$, $a^2 = 2$, па равенката на хиперболата е $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1$ или $x^2 - 2y^2 = 2$.

Задачи

1 Напиши равенка на хипербола, ако:

а) $a = 4$, $c = 5$; б) $c = 3$, $\varepsilon = \frac{3}{2}$; в) $a + b = 7$, $c = 5$.

2 Дадена е хиперболата $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. Одреди ги нејзините:

а) полуоски;

б) фокусите;

в) нумеричкиот ексцентрицитет;

г) равенките на асимптотите;

д) конструирај го графикот на хиперболата.

3 Напиши равенка на хипербола чија имагинарна оска е $\sqrt{2}$ и минува низ точката $A(9, -4)$.

4 Напиши равенка на хипербола чии фокуси се $F(\pm 10, 0)$ и минува низ точката $M(12, 3\sqrt{5})$.

5 Напиши равенка на хипербола чии темиња се во фокусите на елипсата $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$, а фокусите на хиперболата се во темињата на дадената елипса што се на x – оската.

6 Фокусите на хиперболата се совпаѓаат со фокусите на елипсата $9x^2 + 25y^2 = 225$. Напиши ја равенката на хиперболата, ако нејзиниот нумерички ексцентрицитет $\varepsilon = 2$.

7 Напиши равенка на хипербола која минува низ точката $A(6, 9)$, а равенките на нејзините асимптоти се $y = \pm\frac{5}{2}x$.

8 Напиши равенка на хипербола која минува низ точките:

а) $A(4, -2)$, $B(4\sqrt{3}, 4)$; б) $M(-6, 3)$, $N(4, -\frac{1}{3})$.

9 Одреди ја точката на хиперболата $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ чие растојание до левиот фокус е 7.

10 Да се напише равенка на рамнострана хипербола која минува низ точката $A(-5, 4)$. Конструирај го графикот на хиперболата.

20 ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И ХИПЕРБОЛА

Потсети се!

- Како ја утврдуваме заемната положба на права и елипса?
- Правата $y = kx + n$ ја допира елипсата $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ако е задоволен условот за допир $a^2k^2 + b^2 = n^2$.
- Равенка на тангента на елипсата во точката $T(x_1, y_1)$ од елипсата е $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$.

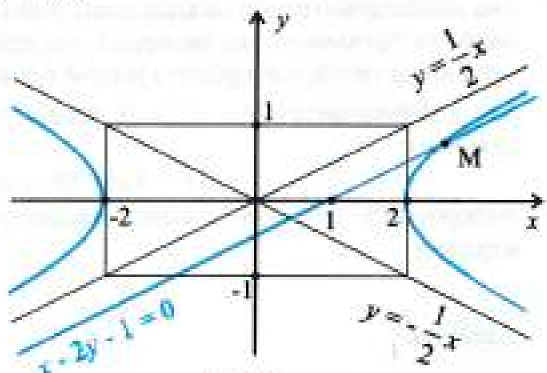
A 1 Одреди ја заемната положба на правата и хиперболата:

а) $x - 2y - 1 = 0,\ x^2 - 4y^2 = 4$; б) $x - y - 3 = 0,\ 3x^2 - 12y^2 = 36$;

в) $2x - y - 10 = 0,\ x^2 - 4y^2 = 20$.

Согледај го решението:

- И во овој случај, како кај правата и елипсата, положбата ќе ја утврдиме со решавање на соодветниот систем равенки.



црт. 1

а) $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ (2y+1)^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$;

$4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 = 4$

$4y = 3$

$y = \frac{3}{4},\ x = \frac{5}{2};\ M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Правата ја сече едната гранка на хиперболата, црт. 1.

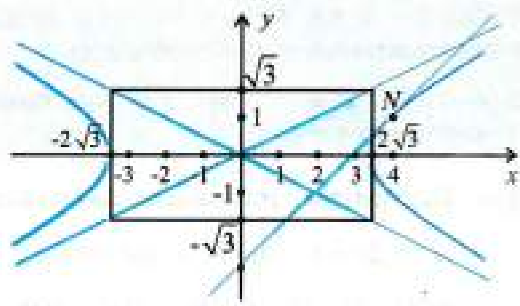
б) $\begin{cases} x = y + 3 \\ 3(y+3)^2 - 12y^2 = 36 \end{cases}$;

$3(y^2 + 6y + 9) - 12y^2 = 36$;

$y^2 - 2y + 1 = 0$;

$y_1 = 1,\ x = 4;\ N(4, 1)$.

Правата ја допира хиперболата, црт. 2



црт. 2

в) $\begin{cases} y = 2x - 10 \\ x^2 - 4(2x-10)^2 = 20 \end{cases}$; $x^2 - 400 + 160x - 16x^2 - 20 = 0$; $3x^2 - 32x + 84 = 0$;

$x_1 = 6,\ y_1 = 2;\ A(6, 2),\ x_2 = \frac{14}{3},\ y_2 = -\frac{2}{3};\ B\left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Правата ја сече хиперболата.

- Воочи, правата и хиперболата можат да имаат една заедничка точка, две заеднички точки или воопшто да немаат заедничка точка.
- Ако правата и хиперболата имаат само една заедничка точка, тогаш правата или ја сече само едната гранка на хиперболата, црт. 1, или е тангента на хиперболата, црт. 2.

2 Одреди го условот така што правата $y = kx + n$ да е тангента на хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Согледај го решението:

- Исто како кај заемната положба на правата и елипсата го решаваме системот равенки:

$$\begin{cases} y = kx + n \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = kx + n \\ b^2x^2 - a^2(kx+n)^2 = a^2b^2 \end{cases};$$

т.е. $(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2knx - a^2n^2 - a^2b^2 = 0.$

- Ако коефициентот кај квадратниот член е $b^2 - a^2k^2 = 0$, тогаш квадратната равенка преминува во линеарна, па правата и хиперболата имаат една заедничка точка, т.е. правата ја сече едната гранка на хиперболата.
- Ако коефициентот $b^2 - a^2k \neq 0$, тогаш дискриминантата на квадратната равенка е

$$D = 4a^2b^2\,(b^2 - a^2k^2 + n^2).$$

Бидејќи $4a^2b^2 > 0$, значи знакот на дискриминантата зависи од знакот на изразот

$$b^2 - a^2k^2 + n^2.$$

Запомни!

1. Ако $D > 0$, т.е. $b^2 - a^2k^2 + n^2 > 0$, тогаш правата ја сече хиперболата.

2. Ако $D = 0$, т.е. $b^2 - a^2k^2 + n^2 = 0$, тогаш правата ја допира хиперболата (правата е тангента на хиперболата).

3. Ако $D < 0$, т.е. $b^2 - a^2k^2 + n^2 < 0$, тогаш правата и хиперболата немаат заеднички точки.

3 Одреди ја меѓусебната положба на правата и хиперболата:

а) $x - 2y + 1 = 0,\ \ 9x^2 - 16y^2 = 144;$ б) $7x - 5y = 0;\ \ \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1;$

в) $4x - 3y - 16 = 0,\ 16x^2 - 25y^2 = 400.$

Согледај го решението:

а) Следува дека $b^2 = 9$, $a^2 = 16$, а од правата $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; $k = \dfrac{1}{2}$, $n = \dfrac{1}{2}$.

- Ја одредуваме вредноста на изразот $b^2 - a^2k^2 + n^2$, т.е.

$$b^2 - a^2k^2 + n^2 = 9 - 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 9 - 4 + \frac{1}{4} = 5\frac{1}{4} > 0.$$

Значи, правата ја сече хиперболата.

Одреди ги пресечните точки со решавање на системот равенки: $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 9x^2 - 16y^2 = 144. \end{cases}$

4 Одреди го параметарот p така што правата $2x - y - p = 0$ да ја допира хиперболата $8x^2 - 3y^2 = 24$.

Согледај го решението:

Од равенката на хиперболата следува $b^2 = 8$, $a^2 = 3$, а од правата $y = 2x - p$ следува $k = 2$, $n = -p$.
Со замена во условот $b^2 - a^2k^2 + n^2 = 0$, имаме $8 - 3 \cdot 22 + (-p)^2 = 0$; $p^2 = 4$; $p = \pm 2$.

Запомни!

Правата $y = kx + n$ ја допира хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ако е исполнет условот

$$\boxed{a^2k^2 - b^2 = n^2.}$$

Ако правата е во општ вид $Ax + By + C = 0$, тогаш условот за допир е

$$a^2A^2 - b^2B^2 = C^2.$$

5 За која вредност на параметарот n, правата $5x - 2y + 2n = 0$ ја допира хиперболата $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{30} = 1$?

6 Напиши равенка на тангента на хиперболата $x^2 - 2y^2 = 2$ која минува низ точката $A(3, 2)$.

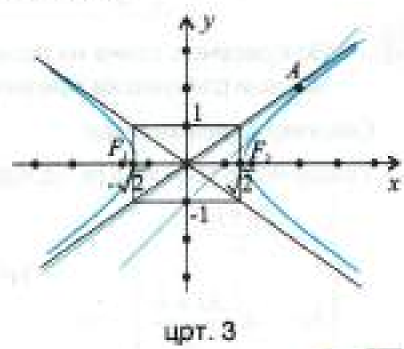
Согледај го решението:

Бараната равенка на тангентата е од видот $t: y - y_1 = k(x - x_1)$ која минува низ $A(-4, 3)$.

$$y - 2 = k(x - 3); \qquad y = kx - 3k + 2.$$

Од равенката на хипербола следува $a^2 = 2$, $b^2 = 1$, па од условот за допир имаме:

$$a^2k^2 - b^2 = n^2$$
$$2 \cdot k^2 - 1 = (-3k + 2)^2$$
$$2k^2 - 1 = 4 - 12k + 9k^2$$
$$7k^2 - 12k + 5 = 0$$
$$k_1 = 1,\ k_2 = \frac{5}{7}.$$



црт. 3

а тангентите се:

$$t_1: y = x - 3 + 2; \; y = x - 1, \qquad \text{или} \qquad t_2: y = \frac{5}{7}x - \frac{1}{7}, \text{ црт. 3.}$$

7 Напиши равенка на тангента на хиперболата $4x^2 - y^2 = 1$ што е паралелна со правата $10x - 3y + 9 = 0$.

Б Напиши равенка на тангента на хиперболата $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, во точката $T(x_1, y_1)$ од хиперболата.

Бараната тангента е од видот

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Коефициентот k се определува на ист начин како кај елипсата, па $k_t = \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$,

а тангентата е од видот $y - y_1 = \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$, која по средување е

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2 \text{ или } \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

8 Напиши равенка на тангента на хипербола во точката M од хиперболата:

а) $x^2 - y^2 = 40$, $M(x > 0, 9)$; б) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{64} = 1$, $M\left(-6\dfrac{1}{4}, y < 0\right)$.

Согледај го решението:

б) Координатите на точката M ја задоволуваат равенката на хиперболата,

па од $\dfrac{\left(\dfrac{-25}{4}\right)^2}{25} - \dfrac{y^2}{64} = 1$ следува $y = \pm 6$, а точката $M\left(-6\dfrac{1}{4}, -6\right)$.

Равенката на тангентата е

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2;$$

$$64x \cdot \left(\frac{-25}{4}\right) - 25y \cdot (-6) = 25 \cdot 64, \text{ или } 8x - 3y + 32 = 0.$$

9 Во пресечна точка на правата $3x - 2y + 6 = 0$ и хиперболата $3x^2 - 4y^2 = 12$, напиши равенка на тангента и нормала на хиперболата.

Согледај го решението:

Пресечните точки ќе ги одредиме со решение на системот

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x+6}{2} \\ 3x^2 - 4\left(\dfrac{3x+6}{2}\right)^2 = 12 \end{cases} ; \quad 3x^2 - 4 \cdot \frac{9x^2 + 36x + 36}{4} - 12 = 0; \; x^2 + 6x + 8 = 0.$$

Решенијата на системот се: $x_1 = -2, x_2 = -4$, а $y_1 = 0$ и $y_2 = -3$.

Пресечните точки се: $A(-2, 0)$ и $B(-4,-3)$.

- Равенката на тангентата:

во точката $A(-2, 0)$ е:

t_1: $3xx_1 - 4yy_1 = 12$

$3x \cdot (-2) - 4y \cdot 0 = 12$

$x + 2 = 0$

а во точката $B(-4, -3)$ е:

t_2: $3xx_1 - 4yy_1 = 12$

$3x(-4) - 4y(-3) = 12$

$x - y + 1 = 0$

- Равенката на нормалата во точката $A(-2, 0)$, во темето на хиперболата, е права што е нормална на правата $x = -2$, тоа е самата x – оска: т.е. $n : y = 0$.

- Коефициентот на правецот на тангентата во точката B: $k_t = -\dfrac{A}{B} = 1$. Од условот на нормалноста следува $k_n = -\dfrac{1}{k_t} = -1$, па нормалата во точката B е

$$y - y_1 = k_n(x - x_1);$$

$$y + 3 = -1 \cdot (x + 4) \text{ или } x + y + 7 = 0.$$

Задачи

1. Одреди го пресекот на правата и хиперболата:

а) $20x - 9y - 60 = 0,\ 16x^2 - 9y^2 = 144$; б) $2x - y - 10 = 0,\ x^2 - 4y^2 = 20$.

2. Одреди ја заемната положба на правата и хиперболата:

а) $2x - y + 3 = 0,\ \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$; б) $x + y - 3 = 0,\ x^2 - 4y^2 = 12$;

в) $x - y = 0,\ 3x^2 - 4y^2 = 12$.

3. Во равенката на правата $y = kx - \dfrac{5}{2}$ одреди го параметарот k така да правата ја допира хиперболата $x^2 - 4y^2 = 20$.

4. Дадена е равенка на хипербола $16x^2 - a^2y^2 = 16a^2$. Одреди го a така што правата $y = 2x - 8$ да е тангента на хиперболата.

5. Напиши ги равенките на тангентите на хиперболата $16x^2 - 25y^2 = 400$ повлечени од точката $M(-1, -4)$. Одреди го аголот меѓу тангентите.

6. Напиши ги равенките на тангентите на хиперболата $\dfrac{x^2}{15} - \dfrac{y^2}{6} = 1$ кои се:

а) паралелни со правата $x + y - 7 = 0$; б) нормални на правата $x - 2y = 0$.

7. Одреди ја равенката на тангентата на хиперболата $3x^2 - 4y^2 = 12$ која на координатните оски отсекува отсечки со еднакви должини.

8) Во пресечените точки на правата $y = 3$ и хиперболата $16x^2 - 25y^2 = 400$ повлечени се нормали на хиперболата. Одреди ја плоштината на триаголникот ограничен со нормалите и дадената права.

9) Да се напише равенка на хипербола чии фокуси се во точките $F(\pm 3, 0)$, а ја допира правата $2x - y - 4 = 0$.

10) Напиши равенка на тангента на хиперболата $x^2 - 2y^2 = 4$ која со правата $x + 7y - 9 = 0$ формира агол од $45°$.

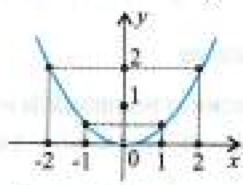
21 РАВЕНКА НА ПАРАБОЛА

Потсети се!

- Графикот на функцијата $y = x^2$ е парабола чие теме е во координатниот почеток.

- На цртежот е прикажан графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



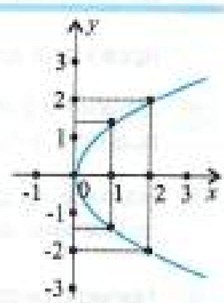
- Графикот на квадратна функција $y = ax^2$ е парабола чие теме е во координатниот почеток.
  Ако $a > 0$, параболата е свртена со отворот нагоре.
  Ако $a < 0$, параболата е свртена со отворот надолу.

- Потсети се за својствата на квадратната функција $y = ax^2$.

А 1 Нацртај го графикот на функцијата $y^2 = 2x$.

Согледај го решението:

x	0	1	2
y	0	$\pm\sqrt{2}$	± 2



црт. 1

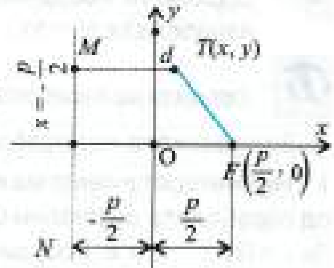
Воочи, графикот на функцијата $y^2 = 2x$, црт. 1, е парабола симетрична во однос на x – оската.

За параболата важи следната

Дефиниција: Парабола е геометриско место на точки во рамнина кои се подеднакво оддалечени од една фиксна точка (фокус) и една фиксна права (директриса).

Треба да напишеме равенка на парабола што ќе ја задоволуваат координатите од произволна точка од параболата (и само тие).

За таа цел поставуваме правоаголен координатен систем, така што x – оската да минува низ фокусот и да е нормална на директрисата, а координатниот почеток да е на средина меѓу фокусот и директрисата MN, црт.2.



црт. 2

Растојанието од фокусот до директрисата се вика параметар и се означува со p, па $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а равенката на директрисата е $x = -\frac{p}{2}$.

Ако точката $T(x, y)$ е која било точка од параболата, тогаш според дефиницијата за парабола имаме $\overline{FT} = \overline{MT}$.

Бидејќи $\overline{FT} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2}$; $\overline{MT} = \frac{p}{2} + x$, имаме:

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x; \quad \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2;$$

$$\frac{p^2}{4} - px + x^2 + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}, \text{ т.е. } \quad y^2 = 2px.$$

Запомни!

Ако фокусот на параболата е на x – оската, тогаш $y^2 = 2px$ е равенка на парабола, која се вика **канонична** или **темена равенка на парабола**.

2 Напиши равенка на парабола ако нејзиниот фокус е $F(2,5; 0)$.

Согледај го решението:

Бидејќи $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, следува дека $\frac{p}{2} = 2,5$; т.е. $p = 5$, па равенката на параболата е $y^2 = 2px$, т.е. $y^2 = 10x$.

3 Напиши равенка на параболата чија оска на симетрија е x – оската, а минува низ точката $A(2, 4)$.

Согледај го решението:

Точката лежи на параболата $y^2 = 2px$, па со замена имаме $4^2 = 2p \cdot 2$, $p = 4$, а равенката на параболата е $y^2 = 2 \cdot 4 \cdot x$ или $y^2 = 8x$.

4 Одреди ги координатите на фокусот и равенката на директрисата на параболата $y^2 = 5x$.

Б Формата на параболата ќе ја согледаме од анализата на нејзината равенка.

