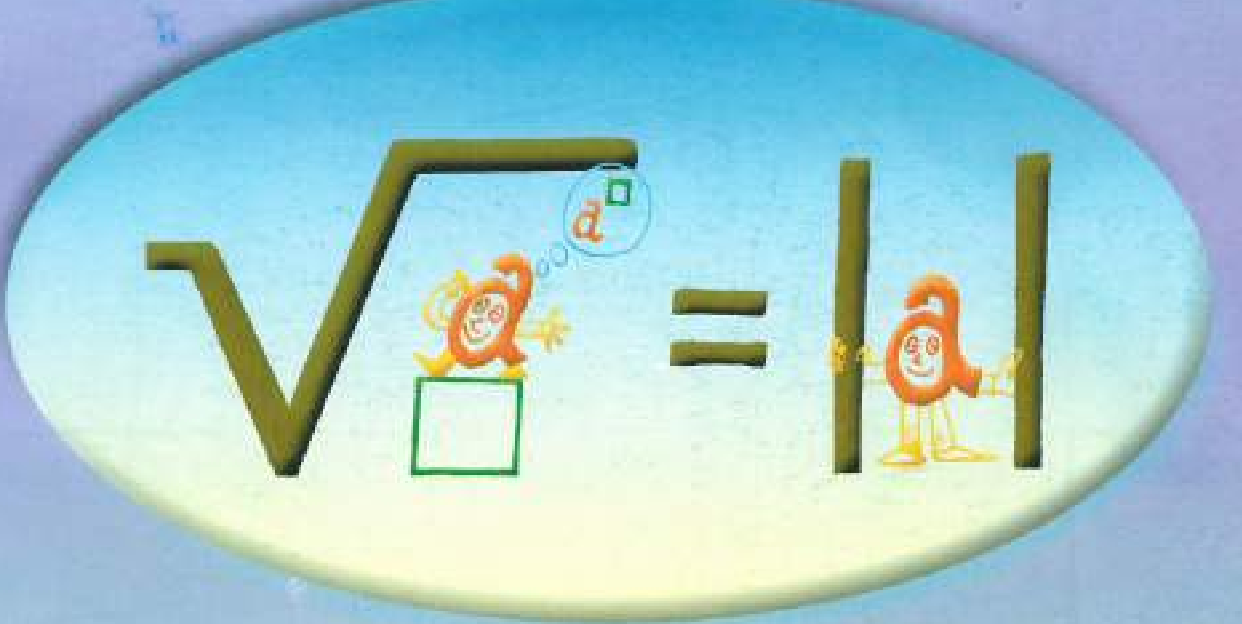
МАТЕМАТИКА

I година



гимназиско образование

Боривоје Миладиновиќ
Трајче Ѓорѓијевски
Никола Петрески

МАТЕМАТИКА

I ГОДИНА

ГИМНАЗИСКО
ОБРАЗОВАНИЕ

2020

ПРЕДГОВОР

Оваа книга ќе ти помогне при изучувањето на математиката во прва година. Биди активен и редовен во работата, а тоа ќе ти помогне самостојно да стекнуваш знаења што ќе ти донесе задоволство и успех во учењето.

Книгата е поделена на девет тематски целини. Тематските целини започнуваат со набројување на поими со кои ќе се сретнеш при изучувањето на содржината во темата, а наставните единици се нумерирани.

Воочи ги ознаките во наставните единици и согледај ја нивната порака.

Потсети се! Наставните единици почнуваат со нешто што ти е познато. Треба да се потсетиш и да ги решиш дадените барања. Тоа ќе го олесни изучувањето на нивните содржини.

А, **Б**, ... Со овие ознаки наставната единица е поделена на делови (порции) што се однесуваат на новите поими.

1▷, 2▷, 3▷, ... Со вaквите ознаки се означени активностите, прашањата и задачите што ќе ги решаваш на часот самостојно или со помош на твојот наставник, а тоа е во лекцијата.

● Со ознаката кркче ти е упатено прашање на кое треба да дадеш одговор.

■ Со оваа ознака е дадена информација за објаснување на новиот поим.

Запомни! Ова те упатува што е важно за новиот поим.

Воочи:
Вопшто: Овие две пораки ти даваат на знаење да посветиш поголемо внимание.

Задачи:
①, ②, ③, ... По секоја наставна единица дадени се задачи. Со редовно и самостојно решавање на овие задачи подобро ќе го разбереш изученото. Твоите одговори спореди ги со одговорите и решенијата што се дадени на крајот од учебников.

Тематска контролна вежба На крајот на секоја тема е дадена контролна вежба од прашања и задачи. Реши ја самостојно, со што ќе го провериш твоето знаење од изучената тема.

Кога ќе наидеш на тешкотии при изучувањето на одредени содржини, не се откажувај, обиди се повторно, биди упорен.

Ќе не радува ако оваа книга ти овозможи да постигнеш одличен успех.

Од авторите

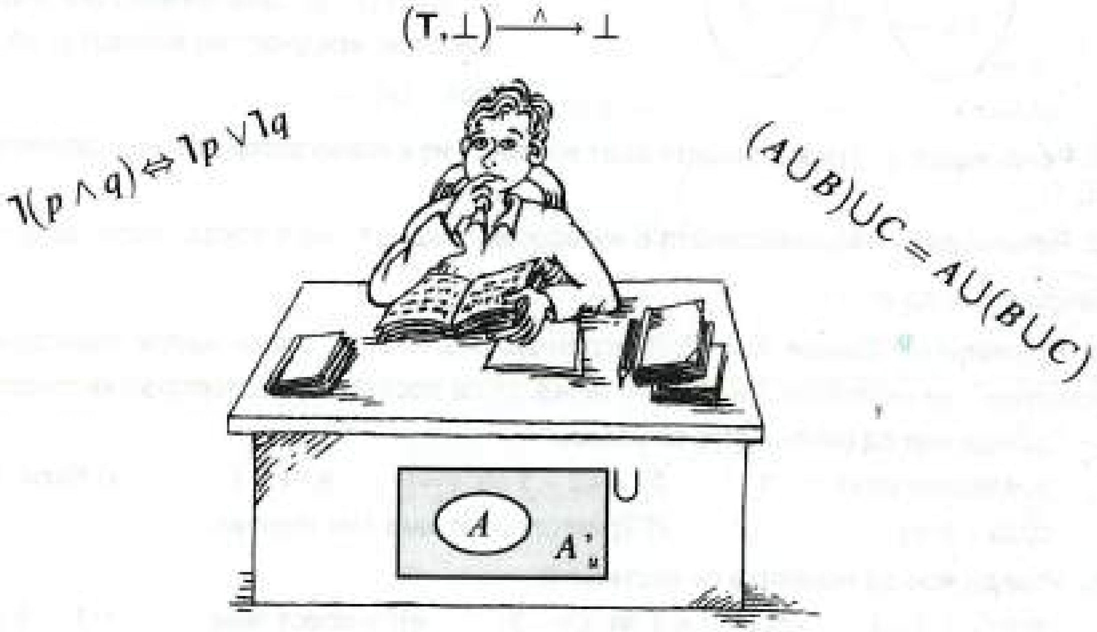
ТЕМА 1

МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА И МНОЖЕСТВА

> *Нема права вистина во оние науки*
> *во кои математиката не се применува.*
>
> Леонардо да Винчи (1452-1519)

Во оваа тема ќе учиш за:

- искази, вистинитосна вредност на исказ;
- операции со искази, негација, конјункција, дисјункција, импликација, еквиваленција;
- исказни формули, логични закони, тавтологии;
- аксиоми, теореми, докази на теоремите;
- множества, подмножества, еквивалентни множества;
- операции со множества: унија, пресек, разлика;
- декартов производ;
- својства на операциите со множества.



1 ПОИМ ЗА ИСКАЗ. НЕГАЦИЈА

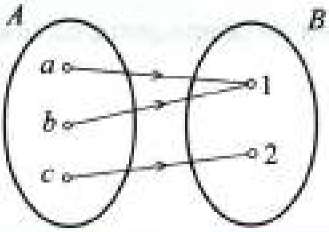
Потсети се!

- Какви реченици има?
- B е множество од расказни (декларативни) реченици.

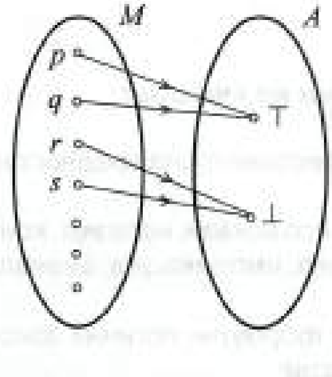
  C е множество од прашални реченици.

  D е множество од осмислени реченици.

  E е множество од реченици за кои има смисла да се постави прашање за вистинитост.
- Нека A е множество од два елементи: $\top$ (те) и $\perp$ (нете).
- Запиши го множеството A табеларно и со Венов дијаграм.
- Од какви реченици е соодветното множество $B \cap D \cap E$?
- f е пресликување од A кон B.



Нека $M = \{p, q, r, s, ...\}$ е множество од сите декларативни осмислени реченици за кои може да се постави прашањето за вистинитост, а τ пресликување од M во $A = \{\top, \perp\}$.



Елементите од M ги викаме искази.

На пример:

1. Реченицата p: Реката Вардар тече низ Битола.

Со $\tau(p)$ ја означуваме логичката (вистинитосна) вредност на исказот p, во примерот $\tau(p) = \perp$.

2. Реченицата q: "Триаголниците одат во кино", не е исказ затоа што не е осмислена реченица.

3. Реченицата r: "Математиката е интересен предмет", не е исказ, затоа што $\tau(r) = \top$, а за некои може да е $\tau(r) = \perp$.

4. Речениците: "Сакам $5^2 = 7$"; "Мислам дека $2 + 3 > 4$"; "Имам желба триаголникот да е рамностран", не се искази, бидејќи не може да се постави прашањето за вистинитост.

1 Одреди кои од речениците се искази:

а) Мислам дека $2 = 3$; б) $x + 2 = 5$ за $x = 1$; в) $7 > 3$; г) Дали $3 < 8$;

д) $2x + 3 = 1$; ѓ) Триаголникот има три темиња.

2 Утврди кои од исказите се вистинити:

а) $10 - 2 \cdot 3 = 4$; б) $x + 7 = 4$ за $x = -3$; в) 1 е прост број; г) $2^3 = 6$.

3 Одреди на што е еднакво:

а) $\tau(3 + 4 = 8)$; б) $\tau(2|8)$; в) τ(2 е сложен број); г) $\tau(x + 1 = 1$ за $x = 0)$.

- а) $\tau(3 + 4 = 8) = \perp$.

Запомни!

Декларативна (расказна) реченица која има смисла и која е или вистинита или невистинита се вика ***исказ***.

Поисети се!

- Нека е даден исказот p: Гоце пишува со молив.
- Што е исказот q: Гоце не пишува со молив.

Б Нека p е исказ. Исказот не p се вика негација на исказот p и го означуваме $\neg p$.

Ако исказот p е вистинит, тогаш исказот $\neg p$ е невистинит и обратно, ако $\neg p$ е вистинит, тогаш p е невистинит.

4 Негирај ги следните искази:

а) Бројот 7 е прост број; б) Скопје е главен град на Р М; в) Годината има 10 месеци.

Треба да знаеш!

Вистинитосната (логичката) вредност на исказот p можеме да ја претставиме со таблицата

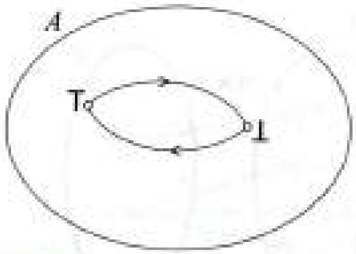
$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$
⊤	⊥
⊥	⊤

или пократко

p	$\neg p$
⊤	⊥
⊥	⊤

, односно

како пресликување $\neg: A \to A = \{\top, \bot\}$.



5 Изврши негација на исказите:

а) $2>0$; б) $5 \leq 1$.

- $\neg(2>0)$ може да се запише како $2 \leq 0$.

6 Одреди ја логичната вредност на исказите:

а) Дијагоналите на квадратот не се еднакви;

б) $x+5=3$ за $x=2$;

в) Бројот π е помал од $3,14$.

Воочи!

Негација на знакот $>$ е $\leq$; на $\geq$ е $<$; на $<$ е $\geq$; на $\leq$ е $>$.

Задачи:

① Одреди кои реченици се искази:

а) Бројот 82 е непарен; б) Здраво; в) $2|x,\ x \in \mathbb{N}$;

② Изврши ги следните негации:

а) $\neg(9>3)$; б) $\neg(3+5=7)$; в) $\neg(4^3=30)$; г) $\neg(6 \neq 9)$.

2 КОНЈУНКЦИЈА. ДИСЈУНКЦИЈА

Потсети се!

- Нека се дадени исказите
  p: 7 е прост број,
  q: 7 е парен број.

Сврзи ги овие искази со сврзникот "и".

- На парот (2,3) придружи му број:
  а) со операција +;
  б) со операција ·.

А Два искази сврзани со сврзникот "и" образуваат исказ кој се вика ***конјункција***.

Конјункцијата е вистинита кога двата искази се вистинити, а е невистинита во останатите случаи.

Конјункцијата на исказите p и q ја означуваме со $p \wedge q$.

1 Нека $p: 2|6$, $q: 3<2$ се искази. Конјункцијата од исказите p и q е: $p \wedge q$: $2|6 \wedge 3<2$.

Треба да знаеш!

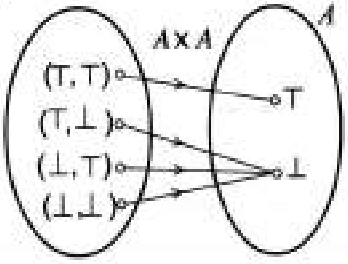
- Вистинитосната вредност на конјункцијата $p \wedge q$ зависи од вистинитосните вредности на исказите p и q и таа зависност ќе ја претставиме во табелата:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Во табелата, $\tau(p)$, $\tau(q)$ и $\tau(p \wedge q)$ кратко се запишани со $p, q, p \wedge q$.

- Со операцијата $\wedge$ на секој подреден пар искази (p,q) му е придружен нов сложен исказ $p \wedge q$ на следниов начин:

$\wedge: A \times A \to A$



2 Одреди ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) Бројот 8 е делив со 4 и 3 е делител на 6; б) $3>7$ и $5=7$; в) $2^3=6$ и $3^2=6$.

а) $\tau(p \wedge q) = \tau(p) \wedge \tau(q) =$ T $\wedge$ T = T.

Потсети се!

- Исказите $p: 5>3$, $q: 2|3$, сврзи ги со сврзникот "или".
- Дали е вистинит новиот исказ?

Б Два искази сврзани со сврзникот "или" образуваат исказ кој се вика ***дисјункција***.

Дисјункцијата на исказите p и q ја означуваме со $p \vee q$.

Исказот $p \vee q$ е невистинит само ако p и q се невистинити, а во останатите случаи е вистинит.

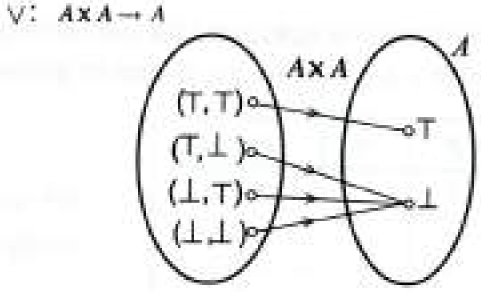
3 Нека $p: 7 < 5$; $q: 2+3=5$ се искази. Дисјункцијата од овие искази е:
$p \vee q: 7 < 5$ или $2+3=5$.

Треба да знаеш!

Вистинитосната вредност на дисјункцијата $p \vee q$ зависи од вистинитосните вредности на p и q и таа зависност можеме да ја претставиме со табелата:

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Во табелата, $\tau(p)$, $\tau(q)$, $\tau(p \vee q)$ кратко се запишани со p, q, $p \vee q$.



Со операцијата $\vee$ на секој подреден пар (p,q) искази му се придружува нов сложен исказ $p \vee q$ на следниов начин:

4 Одреди ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) Бројот 72 е делив со 5 или бројот 25 е делив со 5; б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ или $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$; в) $2|7$ или $2|5$.

Решение: б) $\tau(p \vee q) = \tau(p) \vee \tau(q) = \perp \vee \top = \top$.

Задачи:

① Дадени се исказите $p: \frac{1}{2} > 2$, $q: \frac{1}{3} < 2$ и $r: 3 > 2$. Формирај ги исказите:

а) $p \wedge r$; б) $p \wedge q$; в) $q \wedge r$,

а потоа одреди ги нивните вистинитосни вредности.

② Дадени се исказите $p: 2 \geq 3$, $q: -2 \geq -3$ и $r: 23 \geq 32$. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $p \vee q$; б) $p \vee r$; в) $q \vee p$.

③ Дадени се исказите $p: 3|9$, $q: 3|25$ и $r: 3|21$. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $p \wedge q$; б) $p \vee q$; в) $p \wedge r$.

3 ИМПЛИКАЦИЈА. ЕКВИВАЛЕНЦИЈА

Потсети се!

Дадени се исказите $p: 3<7$ и $q: 4|2$.

Со зборовите "Ако ..., тогаш ..." состави сложен исказ од дадените искази..

Дали добиениот исказ е вистинит?

Нека p и q се кои било искази. Исказот "ако p, тогаш q" се вика ***импликација*** на исказите p и q.

Импликацијата на исказите p и q ја означуваме со $p \Rightarrow q$, и таа е невистинита само ако првиот исказ е вистинит, а вториот невистинит. Во останатите случаи исказот $p \Rightarrow q$ е вистинит.

1 Нека $p: 2+3=5$ и $q: 3|7$.

Импликацијата од овие искази е $p \Rightarrow q$, т.е. ако $2+3=5$, тогаш $3|7$.

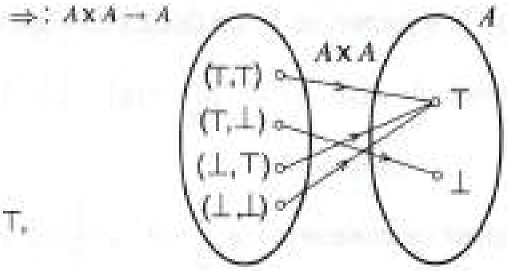
Треба да знаеш!

Вистинитосната вредност на импликацијата $p \Rightarrow q$ зависи од вистинитосните вредности на исказите p и q и може да ја претставиме со табелата:

p	q	$p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Во табелата, $\tau(p)$, $\tau(q)$ и $\tau(p \Rightarrow q)$ кратко се запишани со p, q и $p \Rightarrow q$.

Со операцијата $\Rightarrow$ на секој подреден пар искази (p,q) му е придружен нов сложен исказ $p \Rightarrow q$ на следниов начин:



Ако во импликацијата $p \Rightarrow q$, $\tau(p)=\top$, $\tau(q)=\top$, тогаш $\tau(p \Rightarrow q)=\top$.

Оваа импликација се вика ***логичко следство*** кое понатаму ќе го користиме за запишување теоремите во условна форма.

Импликацијата $p \Rightarrow q$ може да ја читаме на различни начини, како на пример:

1) Ако p тогаш q;
2) q е потребно за p;
3) Од p следува q;
4) p само тогаш кога q;
5) p е доволно за q;
6) Без q нема p.

2 Одреди ја вистинитосната вредност на следните искази:

а) Ако $2>5$, тогаш $3|7$;

б) Ако $\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$, тогаш $\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$

в) Ако $3|12$, тогаш $3|7$.

а) $\tau(p \Rightarrow q)=\tau(p) \Rightarrow \tau(q)=\bot \Rightarrow \bot=\top$.

Потсети се!

- Дадени се исказите $p: 2|7$ и $q: 5>2$.
- Со зборовите "Ако и само ако" состави сложен исказ од дадените искази.
- Дали добиениот исказ е вистинит?

A Нека p и q се кои било искази. Исказот: p ако и само ако q, се вика ***еквиваленција*** на исказот p и исказот q.

Еквиваленцијата на исказите p и q ја означуваме со $p \Leftrightarrow q$, таа е вистинита само ако исказите p и q имаат иста вредност, а невистинита ако p и q имаат различна логичка вредност.

3 Нека се дадени исказите $p: 4|3$ и $q: 2+4=8$. Еквиваленцијата од овие искази е:

$$p \Leftrightarrow q:\ 4|3 \Leftrightarrow\ 2+4=8.$$

Треба да знаеш!

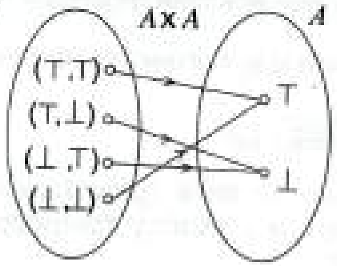
Вистинитосната вредност на еквиваленцијата $p \Leftrightarrow q$ зависи од вистинитосните вредности на исказите p и q која може да ја претставиме со табелата:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Во табелата, $\tau(p)$, $\tau(q)$ и $\tau(p \Leftrightarrow q)$ кратко се запишани со p, q и $p \Leftrightarrow q$.

Со операцијата $\Leftrightarrow$, на секој подреден пар искази (p,q) му е придружен нов сложен исказ $p \Leftrightarrow q$. на следниов начин:

$\Leftrightarrow: A \times A \to A$



4 Одреди ја вистинитосната вредност на сложениот исказ: а) $3>8$ ако и само ако $2+3=7$;

б) $2|7$ ако и само ако $2|14$; в) $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$ ако и само ако $4-3=1$.

а) $\tau(p \Leftrightarrow q)=\tau(p) \Leftrightarrow \tau(q)=\bot \Leftrightarrow \bot = \top$.

Задачи:

① Дадени се исказите $p: \frac{1}{5}<5$, $q: \frac{1}{4}>4$ и $r: \frac{1}{3}<3$. Формирај ги исказите:

а) $p \Rightarrow q$; б) $\rceil p \Leftrightarrow r$; в) $r \Rightarrow \rceil q$ и одреди ја нивната логичка вредност.

② Дадени се исказите $p: 3|7$, $q: 3|9$ и $r: 3|1$. Формирај ги исказите:

а) $p \Leftrightarrow q$; б) $\rceil p \Leftrightarrow \rceil r$; в) $\rceil q \Rightarrow r$ и одреди ја нивната логичка вредност.

4 ИСКАЗНИ ФОРМУЛИ

Потсети се!

- $12-4:2\cdot 2$ е сложен аритметички израз.
- Состави друг сложен аритметички израз.
- Состави сложен логички израз со користење на исказните променливи p, q, r,... и логичките операции.

1 Одреди ја логичката вредност на сложениот исказ $p \Rightarrow (\neg p \wedge q)$, ако $\tau(p)=\top$, $\tau(q)=\bot$.

Согледај го решението.

- Редоследот на операциите е: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.
- $\top \Rightarrow (\neg\top \wedge \bot)=\top \Rightarrow (\bot \wedge \bot)=\top \Rightarrow \bot=\bot$.

2 Нека е даден исказот p. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $p\wedge\top$; б) $p\wedge\bot$; в) $p\vee\top$; г) $p\vee\bot$; д) $p\Rightarrow\top$; ѓ) $p\Rightarrow\bot$; е) $p\Leftrightarrow\top$; ж) $p\Leftrightarrow\bot$.

Согледај го решението.

- а) Исказот p може да е вистинит или невистинит, т.е. $p=\top \vee p=\bot$.

  1) Ако $p=\top$, тогаш $p\wedge\top=\top\wedge\top=\top=p$;

  2) Ако $p=\bot$, тогаш $p\wedge\bot=\bot\wedge\bot=\bot=p$.

- Од вистинитосната таблица за импликација следува: в) $p\Rightarrow\bot\Leftrightarrow\neg p$.

Запомни!

> Елементарните искази означени со исказните променливи p, q, r, ... симболите $\top$, $\bot$, сврзани на дозволен начин со логичките операции $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, формираат сложени искази или исказни формули што ги означуваме со F, G, H ...

3 Испитај ја логичката вредност на формулата F: $(p\Rightarrow\bot)\wedge(p\Leftrightarrow\bot)\Rightarrow p$.

Потсети се!

- Напиши ги сите трицифрени броеви со цифрите 1 и 2. Колку трицифрени броеви запиша?
- Колку тројки можеш да формираш од симболите $\top$ и $\bot$?
- Дадени се исказните формули: $F_1: p\vee q$ и $F_2: q\vee p$. За формулата $H: F_1\Leftrightarrow F_2$, табелата на вистинитоста е:

F_1	F_2	H
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

4 Испитај ја логичката вредност на формулата $H: p\vee q\Leftrightarrow q\vee p$, за сите можни вредности на исказните променливи.

Согледај го решението:

- Логичката вредност на формулата ќе ја прикажеме со вистинитосната таблица:

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$	H
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Треба да знаеш!

- Формулите што имаат иста логичка вредност за сите логички вредности на исказните променливи се викаат еквивалентни ***исказни формули***.
- Еквиваленцијата од еквивалентни исказни формули е секогаш вистинита.
- Исказните формули што се секогаш вистинити се викаат ***тавтологии***.

5 Одреди ја со вистинитосна таблица логичката вредност на формулата $H: F_1 \Leftrightarrow F_2$, ако $F_1: \rceil(p \vee q)$ и $F_2: \rceil p \wedge \rceil q$. Согледај го решението.

- Формираме таблици за F_1 и F_2.

p	q	$p \vee q$	F_1
⊤	⊤	⊤	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥
⊥	⊥	⊥	⊤

p	q	$\rceil p$	$\rceil q$	F_2
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤

- F_1 и F_2 се логички еквивалентни, што значи формулата е тавтологија.
- До истото сознание ќе дојдеме директно со помош на вистинитосна таблица.

p	q	$\rceil p$	$\rceil q$	$p \vee q$	$\rceil(p \vee q)$	$\rceil p \wedge \rceil q$	$\rceil(p \vee q) \Leftrightarrow \rceil p \wedge \rceil q$
⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤

6 Со вистинитосна таблица испитај дали формулата $F: p \Rightarrow q \wedge \rceil r$ е тафтологија?

- Воочи дека од симболите ⊤ и ⊥ можеш да формираш осум тројки.

p	q	r	$\rceil r$	$q \wedge \rceil r$	$p \Rightarrow q \wedge \rceil r$
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤

- Очигледно, формулата не е тавтологија.

Потсети се!

- За кои било $a,b,c \in \mathbb{N}$, важи равенството $(a+b)+c=a+(b+c)$, т.е. асоцијативното својство.
- Запиши го асоцијативното својство за дисјункцијата од исказите p,q и r.

Б

7 Покажи со помош на вистинитосна таблица дека формулата $F:(p\wedge q)\wedge r \Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$ е тавтологија.

Со формирање на табела сигурно се увери дека формулата е тавтологија.

Треба да знаеш!

Тавтологиите се исказни формули што се од посебен интерес и затоа се нарекуваат логички закони или закони на мислењето. Некои од нив се:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \ p\vee q \Leftrightarrow q\vee p \\ 2.\ \ p\wedge q \Leftrightarrow q\wedge p \end{array}\right\}$$ Комутитативно својство на дисјункција и конјункција.

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ \ (p\vee q)\vee r \Leftrightarrow p\vee(q\vee r) \\ 4.\ \ (p\wedge q)\wedge r \Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r) \end{array}\right\}$$ Асоцијативно својство на дисјункција и конјункција.

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ \ (p\wedge q)\vee r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r) \\ 6.\ \ (p\vee q)\wedge r \Leftrightarrow (p\wedge r)\vee(q\wedge r) \end{array}\right\}$$ Дистрибутивно својство на дисјункција спрема конјункција и обратно.

7. $p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p$ Апсорпција на $\vee$ спрема $\wedge$.

8. $p\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p$ Апсорпција на $\wedge$ спрема $\vee$.

9. $p\vee \neg p$ Закон за исклучување на третото.

10. $\neg(p\wedge \neg p)$ Закон за непротивречност.

11. $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ Закон за двојна негација.

12. $p\Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p\vee q$ Замена за импликација.

$$\left.\begin{array}{l} 13.\ \ p\Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p) \\ 14.\ \ p\Leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p) \end{array}\right\}$$ Замена за еквиваленција.

$$\left.\begin{array}{l} 15.\ \ \neg(p\wedge q)\Leftrightarrow \neg p\vee \neg q \\ 16.\ \ \neg(p\vee q)\Leftrightarrow \neg p\wedge \neg q \end{array}\right\}$$ Закони на Де Морган.

Исто така голема примена имаат правилата за изведување на заклучоци:

1. $(p\Rightarrow q)\wedge p\Rightarrow q$ Модус поненс.
2. $(p\Rightarrow q)\wedge \neg q\Rightarrow \neg p$ Модус толенс.
3. $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ Хипотетички силогизам
4. $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow \neg q\Rightarrow \neg p$ Правило за контрапозиција.

8 Со помош на вистинитосна таблица докажи дека формулите 5, 8 и 14 се тавтологии.

Задачи:

① Одреди ја логичката вредност на исказната формулата:

а) $F_1 : p \Rightarrow q \wedge \urcorner p$; б) $F_2 : p \Rightarrow q \Rightarrow \urcorner p \wedge \perp$.

② Дали исказните формули се еквивалентни:

а) $F_1 : p \vee p$ и $F_2 :\ (p \wedge\ p)$; б) $F_1 : (p \vee q) \vee r$ и $F_2 : p \vee (q \vee r)$?

③ Покажи дека исказните формули 13 и 3 се тавтологии.

5 АКСИОМИ И ТЕОРЕМИ

Потсети се!

- Какви тврдења ти се познати?
- Тврдењето: "Низ две точки минува една и само една права" е основно тврдење.
- Дали тврдењето е вистинит исказ?
- Дали тврдењето: "Низ три неколинеарни точки минува една и само една рамнина" е точно?

А **1** Одреди ја вистинитосната вредност на тврдењата:

а) Ако две точки лежат во рамнина тогаш и правата што минува низ тие точки лежи во таа рамнина;

б) $a + 0 = a$ за секое $a \in \mathbb{Z}$;

в) Ако некој број е делив со 3, тогаш тој завршува со цифрата 3.

- Тврдењата а) и б) се вистинити, а тврдењето в) е невистинито.

Запомни!

Математичките тврдења што се прифаќаат за точни без доказ се викаат ***основни тврдења или аксиоми.***

2 Кои од следните тврдења се аксиоми?

а) На секоја рамнина лежат барем три неколинеарни точки, а постојат и точки што не припаѓаат на таа рамнина.

б) Ако две рамнини имаат една заедничка точка, тогаш тие имаат барем уште една заедничка точка.

в) Во просторот постојат барем четири точки што не лежат во иста рамнина.

г) $a + (-a) = 0$ за секое $a \in \mathbb{Z}$.

д) $1 \cdot a = a$ за секое $a \in \mathbb{Z}$.

ѓ) Ако $a + c = b + c$, тогаш $a = b$ за секои $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Потсети се!

■ Тврдењето: "Низ секоја точка минува барем една рамнина" е изведено тврдење.

● Кое основно тврдење е користено во претходната реченица?

Б **3** За тврдењето "Секоја равенка $x+a=b$ има единствено решение во $\mathbb{Z}$", $x=b-a$ е изведено тврдење.

Согледај го решението:

● Во утврдувањето на вистинитоста се користи првично, основно тврдење.

● Со додавање на двете страни $+(-a)$ се добива $x+a+(-a)=b+(-a)$.

● Се користи првичното тврдење $a+(-a)=0$ и се добива $x=b-a$.

Запомни!

Математичко тврдење што претставува логичка последица од други точни тврдења (т.е. чија точност се докажува) се вика изведено тврдење или теорема.

4 Кои од следните тврдења се аксиоми, а кои теореми?

а) Низ дадена точка што не лежи на дадена права минува една и само една права паралелна со дадената.

б) Ако правите a, b и c лежат во иста рамнина и ако $a \parallel b \wedge c \cap a \neq \varnothing$, тогаш $c \cap b \neq \varnothing$.

в) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ за секое $a,b,c \in \mathbb{Z}$.

ѓ) $a\cdot 0 = 0$ за секое $a \in \mathbb{Z}$.

Потсети се!

■ Теоремата: "Ако трапезот е рамнокрак тогаш дијагоналите се еднакви", може да се искаже како: "Во рамнокрак трапез дијагоналите се еднакви".

● Теоремата: " Ако многуаголникот е триаголник, тогаш збирот на внатрешните агли е 180^0", искажи ја во друга форма.

В **5** Теоремата "Ако триаголникот е рамнокрак тогаш висините спрема краците се еднакви", искажи ја во друга форма.

Согледај го решението:

■ Исказот p е претпоставка или услов при кој се разгледува некој матаматички објект. Во овој случај p : триаголникот е рамнокрак.

■ Исказот q е заклучок кој кажува што е тврдење за тој објект, т.е. кое негово својство се разгледува. Во овој случај заклучокот е q: висините спрема краците се еднакви.

■ Теоремата искажана во безусловна форма ќе гласи: "Висините спрема краците во рамнокрак триаголник се еднакви.

■ Оваа форма се вика категорична форма.

6 Искажи ја во условна и категорична форма :

а)Питагоровата теорема;

б)Талесовата теорема. За правиот агол над дијаметарот на кружницата.

Потсети се!

- Кога ги разгледуваш теоремите дали се прашуваш дали важи обратното тврдење?
- Формулирај го обратното тврдење на теоремата, "Ако триаголникот е рамнокрак тогаш тој има два еднакви агли".
- Дали обратното тврдење е теорема?

7 Дадена е теоремата: "Ако еден четириаголник е тетивен, тогаш неговите спротивни агли се суплементни.

а)Одреди ја претпоставката p и тврдењето q, на теоремата.

б) Напиши ја теоремата во категорична форма.

в)Напиши ја обратната теорема во условна форма.

г) Одреди ја претпоставката, и заклучокот на обратната теорема

д) Напиши ја обратната теорема во категорична форма.

ѓ) Запиши ги двете теореми заедно со еквиваленција.

Согледај го решението:

а) p: Четириаголникот е тетивен. q: Спротивните агли се суплементни.

б) Во тетивниот четириаголник спротивните агли се суплементни.

в) Ако спротивните агли во еден четириаголник се суплементни, тогаш тој е тетивен.

г) q: Спротивните агли во четириаголникот се суплементни.

p: Четириаголникот е тетивен.

д) Спротивните агли се суплементни кај тетивниот четириаголник.

ѓ) Четириаголникот е тетивен ако и само ако спротивите агли се суплементни.