- За равенката на параболата $y^2 = 2px$ имаме:

1. Параметарот p секогаш е позитивен број, т.е. $p > 0$, па ординатите на точките од параболата се реални броеви, т.е. $y \in \mathbb{R}$ само ако $x \geq 0$.
За $x = 0$ и $y = 0$, т.е. координатниот почеток е тема на параболата.
2. Ако точката $T(x, y)$ лежи на параболата, тогаш и точката $T_1(x, -y)$, исто така, е точка од параболата. Значи параболата е симетрична во однос на x – оската, црт. 3.

- Ако фокусот на параболата е $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, а директрисата $x = \frac{p}{2}$, тогаш равенката на параболата е од видот $y^2 = -2px$, црт. 4.

- Ако фокусот на параболата е на y – оската, т.е. $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$, а директрисата $y = -\frac{p}{2}$, тогаш параболата е од видот $x^2 = 2py$, црт. 5.

- Ако фокусот на параболата е $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$, а директрисата е $y = \frac{p}{2}$, тогаш параболата е од видот $x^2 = -2py$, црт. 6.

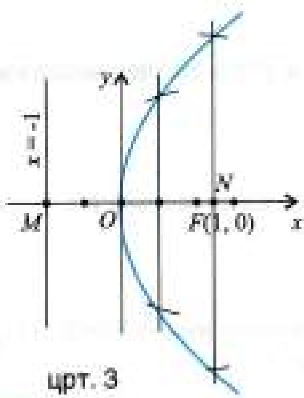
5 Одреди ги координатите на фокусот и равенката на директрисата на параболата:

а) $y^2 = 4x$; б) $y^2 = -8x$; в) $x^2 - 6y = 0$; г) $x^2 + 10y = 0$.

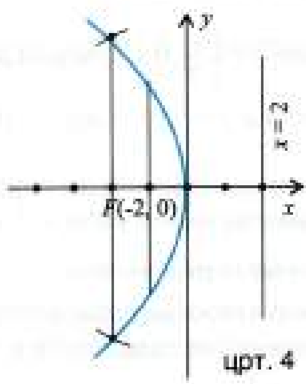
Нацртај го графикот на параболата.

Согледај го решението:

- а) Од равенката $y^2 = 4x$ следува $2p = 4$, $p = 2$, па $F(1, 0)$ и $x = -1$ (црт. 3).



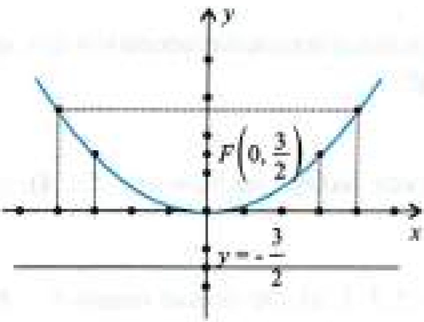
црт. 3



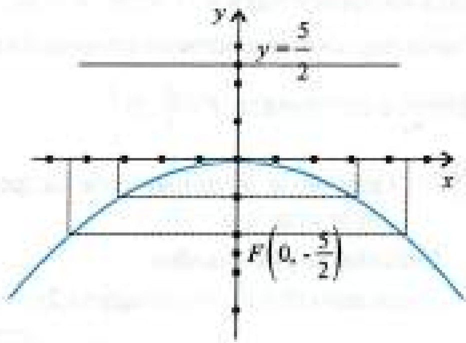
црт. 4

б) Од равенката $y^2 = -8x$ следува дека параболата е дефинирана за $x \leq 0$, т.е. $2p = 8$, $p = 4$, а $F(-2, 0)$ и $x = 2$ (црт. 4).

в) Од равенката $x^2 = 6y$ следува дека оска на симетрија е y –оската, т.е. фокусот на параболата е на y – оската, црт. 5, $2p = 6$, $p = 3$, па $F\left(0, \frac{3}{2}\right)$ и $y = -\frac{3}{2}$ е директриса.



црт. 5



црт. 6

г) Од равенката $x^2 = -10y$ следува дека параболата е дефинирана за $y \leq 0$, т.е. $2p = 10$, $p = 5$, а $F\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ и $y = \frac{5}{2}$, црт. 6.

Равенката $x^2 = 2py$, може да се напише во следниов вид $y = \frac{1}{2p}x^2$, значи равенката на параболата е исто што и квадратната функција $y = ax^2$, при што $a = \frac{1}{2p}$.

- Воочи една геометриска конструкција на параболата, црт. 3.
- Нека директрисата ја сече оската на симетрија во точката M.
- Од произволна точка N на оската на симетрија повлекуваме нормала на неа.
- Точките во кои кружницата $k\left(F, r = \overline{MN}\right)$ ја сече нормалата повлечена од точките N се точки од параболата.
  На ист начин се одредуваат произволен број на точки од параболата.

6 Напиши равенка на парабола, ако:

а) $F(-3, 0)$; б) $F(0, -4)$; в) равенка на директрисата е $y + 2 = 0$.

Согледај го решението:

- а) Од положбата на фокусот следува дека параболата се наоѓа лево од y – оската, па нејзината равенка е од видот $y^2 = -2px$.

Бидејќи $\frac{p}{2} = 3$, т.е. $p = 6$ равенката на параболата е $y^2 = -2 \cdot 6 \cdot x = -12x$.

б) Од $F(0, -4)$ следува $\frac{p}{2} = 4$, $p = 8$, а равенката е од видот $x^2 = -2py$, т.е. $x^2 = -16y$.

в) Од равенката на директрисата $y = -2$ следува $-\frac{p}{2} = -2$, т.е. $p = 4$, а равенката на параболата е $x^2 = 2py$, $x^2 = 8y$.

Понатаму, ако не е поинаку речено, ќе разгледуваме само парабола $y^2 = 2px$; чиј фокус е во точката $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

7 Пресметај ја должината на фокалниот радиус на точката $A(x, 4)$, од параболата $y^2 = 4x$.

Согледај го решението:

Од равенката $y^2 = 4x$ следува $2p = 4$, $p = 2$, $F(1, 0)$. Со замена имаме $4^2 = 4x$; $x = 4$, Точката $M(4, 4)$, а $\overline{FM} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2} = 5$.

8 Напиши ја равенката на фокусниот радиус на параболата $y^2 = 32x$ што минува низ точката чија апсциса е четири пати помала од ординатата.

Согледај го решението:

Од условот следува $x = \frac{1}{4}y$, т.е. $y = 4x$, па со замена во равенката на параболата имаме $(4x)^2 = 32x$; $16x^2 - 32x = 0$; $x = 0$ или $x = 2$. Од условот е $x \neq 0$. За $x = 2$, $y = 4 \cdot 2 = 8$, па $A(2, 8)$ е бараната точка.

Од параболата следува $2p = 32$, $p = 16$, а фокусот $F(8, 0)$.

Фокусниот радиус е права што минува низ точките $F(8, 0)$ и $A(2, 8)$, т.е.

$$FA: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1); \quad y = \frac{8}{2-8}(x - 8);$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{32}{3} \text{ или } 4x + 3y - 32 = 0.$$

Задачи

1. Напиши равенка на парабола:

   а) чија оска е x – оската, а минува низ $M(9, 6)$.

   б) чија оска е y – оската, а минува низ $N(4, 8)$.

2. Напиши равенка на параболата чиј фокус е $F(-7, 0)$, а темето во координатниот почеток.

3. Напиши ја равенката на параболата $y^2 = 2px$, која минува низ точката
а) $A(4, 4)$; б) $B(-1, 2)$; в) $C(-2, -6)$.

4. Одреди го фокусот и равенката на директрисата на параболата $y^2 = 18x$.

5. Одреди ја должината на фокалниот радиус на точката $M(x, 6)$ на параболата $y^2 = 9x$.

6. На параболата $y^2 = 16x$ да се одреди точката чијшто фокален радиус е 13.

7. Низ фокусот на параболата $y^2 = 10x$ повлечена е права нормална на нејзината оска. Одреди ја должината на тетивата на параболата.

8. Низ фокусот на параболата $y^2 = 8x$ и нејзината точка $N(4{,}5;\ y)$, $y > 0$ повлечена е права. Напиши ја равенката на правата.

9. Околу рамнокрак триаголник со основа $a = 6$ и висина $x = 4$ е опишана парабола. Напиши ја равенката на параболата ако врвот на триаголникот е во координатниот почеток, а основата е нормална на x – оската.

10. Во параболата $y^2 = 6x$ вишан е рамностран триаголник. Едното теме на триаголникот е во темето на параболата, а едната страна е нормална на x – оската. Одреди ја плоштината на триаголникот.

22 ЗАЕМЕН ОДНОС НА ПРАВА И ПАРАБОЛА

Потсети се!

- Како го одредуваме заемен однос на права и кружница, права и елипса, права и хипербола?
- Какви се корените на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, ако $D > 0$, $D < 0$ или $D = 0$? Ако $D = 0$, тогаш $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

А 1 Одреди ја заемната положба на правата и параболата:

в) $2x + y - 12 = 0$, $y^2 = 12x$;

б) $x - y + 2 = 0$, $y^2 = 8x$;

в) $2x - y + 3 = 0$, $y^2 = 5x$.

Согледај го решението:

- Со решавање на системот равенки ќе ја одредиме положбата на правата и параболата.

а) $\begin{cases} y = 12 - 2x \\ y^2 = 12x \end{cases}$; $(12 - 2x)^2 = 12x$; $x^2 - 15x + 36 = 0$; $x_{1/2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4\cdot 36}}{2}$;

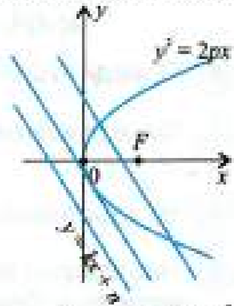
$x_1 = 12, y_1 = -12$; $A(12, -12)$; $x_2 = 3, y_2 = 6$; $B(3,6)$.

Правата ја сече параболата.

б) Правата ја допира параболата, т.е. е тангента на параболата.

в) Правата и параболата немаат заедничка точка.

2 Одреди го условот така што правата $y = kx + n$ ја допира, сече или нема заедничка точка со параболата $y^2 = 2px$.



црт. 1

Согледај го решението:

Од системот $\begin{cases} y = kx + n \\ y^2 = 2px \end{cases}$ имаме: $(kx + n)^2 = 2px$;

$k^2x^2 + 2(kn - p)x + n^2 = 0.$

Дискриминантата на равенката $D = (2(kn - p))^2 - 4k^2n^2$;

$$D = 4p(p - 2kn).$$

Бидејќи $p > 0$, знакот на дискриминантата зависи од изразот $p - 2kn$.

Запомни!

1. Ако $D > 0$, т.е. $p - 2kn > 0$, тогаш правата ја сече параболата.
2. Ако $D = 0$, т.е. $p - 2kn = 0$, тогаш правата ја допира параболата, правата е тангента на параболата.
3. Ако $D < 0$, т.е. $p - 2kn < 0$, тогаш правата и параболата немаат заедничка точка, црт. 1.

3 Одреди ја заемната положба на параболата $y^2 = 4x$ и правата:

а) $2x + 3y + 4 = 0$; б) $x - 3y + 9 = 0$; в) $3x - y + 1 = 0$.

Согледај го решението:

а) Од равенката на правата следува $k = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{2}{3}$, $n = -\dfrac{C}{B} = -\dfrac{4}{3}$, а од параболата $2p = 4$, т.е. $p = 2$, па $p - 2kn = 2 - 2 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) \cdot \left(-\dfrac{4}{3}\right) = 2 - \dfrac{16}{9} = \dfrac{2}{9} > 0.$

Значи, правата ја сече параболата.
Одреди ги координатите на пресечните точки со решавање на системот.

4 За која вредност на параметарот k правата $y = kx + 3$:

а) ја сече параболата $y^2 = 6x$; б) ја допира параболата $y^2 = 4x$;
в) нема заедничка точка со параболата $y^2 = 3x$.

Согледај го решението:

в) Од параболата следува $2p = 3$, $p = \dfrac{3}{2}$, па од условот $p - 2kn < 0$ следува

$$\frac{3}{2} - 2 \cdot k \cdot 3 < 0; \quad 3 - 12k < 0; \quad k > \frac{1}{4}.$$

5 Напиши равенка на тангента на параболата $y^2 = 8x$ повлечена од точката $M(5, -7)$.

Согледај го решението:

Бараните тангенти се:

$$t: y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y + 7 = k(x - 5)$$

$$y = kx - 5k - 7.$$

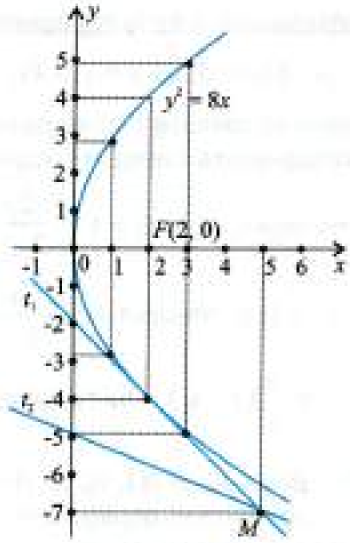
Од параболата следува $2p = 8$, $p = 4$, па со замена во условот за допир имаме:

$$4 - 2k(-5k - 7) = 0$$

$$5k^2 + 7k + 2 = 0$$

$$k_1 = -\frac{2}{5}, \quad t_1: y = -\frac{2}{5}x - 5;$$

$$k_2 = -1, \quad t_2: y = -x - 2, \text{ црт.2.}$$



црт. 2

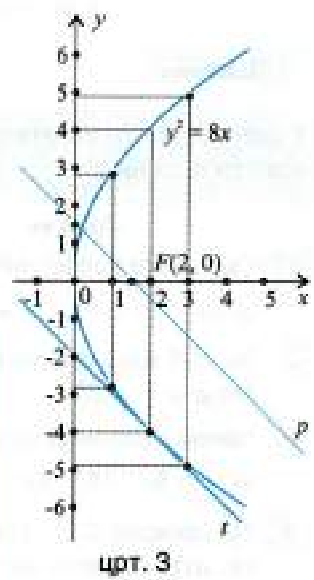
6 Напиши равенка на тангента на параболата $y^2 = 8x$ што е паралелна со правата $p: 2x + 2y - 3 = 0$.

Согледај го решението:

Од услов за паралелност следува $kt = kp = -1$.
Бараната тангента е

$$t: y = kx + n, \text{ т.е. } y = -x + n.$$

Од условот за допир следува
$p - 2kn = 0$ и $p = 4$ имаме $4 - 2 \cdot (-1) \cdot n = 0$, $n = -2$,
па $t: y = -x - 2$, црт.3.



црт. 3

Запомни!

Правата $y = kx + n$ ја допира параболата $y^2 = 2px$ ако е исполнет условот

$$p - 2kn = 0.$$

Ако правата е во општ вид $Ax + By + C = 0$, тогаш условот за допир е

$$pB^2 - 2AC = 0.$$

Б **7** Напиши равенка на тангента на параболата $y^2 = 2px$, во точката $T(x_1, y_1)$ од параболата.

Согледај го решението:

- Бараната тангента е од видот

$$t: y - y_1 = k(x - x_1); \quad y = kx + y_1 - kx_1.$$

Коефициентот k ќе го одредиме од условот за допир.

$$p - 2kn = 0, \text{ за } n = y_1 - kx_1, \quad p - 2k(y_1 - kx_1) = 0, \quad 2x_1k^2 - 2y_1k + p = 0.$$

Бидејќи во точката T може да се повлече само една тангента, значи равенката по непознатата k има само едно решение. Тоа е возможно само ако $D = 0$.

Во тој случај $k_1 = k_2 = k = \dfrac{2y_1}{2\cdot 2x_1} = \dfrac{y_1 y_1}{2x_1 y_1} = \dfrac{y_1^2}{2x_1 y_1}$.

Од $y_1^2 = 2px_1$ следува $k = \dfrac{2x_1 p}{2x_1 y_1} = \dfrac{p}{y_1}$ па равенката на тангентата е:

$y - y_1 = \dfrac{p}{y_1}(x - x_1)$ која по средувањето е од видот $yy_1 = p(x + x_1)$.

8 Во точката $T(1, y)$, $y > 0$ од параболата $y^2 = 64x$ да се напише равенка на тангента на параболата.

Согледај го решението:

Бараната точка е $y^2 = 64 \cdot 1$, $y = \pm 8$, па $T(1, 8)$.

Од параболата $y^2 = 64x$ следува $2p = 64$, $p = 32$, а тангентата

$$t: yy_1 = p(x + x_1); \quad y \cdot 8 = 32(x + 1); \quad y = 4x + 4.$$

Запомни!

Равенка на тангентата на параболата $y^2 = 2px$ во точката $T(x_1, y_1)$ од парабол та е од видот $yy_1 = p(x + x_1)$.

Задачи

1. Одреди ги пресечните точки на правата и параболата:

   а) $2x + y - 4 = 0$, $y^2 = 4x$; б) $2x + y - 2 = 0$, $3y^2 = 16x$.

2. За која вредност на параметарот n правата $5x + 2y + n = 0$ ја допира параболата $y^2 = 20x$.

3. Напиши равенка на тангента на параболата повлечени од точката M, ако

   а) $y^2 = 8x$, $M(6, 8)$; б) $y^2 = -9x$, $M(3, -3)$.

4. Од точката $A(-2, -2)$ повлечени се тангенти на параболата $y^2 = 16x$. Напиши ги: а) равенките на тангентите; б) одреди го аголот меѓу тангентите;

5. Напиши равенка на тангента на параболата $y^2 = 12x$ што е:

а) паралелна со правата $3x - y + 5 = 0$; б) нормална на правата $2x + y - 7 = 0$;

в) која со правата $4x - 2y + 9 = 0$ образува агол од $45°$.

6. Напиши равенка на тангента и нормала на параболата $y^2 = 9x$ во точката $T(1, -3)$.

ОДГОВОРИ, УПАТСТВА, РЕШЕНИЈА

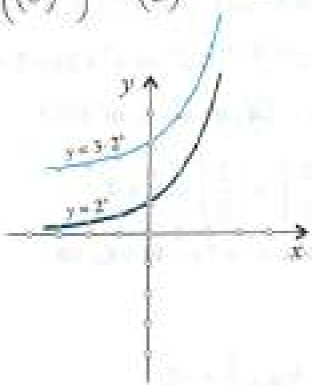
ТЕМА 1 ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА И ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

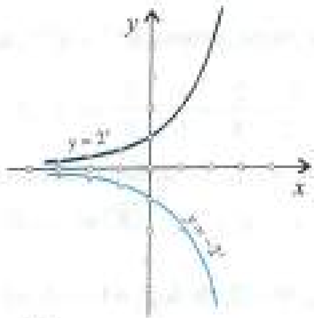
1 (1) а) $-\frac{5}{2}$; б) -1. (2) а) Со споредување на дропките $\frac{5}{7}$ и $\frac{6}{7}$ добиваме: $\sqrt[7]{2^5} < \sqrt[7]{2^6}$; б) $\sqrt[3]{5^4} < \sqrt[4]{5^7}$; в) $\pi^{\sqrt{2}} < \pi^{\sqrt{3}}$; г) $3^{\sqrt{5}} < 3^{\sqrt{6}}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$.

(3) а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{8}} \cdot 4^{\sqrt{2}} \cdot 8^{\sqrt{8}} = 2^{-2\sqrt{2}} \cdot 2^{2\sqrt{2}} \cdot 2^{6\sqrt{2}} = 2^{6\sqrt{2}} = 64^{\sqrt{2}}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\sqrt{3}} \cdot 4^{\sqrt{12}} = 2^{2\sqrt{3}} \cdot 2^{4\sqrt{3}} = 2^{6\sqrt{3}} = 64^{\sqrt{3}}$; в) $\left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{8}} = \left(\sqrt[4]{3}\right)^{8} = 3^2 = 9$. (4) а) $\left(\left(\sqrt[4]{4}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-3\sqrt{8}} = \left(\sqrt[4]{4}\right)^{-12} = 4^{-3} = \frac{1}{64}$;

б) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{-\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$. (5) Растечки се б) и г). (7)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8





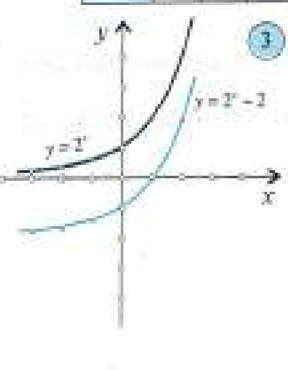
2 (1) а) $(1{,}5)^{\frac{3}{4}} > (1{,}5)^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; в) $7^{\pi} > 7^{\sqrt{3}}$.

(2) а)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x-2	$-\frac{15}{8}$	$-1\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	2	6

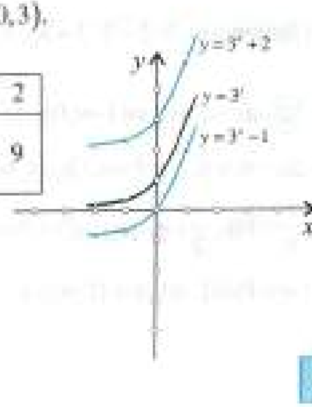
в) 1) $x=1$; 2) $x \in (1, \infty)$; 3) $x \in (-\infty, 1)$; 4) $x \in (0, 3)$.

б)



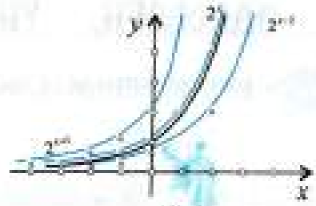
(3) а)

x	-2	-1	0	1	2
3^x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



б)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

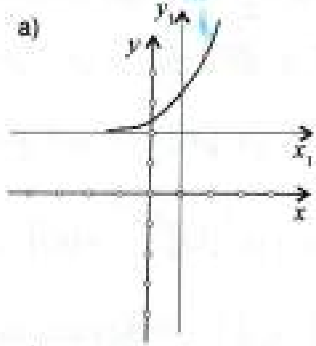


(4) а) $D_f = \mathbb{R}, V_f = (2, \infty)$, монотоно расте во целата област, позитивна е во целата област, нули нема; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 1$.

$D_f = \mathbb{R}, V_f = (-1, \infty)$, монотоно опаѓа во целата област.

За $x \in (-\infty, 2)$, $f(x) > 0$; $x \in (2, \infty)$, $f(x) < 0$, $x = 2$, $f(x) = 0$.

а)



3 (1) а) $x = 11$; б) $x = -15$, в) $x = 0$. (2) а) $5^{x^2-3x+1} = 5^{-1} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 2$ или $x_2 = 1$; б) $3^{x^2-3x+3,5} = 3^{3,5}$, $x_1 = 0$ или $x_2 = 3$; (3) а) $2^{(x+2)(x+1)} = 2^6 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 6$, $x_1 = 1$ или $x_2 = -4$; б) се добива $6^{x+2} = 6^{2x+1}$, од каде $x = 1$. (4) а) $x = 3$; б) $x = 3$.

(5) а) Се добива $\frac{2^x}{2} - \frac{2^x}{8} = \frac{3^x}{9} - \frac{3^x}{27} \Rightarrow 3^4 \cdot 2^x = 2^4 \cdot 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow x = 4$;

(6) а) Со смената $y = 2^x$ се добива квадратната равенка $y^2 + 7y - 44 = 0$, па оттука $x = 2$; б) $x_1 = 3, x_2 = 1$. (8) а) $x = 0$, б) $x = 1$.

4 (1) а) $\log_6 36 = 2$; б) $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$; в) $\log_7 1 = 0$; г) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = -2$.

(2) а) $\log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$; б) $x = -3$; в) $x = -\frac{1}{2}$; г) $x = -\frac{2}{3}$. (3) а) $x = 2^6 = 64$; б) $x = \frac{1}{8}$; в) $x = \frac{1}{27}$; г) $x = \frac{1}{4096}$. (4) а) 4; б) 5; в) $\frac{1}{2}$; г) 2.

(5) а) Добиваме $3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 3 = -3$; б) 24. (6) а) 3; б) 0. (7) а) -2; б) 150; в) 3.

5 (2) а) $-x > 0$, $x \in (-\infty, 0)$; б) $1 - x > 0$, $x \in (-\infty, 1)$; в) $x^2 - 4 > 0$, $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; г) $x^2 - 3x - 4 > 0$, $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$. (3) Растечки се б) и в). (4) а) $\log_2 3 > \ln_2 \sqrt{2}$; б) $\log_3 \frac{1}{5} < \log_3 \frac{1}{2}$; в) $\log_2 \sqrt{3} < \log_2 \pi$ (5) а) $a > b$; б) $a < b$; в) $a > b$; г) $a > b$.

(6) а) $a \in (0,1)$; б) $a \in (1, \infty)$; в) $a \in (1, \infty)$.

6 (2) а) $\log x = \log 5 + 2\log a + 3\log b$; б) $\log x = \log 8 + 2\log a + 3\log b - \log 5c$;
в) $\log x = \log\left(a^2+2\right) - \log\left(b-3\right)$. (3) а) $\log x = \log a + \frac{1}{2}\log a = \frac{3}{2}\log a$;
б) $\log x = 2\log a + \frac{1}{2}\log a - \log 3 - \frac{2}{3}\log b = \frac{5}{2}\log a - \log 3 - \frac{2}{3}\log b$.
(4) а) $\log x = \log 2 + 3\log(a+b)$; б) $\log x = \log 8 + 3\log a + 2\log(a-b)$;
в) $\log x = \log 2 + 2\log(a+1) - \log(a+2) - \log(a-2)$. (5) а) $\log x = \log a +$
а) $+\frac{1}{2}\left(\log a + \frac{1}{2}\log a\right) = \frac{7}{4}\log a$; б) $\log x = \log 2 + 2\log a + \log b + \frac{1}{2}\left(\log a + \frac{1}{2}\log b\right) -$
$-\frac{1}{3}\log a - \frac{1}{3}\log b = \log 2 + \frac{13}{6}\log a + \frac{11}{12}\log b$. (6) а) $\log p = \frac{1}{2}\left(\log s + \log(s-a) +\right.$
$\left.+\log(s-b) + \log(s-c)\right)$; б) $\log x = \frac{1}{3}\left(\log a + 2\log b - \log 5 - 2\log(a-b)\right)$. (7) $x = \frac{m^2n^4}{a^2b^3}$.
(8) $x = \frac{5\cdot 4^2}{8n^3m^2} = \frac{10}{n^3m^2}$. (9) $x = \sqrt[3]{\frac{(a-2b)^2}{a+2b}}$. (10) $x = \frac{(a+b)^2}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}\cdot a^2$. (11) а) $\log_6 4 + \log_6 9 =$
$= \log_6 36 = 2$; б) $\log_3 4 + \log_{12} 36 = \log_{12} 144 = 2$; в) $\log_{10} 500 - \log_{10} 5 = \log^{10}\frac{500}{5} = 2$;
г) $\log_5 \frac{1}{4}\cdot 100 = 2$.

7 (1) а) $\log_2 3\cdot\log_9 16 = \log_2 3\cdot\frac{\log_2 2^4}{\log_2 3^2} = 2$; б) $\log_2\sqrt{5}\cdot\log_{25}\sqrt[3]{2} = \frac{1}{2}\log_2 5\cdot\frac{\frac{1}{3}\log_2 2}{2\log_2 5} = \frac{1}{12}$.
(2) а) 6; б) 2. (5) а) $\log_a b + \log_{\frac{1}{a}} b = \log_a b + \frac{\lg_a b}{\lg_a \frac{1}{a}} = \log_a b - \log_a b = 0$;
б) $3\log_b a + 2\log_b \frac{1}{a} = 3\log_b a + 2\log_b a^{-1} = \log_b a$; в) $\log_b a - \log_b \frac{1}{a} - \log_b a^2 =$
$= \log_b a + \log_b a - 2\log_b a = 0$.

8 (1) а) $-0,7488$; б) 1,8507; в) 0,6741. (2) а) 5,7076; б) 1804,8; в) 0,0018048;
г) 0,044235. (4) а) $x = \lg 172$; б) $x = \lg 0,524$; в) $x = \frac{\lg 3}{\lg 2}$; г) $x = \frac{\lg 5}{\lg 2 - \lg 3}$.
(6) Нека $x = 2^{30}$. $\lg x = 30\lg 2 = 30\cdot 0,30103 = 9,0309$. Значи бројот ќе биде 10
цифрен. (8) а) $\lg x = \frac{1}{2}\left(3\lg 34,52 + \lg 0,73 - 3\lg 0,25\right)$; б) $\lg x = 0,0009\lg 0,0009$;
в) $\lg x = 3,42\lg 3,42$; г) $\lg x = \frac{1}{10}\lg 10$.

9 (1) а) $\frac{9}{2}$; б) 0; 5. (2) а) $D = \left(\frac{5}{3},\infty\right)$, $x = 5$; б) $D = \left(\sqrt[3]{56},\infty\right)$, $x = 4$. (3) а) 1;

б) 1. (4) а) $\frac{5}{2}$; б) 3. (5) а) 2; б) 3. (6) а) $\frac{5}{2}$; б) 3. (7) а) $10; \sqrt{1000}$; б) 10;100.

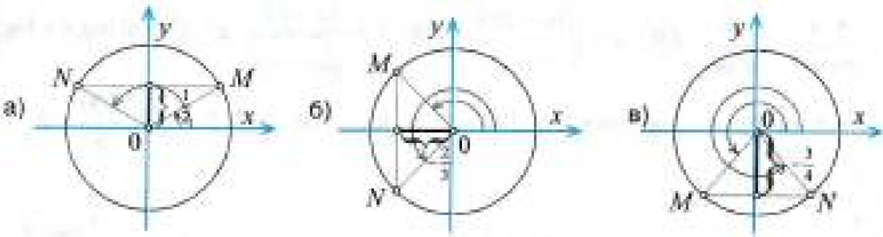
(8) а) $\sqrt{5}; 25$; б) $x = 2^{\log_3 6}$. (9) а) 16, б) 4. (10) а) $100; \frac{1}{10}$; б) $1000; \frac{1}{10}$.

ТЕМА 2 ТРИГОНОМЕТРИЈА

1 (1) а) $90^0 + 1 \cdot 360^0$; б) $196^0 + (-1) \cdot 360^0$; в) $120^0 + 8 \cdot 360^0$; г) $80^0 + (-3) \cdot 360^0$, или $-2 \cdot 360^0 - 280^0$. (2) а) 30^0; б) 180^0; в) 360^0. (3) $28\pi = 87{,}96\,\text{cm}$. (4) а) $\frac{\pi}{5}$; б) $\frac{3\pi}{5}$; в) $\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{59\pi}{50}$; д) $\frac{48\pi}{25}$. (5) а) 30^0; б) 60^0; в) 135^0; г) $157^0 30'$; д) $229^0 10'$.

2 (1) а) $2 \cdot 360^0 + 40^0$; б) $4 \cdot 360^0 - 20^0$; в) $3 \cdot 360^0$; г) $5 \cdot 360^0 + 30^0$.

(2)



(3) а) $\sin 115^0 \cdot \cos 160^0 < 0$; б) позитивен; в) позитивен; г) позитивен.

3 (1) а) $\sin 25^0 > \sin 15^0$; б) $\cos 120^0 > \cos 130^0$; в) $\sin 20^0 > \sin 320^0$, бидејќи $\sin 20^0 > 0$, а $\sin 320^0 < 0$. г) $tg 38^0 < tg 62^0$; д) $ctg 280^0 > ctg 300^0$. (2) а) и в) негативен; б), г) позитивен. (3) а) $\sin 225^0 < \sin 212^0 < \sin 126^0 < \sin 123^0$; б) $tg 154^0 < tg 142^0 < tg 45^0 < < tg 48^0 < tg 52^0$. (4) а) $\sin 48^0 - \sin 64^0 < 0$ и $tg 15^0 - tg 50^0 < 0$, па $\frac{\sin 48^0 - \sin 64^0}{tg 15^0 - tg 50^0} > 0$. б) негативен. (5) $ctg 320^0 < 0$, $tg 214^0 > 0$, $tg 150^0 + tg 165^0 < 0$ како збир на два негативни броја, па $\frac{ctg 320^0 \cdot tg 214^0}{tg 150^0 + tg 165^0} > 0$. (6) а) 1; б) -1; в) 0; г) 1; д) 0.

4 (1) а) 0; б) 0; в) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. (2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $tg\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $ctg\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. (3) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $tg\alpha = \frac{12}{5}$, изразот има вредност $-\frac{19}{29}$. (4) а) $1 - \sin\alpha\cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$.

5 (1) а) $\frac{1}{2}(1 + 2\sqrt{2})$; б) $\frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{2})$. (2) а) $\sin\alpha$;

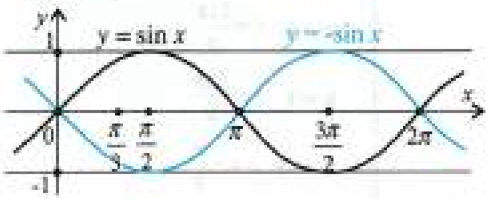
б) $\operatorname{tg}(45^0+\alpha)=\operatorname{ctg}(90^0-45^0-\alpha)=\operatorname{ctg}(45^0-\alpha)$ или $\operatorname{tg}(45^0-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(45^0+\alpha)=$ $=\operatorname{tg}(45^0-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(45^0-\alpha)=1.$ **3** б) $\cos(360^0+215^0)\cdot\cos(2\cdot360^0+145^0)+$

$\sin(360^0+145^0)\cdot\sin(360^0+35^0)+tg(3\cdot180^0+66^0)\cdot tg(6\cdot180^0+24^0)=$

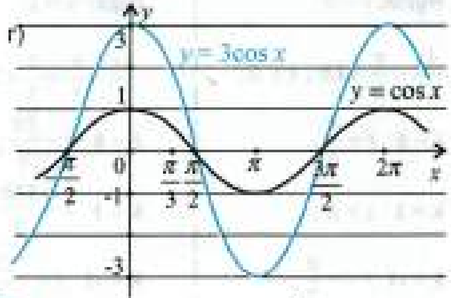
$\cos(180^0+35^0)\cdot\cos(180^0-35^0)+\sin35^0\cdot\sin(180^0-35^0)+\operatorname{tg}66^0\cdot\operatorname{ctg}(90^0-24^0)=$

$=\cos^2 35^0+\sin^2 35^0+1=2.$

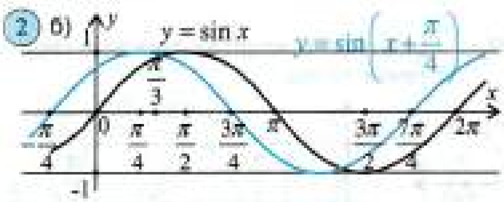
7 **1** а)



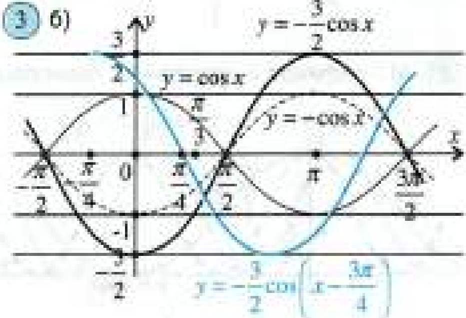
г)



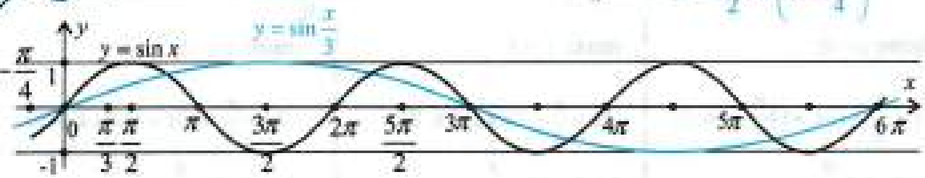
2 б)



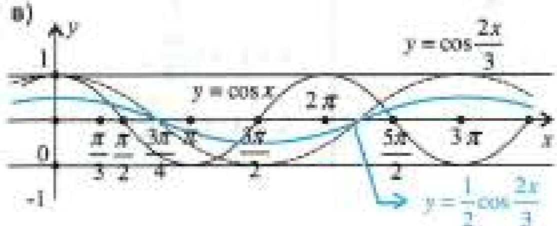
3 б)



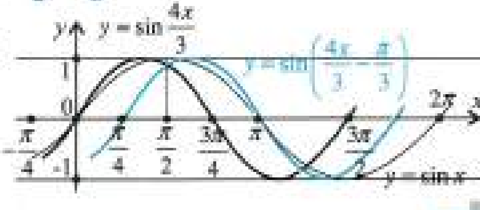
8 **1** б)



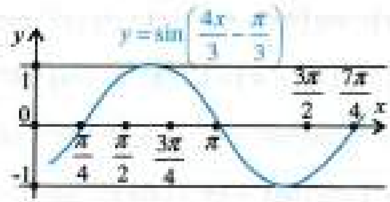
2 в)



9 **1** б) Графикот е нацртан со транслација.



Графикот е нацртан со карактеристични точки.