8 Дадена е теоремата: "Ако триаголникот е рамнокрак, тогаш тежишните линии спрема краците се еднакви".

а) Напиши ја теоремата во категорична форма.

б) Напиши ја обратната теорема во условна и категорична форма.

Задачи:

① а) Кои математички тврдења се првични (аксиоми)?

б) Кои тврдења се изведени (теореми)?

② Напиши по две аксиоми и теореми.

③ Дали важат обратните теореми:

а) $x|a \wedge x|b \Rightarrow x|(a+b)$;

б) Ако триаголникот е рамнокрак, тогаш висината и тежишната линија на основата се совпаѓаат?

6 ДОКАЗИ НА ТЕОРЕМИ

Потсети се!

- Кои тврдења се изведени?
- Дали изведените тврдења се докажуваат?

Теоремата е запишана во условна форма па $p: 2 \mid x \wedge 3 \mid x$ и $q: 6 \mid x$

Бараме логичко следство од $2 \mid x \wedge 3 \mid x$, а тоа е исказот $r_1: x = 2a \wedge x = 3b; a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\tau(p \Rightarrow r_1) = \top$$

Бараме логичко следство од исказот r_1, а тоа е исказот $r_2: 3x = 6a \wedge 2x = 6b$.

$$\tau(r_1 \Rightarrow r_2) = \top$$

Ако r_2, тогаш $r_3: x = 6(a-b)$.

$$\tau(r_2 \Rightarrow r_3) = \top$$

Ако r_3, тогаш $q: 6 \mid x$.

$$\tau(r_3 \Rightarrow q) = \top$$

Според правилото за транзитивност на импликацијата имаме $\tau(p \Rightarrow q) = \top$.

A 1 Докажи ја теоремата:

Ако $2 \mid x \wedge 3 \mid x$, тогаш $6 \mid x$.

Согледај го доказот:

Попрактично е следново запишување:

$$p: 2 \mid x \wedge 3 \mid x$$
$$\Downarrow$$
$$r_1: \begin{cases} x = 2a \\ x = 3b \end{cases}; \ a, b \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$r_2: \begin{cases} 3x = 6a \\ 2x = 6b \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$r_3: x = 6(a-b) = 6c, \ c \in \mathbb{Z}$$
$$\Downarrow$$
$$q: 6 \mid x.$$

Овој метод на докажување на теоремите се вика доказ со напредување.

Суштината на овој метод на докажување е во тоа што се тргнува од претпоставката на теоремата и со низа од логички следства се доаѓа до заклучокот.

2 Докажи ја теоремата : а) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

б) Симетралите на аглите при основата на рамнокрак триаголник се еднакви.

Согледај го доказот:

а) $p: \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $q: \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

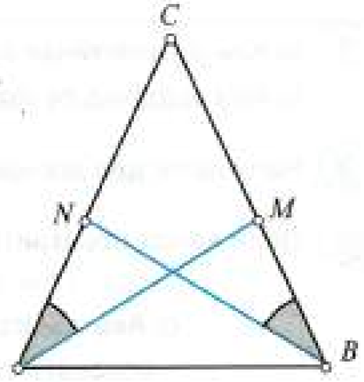
Од $p: \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\Downarrow$$
$$r_1: \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$
$$\Downarrow$$
$$q: \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

б) $p: \Delta ABC$ е рамнокрак и $q: \overline{AM} = \overline{BN}$.

Од $p: \Delta ABC$ е рамнокрак.

$$\Downarrow$$
$$r_1: \begin{cases} \measuredangle ACM = \measuredangle BCN, \\ \overline{AC} = \overline{BC} \\ \measuredangle CAM = \measuredangle CBN \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$r_2: \Delta AMC \cong \Delta BNC$$
$$\Downarrow$$
$$q: \overline{AM} = \overline{BN}.$$



Треба да знаеш!

Претходните две теореми ги докажавме директно со синтетички доказ, т.е. доказ со напредување.

3 Со методот на напредување докажи ги теоремите:

а) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ за $a,b,c,d\in R\setminus\{0\}$; б) $3|x\wedge 5|x\Rightarrow 15|x$;

в) Збирот на надворешните агли на триаголникот изнесува 360^0.

Потсети се!

- Дали импликацијата $p\Rightarrow q$ може да се запише како $q\Leftarrow p$?
- Што значи овој запис ?

Б **4** Докажи ја теоремата:

Ако $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge a\cdot b>0$, тогаш $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

Согледај го доказот:

- $q:\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ е имплицирано од $a^2+b^2\geq 2ab$ по делење со ab.
- $S_1:a^2+b^2\geq 2ab$ е имплицирано од $a^2-2ab+b^2\geq 0$.
- $S_2:a^2-2ab+b^2\geq 0$ е имплицирано од $(a-b)^2\geq 0$.
- $S_3:(a-b)^2\geq 0$ е имлицитно од $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge a\cdot b>0$, т.е. $p:a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge a\cdot b>0$.

Според претходното, можеме да запишеме:

$q:\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ .... бараме доволен услов S_1 за q.

$\Uparrow$

$S_1:a^2+b^2\geq 2ab$ .... бараме доволен услов S_2 за S_1.

$\Uparrow$

$S_2:a^2-2ab+b^2\geq 0$ .... бараме доволен·услов S_3 за S_2.

$\Uparrow$

$S_3:(a-b)^2\geq 0$ .... бараме доволен услов p за S_3.

$\Uparrow$

$p:a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge a\cdot b>0.$

Треба да знаеш!

Теоремата од примерот е докажана директно со аналитички доказ, т.е. доказ со враќање.

5 Примени доказ со враќање и докажи ја теоремата: $a+\frac{1}{a}\geq 2$ за $a\in\mathbb{R}^+$.

Треба да знаеш!

Освен споменатите директни докази се применуваат и индиректни методи на докажување, а од нив ќе го користиме само правило на контрапозиција.

Потсети се!

- Исказните формули $F_1 : p \Rightarrow q$ и $F_2 : \rceil q \Rightarrow \rceil p$ се логички еквивалентни, т.е. $F_1 \Leftrightarrow F_2$ што значи F_1 може да се замени со F_2.
- Како се вика оваа тавтологија?

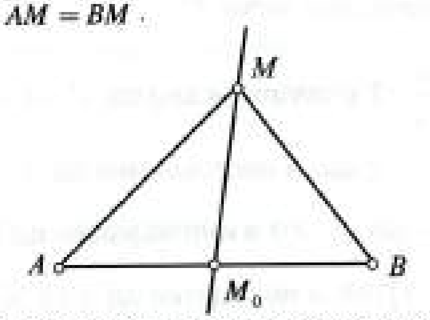
B

6 Теорема. Секоја точка од симетралата на отсечка е еднакво оддалечена од крајните точки на отсечката. Докажи ја теоремата со примена на индиректен метод.

Согледај го доказот:

$p : MM_0$ е симетрала на отсечката AB,

$q : \overline{AM} = \overline{BM}$.



$$\rceil q : \overline{AM} \neq \overline{BM}$$
$$\Downarrow$$
$$t_1 : \Delta AM_0M \not\equiv \Delta BM_0M$$
$$\Downarrow$$
$$t_2 : \overline{AM_0} \neq \overline{BM_0} \vee \measuredangle MM_0A \neq \measuredangle MM_0B$$
$$\Downarrow$$

$\rceil p : M_0M$ не е симетрала. Значи, $\tau(\rceil q \Rightarrow \rceil p) = \top$, па според правилото на контрапозиција следува дека $\tau(p \Rightarrow q) = \top$.

7 Со правилото на контрапозиција докажи ја теоремата: Аглите при основата на рамнокрак трапез се еднакви.

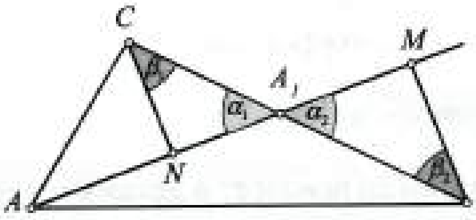
8 Докажи ја теоремата. Тежишната линија t_a е еднакво оддалечена од темињата B и C на триаголникот ABC со:

а) синтетички доказ; б) аналитички доказ; в) индиректен доказ со контрапозиција.

Согледај го доказот:

$p : t_a = AA_1$; $q : \overline{CN} = \overline{BM}$.

Нека $BM \perp AA_1$ и $CN \perp AA_1$.



а) $p : t_a = \overline{AA_1}$ (тежишна линија на ΔABC).

$$r_1 : \begin{cases} 1.\ \overline{CA_1} = \overline{BA_1} \\ 2.\ \alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{како накрсни агли} \\ 3.\ \beta_1 = 90^0 - \alpha_1 = 90^0 - \alpha_2 = \beta_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$r_2 : \Delta CNA_1 \equiv \Delta BMA_1 \quad \text{според признакот АСА}$$
$$\Downarrow$$
$$q : \overline{CN} = \overline{BM}.$$

б) $q:\overline{CN}=\overline{BM}$

$$\Uparrow$$

$$S_1:\Delta CNA_1\equiv\Delta BMA_1$$

$$\Uparrow$$

$$S_2:\begin{cases}\overline{CA_1}=\overline{BA_1};\ A_1 \text{ е средина на } BC\\ \alpha_1=\alpha_2 \text{ накрсни агли}\\ \beta_1=\beta_2\end{cases}$$

$$\Uparrow$$

$p:t_a$ е тежишна линија.

в) $\neg q:\overline{CN}\neq\overline{BM}$

$$\Downarrow$$

$$t_1:\Delta CNA_1\not\equiv\Delta BMA_1$$

$$\Downarrow$$

$$t_2:\overline{CA_1}\neq\overline{BA_1}\vee\alpha_1\neq\alpha_2\vee\beta_1\neq\beta_2$$

$$\Downarrow$$

$\neg p:t_a$ не е тежишна линија.

Задачи:

① Докажи ја со напредување теоремата: Секоја точка од симетралата на аголот е подеднакво оддалечена од неговите краци.

② Со примена на доказ со враќање докажи го следново тврдење:

$$a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\wedge ab<0\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq 2.$$

③ Тетивите на кружницата на кои им одговараат еднакви централни агли се еднакви. Докажи го тврдењето со контрапозиција.

④ Докажи ја теоремата: $2\,|\,x\wedge 3\,|\,x\wedge 5\,|\,x\Rightarrow 30\,|\,x,\ (x\in\mathbb{N})$.

⑤ Докажи ја теоремата: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$, каде $a,b,c,d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

⑥ Средната линија на триаголникот е паралелна на страната со која нема заеднички точки и е половина од таа страна. Докажи!

7 МНОЖЕСТВО. ПОДМНОЖЕСТВО. ЕДНАКВИ И ЕКВИВАЛЕНТНИ МНОЖЕСТВА

Потсети се!

- Поимот множество е основен поим кој не се дефинира.
- На колку начини може да биде зададено едно множество?

А **1** Множеството од деновите во седмицата запиши го:

а) табеларно;

б) описно;

в) со Венов дијаграм.

а) Ги набројуваме сите елементи на множеството и пишуваме:

$A=\{$ понеделник, вторник, среда, четврток, петок, сабота, недела $\}$

б) $A=\{x|x$ е ден во седмицата $\}$. Читај:

A е множество од сите елементи x, така што x е ден во седмицата.

в) Со Венов дијаграм

2 Множеството од годишните времиња претстави го: а) табеларно; б) описно; в) со Венов дијаграм.

Потсети се!

Нека B е множество од денови во седмицата што почнуваат со буквата С, т.е. $B=\{$ среда, сабота $\}$.

Дали множеството B е дел од некое друго множество?

Дали множеството од деновите во седмицата го содржи множеството B?

Б **3** Нека А е множество од месеците во годината, B е моножество од месеците чие име има четири букви, а нека C е множество од месеците чие име започнува со буквата А.

Запиши ги множествата A, B и C табеларно и со Венов дијаграм.

Што забележуваш?

Сигурно запиша:

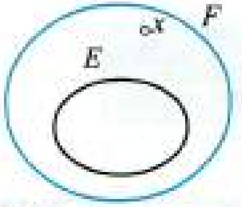
$A=\{$ јануари, февруари, март, април, мај, септември, октомври, ноември, декември $\}$.

$B=\{$ март, јуни, јули $\}$.

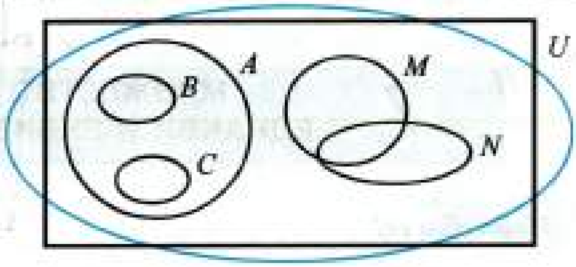
$C=\{$ април, август $\}$.

Запомни!

За множеството E чии елементи припаѓаат на множеството F велиме дека е подмножество на F и пишуваме $E\subseteq F$. Ако, пак, постои барем еден елемент од F што не е елемент на E, тогаш за E велиме дека е вистинско подмножество од F и пишуваме $E\subset F$.



$x\notin E\wedge x\in F$



Множеството на кое секое множество му е вистинско подмножество се вика универзално множество и се означува со U, а со Венов дијаграм се претставува со правоаголник.

Множествата B и C во примерот се вистински подмножества на множеството A, т.е. $B\subset A$, $C\subset A$.

4 Нека е дадено множеството $M=\{a,b,c\}$. Состави го множеството што ги содржи сите подмножества на множеството M и означи го P_M.

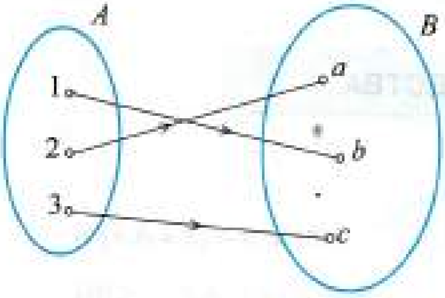
Сигурно доби дека $P_M=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

Воочи и запомни!

Празното множество е подмножество на секое множество.
Секое множество е подмножество само на себе.
Множеството од сите подмножества на дадено множество се вика ***партитивно*** множество.

5 Запиши ги сите подмножества на множеството $M=\{1,2,3,4\}$.

Потсети се!



Воочуваш дека меѓу елементите може да се воспостави заемно еднозначно соодветство.

- По колку елементи имаат множествата A и B?
- Запиши две множества со ист број на елементи.

ℬ **6** Нека A е множество на ученици од една паралелка, а B е конечно подмножество на множеството $\mathbb{N}$.

Во кој случај меѓу множествата A и B може да се поспостави заемно еднозначно соодветство?

Согледај го одговорот:
За да може да се воспостави взаемно еднозначно соодветство треба множествата да имаат ист број елементи.

Запомни!

Множеството A е еквивалентно со множеството B, ако и само ако постои некое взаемно еднозначно соодветствие, а пишуваме $A\cong B$.

7 Дадени се множествата $A=\{x|x$ е прост број помал од $11\}$ и $B=\{2,3,5,7\}$. Дали дадените множества се: а) еквивалентни; б) еднакви ?

Сигурно воочи дека тие множества се еквивалентни, т.е. $A\cong B$, меѓутоа тие се и еднакви, т.е. $A=B$.

Запомни!

Две множества се еднакви ако имаат исти елементи.

Ако $A=B$, тогаш $A\subseteq B\wedge B\subseteq A$.

Ако $A\subseteq B\wedge B\subseteq A$, тогаш $A=B$.

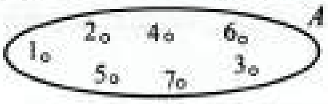
Еднаквите множества се еквивалентни, но обратното не важи.

8 Дадени се множествата: $A=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge x$ е парен број $\}$; $B=\{2,4,6,8\}$;

$C=\{x|x$ е годишно време $\}$ и $D=\{$ есен, пролет, зима, лето $\}$. Кои од дадените множества се еквивалентни, а кои еднакви?

Задачи:

① а) Множеството $A=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 3\le x<7\}$ запиши го табеларно и со Венов дијаграм.

б) Множеството 

запиши го табеларно и описно.

② Најди партитивно множество за множеството $M=\{$ л, е, т, о $\}$.

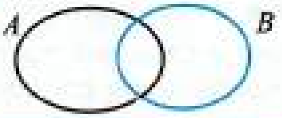
③ Запиши пример за кој важи $A\subseteq B\wedge B\subseteq A$..

Дали множествата A и B имаат ист број на елементи?

8 ОПЕРАЦИИ СО МНОЖЕСТВА

Потсети се!

- $\top\vee\top=\top$
  $\top\vee\bot=\top$
  $\bot\vee\top=\top$
  $\bot\vee\bot=\bot$
- Шрафирај $A\cup B$.



𝒜 **1** Нека $A=\{2,4,6,8\}$ и

$B=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 3\le x<10\}$.

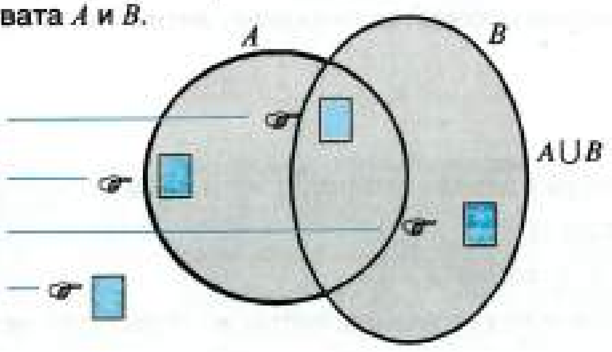
Одреди $A\cup B$.

Сигурно воочи дека

$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

2 На следниов цртеж се дадени вистинитосна табела за дисјункција и множествата A и B. Нека $p: x\in A$ и $q: x\in B$ се искази. Образложи ја врската меѓу таблицата и припадноста на елементите на множествата A и B.

p	q	$p\vee q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊥



Образложи дека следниве записи се однесуваат на унија од две множества:

а) $x \in A \bigcup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

б) $A \bigcup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

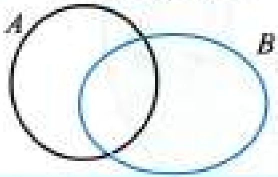
в) Унија на две множества е множеството чии елементи припаѓаат на едното или на другото множество.

3 Одреди ја унијата на множествата $A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}, B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 8 \leq x \leq 15\}$ и $C = \{1, 2, 3, ..., 13\}$.

Потсети се!

■ ⊤ ∧ ⊤=⊤
⊤ ∧ ⊥=⊥
⊥ ∧ ⊤=⊥
⊥ ∧ ⊥=⊥

● Шрафирај $A \bigcap B$.



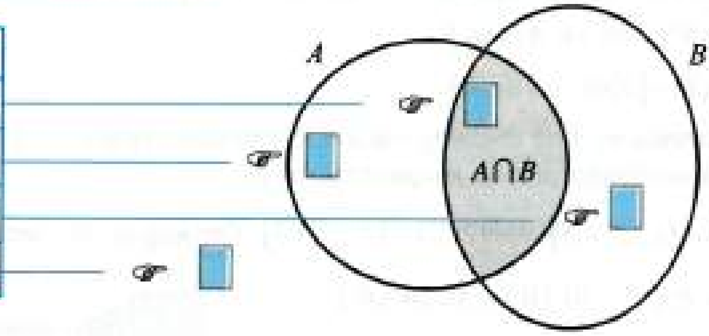
Б **4** Нека $A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 6\}$ и $B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq x < 8\}$. Одреди го множеството $A \bigcap B$.

Сигурно доби:

$A \bigcap B = \{3, 4, 5, 6\}$.

5 На следниот цртеж се дадени: конјункција и множествата A и B. Нека $p: x \in A, q: x \in B$. Образложи ја врската меѓу таблицата и припадноста на елементите на множествата A и B.

p	q	$p \wedge q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥
⊥	⊥	⊥



Провери ја еквивалентноста на следниве записи:

а) $x \in A \bigcap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

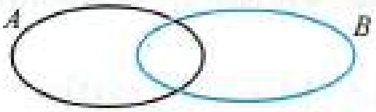
б) $A \bigcap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

в) Пресекот на две множества е множеството чии елементи припаѓаат и на едното и на другото множество.

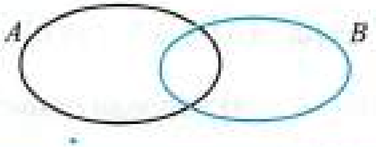
6 Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$. Одреди го пресекот на дадените множества.

Потсети се!

- Шрафирај $A \setminus B$.



- Шрафирај $B \setminus A$.



$\mathscr{B}$ **7** Нека $A=\{1,2,3,4\}, B=\{4,5,6\}$.

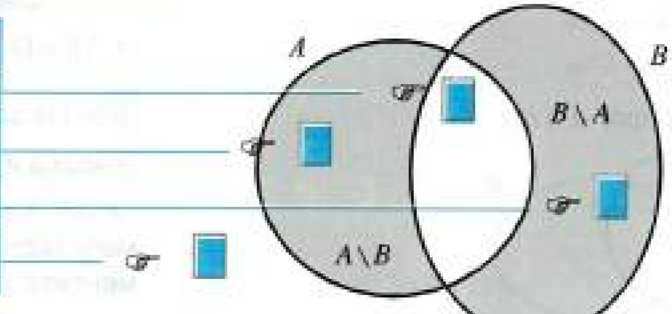
Одреди: а) $A \setminus B$; б) $B \setminus A$.

Сигурно одреди дека:

а) $A \setminus B=\{1,2,3\}$ и б) $B \setminus A=\{5,6\}$.

8 Според следниот цртеж образложи ја врската меѓу таблицата и припадноста на елементите на множествата A и B, користејќи ги исказите $p: x \in A$ и $q: x \in B$.

p	q	$\rceil q$	$p \wedge \rceil q$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$



Следниве записи се однесуваат на разликата на две множества:

а) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

б) $A \setminus B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

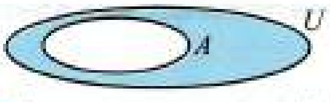
в) Разлика на две множества A и B е множеството $A \setminus B$ чии елементи припаѓаат на A, а не припаѓаат на множеството B.

9 Нека $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{2,3,4,5\}, C=\{1,5\}$. Определи ги множествата:

а) $A \setminus B \setminus C$; б) $(B \setminus C) \cup (A \setminus C)$.

Потсети се!

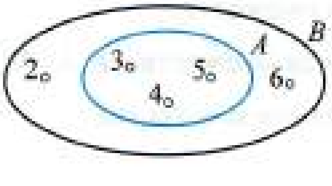
- Обоениот дел претставува графички приказ на разликата $U \setminus A$.



- Претстави го со шрафирање множеството $A \setminus B$, ако $B \subset A$.

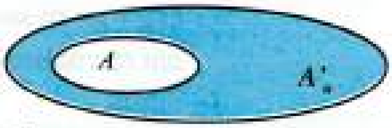
$\mathscr{T}$ **10** Нека се дадени множествата $A=\{3,4,5\}$ и $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Одреди го множеството $B \setminus A$ и прикажи го графички.

Сигурно доби дека $B \setminus A=\{2,6\}$, т.е.

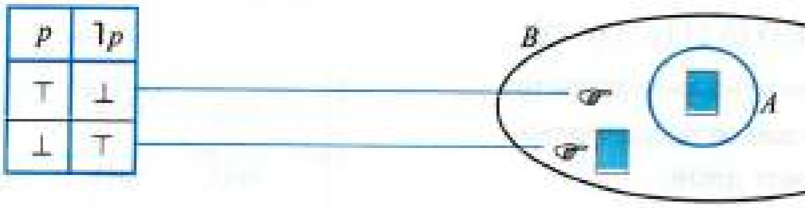


Ако $A \subset B$, тогаш множеството $B \setminus A$ се вика комплемент на множеството A во однос на множеството B и означуваме $A'_B = B \setminus A$.

Множеството што е комплемент на множеството A во однос на множеството U го означуваме $A'_u = \mathrm{U} \setminus A$.



11 На цртежот се дадени: табела за негација и множествата A и B. Нека $p : x \in A$. Образложи ја врската меѓу табелата и припадноста на елементите на множествата A и B.



p	$\urcorner p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Воочи дека следниве записи се однесуваат на комплемент на множество:

а) $x \in A'_B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin A$.

б) $A'_B = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$.

в) Комплементот A' на множеството A во однос на множеството B е множеството чии елементи припаѓаат на множеството B, а не припаѓаат на множеството A.

12 Нека $M = \{1,2,3,...,100\}, A = \{1,2,3,...,10\}, B = \{50,51,52,....,100\}$. Одреди ги множествата:

а) A'_M; б) B'_M.

Корисно е да знаеш:

Нека $p : x \in A$ и $q : x \in B$. Согледај ја врската:

Операции со исказите p и q	Соодветни операции со множествата A и B
$p \vee q$ ☜	☞ $A \cup B$
$p \wedge q$ ☜	☞ $A \cap B$
$p \wedge \urcorner q$ ☜	☞ $A \setminus B$
$\urcorner p$ ☜	☞ A'
$p \Rightarrow q$ ☜	☞ $A_p \subseteq B_q$
$p \Leftrightarrow q$ ☜	☞ $A_p = B_q$

Потсети се!

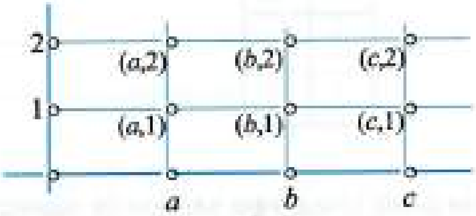
- Што е подреден пар?
- Дали $(a,b)=(b,a)$?
- Дали $\{a,b\}=\{b,a\}$?

13 Нека $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2\}$.

Одреди го множеството $A\times B$ и запиши го табеларно и со координатна шема.

Согледај го решението:

- $A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$.
- Декартовиот производ на множествата A и B го претставуваме со координатна шема како на цртежот десно.



Треба да знаеш!

$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$, т.е. Декартовиот производ на множествата A и B е множеството од сите подредени парови на кои првата компонента припаѓа на множеството A, а втората на множеството B.

14 Дадени се множествата $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7, 8\}$ и $C=\{m,n,l\}$. Одреди го множеството $(A\cap B)\times C$.

Задачи:

① Дадени се множествата $A=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 1<x\le 7\}$ и $B=\{-1,3,5,7,9\}$. Одреди ги множествата: а) $A\cup B$; б) $A\cap B$; в) $A\setminus B$.

② Дадени се множествата:

$A=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 2\le x\le 5\}$, $B=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge 2<x\le 8\}$ и $C=\{x|x\in\mathbb{Z}\wedge -6<x\le 3\}$.

а) Одреди ја унијата на множествasa A, B и C.

б) Дали $A\subset B$?

в) Одреди $A\cap B$.

③ Дадени се множествата $A=\{c,d,e\}, B=\{a,b,c\}$ и $C=\{b,c\}$. Одреди ги множествата:

а) $(A\times B)\cap(A\times C)$; б) $A\times((B\setminus C)\cup(A\setminus B))$.

9 НЕКОИ ЗАКОНИ ЗА ОПЕРАЦИИ СО МНОЖЕСТВА

Потсети се!

- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ го искажува комутативното својство на конјункцијата.
- Запиши го комутативното својство за собирањето во множеството $\mathbb{N}$.

1 Дадени се множествата:

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$ и $B=\{4,5,6,7,8\}$.

Одреди $A\cup B$ и $B\cup A$. Што воочуваш? Сигурно доби $A\cup B=\{1,2,\ldots,8\}$ и $B\cup A=\{1,2,\ldots,8\}$, т.е. $A\cup B=B\cup A$.

Запомни!

За унијата на кои било две множества важи комутативното својство, т.е.

$$A\cup B=B\cup A.$$

Доказот за комутативното својство на унијата ќе го изведеме на три начини:

а) Нека $L=A\cup B$ и $D=B\cup A$.

Од $x\in L\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\vee x\in B$,

$\Rightarrow x\in B\vee x\in A\Rightarrow x\in B\cup A\Rightarrow x\in D$,

$\Rightarrow L\subseteq D.$

Нека $x\in D\Rightarrow x\in B\cup A\Rightarrow x\in B\vee x\in A\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in L\Rightarrow D\subseteq L.$

Од $L\subseteq D$ и $D\subseteq L$ следува $L=D$.

б) Со трансформирање во исказна формула имаме:

$$A\cup B=B\cup A \qquad \wedge \qquad p: x\in A, q: x\in B$$

$$\Updownarrow$$

$x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in B\cup A$ за секој x;

$$\Updownarrow$$

$x\in A\vee x\in B\Leftrightarrow x\in B\vee x\in A$ за секој x;

$$\Updownarrow$$

$$p\vee q\Leftrightarrow q\vee p.$$

в) Со табела за припадност на елементот на множествата:

A	B	$A\cup B$	$B\cup A$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Последните две колони во табелата се исти и ја потврдуваат тезата на равенството што го докажуваме.

2 Докажи го на три начини комутативното својство за пресекот на две множества.

Корисно е да знаеш:

1. $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ .... асоцијативно својство на унијата;

2. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ .... асоцијативно својство на пресекот;

3. $A\cup(A\cap B)=A$ .... апсорпција на унија спрема пресек;

4. $A\cap(A\cup B)=A$ .... апсорпција на пресек спрема унија;

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C) \\ 6.\ (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C) \\ 7.\ (A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C) \\ 8.\ (A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C) \end{array}\right\}\text{ дистрибутивно својство.}$$

Задачи:

① Докажи ги својствата под број 2 и 3.

Тематска контролна вежба

① Нека се дадени исказите: $p:2^3=6$ и $q:6^3=216$. Состави ги сложените искази:

а) $p\wedge q$; б) $p\vee q$; в) $\neg p\Rightarrow q$ г) $\neg p\Leftrightarrow\neg q$.

Одреди ја нивната логичка вредност.

② Провери дали формулите $F_1: p\Rightarrow q$ и $F_2: p\wedge\neg q\Rightarrow\neg p$ се логички еквивалентни.

③ Докажи дека формулата $F: p\Rightarrow q\Leftrightarrow p\wedge\neg q\Rightarrow q$ е тавтологија.

④ Докажи дека висината кон хипотенузата во правоаголен триаголник е геометриска средина од проекциите на катетите врз хипотенузата.

⑤ Докажи ја импликацијата $a|b\wedge b|c\Rightarrow a|c$ за секои $a,b,c\in\mathbb{N}$.

⑥ Дадени се множествата $A=\{1,2,3,5,7\}, B=\{1,2,4,8\}, C=\{1,3,5,7\}$. Одреди ги множествата:

а) $(A\cap B)\cup C$; б) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$; в) ;$(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$ г) $(A\setminus B)\times(B\setminus A)$.

⑦ Докажи дека $A\cap(A\cup B)=A$.

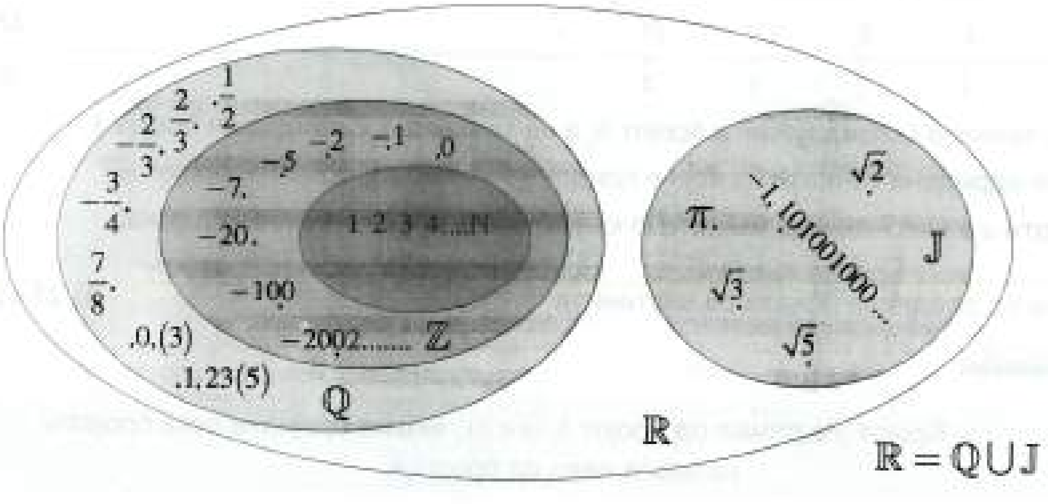
ТЕМА 2

ОСНОВНИ БРОЈНИ МНОЖЕСТВА

> *Математиката е кралица на науките, а теоријата на броевите е кралица на математиката.*
>
> К. Ф. Гаус

Во оваа тема ќе учиш за:

- множество на природните, целите, рационалните и реалните броеви;
- операции во множествата на броевите и нивните својства;
- деливост на природните броеви;
- претставување на броевите на бројна оска;
- интервал од реални броеви;
- прости и сложени броеви;
- НЗД и НЗС на броевите;
- декаден и бинарен броен систем;
- операции во бинарен броен систем.



1 ПРИРОДНИ БРОЕВИ. ОПЕРАЦИИ И СВОЈСТВА НА ОПЕРАЦИИТЕ ВО МНОЖЕСТВОТО НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ

Потсети се!

- Природните броеви се запишуваат со десет цифри. Кои се тие?
- Запиши ги броевите: двесте и пет, петстотини и девет, илјада осумстотини и седум.

▪ Природните броеви се: $1,2,3,4,...,$ а множеството на природните броеви го означуваме со $\mathbb{N}$, т.е.

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,...,n-1,n,n+1,...\}.$$

A **1** Во врска со низата на природните броеви одговори:

- Кој е најмалиот природен број?
- Кој природен број е следбеник на: бројот 2, на бројот 97, на бројот 501, на бројот n?
- Кој природен број е претходник на: бројот 5, на бројот 200, на бројот n?

Запомни!

Секој природен број има следбеник. Не постои најголем природен број. Множеството на природните броеви е бесконечно.

2 Дали е вистинит исказот: Секој природен број има свој претходник.

▪ Бројот 0 не е природен број, т.е. $0 \notin \mathbb{N}$.

▪ Множеството на сите природни броеви и бројот 0 се означува со $\mathbb{N}_0$, па $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,4,...\}$.

3 На цртежот е претставена бројна права a, со единечна отсечка $\overline{OA}=1$.

На точката O придружен е бројот 0, а на точката A е придржен бројот 1.

- Како е одредена точката на која е придружен бројот 3; бројот 5; бројот m?

▪ Правата a е насочена од точката O кон точката A и се вика бројна оска.