Нули: $y=0$;

$\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{3}=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

k = 0 $x=\frac{\pi}{4}$;

k = 1 $x=\pi$;

k = -1 $x=-\frac{\pi}{2}$;

max: $y=1$;

$\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

k = 0 $x=\frac{5\pi}{8}$;

k = 1 $x=\frac{13\pi}{8}$;

k = -1 $x=-\frac{7\pi}{8}$;

min: $y=-1$;

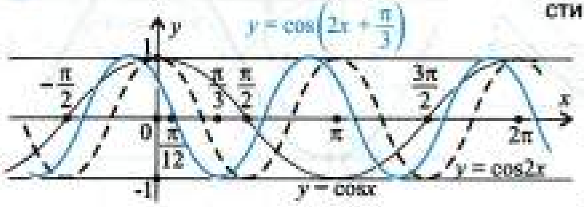
$\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

k = 0 $x=\frac{11\pi}{8}$;

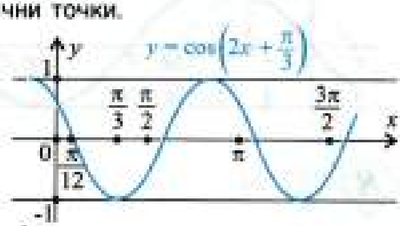
k = 1 $x=\frac{23\pi}{8}$;

k = -1 $x=-\frac{\pi}{8}$.

2 а) Графикот е нацртан со транслација.



Графикот е нацртан со карактеристични точки.



Нули: $y=0$;

$2x+\frac{\pi}{3}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$;

k = 0 $x=\frac{\pi}{12}$;

k = 1 $x=\frac{7\pi}{12}$;

k = -1 $x=-\frac{5\pi}{12}$;

max: $y=1$;

$2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

k = 0 $x=-\frac{\pi}{6}$;

k = 1 $x=\frac{5\pi}{6}$;

k = -1 $x=-\frac{7\pi}{6}$;

min: $y=-1$;

$2x+\frac{\pi}{3}=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

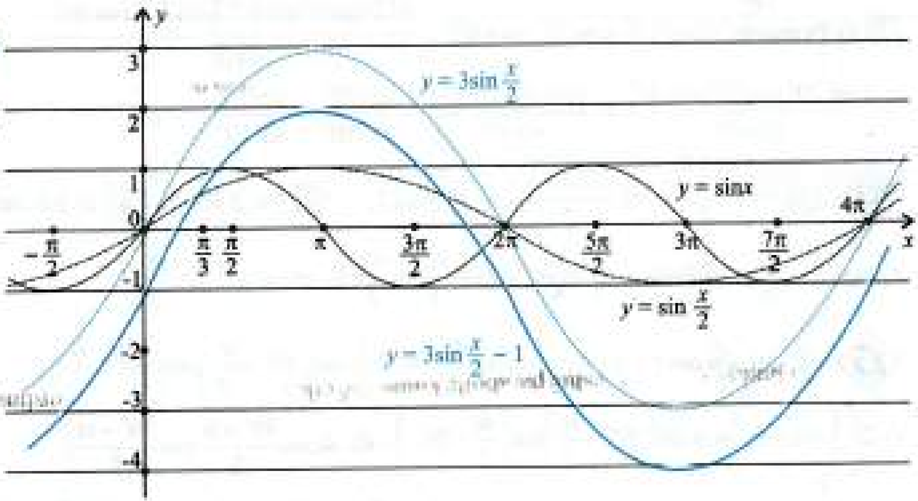
k = 0 $x=\frac{\pi}{3}$;

k = 1 $x=\frac{4\pi}{3}$;

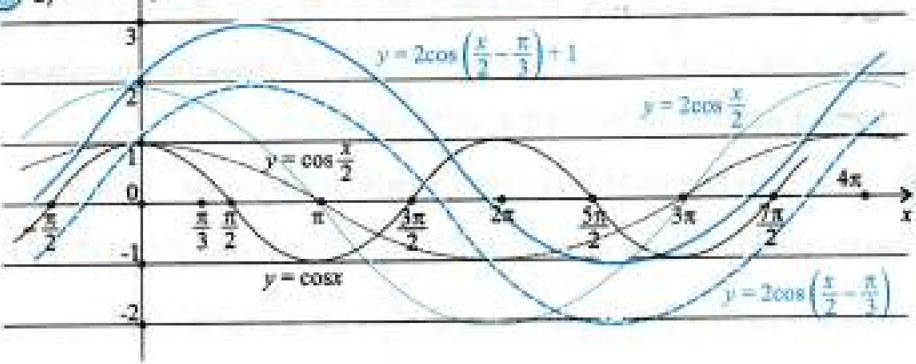
k = -1 $x=-\frac{2\pi}{3}$.

10

2 а)



3 б)



11 1 $\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{12}\left(6+\sqrt{35}\right)$. 2 $\sin(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}$. 3 $\cos(\alpha-\beta) = -\frac{204}{325}$.

4 $\frac{1}{2}$. 5 а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. 6 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 7 $tg\,20^0$. ***Упатство***: $\cos 75^0 = \sin 15^0$, $\cos 85^0 = \sin 5^0$.

9 $\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta = \cos^2\alpha\left(1-\sin^2\beta\right) -$
$-\left(1-\cos^2\alpha\right)\cdot\sin^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$.

12 1 $tg(\alpha-\beta) = \frac{429}{460}$. 2 $tg\alpha = -3$. 3 а) $\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$; б) 2.

4 ***Упатство***: Замени $\beta = \alpha - 45^0$ и примени ја адиционата теорема за $tg\left(\alpha - 45^0\right)$.

13 1 $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$. 2 $\sin 3\alpha = -\frac{44}{125}$. 3 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4 а) 1. б) 1. в) $tg\,2\alpha$.

5 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 6 б) Упатство: $ctg\alpha\cdot tg3\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}$, а потоа користи $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$.

7 а) **Решение**: $8\cos 10^0 \cdot \cos 20^0 \cdot \cos 40^0 = \frac{4\left(2\sin 10^0 \cos 10^0\right)\cos 20^0 \cos 40^0}{\sin 10^0} =$

$= \frac{4\sin 20^0 \cos 20^0 \cos 40^0}{\sin 10^0} = \frac{2\sin 40^0 \cos 40^0}{\sin 10^0} = \frac{\sin 80^0}{\sin 10^0} = \frac{\cos 10^0}{\sin 10^0} = ctg 10^0.$

14 1 а) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; в) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$. 3 $-0,2$ и -5. 4 а) $\sin 2\alpha$;

б) $\sin\alpha$. 5 ***Упатство***: а) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

15 1 а) $\sqrt{6}\cos 5^0$; б) $4\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$; в) $2\cdot\left(\cos\left(30^0+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^0-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$;

г) $2\left(\frac{1}{2}-\cos\alpha\right) = 4\sin\left(30^0+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-30^0\right)$; д) $4\cos\frac{30^0+\alpha}{2}\cos\frac{30^0-\alpha}{2}$;

ѓ) $2\sqrt{2}\sin\frac{45^0-\alpha}{2}\cos\frac{45^0+\alpha}{2}$. 4 а) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-45^0\right)$; б) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Упатство: $1-\cos\alpha = \cos 0^0 - \cos\alpha$, $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. 5 ***Упатство***: Трансформирај ги во производ изразите $\sin 3\alpha + \sin\alpha$ и $\cos 3\alpha + \cos\alpha$ итн.

16 1 а) $\frac{1}{2}\left(\sin 10^0 + \sin 20^0\right)$; б) $\frac{1}{2}\left(\sin 4^0 + \sin 10^0\right)$. 2 $1+\sin\alpha$. 3 $-\frac{1}{2}$.

5 $2\sin(15^0-\alpha)\sin(15^0+\alpha)+\sin^2\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}\left[\cos\left(15^0-\alpha-15^0-\alpha\right)-\cos\left(15^0-\alpha+15^0+\alpha\right)\right]+$

$\sin^2\alpha = \cos 2\alpha - \cos 30^0 + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

17 1 а) $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$; б) $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$;

в) $x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; г) равенката нема решение.

2 а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$; б) $x=\pi\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$; в) равенката нема решение;

г) $x=\pi\pm arc\cos\frac{2}{5}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. 3 а) $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$; б) $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$; в) $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$;

г) $x=-arc\,tg 3+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. 4 а) $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$; б) $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$; в) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$;

г) $x=arc\,ctg\frac{5}{3}+k\pi=30^0 57'+180^0 k$; $k\in\mathbb{Z}$.

18 1 а) $x-10^0=40^0+360^0 k$ или $x-10^0=140^0+360^0 k$ б) $x=10^0+360^0 k$ или
$x=50^0+360^0 k$ $x=150^0+360^0 k$; $x=50^0+360^0 k$.

2 а) $x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $x=\frac{\pi}{18}+2k\pi$, $x=-50^0+360^0\cdot k$, $k\in\mathbb{Z}$. 3 а) $x=70^0+180^0 k$; $k\in\mathbb{Z}$; б) $x=12^0+180^0 k$; $k\in\mathbb{Z}$.

4 а) $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi,\ x=-\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$ б) $x_1=\frac{7\pi}{12}+k\pi,\ x_2=-\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

5 а) $x=\pi+3k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+3k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$ б) $x=k\pi,\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

6 а) $x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2};$ б) $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$ **7** а) $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

б) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **8** а) $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi;$ б) $x=k\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$

19 **1** а) $x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$ б) $x=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

2 а) $\left.\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, \\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \end{array}\right\} k\in\mathbb{Z},$ $\left.\begin{array}{l} x=arc\sin\frac{2}{3}+2k\pi, \\ x=\pi-arc\sin\frac{2}{3}+2k\pi, \end{array}\right\} k\in\mathbb{Z};$ б) $\left.\begin{array}{l} x=2k\pi, \\ x=\pi\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, \end{array}\right\} k\in\mathbb{Z}.$

3 а) $x=k\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$ б) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

4 а) $x=\pi+2k\pi,\ x=\pi\pm\arccos\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$ б) $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

5 а) $x=\pi+2k\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$ б) $x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

6 а) $4\sin^2 x+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=0,\ \sin^2 x\left(4\cos^2 x+1\right)=0,\ \sin^2 x=0,\ x=k\pi,$ а равенката $4\cos^2 x+1=0$ нема реални решенија; б) $\frac{3\cos x}{\sin x}+2\sin x=0,\ 3\cos x+2\left(1-\cos^2 x\right)=0,$ $2\cos^2 x-3\cos x-2=0;\ \cos x=2,\ \cos x=-\frac{1}{2}.$ Равенката $\cos x=2$ нема решение, а решение на равенката $\cos x=-\frac{1}{2}$ е $x=\pi\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

20 **1** а) $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z};$ б) $x=k\pi$ или $x=\pi+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$ **2** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

3 $x=k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **4** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ ***Упатство***:

$\sin x\left(tgx+\sqrt{3}\right)-\left(tgx+\sqrt{3}\right)=0,\ \left(tgx+\sqrt{3}\right)(\sin x-1)=0,\ tgx=-\sqrt{3}$ или $\sin x=1.$

5 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ или $x=\frac{\pi}{2}+k\pi x=\frac{2k\pi}{5}$ или $x=2k\pi.$ $2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=2\cos\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2};$ $\cos x=0$ или $\cos 2x=\cos 3x;\ 2x=3x+2k\pi$ или $2x=-3x+2k\pi.$

6 $x=k\pi$ или $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$ ***Упатство***: $4\sin^3 x+2\sin 2x\cdot\sin x=0,\ \sin x=0,$ $4\sin^2 x+4\sin x\cos x=0,\ \sin x+\cos x=0,\ tgx=-1.$

21 **1** а) $\beta=15^0,\ a=\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right),\ c=2\left(2+\sqrt{3}\right);$ б) $\beta=90^0,\ \gamma=30^0,\ c=2\sqrt{5};$ в) $\gamma=45^0,\ \alpha=105^0,\ a=3+\sqrt{3}.$ **2** а) $\gamma=75^0\,06',\ b=19,\ c=22;$ б) $\beta=45^0\,26',\ a=15,\ c=13;$ в) $\gamma=50^0\,45'48'',\ a=3,35,\ b=8,62;$ г) $\alpha=57^0\,34',\ b=21,77;\ c=26,28.$

3 а) $\beta=71^0 52'56''$, $\gamma=54^0 19'4''$, $c=452,95$; б) $\gamma=50^0 12'19''$, $\alpha=30^0 51'41''$, $a=1,4$;
в) Задачата има 2 решенија: $\alpha_1=63^0 21'45$, $\gamma_1=82^0 22'15''$; $c_1=45,24$; $c_2=22,19$.
$\alpha_2=116^0 38'15''$, $\gamma_2=29^0 5'45''$; г) Задачата нема решение.

4 а) $\gamma=75^0$, $a=4\sqrt{3}$, $b=6\sqrt{2}$, $c=2\left(3+\sqrt{3}\right)$; б) $\beta=60^0$, $\gamma=45^0$, $\alpha=75^0$, $a=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$;

в) $\alpha=45^0$, $\beta=75^0$, $b=3\left(1+\sqrt{3}\right)$, $c=3\sqrt{6}$; г) $\alpha=42^0 22'12''$, $\beta=37^0 29'43''$,

$\gamma=100^0 08'05''$, $c=45,28$. 5 а) $\gamma=67^0 22'48''$, $\alpha=53^0 07'48''$, $\beta=59^0 29'24''$, $b=14$, $c=15$.

Упатство: Од $a=2R\sin\alpha$ и $\sin\alpha=\frac{h_b}{c}$, се добива $b=2R\frac{h_b}{c}$ или $c=2R\frac{h_b}{a}$;

б) $\alpha=60^0$, $\beta=81^0 47'12''$, $\gamma=38^0 12'48''$, $a=21$, $c=15$; в) Од $a=2R\sin\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow a=2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $a=\sqrt{3}$, $b+c=3$. Понатаму од $b=2R\sin\beta$ и $c=2R\sin\gamma$ имаме:

$b+c=2R\left(\sin\beta+\sin\gamma\right)$, т.е. $3=2\cdot 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$, каде $\beta+\gamma=120^0$,

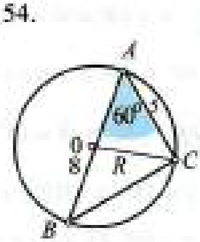
$3=4\cdot\sin\frac{120^0}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ од каде што: $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\beta-\gamma}{2}=30^0 \Rightarrow \beta-\gamma=60^0$.

Од $\beta+\gamma=120^0$, $\beta-\gamma=60^0$ следува $\beta=90^0$, $\gamma=30^0$, па $b=2\cdot 1\cdot\sin 90^0=2$,
$c=2\cdot 1\cdot\sin 30^0=1$. Значи, $a=3$, $b=2$, $c=1$, $\beta=90^0$, $\gamma=30^0$.

7 ***Упатство***: Од $\alpha:\beta=1:3 \Rightarrow \beta=3\alpha$, па добиваме $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ или $\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}=\frac{4}{11}$
од каде $\alpha=14^0 28'$, $\beta=43^0 24'$.

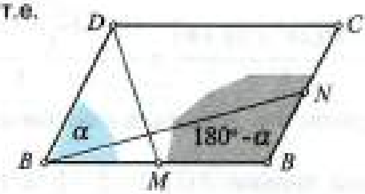
22 1 а) $a=5$, $b=3$, $\alpha=38^0 12'48''$, $\beta=21^0 47'12''$; б) $b=10$, $c=6$, $\beta=89^0 59'58''$,
$\gamma=36^0 52'12''$. 2 а) $b=13$, $a=7$; б) $a=7$, $c=37$. 3 а) 60^0; б) 45^0. 4 а) $c=5$;
б) $b=5$ или $b=4$. 5 а) $c=20,88$; $\alpha=63^0 05'49''$; $\beta=73^0 18'06''$; $\gamma=43^0 36'05''$;
б) $\alpha=120^0 30'36''$; $a=24,33$; $\beta=27^0 24'32''$; $\gamma=32^0 04'52''$. 6 $a=5k$, $b=16k$,
$c=19k$, што значи дека најголемиот агол е спроти страната c, па од
$\cos\gamma=\frac{25k^2+256k^2-361k^2}{2\cdot 5k\cdot 16k}=-\frac{1}{2}$ следува $\gamma=120^0$.

23 1 ***Упатство***: Примени ја косинусната теорема. 2 $53^0 7'48''$, $59^0 29'24''$,
$67^0 22'48''$. 3 $\ell=130$; $d=74,61$. 4 $a=25$, $b=16$. 5 $S=7,54$.



7 Според косинусната теорема имаме:
$\overline{BC}=8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cos 60^0$, т.е. $\overline{BC}=7$. Плоштината на
ΔABC е $P=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\sin 60^0=10\sqrt{3}$. Од формулата $P=\frac{abc}{4R}$,
за радиусот R добиваме $R=\frac{abc}{4P}$, т.е. $R=\frac{8\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 10\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}=4$.

(8) Со примена на косинусната теорема на ΔABN и ΔAMD за $\overline{AN}$ и $\overline{DM}$, добиваме: $\overline{AN}^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2a\frac{b}{2}\cos\left(180^\circ - \alpha\right)$, т.е.



$$+\begin{cases} \overline{AN}^2 = a^2 + \dfrac{b^2}{4} + 2ab\cos\alpha \\ \overline{DM}^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + b^2 - 2\dfrac{a}{2}b\cos\alpha \end{cases}$$

Со собирање на соодветните страни на последните две равенства добиваме:

$\overline{AN}^2 + \overline{DM}^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + b^2$, т.е. $\overline{AN}^2 + \overline{DM}^2 = \frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right) = 1{,}25\left(a^2+b^2\right)$.

(10) 25,5 km. (11) $\gamma = 90^\circ$. (12) $a = 10$. (13) $b = c = 3\left(1+\sqrt{3}\right)$.