4 Кои од следниве искази се вистинити: а) $5<7$; б) $4>5$; в) $25<26$?

Воопшто:

Бројот a е помал од бројот b, $(a<b)$, ако на бројната оска бројот a се наоѓа лево од бројот b.

5 Одреди ја точноста на исказот $\rceil(0\geq n)$ за секој природен број n.

6 Кој од следниве искази се вистинит

а) $12<18$; б) $5\leq 8$; в) $\rceil(7<3)$; г) $\rceil(8\geq 15)$; д) $\rceil(3<3)$?

Запомни!

Природните броеви се подредуваат по големина, т.е.

$1<2<3<4<...<n<n+1<...$

На секој природен број може да му се придружи точно една точка од бројната оска.

Б

7 Пресметај:

- $23+35$;
- $(27+1023)+350$.

- На подредениот пар природни броеви $(3,5)$ е придружен природниот број 8, како нивни збир, т.е. $(3,5)\xrightarrow{+}3+5=8$.

8 Пресметај:

- $27\cdot15$;
- $(4\cdot25)\cdot13$.

- На подредениот пар природни броеви $(3,5)$ е придружен природниот број 15, како нивни производ, т.е. $(3,5)\xrightarrow{\cdot}15$.

- Собирањето и множењето на природните броеви е правило според кое на секој подреден пар природни броеви му е придружен точно еден природен број, т.е. за кои било

$$a,b\in\mathbb{N},\ (a+b)\in\mathbb{N} \text{ и } (a\cdot b)\in\mathbb{N}.$$

- Собирањето и множењето на природните броеви се внатрешни операции, а множеството на природните броеви е затворено во однос на тие операции.

9 Провери ја точноста на равенствата:

а) $12+13=13+12$; б) $(8+15)+12=8+(15+12)$; в) $8\cdot9=9\cdot8$;

г) $(7\cdot5)\cdot4=7\cdot(5\cdot4)$; д) $(5+13)\cdot8=5\cdot8+13\cdot8$; ѓ) $8\cdot(5+13)=8\cdot5+8\cdot13$.

За собирањето и множењето на природните броеви a,b и c важат следниве својства:

За собирање

☐ $a+b=b+a$

Комутативно својство

☐ $(a+b)+c=a+(b+c)$

Асоцијативно својство

За множење

☐ $a\cdot b=b\cdot a$

Комутативно својство

☐ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

Асоцијативно својство

☐ $c(a+b)=ca+cb$; $(a+b)c=ac+bc$

Множењето има *дистрибутивно својство* во однос на собирањето.

10 Искажи ги овие својства со зборови.

11 Пресметај: а) $2+6+8+4+7$; б) $5\cdot3\cdot8\cdot2$; в) $1234+573+266+427$; г) $8\cdot25\cdot125\cdot13\cdot4$.

- а) $2+6+8+4+7=(2+8)+(6+4)+7=10+10+7=27$;

б) $5\cdot3\cdot8\cdot2=(5\cdot2)\cdot(3\cdot8)=10\cdot24=240$.

Запомни!

Примената на комутативното и асоцијативното својство може да се прошири и на поголем број собироци и множители.

12 Со примена на дистрибутивното својство, покажи дека е точно равенството:
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$. (Упатство: $a+b$ или $c+d$ замени ги со m).

Потсети се!

- Пресметај:
  а) $8-5$;   б) $120-90$.
- Одреди го x од равенката $x+5=18$.
- Непознатиот собирок се определува така што од збирот ќе се одземе познатиот собирок.
- Разликата на природните броеви a и b е бројот c, којшто собран со бројот b го дава бројот a.

13 Пресметај:
а) $73-65$;   б) $23-25$.

- Сигурно воочи дека разликата $73-65$ е природен број, додека, пак, разликата $23-25$ не е природен број.
- Значи, одземањето е условна (делумна) операција во множеството на природните броеви.

Запомни!

Разликата $a-b$ на природните броеви a и b е природен број, само ако $a>b$.

14 Провери ја точноста на равенствата:
а) $(25-13)\cdot 8=25\cdot 8-13\cdot 8$ и б) $8\cdot(25-13)=8\cdot 25-8\cdot 13$.

- *Важи воопшто*: множењето има дистрибутивно својство во однос на одземањето на природните броеви,

  т.е. за кои било $a,b,c\in\mathbb{N}$ и $a>b$ важи $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$ и $c\cdot(a-b)=c\cdot a-c\cdot b$.

15 Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:
а) $15-8=8-15$ и б) $(15-8)-5=15-(8-5)$.

- За одземањето на природните броеви не важи ниту комутативното, ниту асоцијативното својство.
- За $a=0$, равенството $a=0$ е вистинит исказ. Исто така, за кој било број $a\in\mathbb{N}$ вистинити се исказите $a+0=a$ и $a\cdot 0=0$.

  Операциите: собирање, одземање и множење во множеството $\mathbb{N}_0$ се дефинираат на ист начин како и во множеството $\mathbb{N}$.

16 Во каква зависност се броевите a и b ако $(a-b)\in\mathbb{N}_0$?

Потсети се!

- Пресметај $125:5$.
- Одреди го x од равенката $4x=24$.
- Количникот на природните броеви a и b е природниот број q, кој помножен со b го дава бројот a.

17 Учениците од една паралелка, за роденденот на својот соученик Саше решиле да му купат подарок вреден 2635 денари. По колку денари треба да даде секој од соучениците на Саше, ако во таа паралелка има 32 ученици?

18 Одреди ги количниците: а) $221:13$ и б) $128:5$.

Сигурно воочуваш дека количникот $128:5$ не е природен број. Значи, за кои било $a,b\in \mathbb{N}$, количникот $a:b$ не е секогаш природен број.

На пример, за $a=12$ и $b=5$ не постои природен број q што ќе го задоволува равенството $a=b\cdot q$, т.е. $12=5\cdot q$.

Запомни!

Делењето во множеството на природните броеви е делумна (условна) операција.

Количникот $44:5$ не е природен број. Меѓутоа, и во овој случај делењето се извршува и се вика делење со остаток.

Така имаме: $44:5=8$ и остаток 4, т.е. $44=5\cdot 8+4$.

Запомни!

За кои било дадени природни броеви a и b постојат еднозначно определени броеви $q,r\in \mathbb{N}_0$, така што $a=b\cdot q+r$, $0\le r<b$, при што q се вика количник, а r остаток.

При делењето на броевите 13, 37, 30 и 4 со 5 имаме: $13=2\cdot 5+3$, $37=7\cdot 5+2$, $30=6\cdot 5+0$ и $4=0\cdot 5+4$.

19 Провери ја точноста на равенствата:

а) $(12+9):3=12:3+9:3$ б) $(24-16):4=24:4-16:4$.

За делење важи десно дистрибутивно својство во однос на собирањето и одземањето на природните броеви,

т.е. ако $a,b,c\in \mathbb{N}$, $(a:c)\in \mathbb{N}$, $(b:c)\in \mathbb{N}$ и $a>b$ имаме:

$$(a+b):c=a:c+b:c \text{ и } (a-b):c=a:c-b:c.$$

20 Пресметај ја на два начини вредноста на изразите $(a+b):c$ и $(a-b):c$ за $a=36$, $b=12$ и $c=6$.

***Задачи*:**

① Запиши ги табеларно множествата:

а) $A=\{x \mid x\in \mathbb{N} \wedge x<2002\}$;

б) $B=\{x \mid x\in \mathbb{N} \wedge 25\leq x<40\}$.

③ Со примена на комутативно и асоцијативно својство пресметај:

а) $43+32+17+48$; б) $47+41+23+19$;

в) $4\cdot 11\cdot 25$; г) $125\cdot 25\cdot 7\cdot 8\cdot 4$.

④ Пресметај:

а) $(45+5)\cdot 8$; б) $(372-2)\cdot 4$;

в) $(3\cdot 81-43)\cdot 5$; г) $8+2\cdot(51\cdot 5-17\cdot 15)$.

② Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $25<30$; б) $30\leq 50$;

в) $\neg(27\geq 26)$; г) $\neg(15\neq 15)$.

⑤ Пресметај:

а)
$9\cdot 9+7$
$98\cdot 9+6$
$987\cdot 9+5$
$9876\cdot 9+4$
$98765\cdot 9+3$
$987654\cdot 9+2$
$9876543\cdot 9+1$

б)
$1\cdot 9+2$
$12\cdot 9+3$
$123\cdot 9+4$
$1234\cdot 9+5$
$12345\cdot 9+6$
$123456\cdot 9+7$
$1234567\cdot 9+8$
$12345678\cdot 9+9$

Пресметај ја вредноста на изразите во првите три редици и воочи го алгоритмот.

2

ДЕЛИВОСТ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

Потсети се!

Ако q е количник на броевите a и b, а r е остаток, тогаш

$$a=b\cdot q+r.$$

A 1 Одреди го количникот и остатокот при делењето на броевите:

а) 48 и 6; б) 69 и 7.

Ако остатокот $r=0$, тогаш $a=bq$, па во тој случај велиме дека бројот b е делител на бројот a (a е делив со b или a е содржател на b), а тоа го означуваме $b\,|\,a$).

На пример, $4\,|\,24$, бидејќи $24=6\cdot 4$; $8\,|\,96$, бидејќи $96=8\cdot 12$.

Бројот 8 не е делител на бројот 50 и означуваме $8\nmid 50$.

Често пати, наместо "***b* е *делител на a***", се вели "***a* е *содржател на b***".

2 Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) $7\,|\,21$; б) $4\,|\,2$; в) $8\nmid 16$; г) 32 е содржател на 4;

д) 3 е делител на 39; ѓ) 7 не е делител на 35.

За релацијата "е делител на", точни се следниве тврдења:

1. Ако c е делител на броевите a и b, тогаш c е делител и на нивниот збир, т.е.

$$(c\,|\,a \wedge c\,|\,b) \Rightarrow c\,|\,(a+b).$$

Согледај го доказот:

■ Од претпоставката $c|a$ и $c|b$ следува дека $a=m\cdot c$ и $b=n\cdot c$ при што $m,n\in\mathbb{N}$. Оттука следува $a+b=m\cdot c+n\cdot c=c\cdot(m+n)$. Значи, збирот $a+b$ е претставен како производ од природните броеви c и $m+n$, па збиот $a+b$ е содржател на бројот c, т.е. $c\,|\,(a+b)$.

2. Ако $m|a$ и $n|b$, тогаш $(m\cdot n)|(a\cdot b)$.

Согледај го доказот:

■ Од $m|a \Rightarrow a=m\cdot k_1$ и од $n|b \Rightarrow b=n\cdot k_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{N}$. Според тоа,

$a\cdot b=(m\cdot k_1)\cdot(n\cdot k_2)=(m\cdot n)\cdot(k_1\cdot k_2)$, што значи дека $(m\cdot n)|(a\cdot b)$.

3 Докажи го тврдењето: Ако $(m|a)\wedge(m|b)\wedge(a>b)\Rightarrow m|(a-b)$.

Потсети се!

■ Знаеш дека $a=1\cdot a$, т.е.

$a|a$ и $1|a$.

Б **4** Колку делители има бројот 7?

Колку делители има бројот 8?

Колку делители има бројот 1?

Запомни!

☐ Броевите што имаат само два делители се прости броеви.
☐ Броевите што имаат повеќе од два делители се сложени броеви.
☐ Бројот 1 не е ниту прост ниту сложен број.

Постапката за определување на простите броеви од една конечна низа на природни броеви ја дал старогрчкиот математичар Ератостен (III век, п.н.е.), и таа се вика Ератостеново сито, а за првите 100 природни броја изгледа вака:

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

● Се менува црната боја на бројот 1, тој не е ниту прост ниту сложен број.

● Бројот 2 останува со црна боја, тој е прост број. По него се менува црната боја на секој парен број.

● Следниот непроменет по боја е бројот 3, како прост број. Потоа се менува бојата на секој трет број, таков е делив со 3.

● На сличен начин се продолжува постапката за секој нареден непроменет по боја број, кој е прост.

● Воочи, множеството на простите броеви е бесконечно.

5 Броевите 48; 62 и 52 претстави ги како збир на два прости броја.

Воочи, $48=37+11;62=57+5;52=41+11$.

Запомни!

Секој парен број поголем од 2 може да се запише како збир на два прости броја.

6 Броевите 18, 28, 36, 58 и 72 запиши ги како збир на два прости броја.

7 Броевите 60, 152 и 167 разложи ги на прости множители.

$60=2\cdot30=2\cdot2\cdot15=2\cdot2\cdot3\cdot5=2^2\cdot3\cdot5$;

$152=2\cdot76=2\cdot2\cdot38=2\cdot2\cdot2\cdot19=2^3\cdot19$.

Очигледно, бројот 167 не е делив со 2, 3 и 5. Наредните прости броеви се 7 и 11, па со проверка се утврдува дека 167 не е делив со нив. Бројот 167 не е делив ниту со 13. Бидејќи $167<169=13\cdot13$, следува дека 167 не може да има делители поголеми од 13, т.е. тој е прост број.

Запомни!

Ако природниот број p не е делив со ниту еден прост број чиј квадрат не е поголем од p, тогаш бројот p е прост број.

Според тоа, секој природен број $a>1$ е или прост број или може да се претстави како производ од прости множители. Претставувањето на бројот како производ на прости множители е еднозначно, а редоследот на множителите не е битен.

Овие тврдења нема да ги докажуваме.

8 Одреди дали се прости или сложени броевите: а) 127; б) 919.

9 Броевите 120 и 425 разложи ги на прости множители користејќи вертикална табелица.

Согледај го решението:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120=2^3\cdot3\cdot5$

425	5
85	5
17	17
1	

$425=5^2\cdot17$

Треба да знаеш!

Кои броеви се прости?

Даден број да разложуваш на прости множители.

Потсети се!

- Делители на бројот 18 се: 1, 2, 3, 6, 9 и 18.
- Одреди ги сите делители на бројот 24.
- Одреди ги заедничките делители на броевите 18 и 24.

В

10 Дадени се две жици, една долга 16 m, а друга 12 m.

Одреди ја најголемата должина со која дадените жици можат да се поделат на еднакви делови.

- Заедничките делители на броевите 16 и 12 се 1, 2 и 4, а нивниот најголем заеднички делител е бројот 4, т.е.

$$\text{НЗД}\ (12,\ 16) = 4.$$

- Двете жици ќе бидат поделени на парчиња чија должина е 4 m.

Запомни!

Најголемиот заеднички делител на два природни броја a и b е најголемиот природен број што е делител на двата броја a и b.

11 Одреди го најголемиот заеднички делител на броевите 168 и 180. Согледај:

$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ и

$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, па

НЗД $(168,180) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Треба да знаеш!

Најголемиот заеднички делител на два броја е еднаков на производот од сите нивни заеднички прости множители.

За полесно наоѓање на најголемиот заеднички делител на два или повеќе природни броја ќе користиме вертикална таблица.

12 Одреди НЗД (90, 135, 315), со користење на вертикална таблица.

Согледај го решението:

$$\begin{array}{rrr|l} 90, & 135, & 315 & 3 \\ 30, & 45, & 105 & 3 \\ 10, & 15, & 35 & 5 \\ 2, & 3, & 7 & \end{array}$$

- Воочуваш дека сите дадени броеви ги делиме со прост број, почнувајќи од најмалиот, се додека тоа е можно.

Добиваме, НЗД $(90,135,315) = 3^2 \cdot 5 = 45$.

13 Одреди НЗД на броевите: а) 24 и 30; б) 72 и 90; в) 9 и 14.

Решавајќи го примерот в) воочи дека НЗД $(9,\ 14) = 1$.

Запомни!

Ако НЗД $(a,\ b) = 1$, тогаш броевите a и b велиме дека се заемно прости броеви и означуваме $(a,\ b) = 1$.

Така на пример, заемно прости се и броевите: а) 25 и 21; б) 10, 15 и 12; в) 27 и 35.

Потсети се!

Содржатели на бројот 3 се:
3, 6, 9, 12, 15, ...

Одреди го множеството содржатели на бројот 5.

Одреди го множеството на заедничките содржатели на броевите 3 и 5.

14 Од една автобуска станица во исто време тргнуваат два автобуси. Едниот се враќа секои 12 минути, а другиот секои 16 минути.

По колку минути двата автобуси повторно заедно ќе тргнат од станицата?

Содржатели на бројот 12 се: 12, 24, 36, 48, ..., а на бројот 16 се: 16, 32, 48, 64, ... Според тоа, нивниот најмал заеднички содржател е бројот 48, т.е. НЗС$(12, 16) = 48$.

Запомни!

Најмалиот заеднички содржател (НЗС) на два или повеќе дадени броја е најмалиот број што е содржател на секој од дадените броеви. На пример, НЗС $(4, 6) = 12$; НЗС $(8, 6) = 24$.

15 Одреди НЗС $(18, 24)$. Броевите 18 и 24 ги разложуваме на прости множители:

$18 = 2\cdot 3\cdot 3 = 2\cdot 3^2$; $24 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = 2^3\cdot 3$. Значи, НЗС $(18, 24) = 2^3\cdot 3^2 = 72$.

Треба да знаеш!

Најмалиот заеднички содржател на два или повеќе природни броја е еднаков на производот од сите прости множители земени како степен со најголем степенов показател.

16 Одреди НЗС $(60, 72, 90)$, со користење на вертикална таблица.

НЗС $(60, 72, 90) = 2^3\cdot 3^2\cdot 5 = 360$.

17 Одреди НЗС на броевите: а) 14 и 15; б) 20 и 40; в) 60, 90 и 12.

Сигурно воочи дека: НЗС$(14,15) = 14\cdot 15$; НЗС$(20, 40) = 40$.

Запомни!

Најмалиот заеднички содржател на два или повеќе заемно прости броеви е нивниот производ. Ако бројот a е содржател на бројот b, тогаш НЗС $(a, b) = a$.

Задачи:

① Кои од следниве тврдења се вистинити: а) $6|23$; б) $5|135$; в) $9|163$; г) $11|1111$?

② Ако $c|(a+b)$ и $c|b$, тогаш c е делител и на другиот собирок (a). Докажи!

③ Со кој број е делив бројот: а) $2n$; б) $3n$; в) $4n$; г) $7n$, ако $n\in\mathbb{N}$?

④ Ако $c|a$, тогаш $c|a\cdot b$ за секое $b\in\mathbb{N}$. Докажи!

⑤ За кој најмал природен број n, бројот а) 2^n-1, б) 2^n+1 е прост број?

⑥ Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$, изразот а) $(n+1)^2-(n-1)^2$; б) $(n+1)(n-2)+(n+2)(n+3)$ е сложен број.

⑦ Одреди: а) НЗД $(180, 96)$; б) НЗД $(165, 45, 75)$; в) НЗС $(180, 96)$; г) НЗС $(18, 60, 75)$.

⑧ Колку најмногу еднакви пакетчиња можат да се направат од 48 чоколади, 72 бајадери и 120 бонбони?

3 ДЕКАДЕН И БИНАРЕН БРОЕН СИСТЕМ

Потсети се!

- Запиши го табеларно множеството од сите цифри со кои се запишуваат природните броеви.
- Како се вика бројниот систем во кој ги запишуваш броевите?

А **1** Прочитај го бројот 762354.

- Која вредност има цифрата 5, а која цифрите 3 и 2?

Бројниот систем во кој е запишан бројот 762354 се вика ***декаден броен систем.*** (Во Европа од Индија го пренеле арапите во XII век.)

Декадниот броен систем е позиционен, бидејќи вредноста на секоја цифра во запишаниот број зависи од позицијата (местото) на кое се наоѓа во бројот.

Во декадниот броен систем главната улога ја има бројот 10 и тој е основа на системот. Оттука и доаѓа името декаден (десет на латински се вика дека).

Во декадниот броен систем, секоја позиција на цифрата поаѓајќи оддесно налево во бројот има своја позициона вредност што е десет пати поголема од претходната позиција.

Во бројот 762354, цифрата 5 има вредност 5 десетки или $5\cdot10=50$ единици; цифрата 3 има вредност 3 стотки или $3\cdot10^2=300$ единици, а цифрата 2 има вредност 2 илјади или $2\cdot10^3=2000$ единици. Броевите $10;100=10^2;1000=10^3;...;10^n$ се викаат ***декадни единици.***

Запомни!

Во декадниот запис на броевите, секоја цифра покажува број на единици или број на десетки или број на стотки итн., соодветно на позицијата на која е запишана.

2 Одреди ги вредностите на цифрата 5 во бројот 5555.

3 Разгледај ја табелата и бројот запишан во неа.

К Л А С И											
МИЛИЈАРДИ			МИЛИОНИ			ИЛЈАДИ			ЕДИНИЦИ		
СМи	ДМи	ЕМи	СМ	ДМ	ЕМ	СИ	ДИ	ЕИ	С	Д	Е
	3	4	1	5	0	1	0	6	0	1	1

- Прочитај го бројот во табелата. Кои вредности ги има цифрата 1, а кои цифрата 0?

Првата единица оддесно има вредност 1 единица, т.е. $1=1\cdot10^0$. Втората единица оддесно има вредност 10 единици, т.е. $10=1\cdot10^1$. Третата единица оддесно има вредност 100000 единици, т.е. $100000=1\cdot10^5$ итн.

Првата нула оддесно има вредност нула стотки, т.е. $0=0\cdot10^2$, а втората нула оддесно има вредност десет илјади, т.е. $0=0\cdot10000=0\cdot10^4$.

Запомни!

Нулата како цифра се употребува за да ги запази позициите на цифрите чија вредност е различна од нула.

Од табелата воочуваме дека оддесно налево има групи од три позиции во една класа.

При читањето на броевите се именуваат сите класи, освен класата на единиците, па така запишаниот број се чита: триесет и четири милијарди сто педесет милиони сто шест илјади и единаесет.

4 Запиши го бројот: двесте седум илјади сто и пет.

Во бројот што го запиша колку има:

а) единици; б) десетки; в) десетки илјади; г) стотки илјади?

5 Броевите: а) 432; б) 1056; в) 3708602 запиши ги во развиена, т.е. полиномна форма.

Согледај: а) $432 = 400 + 30 + 2 = 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2$;

в) $3708602 = 3 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2$.

Нека бројот a е запишан со $n+1$ цифри. Тогаш неговата буквена ознака во позициона форма е:

$\overline{a = a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0}$, а неговата полиномна форма е:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + a_{n-3} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

6 Без да ги извршуваш операциите, запиши ги во позициона форма броевите:

а) $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5$; б) $4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$; в) $6 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^5 + 5$.

Бројот $4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10$ е шестцифрен, што се гледа од највисокиот показател на бројот 10.

Во бројот има само три цифри што се различни од нула, тоа се цифрите на втората, чевртата и шестата позиција, а останатите цифри се нули.

Според тоа, $4 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 = 403020$.

Б Се претпоставува дека човекот многу одамна броел само по два, а бројот два се поврзува со бројот на органите за вид и слух, бројот на рацете, нозете и сл.

Бројниот систем во којшто главната улога ја има бројот два се вика ***бинарен броен систем*** (два на латински се вика бини).

Бинарниот броен систем е позиционен и неговата основа е два.

Формирањето на декадниот броен систем се врши со групирање по 10, така што секои 10 единици образуваат една единица од повисок ред. Десет десетки образуваат една стотка, 10 стотки образуваат една илјада итн.

Формирањето на бинарниот броен систем се врши на сличен начин, само што овде групирањето е по 2, така што секои 2 единици образуваат една единица од повисок ред.

Броевите: $10_2; 100_2; 111_2; 1010110_2$ се запишани во бинарен броен систем.

Воочи и запомни!

Бинарниот броен систем е позиционен.
Броевите во бинарен броен систем се запишуваат само со две цифри, 0 и 1.
Основата 2 задолжително се запишува.

При читањето на броевите задолжително се кажува основата два. Така на пример, бројот 1011_2 се чита: еден нула еден еден со основа два.

Во бинарниот броен систем броевите може да се запишуваат и во полиномна форма, слично како во декадниот броен систем, само што овде наместо 10 ќе стои 2, т.е.

$$a=\left(\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0}\right)_2 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 .$$

Цифрите $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ имаат вредност 0 или 1, а $a_n \neq 0$.

7 Броевите: 1101_2; 11_2; 10101_2 и 1111010_2 запиши ги во полиномна форма.

■ $1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1$; ■ $11_2 = 1 \cdot 2 + 1$; ■ $1010111_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$.

8 Запиши ги во позициона форма со основа два броевите:

а) $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$; б) $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2$; в) $1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 + + 1 \cdot 2 + 1$;
г) $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2$.

■ Бројот $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2$ е шестцифрен, цифрите од првата, третата и четвртата позиција се еднакви на нула, па $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2 = 110010_2$.

9 Провери ја точноста на следниве равенства:

а) $1101_2 = 13$; б) $111_2 = 7$; в) $11011_2 = 27$.

Броевите на кои не им е запишана основата, се дадени во декаден броен систем.

Согледај го решението:

а) $1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 = 8 + 4 + 1 = 13$;

б) $111_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$;

в) $11011_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2 + 1 = 16 + 8 + 2 + 1 = 27$.

Воочи и запомни!

Да се преведе даден број од бинарен во декаден запис, треба дадениот број да се запише во полиномна форма и да се извршат назначените операции во тој полином.

10 Бројот 35 да се преведе во бинарен запис.

За поголема прегледност, постапката ќе ја прикажеме на следниот начин:

$35:2=17$ и остаток 1
$17:2=8$ и остаток 1
$8:2=4$ и остаток 0
$4:2=2$ и остаток 0
$2:2=1$ и остаток 0
$1:2=0$ и остаток 1

Според тоа, $35=100011_2$

Задачи:

① Кој број е поголем:

а) 1011_2 или 1010_2; б) 1001_2 или 10010_2?

③ Преведи ги во декаден броен систем броевите:

а) 11111_2; б) 10001_2;
в) 10000_2; г) 101010_2.

② Запиши ги во позициона форма броевите:

а) $2\cdot10+1$; б) $3\cdot10^3+1$;
в) $5\cdot10^4+2\cdot10^2+3$; г) $1\cdot2^3+1\cdot2+1$;
д) $1\cdot2^6+1\cdot2^3+1\cdot2^2$; ѓ) $1\cdot2^8+1\cdot2^6+1\cdot2$.

④ Преведи ги во бинарен броен систем броевите:

а) 8; б) 28; в) 100; г) 135.

4 ОПЕРАЦИИ ВО БИНАРЕН БРОЕН СИСТЕМ

Потсети се!

$$\begin{array}{r} 3452 \\ +\ 673 \\ \hline \end{array}$$

Се собираат единиците од иста позиција. Ако нивниот збир е поголем или еднаков на 10 (основа на системот), тогаш се образува единица од повисок ред, а остатокот се запишува во истата позиција.

Собирањето секогаш се започнува од првата позиција.

А **1** Пресметај го збирот:

$1011_2+11101_2$.

Таблицата за собирање во бинарниот броен систем изгледа вака:

+	0	1
0	0	1
1	1	10_2

Собирањето полесно се изведува ако броевите ги запишеме еден под друг. Малите единици над првиот собирок означуваат број на пренесени единици добиени при собирањето на единиците од претходната позиција.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1111} \\ 1011_2 \\ +\ 11101_2 \\ \hline 101000_2 \end{array}$$

2 Пресметај: $1110_2 + 11110_2 + 1010101_2$.

Согледај го решението:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 12221} \\ 1010101_2 \\ +\quad 111110_2 \\ 1110_2 \\ \hline 10100001_2 \end{array}$$

3 Пресметај:

а) $11011_2 + 12$; б) $10 + 10101_2 + 16$.

Внимавај, сите собироци не се запишани во ист броен систем.

Б Одземањето во бинарниот систем се врши на ист начин како и во декадниот систем. Се одземаат единиците од првата позиција, ако е тоа можно. Ако одземањето на единиците од иста позиција не е можно, тогаш се позајмува единица од првата повисока позиција.

4 Пресметај ја разликата: а) $110111_2 - 10101_2$; б) $1110111_2 - 10111_2$; в) $110101_2 - 22$.

Решение:

а)
$$\begin{array}{r} 110111_2 \\ 10101_2 \\ \hline 100010_2 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 02122} \\ {\scriptstyle 00\dot{2}002} \\ 1\dot{1}\dot{1}0\dot{1}\dot{1}0_2 \\ -\quad 10111_2 \\ \hline 1011111_2 \end{array}$$

в) $110101_2 - 22 = 110101_2 - 10110_2 = 11111_2$.

Точките над цифрите од намаленикот означуваат дека од таа цифра е позајмена една единица.

Малите цифри над намаленикот означуваат колку единици останале на таа позиција по позајмувањето или колку единици има во пониската позиција по позајмувањето.

5 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $110101101_2 - 110111_2$; б) $1110101_2 + 11011_2 - 111111_2$; в) $31 + 111011_2 - (13 + 1111_2)$.

В Пресметај: $1203 \cdot 402$.

Множењето на броевите во бинарниот броен систем е идентично со множењето на броевите во декадниот броен систем.

6 Пресметај го производот:

а) ;$101101_2 \cdot 101_2$; б) $1110_2 \cdot 25$.

Согледај го решението:

Таблицата за множење во бинарен систем изгледа вака:

·	0	1
0	0	0
1	0	1

а) $101101_2 \cdot 101_2 = 11100001_2$

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ 000000_2 \\ 101101_2 \\ \hline 11100001_2 \end{array}$$

б) $1110_2 \cdot 25 = 1110_2 \cdot 11001_2 = 101011110_2$

$$\begin{array}{r} 1110_2 \\ 111000_2 \\ 1110_2 \\ \hline 101011110_2 \end{array}$$

Запомни!

Операциите со броеви се изведуваат само ако броевите се дадени во ист броен систем.

Задачи:

① Пресметај: а) $1110101_2 + 11010_2$; б) $1110101_2 - 101110_2$; в) $10101_2 \cdot 110_2$.

② Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $1101_2 + 26 + 10101_2$; б) $37 - 1110_2 + 101_2$; в) $(32 + 1011_2) \cdot 10$; г) $(21 \cdot 1001_2 - 13 \cdot 100_2) \cdot 10_2$.

5 МНОЖЕСТВО НА ЦЕЛИ БРОЕВИ И ОПЕРАЦИИ И ОПЕРАЦИИ ВО МНОЖЕСТВОТО НА ЦЕЛИТЕ БРОЕВИ

Потсети се!

- Реши ја равенката:

  $x + 5 = 12$

- Разликата $a - b$ на природните броеви a и b е природен број ако $a > b$.

А 1 Пресметај:

а) $25 - 13$; б) $14 - 17$.

Разликата $14 - 17$ не е природен број, па за таа да се одреди, треба множеството на природните броеви да се прошири со нови броеви.

Првото проширување на множеството $\mathbb{N}$ е направено со бројот 0, така што за секое $a \in \mathbb{N}$, $a - a = 0$. Броевите $+1, +2, +3, \ldots$ се викаат ***цели позитивни броеви***.

Ако на природните броеви $1, 2, 3, \ldots$ им придружиме знак "–" (минус), се добива множеството $-1, -2, -3, -4, \ldots$ кое се вика множество на ***цели негативни броеви***. Бројот 0 не е ниту позитивен ниту негативен број.

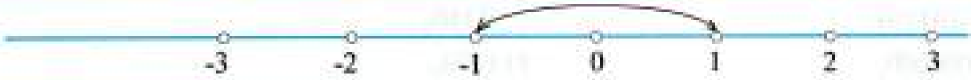
Запомни!

Множеството што ги содржи сите природни броеви, сите негативни цели броеви и бројот нула, се вика множество на цели броеви, а го означуваме со $\mathbb{Z}$, т.е.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Потсети се!

- Природните броеви ги претставивме на позитивниот дел на бројната оска.
- Негативните цели броеви на бројната оска се симетрично распоредени со соодветните природни броеви во однос на бројот нула.



- Броевите 1 и -1, 2 и -2, 5 и -5 се викаат спротивни броеви.

Воопшто, на бројот a спротивен е бројот $-a$.

2 Кој е спротивниот број на бројот: $10,\ -15,\ 23,\ -123$?

Познато ти е дека апсолутната вредност на целиот број a е самиот тој број ако тој е позитивен или нула, а спротивниот број на a ако тој е негативен, т.е.

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{ако} \quad a>0 \\ 0, & \text{ако} \quad a=0 \\ -a, & \text{ако} \quad a<0 \end{cases}$$

На пример, $|+12|=12$; $|-12|=12$; $|0|=0$. Сигурно воочи дека спротивните броеви имаат еднакви апсолутни вредности, т.е. $|a|=|-a|$.

3 Одреди ја апсолутната вредност на броевите: -5; 7; -20; +20.

Споменавме дека природниот број a е помал од природниот број b, ако на бројната права бројот a се наоѓа лево од бројот b. На пример, $5<7$; $7<12$; $1>0$.

Истото правило важи и за споредувањето на целите броеви.

Запомни!

Секој позитивен цел број е поголем од кој било негативен цел број.
Бројот нула е поголем од секој негативен цел број.

4 Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $-5<0$; б) $7>0$; в) $-7>0$; г) $-6<6$; д) $7>-7$; ѓ) $-5<-1$; е) $-2>-3$.

5 Искажи правило за споредување на два цели негативни броеви со помош на нивната апсолутна вредност.

6 Подреди ги по големина броевите: 2; -3; 5; 1; 0; -6; -4; 8.

Запомни!

Множеството на целите броеви е бесконечно.
Во множеството $\mathbb{Z}$ не постои ниту најголем ниту најмал број.
Целите броеви се подредуваат по големина, т.е. $\ldots<-3<-2<-1<0<1<2<3<\ldots$.
Множеството на целите позитивни броеви го означуваме со $\mathbb{Z}^{+}=\{1,2,3,\ldots\}$, а множеството на целите негативни броеви со $\mathbb{Z}^{-}=\{\ldots,-3,-2,-1\}$.

Потсети се!

- За собирање и множење на цели броеви имаме:

$(+5)+(+7)=+12$	$(+5)\cdot(+7)=+35$
$(-5)+(-7)=-12$	$(-5)\cdot(-7)=+35$
$(-5)+(+7)=+2$	$(-5)\cdot(+7)=-35$
$(+5)+(-7)=-2$	$(+5)\cdot(-7)=-35$

Б

Запомни!

- Ако $a,b\in\mathbb{Z}^{+}$, тогаш $(a+b)\in\mathbb{Z}^{+}$; $(a\cdot b)\in\mathbb{Z}^{+}$.
- Ако $a,b\in\mathbb{Z}^{-}$, тогаш $(a+b)\in\mathbb{Z}^{-}$; $(a\cdot b)\in\mathbb{Z}^{+}$.
- Ако $a\in\mathbb{Z}^{+}, b\in\mathbb{Z}^{-}$, тогаш $(a+b)\in\mathbb{Z}^{+}$ за $|a|>|b|$; $(a+b)\in\mathbb{Z}^{-}$ за $|a|<|b|$ и $(a\cdot b)\in\mathbb{Z}^{-}$.

7 Запиши ги наведените тврдења со зборови.

8 Пресметај: а) $(-3)\cdot(-5)+(+6)\cdot(-2)+(-12)$; б) $(-4)+(-5)\cdot(+6)+(-3)\cdot(-7)$;

Спореди го твоето решение со даденото:

а) $(-3)\cdot(-5)+(+6)\cdot(-2)+(-12)=(+15)+(-12)+(-12)=(+3)+(-12)=-9$.

Како се викаат броевите $(+8)$ и (-8) и колкав е нивниот збир?

Воочи!

Збирот на два спротивни цели броја е нула, т.е.

$$a+(-a)=(-a)+a=0.$$

9 Провери ја точноста на равенството:

$$\big((-5)+(+3)\big)\cdot(+6)=(-5)\cdot(+6)+(+3)\cdot(+6).$$

Порано се запознавме со својствата за собирање и множење на природните броеви. Сите тие својства важат и за собирање и множење на целите броеви.

Разликата на целите броеви a и b е бројот x, кој собран со бројот b го дава бројот a, т.е. $a-b=x$, ако $a=x+b$.

Согледај ја постапката:

Имаме: $a+(-b)=x+b+(-b)\Leftrightarrow a+(-b)=x+0\Leftrightarrow a+(-b)=x$. Од $a-b=x$ и $a+(-b)=x$ следува

$$a-b=a+(-b).$$

Запомни!

Од целиот број a да се одземе целиот број b значи, на бројот a да се додаде спротивниот број на бројот b.

На пример: $(+7)-(+5)=(+7)+(-5)=2$; $(-10)-(-7)=(-10)+(+7)=-3$.

10 Пресметај: а) $(+12)-(-7)-(-3)\cdot(-5)$; б) $(-5)\cdot(-3)-(-4)\cdot(+3)-(-10)$.

Согледај го решението:

а) $(-12)-(-7)-(-3)\cdot(-5)=(-12)+(+7)-(+15)=(-5)+(-15)=-20$.

Од претходното сигурно воочи дека збирот, производот и разликата на два цели броја е цел број, па велиме дека собирањето, множењето и одземањето се внатрешни операции во множеството на целите броеви или множеството $\mathbb{Z}$ е затворено во однос на тие операции.

Делењето на целите броеви е делумна (условна) операција во множеството $\mathbb{Z}$.

Количникот $a:b$ на целите броеви a и b, $b\neq 0$ е цел број само ако $b\,|\,a$.

11 Пресметај: а) $(+48):(+6)$; б) $(-48):(-6)$;

в) $(-48):(+6)$; г) $(+48):(-6)$.

Воочуваш дека количникот е позитивен ако и деленикот и делителот се со исти знаци, а е негативен ако деленикот и делителот се со различни знаци.

12 Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $(+5)-(+6)\cdot(-4)-(-42):(-7)$;

б) $(-28)-(-45):(+9)+(-12)\cdot(+4)$.

***Задачи*:**

① Одреди ја вредноста на секој од изразите: а) $|-3+5|+|-2\cdot(-3)-10|$;

б) $|x-2|+|3-x|-|5-x|$ за $x=-20$.

② Пресметај: а) $(-10)+3\cdot(-2)$; б) $(-7)\cdot(-2)-10\cdot 2$; в) $(-24):(-6)+3\cdot(2-5)$.

③ Пресметај ја бројната вредност на изразите:

а) $5-12:(-3)+15\cdot(-3)-24$; б) $-12\cdot(-2)+4\big(-13-15:(-5)\big)$;

в) $4(-2)+(-3)(-9)-2\big(-3-4(2-5)\big)$; г) $-6(-3+4)-2(18-3):(-5)$.

④ Докажи ги тврдењата: а) $-(-x)=x$; б) $-(x+y)=(-x)+(-y)$;

в) $(-x)y=-(xy)$; г) $(-x)(-y)=xy$; д) $-(x-y)=-x+y$.

6 РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Потсети се!

Реши ги равенките:

- $x\cdot 5=-35$;
- $x\cdot 7=-12$.

Равенката $x\cdot b=a$ во множеството $\mathbb{Z}$ има решение само за некои цели броеви a и b.

А **1** Пресметај го количникот:

а) $32:8$; б) $-4{,}5:5$; в) $17:8$.

Количникот $17:8$ не е цел број. Поради тоа има потреба од проширување на множеството $\mathbb{Z}$ со нови броеви.

Потребата за воведување на нови броеви се појавила во врска со мерењето на величините, бидејќи резултатот од мерењето не можел секогаш да се искаже со природен број.

Множеството $\mathbb{Z}$ ќе го прошириме со нови броеви кои се викаат дропки.

Секој количник $a:b$, $b\neq 0$ се запишува во облик $\frac{a}{b}$, т.е. $a:b=\frac{a}{b}$ и се вика дропка.

На пример, дропки се: $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{13}, \frac{-7}{5}, \frac{4}{-3}$ и сл.

Запомни!

Множеството што ги содржи сите дропки се вика множество на рационални броеви и се означува со $\mathbb{Q}$, т.е. $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\middle| a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$.

2 Дали целите броеви се дропки?

Целите броеви се рационални броеви, односно дропки.

На пример: $5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{-15}{-3}=...;-7=\frac{-7}{1}=\frac{14}{-2}=...;0=\frac{0}{1}=\frac{0}{3}=...$

Воочи!

Изразите $\frac{2}{0}$; $\frac{-5}{0}$;... не се определени, бидејќи делењето со нула не е дефинирано.

3 Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$; в) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$; г) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{N}$;д) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Z}$; ѓ) $\mathbb{N}\subsetneq\mathbb{Z}'$.

Потсети се!

- $48:6=(48\cdot 2):(6\cdot 2)$;
- $48:6=(48:3):(6:3)$.

Количникот не се менува ако деленикот и делителот се помножат или поделат со ист број различен од нула.

Б

4 Количниците: $21:7=(21\cdot 3):(7\cdot 3)$ и $24:8=(24:4):(8:4)$ запиши ги како дропки.

Воопшто:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k} \quad \text{и} \quad \frac{a}{b}=\frac{a:k}{b:k} \ (k\neq 0, b\neq 0).$$

Запомни!

Ако броителот и именителот на дадена дропка се помножат со ист број k, $k\neq 0$, се добива дропка еднаква со дадената. Оваа постапка се вика *проширување* на дропка. Ако броителот и именителот на дадена дропка се поделат со ист број k, $k\neq 0$, се добива дропка еднаква на дадената. Оваа постапка се вика *скратување* на дропка.

5 Дропките $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$ прошири ги со: 2; 3; 4 и 5. Согледај: $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{4}{6}$; $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{16}{20}$.

6 Скрати ги дропките: $\frac{18}{24}$; $\frac{12}{42}$; $\frac{-9}{30}$ и $\frac{-162}{-189}$. Имаме: $\frac{18}{24}=\frac{18:2}{24:2}=\frac{9}{12}=\frac{9:3}{12:3}=\frac{3}{4}$.

Дропката е нескратлива ако броителот и именителот немаат друг заеднички делител освен бројот 1, т.е. ако тие се заемно прости броеви.

7 Дропките: $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$ и $\frac{7}{3}$ сведи ги на ист именител.

Согледај и воочи:

Дропките ќе ги сведуваме на најмал заеднички именител, па бидејќи НЗС $(4, 6, 3) = 12$, дропката $\frac{3}{4}$ ќе ја прошириме со 3 и добиваме $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12}$. На сличен начин ги прошируваме и другите две дропки и добиваме $\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{10}{12}$ и $\frac{7\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{28}{12}$.

8 Сведи ги на најмал заеднички именител дропките:

а) $\frac{5}{12}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}$; б) $6\frac{3}{4}; 7\frac{3}{8}; 8\frac{4}{5}$; в) ; $\frac{-3}{4}; \frac{-7}{12}; \frac{5}{8}; \frac{3}{16}$.

Потсети се!

- Спореди ги дропките: а) $\frac{3}{6}$ и $\frac{4}{8}$; б) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{7}$.

■ Од две дропки со еднакви именители поголема е дропката што има поголем броител.

Воопшто!

За кои било два рационални броја $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ $(b \neq 0, d \neq 0)$ важи само една од релациите:

☐ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ако $ad > bc$; ☐ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ако $ad = bc$ ☐ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, ако $ad < bc$.

На пример: $\frac{3}{4} < \frac{8}{5}$, бидејќи $3 \cdot 5 < 4 \cdot 8$; $-\frac{2}{3} > -\frac{15}{4}$, бидејќи $-2 \cdot 4 > 3 \cdot (-15)$, т.е. $-8 > -45$.

■ При работата со дропките секогаш можеме да се ограничиме на дропки со позитивен именител. На пример: $\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$, бидејќи $3 \cdot 4 = -3 \cdot (-4)$; слично, $\frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$. Од тие причини следува дека $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

9 Подреди ги по големина дропките $\frac{3}{5}, \frac{-8}{9}, \frac{5}{3}, \frac{2}{-3}, 1$.

■ Најди НЗС $(5, 9)$, а потоа изврши проширување со соодветниот број.

■ Соодветно на добиените проширени дропки добиваме: $-\frac{8}{9} < -\frac{2}{3} < \frac{3}{5} < 1 < \frac{5}{3}$.

10 На бројната оска се претставени неколку рационални броеви.

Претставените броеви на бројната оска запиши ги подредени по големина.

Воопшто!

Од два рационални броја поголем е оној број што се наоѓа десно на бројната оска.

10 Претстави ги на бројна оска броевите: $-4\frac{1}{2}, 3, \frac{-5}{2}, 2\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$.

Задачи:

① За кои вредности на x изразот нема смисла: а) $\frac{3}{x}$; б) $\frac{2}{x-1}$; в) $\frac{2x-1}{x+4}$; г) $\frac{x+2}{x^2-9}$.

② Одреди ја вредноста на непознатиот број во дропките, така што да се добие точно бројно равенство: а) $\frac{3}{5} = \frac{9}{a}$; б) $\frac{7}{9} = \frac{b}{45}$; в) $\frac{12}{16} = \frac{3}{c}$; г) $\frac{24}{36} = \frac{d}{12}$.

③ Подреди ги по големина дропките: а) $\frac{3}{16}; \frac{5}{8}; \frac{7}{12}; \frac{1}{2}$; б) $\frac{4}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{9}{27}; \frac{-7}{12}$; в) $5\frac{4}{5}; 5\frac{8}{15}; 4\frac{5}{6}$.

7 ОПЕРАЦИИ ВО МНОЖЕСТВОТО НА РАЦИОНАЛНИТЕ БРОЕВИ

Потсети се!

- $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}$; $\frac{8}{7}-\frac{5}{7}$.

▪ Воопшто:

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},(c\neq 0)$ и

$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},(c\neq 0)$.

Согледај го решението.

▪ За двата дена трактористот изорал

$\frac{7}{12}+\frac{7}{18}$ дел од нивата.

▪ НЗС $(12, 18) = 36$, па имаме:

$$\frac{7}{12}+\frac{7}{18}=\frac{7\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{21+14}{36}=\frac{35}{36}.$$

A **1** Еден тракторист првиот ден изорал $\frac{7}{12}$ од една нива, а вториот ден изорал $\frac{7}{18}$ од истата нива.

- Кој дел од нивата го изорал трактористот за двата дена?
- Кој дел од нивата останал неизоран?

▪ Неизораниот дел изнесува:

$$1-\left(\frac{7}{12}+\frac{7}{18}\right)=1-\frac{35}{36}=\frac{1}{1}-\frac{35}{36}=$$

$$=\frac{36}{36}-\frac{35}{36}=\frac{36-35}{36}=\frac{1}{36}$$ од нивата.

Запомни!

Дропки со различни именители се собираат кога претходно ќе се сведат на заеднички именител (најмал заеднички именител), а потоа се собираат како дропки со еднакви именители, т.е. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$, за $b\neq 0$ и $d\neq 0$.

2 Пресметај ја вредноста на изразот $2\frac{3}{8}-1\frac{7}{12}+\frac{1}{4}-1\frac{5}{6}$.

Согледај ја постапката: НЗС $(8, 12) = 24$.

$$2\frac{3}{8}-1\frac{7}{12}+\frac{1}{4}-1\frac{5}{6}=\frac{19}{8}-\frac{19}{12}+\frac{1}{4}-\frac{11}{6}=\frac{57-38+6-44}{24}=-\frac{19}{24}.$$

3 Провери ја точноста на равенствата: а) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$; б) $1\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}$.

- Што воочуваш?

▪ За собирањето на рационалните броеви важи комутативното и асоцијативното својство.

Имено, за кои било $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, точни се равенствата:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b} \text{ и } \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{p}{q}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{p}{q}\right).$$

2 Пресметај: а) $\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)$; б) $1\frac{1}{4}-1\frac{1}{4}$.

- Дропките $\frac{a}{b}$ и $-\frac{a}{b}$ се спротивни, па $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}-\frac{a}{b}=\frac{a-a}{b}=\frac{0}{b}=0$.

Потсети се!

- Пресметај: а) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$; б) $1\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}$.
- Воопшто: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

Б **5** Пресметај го волуменот на квадар со димензии:

$3\frac{3}{4}$ cm, $1\frac{4}{5}$ cm, а висина за 1 cm подолга од ширината.

- Висината е $1+1\frac{4}{5}=2\frac{4}{5}$ cm.

- За волуменот на квадарот добиваме:

$$V=3\frac{3}{4}\cdot1\frac{4}{5}\cdot2\frac{4}{5} \text{ или } V=\frac{15}{4}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}\text{, односно } V=\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{1}\cdot\frac{7}{5}\text{, т.е. } V=\frac{189}{10}=18{,}9\ cm^3.$$

- Воочи дека при множењето мешаните броеви ги претвораме во неправилни дропки.

6 Пресметај на два начини: а) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{6}\right)$; б) $\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$.

Важи воопшто: Множењето на дропките е дистрибутивна операција во однос на собирањето и одземањето.

7 Запиши го ова тврдење со симболи.

8 Пресметај: а) $\frac{3}{4}\cdot0$; б) $\frac{2}{3}\cdot1$; в) $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}$.

Запомни!

Ако $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}, b\neq0,d\neq0,q\neq0,$ тогаш

- $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$; $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}\right)$;
- $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}+\frac{c}{d}\cdot\frac{p}{q}$.

Потсети се!

- За секоја дропка $\frac{a}{b}$ важи: $\frac{a}{b}\cdot0=0$; $\frac{a}{b}\cdot1=\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$, ако $\frac{a}{b}\neq0$.
- Два броја чиј производ е бројот 1 се викаат реципрочни броеви.

На пример, дропката $\frac{5}{6}$ е реципрочна вредност (или реципрочен број) на дропката $\frac{6}{5}$, на $-\frac{3}{4}$ реципрочен број е $-\frac{4}{3}$, а на 5 реципрочен број е $\frac{1}{5}$.

9 Кој број е реципрочен на бројот: $\frac{4}{7}$; $-1\frac{1}{3}$; -5; $3\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$?

Потсети се!

- Пресметај: а) $\frac{6}{5}:\frac{2}{5}$; б) $1\frac{1}{2}:\frac{4}{3}$.
- Реши ја равенката $x\cdot\frac{4}{3}=\frac{5}{6}$.

■ Да се подели дропката $\frac{a}{b}$ со дропката $\frac{c}{d}, \frac{c}{d}\neq 0$, значи да се најде дропка $\frac{x}{y}$, таква што го задоволува равенството $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}\cdot\frac{c}{d}$.

В **10** Плоштината на правоаголникот е $6\frac{3}{5}\ m^2$, а една негова страна е $3\frac{2}{3}\ m$. Одреди ја должианта на другата страна.

■ Од $P=a\cdot b$, следува $6\frac{3}{5}=3\frac{2}{3}\cdot b$ оттука

$$b=6\frac{3}{5}:3\frac{2}{3} \text{ или } b=\frac{33}{5}:\frac{11}{3}\text{, односно}$$

$$b=\frac{33}{5}\cdot\frac{3}{11}\text{, т.е. } b=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}\ m.$$

Запомни!

Количникот на две дропки е еднаков на производот од деленикот и реципрочната вредност на делителот, т.е. за секои две дропки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, $(b\neq 0,\ d\neq 0, c\neq 0)$ важи $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

11 Пресметај: а) $\frac{7}{8}:\left(-2\frac{3}{2}\right)$; б) $3\frac{3}{4}-2\frac{1}{4}:1\frac{1}{2}$.

Воочи ја постапката: а) $\frac{7}{8}:\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{7\cdot(-2)}{8\cdot 7}=-\frac{1}{4}$;

б) $3\frac{3}{4}-2\frac{1}{4}:1\frac{1}{2}=\frac{15}{4}-\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{15}{4}-\frac{3}{2}=2\frac{1}{4}$.

- По кој редослед се изведуваат операциите?

12 Количниците: $\frac{2}{3}:4$; $5:\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$ запиши ги во вид на дропки.

■ Согледај го решението: $\frac{2}{3}:4=\dfrac{\frac{2}{3}}{4}$; $5:\frac{3}{4}=\dfrac{5}{\frac{3}{4}}$; $1\frac{1}{2}:\frac{4}{5}=\dfrac{1\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}$.

Запомни!

Дропка на која броителот или именителот е дропка се вика двојна дропка.

13 Двојните дропки: а) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$ б) $\dfrac{4}{\frac{3}{4}}$ в) $\dfrac{\frac{5}{6}}{4}$ г) $\dfrac{-1+\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{4}}$ претвори ги во обични дропки.

■ Согледај го решението: а) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}=\frac{9}{10}$; б) $\dfrac{4}{\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{4}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\cdot 4}{3\cdot 1}=5\frac{1}{3}$.

Запомни!

Двојна дропка се претвора во обична, така што производот на надворешните членови се запишува за броител, а производот на внатрешните членови за именител.

14 Пресметај: а) $\dfrac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{8}{9}+\dfrac{5}{6}}$ б) $\dfrac{1\dfrac{1}{8}-2\dfrac{1}{6}}{2\dfrac{1}{4}-3}$ в) $\dfrac{1+2-\dfrac{4}{3}}{2-3+\dfrac{1}{2}}$.

Запомни!

Операциите собирање, одземање и множење се внатрешни операции во множеството $\mathbb{Q}$, т.е. $\mathbb{Q}$ е затворено множество во однос на тие операции.

Делењето е внатрешна операција во множеството $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

15 Одреди го полузбирот на броевите: а) 5 и 7; б) $1\frac{4}{3}$ и 3; в) $2\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{3}$.

Согледај го решението: в) $\dfrac{2\dfrac{1}{2}+3\dfrac{1}{3}}{2}=\dfrac{\dfrac{5\cdot 3+10\cdot 2}{6}}{2}=2\dfrac{11}{12}$.

Запомни!

Аритметичката средина на броевите a и b е бројот $s=\dfrac{a+b}{2}$.

16 За броевите: а) 5 и 9; б) $\frac{1}{2}$ и $2\frac{1}{3}$ одреди ја аритметичката средина и спореди ја со дадените броеви.

Аритметичката средина $s=\dfrac{a+b}{2}$ на рационалните броеви a и b $(a<b)$ е поголема од бројот a и помал од бројот b, т.е. $a<\dfrac{a+b}{2}<b$.

■ Согледај го доказот: Од $a<b\Rightarrow a+a<b+a\Rightarrow 2a<b+a\Rightarrow a<\dfrac{b+a}{2}$.

Од $a<b\Rightarrow a+b<b+b\Rightarrow a+b<2b\Rightarrow\dfrac{a+b}{2}<b$. Оттука следува: $a<\dfrac{a+b}{2}<b$.

17 Определи најмалку пет броја што се наоѓаат меѓу броевите 5 и 7.

■ $s_1=\dfrac{5+7}{2}=6$, бидејќи $5<6<7$, следува дека $s_2=\dfrac{5+6}{2}=5{,}5$ и $s_3=\dfrac{6+7}{2}=6{,}5$, па имаме: $5<5, 5<6<6, 5<7$. ● Продолжи ја постапката на ист начин.

Запомни!

Меѓу кои било два рационални броја има рационален број, т.е. множеството на рационалните броеви е густо множество.

***Задачи*:**

① Пресметај: а) $\frac{5}{17}-\frac{8}{17}+\frac{12}{17}$; б) $4\frac{3}{5}-5\frac{1}{5}+1\frac{2}{5}$; в) $8\frac{1}{3}\cdot 3\frac{3}{5}$; г) $\frac{4}{3}:12$.

② Пресметај ја вредноста на изразите: а) $\frac{3}{5}-\frac{4}{9}+\frac{7}{15}-\frac{1}{3}$; б) $5\frac{3}{4}-4\frac{4}{5}-2\frac{1}{2}$.

③ Одреди ја вредноста на изразите:

а) $\frac{3}{2}-2\left(\frac{1}{3}-4\right)+\frac{7}{6}$; б) $\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{4}\right):\left(\frac{11}{16}-\frac{7}{8}\right)$; в) $16-\left(7\frac{1}{3}-3\frac{7}{12}\right)\cdot 1\frac{4}{5}$.

④ Пресметај: а) $\dfrac{3-2\frac{1}{2}}{1+1\frac{1}{3}}$; б) $\dfrac{\frac{1}{4}+3}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}}$; в) $\dfrac{3-2\frac{1}{4}}{2\frac{1}{4}:3}-\dfrac{1\frac{1}{2}-2}{2-\frac{1}{3}}$.

⑤ Нека $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и $\frac{m}{n}$ се кои било рационални броеви. Докажи дека важи равенството:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}+\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}.$$

8 ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ. ОПЕРАЦИИ СО ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ

Потсети се!

- Дропките: $\frac{1}{10}$; $\frac{72}{100}$ и $\frac{6254}{1000}$ запиши ги како децимален број.
- Децималните броеви: 2,6; 3,25 и 0,625 запиши ги како дропки.

А **1** Дропките: а) $\frac{7}{2}$; б) $\frac{32}{5}$; в) $\frac{7}{8}$ запиши ги како децимални броеви.

Воочи ја постапката.

а) $\frac{7}{2}=\frac{7\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{35}{10}=3,5$.

Запомни!

Дропката чиј именител е декадна единица се вика децимална дропка.
Децимална дропка запишана без именител се вика децимален број.

2 Запиши ги како децимален број дропките: $\frac{3}{4}$; $\frac{9}{8}$ и $\frac{7}{200}$.

Запомни!

Дропката чиј именител е делител на декадна единица се претвора во конечен децимален број.

3 Децималните броеви: а) 0,5; б) 2,35; в) 4,125 запиши ги како дропки.

Согледај ја постапката: б) $2,35=2\frac{35}{100}=2\frac{7}{20}$. (Ако правилно читаш, правилно ќе запишеш.)

Потсети се!

■ Децималните броеви се запишуваат во декаден броен систем.

● Како се собираат и одземаат броевите во декадниот броен систем?

Б

4 Пресметај го збирот и разликата на децималните броеви 45,32 и 8,865.

$$\begin{array}{r} 45{,}320 \\ +\ \ 8{,}865 \\ \hline 54{,}185 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45{,}320 \\ -\ \ 8{,}865 \\ \hline 36{,}455 \end{array}$$

Запомни!

Собирањето и одземањето секогаш се започнува од цифрите што се на првата позиција, оддесно во бројот. Децималната запирка треба да лежи на иста вертикала.

5 Пресметај: а) $23{,}5-42+0{,}325$; б) $3{,}125-6{,}25+4{,}0125$.

6 Пресметај го производот и количникот на броевите: $5{,}84$ и $2{,}5$.

Согледај ја постапката:

■ $5{,}84\cdot2{,}5=14{,}6$

$$\begin{array}{r} 2920 \\ +\ 1168 \\ \hline 14{,}600 \end{array}$$

■ $5{,}84:2{,}5=58{,}4:25=2{,}336$

$$\begin{array}{r} -50 \\ \hline 84 \\ -75 \\ \hline 90 \\ -75 \\ \hline 150 \\ -150 \\ \hline 0 \end{array}$$

Запомни!

☐ Децималните броеви се множат како што се множат природните броеви, а во производот се одделуваат онолку децимални места колку што има децимални места во двата множители.

☐ Пред да се започне делењето на децималните броеви, деленикот и делителот ќе ги помножиме со некоја декадна единица така што делителот да стане цел број. Потоа делењето се изведува како што се дели со природен број.

7 Пресметај: а) $3{,}25\cdot1{,}5-4{,}5$; б) $56-2{,}875:2{,}3$.

Потсети се!

● Дропките $\frac{5}{4}$ и $\frac{17}{5}$ запиши ги како децимален број.

● Кои дропки можат да се запишат како конечен децимален број?

В

8 Дропките $\frac{3}{8}$; $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{22}$ претвори ги во децимален број.

■ Со помош на постапката за делење ќе добиеш:

$$\frac{3}{8}=0{,}375;\ \frac{2}{3}=0{,}666...;\ \frac{7}{22}=0{,}31818...$$

Запомни!

Секоја дропка може да се претвори во конечен или бесконечен децимален број. На секој децимален број од десната страна можат да му се допишат нули и притоа бројот не се менува. На пример, $0{,}375=0{,}37500\ldots$; $5=5{,}000\ldots$

9 Претвори ги во децимални броеви дропките: $\frac{14}{11}$; $\frac{23}{6}$; $\frac{5}{7}$.

$$\frac{14}{11}=1{,}272727\ldots;\ \frac{23}{6}=2{,}8333\ldots$$

Воочуваш дека при делењето некој можен остаток се повторува, а во количникот се повторува една цифра или група цифри со ист редослед.

Можни остатоци при делење со 6 се: $0, 1, 2, 3, 4$ или 5, а при делење со 11 се: $0, 1, 2, \ldots$ или 10.

Цифрата или групата цифри што се повторува се вика ***периода*** на децималниот број и се означува:

$$1{,}2727\ldots=1{,}(27)\ ;\ 3{,}8333\ldots=3{,}8(3).$$

Запомни!

Секој рационален број може да се претвори во периодичен децимален број.

Согледај го доказот:

Нека $\frac{a}{b}$, $b\in\mathbb{N}$, е кој било рационален број. Тогаш, при делењето на a со b возможни се само овие остатоци: $0, 1, 2, 3, \ldots, b-1$. По најмногу b чекори во постапката за делење некој од овие остатоци мора да се повтори. Во тој случај во количникот ќе настане повторување на исти цифри во ист редослед. Со тоа тврдењето е докажано.

На пример, $\frac{12}{13}=12:13$, можни остатоци се $0, 1, 2, 3, \ldots, 12$. Можеме да очекуваме повторување по најмногу 13 чекори, меѓутоа овде повторувањето се јавува по седмиот чекор, т.е.

$$12:13=0{,}(923076).$$

Важи и обратното тврдење.

Секој периодичен децимален број претставува некоја дропка, т.е. рационален број.

10 Периодичните броеви: а) $1{,}(5)$ и б) $0{,}2(3)$ претвори ги во дропки.

Согледај го решението:

а) $x=1{,}(5)=1{,}555\ldots$

$10x=15{,}(5)=15{,}555\ldots$

$10x-x=15{,}555\ldots-1{,}555\ldots$

$9x=14$

$x=\frac{14}{9}$, т.е. $1{,}(5)=\frac{14}{9}$.

б) $x=0{,}2(3)=0{,}2333\ldots$

$100x=23{,}(3)=23{,}333\ldots$

$10x=2{,}(3)=2{,}333\ldots$

$100x-10x=23-2=21$

$x=\frac{21}{90}=\frac{7}{30}$.

Задачи:

① Запиши ги како децимални броеви: $\frac{7}{4}, \frac{17}{8}, \frac{-9}{5}, \frac{-32}{25}$.

② Запиши ги како нескратливи дропки: $2{,}12$; $0{,}008$; $6{,}125$; $-5{,}75$.

③ Пресметај: а) $(7{,}3-2{,}9)\cdot 0{,}5$; б) $(23{,}4+12{,}3):1{,}25$;

в) $3{,}46+2{,}1\cdot(0{,}25-1{,}23)$; г) $30{,}25+2{,}5\cdot(3{,}02-4{,}1:0{,}25)$.

④ Претвори ги во децимален број: $\frac{8}{7}, \frac{11}{45}, \frac{13}{12}$.

⑤ Децималните броеви претвори ги во обични дропки:

а) $0,(6)$; б) $2{,}3(15)$; в) $4{,}5(18)$; г) $2{,}3(4)$.

9 РЕАЛНИ БРОЕВИ

Потсети се!

- Реши ја равенката $x^2-4=0$.
- Страната на квадратот е $3\ cm$. Пресметај ја неговата плоштина.

A **1** Колку е страната на квадратот чија плоштина е:

а) $16\ cm^2$; б) $8\ cm^2$?

Согледај го решението:

- Од $P=a^2$ следува: а) $a^2=16$; $a=\sqrt{16}=4\ cm$.

  б) $a^2=8$; $a=?$ ● Дали постои рационален број чиј квадрат е еднаков на 8?

- Воочи дека не постои рационален број што е мерен број на страната на квадратот чијашто плоштина е $8cm^2$, бидејќи $a=\sqrt{8}=2{,}82842712...$

2 Реши ја равенката: а) $x^2-9=0$; б) $x^2-3=0$; в) $x^2-15=0$.

Пресметај ја хипотенузата на рамнокрак правоаголен триаголник со катета $1\ cm$.

- Воочи дека равенката $x^2-3=0$ и $x^2-15=0$ нема решение во множеството на рационалните броеви. Исто така, не постои рационален број c, што е мерен број на должината на хипотенуза и го задоволува равенството $c^2=2$.

Овие и многу други проблеми не можат да се решат во множеството $\mathbb{Q}$, па од тие причини се наметнува потреба за воведување на нови броеви кои се викаат ***ирационални броеви***.

Множеството на ирационалните броеви го означуваме со $\mathbb{J}$.

- Ирационални броеви се: $\sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{5}; -\sqrt{7}; ...$, бројот $\pi=3{,}14159265...$ и други.

3 Со калкулатор пресметај: $\sqrt{2}=1{,}41421356...$; $\sqrt{3}=1{,}73205080...$

Воочи дека тоа се бесконечни децимални броеви, бидејќи ако некој од нив е периодичен, тоагаш тој е рационален број.

Броевите $0{,}121221222...$ и $2{,}7343443444...$ се ирационални броеви.

Запомни!

Секој бесконечен непериодичен децимален број е ирационален.
Ирационалните броеви заедно со рационалните, го формираат множеството на реални броеви што го означуваме со $\mathbb{R}$, т.е. $\mathbb{R}=\mathbb{J}\cup\mathbb{Q}$.

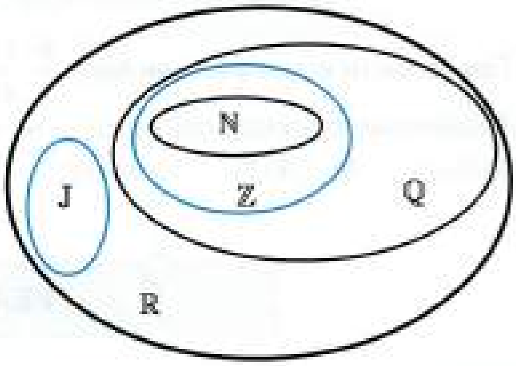
4 На цртежот со Венов дијаграм претставени се множествата: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{J}$ и $\mathbb{R}$.

Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Z}$;

в) $\mathbb{Q}\cap\mathbb{J}=\varnothing$; г) $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Z}$;

д) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\mathbb{J}$.



5 Кој број е поголем: а) $\sqrt{2}$ или $\frac{7}{5}$; б) $\sqrt{3}$ или $\frac{9}{5}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ или $\sqrt{2}$?

■ Согледај го решението: а) $\frac{7}{5}=1{,}4$; $\sqrt{2}=1{,}414221356\ldots$, следува $\sqrt{2}>\frac{7}{5}$.

Потсети се!

■ Меѓу кои било два рационални броја постои рационален број.

■ Множеството на рационалните броеви е густо подредено.

● Дали на бројната оска има место за ирационалните броеви?

6 Страните на правоаголник се $a=12\,cm$ и $b=5\,cm$.

Одреди ја должината на неговата дијагонала.

Воочи. При избрана единица мерка должината на секоја отсечка се изразува со ненегативен реален број. Важи и обратно, за кој било ненегативен реален број постои отсечка чија должина е тој број.

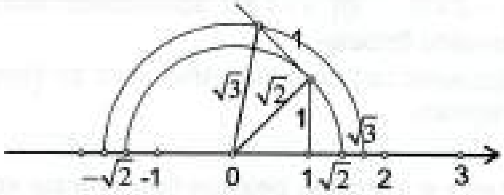
■ На бројот $\sqrt{2}$ ќе му придружиме отсечка што е хипотенуза на рамнокрак правоаголен триаголник со катета еднаква на 1.

Во врска со прашањето поставено во "потсети се", можеме да одговориме: на бројната оска има место за секој ирационален број.

7 Определи отсечка чија должина има мерен број: а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{10}$?

8 На бројната права одреди ја точката што е придружена на ирационалниот број: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$.

Работи според барањата:



- На бројната оска конструирај рамнокрак правоаголен триаголник со катета $\overline{OA}=1$.
- Должината на хипотенузата, според Питагоровата теорема е $\sqrt{2}$, пренеси ја на бројната оска лево и десно од точката O.
- Над отсечката $\sqrt{2}$, како катета, конструирај правоаголен триаголник чија втора катета е еднаква на 1.
- Хипотенузата на новиот правоаголен триаголник е со должина $\sqrt{3}$.
- Пренеси ја отсечката $\sqrt{3}$ на бројната оска десно од точката O.
- Овој начин на одредување на точките што одговараат на ирационалните броеви се вика *“геометриска конструкција на број”*.

Запомни!

На секоја точка од бројната оска може да и се придружи точно еден реален број, и обратно, на секој реален број може да му се придружи точно една точка на бројната оска, т.е. меѓу точките од бројната оска и множеството на реалните броеви може да се воспостави заемно еднозначно соодветство.

Според тоа, точката на бројната оска за даден ирационален број ја одредуваме со нанесување на соодветната отсечка што одговара на ирационалниот број, лево и десно од точката O.