ТЕМА 3 ЕЛЕМЕНТИ ОД КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЈАТНОСТ

1 (1) 1. За $n = 1$ имаме $\frac{1\cdot(3\cdot 1-1)}{2}$, $P(1)$ е точен исказ; 2. За $n = k$ претпоставуваме дека тврдењето $P(k): 1+4+7+\ldots+(3k-2) = \frac{k(3k-1)}{2}$ е точно; 3. За $n = k+1$ имаме: $P(k+1): 1+4+7+\ldots+\left(3(k+1)-2\right) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$, што треба да се докаже. Ако на претпоставката на секоја страна на равенството го додадеме членот $3k+1$ кој е добиен за $n = k+1$ добиваме: $1+4+7+\ldots+(3k-2)+(3k+1) =$

$= \frac{k(3k-1)}{2} + 3k + 1 = \frac{3k^2-k+6k+2}{2} = \frac{3k^2+5k+2}{2} = \frac{(3k+2)(k+1)}{2}$. Од $3k^2+5k+2=0$ следува $k_1 = -\frac{2}{3}$, $k_2 = -1$, па $3k^2+5k+2 = 3(k-k_1)(k-k_2) = 3\left(k+\frac{2}{3}\right)(k+1) =$

$= (3k+2)(k+1)$, со што доказот е завршен. (2) Доказот е идентичен на претходната задача. (3) 1. За $n = 1$, следува $1^2 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$, тврдењето е точно. 2. За $n = k$ претпоставуваме дека е точно тврдењето $P(k) = 1^2+2^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

3. За $n = k+1$ имаме: $P(k+1) = 1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} =$

$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. Од претпоставката имаме: $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 =$

$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6} =$

$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)2\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+2)}{6} = \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}$, со што доказот е завршен, т.е. докажана е импликацијата $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. 5 1. За $n = 1$ тврдењето е точно, бидејќи $P(1): 1 = 2^1 - 1$. 2. Нека за $n = k$, $P(k): 1+2+2^2+...+2^{k-1} = 2^k - 1$ е точно. 3. За $n = k+1$ имаме: $1+2+2^2+...+2^{k-1}+2^k = 2^{k+1}-1$. Ако на претпоставката го додадеме членот 2^k, добиваме: $1+2+2^2+...+2^{k-1}+2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$.

7 1. За $n = 1$, $\sin x = \frac{\sin\frac{1+1}{2}x\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \sin x$, тврдењето е точно. 2. Нека за $n = k$, тврдењето $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin kx = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ е точно. 3. За $n = k + 1$ имаме:

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin(k+1)x = \frac{\sin\frac{k+2}{2}x\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. Ако на претпоставката го додадеме членот $\sin(k+1)x$, имаме: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin kx + \sin(k+1)x =$

$= \frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} + \sin(k+1)x = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2} + \sin(k+1)x \cdot \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. Со примена на формулите $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$, имаме:

$$\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{kx}{2} + 2\sin\frac{k+1}{2}\cos\frac{k+1}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x\left(\sin\frac{kx}{2} + 2\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{k+1}{2}x\left(\sin\frac{kx}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{(k+1)x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{(k+1)x}{2}\right)\right)}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\left(\sin\frac{kx}{2}+\sin\left(-\frac{kx}{2}\right)+\sin\frac{(k+2)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{k+2}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$ со што е докажана импликацијата $P(k)\Rightarrow P(k+1)$. Значи, идентитетот важи за кој било природен број.

8 1. За $n=1$, $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin x}=\cos x$, тврдењето е точно. 2. За $n=k$, претпоставуваме дека тврдењето $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2k-1)x=\frac{\sin 2kx}{2\sin x}$ е точно. 3. За $n=k+1$ имаме: $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2k+1)x=\frac{\sin 2(k+1)x}{2\sin x}$, што треба да докажеме. Ако на претпоставката го додадеме членот $\cos(2k+1)x$, добиваме: $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2k-1)x+\cos(2k+1)x=$

$$=\frac{\sin 2kx}{2\sin x}+\cos(2k+1)x=\frac{\sin 2kx+2\sin x\cos(2k+1)x}{2\sin x}=$$

$$=\frac{\sin 2kx+2\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\left(x-(2k+1)x\right)+\sin\left(x+(2k+1)x\right)\right)}{2\sin x}=$$

$$=\frac{\sin 2kx+\sin(-2kx)+\sin 2(k+1)x}{2\sin x}=\frac{\sin 2(k+1)x}{2\sin x}.$$ Импликацијата $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ е точна. Значи, тврдењето е точно за кој било природен број.

9 а) 1. За $n=1$, $P(1)=7^1+3\cdot 1-1=9$, е делив со 9. 2. Нека за $n=k$, $7^k+3\cdot k-1$ е делив со 9. 3. За $n=k+1$ имаме: $P(k+1)=7^{k+1}+3(k+1)-1=7^k\cdot 7+3k+2=$
$=7\cdot 7^k+21k-18k+9-7=7(7^k+3k-1)+9(1-2k)$. Оттука следува дека $9\mid 9(1-2k)$, а бидејќи по претпоставка $9\mid(7^k+3k-1)$ и $9\mid 9(1-2k)$, следува дека $9\mid P(n)$ за секој природен број n. б) 1. За $n=1$, $P(1)=2^{3\cdot 2}-7\cdot 1+41=98$, па $49\mid 98$. Нека за $n=k$ бројот $P(k)=2^{3(k+1)}-7k+41$ е делив со 49. 3. За $n=k+1$ добиваме:
$P(k+1)=2^{3(k+2)}-7(k+1)+41=2^{3(k+1)}\cdot 2^3-7k-7+41=8\left(2^{3(k+1)}-7k+41\right)+49k-294=$
$=8\left(2^{3(k+1)}-7k+41\right)+49(k-6)$. Оттука следува дека $P(k+1)$ е делив со 49 за кој било природен број. в) 1. За $n=1$, $P(1)=3^{2\cdot 2}-8\cdot 1-9=64$, па $64\mid 64$. 2. Претпоставуваме дека за $n=k$, $P(k)=3^{2(k+1)}-8k-9$ е делив со 64. 3. За $n=k+1$ добиваме:
$P(k+1)=3^{2(k+1+1)}-8(k+1)-9=3^{2(k+1)}\cdot 3^2-8k-8-9=9\left(3^{2(k+1)}-8k-9\right)+64k+64=$
$=9\left(3^{2(k+1)}-8k-9\right)+64(k+1)$. Според тоа, докажана е импликацијата $P(k)\Rightarrow P(k+1)$, значи дадениот израз е делив со 64 за секој природен број.

2 1 а) $40320+362880=403200$; б) 3628799; в) $\frac{102!}{100!}=\frac{102\cdot101\cdot100!}{100!}=$
$=102\cdot101=10302$; г) 5.

2 а) $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{n!(n+1)}=\frac{n+1-1}{n!(n+1)}=\frac{n}{(n-1)!n(n+1)}=\frac{1}{(n-1)!(n+1)}$;

б) $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{(k-1)!k}=\frac{k-1}{(k-1)!k}=\frac{k-1}{(k-2)!(k-1)k}=\frac{1}{k(k-2)!}$.

3 а) $(m+1)(m+2)(m+3)$; б) $n(n-1)$. 4 а) $x!=24\cdot x$; $x\cdot(x-1)!=24\cdot x$; Бидејќи $x\neq0$ следува $(x-1)!=4!$; $x-1=4$; $x=5$. б) $(x+1)!-8(x-1)!=8\cdot x!$;
$(x+1)x(x-1)!-8(x-1)!=8x(x-1)!$; Бидејќи $x-1\neq0, x\neq0$, $(x+1)x-8=8x$;
$x^2-7x-8=0$, $x_1=-1$, $x_2=8$. Поради $x>0$, решението е $x=8$.

в) Од $\frac{x!}{(x-2)!}=90$ следува $\frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}=90$, т.е. $x(x-1)=90$, па $x_1=10$ или $x_2=-9$. Решението на равенката е $x=10$.

5 а)

ЗОРА	ОЗРА	РЗОА	АЗОР
ЗОАР	ОЗАР	РЗАО	АЗРО
ЗРОА	ОРЗА	РОЗА	АОЗР
ЗРАО	ОРАЗ	РОАЗ	АОРЗ
ЗАОР	ОАЗР	РАЗО	АРЗО
ЗАРО	ОАРЗ	РАОЗ	АРОЗ

РОЗА е петнаесетта пермутација по ред, сметајќи ја и дадената. б) Лексикографскиот распоред на буквите е АЗОР, а тоа е почетна пермутација. РОЗА е последната 24 пермутација. 6 $P(5-1)=4!=24$. 7 а) $P(7)=7!=5040$; б) $123(45678)$, ги има толку колку што има пермутации од елементите 4, 5, 6, 7 и 8, т.е. $P(5)=5!=120$; в) $P(4)=24$.

8 При кружно разместување на елементите не постои ниту прв, ниту последен. Ако сите што седнале на една маса се поместат налево или надесно за едно или две места, тогаш не е добиен нов распоред на лицата. Од тие причини, една позиција се фиксира и на таа позиција седнува едно кое било лице, а во однос на тоа лице се пермутираат останатите лица. Во овој случај такви се пет лица, па можни се вкупно $P(5)=5!=120$ распоредувања. 9 Според претходната задача, две места се фиксирани и тие две лица во однос на останатите се сметаат за еден елемент. Останатите четири лица се разместуваат на $P(4)=4!=24$ начини. Бидејќи и двете лица можат да се разместат на два начини, што е различен распоред на лицата, па вкупно има $2\cdot P(4)=48$ начини. 10 $P_{3,3}(6)=\frac{6!}{3!\,3!}=20$. 11 $P_4(7)-P_3(6)=\frac{7!}{4!}-\frac{6!}{3!}=210-120=90$.

12 а) $P_{4,3}(8)=\frac{8!}{4!\,3!}=280$; б) $P_{5,2}(8)=\frac{8!}{5!\,2!}=186$; в) $P_{5,3}(8)=\frac{8!}{5!\,3!}=56$.

(13) а) $P_{4,3}(9)=\dfrac{9!}{4!\,3!}=2520$; б) $\dfrac{8!}{3!\,2!\,3!}=560$; в) $\dfrac{7!}{2!\,3!\,2!}=210$.

3 (1) Види го решението на задачата 1 во лекцијата. (2) а) $V_{12}^3=12\cdot 11\cdot 10=1320$;

б) $\dfrac{V_{10}^6}{V_{10}^3}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10\cdot 9\cdot 8}=210$. (3) а) $x(x-1)=380$; $x^2-x-380=0$; $x_1=20$, $x_2=-18$. Бидејќи $x>0$, решението е $x=20$. б) $9\cdot n(n-1)(n-2)=5\cdot n^3$; $9(n-1)(n-2)=5n^2$;

$n_1=6$ или $n_2=\dfrac{3}{4}$. Бидејќи $n\in\mathbb{N}$, следува $n=6$. (4) $V_5^1+V_5^2+V_5^3+V_5^4+V_5^5=325$.

(5) $V_6^5-V_5^4=6000$, вкупниот број на петцифрени броеви е намален за бројот на броевите во кои цифрата 0 е на прво место, а тие се од видот $0(1,3,5,7,9)$.

(6) $2\cdot V_5^4=480$. (7) $V_{10}^5-V_9^4=27216$. а) $V_9^4=3024$; б) $V_9^4-V_8^3=2688$, $V_8^3=336$ се броевите од видот $0(1,2,4,5,6,7,8,9)3$; в) броевите се од видот $1(0,2,3,5,6,7,8,9)4$, а ги има $V_8^3=336$. (8) $\overline{V}_3^5=3^5=729$.

(9) а) 44 55
45 54;

б) 444 454 544 554
445 455 545 555;

в) 4444 4454 4544 4554 5444 5454 5544 5554
4445 4455 4545 4555 5445 5455 5545 5555.

(10) а) $\overline{V}_3^{13}=3^{13}=1594323$; б) $\overline{V}_3^8=3^8=6561$; в) седум средби двознаци и ги има $\overline{V}_2^7$, шест средби со тризнак има $\overline{V}_3^6$, а вкупно се $\overline{V}_2^7\cdot\overline{V}_3^6=2^7\cdot 3^6=128\cdot 729=93312$. Играњето на спортска прогноза се варијации, а кај народот погрешно се вели: "Уплатив 15 комбинации". (11) а) $\overline{V}_5^{10}=5^{10}$; б) $\overline{V}_3^2\cdot\overline{V}_2^3\cdot\overline{V}_5^5=3^2\cdot 2^3\cdot 5^5$.

4 (1) Комбинациите се сите подмножества од k елементи од множеството што има n елементи, додека, пак, варијациите се подредени подмножества од k елементи од множеството што има n елементи. Сите варијации кои се составени од исти елементи, а се разликуваат по нивниот распоред претставуваат една комбинација. (2) а) Тоа се самите елементи: 4; 5; 6; 7; 8; 9.

б) 45 46 47 48 49
56 57 58 59
67 68 69
78 79
89

в) 456 467 478 567 578 678 789
457 468 479 568 579 679
458 469 489 569 589 689
459

(3) а) Бидејќи $C_7^4=\dfrac{V_7^4}{P(4)}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, $C_7^3=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$, $C_8^4=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ имаме:

$$C_7^4+C_7^3=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4+7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{2(7\cdot 6\cdot 5\cdot 4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{(2\cdot 4)(7\cdot 6\cdot 5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=C_8^4.$$

(4) а) Од $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2!}$ следува $\dfrac{n(n-1)}{2}=3n$, $n=7$. б) Од $C_n^3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ и

$C_{n+2}^4=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!}$ следува $\frac{5n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24}$;

$20n(n-1)(n-2)-(n+2)(n+1)n(n-1)=0$; $n^2-17n+42=0$; $n=3$ или $n=14$.

в) Од $C_n^k=\frac{V_n^k}{P(k)}$ следува $35=\frac{840}{k!}$, $k!=24$, т.е. $k=4$. Од $C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=35$ следува $n(n-1)(n-2)(n-3)=7\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4=7\cdot6\cdot5\cdot4$, т.е. $n=7$, па решението е $n=7$, $k=4$. (5) Бројот на триаголниците претставува комбинации од 6 елементи од трета класа, па $C_6^3=\binom{6}{3}=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20$. (6) Изборот на учениците се комбинации од 5 - та класа од 10 елементи. Изборот на учениците може да се изврши на $C_{10}^5=252$ начини, а на професорите $C_4^2=6$ начини. Во одборот може да биде секоја група од учениците со секоја група од професорите, а нивниот број е $C_{10}^5\cdot C_4^2=1512$.

(7) $C_4^1=4$; $abce$, $bcde$, $bcef$, $bceg$. (8) $C_5^3=10$; 135,137,138,157,158,178,357,358,378,578.

(9) $C_{10}^2-C_4^2-C_3^2+2=38$. Низ две различни точки минува само една права.

(10) $C_{30}^2-C_{16}^2-C_{12}^2+1=250$. (11) Види го решението на задача 8 во делот $\mathcal{B}$.

(12) $\overline{C}_3^6=C_{3+6-1}^6=\binom{8}{6}=28$.

5 (1) а) $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{y}\right)^4=\binom{4}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\binom{4}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^3\cdot\frac{2}{y}+\binom{4}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{y}\right)^2+\binom{4}{3}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{y}\right)^3+\binom{4}{4}\left(\frac{2}{y}\right)^4=$

$=\frac{x^4}{16}+4\cdot\frac{x^3}{8}\cdot\frac{2}{y}+6\cdot\frac{x^2}{2^2}\cdot\frac{2^2}{y^2}+4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{2^3}{y^3}+\frac{2^4}{y^4}=\frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{y}+6\frac{x^2}{y^2}+16\frac{x}{y^3}+\frac{16}{y^4}$.

б) $x^5-5x^3+10x-10\cdot\frac{1}{x}+5\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}$;

в) $x^6+6x^5\sqrt{x}+15x^5+20x^4\sqrt{x}+15x^4+6x^3\sqrt{x}+x^3$. (2) а) $239-169\sqrt{2}$; б) 16; в) $-7-24i$. (3) а) 0,5905. Примени $0,9^5=(1-0,1)^5$; б) 1,3439. Во развојот на биномот $1,03^{10}=(1+0,03)^{10}$ користи ги првите пет члена. (4) а) $2^{10}=1024$; б) 0. Види го решението на задачата 4 во лекцијата. (5) а) $T_7=\binom{12}{6}\cdot a^6\cdot\left(\sqrt[6]{3}\right)^6=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot3a^6=$ $=2772a^6$; б) $T_9=\binom{16}{8}\left(\frac{a}{x}\right)^{16-8}\cdot\left(-\sqrt{x}\right)^8=12870a^8x^{-4}$; в) Од условот $\binom{n}{2}=105$ следува $\frac{n(n-1)}{1\cdot2}=105$, $n(n-1)=210$, $n=15$. $T_{13}=\binom{15}{12}(9x)^3\left(-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{12}=\binom{15}{3}\cdot9^3x^3\cdot\frac{1}{3^6x^6}=$ $=\frac{15\cdot14\cdot13}{1\cdot2\cdot3}x^{-3}=455x^{-3}$. (6) а) $T_{k+1}=\binom{12}{k}x^{12-k}\cdot x^{-2k}=\binom{12}{k}x^{12-3k}$. Членот на зависи од x, значи, $12-3k=0$, $k=4$. Бараниот член е $T_5=\binom{12}{4}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495$.

б) $T_{k+1}=\binom{11}{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{11-k}\cdot\left(-\sqrt{x}\right)^k=\binom{11}{k}\cdot(-1)^k\cdot x^{\frac{1}{3}(11-k)+\frac{k}{2}}=\binom{11}{k}\cdot(-1)^k\cdot x^{\frac{11}{3}+\frac{1}{6}k}$. Бараниот

член треба да содржи x^5, значи, $\frac{11}{3}+\frac{1}{6}k=5$, $k=8$, па членот е $T_{8+1}=T_9=\binom{11}{8}(-1)^8 x^5=$

$=\binom{11}{3}x^5=165x^5$.

7 Од $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=46$ следува $1+n+\frac{n(n-1)}{2}=46$, $n=9$.

$T_{k+1}=\binom{9}{k}x^{2(9-k)}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=\binom{9}{k}x^{18-3k}$. Оттука следува $18-3k=0, k=6$, а $T_7=\binom{9}{6}=84$.

8 $T_3=\binom{5}{2}x^{5-2}\cdot\left(x^{\lg x}\right)^2=1000000$; $x^3\cdot x^{2\lg x}=100000$; $\lg\left(x^3\cdot x^{2\lg x}\right)=\lg 10^5$; $\lg x^3+\lg\left(x^{2\lg x}\right)=5$;

$3\lg x+2\lg x\cdot\lg x=5$; $2(\lg x)^2+3\lg x-5=0$; $(\lg x)_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}$; $\lg x=1$ или $\lg x=-\frac{5}{2}$,

т.е. $x=10$ или $x=10^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10^5}}=\frac{1}{100\sqrt{10}}$.

6 1 Множеството на елементарните настани е $\Omega=\{E_1,E_2,E_3,\dots,E_9\}$. E_1 - избран е бројот 1, E_2 - избран е бројот 2 итн. $A=\{E_3,E_6,E_9\}$, $B=\{E_3,E_9\}$, $C=\{E_1,E_3,E_5,E_7,E_9\}$, $D=\{E_7,E_8,E_9\}$, $E=\varnothing$. 2 а) Можни се два елементарни настани, а нив ќе ги означиме со Г - појава на "грб" и П - појава на "писмо". Множеството на елементарните настани е $\Omega=\{(П,П),(П,Г),(Г,П),(Г,Г)\}$. б) Вкупно се $\overline{V}_6^2=6^2=36$ елементарни настани, а множеството е $\Omega=\{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(2,6),\dots,(6,6)\}$.

в) $\Omega=\{(П,1),(П,2),\dots,(П,6),(Г,1),(Г,2),\dots,(Г,6)\}$. Вкупно има 12 елементарни настани.

3 Нека настанот E_1 - исправен предмет го означиме со З (зелено светло), E_2 со Ц (неисправен - црвено светло). Бројот на елементарните настани е $\overline{V}_2^3=2^3=8$, а множеството е $\Omega=\{(ЗЗЗ),(ЗЗЦ),(ЗЦЗ),(ЦЗЗ),(ЗЦЦ),(ЦЗЦ),(ЦЦЗ),(ЦЦЦ)\}$.

$A=\{(ЗЦЦ),(ЦЗЦ),(ЦЦЗ)\}$; $B=\{(ЗЗЦ),(ЗЦЗ),(ЦЗЗ)\}$;

$C=\{(ЗЗЗ),(ЗЗЦ),(ЗЦЗ),(ЦЗЗ),(ЗЦЦ),(ЦЗЦ),(ЦЦЗ)\}$;

$D=\{(ЗЗЗ),(ЗЗЦ),(ЗЦЗ),(ЦЗЗ)\}$. 4 а) Збирот е парен ако на двете коцки на горните страни е непарен број точки 1,3,5 или парен број точки 2,4,6. Вкупниот број на елементарни страни е $\overline{V}_3^2+\overline{V}_3^2=9+9=18$ (варијации со повторување). б) $B=\varnothing$, настанот е невозможен, збирот на точките на двете коцки не може да е поголем од 12.

в) $C=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$; г) На горните страни на коцките треба да се појават точки чиј збир е 10, 11 и 12. $D=\{(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$.

5 Сите елементарни настани се варијации од 6 елементи од 3 - та класа. Вкупно има $\overline{V}_6^3=216$ елементарни настани, а се определуваат како декартов производ, т.е. $\Omega=(\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\})\times\{1,2,3,4,5,6\}$.

7 1 Има 10 можни настани, а само 1 е поволен, $P(A)=\frac{1}{10}$.

2 $n=12+23+27=62$, $m=23$, $P(A)=\frac{23}{62}=0{,}371$. 3 а) $P(A)=\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$;

б) $P(B)=\frac{16}{80}=\frac{1}{5}=0{,}2$; в) $m=25$, $n=80$, $P(C)=\frac{25}{80}=\frac{5}{16}=0{,}3125$.

4 а) $P(A)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$; б) $n=32$, $m=8$, во шпил од 32 карти има 8 "пик" карти, а $P(A)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$. 5 Вкупниот број на настани е $\overline{V}_6^2=36$, а поволните настани се $A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$, $m=6$, а $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$;

$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)\}$, $m=5$, а $P(B)=\frac{5}{32}$. Очигледно, $P(A)>P(B)$.

6 $n=36$, а поволни настани се ако на двете коцки е непарен број точки $\{1,3,5\}$ или парен број точки $\{2,4,6\}$, $m=\overline{V}_3^2+\overline{V}_3^2=3^2+3^2=18$; $P(A)=\frac{18}{36}=0{,}5$. 7 а) $P(A)=\frac{5}{9}$;

б) Белите топчиња да ги означиме со b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, а црните со c_1, c_2, c_3, c_4. Можните настани се $\{(b_1,c_1),(b_1,c_2),(b_1,c_3),(b_1,c_4),(b_2,c_1),\ldots,(b_5,c_1),(b_5,c_2),\ldots,(b_5,c_4),(b_1,b_2),(b_1,b_3),\ldots,(b_4,b_5),(c_1,c_2),\ldots,(c_3,c_4)\}$, а тоа се комбинации од 9 елементи од втора класа. $n=C_9^2=\binom{9}{2}=\frac{9\cdot 8}{2}=36$. Поволни настани се $\{(b_1,b_2),(b_1,b_3),\ldots,(b_4,b_5)\}$,

$m=C_5^2=\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{2}=10$, $P(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$. в) Поволни настани се секое бело со секое црно топче, $m=5\cdot 4=20$, $n=36$, па $P(A)=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

8 Извлекувајќи по две карти имаме: $n=C_{32}^2=\frac{32\cdot 31}{2}=496$, а $m=C_4^2=\frac{4\cdot 3}{2}=6$, бидејќи од 4 аса, по 2 аса можеме да извлечеме на 6 начини. $P(A)=\frac{6}{496}=0{,}036$.

9 Вкупно има $n=\overline{V}_6^3=6^3=216$ случајни настани. а) Поволните настани се пермутации на броевите точки чиј збир е 11. Тие се пермутации на броевите $(1,5,5),(3,4,4),(3,3,5),(1,4,6),(2,3,6),(2,4,5)$, па $m=3\cdot P_2(3)+3\cdot P(3)=3\cdot 3+3\cdot 6=27$, а $P(A)=\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$.

б) Поволните настани се пермутации на броевите $(1,5,6),(2,4,6),(3,4,5),(2,5,5)$,

$(3,3,6),(4,4,4)$. $m=3\cdot P(3)+2\cdot P_2(3)+1=25$, а $P(A)=\frac{25}{216}$. (10) Бројот на сите настани е број на пермутации од 9 елементи, т.е. $n=9!$. Само во еден од тие случаи ќе се добие зборот Hiperbola. Според тоа, веројатноста е $\frac{1}{9!}=0{,}000002755$.

8 (1) Елементарните настани се E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6, т.е. $n=6$. а) $A=\{E_2,E_4,E_6\}$ се поволни настани да се појават или 2 или 4 или 6 точки.

$P(A)=P(E_2)+P(E_4)+P(E_6)$, $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. б) $B=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$,

$P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$. (2) Пик и каро се бои во карти, во секои 4 карти има 1 карта пик и 1 карта каро, а во шпил од 32 карти има 8 карти пик и 8 карти каро. За настаните A - пик боја $m_1=8$, а за B - каро боја $m_2=8$, па $P(A+B)=P(A)+P(B)=$
$=\frac{8}{32}+\frac{8}{32}=\frac{1}{2}$. (3) $n=\overline{V}_3^2=6^2=36$. Збирот е парен број ако на двете коцки се непарни броеви од точки $\{1,3,5\}$ е настанот A, а парен број точки $\{2,4,6\}$ е настанот B. Бројот на елементарните настани на A е $m_1=\overline{V}_3^2=9$, а на B е $m_2=\overline{V}_3^2=9$.

$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{9}{36}+\frac{9}{36}=0{,}5$. (4) A - еднаков број на точки, $m_1=6$, B - број на точки чиј збир е 7, $m_2=4$, C - број на точки чиј збир е 9, $m_3=4$;

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{6}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}=\frac{4}{9}$. (5) Бројот на елементарните настани е $n=C_{15}^2=\frac{15\cdot 14}{2}=105$. За настанот A: 1 бело и 1 црно топче, $m_1=4\cdot 5=20$ (секое бело топче со секое црно топче). За настанот B: 1 црно и 1 зелено топче, $m_2=5\cdot 6=30$ (секое црно со секое зелено топче). Настаните A и B се дисјунктни, па

$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{20}{105}+\frac{30}{105}=\frac{10}{21}$. (6) $P(\Omega)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)$;

$1=0{,}2+0{,}3+0{,}4+P(D)$; $P(D)=0{,}1$. (7) Нека настанот A има барем еден стандарден производ. Спротивниот настан $\overline{A}$ - нема ниту еден стандарден производ.

$n=C_{20}^3=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3}=1140$, а поволни настани за $\overline{A}$ се $C_{15}^3=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=445$.

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{455}{1140}=1-\frac{91}{228}=\frac{137}{228}$. (8) Нека $\Omega=\{A,B,C,\overline{D}\}$, каде што

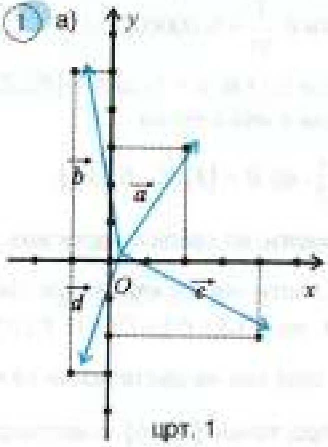
$P(A)=0{,}16$ погодок во прва зона, $P(B)=0{,}24$ - погодок во втора зана, а

$P(C)=0{,}28$ - погодок во трета зона. Настанот $\overline{D}$ - непогодена цел.

$P(\Omega)=P(A)+P(B)+P(C)+P(\overline{D})$; $P(\overline{D})=1-(P(A)+P(B)+P(C))$;

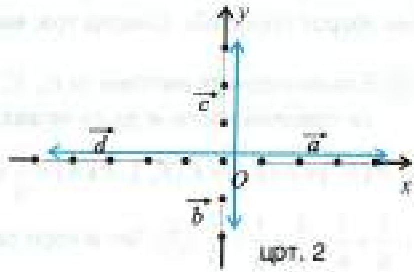
$P(\overline{D})=1-(0{,}16+0{,}24+0{,}28)=0{,}32$. Веројатност да се погоди целта е 0,32.

1 (1) а)



црт. 1

б)



црт. 2

(2) $\overrightarrow{OA}=(3,0)$; $\overrightarrow{OB}=(4,1)$; $\overrightarrow{OC}=(2,4)$; $\overrightarrow{OD}=(-5,2)$; $\overrightarrow{OE}=(-4,0)$; $\overrightarrow{OF}=(-3,-2)$;

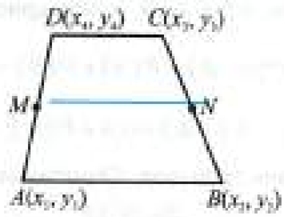
(3) $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{b}=-3\vec{j}$; $\vec{c}=-\vec{i}$; $\vec{d}=\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{e}=-2\vec{i}+5\vec{j}$.

(4) $\vec{a}=(4,3)$; $\vec{b}=(1,-8)$; $\vec{c}=(0,3)$; $\vec{d}=(-14,9)$; $\vec{e}=(0,-1)$.

2 (1) а) $\vec{a}+\vec{b}=(8,3)$; $\vec{a}-\vec{b}=(-2,-5)$; б) $\vec{p}+\vec{q}=(4,2)$; $\vec{p}-\vec{q}=(-6,2)$.

(2) а) $\left(\frac{9}{2},-7\right)$; б) $(5,-10)$; в) $\left(\frac{29}{4},-\frac{47}{4}\right)$; г) $(8,-12)$. (3) а) $x=2, y=2$; б) $x=1, y=3$; в) $x=0, y=-1$. (4) а) $\overrightarrow{AB}=(-2,5)$; б) $(-3,5)$; в) $(5,-7)$; г) $(6,-1)$. (5) а) $B(-2,5)$; б) $B(7,2)$; в) $B(4,-8)$; г) $B(-3,-2)$. (6) а) $A(-3,2)$; б) $A(7,-1)$; в) $A(-7,7)$; г) $A(2,4)$.

(7) Нека $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ и $D(x_4,y_4)$ се темиња на трапезот $ABCD$, а M и N се средини на страните AD и BC соодветно, црт. 3. Треба да докажеме дека $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.



црт. 3

Бидејќи M е средина на AD, следува $M\left(\frac{x_1+x_4}{2},\frac{y_1+y_4}{2}\right)$, а N е средина на BC, следува $N\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x_2+x_3}{2}-\frac{x_1+x_4}{2},\frac{y_2+y_3}{2}-\frac{y_1+y_4}{2}\right)=\left(\frac{x_2+x_3-x_1-x_4}{2},\frac{y_2+y_3-y_1-y_4}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1+x_3-x_4,y_2-y_1+y_3-y_4)=\frac{1}{2}\left((x_2-x_1,y_2-y_1)+(x_3-x_4,y_3-y_4)\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right).$$

3 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(4-4)^2}=\sqrt{25}=5$; $\overline{AC}=\sqrt{(2-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$; $\overline{BC}=\sqrt{4^2+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$; $L=5+\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5+3\sqrt{5}$. (2) $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=2\sqrt{2}$.

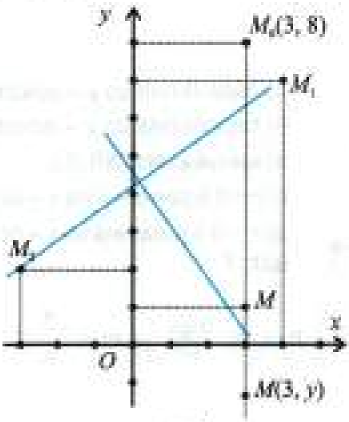
(3) $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$. (4) Бараното геометриско место на точки е симетрала на от-

сечката AB. Нека $M(x, y)$ е која било точка од бараното геометриско место. Според својството на симетралата на отсечка, имаме: $\overline{MA}=\overline{MB}$, т.е.: $\overline{MA}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$, $\overline{MB}=\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}$, па од условот $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}$ следува $(x-2)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y-4)^2$. По средувањето на равенката добиваме $x+y-6=0$, што претставува равенка на симетралата на отсечката AB, т.е. бараното геометриско место. 5 а) $M\left(\frac{1}{2},1\right)$; б) $M\left(\frac{3}{2},2\right)$. 6 Од условот на задачата имаме $\begin{cases}\overline{MA}=\overline{MB}\\ x=2|y|\end{cases}$. Од условот $\overline{MA}=\overline{MB}$, следува: $\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}$.

Со средување на оваа равенка добиваме $5x+y-7=0$. Од равенките $x=2|y|$ и $5x+y-7=0$ имаме $\begin{cases}5x+y-7=0\\ x=2y\end{cases}$ или $\begin{cases}5x+y-7=0\\ x=-2y\end{cases}$. Со решавање на двата системи се добиваат точките $M_1\left(\frac{14}{11},\frac{7}{11}\right)$ и $M_2\left(\frac{14}{9},-\frac{7}{9}\right)$, што значи задачата има две решенија.

7 $P=137$.

8



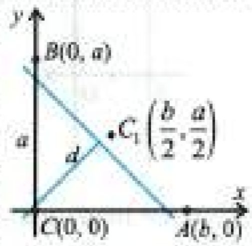
црт. 4

$$\overline{MM_1}=\overline{MM_2}$$
$$1+(y-7)^2=6^2+(y-2)^2$$
$$1+y^2-14y+49=36+y^2-4y+4,\ y=1$$

Значи $M(3, 1)$, црт. 4.

9 $M_1(-8, 1)$, $M_2(16, 1)$.

10 Ако темето на правиот агол го сместиме во координатниот почеток, останатите две темиња имаат координати $A(b, 0)$ и $B(0, a)$, црт. 5. C_1 е средишна точка за отсечката AB, па од формулата за растојание имаме:



црт. 5

$$d=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{a}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2+a^2}{4}}=$$

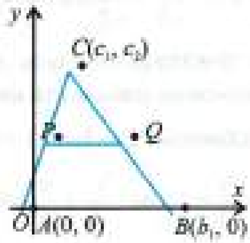
$=\frac{1}{2}\sqrt{c^2}=\frac{c}{2}$, што требаше да се докаже.

4 1 $C\left(\frac{3}{4},4\right)$. 2 а) $T(-1, 3)$; б) $T(-1, 0)$.

3 $C\left(\frac{22}{5},\frac{16}{5}\right)$; $D\left(\frac{29}{5},-\frac{2}{5}\right)$; $E\left(\frac{36}{5},\frac{12}{5}\right)$; $F\left(\frac{43}{5},\frac{26}{5}\right)$.

4 а) $D(13, -1)$; б) $D_1(-1, 27)$.

5 Нека $P(p_1, p_2)$ и $Q(q_1, q_2)$ се средини на страните



црт. 6

AC и BC соодветно, црт. 6.

$$p_2 = \frac{0+c_2}{2} = \frac{c_2}{2}; \quad q_2 = \frac{0+c_2}{2} = \frac{c_2}{2}$$

од каде следува дека $p_2 = q_2$ т.е. точките P и Q се еднакво оддалечени од x – оската, што значи $PQ \parallel x$, т.е. $PQ \parallel AB$. (6) Од условот на задачата имаме:

$\overline{AB} : \overline{BC} = d : a = \lambda$; $x_2 = \frac{x_1 + \lambda x_3}{1+\lambda}$; $y_2 = \frac{y_1 + \lambda y_3}{1+\lambda}$, од каде

$x_3 = \frac{1}{\lambda}(x_2 - x_1) + x_2$, $y_3 = \frac{1}{\lambda}(y_2 - y_1) + y_2$, т.е. $x_3 = x_2 + \frac{a}{d}(x_2 - x_1)$;

$y_3 = y_2 + \frac{a}{d}(y_2 - y_1)$. (7) $C(10, 17)$.

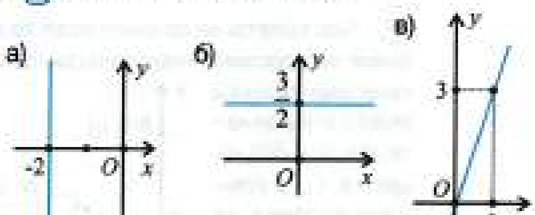
(8) $P = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$; а) $\frac{5}{2}$; б) 34; в) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

(9) а) 28,5; б) 24. (10) а) $L = \sqrt{90} + \sqrt{116} + \sqrt{74}$; б) $S_{AB}\left(\frac{15}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $S_{AC}\left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$, $S_{BC}(10, 7)$;

в) $T\left(\frac{23}{3}, \frac{19}{3}\right)$; г) $P = 39$. (11) $y_3 = 15$.

5 (1) а) не; б) да; в) да; г) не.

(2)



црт. 7

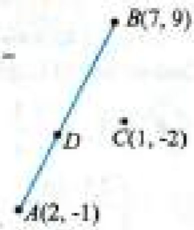
а) паралелна со y – оската;
б) паралелна со x – оската;
в) минува низ $O(0, 0)$;
г) $y = 0$ е равенка на x – оската;
д) $x = 0$ е равенка на y – оската, црт. 7.

(3) а) $A = 10$; б) $B = -\frac{6}{5}$; в) $C = -1$. (4) $P_x\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$; $P_y(0, 3)$. (5) а) $m = -\frac{5}{3}$;

б) $m = -2$; в) $m = \frac{3}{2}$; г) $m = -15$.