9 Пресметај: $|-5|-\left|\frac{1}{2}\right|+|-2{,}5|$.

- Апсолутната вредност на реален број се дефинира на ист начин како и за цел број, т.е. за кој било реален број a,

$$|a|=\begin{cases} a & \text{за } a>0, \\ 0 & \text{за } a=0, \\ -a & \text{за } a<0. \end{cases}$$

10 Ако $a=-5$, $b=2\frac{1}{2}$, провери ја точноста на следниве тврдења:

а) $|-a|=|a|$; б) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$; в) $\left|\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{a}{b}\right|, b\neq 0$; г) $|a+b|\leq|a|+|b|$.

Потсети се!

Реши ја неравенката:
а) $x-2<0$; б) $x+1\geq 0$ во множеството на реалните броеви.

Добиеното решение запиши го во вид на интервал.

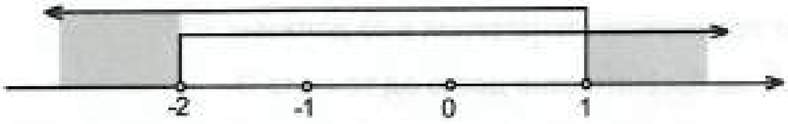
11 Дадени се реалните броеви a и b, $a<b$.

На бројната оска одреди ги точките што се придружени на дадените реални броеви.

На бројната оска одреди ги реалните броеви што се наоѓаат меѓу броевите a и b.

Ако x е кој било реален број, тогаш конјункцијата $x>-2$ и $x<1$ може да ја запишеме: $-2<x<1$, значи дека на бројот x му се придружуваат сите реални броеви кои се наоѓаат меѓу броевите -2 и 1.

На бројната оска тоа го претставуваме вака:



а означуваме: $\{x | x\in\mathbb{R}, -2<x<1\}$ или $x\in(-2,\ 1)$.

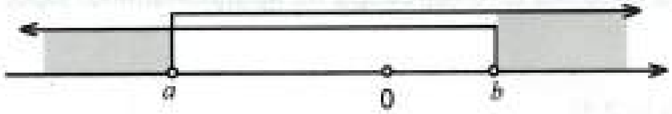
12 Колку има реални броеви што се наоѓаат меѓу броевите -2 и 1?

Потсети се!

Множеството од сите реални броеви што се наоѓаат меѓу два дадени броја a и b, $a<b$, се вика ***интервал***. Броевите a и b се викаат граници на интервалот.

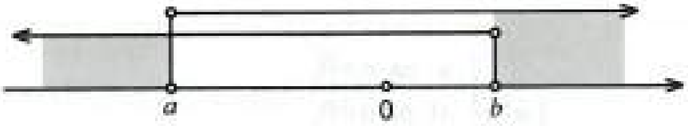
Во зависност од тоа дали границите на интервалот му припаѓаат на множеството или не му припаѓаат, можни се следните видови интервали:

1.



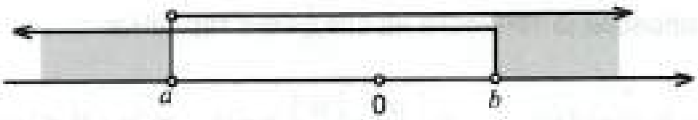
$\{x | x\in\mathbb{R}, a<x<b\}$ или $x\in(a,b)$, отворен интервал.

2.



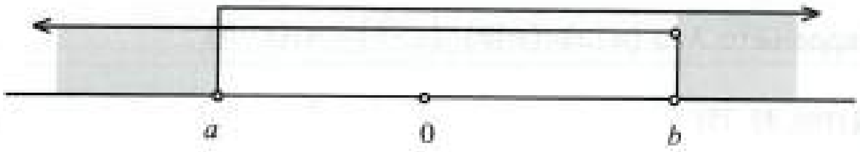
$\{x | x\in\mathbb{R}, a\leq x\leq b\}$ или $x\in[a,b]$, затворен интервал.

3.



$\{x | x\in\mathbb{R}, a\leq x<b\}$ или $x\in[a,b)$, полуотворен интервал оддесно.

4.

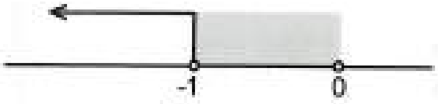


$\{x|x\in\mathbb{R}, a<x\le b\}$ или $x\in(a,b]$, полуотворен интервал одлево.

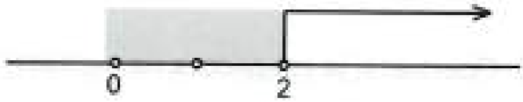
Ако $x>a, a\in\mathbb{R}$, тогаш означуваме $\{x|x\in\mathbb{R}, x>a\}$, или $x\in(a,\infty)$. Интервалот е бесконечен оддесно. Ако $x\le a, a\in\mathbb{R}$, тогаш означуваме $\{x|x\in\mathbb{R}, x\le a\}$, или $x\in(-\infty,a]$. Интервалот е бесконечен одлево.

13 Запиши го интервалот што е претставен на бројната оска.

а)



б)



14 На бројна оска претстави ги интервалите:

а) $(-5,1)$; б) $(-3,2]$; в) $[-1,3)$; г) $[0,4]$; д) $(-4,\infty)$.

Задачи:

① Кои од следниве искази се вистинити:

а) $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}$; б) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$; в) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{J}$; г) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{J}=\varnothing$?

② Кој број е поголем: а) π или $\frac{22}{7}$; б) $\frac{306}{125}$ или $\sqrt{6}$; в) $\frac{36}{25}$ или $\sqrt{2}$?

③ Одреди на бројна оска точка што одговара на бројот: а) $\sqrt{5}$; б) $-\sqrt{5}$; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{15}$.

④ Претстави ги на бројна права интервалите: а) $[-4,0]$; б) $(-2,2)$; в) $\left[\frac{1}{2},2\right)$; г) $(-\infty,3]$.

Запиши ги пократко интервалите:

а) $\{x|x\in\mathbb{R}, -1\le x<3\}$; б) $\{x|x\in\mathbb{R}, 0<x\le 10\}$; в) $\{x|x\in\mathbb{R}, x\ge -1\}$.

⑤ На бројна права претстави го пресекот на интервалите;

а) $[-3,2)$ и $[1,3]$; б) $(-1,4]$ и $(2,6)$; в) $(-\infty,-1)$ и $[2,\infty)$.

⑥ Одреди ја унијата на интервалите:

а) $(-5,4]$ и $(-1,5)$; б) $(0,5]$ и $[-6,1]$; в) $(-\infty,-3)$ и $[-1,\infty)$.

⑦ Одреди ја унијата на интервалите:

а) $(-5,4]$ и $(-1,5)$; б) $(0,5]$ и $[-6,1]$; в) $(-\infty,3)$ и $[-1,\infty)$.

Тематска контролна вежба

① Докажи го тврдењето: Ако $(m \mid a) \wedge (m \mid b) \wedge (a > b) \Rightarrow m \mid (a-b)$.

② Одреди НЗД$(165, 45, 75)$.

③ Бројот 10101_2 преведи го во декаден броен систем.

④ Пресметај ја вредноста на изразот: $37 + 1110_2 + 101_2$.

⑤ Пресметај ја вредноста на изразот: $-6 \cdot (3-4) - 2 \cdot (18-3) : 5$.

⑥ Подреди ги по големина броевите: $\frac{-3}{4}, \frac{-7}{12}, \frac{5}{8}, \frac{3}{16}$.

⑦ Пресметај ја вредноста на изразот: $16 - \left(7\frac{1}{3} - 3\frac{7}{12}\right) \cdot 1\frac{4}{5}$.

⑧ Децималниот број $2{,}3(15)$ претстави го како дропка.

⑨ Кои од следниве искази се точни:

а) некои ирационални броеви се цели броеви;

б) секој бесконечен децимален број е ирационален;

в) постои реален број што е ирационален.

⑩ Одреди ја точката на бројната оска што одговара на бројот $\sqrt{5}$.

⑪ Подреди ги по големина броевите:

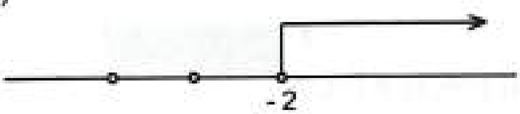
$\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$; $2,(3)$; $2{,}3434...$; $-1\frac{1}{3}$; $0{,}1212...$

⑫ Одреди го пресекот на интервалите:

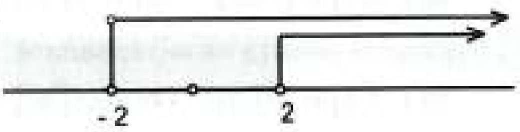
а) $[-3,4]$ И $[5,7]$; б) $(-3,4]$ и $[4,7)$ в) $\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$ и $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

⑬ На бројната оска претставени се множества од реалните броеви во вид на интервали. Запиши ги интервалите.

а)



б)



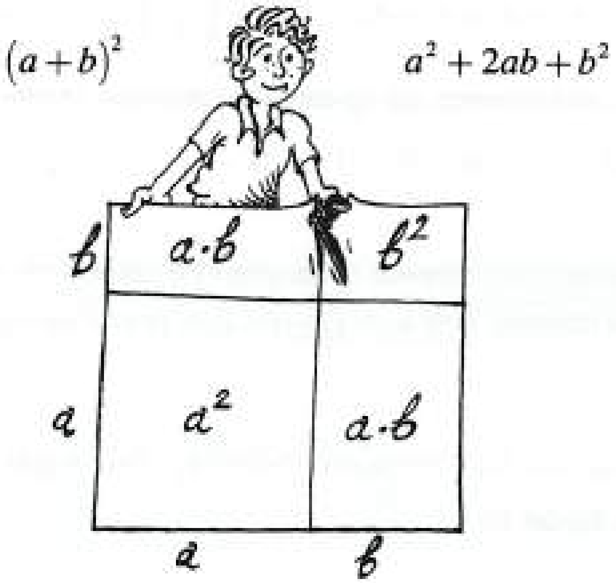
ТЕМА 3

АЛГЕБАРСКИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

> *Полесно е математиката да се научи отколку да се работи без неа.*
>
> Х. Боас

Во оваа тема ќе учиш за:

- степен со показател природен број и операции со степени;
- мономи, биноми, полиноми и операции со нив;
- формули за скратено множење;
- разложување на полином на прости множители;
- НЗД и НЗС за два или повеќе полиноми;
- алгебарски дропки, домен, проширување и скратување на дропки;
- операции со алгебарски дропки.



1 СТЕПЕНИ. МНОЖЕЊЕ, ДЕЛЕЊЕ И СТЕПЕНУВАЊЕ НА СТЕПЕНИ

Потсети се!

- Бројот 9 може да се запише како

$$3\cdot 3=3^2.$$

- Дали сите броеви може да се запишуваат како записот на бројот 9?
- За записот 5^3 велиме дека е краток запис на бројот $5\cdot 5\cdot 5$.
- Напиши краток запис на бројот

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2.$$

A Нека a е кој било реален број. Производот $a\cdot a$ кратко го запишуваме со симболот a^2; производот $a\cdot a\cdot a$ со симболот a^3; итн.

- Запиши го кратко производот $a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$, каде што има n множители.
- Симболот a^n го викаме ***степен*** и претставува краток запис од n исти множители $a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$.

- За реалниот број a велиме дека е основа на степенот a^n.
- За природниот број $n\geq 2$ велиме дека е степенов показател, кој ни покажува колку пати основата се множи сама со себе.

Воопшто, $\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}=a^n$, при што $a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ и $n\geq 2$.

1 Претстави ги во вид на степен производите:

а) $x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$; б) $(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)$; в) $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$; г) $(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$.

2 Претстави ги во вид на производ од еднакви множители степените:

а) 3^5; б) $0,2^4$; в) $(-7)^4$; г) $(x-1)^3$.

Запомни!

Степенот на бројот a со степенов показател 1 е самиот тој број, т.е. $a^1=a$, на пример: $(-5)^1=-5$; $(x-1)^1=x-1$; $(a+b)^1=a+b$.

Воочи!

$(-1)^1=-1$, $(-1)^2=(-1)\cdot(-1)=1$, $(-1)^3=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=-1$, $(-1)^4=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=1,\ldots,$ $(-1)^{2k}=1$ и $1^{2k-1}=-1$, за секое $k\in\mathbb{N}$.

3 Одреди ја вредноста на степените: а) $(-1)^{2002}$; б) $(-1)^{2003}$.

Потсети се!

- Бројот a има степенов показател 1.
- Колку е степеновиот показател на бројот $a+b$?
- Производот $a^2 \cdot a^3$ има степенов показател 5.
- Колку е степеновиот показател на производот $a \cdot a^2 \cdot a^3$?
- Количникот $a^5 : a^2$ има степенов показател 3, за $a \neq 0$.
- Колку е степеновиот показател на изразот $a^{12} \cdot a^2 : a^8, (a \neq 0)$?

Б Нека треба да ги помножиме степените a^m и a^n, при што $a \in \mathbb{R}$, а $m,n \in \mathbb{N}$.

Имаме:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m},\quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n},$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m+n}, \text{ т.е.}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

4 Одреди ги производите:

а) $x^5 \cdot x^7 \cdot x^8$; б) $10^6 \cdot 10^{26}$; в) $(x-3)^4 (x-3)^5$; г) $(-4)^3 \cdot (-4)^4$.

Запомни!

Равенството $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ е правило за множење на степени со еднакви основи.

На пример, $a^5 = a^3 \cdot a^2 = a^4 \cdot a = a^2 \cdot a^3 = a \cdot a^4$.

5 Слично како кај множењето, увери се во точноста на равенството $a^m : a^n = a^{m-n}$. Зошто мора $a \neq 0$ и $m > n$?

5 Пресметај: а) $\frac{x^6}{x^2}, x \neq 0$; б) $\frac{(a+3)^{11}}{(a+3)^8}, a+3 \neq 0$.

Запомни!

Равенството $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ $(a \neq 0)$, не е еднозначно.

На пример, $a^5 = a^{12-7} = \frac{a^{12}}{a^7}$ за $a \neq 0$. Но, a^5 може да се претстави на бесконечно многу начини како количник од два степена.

***Забелешка**. Во сите случаи понатаму, именителот на дропката (делителот) ќе земаме дека е различен од нула, без посебно означување.*

Потсети се!

- $A^3 = A \cdot A \cdot A$. Ако $A = x^2$, добиваме $\left(x^2\right)^3 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x^6$.
- На сличен начин одреди $\left(x^4\right)^3$.

В Познато ти е: $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ..... \cdot a}_{m}$, колку е $\left(a^m\right)^n$? Имаме: $\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot ... \cdot a^m}_{n}$.

Тогаш $\left(a^m\right)^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m \cdot n}$, т.е. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$.

7 Добиеното равенство е правило за степенување на степени.

Следниве изрази претстави ги во вид на степен со основа x:

а) $\left(x^4\right)^5$;   б) $\left(x^2x^3\right)^{10}$;   в) $\dfrac{x^2\left(x^7x\right)^3}{x^8}$.

Запомни!

Равенството $a^{m \cdot n} = \left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m$ но не е еднозначно определено.

На пример: $a^{12} = a^{4 \cdot 3} = \left(a^4\right)^3 = \left(a^3\right)^4$; $a^{12} = \left(a^2\right)^6 = \left(a^6\right)^2$; $a^{12} = \left(a^{12}\right)^1 = \left(a^1\right)^{12}$.

Потсети се!

- $a^3 = a \cdot a \cdot a$,
  $b^3 = b \cdot b \cdot b$,

$a^3b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = ab \cdot ab \cdot ab = \left(ab\right)^3$.

- Помножи ги степените $x^4 \cdot y^4 \cdot z^4$.
- $\dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$.
- Количникот $\dfrac{x^5y^5}{z^5}$ запиши го како степен со основа $\dfrac{xy}{z}$.

Г Нека $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m}$ и $b^m = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot ... \cdot b}_{m}$. За производот $a^m \cdot b^m$ имаме:

$$a^m \cdot b^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot ... \cdot b}_{m} =$$

$$= \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot ... \cdot (ab)}_{m} = (ab)^m.$$

Слично, за $\dfrac{a^m}{b^m}$ имаме:

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot ... \cdot b}_{m}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot ... \cdot \frac{a}{b}}_{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

Значи, $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ и $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$.

8 Упрости ги изразите:

а) $\dfrac{2^x6^x}{3^x}$;   б) $\dfrac{3^{2x}4^{3x}}{2^{5x}}$;   в) $\dfrac{2^5 \cdot 3^5 \cdot 4^5}{12^5}$.

9 Откриј кое правило од степени е користено во секое од следните равенства:

а) $2^2 \cdot 2^2 = 4 \cdot 4 = 16$;   б) $2^2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$;   в) $2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2} = 2^4 = 16$;

г) $2^2 \cdot 2^2 = \left(2 \cdot 2\right)^2 = 4^2 = 16$;   д) $2^2 \cdot 2^2 = \left(2^2\right)^2 = 2^4 = 16$.

- г) Користено е правилото за множење на степени со ист степенов показател.

Запомни!

Равенствата: $(ab)^n = a^n b^n$ и $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ се правила за степенување на производ и количник.

10 Изврши го степенувањето: а) $\left(\frac{xy}{z}\right)^5$; б) $\left(\frac{x^3y^2}{z^5}\right)^5$; в) $\left(-\frac{2x^2y^3}{3a^4b^5}\right)^3$.

Задачи:

① Дали бројот $5a^3$ е степен?

② Кои од следниве искази се вистинити:

а) $(-2)^7 < 0$; б) $(-3)^{40} < 0$. в) $a^4b^7 < 0$ за $a > 0, b < 0$; г) $a^7b^{20} > 0$ за $a < 0, b > 0$.?

③ Најди вредност на x и y за да бидат точни равенствата:

а) $x^{2002} = 1$; б) $x^{2001} = -1$; в) $x^1 = -4$; г) $(-3)^x = -27$; д) $x^3 = y^3$; ѓ) $2^x = 2^y$.

④ Следниве броеви претстави ги како степен со основа 10: а) 10000; б) 1000000;

⑤ Следниве броеви претстави ги како производ од природен број и степен со основа 10:

а) 7000; б) 72000000; в) 34700.

⑥ Следниве броеви запиши ги како производ од реален број и степен 10^3.

а) 3974; б) 0,5653; в) 35.

⑦ Претстави ги како степен со основа x изразите: а) $x \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot x^5$; б) $\frac{x^6x^7}{x^8}$; в) $x^8 : x^3 \cdot x^2$.

⑧ Изврши го степенувањето: а) $\left(\left(a^2 \cdot a^3\right)^2 \cdot a^4\right)^3$; б) $\left(\left(a^2\right)^3\right)^4$.

⑨ Запиши ги како степен со основа a изразите: а) $\left(a^3 \cdot a^2\right)^3 : a^{10} \cdot a^2$; б) $\frac{\left(\left(a^2 \cdot a^3\right)^5\right)^6}{\left(a^8 \cdot a^7\right)^{10}}$.

⑩ Пресметај на наједноставен начин: а) $\frac{4^3 \cdot 12^3}{24^3}$; б) $\frac{3^3 \cdot 2^6 \cdot 125}{1000}$.

⑪ Одреди го x за равенствата да бидат точни:

а) $a^x = a^3$, б) $\left(a^x\right)^2 = \left(a^4\right)^3$; в) $\left(a^x \cdot a^3\right)^5 = \left(a^7 \cdot a^3\right)^4$; г) $\left(a^2 \cdot a^x\right)^4 : a^4 = \frac{\left(\left(a^2\right)^3\right)^4}{a^{12}}$.

2 РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. ПОЛИНОМИ

Потсети се!

- Симболите $2, \sqrt{2}, \frac{1}{2}, \ldots$ се константи.
- Симболите $a, b, x, y, \ldots$ се променливи.
- Како се вика множеството во кое се менува некоја променлива?
- Која променлива е реална?

А **1** Напиши неколку изрази во кои константите и променливите се сврзани со операциите собирање, одземање и множење, како и степенување со показател природен број.

- $6a^2b^3 - \frac{3}{4}ab^2 - 3.$

- Ваков израз се вика ***рационален алгебарски израз*** или ***полином***.

2 Напиши неколку изрази кои се производ од бројна константа и степени.

- $-\frac{2}{3}a^2b^3c^4$. Ваков рационален алгебарски израз се вика ***моном***.

3 Кои од следниве алгебарски изрази се мономи: а) $-3a^2b$; б) $3x^2y\left(-5xy^2\right)$;

в) $\frac{3x^2}{y}$; г) $\frac{3x^5}{5}$; д) $3x^2 - 4y$?

Потсети се!

- Мономот $3a^2b^3$ е во ***нормален*** вид.
- Дали мономот $3a^2b \cdot 2a$ е запишан во нормален вид?
- Во мономот $5a^2b^3c^4$ бројот 5 е ***коефициент***, $a^2b^3c^4$ е ***главна вредност***, а a^2, b^3, c^4 се степени во главната вредност.
- Одреди го коефициентот и главната вредност на мономите: 3; a^2; $3a^2$; $\frac{3}{4}a^4b^3$.
- Степенот на мономот $3x^4y^5$ со променливи x и y изнесува $4+5=9$.
- Колку изнесува степенот на мономите $2x^4$; $3xy^5$; $2x$; , со променливи x и y?
- Мономите $3a^2b^3$ и $-4a^2b^3$ се слични, бидејќи имаат иста главна вредност.
- Се собираат само сличните мономи, така што се собираат нивните коефициенти, а главната вредност се препишува.

Б **4** Нека се дадени мономите:
$A = 2x^3y^3, B = -3x^2y^2, C = -5xy, D = 7.$

- Изразот:

а) $A = 2x^3y^3$ е моном;
б) $A + B = 2x^3y^3 + \left(-3x^2y^2\right)$ е бином;
в) $A + B - C = 2x^3y^3 + \left(-3x^2y^2\right) - \left(-5xy\right)$ е трином;
г) $A + B - C - D = 2x^3y^3 + \left(-3x^2y^2\right) - \left(-5xy\right) - 7$
е полином.

Запомни!

Збир од конечен број мономи се вика ***цел рационален израз*** или ***полином***. (Мономите се сметаат за полиноми).

Воочи: Изразите $\frac{y}{x+3}$ и $x^3 - xy + \frac{5}{x-5}$ не се цели рационални изрази и тие имаат смисла за $x \neq -3$, односно $x \neq 5$.

Пресметај ја бројната вредност на изразите $x\left(x^2+5\right)$ и $x^3 + 5x$ за: а) $x=0$; б) $x=3$; в) $x=-1$; г) $x=2,5$. Што воочуваш? За $x=-1$ имаме:

$x\left(x^2+5\right) = -1 \cdot (1+5) = -6$ и $x^3 + 5x = -1 - 5 = -6.$

Запомни!

- **Изразите** коишто имаат еднакви бројни вредности за секои вредности на променливите од дефиниционото множество се викаат ***идентични*** рационални изрази.
- **Равенството** од два идентични рационални изрази се вика ***идентитет***.
- **Степенот** на полиномот е најголемиот степен од мономите што го сочинуваат.
- **Полиномот** е во нормален вид ако сите негови неслични мономи се во нормален вид.

6 **Сведи го** во нормален вид полиномот $M = 7x^2y - 3xy \cdot y - 4x^2y + 2x \cdot x - 5x$.

Задачи:

① **Запиши ги** во нормален вид мономите: а) $3x^2y \cdot xy;$; б) $2xy^2 \cdot x^2y^3 \cdot xy$.

② **Одреди ги**: коефициентот, главната вредност и степенот на мономите со променливи x и y. а) $3x^3y^4z$; б) $-\frac{2}{3}x^3y$; в) $3 \cdot \frac{1}{5}$.

③ **Пресметај** ја бројната вредност на изразите:

а) $3a^2b^3 - 4a^3b^4$ за $a = -2, b = -1$; б) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$ за $a = 2, b = -1$.

④ **Провери** дали се идентитети равенствата:

а) $2x^2(x+2) = 2x^3 + 4x^2, x \in \{-1, 0, 1\}$;

б) $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 6xy + 9y^2; (x, y) \in \{(1,0), (0,1), (-1,1)\}$.

⑤ **Дадените** полиноми сведи ги во нормален вид и одреди го нивниот степен:

а) $2x^2 - x^3 + 3x - 5 + x^2 - 3x$; б) $2x^2y - 2xy^2 - 2xy + 3yx^2 - 5y^2x$.

3 СОБИРАЊЕ И МНОЖЕЊЕ НА ПОЛИНОМИ

Потсети се!

- Полиномите $M = a + b$ и $N = a - b$ ги собираме, така што ги собираме сличните мономи, т.е.

  $M + N = a + b + a - b = 2a$.

- **Собери ги** полиномите $A = 2a - b$ и $B = 3a + b$.

𝒜

1 Одреди го полиномот $M - N + P$, ако:

$M = -2x^2 + 3x - 1$,

$N = 4x^2 - 5x + 3$,

$P = -3x^2 - 8x + 7$.

Согледај го решението.

- **Запишуваме**: $M - N + P = -2x^2 + 3x - 1 - (4x^2 - 5x + 3) + (-3x^2 - 8x + 7)$.
- **Правилно** ослободи се од заградите: $M - N + P = -2x^2 + 3x - 1 - 4x^2 + 5x - 3 - 3x^2 - 8x + 7$.
- **Собери ги** сличните мономи, па добиваш:

$$M - N + P = -9x^2 + 3.$$

Треба да знаеш!

$M = M(x)$ е полином со променлива x;

$Q = Q(x, y)$ е полином со променливи x и y;

$W = W(a, b, c)$ е полином со променливи a, b и c.

2 Дадени се полиномите: $M(x) = -x^2 + 4x - 2$; $N(x) = 3x^2 - 4x + 5$; $P(x) = -2x^2 - 7x + 6$.

Одреди ги полиномите:

а) $M(x) + N(x) - P(x)$; б) $M(x) - N(x) - P(x)$; в) $2M(x) - 3N(x) + P(x)$.

Потсети се!

- Моном со моном се множи така што коефициентите се множат по правилото за множење на реални броеви, а главните вредности по правилото за множење на степени.
- Пресметај го производот на мономите $3x^2y^3$ и $-5x^3y^4$.

Б

3 Пресметај го производот од мономите $-\frac{2}{3}x^3y^4$ и $-\frac{3}{4}x^4y^5z$.

Согледај ја постапката.

- Ги множиме коефициентите и добиваме:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2};$$

- Производот на главните вредности е:

$$x^3y^4 \cdot x^4y^5z = x^7y^9z.$$

- Бараниот производ е $\frac{1}{2}x^7y^9z$.
- Во практиката запишуваме директно: $-\frac{2}{3}x^3y^4 \cdot \left(-\frac{3}{4}x^4y^5z\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}x^7y^9z = \frac{1}{2}x^7y^9z.$

4 Пресметај ги производите:

а) $-5a^2b^3c \cdot 3a^4b^2c^2$; б) $\frac{2}{3}a^5b^6 \cdot \left(-9a^4b\right)$; в) $\frac{3}{14}a^4b^4 \cdot \left(-7a^3b^3\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}ab\right)$.

Потсети се!

- Во равенството $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ е применето дистрибутивното својство.
- Примени го дистрибутивното својство на изразот $(a+b-c)\cdot d$.

В

5 Полиномот $3x^2y^3 - 2xy^2 + 5xy$ помножи го со мономот $-2x^3y^3$.

Согледај го решението:

- Запишуваме: $\left(3x^2y^3 - 2xy^2 + 5xy\right)\cdot\left(-2x^3y^3\right)$.
- Според дистрибутивното својство имаме $3x^2y^3 \cdot \left(-2x^3y^3\right) - 2xy^2 \cdot \left(-2x^3y^3\right) + 5xy \cdot \left(-2x^3y^3\right)$.
- По извршување на множењето на мономите добиваме: $-6x^5y^6 + 4x^4y^5 - 10x^4y^4$.
- Во практиката пишувај директно: $\left(-3xy^4 + 5x^2y - 2\right)\cdot\left(-4x^2y\right) = 12x^3y^5 - 20x^4y^2 + 8x^2y$.

Треба да знаеш!

Ако A, B, C и D се мономи, тогаш $(A+B+C)\cdot D = A\cdot D + B\cdot D + C\cdot D$,

и $D\cdot(A+B+C) = D\cdot A + D\cdot B + D\cdot C$.

6 Одреди ги производите: а) $\left(3x^4y^3-5xy^6-2x^3y^3\right)\cdot\left(-4xy^2\right)$; б) $\frac{3}{4}x^3y^5\cdot\left(-8x^4y^3+4x^2y-12xy^3\right)$.

Потсети се!

- Помножи го полиномот x^2+x+1 со полиномот $x+1$.

Упатство: помножи x^2+x+1 со x, а потоа x^2+x+1 со 1.

- Одреди го збирот на добиените производи.

7 Помножи ги полиномите $2x^3-3x^2+5x-7$ и $x-4$.

Согледај го решението

- Означи $M=x-4$ и ќе добиеш $\left(2x^3-3x^2+5x-7\right)\cdot M$.
- Примени множење на полином со моном, т.е. $2x^3\cdot M-3x^2\cdot M+5x\cdot M-7\cdot M$.
- Замени $M=x-4$ и добиваш:

$$2x^3(x-4)-3x^2(x-4)+5x(x-4)-7(x-4).$$

- Уште еднаш применуваме множење на моном со полином:

$$2x^4-8x^3-3x^3+12x^2+5x^2-20x-7x+28.$$

- Го сведуваме добиениот полином во нормален вид и добиваме:

$$2x^4-11x^3+17x^2-27x+28.$$

- Во практиката пишуваме како во следниов пример:

$$(3x^2-2x+1)(-x+3)=$$
$$=-3x^3+9x^2+2x-6x-x+3=$$
$$=-3x^3+11x^2-7x+3.$$

8 Помножи ги полиномите и добиениот производ подреди го така што степенот на променливата x да опаѓа: а) $\left(2x^2-3x^3+1\right)\left(-4x+5\right)$; б) $\left(x^2-x^3+5x-2\right)\left(-3+x^2-2x\right)$.

9 Одреди ги реалните броеви a, b и c, така што полиномите $P(x)=2x^3-9x^2+13x-6$ и $Q(x)=(x-2)\left(ax^2+bx+c\right)$ да бидат идентично еднакви.

Согледај ја постапката:

- Полиномот $P(x)$ е во нормален вид, а полиномот $Q(x)$ го трансформираме во нормален вид и добиваме:

$$Q(x)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c=$$
$$=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c.$$

Два полиноми со исти променливи се еднакви ако коефициентите пред соодветна променлива со ист степенов показател се еднакви.

Според тоа, $P(x)=Q(x)$ ако:

$a=2$,

$b-2a=-9$, значи $b=-5$,

$c-2b=13$, па $c=3$.

Задачи:

① Пресметај ја бројната вредност на полиномот: .

а) $5abc-\left(2a^2b-\left(3abc-\left(4ab^2-a^2b\right)\right)\right)$, за $a=-2, b=-1, c=3$;

б) $3x^2z-\left(xyz-\left(2xyz-x^2z\right)-4x^2z+3x^2z-\left(4xyz-5x^2z-3xyz\right)\right)$, за $x=-1,\ y=2,\ z=-3$.

② Дадени се полиномите $P(x)=x^3+2x^2-1$ и $Q(x)=x^2+x+1$. Одреди ги полиномите:

а) $P(x)+Q(x)$; б) $P(x)-Q(x)$; в) $P(x)\cdot Q(x)$.

③ Одреди ги реалните броеви a, b и c, така што полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ да бидат идентично еднакви:

а) $P(x)=6x^3-23x^2+29x-12$ и $Q(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$

б) $P(x)=2x^3-x^2+x+4$ и $Q(x)=\left(ax^2+bx+c\right)(x+2)$.

4 ФОРМУЛИ ЗА СКРАТЕНО МНОЖЕЊЕ

Потсети се!

- $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$
- Одреди:

а) $(x+2)^2$; б) $(x+2)^3$.

А 1 Степенувај ги биномите:

а) $\left(2x^2+3y\right)^2$; б) $\left(3x^2-2y\right)^2$;

в) $\left(2x+y^2\right)^3$; г) $\left(x^2-2y^2\right)^3$.

- Воочи: $\left(2x^2+3y\right)^2=\left(2x^2+3y\right)\left(2x^2+3y\right)=2x^2\cdot 2x^2+2x^2\cdot 3y+2x^2\cdot 3y+3y\cdot 3y$, па можеш

да запишеш: а) $4x^4+12x^2y+9y^2=\boxed{2x^2}^2+2\cdot\boxed{2x^2}\cdot\overset{3y}{\triangle}+\overset{3y}{\triangle}^2$.

$$\left(\square+\triangle\right)^2=\square^2+2\cdot\square\cdot\triangle+\triangle^2$$

Ако $\square=A$ и $\triangle=B$, тогаш $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ и $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$.

На сличен начин воочуваш: $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ и $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$.

Значи: б) $9x^4-12x^2y+4y^2$; в) $8x^3+12x^2y^2+6xy^4+y^6$; г) $x^6-6x^4y^2+12x^2y^4-8y^6$.

Запомни!

Добиените четири формули се познати како формули за скратено множење и тоа, како бином на квадрат и бином на куб.

2 Степенувај ги биномите со примена на формулите за скратено множење:

а) $\left(2a^3b^4+3ab^3\right)^2$;   б) $\left(3x^2y-2x^2y^3\right)^3$.

Согледај го решението:

а) Со примена на формулата $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ имаме:

$\left(2a^3b^4\right)^2+2\cdot 2a^3b^4\cdot 3ab^3+\left(3ab^3\right)^2$, а по степенувањето и множењето добиваме:

$4a^6b^8+12a^4b^7+9a^2b^6$.

Во практиката постапувај како во следниов пример:

$$\left(2a^5b^2-5ab^4\right)^2=\left(2a^5b^2\right)^2-2\cdot 2a^5b^2\cdot 5ab^4+\left(5ab^4\right)^2=$$
$$=4a^{10}b^4-20a^6b^6+25a^2b^8.$$

б) Применуваме $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$ и добиваме:

$\left(3x^2y\right)^3-3\cdot\left(3x^2y\right)^2\cdot 2x^2y^3+3\cdot\left(3x^2y\right)\cdot\left(2x^2y^3\right)^2-\left(2x^2y^3\right)^3$, или по степенувањето

$27x^6y^3-3\cdot 9x^4y^2\cdot 2x^2y^3+3\cdot 3x^2y\cdot 4x^4y^6-8x^6y^9$, па по множењето следува

$27x^6y^3-54x^6y^5+36x^6y^7-8x^6y^9$.