6 (1) а) $x + 3y - 5 = 0$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1$; б) $x + 5y + 17 = 0$; $\frac{x}{-17} + \frac{y}{-\frac{17}{5}} = 1$. (2) $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$;

$\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1$; $\frac{x}{-5} + \frac{y}{-2} = 1$; $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$. (3) Ги одредуваме координатите на точката D, така што $\overline{AD} : \overline{DB} = 2 : 3$. Оттука, $D(4, 3)$. Потоа ќе ја напишеме равенката на правата што минува низ точките C и D, и добиваме: $5x - 3y - 11 = 0$, црт. 8. (4) а) $\frac{x}{8} + \frac{y}{-6} = 1$;

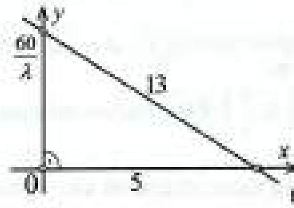


црт. 8

б) $\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{\frac{2}{3}} = 1$; в) $\frac{x}{-\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{3}{4}} = 1$; г) $\frac{x}{-\frac{3}{7}} + \frac{y}{-\frac{5}{3}} = 1$.

(5) $4x+3y-27=0$. (6) $x+4y-8=0$ и $x+y-5=0$. (7) Задачата има две решенија, т.е. постојат две такви прави, и тоа: $p_1: 2x+5y-10=0$ и $p_2: 8x+5y+20=0$.

(8) Ја доведуваме равенката во сегментен вид $\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{60}{\lambda}}=1$, од каде $m=5$, $n=\frac{60}{\lambda}$. Според Питагоровата теорема имаме: $5^2+\left(\frac{60}{\lambda}\right)^2=13^2$, а оттука $\lambda=\pm5$, црт. 9.



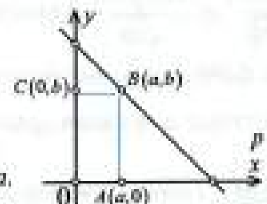
црт. 9

(9) а) $\lambda=-\frac{1}{2}$; б) $\lambda=\frac{5}{3}$. (10) $A=5$; $B=9$.

7

(1) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$. (2) а) $x-y+3=0$; б) $x+y-2=0$; в) $x\sqrt{3}+y+3\sqrt{3}+2=0$; г) $x\sqrt{3}+3y-2\sqrt{3}+9=0$.

(3) а) $O(0,0)$; $A\left(\frac{1}{3},0\right)$; $B\left(\frac{1}{3},1\right)$; $C(0,1)$; б) $O(0,0)$; $A\left(\frac{1}{4},0\right)$; $B\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$; $C\left(0,\frac{5}{4}\right)$. ***Упатство:*** $a=3b$ или $b=3a$. Темето B лежи на дадената права, црт. 10.



црт. 10

(4) $4x+3y-15=0$. (5) $3x-y-2=0$. (6) $\lambda=\frac{4}{5}$. (7) а) a и b ќе ги одредиме од условите: коефициентот на правецот $k=1$ и правата минува низ $(0,0)$, т.е. должината на отсечката на y–оската е $n=0$. Равенката на правата во експлицитен вид е $y=\underbrace{\boxed{\frac{3a-2b+5}{a-b}}}_{k}x+\underbrace{\boxed{\frac{2a-5b+1}{a-b}}}_{n}$. Според условот на задачата $k=1$ и $n=0$ т.е.

$$\begin{cases}\frac{3a-2b+5}{a-b}=1\\ \frac{2a-5b+1}{a-b}=0,\end{cases}$$

од каде $a=-3$, $b=-1$. б) $a=-\frac{11}{7}$, $b=-\frac{3}{7}$. (8) $a=7$, $b=-2$, $y+3=0$.

8

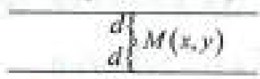
(1) а) $\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}-2=0$; б) $-\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}-2=0$; в) $\frac{x\sqrt{2}}{2}+y\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$; г) $-\frac{x}{2}\sqrt{2}+\frac{y}{2}\sqrt{2}-1=0$. (2) а) $-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-6=0$; б) $\frac{7}{25}x-\frac{24}{25}y-4=0$; в) $\frac{x-y+2}{-\sqrt{2}}=0$; г) $\frac{y-ax-2}{\sqrt{1+a^2}}=0$; д) $-\frac{4}{4}y-\frac{3}{4}=0$; ѓ) $-\frac{4}{4}x-\frac{3}{4}=0$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{6}}{3}y-\frac{7}{3}=0$; ж) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-4=0$; з) $\frac{nx+my-mn}{\pm\sqrt{n^2+m^2}}=0$. (3) а) $\varphi=60^0$; б) $\varphi=330^0$; в) $\varphi=225^0$.

9 (1) а) $d = 4$; б) $d = 0$. (2) Да, $r = 5$. ***Упатство:*** Правите допираат еден ист круг со центар во координатниот почеток, ако се наоѓаат на исто растојание од координатниот почеток. (3) $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. (4) $d = \frac{240}{17}$. (5) Постојат две такви точки: $M_1(0,-12)$ и $M_2\left(0, \frac{4}{3}\right)$. (6) Равенката на правата ја трансфомираме во општ вид: $bx + ay - ab = 0$.

Според формулата за растојание од точка до права имаме: $d = \frac{bx + ay - ab}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Од условот на задачата $d = a$ и $y = 0$ т.е. $a = \frac{bx - ab}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$, од каде $x = a \pm \frac{a}{b}\sqrt{a^2 + b^2}$.

(7) $M(2,3)$. (8) Нека $M(x,y)$ е една точка од бараното геометриско место, т.е.
$\frac{3x - y + 7}{-\sqrt{10}} = \frac{3x - y - 3}{\sqrt{10}}$ од каде се добива $3x - y + 2 = 0$.



Значи, бараното геометриско место е правата $3x - y + 2 = 0$. (9) $2x + 4y - 3 = 0$.

(10) Постојат две такви прави $p_1 : x + y - 7 - 5\sqrt{2} = 0$ и $p_2 : x + y - 7 + 5\sqrt{2} = 0$.

10 (1) I начин: Симетралата s на отсечката AB минува низ нејзината средишна точка $S(s_1, s_2)$ и е нормална на отсечката, т.е. $s_1 = \frac{5+9}{2} = 7$, $s_2 = \frac{7+5}{2} = 6$,

$k_s = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$. Бараната равенка е: $y - 6 = 2\,(x - 7)$ т.е. $2x - y - 8 = 0$.

II начин: ***Упатство:*** Равенката на симетралата на отсечката AB, може да се одреди и како геометриско место на точки, кои се еднакво оддалечени од точките A и B.

(2) $8x + 3y - 92 = 0$. (3) а) $\varphi = 26^0 33'54''$; б) $\varphi = 22^0 37'11''$. (4) $90^0, 45^0, 45^0$.

(5) Задачата има две решенија $5x + y - 20 = 0$, $x - 5y + 22 = 0$. (6) $45^0, 135^0$. (7) 90^0.

(8) $4x - 4y + 3 = 0$ или $2x + 2y - 7 = 0$. Упатство. Бараното геометриско место на точките е симетрала на аголот. Нека $M(x, y)$ е која било точка од симетралата, тогаш растојанието d_1 од M до едниот крак е еднакво на растојанието d_2 од точката M до другиот крак, т.е. $\frac{|x - 3y + 5|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|3x - y - 2|}{\sqrt{9+1}}$.

11 (1) $k_{AB} = \frac{1-2}{3+4} = -\frac{1}{7}$. Од условот за паралелност следува $k_p = k_{AB} = -\frac{1}{7}$.

Бараната права p минува низ точката $C(0,-2)$, па $y - (-2) = -\frac{1}{7}(x - 0)$ од каде ја добиваме равенката $x + 7y + 14 = 0$. (2) За $m = -4$, $m = 4$. (3) За $m = -3$ правите се паралелни, а за $m = 3$ тие се совпаѓаат. (4) $x + 2y - 5 = 0$; $x - 6y + 11 = 0$. ***Упатство:*** Нека бараната права е $p: y - 2 = k(x - 1)$. Коефициентот k ќе го одредиме од условот $d_1 = d_2$.

(5) а) $L = \sqrt{13} + \sqrt{53} + 4\sqrt{2}$; б) $P = 10$; в) $\frac{20}{\sqrt{13}}, \frac{20}{\sqrt{53}}, \frac{5}{\sqrt{2}}$; г) $5, \frac{1}{2}\sqrt{157}, \frac{1}{2}\sqrt{37}$.

(6) $x - y - 7 = 0$. (7) $x - 5y + 13 = 0$, $5x + y - 17 = 0$. (8) $\left(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}\right)$ (9) $A(1,2)$.

Упатство: Најди ја ортогоналната проекција на точката B врз правата.

12 (1) а) $x^2 + y^2 = 49$; б) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{4}$; в) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$;

г) $(x-2)^2 + (y-8)^2 = 25$. (2) Го одредуваме растојанието d од точката до центарот на кружницата, т.е. $d = \overline{AO} = 0$. Точката A се совпаѓа со центарот и е во кружницата B лежи на кружницата, C е надвор од кружницата, а D е во кружницата.

(3) а) $C\left(2, -\frac{1}{2}\right)$, $r = \sqrt{2}$; б) $C(0,3)$, $r = 2$; в) $C\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$, $r = 3$; г) $C(0,0)$, $r = 6$.

(4) а) $r = q = 4$, $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 16$; б) $r = |p| = |-2| = 2$. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 4$.

(5) $p = 5$ и $r = |q| = 5\sqrt{2}$; $(x-5)^2 + \left(y \pm 5\sqrt{2}\right)^2 = 50$. (6) Правата ги сече координатните оски во точките: $M(-4,0)$, $N(0,3)$, $(2r)^2 = (-4)^2 + 3^2 = 25$, $r = \frac{5}{2}$; $p = -2$, $q = \frac{3}{2}$;

$(x+2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. (7) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$. (8) а) $(x-6)^2 + y^2 = 40$;

б) $x^2 + (y-3)^2 = 25$. (9) а) Координатите на центарот p и q се решение на системот $(5 - p)^2 + (-3 - q)^2 = 25$ и $(4 - p)^2 + (-3 - q)^2 = 25$; $C_1(8, 1)$; $C_2(1, -6)$; $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 25$; $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 25$. б) Центарот е во пресекот на симетралата на отсечката AB и дадената права. Равенката на кружницата е $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$. (10) Од условите следува $p = -4$, $q = r$. Кружницата $(x + 4)^2 + (y - r)^2 = r^2$ минува низ $A(-5, 7)$.

$(-5 + 4)^2 + (7 - r)^2 = r^2$; $14r = 50$; $r = \frac{25}{7}$. Бараната кружница е $(x+4)^2 + \left(y - \frac{25}{7}\right)^2 = \left(\frac{25}{7}\right)^2$.

13 (1) $\lambda = 0$. Равенката на кружницата е $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 14$. $\lambda = 1$. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1{,}25$. За $\lambda = 5$ равенката не е равенка на кружница. (2) $\lambda = 6$.

(3) $|p| = |q|$. Од $p = -\frac{\lambda - 6}{2}$, $q = \frac{\lambda + 2}{2}$, следува $\left|\frac{\lambda - 6}{2}\right| = \left|\frac{\lambda + 2}{2}\right|$; $\lambda = 2$.

(4) а) $C(3,-2)$, $r = \sqrt{5}$; б) $C(2,-1)$, $r = \sqrt{5}$; в) $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $r = \frac{3}{2}$; г) $C\left(0, \frac{5}{4}\right)$; $r = \frac{5}{2}$.

(5) $(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} + 2\right)^2 = \frac{81}{4}$. (6) Бараната равенка е $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Решение на системот $\begin{cases} 3^2 + 5^2 + 3a + 5b + c = 0 \\ 4^2 + 4b + c = 0 \\ 4 - 2b + c = 0 \end{cases}$ е $a = -12$, $b = -2$, $c = -8$.

Равенката е $x^2 + y^2 - 12x - 2y - 8 = 0$.

7 а) Задачата 6 ја решивме со решавање на системот равенки. Оваа задача ќе ја решиме со користење на својството дека центарот на кружницата е во пресекот на симетралите на страните. Равенката на кружницата е $(x-2)^2+(y-3)^2=25$.

б) $(x-4)^2+(y-6)^2=25$. 8 $R^2=\frac{58}{4}$; $P=58\pi$; $V=\frac{29}{3}\cdot\sqrt{58}\,\pi$.

9 $x^2+y^2-8x-9y+30=0$. 10 $(x-4)^2+(y-6)^2=25$.

14 1 а) $y=2x+5$; $x^2+(2x+5)^2=50$. $A(1,7)$; $B(-5,-5)$; б) $A(2,-1)$, $B(-1,-2)$.

2 а) $C(0,0)$, $r=5$; $d=\left|\frac{AP+Bq+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$; $d=\left|\frac{1\cdot0+3\cdot0-15}{\sqrt{1^2+3^2}}\right|=\frac{15}{\sqrt{10}}<r$, правата ја сече кружницата.

б) $C(1,-2)$, $r=\sqrt{5}$; $d=\left|\frac{1\cdot1-2\cdot(-2)-10}{\sqrt{1+4}}\right|=\sqrt{5}$. $d=r$, правата ја допира кружницата.

в) $d=\frac{15\sqrt{2}}{2}>r$, правата и кружницата немаат заеднички точки.

3 а) $C(5,0)$, $r^2=18$, $r^2\left(A^2+B^2\right)=(Ap+Bq+C)^2$, $18\left(1+B^2\right)=(5+1)^2$, $B=\pm1$; б) $A=-3$.

4 а) $p=\pm6$; б) $q\in\{8,-2\}$. 5 а) $t:y-y_1=k(x-x_1)$, $y=kx+5k$, $r^2\left(k^2+1\right)=n^2$,

$9\left(k^2+1\right)=(5k)^2$, $k=\pm\frac{3}{4}$; $t_1:3x-4y+15=0$, $t_2:3x+4y+15=0$. б) $C(-2,1)$, $r=5$.

$t:y=kx+3k+6$, $r^2\left(k^2+1\right)=(kp-q+n)^2$, $25\left(k^2+1\right)=(-2k-1+3k+6)^2$, $k=0$; $k=\frac{5}{12}$.

$t_1:y=6$; $t_2=\frac{5}{12}x+\frac{29}{4}$. 6 $C(2,3)$, $r=5$, $k=\frac{4}{3}$, $t:y=kx+n$, $r^2\left(k^2+1\right)=(kp-q+n)^2$.

$25\left(\frac{16}{9}+1\right)=\left(\frac{4}{3}\cdot2-3+n\right)^2$; $\frac{625}{9}=\left(\frac{-1}{3}+n\right)^2$; $n-\frac{1}{3}=\pm\frac{25}{3}$; $n=\pm\frac{25}{3}+\frac{1}{3}$, $n_1=\frac{26}{3}$, $n_2=-8$.

$t_1:y=\frac{4}{3}x+\frac{26}{3}$, $t_2:y=\frac{4}{3}x-8$. 7 $C(0,0)$, $r^2=5$, $k_p=\frac{1}{2}$, $k_t=-2$, $r^2\left(k_t^2+1\right)=n^2$, $n=\pm5$.

$t_1:y=-2x\pm5$. 8 а) $C(0,4)$, $r^2=16$, $t:y-4=k(x-8)$, $y=kx-8k+4$.

$16\left(k^2+1\right)=(-4-8k+4)^2$, $k_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $k_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $t_1:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{8\sqrt{3}}{3}+4$, $t_2:y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{8\sqrt{3}}{3}+4$.

$tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$, $\varphi=60^0$; б) $\varphi=90^0$. 9 $m=6$, $t:\frac{x}{6}+\frac{y}{n}=1$; $nx+6y-6n=0$.

$C(5,3)$, $r^2=5$. $5\left(n^2+6^2\right)=(5n+18-6n)^2$; $n_1=3$, $n_2=-12$. $t_1:x+2y-6=0$; $t_2:2x-y-12=0$.

10 $x+2y+5=0$. ***Упатство***: Напиши ги равенките на тангентите повлечени од точката P. Реши го системот од равенки: секоја равенка на тангентата со кружницата. низ добиените точки што се решение на системот напиши равенка на права.

11 $x^2+y^2+4x-2y-20=0$ и $(x-48)^2+(y-1)^2=35^2$. ***Упатство***: Реши го системот

равенки $r^2\left(3^2+4^2\right)=\left(3p-4+35\right)^2$ и $r^2\left(4^2+3^2\right)=\left(4p+3-20\right)^2$.

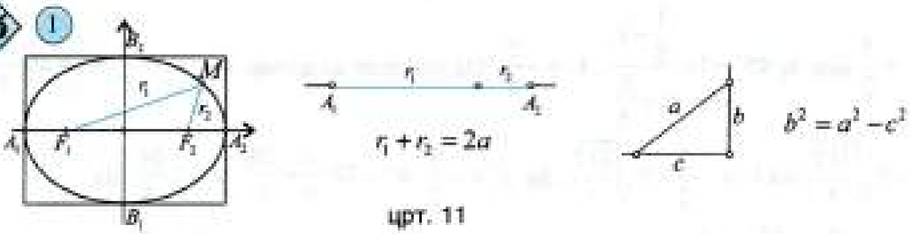
(12) $(x-1)^2+(y+2)^2=16$. ***Упатство***. Реши го системот равенки $\begin{cases}2p+q=0\\ r^2\cdot 25=(4p-3q+10)^2\\ r^2\cdot 25=(4p-3q-30)^2\end{cases}$.

15 (1) а) $xx_1+yy_1=5$; $x-2y+5=0$; б) $3x+4y-19=0$; в) $p=-4$, $q=0$, $r^2=25$, $4x-3y-9=0$. (2) а) $(1+3)^2+(y-1)^2=20$, $(y-1)^2=4$, $y-1=\pm 2$, $T(1,3)$. $2x+y-5=0$; б) $T(-3,-1)$, $3x+y+10=0$. (3) а) $T_1(3,-3)$, $t_1:\ 2x-y-9=0$; $T_2(-1,-3)$, $2x+y+5=0$. б) $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\dfrac{2+2}{1+2(-2)}=-\dfrac{4}{3}$, $\varphi=arc\,tg\dfrac{4}{3}$. (4) Правата ја сече кружницата во точките: $A(-5,0)$, $B(7,4)$. $t_1: 7x-y+35=0$; $t_2: x+y-11=0$. Тангентите се сечат во $C(-3,14)$. $P_\Delta=80$. (5) Пресечните точки се $A(5,0)$, $B(3,4)$, тангентите се $x=5$ и $3x+4y-25=0$, $\varphi\approx 143^0$. (6) $A(2,-1)$, $t: x+2y=0$.

$$tg\,\varphi=\frac{k_p-k_t}{1+k_p\cdot k_t}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)}=1,\ \varphi=45^0.$$

(7) а) $A(2,2)$, $B(2,-2)$; б) Немаат заеднички точки; в) се допираат во точката $D(4,7)$. (8) а) 30^0; б) 60^0. ***Упатство:*** агол меѓу две кружници е агол меѓу нивните тангенти повлечени во пресечните точки.