Попрактично е пишувањето како на следниов пример:

$$\left(2x^3y+3xy^2\right)^3=\left(2x^3y\right)^3+3\cdot\left(2x^3y\right)^2\cdot 3xy^2+3\cdot 2x^3y\cdot\left(3xy^2\right)^2+\left(3xy^2\right)^3=$$
$$=8x^9y^3+3\cdot 4x^6y^2\cdot 3xy^2+3\cdot 2x^3y\cdot 9x^2y^4+27x^3y^6=$$
$$=8x^9y^3+36x^7y^4+54x^5y^5+27x^3y^6.$$

3 Изврши степенување: а) $(2x-3y)^2$; б) $(-3x+5y)^2$; в) $\left(4x^7+7y^3\right)^2$; г) $\left(-3x^3-7y^2\right)^2$.

4 Степенувај: а) $(3x-2y)^3$; б) $(-3x+5y)^3$; в) $\left(-2x^2-3y^3\right)^3$; г) $\left(3x^2y+5xy^2\right)^3$.

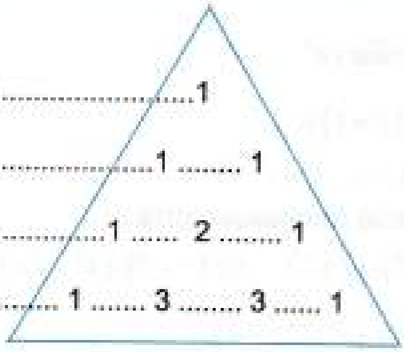
Корисно е да знаеш!

$(A+B)^0 \overset{def}{=} 1$, $A\neq 0$, $B\neq 0$ и запишуваме............................1

$(A+B)^1=1A+1B$ и запишуваме 1 1

$(A+B)^2=1A+2AB+1B$ и запишуваме ....1 ...... 2 1

$(A+B)^3=1A^3+3A^2B+3AB^2+1B^3$ .... 1 .... 3 .... 3 1



Воочи и зайомни!

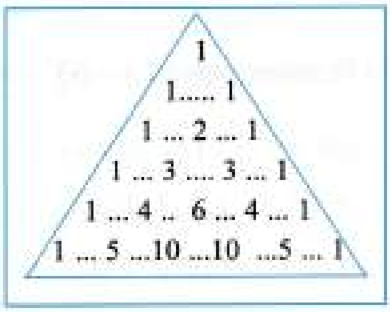
Степеновите показатели на степенот со основа A опаѓаат од показателот на биномот до нула.

Степеновите показатели на степенот со основа B растат од нула до показателот на биномот.

Во триаголникот (***Паскалов шриаголник***) составен од коефициентите на развиениот облик на биномот, секој нареден ред почнува со 1 и завршува со 1, а внатрешните коефициенти од редот претставуваат збир на два соседни коефициенти од претходниот ред.

5 Изврши го степенувањето: а) $(A+B)^5$; б) $(A-B)^3$.

Согледај го решението:



- а) Го формираме Паскаловиот триаголник за $n=5$.
- Степените со основа A се:

$A^5, A^4, A^3, A^2, A^1, A^0$; а степените сооснова B се:

$B^0, B^1, B^2, B^3, B^4, B^5$. Значи:

$$(A+B)^5 = 1A^5B^0 + 5A^4B^1 + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5A^1B^4 + 1A^0B^5.$$

Во практиката пишуваме:

$$(A+B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5.$$

- б) Користејќи го Паскаловиот триаголник за $n=3$, добиваме:

$(A+B)^3 = 1A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$, па ставајќи $-B$ наместо B имаме:

$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$.

Треба да знаеш!

Паскаловиот триаголник за биномните коефициенти се изучува во погорните класови, а сега го користиме за полесно помнење на формулите за скратено множење.

Пойсеши се!

- $(x-1)\cdot(x+1)=$

$= x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1.$

- Пресметај ги производите:

а) $(x-2)\cdot(x+2)$; б) $(x-2)\cdot(x^2+2x+4)$;

в) $(x+2)\cdot(x^2-2x+4)$.

Б **6** Пресметај:

а) $(2x-3y)\cdot(2x+3y)$;

б) $(2x-3y)\cdot(4x^2+6xy+9y^2)$;

в) $(x^2+5y)\cdot(x^4-5x^2y+25y^2)$.

■ а) По извршеното множење можеш да го запишеш $4x^2-9y^2=\boxed{2x}^2-\underset{3y}{\triangle}^2$.

Нека $A=\boxed{}$ и $B=\triangle$, тогаш $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$.

■ б) Решението го запишуваме $8x^3-27y^3=\boxed{2x}^3-\underset{3y}{\triangle}^3$, те.

$$\left(\boxed{2x}-\underset{3y}{\triangle}\right)\cdot\left(\boxed{2x}^2+\boxed{2x}\cdot\underset{3y}{\triangle}+\underset{3y}{\triangle}^2\right)=\boxed{2x}^3-\underset{3y}{\triangle}^3$$

Ако $\boxed{}=A$ и $\triangle=B$, тогаш $(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$.

■ в) Слично на претходното решение добиваме: $(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$.

Треба да знаеш!

Формулите што претходно ги добивме се, исто така, формули за скратено множење, познати како разлика од квадрати, разлика од кубови и збир од кубови.

■ Во практиката решавај како во следниот пример:

$$\left(2x^3y-3xy^3\right)\left(4x^6y^2+6x^4y^4+9x^2y^6\right)=\left(2x^3y-3xy^3\right)\left(\left(2x^3y\right)^2+2x^3y\cdot 3xy^3+\left(3xy^3\right)^2\right)=$$

$$=8x^9y^3-27x^3y^9.$$

7 Пресметај ги производите:

а) $\left(2x^2y^3-3xy^5\right)\left(3xy^5+2x^2y^3\right)$;

б) $\left(4xy-5x^2y^2\right)\left(16x^2y^2+20x^3y^3+25x^4y^4\right)$;

в) $\left(3x^3y^4+2xy\right)\left(9x^6y^8-6x^4y^5+4x^2y^2\right)$.

Корисно е да знаеш!

За секој природен број n важи: $(A-B)\left(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+...+B^{n-1}\right)=A^n-B^n$.

За секој непарен природен број n важи: $(A+B)\left(A^{n-1}-A^{n-2}B+A^{n-3}B^2-...+B^{n-1}\right)=A^n+B^n$.

Воочи и запомни!

За $n=5$, $(A-B)\left(A^4+A^3B+A^2B^2+AB^3+B^4\right)=A^5-B^5$.

За $n=4$, $(A-B)\left(A^3+A^2B+AB^2+B^3\right)=A^4-B^4$.

За $n=3$, $(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)=A^3-B^3$.

За $n=2$, $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$.

***Задачи*:**

① Степенувај ги биномите: а) $\left(3ab-\frac{2b^3}{3}\right)^2$; б) $\left(2x^2y+3xy^3\right)^3$; в) $\left(4x^2y-5x\right)^3$.

② Степенувај ги биномите со примена на Паскалов триаголник:

а) $(a+1)^4$; б) $\left(a^2-1\right)^5$.

③ Степенувај го триномот $(a+b+c)^2$. Упатство: замени $a+b=A$ и добиваш $(A+c)^2$.

④ Помножи ги полиномите со примена на формулите за скратено множење:

а) $\left(\frac{2}{3}xy-\frac{4}{5}x^2y^3\right)\left(\frac{2}{3}xy+\frac{4}{5}x^2y^3\right)$; б) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{4}{9}y^2\right)$;

в) $\left(\frac{2}{3}x^2y+\frac{3}{4}xy^2\right)\left(\frac{4}{9}x^4y^2-\frac{1}{2}x^3y^3+\frac{9}{16}x^2y^4\right)$.

⑤ Ослободи се од заградите и сведи ги сличните мономи:

а) $(2x-1)^2+(x-2)^2-(2x-1)(x-2)$; б) $\left(x^2-x+1\right)(x+1)+(x+1)^2+\left(x^2+x+1\right)(x-1)$;

в) $(a-1)^2-4(a+1)^2-6(a+1)(a-1)$; г) $(a-b+c)^2+(a+b)^2-(a+c)^2$.

5 ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМИ

Потсети се!

- Моном се дели со моном така што коефициентите се делат по правилото за делење на реални броеви, а главните вредности по правилото за делење на степени.
- Пресметај го количникот:

$$10x^4y^5:5x^2y^2.$$

- Во практиката пишувај на следниот начин:

$$\frac{7}{8}x^3y^4:\left(-\frac{7}{4}x^2y^2\right)=-\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{7}xy^2=-\frac{1}{2}xy^2.$$

A 1 Пресметај: $\left(-\frac{5}{6}x^5y^6\right):\left(\frac{5}{3}x^3y^3\right)$.

Согледај го решението:

- $-\frac{5}{6}:\frac{5}{3}=-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{2}$.
- $x^5y^6:\left(x^3y^3\right)=x^2y^3,\ x\neq0,\ y\neq0.$

Значи, количникот е $-\frac{1}{2}x^2y^3$.

2 Пресметај: а) $\frac{2}{3}x^3y^4:\left(\frac{4}{3}xy^4\right)$; б) $-2\frac{1}{2}a^4b^5:\left(5a^4b^3\right)$; в) $-3\frac{2}{3}a^6b^7:\left(-\frac{11}{13}a^4b^4\right)$.

Потсети се!

- $(A+B):C=A:C+B:C$, за $C\neq 0$.
  Десна дистрибутивност на делење спрема собирање.
- Пресметај:
  $$\left(2a^2b-8ab^2\right):(2ab);\ a\neq 0,\ b\neq 0.$$

Б **3** Подели го полиномот: $4x^2y^3-8x^3y^4+12x^3y^3$ со мономот $(-2xy)$. За $x\neq 0,\ y\neq 0$.

Согледај го решението:

- Треба да пресметаш:
  $$\left(4x^2y^3-8x^3y^4+12x^3y^3\right):(-2xy).$$

- Со примена на дистрибутивниот закон имаме: $4x^2y^3:(-2xy)-8x^3y^4:(-2xy)+12x^3y^3:(-2xy)$.
- Го извршуваме делењето на мономите и добиваме $-2xy^2+4x^2y^3-12x^2y^2$.
- Попрактично е директното решавање. На пример:
  $$\left(12x^4y^5-9x^5y^3-3x^2y^2\right):\left(-3x^2y^2\right)=-4x^2y^3+3x^3y+1.$$

Запомни!

Полином се дели со моном така што секој член на полиномот се дели со мономот, по правило за делење на мономи, а добиените количници се собираат.

4 Пресметај: а) $\left(20x^4y^5-30x^5y^6-10x^4y^4\right):\left(-10x^4y^4\right)$;

б) $\left(-2x^2y^3+3x^4y^4-5x^5y^5\right):\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right)$.

Потсети се!

- $$\begin{array}{l} 1584 : 12 = 132 \\ \underline{-12} \\ \;\;38 \\ \underline{-36} \\ \;\;\;24 \\ \underline{-24} \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

- Одреди го количникот $381 : 12$.
- Дали доби остаток?

В **5** Подели го полиномот $A(x)=6x^3-15x^2+10x-2$ со полиномот $B(x)=3x^2-6x+2$.

Согледај го решението:

- $6x^3$ го делиме со $3x^2$ и добиваме $2x$.
- Полиномот $B(x)$ го множиме со $2x$ и добиваме $6x^3-12x^2+4x$.
- Разликата $A(x)-(6x^3-12x^2+4x)$ изнесува $R_1(x)=-3x^2+6x-2$, а $R_1(x)$ е прв остаток.

- Го делиме $-3x^2$ со $3x^2$ и добиваме -1.
- Со -1 го множиме полиномот $B(x)$ и добиениот производ го одземаме од полиномот $R_1(x)$. Разликата е нула.
- Количник е полиномот $Q(x)=2x-1$, а остаток полиномот $R(x)=0$.

Значи, $\frac{A(x)}{B(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)}$, т.е. $A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$.

Во практиката пишуваме на следниот начин:

$$(6x^3-15x^2+10x-2):(3x^2-6x+2)=2x-1$$

$$\underline{\pm 6x^3 \mp 12x^2 \pm 4x}$$

$$-3x^2+6x-2$$

$$\underline{\mp 3x^2 \pm 6x \mp 2}$$

$$0$$

Вториот знак значи дека одземањето се сведува на соборање со спротивен полином на намалителот.

6 Пресметај $(10-7x^2+3x^3+9x):(5-3x+x^2)$.

Согледај го решението:

Најнапред полиномите ги подредуваме по степенот на променливата x, а потоа имаме:

$$(3x^3-7x^2+9x+10):(x^2-3x+5)=3x+2$$

$$\underline{\pm 3x^3 \mp 9x^2 \pm 15x}$$

$$2x^2-6x+10$$

$$\underline{-2x^2 \mp 6x \pm 10}$$

$$0$$

7 Полиномот $x^3+2x+10$ подели го со полиномот x^2-x+3.

Согледај го решението:

$$(x^3+2x+10):(x^2-x+3)=x+1$$

$$\underline{-x^3 \mp x^2 \pm 3x}$$

$$x^2-x+10$$

$$\underline{-x^2 \mp x \pm 3}$$

$$7$$

Остатокот е 7 и можеме да запишеме:

$$x^3+2x+10=(x^2-x+3)(x+1)+7.$$

8 Изврши го делењето:

а) $(2x^2+x-3):(2x+3)$; б) $(2x^3+x^2+x-1):(x^2+x+1)$;

в) $(3x^2+x-7):(x+2)$; г) $(2x^3+7x+4+5x^2):(1+x)$.

9 Изврши го делењето на полиномот $x^2-2xy+y^2$ со полиномот $x-y$.

Согладај го решението:

$$(x^2-2xy+y^2):(x-y)=x-y$$

$$\underline{-x^2 \mp xy}$$

$$-xy+y^2$$

$$\underline{\mp xy \pm y^2}$$

$$0$$

Со примена на формулата $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ можеш веднаш да заклучиш дека $(x^2-2xy+y^2):(x-y)=x-y$, бидејќи $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$.

10 Пресметај го количникот:

а) $(x^2+4x+4):(x+2)$; б) $(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3):(x+y)$;

в) $(x^2-y^2):(x-y)$; г) $(x^3+y^3):(x^2-xy+y^2)$.

Треба да знаеш!

Формулите за скратено множење се и формули за скратено делење, т.е.

$$(A^2-B^2):(A-B)=A+B; \qquad (A^2-2AB+B^2):(A-B)=A-B;$$

$$(A^3+B^3):(A+B)=A^2-AB+B^2; \qquad (A^3-B^3):(A^2+AB+B^2)=A-B;$$

$$(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3):(A+B)=A^2+2AB+B^2.$$

Задачи:

① Одреди го количникот на мономите, за $x\neq 0, y\neq 0$.

а) $2x^3y^4:(-5x^2y^3)$; б) $\frac{2}{3}x^4y:\left(-\frac{4}{9}x^3y\right)$; в) $-2\frac{1}{2}x^3y^3:\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)$.

② Пресметај го количникот на полиномот и мономот, ако $x\neq 0, y\neq 0$.

а) $(2x^3y^5-3x^4y^4-5x^2y^2):7x^2y^2$; б) $\left(\frac{2}{3}x^4y^4-\frac{1}{3}x^5y^5+\frac{4}{3}x^6y^6\right):\left(-\frac{1}{9}x^3y^3\right)$.

③ Изврши го делењето:

а) $(x^4+2x^2+5x-14):(x+2)$, за $x\neq -2$; б) $(2x^4-3x^3-4x+3x^2-5):(x-3)$, за $x\neq 3$;

в) $x^3:(x^2+1)$; г) $(x^3-1):(x-1)$, за $x\neq 1$.

6 РАЗЛОЖУВАЊЕ НА ПОЛИНОМИТЕ НА ПРОСТИ МНОЖИТЕЛИ СО ИЗВЛЕКУВАЊЕ НА ЗАЕДНИЧКИ МНОЖИТЕЛ ПРЕД ЗАГРАДА

Потсети се!

- Во равенството: $A(B+C+D)=AB+AC+AD$ е применет дистрибутивниот закон.
- Примени го дистрибутивниот закон на $3(x-2y+1)$.
- Важи, $AB+AC+AD=A(B+C+D)$
- На сличен начин примени дистрибутивен закон на полиномот $3x-6y+3$.

𝒜 1 Разложи го на прости множители полиномот $3x^3y-6x^2y^2-9x$.

Согледај ја постапката:

- Бројот 3 е најголем заеднички делител на коефициентите.
- Заеднички делител на главните вредности е x.
- Мономот $3x$ е најголем заеднички делител на членовите на полиномот.

■ Ако полиномот $3x^3y-6x^2y^2-9x$ го поделиме со мономот $3x$, добиваме x^2y-2xy^2-9x Според тоа, бараниот производ е $3x\left(x^2y-2xy^2-3\right)$.

■ Во практиката запишуваме: $3x^3y-6x^2y^2-9x=3x\left(x^2y-2xy^2-3\right)$.

2 Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $-5x^2y^2+10x^3y^3-15xy^4$; б) $3x^{n+1}-6x^{n+2}-12x^n$.

Потсети се!

■ Од $2(x+y)+a(x+y)$, со замената $x+y=A$, добиваме $2\cdot A+a\cdot A$.

■ $A-B=-(-A+B)=-(B-A)$;

$(A-B)^2=(-(B-A))^2=(B-A)^2$.

● Дали: а) $(A-B)^3=-(B-A)^3$?

б) $(A-B)^4=(B-A)^4$?

Б **3** Разложи го на прости множители полиномот $a(x-y)+b(y-x)$.

Согледај го решението:

■ Заменуваме $x-y=A, y-x=-A$ и добиваме $a\cdot A-b\cdot A$, т.е. $A(a-b)$.

■ Со повратна смена добиваме $(x-y)(a-b)$.

■ Во практиката запишуваме: $a(x-y)+b(y-x)=a(x-y)-b(x-y)=(x-y)(a-b)$.

4 Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $x(a+b)-y(a+b)$; б) $x(a+b-c)-y(-a-b+c)$; в) $a(x+y-1)-b(x-1+y)$.

Потсети се!

■ Со множење на полиномите $2+b$ и $x+y$ добиваме $2x+2y+bx+by$.

■ $2x+2y=2(x+y)$;

$bx+by=b(x+y)$.

● Собери ги претходните две равенства.

● Што добиваш?

В **5** Разложи го на прости множители полиномот $ax+ay+bx+by$.

Согледај го решението:

■ Ги групираме членовите што имаат заеднички множител и добиваме:

$ax+ay=a(x+y)$;

$bx+by=b(x+y)$.

■ Конечно, $a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$.

Истото решение може да се добие и со поинакво групирање.

■ Попрактично е запишувањето да се направи како што следува:

$$ax+ay-bx-by=a(x+y)-b(x+y)=(x+y)(a-b).$$

6 Разложи го полиномот $ax+bx+cx-ay-by-cy$.

Согледај го решението:

$$ax+bx+cx-ay-by-cy=a(x-y)+b(x-y)+c(x-y)=(x-y)(a+b+c).$$

Обиди се да направиш друго групирање на членовите. Помош: една група се сите членови со променлива x итн.

Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $ax-ay+by-bx$; б) $x^2-xy-2x+2y$; в) $ax^2-bx^2-bx+ax-a+b$.

Задачи:

Разложи ги на прости множители полиномите:

① а) $2x+2y$; б) $-15ax-20ay$; в) $4a^3-6a^2b$ г) $4x^3y^3-8x^2y^2$.

② а) $5x^2-20xy-5y^2$; б) $3ab+9ac-12ad$.

③ а) $a(x+y)+7(x+y)$; б) $7q(p-q)+2p(q-p)$; в) $2m(x-3)-5n(3-x)$;

г) $2(a-b)^2-(a+b)\cdot(a-b)$.

④ а) $x^2+xy+ax+ay$; б) $a^2-ab-3a+3b$; в) $5ax^2-10ax-bx+2b-x+2$;

г) $xyz+x^2y^2+3x^4y^5+3x^3y^4z-xy-z$.

7 РАЗЛОЖУВАЊЕ СО ПРИМЕНА НА ФОРМУЛИТЕ ЗА СКРАТЕНО МНОЖЕЊЕ

Потсети се!

■ $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ е формула за скратено множење.

● Дали важи равенството

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)\ ?$$

A 1 Разложи го на прости множители полиномот x^2-4.

Согледај го решението:

■ Во дадениот полином полни квадрати се x^2 и 2^2.

- Равенството $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ е формула за разложување. Ако означиме $A = x$, $B = 2$ и ја примениме формулата, добиваме: $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$.

- Вообичаено запишуваме: $16 - 9x^2 = 4^2 - (3x)^2 = (4 - 3x)(4 + 3x)$.

2 Запиши ги во вид на производ изразите: а) $x^2 - 25$; б) $4x^2 - 9y^2$; в) $-25x^2 + 1$.

3 Разложи го на множители изразот $(a - b)^2 - (c - d)^2$.

Согледај го решението:

- Со примена на формулата $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ и користејќи ја замената $A = a - b$, $B = c - d$, имаме:

$$(a-b)^2 - (c-d)^2 = \left[(a-b) - (c-d)\right]\left[(a-b) + (c-d)\right] =$$
$$= (a - b - c + d)(a - b + c - d).$$

4 Запиши ги во вид на производ изразите:

а) $(a+b)^2 - c^2$; б) $a^2 - (b-c)^2$; в) $4(x+y)^2 - y^2$; г) $16(x+y)^2 - 25(2x-y)^2$.

Потсети се!

- $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$ и $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$ се формули за скратено множење.

- Што претставуваат равенствата:

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ и

$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$?

Б **5** Запиши ги во вид на производ полиномите $x^3 - 8$ и $x^3 + 125$.

Согледај го решението.

- Равенствата

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ и

$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ се формули за разложување.

Бидејќи $x^3 - 8 = x^3 - 2^3$ и $x^3 + 125 = x^3 + 5^3$, со примена на соодветнте формули за разложување добиваме:

$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ и $x^3 + 125 = x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$.

6 Разложи ги полиномите: а) $x^3 - 1$; б) $8x^3 - y^3$; в) $x^3 + 8y^3$; г) $64x^3 + 125y^3$.

7 Запиши го како производ од прости множители полиномот $56x^3-7y^3$.

Согледај го решението:

- Членовите на полиномот $56x^3$, $7y^3$ не се полни кубови, но со извлекување на заеднички множител пред заграда добиваме

$$7\left(8x^3-y^3\right).$$

- Мономите во заградата се полни кубови, па со примена на формулата за разлика на кубови добиваме:

$$56x^3-7y^3=7\left(8x^3-y^3\right)=7\left[(2x)^3-y^3\right]=7(2x-y)\left(4x^2+2xy+y^2\right).$$

8 Разложи го на производ од прости множители полиномот $(a+b)x^2-ay^2-by^2$.

Согледај ја постапката:

- Со групирање на членовите и извлекување на заеднички множител пред заграда имаме:

$$(a+b)x^2-y^2(a+b).$$

- Со повторно извлекување на заеднички множител пред заграда добиваме:

$$(a+b)\left(x^2-y^2\right).$$

- Изразот во втората заграда претставува разлика од квадрати, па конечно добиваме:

$$\begin{aligned}(a+b)x^2-ay^2-by^2&=(a+b)x^2-(a+b)y^2=\\&=(a+b)\left(x^2-y^2\right)=\\&=(a+b)(x-y)(x+y).\end{aligned}$$

9 Трансформирај ги во производи изразите:

а) ax^2-ay^2; б) ax^3+a; в) $(a-b)x^3+(a-b)y^3$; г) $7x^4-7xy^3$.

Задачи:

Трансформирај ги во производ од прости множители следните полиноми:

① а) x^2y^2-16; б) $(a-b)^2-1$; в) $x^2-(x-y)^2$.

② а) $8-a^3b^3$; б) $a^3b^3c^3+1$.

③ а) $ax^2-bx^2-ay^2+by^2$; б) $ax^3+bx^3-ay^3-by^3$.

8 РАЗЛОЖУВАЊЕ СО ПРИМЕНА НА ФОРМУЛАТА ЗА БИНОМ НА КВАДРАТ

Потсети се!

- Равенствата $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ и $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ се познати како формули за скратено множење.

- Што претставуваат равенствата $A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$ и $A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$?

А **1** Разложи го на прости множители полиномот x^2+4x+4.

Согледај го решението:

- Равенството $A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$ е формула за разложување.
- Означуваме $A=x, B=2$ и добиваме:

$$x^2+4x+4=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2=(x+2)^2.$$

Значи, $x^2+4x+4=(x+2)^2$.

Воочи дека:

- $x^2-4x+4=(x-2)^2$;
- $x^2-8x+4\neq(x-2)^2$, бидејќи $-8x\neq-2\cdot x\cdot 2$;
- $-x^2+4x-4=-(x^2-4x+4)=-(x-2)^2$.

2 Напиши ги во вид на бином на квадрат полиномите:

а) x^2-6x+9; б) $4x^2+20xy+25y^2$; в) $12xy-4x^2-9y^2$.

3 Разложи го на множители полиномот $ax^2-2axy+ay^2$.

Согледај го решението:

- Го извлекуваме заедничкиот множител пред заграда и добиваме $a(x^2-2xy+y^2)$.
- Изразот во заградата е бином на квадрат, т.е. $(x-y)^2$.

Значи, $ax^2-2axy+ay^2=a(x^2-2xy+y^2)=a(x-y)^2$.

4 Изврши разложување на полиномите:

а) $2x^2+4xy+2y^2$; б) $7x^3y+28x^2y^2+28xy^3$; в) $9x^4y^2-18x^3y^3+9x^2y^4$.

5 Трансформирај го во вид на производ полиномот $c^2-a^2-2ab-b^2$.

Согледај го трансформирањето:

- По групирањето добиваме $c^2-(a^2+2ab+b^2)$.
- Изразот во заградата е бином на квадрат и запишуваме $c^2-(a+b)^2$.
- Применуваме формула за разлика од квадрати и добиваме $\left[c-(a+b)\right]\left[c+(a+b)\right]$, т.е.

$$(c-a-b)(c+a+b).$$

Попрактично е запишувањето како во следниов пример:

$$\begin{aligned} y^2-4x^2+4x-1 &= y^2-\left(4x^2-4x+1\right)= \\ &= y^2-(2x-1)^2= \\ &= \left[y-(2x-1)\right]\left[y+(2x-1)\right]= \\ &= (y-2x+1)(y+2x-1). \end{aligned}$$

6 Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $x^2-2xy+y^2-9$; б) $a^2b^2+c^2-2abc-25$; в) $x^2-1-2y-y^2$.

Задачи:

Разложи ги полиномите.

① а) $4x^2+4xy+y^2$; б) $25x^2-10xy+y^2$; в) $20xy-25x^2-4y^2$.

② а) $7a^2+14ab+7b^2$; б) $8x^3y-8x^2y^2+2xy^3$; в) $50a^3+20a^2+2a$.

③ а) $x^2+y^2-z^2+2xy$; б) $4-p^2+2pq-q^2$; в) $16m^2-9x^2+12xy-4y^2$.

9

НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ. НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ

Потсети се!

Делители на 12 се: 1, 2, 3, 4, 6 и 12, а делители на 18 се 1, 2, 3, 6, 9 и 18. Нивни заеднички делители се 1, 2, 3 и 6.

Очигледно, најголем заеднички делител (НЗД) за 12 и 18 е бројот 6.

- Одреди НЗД за мономите

$$6x^3y^2 \text{ и } 9x^5y^3.$$

А 1 Одреди НЗД за полиномите

$$ab(a-b) \text{ и } b(a-b)^2.$$

Согледај го решението:

Делители на $ab(a-b)$ се:

$1, a, b, a-b, ab, a(a-b), b(a-b)$ и $ab(a-b)$.

Делители на $b(a-b)^2$ се: $1, b, a-b,$ $(a-b)^2$, $b(a-b)$, $b(a-b)^2$.

Заеднички делители на двата полиноми се $1, b, a-b, b(a-b)$.

НЗД $\left[ab(a-b), b(a-b)\right]=b(a-b)$.

Запомни!

НЗД на два или повеќе полиноми е полиномот што е производ од сите заеднички делители на тие полиноми, притоа секој од нив се зема со најмал показател што се јавува во разложените полиноми. Ако НЗД за два или повеќе полиноми е 1, тогаш велиме дека полиномите се заемно прости.

2 Определи НЗД за полиномите $2a^2b-4ab^2$; a^2-4b^2 и $a^2-4ab+4b^2$.

Согледај го решението:

- Дадените полиноми ги разложуваме на прости множители и имаме:

$$2ab(a-2b);\ (a-2b)(a+2b);\ (a-2b)^2.$$

- Воочуваме дека НЗД е $a-2b$.

3 Најди НЗД за полиномите: а) $12x^3y^4$; $18x^5y^6z$; $30x^2y^5$. б) x^2-y^2; $x^2-2xy+y^2$.

в) $x^2y(x+2y)$; $x^3y^3(x+2y)$; $x^5y^2(x+2y)$. г) $2x^3-2y^3$; x^3y-xy^3; $x^3-2x^2y+xy^2$.

Потсети се!

- Бројот 36 е делив со секој од броевите: 1, 4, 6, 9, 12, 18 и 36. Велиме дека бројот 36 е содржател на тие броеви.
- Најди неколку содржатели на броевите 4, 6, 9 и 12.

Б **4** Одреди го множеството на заедничките содржатели на полиномите $6x$ и $4(x+y)$.

Согледај го решението:

- Еве неколку елементи на бараното множество: $12x(x+y)$; $12x^2(x+y)^3$; $60x^{100}(x+y)^{2002}$;...

5 Одреди го НЗС на полиномите: $x^2-y^2; x^3-y^3$; $x^2-2xy+y^2$.

Согледај ја постапката:

- Дадените полиноми ги разложуваме на прости множители и добиваме:

$(x-y)(x+y);(x-y)(x^2+xy+y^2);(x-y)^2$. Полиномот $(x+y)(x^2+xy+y^2)(x-y)^2$ е најмал заеднички содржател на дадените полиноми.

Запомни!

НЗС е производ од сите прости множители, притоа секој од нив се зема со најголемиот показател што се јавува во разложените полиноми.

6 Одреди НЗС на полиномите: а) $12x^3y$, $18x^4y^3$; $30x^5y^2$. б) a^2-4; a^2-4a+4.

в) x^2-9; x^2+6x+9; x^3+27. г) $3x^3-12x^2+12x$; $x^2y+4xy+4y$; $3x^2y-12y$.

Задачи:

① Определи НЗД на полиномите:

а) $a^5x^3y^2$; $28a^4x^3y^5$. б) $9a^2-36b^2$; $18a^2-72ab+72b^2$. в) a^2-1; a^2+2a+1; a^3+a^2+a+1.

② Определи НЗС на полиномите:

а) $4a^3x^3y^2$; $6a^4x^5y^7$. б) $x-2y$; $x+2y$; x^2-4y^2. в) $3a-6b$; $a^2-4ab+4b^2$; a^3-8b^3.

③ Определи НЗД и НЗС на полиномите:

а) a^2-5a; a^3-25a; $a^2-10a+25$. б) $3a-15$; $a^2-25;5-a$.

10 АЛГЕБАРСКИ ДРОПКИ. ПРОШИРУВАЊЕ И СКРАТУВАЊЕ

Потсети се!

- $3:4=\frac{3}{4}$ е дропка. Исто така и изразот $(x+2):(x-3)=\frac{x+2}{x-3}$ е дропка.
- Дали може делителот (именителот) да биде нула?

Нека M и N се полиноми.

Изразот $\frac{M}{N}$ $(N\neq 0)$ се вика алгебарска дропка.

M е броител, а N е именител на дропката.

1 Кои од дадените алгебарски изрази се алгебарски дропки:

$$\frac{x}{y},\ y\neq 0;\ \frac{3}{5};\frac{a+b}{a-2},(a\neq 2);\ \frac{\sqrt{7}}{7};\ \frac{a+2b}{b},(b\neq 0)?$$

2 Одреди ги допуштените вредности на променливата x во дропките $\frac{2x}{x-1}$ и $\frac{2x^2}{x^2-x}$.

За кои вредности на x дропките се идентично еднакви?

Согледај го решението:

За првата дропка допуштени вредности се реалните броеви за коишто $x-1\neq 0$, т.е. $x\in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, а за втората дропка се реалните броеви, за коишто $x^2-x\neq 0$, т.е. $x\in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Дропките $\frac{2x}{x-1}$ и $\frac{2x^2}{x^2-x}$ се идентично еднакви ако x се менува во множеството $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Треба да знаеш:

Дропката е дефинирана кога променливите примаат само допуштени вредност (именителот да е различен од нула).

Алгебарските дропки со променливи стануваат обични дропки со соодветна замена на променливите со нивните допуштени вредности и затоа тие имаат исти својства и може да се извршуваат операциите на ист начин како кај обичните дропки.

За идентично еднаквите дропки $\frac{M}{N}$ и $\frac{P}{Q}$ пишуваме $\frac{M}{N}=\frac{P}{Q}$ или

$$M\cdot Q=N\cdot P \text{ за } N\neq 0, Q\neq 0.$$

3 Одреди ги допуштените вредности на променливите во дропките:

а) $\frac{3x}{3-x}$; б) $\frac{3x}{2x+4}$; в) $\frac{3-x}{x(x-1)}$; г) $\frac{x^3+1}{(x-1)(x-3)(x-5)}$.

Потсети се!

- Дропката $\frac{2}{3}$ прошири ја со 2. Добиваш $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}=\frac{4}{6}$.
- Дропката $\frac{x}{3}$ прошири ја со $x,(x\neq0)$.

Б **4** Дропката $\frac{x-1}{x-5}(x\neq5)$ прошири ја со полиномот $x+5$.

Согледај го решението:

- Броителот и именителот ги множиме со $x+5$, а запишуваме:

$$\frac{x-1}{x-5}=\frac{(x-1)\cdot(x+5)}{(x-5)\cdot(x+5)}=\frac{x^2+4x-5}{x^2-25}.$$

Запомни!

Равенството $\frac{M}{N}=\frac{M\cdot P}{N\cdot P}(N\neq0,P\neq0)$ означува дека дропката $\frac{M}{N}$ сме ја прошириле со полиномот P.

5 Сведи ги на ист именител дропките $\frac{y}{x^2-x},\frac{x}{xy+y},\frac{2}{x^2-1}$.

Согледај ја постапката:

- Ги разложуваме на прости множители именителите на дадените дропки и имаме:

$$x^2-x=x(x-1),$$
$$xy+y=y(x+1),$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$

- Одредуваме НЗС за именителите и добиваме $xy(x-1)(x+1)$.
- Одредуваме проширувач за секоја дропка.
- Проширувач на дропката е множителот од НЗС што не се содржи во именителот на таа дропка.

- За проширувањето на дропките запишуваме:

$$\frac{y}{x^2-x}=\frac{y}{x(x-1)}\cdot\frac{y(x+1)}{y(x+1)}=\frac{y^2(x+1)}{xy(x-1)(x+1)};$$

$$\frac{x}{xy+y}=\frac{x}{y(x+1)}\cdot\frac{x(x-1)}{x(x-1)}=\frac{x^2(x-1)}{xy(x-1)(x+1)};$$

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{xy}{xy}=\frac{2xy}{xy(x-1)(x+1)}.$$

6 Сведи ги на еднаков именител дропките: а) $\frac{a}{4y^2},\frac{b}{3xy^2}$; б) $\frac{m}{a^2-ab},\frac{n}{ab-b^2}$.

Потсети се!

- Дропката $\frac{15}{25}$ скратена со 5 изнесува

$$\frac{15:5}{25:5}=\frac{3}{5}.$$

- Скрати ја со 2 дропката $\frac{2}{4x}$.

ℬ **7** Скрати ја дропката

$$\frac{a^3-4a^2}{a^2-16}(a\neq 4, a\neq -4).$$

Согледај го решението:

- Именителот и броителот ги разложуваме на прости множители и имаме:

$$a^3-4a^2=a^2(a-4) \text{ и}$$

$$a^2-16=(a-4)(a+4).$$

- Броителот и именителот ги делиме со полиномот $a-4$ и добиваме $\frac{a^2}{a+4}$.
- Постапката на скратување ја запишуваме на следниов начин:

$$\frac{a^3-4a^2}{a^2-16}=\frac{a^2(a-4)}{(a-4)(a+4)}=\frac{a^2}{a+4}.$$

Треба да знаеш!

Да се скрати дропката $\frac{M}{N}(N\neq 0)$ со полиномот $P\neq 0$, значи броителот и именителот да се поделат со полиномот $P=$ НЗД (M,N).

Воочи!

Во скратувањето $\frac{a^{20}b^{16}c^8}{a^7b^{17}c^{12}}=\frac{a^{13}}{bc^4}, (a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0)$ на погоден начин е применето делењето на степени со еднакви основи.

8 Скрати ги дропките: а) $\frac{(x-1)^8(y+2)^{10}(z-4)^{12}}{(x-1)^5(y+2)^{11}(z-4)^{20}}, (x\neq 1, y\neq -2, z\neq 4)$; б) $\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}, (x\neq 2)$.

Задачи:

① Одреди ги допуштените вредности на променливите во следните алгебарски дропки:

а) $\frac{3x-5}{x+1}$; б) $\frac{x+2}{(x-1)(x+4)}$; в) $\frac{x-5}{x^2y-9y}$; г) $\frac{2x+y}{x^4-xy^3}$.

② Сведи ги на заеднички именител дропките:

а) $\frac{a}{a^2-9b^2}, \frac{1}{a+3b}$; б) $\frac{1}{x^2-x}, \frac{2}{1-x^2}, \frac{1}{x^2+x}$.

③ Скрати ги дропките:

а) $\frac{1-a^2}{a-1}$; б) $\frac{x^2-8x+16}{xy-4y}$; в) $\frac{x^3-x}{x^3+2x^2+x}$.

11 ОПЕРАЦИИ СО АЛГЕБАРСКИ ДРОПКИ

Потсети се!

- $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$.
- Пресметај: $\frac{3}{a}-\frac{x}{a}+\frac{5}{a}$ за $a\neq 0$.
- Како се собираат дропките со различни именители?

А

1 Најди го збирот на дропките:

$$\frac{2x-3}{x+2}+\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+5}{x+2},\ (x\neq -2).$$

Согледај го решението:

$$\frac{2x-3}{x+2}+\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+5}{x+2}=\frac{2x-3+x+1-x-5}{x+2}=\frac{2x-7}{x+2}.$$

---

2 Најди го збирот на дропките $\frac{a}{ab-b^2}+\frac{b}{a^2-ab}-\frac{a+b}{ab}$, $(a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\neq b)$.

Согледај го решението:

- Дропките се со различни именители.
- Со разложување на именителите имаме: $ab-b^2=b(a-b); a^2-ab=a(a-b); ab$.
- НЗС за именителите е $ab(a-b)$.
- Дропките ги проширувме и имаме: $\frac{a^2}{ab(a-b)}+\frac{b^2}{ab(a-b)}-\frac{(a+b)(a-b)}{ab(a-b)}$.
- Применуваме правило за собирање на дропки со еднакви именители и добиваме

$\frac{a^2+b^2-a^2+b^2}{ab(a-b)}=\frac{2b^2}{ab(a-b)}$. По скратувањето добиваме $\frac{2b}{a(a-b)}$.

- Попрактично е следново запишување:

$$\frac{a}{ab-b^2}+\frac{b}{a^2-ab}-\frac{a+b}{ab}=\frac{a}{b(a-b)}+\frac{b}{a(a-b)}-\frac{a+b}{ab}=$$

$$=\frac{a\cdot a+b\cdot b-(a+b)(a-b)}{ab(a-b)}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-a^2+b^2}{ab(a-b)}=$$

$$=\frac{2b^2}{ab(a-b)}=\frac{2b}{a(a-b)}.$$

Запомни!

Со равенството $\frac{M}{N}+\frac{P}{N}=\frac{M+P}{N},(N\neq 0)$ се искажува правилото за собирање на дропки со еднакви именители.

3 Одреди го збирот на дропките:

а) $\frac{2m-3p}{m^2p}-\frac{4m-5p}{mp^2}$; б) $\frac{a}{a^2-9b^2}-\frac{1}{a+3b}$; в) $\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{x^2}{xy-y^2}+\frac{y^2}{x^2-xy}$.

Потсети се!

- $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot5}{3\cdot7}=\frac{10}{21}$
- Пресметај го производот:

а) $\frac{2}{3}\cdot5$; б) $2\cdot\frac{3}{3}$; в) $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}$.

Б **4** Помножи ги дропките:

$\frac{x^3+2x^2-x-2}{a+1},\frac{a^2+a}{x^3-2x^2-x+2},\frac{x-2}{x+2}$, за

$a\neq-1, x\neq-2, x\neq2, x\neq1, \neq-1.$

Согледај го решението.

- Броителите и именителите на дадените дропки ги разложуваме на прости множители:

$$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)=(x+2)(x-1)(x+1);$$

$$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x-2)(x^2-1)=(x-2)(x-1)(x+1);$$

$$a^2+a=a(a+1).$$

- За производот имаме: $\frac{(x+2)(x-1)(x+1)}{a+1}\cdot\frac{a(a+1)}{(x-2)(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x-2}{x+2}=a.$

- Попрактично е решението да го запишуваме на следниов начин:

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{a+1}\cdot\frac{a^2+a}{x^3-2x^2-x+2}\cdot\frac{x-2}{x+2}=\frac{x^2(x+2)-(x+2)}{a+1}\cdot\frac{a(a+1)}{x^2(x-2)-(x-2)}\cdot\frac{x-2}{x+2}=$$

$$=\frac{(x+2)(x-1)(x+1)}{a+1}\cdot\frac{a(a+1)}{(x-2)(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x-2}{x+2}=a.$$

Запомни!

Производот на две или повеќе дропки е дропка чиј броител е еднаков на производот од броителите, а именител е еднаков на производот од именителите на дропките. Дропките множители, пред да ги помножиш, можат да се скратуваат, така што се кратат еднаквите множители во броителот и именителот.

5 Пресметај го производот:

а) $\frac{1}{a-1}\cdot\frac{a^2-a}{a+1},(a\neq1,a\neq-1)$; б) $\frac{a^2-ab}{a^2+ab}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{ab},(a\neq0,b\neq0,a\neq-b)$.

Потсети се!

- $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}$.

Пресметај го количникот:

а) $\frac{3}{5}:\frac{9}{25}$; б) $\frac{3}{5}:7$; в) $3:\frac{5}{7}$.

В **6** Подели ја дропката $\frac{x^2-25}{x^2-3x}$ со дропката $\frac{x^2+5x}{x^2-9}$ за $x\neq 0, x\neq 3,$ $x\neq -3, x\neq -5$.

Согледај го решението:

- Ги разложуваме броителите и именителите на дадените дропки и имаме:

$$x^2-25=(x-5)(x+5);\quad x^2-9=(x-3)(x+3);\quad x^2-3x=x(x-3);\quad x^2+5x=x(x+5).$$

- Дропката деленик се множи со реципрочната вредност на дропката делител, т.е.

$\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)}$, од каде по скратувањето добиваме $\frac{(x-5)(x+3)}{x^2}$.

- Во практиката пишуваме: $\frac{x^2-25}{x^2-3x}:\frac{x^2+5x}{x^2-9}=\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+5)}=\frac{(x-5)(x+3)}{x^2}$.

7 Пресметај го количникот:

а) $\frac{4x^2y^2}{15b^3c}:\frac{8x^3y^3}{5b^2c^2}$; б) $\frac{b^2-y^2}{3a^3-3y^3}:\frac{b-y}{a^2+ay+y^2}$.

Запомни!

Равенствата: $\frac{M}{N}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{M\cdot P}{N\cdot Q}$ и $\frac{M}{N}:\frac{P}{Q}=\frac{M}{N}\cdot\frac{Q}{P}$, $(N\neq 0,\ Q\neq 0,\ P\neq 0)$,

се правила за множење и делење на алгебарски дропки.

Потсети се!

- $$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}.$$

Претстави ги во обични дропки:

а) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{8}}$; б) $\frac{\frac{3}{7}}{5}$; в) $\frac{3}{\frac{5}{8}}$.

Т **8** Трансформирај ја двојната дропка $\frac{1+a+\frac{1}{1-a}}{1+\frac{1}{1-a^2}}$, за $a\neq\pm 1$.

Согледај го решението:

Прво ги трансформираме броителот и именителот и имаме:

$$1+a+\frac{1}{1-a}=\frac{1-a^2+1}{1-a}=\frac{2-a^2}{1-a} \text{ и } 1+\frac{1}{1-a^2}=\frac{1-a^2+1}{1-a^2}=\frac{2-a^2}{(1-a)(1+a)}.$$

Следува $\dfrac{\dfrac{2-a^2}{1-a}}{\dfrac{2-a^2}{(1-a)(1+a)}}=\dfrac{(2-a^2)(1-a)(1+a)}{(2-a^2)(1-a)}=1+a.$

Запишуваме: $\dfrac{1+a+\dfrac{1}{1-a}}{1+\dfrac{1}{1-a^2}}=\dfrac{\dfrac{1-a^2+1}{1-a}}{\dfrac{1-a^2+1}{(1-a)(1+a)}}=\dfrac{\dfrac{2-a^2}{1-a}}{\dfrac{2-a^2}{(1-a)(1+a)}}=\dfrac{(2-a^2)(1-a)(1+a)}{(2-a^2)(1-a)}=1+a, 2-a^2\neq 0.$

Треба да знаеш!

Двојна дропка се сведува во обична така што производот на надворешните членови се запишува за броител, а производот на внатрешните членови за именител. Внатрешните множители што се еднакви со надворешните множители може да се кратат.

9 Изврши ги назначените операции: $\left(\dfrac{3x}{x+y}+\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right):\dfrac{4xy}{x^2-y^2}.$

Согледај го решението:

Според познати постапки ја пресметуваме вредноста на изразот во заградата и добиваме: $\dfrac{4x^2-4xy}{(x-y)(x+y)}$. Конечно добиваме $\dfrac{4x^2-4xy}{(x-y)(x+y)}\cdot\dfrac{(x-y)(x+y)}{4xy}=\dfrac{x-y}{y}$, за $y\neq 0, x\neq y, x\neq -y.$

Пишуваме директно: $\left(\dfrac{3x}{x+y}+\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right):\dfrac{4xy}{x^2-y^2}=$

$$=\frac{3x(x-y)+x(x+y)-2xy}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{4xy}=\frac{3x^2-3xy+x^2+xy-2xy}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{4xy}=$$

$$=\frac{4x(x-y)}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{4xy}=\frac{x-y}{y}.$$

10 Упрости ги изразите (изврши ги назначените операции):

а) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}}$; б) $\left(\dfrac{2x}{x^2+2xy}+\dfrac{4y}{x^2-4y^2}-\dfrac{y}{xy-2y^2}\right):\left(1-\dfrac{x^2-4y^2-2}{x^2-4y^2}\right)$

Задачи:

① Пресметај: а) $\frac{2x}{x-1}-\frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}$; б) $\frac{1}{x^2+10x+25}+\frac{1}{x^2-10x+25}+\frac{2}{x^2-25}$.

② Помножи ги, односно подели ги дропките:

а) $\frac{3a^3}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{a}$; б) $\frac{3x-3y}{2x+2y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$; в) $\frac{a^2-9x^2}{a^2-ax}:\frac{a^2-3ax}{a-x}$; г) $\frac{x^4+x^3+x+1}{x^3-x^2+x-1}:\frac{x^3+1}{2x^2+2}$.

③ Изврши ги назначените операции:

а) $\dfrac{1+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\dfrac{(a+b)^2-c^2}{4a^2b^2}}$; б) $\left(\frac{3}{a-1}-\frac{3a^2+3a+3}{a^2-1}:\frac{a^4-a}{a^2+1}\right)\cdot\frac{a-a^2}{3}$.

Тематска контролна вежба

① Напиши го изразот како степен со основа a, а потоа пресметај ја неговата вредност за $a=-2$. а) $(a\cdot a^3)^4:a^{15}\cdot a^2$; б) $\frac{\left((a^2\cdot a^4)^5\right)^2}{(a^{20}\cdot a^9)^2}$.

② Дадени се полиномите $P(x)=x^2-2x+1$, $Q(x)=x^2-3x+2$. Одреди ги полиномите:

а) $P(x)+Q(x)$; б) $P(x)-Q(x)$; в) $P(x)\cdot Q(x)$;

③ Сведи го во нормален вид полиномот: $(x-1)^2-(x-1)(x+1)-(x+1)^2$.

④ Пресметај го количникот $(6x^3+5x^2-8x+2):(2x-1)$

⑤ Разложи ги на прости множители полиномите:

а) $x^3+3x^2-4x-12$; б) $4a^2x-4a^2x^2-a^2$; в) $2x^3-16$.

⑥ Одреди НЗД и НЗС за полиномите:

а) $2x^2y^4$; $6xy^2$; $8x^4y$; б) x^2-4; x^2-4x-4; x^3-8.

⑦ Скрати ги дропките: а) $\frac{x^2-8x+16}{xy-4y}$; б) $\frac{8+x^3}{8x-2x^3}$.

⑧ Упрости го изразот $\frac{ax+a}{x^2-x+1}:\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{x^3+1}\right)$.

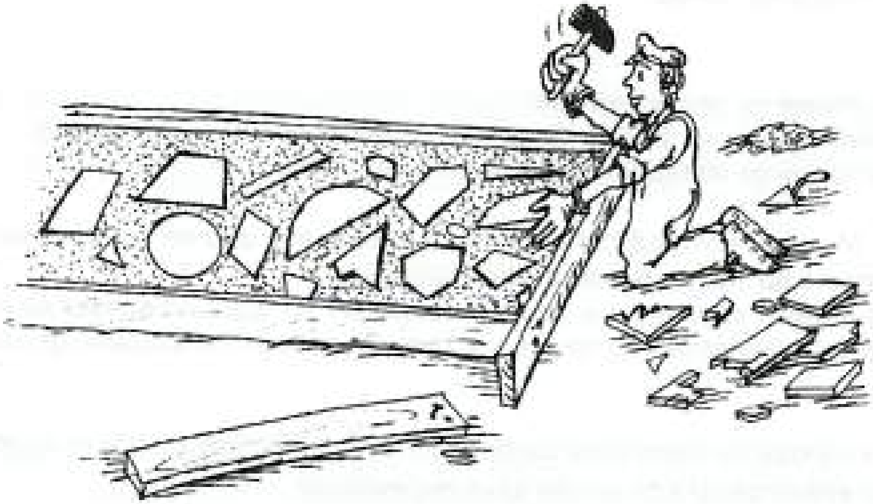
ТЕМА 4

ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО РАМНИНА

> *Во геометријата нема царски пат.*
>
> Евклид 300 г.п.н.е.

Во оваа тема ќе учиш за:

- основни и изведени поими;
- основни и изведени тврдења, аксиоми и теореми;
- основни геометриски фигури и нивниот заемен однос;
- вектори, колинеарни и еднакви вектори;
- операции со вектори, собирање, одземање и множење на вектор со број;
- разложување на вектор на компоненти;
- примена на вектори.



1 ОСНОВНИ И ИЗВЕДЕНИ ПОИМИ. ПОЛУПРАВА. ОТСЕЧКА. ПОЛУРАМНИНА

А *Што е геометрија?*

Предметите што не опкружуваат можеме да ги споредуваме на повеќе начини: по големинаата, според меѓусебната положба, според формата, составот, боја, намената итн.

Со испитување на разни својства на предметите се занимаваат разни науки: геометрија, физика, хемија и др.

Формата, големината и положбата на предметите, без оглед на останатите нивни својства, се геометриски својства. Според тоа:

Геометријата* е наука која ги изучува геометриските својства на предметите.

Во зависност од тоа кои геометриски својства се изучуваат, геометријата се дели на разни области: планиметрија, стереометрија, тригонометрија итн.

Планиметрија е дел од елементарната геометрија која ги изучува својствата на рамнинските геометриски фигури.

*Геометрија на грчки јазик значи мерење на земјата. Името го добила од старите Грци, кои со мерење на земјата во долината на реката Нил почнале да собираат и да користат геометриски податоци, врз основа на кои во VI век п.н.е. почнале да ја изградуваат геометријата како наука.

Б *Основни и изведени поими*

Во досегашното школување си изучувал многу поими од геометријата, на пример: точка, права, триаголник, квадрат, кружница, круг, коцка, топка итн.

Си воочил дека некои поими се дефинираат и се објаснуваат со помош на некои поими кои веќе биле изучувани. Исто така, си воочил дека некои поими не се дефинираат, туку се наведуваат нивните својства кои се потврдени низ вековите, па врз основа на нив се изведуваат останатите поими.

Запомни!

Основните поими не се дефинираат.
Основни поими во геометријата се: точка, права, рамнина и растојание.
Сите други поими се изведени или дефинирани поими.

На пример: Множеството од сите точки во рамнината што се на еднакво растојание од една избрана точка во таа рамнина се вика кружница.

Воочи дека поимот кружница е наполно објаснет со една реченица во која логички се поврзани поимите: множество од точки, растојание, рамнина и избрана-фиксна точка.

Запомни!

Реченицата со која се осмислува еден поим и се согледува неговата содржина преку други веќе познати поими се вика ***дефиниција***.

Познато ти е дека во алгебрата основниот поим, т.е. поимот што не се дефинира е множество, чии елементи се објекти што имаат некое заедничко својство. На пример: множество од реални броеви, множество од ученици во твоето училиште, множество од книгите во твојот ранец итн.

Во геометријата ќе го разгледуваме бесконечното множество од точки, што ќе го означиме со $\mathbb{P}$, а неговите елементи, т.е. точките со $A, B, C, \ldots$

Различните букви A и B, вообичаено ќе ни означуваат две различни точки.

Ако буквите A и B се ознаки за една иста точка, ќе пишуваме $A = B$.

Запомни!

Секое подмножество од $\mathbb{P}$ се вика ***геометриска фигура*** или само ***фигура***.

Самото множество $\mathbb{P}$, како и секое едноелементно подмножество $\{A\}$ од $\mathbb{P}$ се фигури.

Фигурата $\mathbb{P}$ се вика простор.

Правата и ***рамнината,*** се исто така, подмножества од просторот $\mathbb{P}$, т.е. тие се геометриски фигури. Правите ги означуваме со малите букви $a, b, c, \ldots$, а рамнините со буквите од грчката азбука $\pi, \alpha, \beta, \Omega, \ldots$ или со три неколинеарни точки ABC.

В

Потсети се!

- На цртежот е дадена права a и точка O што лежи на таа права.
- На колку делови правата a е поделена со точката O?

Запомни!

Секое множество на точки од правата a што е од иста страна на дадената точка O, заедно со таа точка, образува фигура која се вика ***полуправа*** со почеток во точката O.
Едната полуправа на цртежот е OA, а другата OB.

Г

Потсети се!

- Која од точките P и Q лежи меѓу точките M и N?

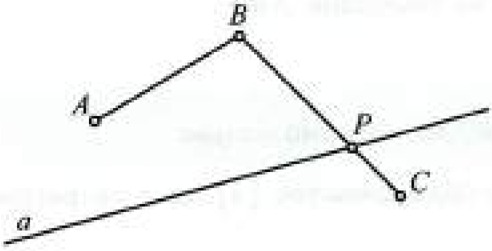
Запомни!

Фигурата што ги содржи точките M и N и сите точки што лежат меѓу нив се вика *отсечка*.

На цртежот е определена отсечката MN. Точките M и N се викаат крајни точки на отсечката, а растојанието од точката M до точката N се вика должина на отсечката MN и се означува со $\overline{MN}$.

2

Воочи!

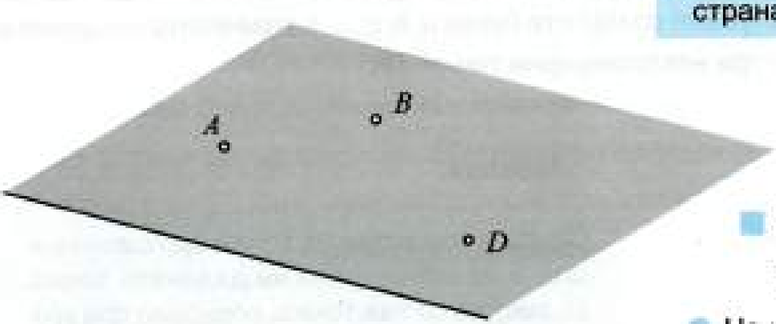


■ Отсечката BC и правата a имаат заедничка точка P.

● Кои точки лежат од иста страна на правата a?

Запомни!

Фигурата образувана од една права и сите точки од рамнината што се од иста страна на правата се вика ***полурамнина***.



■ Правата a се вика ***граница*** или ***раб*** на полурамнината.

● На колку полурамнини една права ја дели рамнината?

Воочи!

Поимите полуправа, отсечка и полурамнина се ***изведени*** геометриски поими.

***Задачи*:**

① Поимот агол се дефинира како фигура што е образувана од две полуправи што имаат заедничка почетна точка.
Кои поими се употребени при дефинирањето на поимот агол?

② Дефинирај го поимот триаголник. Направи верига од дефиниции на дефинирачките поими на поимот триаголник, се додека не дојдеш до основен поим.

③ Дали полуправата AB и полуправата BA определуват едно исто множество точки?

④ Отсечката AB нема заедничка точка со правата a. Каква е положбата на точките A и B во однос на правата a?

2

ОСНОВНИ И ИЗВЕДЕНИ ТВРДЕЊА. ЗАЕМЕН ОДНОС НА ТОЧКА И ПРАВА, ТОЧКА И РАМНИНА

А Геометријата има задача да ги изучува својствата на геометриските фигури и нивните заемни односи. Својствата и односите најчесто се искажуваат во вид на некакви тврдења, т.е. точни искази кои се докажуваат според законите на логиката или се прифаќаат за точни без доказ.

Тврдењето што се докажува се вика ***теза***, а исказите од кои следува тезата се викаат ***аргументи***. Низата од логичките заклучоци што водат од аргументите до тезата се вика ***демонстрација***.

Аргументите, демонстрацијата и тезата го сочинуваат ***доказот***.

Во изведувањето на доказот аргументите се земаат како точни искази или како искази чија точност била порано докажана.

Запомни!

Исказите што ги прифаќаме за точни без доказ се викаат ***основни тврдења*** или ***аксиоми***.

Сите други тврдења се викаат ***изведени тврдења*** или ***теореми*** и тие се докажуваат.

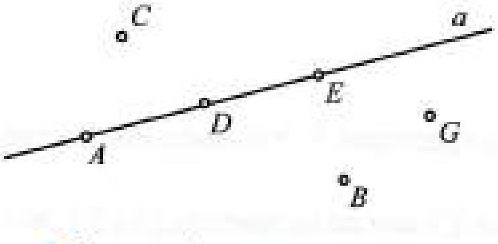
Теоремата најчесто се искажува во форма на ***импликација-условна*** форма или во ***категорична*** форма.

На пример: Ако четириаголникот е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални. Теоремата е искажана во условна форма. Истата теорема во категорична форма гласи: Дијагоналите на ромбот се заемно нормални.

Во секоја теорема мора да е истакнато:

1. под кои услови се разгледува објектот и тие услови сочинуваат ***претпоставка***
2. што е тврдењето за тие објекти, а тоа тврдење се вика ***заклучок*** на теоремата или ***теза***.

Б ***Потсети се!***



- Одреди ја точноста на исказите:

  $A\in a$; $D\in a$; $B\in a$; $E\notin a$; $C\notin a$.

- Кои точки се колинеарни?

Ако A е една точка и a е една права, тогаш точката A може да припаѓа на правата a $(A\in a)$ или да не припаѓа на правата a $(A\notin a)$.

Ако $A\in a$, тогаш велиме дека "точката A лежи на правата a", или "правата a минува низ точката A".

Заемната положба на основните геометриски поими најчесто се искажува со аксиоми.

Во понатамошното разгледување аксиомите ќе ги обележуваме со А1, А2,..., а теоремите со Т1, Т2, ...

Аксиома 1. На секоја права лежат бесконечно многу точки, но постојат и точки што не припаѓаат на истата права.

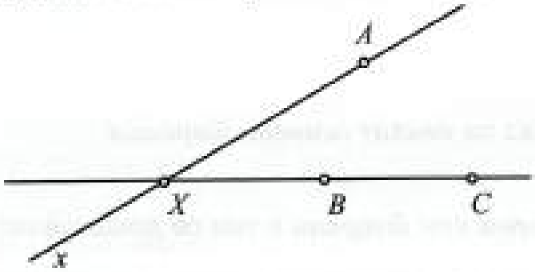
Аксиома 2. Низ кои било две различни точки минува една и само една права.

Теорема 1. Во просторот постојат барем три неколинеарни точки.

Доказ. Нека A и B се две различни точки и нека a е права што минува низ нив. Според А1, постои точка C што не лежи на правата a. Значи, точките A, B и C не се колинеарни.

Теорема 2. Низ секоја точка минуваат бесконечно многу прави.

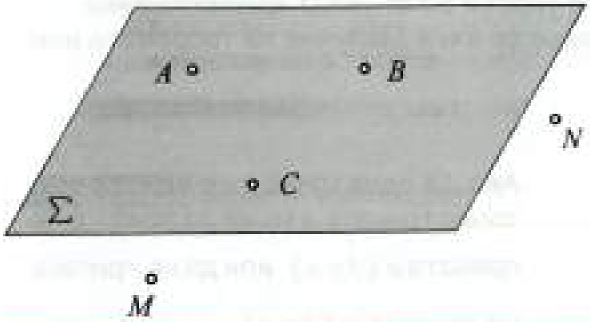
Доказ. Нека A е произволна точка, а B и C точки што не се колинеарни со точката A.



Според А2, низ точките B и C минува единствена права, на која според А1, има бесконечно многу точки. Низ секоја точка X од правата BC и низ точката A минува единствена права x.
Бидејќи на правата ВС има бесконечно многу точки, значи низ точката A минуваат бесконечно многу прави.

Потсети се!

Точките што лежат на иста права се викаат ***колинеарни*** точки.



- Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

$$A\in\Sigma;\; B\notin\Sigma;\; M\in\Sigma;\; N\in\Sigma.$$

- Како се викаат точките што лежат на иста рамнина?

Рамнината, исто како и правата, е подмножество од просторот $\mathbb{P}$, т.е. некое множество од точки.

Една точка A може да припаѓа на рамнината Σ $(A\in\Sigma)$ или да не припаѓа $(A\notin\Sigma)$. Ако $A\in\Sigma$, тогаш велиме дека "точката A лежи на рамнината Σ" или "рамнината Σ минува низ точката A".

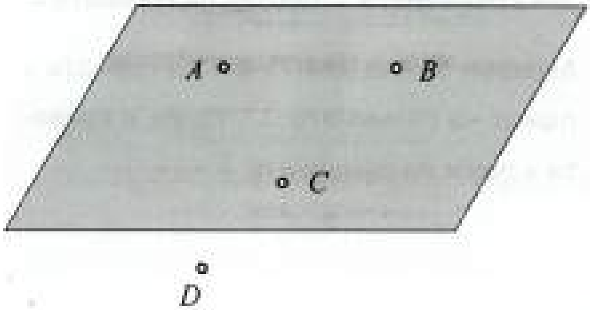
Меѓусебната положба на точка и рамнина ја искажуваме со следните аксиоми:

Аксиома 3. На секоја рамнина лежат барем три неколинеарни точки, но постојат и точки што не припаѓаат на истата рамнина.

Аксиома 4. Низ три неколинеарни точки минува само една рамнина.

Од овие аксиоми следува дека правата a и рамнината Σ се две различни подмножества од просторот $\mathbb{P}$. Тие се вистински подмножества од $\mathbb{P}$.

Теорема 3. Во просторот $\mathbb{P}$ постојат барем четири точки што не лежат во иста рамнина.



Доказ. Според Т1, во просторот $\mathbb{P}$ постојат барем три неколинеарни точки, а според А4 тие определуваат единствена рамнина Σ. Според А3, сигурно постои точка D што не лежи во рамнината Σ. Значи, точките A, B, C и D не лежат во иста рамнина.

Теорема 4. Низ секоја точка минува барем една рамнина.

Доказ. Нека A е произволна точка, постојат точки B и C низ коишто минува права а. Според А1 постојат точки што не припаѓаат на таа права, нека тоа е точката A.

Точките A, B и C се неколинеарни, па според А4, низ нив минува единствена рамнина Σ, што значи, низ точката A минува барем една рамнина.

Задачи:

① Покажи дека со четири различни точки се определени една, четири или шест прави.

② Покажи дека со пет различни точки можат да се определат една, пет, шест, осум или десет прави.

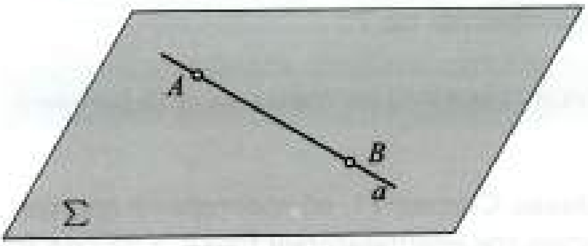
③ Нека A е произволна точка. Покажи дека постојат точки B, C и D, така што точките A, B, C и D не лежат во иста рамнина.

④ Нека A, B, C и D се точки, такви што кои било три од нив не се колинеарни. Колку рамнини определуваат тие точки?

⑤ Нека A, B, C, D и E се пет точки, такви што кои било три од нив не се колинеарни. Покажи дека тие определуваат една, седум или десет рамнини.

3 ЗАЕМЕН ОДНОС НА ПРАВА И РАМНИНА И НА ДВЕ РАМНИНИ

Потсети се!



$A \in a$ и $A \in \Sigma$; $B \in a$ и $B \in \Sigma$.

Каква заемна положба имаат правата a и рамнината Σ ?

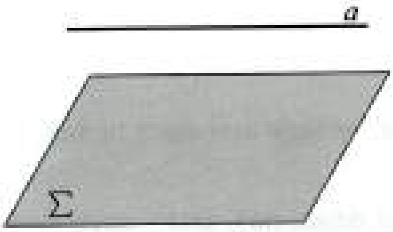
Правата и рамнината се различни множества од точки.

Ако секоја точка X од правата a припаѓа и на рамнината Σ, тогаш велиме дека правата a лежи на рамнината Σ, или дека рамнината Σ минува низ правата a.

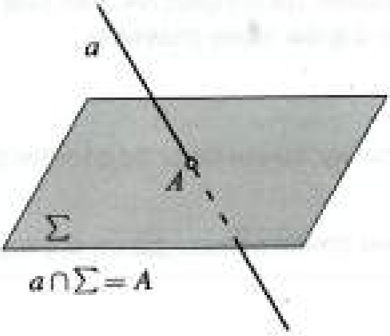
Аксиома 5. Ако две точки од правата a лежат на рамнината Σ, тогаш и правата a лежи на рамнината Σ.

Според тоа, правата a и рамнината Σ може:

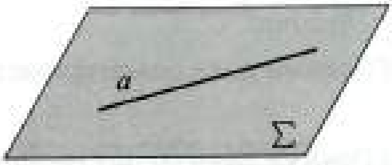
- или да немаат заедничка точка, т.е. $a \cap \Sigma = \varnothing$;
- или да имаат една заедничка точка, т.е. $a \cap \Sigma = \{A\}$;
- или секоја точка од правата a да лежи на рамнината , т.е. $a \cap \Sigma = a$.



$a \cap \Sigma = \varnothing$



$a \cap \Sigma = A$



$a \cap \Sigma = a$

Запомни!

Правата a и рамнината Σ што немаат заедничка точка, или правата a што лежи на рамнината Σ се паралелни, т.е. $a \parallel \Sigma$.

Правата a и рамнината Σ што имаат заедничка точка A се сечат, т.е. правата a ја прободува рамнината Σ во точката A.

Од самата аксиома следува:

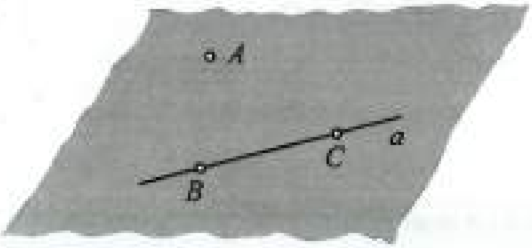
Теорема 5. На секоја рамнина Σ лежи барем една права.

Доказ. Според А3, во рамнината Σ лежат барем две точки. Нека се тоа точките A и B. Според А2, низ точките A и B минува единствена права a. Точките A и B лежат и на правата a и на рамнината Σ, па според А5, правата a лежи на рамнината Σ.