16 (1)



црт. 11

Дадени се F_1, F_2 и точката M. Графички ја одредуваме големата оска $2a=A_1A_2=r_1+r_2$. Конструираме правоаголен триаголник со катета c и хипотенуза a. Втората катета е полуоската b, црт. 11. (2) а) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{13}=1$; б) Од $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ следува $\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{c}{3}$, $c=\sqrt{5}$, па $b^2=a^2-c^2$, $b^2=9-5=4$; $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. (3) $F\left(\pm 4\sqrt{3},0\right)$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\pm\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.
(4) Од $\dfrac{25}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1$ и $18=a^2-b^2$ следува $b^4-23b^2-288=0$, $b^2=32$, $a^2=50$; $\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{y^2}{32}=1$.
(5) а) $2x^2+3y^2=35$; б) $49x^2+100y^2=4900$. (6) $8+2=10=2a$; $8-2=6=2c$; $a=5$; $c=3$; $b=4$; $16x^2+25y^2=400$. (7) Точката A е на елипсата, B е во елипсата, C надвор од елипсата и D е на елипсата. (8) $9x-40y-72=0$, $x-8=0$. (9) Две елипси се конфокални ако фокусите им се совпаѓаат. Бараната равенка на елипсата е $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{54}=1$.

(10) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1.$

17 (1) а) Од елипсата следува $a^2=40$, $b^2=24$, а од правата $k=-1$, $n=8$. Од условот $a^2k^2+b^2-n^2=40\cdot(-1)^2+24-8^2=0$, следува дека правата ја допира елипсата. б) правата ја сече елипсата; в) правата и елипсата немаат заеднички точки.

(2) а) $(3,-3)$; $\left(\frac{69}{13},\frac{21}{13}\right)$; б) правата и елипсата немаат заедничка точка.

(3) а) Од правата следува $k=-1$, од елипсата $a^2=20$, $b^2=5$. Од $a^2k^2+b^2-n^2>0$ следува $20\cdot(-1)^2+5-n^2>0$, $25-n^2>0$, $n\in(-5,5)$; б) $a^2k^2+b^2-n^2=0$, $n=\pm3$.
в) $n\in(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$. (4) $a^2A^2+b^2B^2-C^2=0$, $20+5p^2-100=0$, $p=\pm4$.

(5) 90^0. *Упатство:* Напиши ги равенките на двете тангенти повлечени од точката M.

(6) Од елипсата $a^2=30$, $b^2=24$. Од правата $k_p=2$ па $k_t=k_p=2$. Од условот за допир $n^2=a^2k^2+b^2$; $n^2=30\cdot2^2+24=144$, $n=\pm12$ $t:\ y=2x\pm12$.

(7) $8x+3y+35=0$; $8x+3y-35=0$. (8) Нека $y=kx+n$ е бараната тангента. Од правата следува $k_p=\frac{1}{5}$ и нека $k=k_t$. Од $tg\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k}$ следува $tg\,45^0=1=\frac{k_t-\frac{1}{5}}{1+\frac{k_t}{5}}$,

$k_t=\frac{3}{2}$ или $tg\,45^0=1=\frac{\frac{1}{5}-k_t}{1+\frac{k_t}{5}}$, $k_t=-\frac{2}{3}$. Од условот за допир: за $k_t=\frac{3}{2}$ $n^2=28\cdot\frac{9}{4}+\frac{28}{3}$

$n=\pm\sqrt{\frac{217}{3}}$, па $t:y=\frac{3}{2}x\pm\sqrt{\frac{217}{3}}$. За $k_t=-\frac{3}{2}$ $n^2=28\cdot\frac{4}{9}+\frac{28}{3}$ $n=\pm\frac{14}{3}$, па

$t:y=-\frac{2}{3}x\pm\frac{14}{3}$. (9) Од $2+4y-10=0$, $y=2$, па $M(2,2)$. Од $\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$ и $a^2A^2+b^2B^2=C^2$, следува $a^2+16b^2=100$. Решение на системот е $a^2=20$, $b^2=5$. Равенката на елипсата е $x^2+4y^2=20$. (10) Од условот $a^2A^2+b^2B^2=C^2$ следува $a^2+b^2=64$ и $a^2+9b^2=256$. Решението е $a^2=40$, $b^2=24$, а равенката на елипсата е $3x^2+5y^2=120$.

18 (1) $t:\ x+4y-10=0$. (2) $T\left(3,\frac{12}{5}\right)$, $9x\cdot3+25\cdot y\cdot\frac{12}{5}=225$; $9x+20y-75=0$.

(3) Бараната права е нормала на елипсата во допирната точка. Нормала на елипсата е права што минува низ дадената точка од елипсата, а е нормална на тангентата на елипсата во таа точка. Допирната точка е $T(-5,2)$. Од тангентата следува $k_t=\frac{1}{2}$, а од условот за нормалноста следува $k_n=-\frac{1}{k_t}$, т.е. $k_n=-2$, па

$n:\ y-y_1=k_n(x-x_1);\ y-2=-2(x+5);\ 2x+y+8=0.$ 4. $A(4,-1),\ B(2,2).$
$t_1:\ x-y-5=0;\ t_2:\ x+4y-10=0,\ t_1\cap t_2=C(6,\ 1).\ P_\Delta=5.$

5. $t_M:3x+4y-24=0;\ t_N:3x+4y+24=0.$ Тангентите се паралелни.

6. $A(3,-1),\ B(1,2);\ t_A:\ 9x-8y-35=0,\ t_B:\ 3x+16y-35=0\ \ \varphi=59^0.$

7. Ако секоја нормала минува низ центарот на елипсата, тогаш координатите на точката $O(0,0)$ ја задоволуваат равенката на секоја нормала. Па со замена во равенката на нормалата $y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$, $\left(k_n=-\frac{1}{k_t}\right)$, имаме $0-y_1=\frac{a_2y_1}{b^2x_1}(0-x_1)$. Оттука следува $a^2=b^2$, т.е. елипсата е кружница.

8. Точката $M\left(2,\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$, $t:\ 4x+3y\sqrt{5}-18=0.\ F_1\left(-\sqrt{5},0\right),\ F_1\left(\sqrt{5},0\right).$
Бараните нормали минуваат низ фокусите F_1 и F_2, а се нормални на тангентата.
$n_1:3\sqrt{5}x-4y+15=0;\ n_2:3\sqrt{5}x-4y-15=0.$

19 1. а) Од $b^2=c^2-a^2$ следува $b^2=9$, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; в) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ или $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 2. $a^2=64,\ b^2=36$, а) $a=8,\ b=6$; б) $F(\pm10,0)$; в) $\varepsilon=\frac{5}{4}$; г) $y=\pm\frac{3}{4}x$. 3. $\frac{81}{a^2}-\frac{16}{2}=1,\ a^2=9,\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1.$ 4. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$

5. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1.$ 6. $3x^2-y^2=12.$ ***Упатство:*** $c=4$, за хиперболата користи $c^2=a^2+b^2$ и $\varepsilon=\frac{c}{a}$. 7. Од $\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ и $\frac{36}{a^2}-\frac{81}{b^2}=1$, следува $a=\frac{24}{5}$, $b=12$, па равенката на хипер–болата е $\frac{25x^2}{576}-\frac{y^2}{144}=1$. 8. в) $3x^2-8y^2=16$; б) $4x^2-9y^2=63$. 9. Нека $M(x_1,y_1)$ е бараната точка од хиперболата. Од $7=\sqrt{(x_1+5)^2+y_1^2}$ и $\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{16}=1$, следува $x_1=6$ и $y_1=\pm4\sqrt{3}$, т.е. $M\left(-6,\pm4\sqrt{3}\right)$. 10. $x^2-y^2=a^2$. $a^2=25-16=9;\ x^2-y^2=9.$

20 1. а) $A(3,0),\ B\left(\frac{51}{8},\frac{15}{2}\right)$; б) $A(6,2),\ B\left(\frac{14}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

2. а) $a^2=9, b^2=36, k=2, n=3$, па $b^2+n^2-a^2k^2=36+9-9\cdot4=9>0$. Правата ја сече хипер–болата; б) ја допира хиперболата; в) правата и хиперболата немаат заеднички точки.

3. Од $a^2=20,\ b^2=5$ и $n=-\frac{5}{2}$ следува $20\cdot k^2-5=\frac{25}{4}$; $k=\pm\frac{3}{4}$. 4. $a^2\cdot2^2-16=64$, $a^2=20$; $4x^2-5y^2=80$. 5. $t:\ y+4=k(x+1)$; $y=k\cdot x+k-4$. Од $a^2k^2-b^2=n^2$ сле–дува $25\cdot k^2-16=(k-4)^2$, $k_1=1,\ k_2=-\frac{4}{3}$. Бараните тангенти се $t_1:\ y=x-3$,

$t_2: 4x+3y+16=0$. **6** а) $k_t = k_p = -1$. Од условот за допир следува $n^2 = a^2k^2 - b^2$; $n^2 = 15\cdot(-1)^2 - 6 = 9$; $n = \pm 3$; $t: y = kx + n$; $y = -x \pm 3$; б) $t: y = -2x \pm 3\sqrt{6}$.

7 $t: \frac{x}{m} + \frac{y}{m} = 1$, т.е. $x + y - m = 0$. Од $a^2k^2 - b^2 = m^2$, следува $m = \pm 1$, па $t: x + y \pm 1 = 0$. **8** $A\left(\frac{25}{4}, 3\right)$; $B\left(-\frac{25}{4}, 3\right)$. Равенката на нормалата е $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$. Нормалата во точката A е $12x + 16y - 123 = 0$. Нормалата во точката B е $12x - 16y + 123 = 0$. Нормалите се сечат во точката $C\left(0, \frac{123}{16}\right)$. $P_\Delta = \frac{1875}{32}$.

9 $c = 3$, од $a^2 + b^2 = 9$ и $a^2A^2 - b^2B^2 = C^2$ следува $4a^2 - b^2 = 16$ и $a^2 + 4b^2 = 16$. $a^2 = 5$, $b^2 = 4$, $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. **10** Нека $t: y = kx + n$, $k_p = -\frac{1}{7}$. Од $tg\,45^0 = 1 = \frac{k + \frac{1}{7}}{1 - \frac{k}{7}}$, $k = \frac{3}{4}$ или $1 = \frac{-\frac{1}{7} - k}{1 - \frac{k}{7}}$, $k = -\frac{4}{3}$. Од $4\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2 = n^2$, $n = \pm\frac{1}{2}$, а од $4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 2 = n^2$, $n = \pm\frac{\sqrt{46}}{3}$. Бараните тангенти се $y = \frac{3}{4}x \pm \frac{1}{2}$ или $y = -\frac{4}{3}x \pm \frac{\sqrt{46}}{3}$.

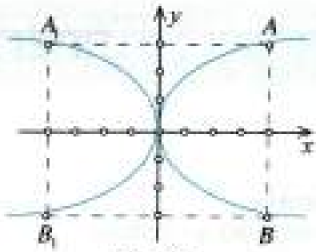
21 **1** а) $y^2 = 2px$, па $36 = 2\cdot p\cdot 9$, $p = 2$, $y^2 = 4x$; б) $x^2 = 2py$, $16 = 2\cdot p\cdot 8$, $p = 1$, па $x^2 = 2y$. **2** Параболата е од видот $y^2 = -2px$, $p = 7$, па равенката е $y^2 = -14x$.

3 а) $y^2 = 4x$; б) $y^2 = -4x$; в) $y^2 = -18x$. **4** Од $y^2 = 18x$ следува $2p = 18$, $p = 9$. $F\left(\frac{9}{2}, 0\right)$, $x = -\frac{9}{2}$. **5** Од $6^2 = 9x$ следува $x = 4$, па $M(4,6)$, $F\left(\frac{9}{4}, 0\right)$, $\overline{MF} = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 4\right)^2 + 6^2} = \frac{25}{4}$. **6** Нека $M(x_1, y_1)$ е точка од параболата $y^2 = 16x$, следува $y_1^2 = 16x_1$, $F(4,0)$, па $13^2 = (x_1 - 4)^2 + y_1^2$; $169 = x_1^2 - 8x_1 + 16 + 16x_1$; $x_1^2 + 8x_1 - 153 = 0$. $x_1 = 9$, $x_1 = -17$. За $x = 9$, $y^2 = 16\cdot 9$, $y = \pm 12$. $A(9,12)$, $B(9,-12)$. За $x_1 = -17$, $y \notin R$. **7** Од $y^2 = 10x$, $p = 5$, $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $x = \frac{5}{2}$ и $y^2 = 10\cdot\frac{5}{2}$, $y = \pm 5$. $A\left(\frac{5}{2}, 5\right)$, $B\left(\frac{5}{2}, -5\right)$, $\overline{AB} = 10$. **8** Од $y^2 = 8\cdot 4{,}5$ следува $y = \pm 6$, па $M(4{,}5; 6)$ и $F(2,0)$.

Бараната права е $MF: y - 6 = \frac{-6}{2 - 4{,}5}(x - 4{,}5)$; $12x - 5y - 24 = 0$.

(9) Од условот следува дека темињата на основата на рамнокракиот триаголник се $A(4,3)$, $B(4,-3)$ или $A_1(-4,3)$, $B_1(-4,-3)$, црт.12.

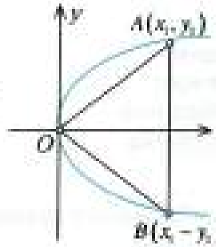
Параболите се $y^2=\frac{9}{4}x$ или $y^2=-\frac{9}{4}x$.



црт. 12

(10) Нека $A(x_1,y_1)$ и $B(x_1,-y_1)$ се темиња на основата на ΔAOB, тогаш $\overline{AB}=2y_1$ е страна на триаголникот. Од $\overline{OA}=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}=2y_1$, следува $x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=4y_1^{\,2}$ и $y_1^{\,2}=6x_1$, *т.е.* $x_1^{\,2}-18x_1=0$; $x_1=0$ или $x_1=18$ и $y_1=0$ или $y_1=\sqrt{108}=\pm 6\sqrt{3}$. Координатите на темињата на триаголникот се $O(0,0)$, $A(18,6\sqrt{3})$, $B(18,-6\sqrt{3})$.
Страната на триаголникот $a=6\sqrt{3}+6\sqrt{3}=12\sqrt{3}$, а

$P=\frac{(12\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}=108\sqrt{3}$, црт. 13.



црт. 13

22 (1) а) $A(4,-4)$, $B(1,2)$; б) $A(3,-4)$, $B\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$. (2) Од условот $pB^2=2A\cdot C$ следува $10\cdot 2^2=2\cdot 5\cdot n$, $n=4$. (3) а) $t: y-8=k(x-6)$, $y=kx-6k+8$. Од $p=2kn$, следува $4=2k(-6k+8)$; $k=1$ и $k=\frac{1}{3}$, па $t_1:\ y=x+2$, $t_2:\ x-3y+18=0$;

б) $3x+2y-3=0$, $x-2y-9=0$. (4) а) $t:\ y+2=k(x+2)$; $y=kx+2k-2$.
Од $p=2kn$; $8=2k(2k-2)$, $8=4k^2-4k$, $k^2-k-2=0$, $k_1=2$, $k_2=-1$. $t_1: y=2x+2$; $t_2: y=-x-4$; б) 71^0. (5) а) $y=3x+1$; б) $x-2y+12=0$; в) $y=-3x-1$ или $x-3y+27=0$. (6) Нормала на парабола е права што минува низ дадената точка од параболата и е нормална на тангентата на параболата во таа точка.

$t: yy_1=p(x+x_1)$; $t: 3x+2y+3=0$, $k_t=-\frac{3}{2}$, $k_n=\frac{2}{3}$, $n: y+3=\frac{2}{3}(x-1)$;

$n: 2x-3y-11=0$.

ПРЕГЛЕД НА ПОИМИ

СОДРЖИНА

Автори: **Боривоје Миладиновиќ, Никола Петрески**

Рецензенти:

д-р Боро Пиперевски - професор на Електротехнички факултет - Скопје
Павлина Тојтовска - професор во ДУСО "Браќа Миладиновци" - Скопје
Лидија Костова - професор, ДУСО "Орце Николов"Скопје

Стручни соработници: **Трајче Ѓорѓијевски, Катица Спасовска Бинчева**

Главен уредник: **Билјана Ангелова**

Со решение од Министерот на Министерството за образование и наука на Република Македонија 07-5822/1 од 23.09.2003 година оваа книга е одобрена за употреба во гимназиското образование

„АЛБИ" ДОО Скопје, ул. Даме Груев бр.7–7/2 Скопје
Место и година на првото издание: Скопје 2003

Издавач:
ДРУШТВО ЗА ИЗДАВАЧКА ДЕЈНОСТ, ПРОИЗВОДСТВО, ПРОМЕТ И УСЛУГИ
□АЛБИ□ДОО Скопје
ул. "Даме Груев" бр.7–7/2, Скопје
Управител: Александар Стефановски

Боривоје Миладиновиќ, Никола Петрески

МАТЕМАТИКА

за III година гимназиско образование

Лектура: **Сузана Стојковска**

Компјутерска обработка: **Драган Шопкоски, Милчо Аврамоски**

Коректура: Авторите

XVIII коригирано издание
Обем 290 страници, формат 17 x 23 cm
Тираж 53 примероци
Отпечатено во печатница:
Друштво за графичка, издавачка и трговска дејност "Печатница Наумовски"
Д.О.О.Е.Л. Скопје
ул. Пекљано бр.71 Скопје
Скопје 2020 година

CIP - Каталогизација во публикација на Народна и универзитетска
библиотека "Св. Климент Охридски" - Скопје
51(075.3)

МИЛАДИНОВИЌ Боривоје
Математика : за III година, гимназиско образование / Боривоје Миладиновиќ, Никола Петрески
Скопје : Алби, 2003 - 290 стр. : илустр. ; 23 cm
ISBN 9989 - 919 - 52 - 6
1. Петрески, Никола
COBISS.MK - ID 53498634