Теорема 6. Ако A е точка што не лежи на правата a, $A \notin a$, тогаш постои една и само една рамнина Σ што минува низ точката A и правата a.

Во теоремата што е искажана во вид на еквиваленција се содржат две теореми, од кои едната ја викаме *првична* или *директна*, а другата *обратна* на првичната.

Доказ. Според А2, на правата a лежат барем две точки B и C. Точките A, B и C не се колинеарни $A \notin a$, па според А4, тие определуваат една рамнина. Значи, низ точката A и правата a минува барем една рамнина.



Нека рамнината Σ_1 е произволна рамнина што минува низ точката A и низ правата a. Бидејќи рамнината Σ_1 минува низ точките A, B и C кои не се колинеарни, според А4, рамнините Σ и Σ_1 се совпаѓаат.

Б Од Т3 следува:

Теорема 7. Постојат барем две рамнини што имаат заедничка права.

Доказ. Според Т3, во просторот $\mathbb{P}$ постојат четири точки што не лежат во иста рамнина. Нека се тоа точките A, B, C и D. Според А4, рамнината Σ_1 определена со точките A, B и C е различна од рамнината Σ_2 определена со точките A, B и D. Правата AB, т.е. правата a има две заед-нички точки и со рамнината Σ_1 и со рамнината Σ_2, што значи таа лежи во двете рамнини. Бидејќи рамнините Σ_1 и Σ_2 се различни, според А4 тие не можат да имаат други заеднички точки, освен точките што лежат на правата a. Според тоа, рамнините Σ_1 и Σ_2 имаат заедничка права, т.е. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$.

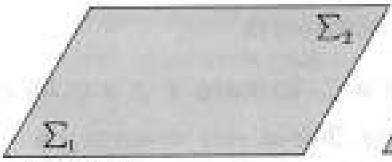
За заемната положба на две рамнини точна е следнава

Аксиома 6. Ако две рамнини имаат една заедничка точка, тогаш тие имаат барем уште една заедничка точка.

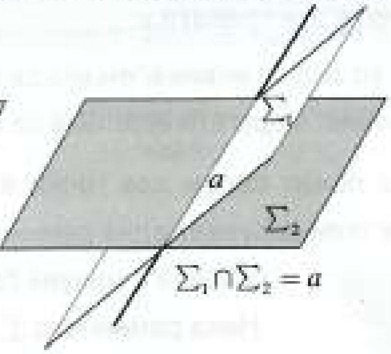
Според тоа, две рамнини Σ_1 и Σ_2:

- или се совпаѓаат, т.е. $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$;
- или имаат заедничка права, т.е. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$;
- или немаат заедничка точка, т.е. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$.

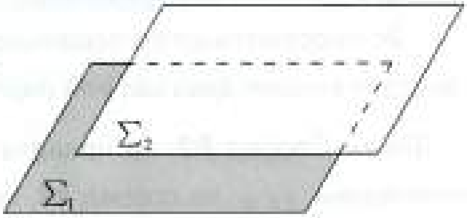
Воочи ја меѓусебната положба на две рамнини на следниот цртеж.



$\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$



$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$



$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$

Запомни!

Рамнините Σ_1 и Σ_2 што немаат заедничка точка се совпаѓаат, или се паралелни, т.е. $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$.

Рамнините што имаат заедничка права се сечат.

***Задачи*:**

① Во секоја рамнина Σ лежи барем една права a и барем една точка A, така што $A \notin a$. Докажи!

② Покажи дека за секоја рамнина Σ постои барем една права a што ја прободува рамнината Σ.

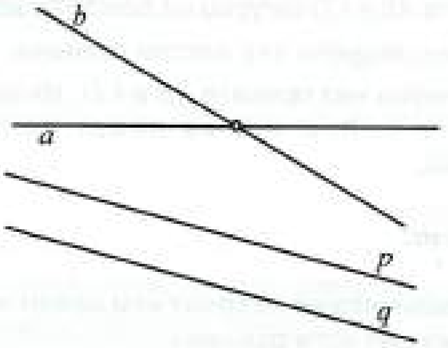
③ Докажи дека низ точката A што лежи во рамнината Σ минуваат бесконечно многу прави што лежат во рамнината Σ.

④ Нека Σ_1 и Σ_2 се две различни рамнини и нека $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing$. Докажи дека постои барем една права што ги прободува двете рамнини.

⑤ Нека a е права, а Σ некоја рамнина. Дали е можно $a \cap \Sigma = \Sigma$?

4 ЗАЕМЕН ОДНОС НА ДВЕ ПРАВИ

Потсети се!



- Каква заемна положба имаат правите a и b?

- Во каква заемна положба се правите p и q?

𝒜 Две прави како множества од точки може:
- да немаат ниту една заедничка точка, т.е. $a \cap b = \varnothing$;
- да имаат само една заедничка точка, т.е. $a \cap b = \{A\}$;
- да имаат повеќе заеднички точки, т.е. $a \cap b = \{A, B, C, \ldots\}$.

Заемниот однос на две прави ќе го разгледаме преку следниве теореми:

Теорема 8. Ако две прави имаат барем две заеднички точки, тогаш тие се еднакви како множество од точки.

Доказ. Доказот следува од А2.

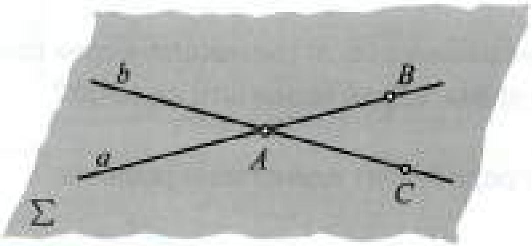
Теорема 9. Две различни прави не можат да имаат повеќе од една заедничка точка.

Доказ. Ако правите a и b имаат повеќе од една заедничка точка, тогаш според Т8 тие ќе се совпаѓаат.

Значи, правите што имаат една заедничка точка се сечат.

Теорема 10. Две прави што се сечат определуваат една и само една рамнина.

Доказ. Нека правите a и b се сечат во точка A. Според А2, на правата a освен точката A постои и точката B, а на правата b освен точката A постои и точката C. Точките A, B и C се неколинеарни, па според А4 тие определуваат единствена рамнина. Ако, пак, постои друга рамнина Σ_1 што минува низ точките A, B и C, тогаш според А4, Σ_1 и рамнината Σ се исто множество, т.е. се совпаѓаат.



Воочи!

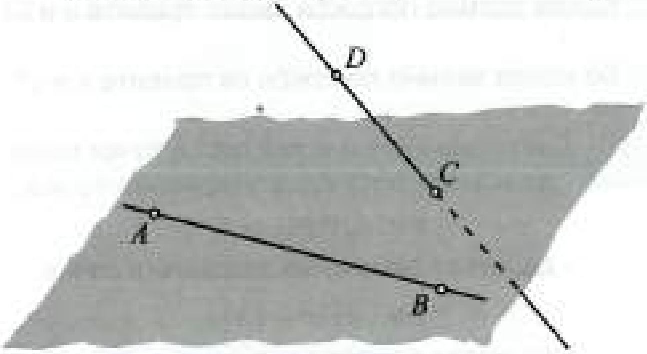
Правите што се сечат секогаш лежат во иста рамнина.

- Во каква заемна положба се правите a и b, ако $a \cap b = \varnothing$? Дали постојат прави што не лежат на иста рамнина?

Одговорот на прашањето ќе го даде следнава:

Теорема 11. Постојат прави што не лежат на иста рамнина.

Доказ. Според Т3, постојат барем четири точки A, B, C и D што не лежат на иста рамнина.



Правите AB и CD сигурно не лежат во иста рамнина, бидејќи ако постои рамнина Σ_1 што минува низ правите AB и CD, тогаш и точките A, B, C и D ќе лежат на таа рамнина.

Воочи!

Две прави што не се сечат или лежат или не лежат на иста рамнина.

Запомни!

Две прави што не лежат на иста рамнина се викаат ***разминувачки прави***.
Две прави a и b што лежат на иста рамнина и немаат заедничка точка се ***паралелни прави*** и означуваме $a \parallel b$.
Правите што се совпаѓаат се паралелни прави, т.е. секоја права е паралелна сама на себе.

Воочи!

Две прави или се сечат или се паралелни или се разминувачки.

2 Низ секоја од две разминувачки прави минува барем по една рамнина. Дали тие рамнини може да: а) се сечат; б) се паралелни; в) се совпаѓаат?

Задачи:

① Според кои аксиоми и теореми е определена една рамнина со: а) три неколинеарни точки; б) една права и една точка што не лежи на таа права; в) две прави што се сечат?

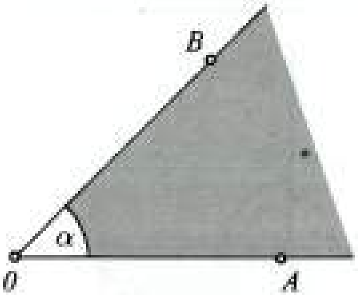
② Покажи дека две различни паралелни прави определуваат единствена рамнина.

③ Правата a ја прободува рамнината Σ во точката M. Правата b лежи на рамнината Σ, но не минува низ точката M. Одреди го меѓусебниот однос на правите a и b.

④ Колку рамнини се определени со три прави што минуваат низ иста точка?

⑤ Колку рамнини се определени со една права и три неколинеарни точки, од кои ниту една не лежи на дадената права?

5 АГОЛ, ИСКРШЕНА ЛИНИЈА, МНОГУАГОЛНИК



Цртеж 1

А На цртежот 1 се повлечени две полуправи со заеднички почеток.

- Која геометриска фигура е претставена на цртежот?
- Како се викаат полуправите OA и OB ?
- Како се вика точката O ?

Запомни!

Геометриската фигура образувана од две полуправи со заедничка почетна точка и делот од рамнината ограничен со нив се вика ***агол***.

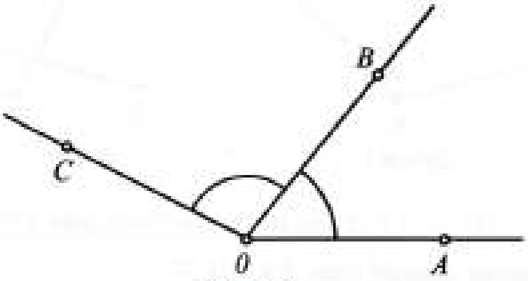
Аголот се означува: $\measuredangle O$; $\measuredangle AOB$; $\measuredangle (a, b)$, или со буквите од грчката азбука $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ итн.,а понекогаш и со броеви, $\measuredangle 1$, $\measuredangle 2$ итн.

Заедничкиот дел од рамнината што е зафатен од иста страна на полуправите се вика внатрешен дел на аголот, а другиот дел е надворешен.

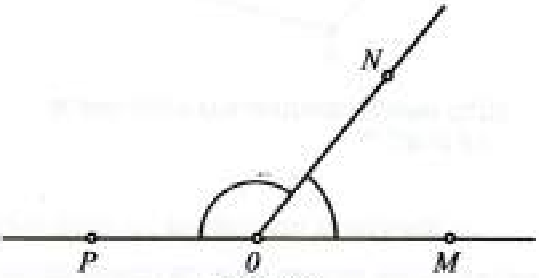
Аголот чии краци се составни полуправи на иста права се вика ***рамен агол***.

Цртеж 2

Аглите што имаат заеднички крак, а немаат заеднички внатрешен дел се викаат ***соседни*** агли.



Цртеж 3



Цртеж 4

Аглите AOB и BOC се соседни агли. Соседните агли MON и NOP образуваат ***рамен*** агол.

Запомни!

Два соседни агли што образуваат рамен агол се викаат ***напоредни агли***.

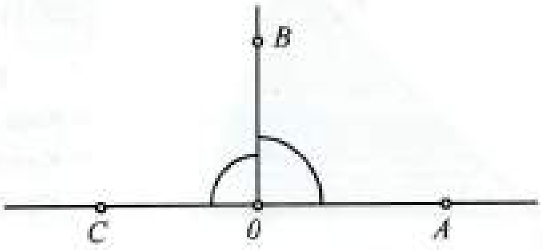
Збирот на два напоредни агли изнесува 180^0 .

Аголот што е еднаков со својот напореден агол се вика ***прав агол***.

Теорема 12. Сите прави агли се еднакви меѓу себе.

Доказ. Секои два напоредни агли се дополнуваат до рамен агол. Според дефиницијата за прав агол, т.е. два еднакви напоредни агли се прави агли, значи и правите агли се дополнуваат до рамен агол.

Бидејќи сите рамни агли се еднакви меѓу себе (имаат по 180^0), следува дека и сите прави агли се еднакви меѓу себе и имаат по 90^0 (црт. 5).



Цртеж 5

Запомни!

Аголот што е помал од правиот агол се вика ***остар агол***.
Аголот што е поголем од правиот агол, а помал од рамниот агол се вика ***тап агол***.

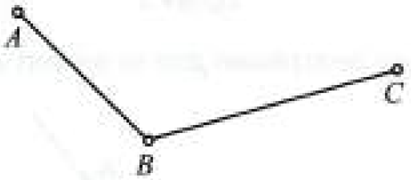
Два агли чиј збир изнесува 180^0 се викаат ***суплементни агли***.

Два агли чиј збир изнесува 90^0 се викаат ***комплементни агли***.
Напоредните агли се суплементни агли, но два суплементни агли не мора да бидат напоредни агли.

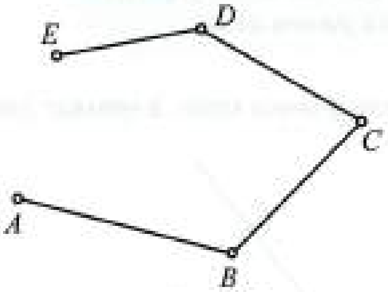
Б

Потсети се!

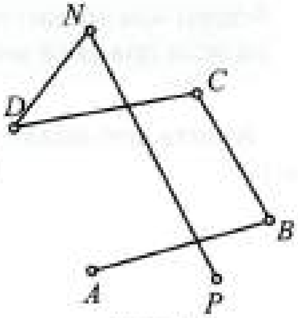
- Што е отсечка?



- Што имаат заедничко отсечките AB и BC?



Цртеж 6



Цртеж 7

Фигурата составена од отсечките AB, BC, CD, ..., NP, така што кои било две соседни отсечки да не лежат на иста права се вика ***искршена линија*** (црт. 6 и црт. 7).

Точките A, B, C, D, ... се викаат ***темиња***, а отсечките AB, BC, CD, ... ***страни*** на искршената линија.

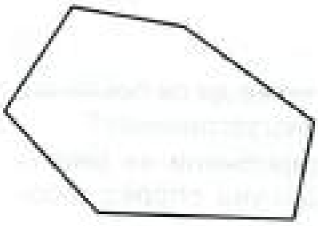
Искршената линија е ***затворена***, ако нејзините крајни точки се совпаѓаат (црт. 8).

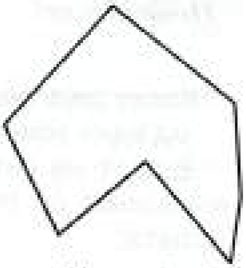
Искршената линија е ***отворена***, ако нејзините крајни точки не се совпаѓаат (црт. 6).

Збирот од должините на страните на искршената линија се вика ***периметар*** на искршената линија, т.е.

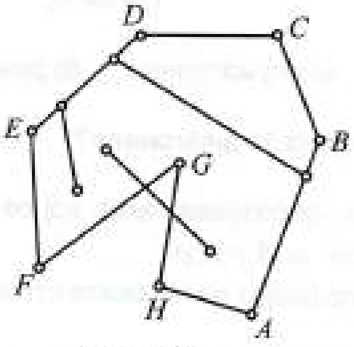
$$L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots$$

Затворена искршена линија во која нема несоседни страни што се сечат се вика ***полигонална линија***.

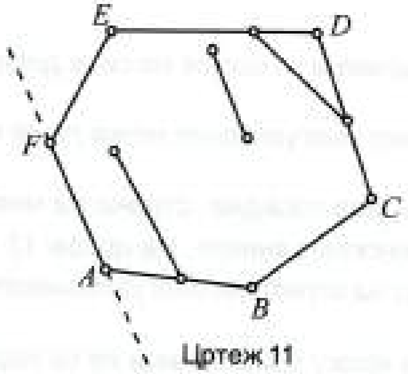

Цртеж 8


Цртеж 9

1 На цртежите 6, 7, 8 и 9 дадени се искршени линии. Која од нив е затворена, а која полигонална?



Цртеж 10



Цртеж 11

Делот од рамнината ограничен со затворена искршена линија се вика ***внатрешен дел*** или ***внатрешна област***, а останатиот дел од рамнината се вика ***надворешна област***.

Полигонална линија и нејзина внатрешна област образува една геометриска фигура.

Запомни!

Геометриска Фигура образувана од една полигонална линија и нејзина внатрешна област се вика ***многуаголник***.

Во секој многуаголник бројот на страните е еднаков со бројот на темињата, па според тој број имаме различни многуаголници: ***триаголник, четириаголник, петаголник*** итн. Ако должините на страните на многуаголникот се $a, b, c, d, \dots, g$, тогаш неговиот периметар е

$$L = a + b + c + d + \dots + g .$$

Воочи!

На цртеж 11 сите точки од отсечките чии краеви лежат на многуаголникот се точки од тој многуаголник. Таков многуаголник се вика ***конвексен многуаголник***.

2 На цртежот 8, 9, 10 и 11 дадени се многуаголници. Кои од нив се конвексни?

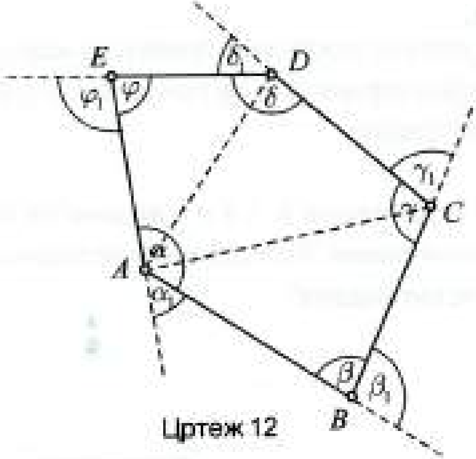
Во понатамошното разгледување ќе зборуваме само за конвексен многуаголник.

Отсечката чии крајни точки се кои било две несоседни темиња на многуаголникот се вика ***дијагонала на многуаголникот***.

Потсети се!

- Колку дијагонали може да се повлечат од едно теме на многуаголникот?
- Бројот на сите дијагонали на многуаголникот се определува според формулата:

$$D_n = \frac{1}{2}n(n-3).$$



Цртеж 12

3 Пресметај го бројот на сите дијагонали на: а) осумаголник; б) дванаесетаголник.

4 Во кој многуаголник може да се повлечат вкупно 35 дијагонали?

Секои две соседни страни на многуаголникот образуваат агол кој се вика ***внатрешен*** агол на многуаголникот. На цртеж 12 тоа се аглите: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$.

Бројот на аглите на многуаголникот е еднаков со бројот на неговите страни, односно темиња.

- На колку триаголници ќе се подели многуаголникот, ако се повлечат сите дијагонали од едно негово теме?
- Збирот на сите внатрешни агли на многуаголникот се пресметува по формулата:

$$S_n = (n-2)\cdot 180^0.$$

5 Определи го збирот на внатрешните агли на: а) осумаголник; б) десетаголник.

- Секој агол што е напореден со некој внатрешен агол на многуаголникот се вика *надворешен* агол на многуаголникот. На цртеж 12 такви се аглите: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varphi_1$.

Збирот на сите надворешни агли на секој многуаголник е:

$$n\cdot 180^0 - S_n = n\cdot 180^0 - (n-2)\cdot 180^0 = 360^0.$$

Задачи:

① Нацртај два агли α и β, а потоа нацртај агол: а) $\gamma = 2\alpha + \beta$; б) $\delta = 3\alpha - 2\beta$.

② Даден е аголот $\alpha = 75^0$. Одреди го неговиот суплементен и неговиот комплементен агол.

③ Разликата на два напоредни агли е прав агол. Одреди ги тие агли.

④ Ако се повлече права низ кои било две соседни темиња на еден конвексен многуаголник, тогаш целиот многуаголник лежи од иста страна на таа права. Дали истото тврдење важи и за неконвексен многуаголник?

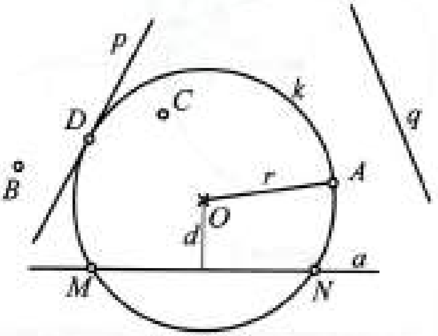
⑤ Затворената искршена линија составена од три страни секогаш лежи во една рамнина. Зошто?

⑥ Дали постои многуаголник кој има толку дијагонали колку што има страни?

6 КРУЖНИЦА. КРУГ

Потсети се!

- Што е кружница?
- Дадена е кружницата $k(o,r)$.



Цртеж 1

Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $A\in k$; б) $B\notin k$; в) $C\in k$;

г) $a\cap k=\emptyset$; д) $p\cap k=\{D\}$; ѓ) $q\cap k=\emptyset$.

А Множеството од сите точки во рамнината што се на еднакво растојание од една избрана точка во таа рамнина се вика ***кружница***.

Кружницата со центар во точката O и радиус r ја означуваме $k(O,r)$.

Кружницата ја дели рамнината на два дела (области), внатрешен (внатрешна област) и надворешен дел (надворешна област).

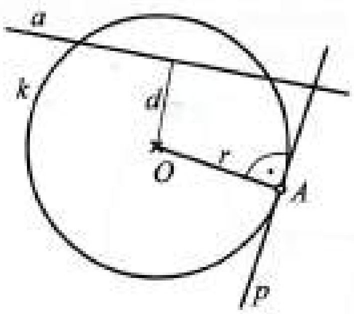
Геометриската фигура составена од една кружница и од нејзината внатрешна област се вика ***круг***.

Растојанието од која било точка или права до центарот на кружницата се вика ***централно растојание*** на таа точка или права, што го означуваме со d.

1 Нека M е точка што лежи во рамнината на кружницата. Одреди ја положбата на точката M во однос на кружницата, ако: $d>r, d=r, d<r$.

2 Нека правата a лежи во рамнината на една кружница. Одреди ја положбата на правата a во однос на кружницата, ако: $d>r, d=r, d<r$.

- Правата што има две заеднички точки со кружницата се вика ***секанта***.
- Правата што минува низ една точка А на кружницата $k(O,r)$ се вика ***тангента*** на кружницата.
- Тангентата е нормална на радиусот на кружницата во допирната точка.

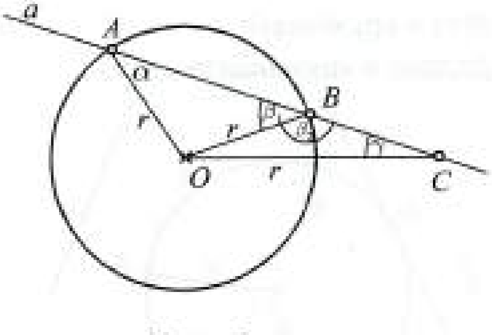


Цртеж 2

Теорема 13. Една секанта не може да има повеќе од две заеднички точки со кружницата.

Доказ. Да претпоставиме дека секантата a има три заеднички точки A, B и C со кружницата $k(O,r)$, цртеж 3.

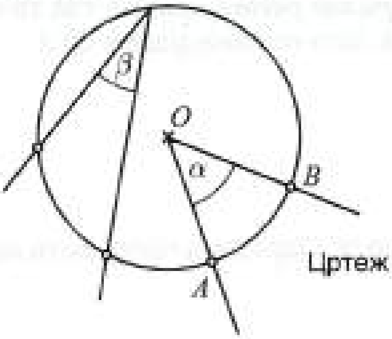
Од претпоставката следува дека $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=r$, па триаголниците OAB, OAC и OBC се рамнокраки. Оттука следува дека $\alpha=\beta_1$, $\alpha=\gamma$ и $\beta_2=\gamma$, т.е. $\beta_1=\beta_2$. Аглите β_1 и β_2 се напоредни, па според дефиницијата за прав агол, следува дека $\beta_1=\beta_2=90^0$, а тоа повлекува и $\alpha=\gamma=90^0$. Меѓутоа, во еден триаголник не може да има два прави агли. Зошто? Поради тоа претпоставката не е точна, значи точно е тврдењето на теоремата.



Цртеж 3

Потсети се!

- Како се вика аголот α, а како аголот β?



Цртеж 4

- Какви се два централни агли во една кружница на кои им одговараат еднакви кружни лаци?

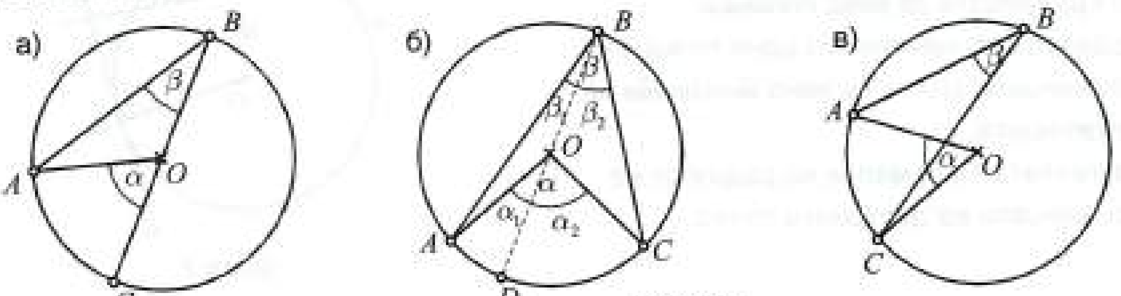
Дали важи обратното?

Б За периферниот и централниот агол над ист кружен лак во една иста кружница важи следнава:

Теорема 14. Секој периферен агол во една кружница е еднаков на половината од соодветниот централен агол.

Доказ. При доказот на теоремата ќе разликуваме три случаи, цртеж 5, зависно од тоа дали центарот на кружницата припаѓа или не припаѓа на областа на периферниот агол.

Ќе го докажеме случајот б), кога центарот на кружницата е во внатрешната област на периферниот агол.



Цртеж 5

Бидејќи $\overline{OA}=\overline{OB}=r$ и $\overline{OC}=\overline{OB}=r$, следува дека триаголниците AOB и COB се рамнокраки со основи AB и CB, па $\beta_1=\measuredangle BAO$ и $\beta_2=\measuredangle BCO$. Оттука имаме, $\alpha_1=2\beta_1$ и $\alpha_2=2\beta_2$, како надворешни агли на триаголникот. Според тоа:

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2=2\beta_1+2\beta_2=2(\beta_1+\beta_2)=2\beta,\ \text{т.е. } \beta=\frac{1}{2}\alpha .$$

Случаите под а) и в) докажи ги сам.

Од теоремата следува:

- ***Сите периферни агли во една кружница над ист кружен лак меѓусебно се еднакви.***
- ***Секој периферен агол над полукружницата е прав агол.***
- Под кое име е познато претходното тврдење?

Четириаголникот чии страни се тетиви на иста кружница се вика ***тетивен четириаголник.***

3 Докажи го тврдењето: Спротивните агли во тетивниот четириаголник се суплементни.

Упатство: Одреди го аголот под кој се гледа дијагоналата од темињата на четириаголникот што не лежат на таа дијагонала.

4 Нека S е точка во која се сечат две тетиви на кружницата.

а) Ако точката S лежи во кружницата, тогаш $\measuredangle ASD=\frac{1}{2}(\measuredangle AOB+\measuredangle BOC)$.

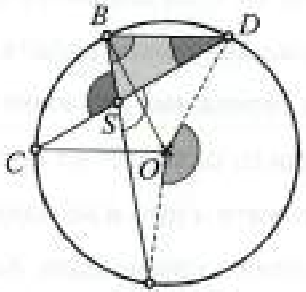
б) Ако точката S е во надворешната област на кружницата, тогаш

$$\measuredangle ASD=\frac{1}{2}(\measuredangle AOB-\measuredangle DOC).$$ Докажи!

Доказ. а) Од Т14 следува:

$\measuredangle ABD=\frac{1}{2}\measuredangle AOD$ и $\measuredangle BDC=\frac{1}{2}\measuredangle BOC$.

Аголот ASD е надворешен агол на триаголникот BSD, па

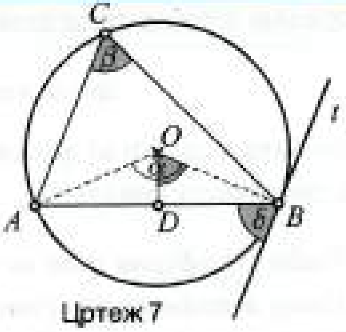


Цртеж 6

$$\measuredangle ASD=\measuredangle ABD+\measuredangle BDC=$$
$$=\frac{1}{2}\measuredangle AOD+\frac{1}{2}\measuredangle BOC=$$
$$=\frac{1}{2}(\measuredangle AOD+\measuredangle BOC),$$ цртеж 6.

б) Тврдењето докажи го сам.

Теорема 15. Аголот помеѓу тетивата на кружницата и тангентата повлечена во една од крајните точки на тетивата, е еднаков со периферниот агол што одговара над таа тетива.



Цртеж 7

Доказ. Тангентата t и тетивата AB образуваат два агли, едниот е тап, а другиот е остар агол (цртеж 7). Доказот ќе го изведеме за остриот агол.

Триаголникот AOB е рамнокрак $\left(\overline{AO}=\overline{OB}=r\right)$. Нека OD е висина на триаголникот AOB повлечена кон страната AB. Од $\measuredangle DOB=\frac{1}{2}\alpha=\delta$ (агли со нормални краци) и $\beta=\frac{1}{2}\alpha$, следува дека $\beta=\delta$.

Нека $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$, $r_1<r_2$ се две кружници. Растојанието $d=\overline{O_1O_2}$ се вика ***централно растојание*** на кружниците k_1 и k_2.

Запомни!

1. Ако $d>r_1+r_2$ или $d<r_2-r_1$, тогаш тие две кружници немаат заедничка точка, т.е. едната кружница е во надворешната или во внатрешната област на другата кружница.
2. Ако $d=r_1+r_2$ или $d=r_2-r_1$, тогаш кружниците имаат само една заедничка точка, т.е. кружниците се допираат однадвор или одвнатре.
3. Ако $r_2-r_1<d<r_1+r_2$, тогаш кружниците имаат две заеднички точки, т.е. се сечат.
4. Ако $O_1\equiv O_2$, тие две кружници се концентрични.

Овие тврдења провери ги со конструирање на соодветни цртежи.

Задачи:

① Ако AB и CD се дијаметри на една иста кружница, тогаш $\overline{AC}=\overline{BD}$ и $AC\parallel BD$. Докажи!

② Докажи дека симетралата на секоја тетива минува низ центарот на кружницата.

③ Една тетива има должина $16\ cm$ и од центарот на кружницата е на растојание $15\ cm$. Одреди го радиусот на кружницата.

④ Од точката A што е во надворешната област на кружницата $k(O,r)$, повлечени се две тангенти на кружницата. Ако P и T се допирни точки на тангентите и кружницата, докажи дека: а) $\overline{AP}=\overline{AT}$; б) $\measuredangle PAT=\frac{1}{2}\left|\alpha_1-\alpha_2\right|$, каде α_1 и α_2 се централни агли што одговараат над кружните лаци зафатени меѓу допирните точки на тангентите и кружницата.

⑤ Еден четириаголник се вика тангентен ако неговите страни се тангенти на една кружница. Докажи дека збировите од должините на спротивните страни на тангентниот четириаголник се еднакви.

7 ВЕКТОРИ. КОЛИНЕАРНИ ВЕКТОРИ. ЕДНАКВИ ВЕКТОРИ

Потсети се!

Точките A и B се крајни точки на отсечката AB.

- Кој од следниве искази е вистинит?

а) AB и BA се ознаки за истата отсечка;

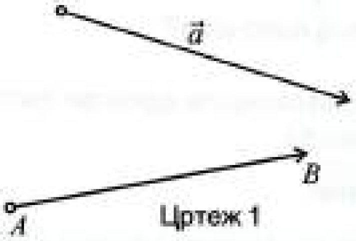
б) $\overline{AB}=\overline{BA}$; в) $\{A,B\}=\{B,A\}$;

г) $(A, B)=(B, A)$.

- Што е вектор?

А Воочи дека ознаките AB и BA претставуваат исто множество, т.е. иста отсечка.

Отсечката чија една крајна точка се смета за почеток, а другата за крај, се вика ***насочена отсечка***, цртеж 1.



Цртеж 1

Запомни!

Насочените отсечки се викаат ***вектори***. На цртежите векторите се прикажуваат како отсечки со стрелки.

Стрелката ја покажува насоката на векторот од почетокот кон крајот. Векторот се означува со $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Должината на отсечката AB се вика ***должина*** или ***интензитет*** на векторот $\overrightarrow{AB}$ и се означува со $|\overrightarrow{AB}|$, т.е. $|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$. Ако векторот е означен со $\vec{a}$, тогаш неговиот интензитет го означуваме со $|\vec{a}|$ или само a.

1 Во рамнината дадени се три различни точки A, B и C. Колку вкупно вектори може да се формираат со дадените точки? Колку вкупно отсечки определуваат тие точки?

Потсети се!

- Со колку точки е определена една права?
- Кога велиме дека правите a и b се паралелни?
- Правата a лежи во рамнината Σ. Колку прави лежат во таа рамнина што се паралелни со правата a?

Б Множеството од сите паралелни прави што лежат во иста рамнина, определуваат еден правец во таа рамнина.

Секоја права од тоа множество се зема за претставник на правецот.

Ако точките A и B се различни, тогаш тие определуваат единствена права, т.е. одреден е еден правец p.

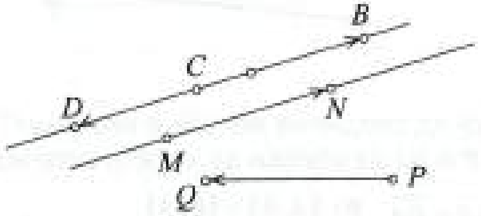
За векторот $\overrightarrow{AB}$ велиме дека лежи на правата p.

Запомни!

Векторите што лежат на иста права или на различни паралелни прави се викаат ***колинеарни вектори*** или вектори што имаат ист правец.
Векторите што не се колинеарни се викаат ***неколинеарни вектори***.

2 Кои вектори се претставени на црт. 2?

- Кои вектори се колинеарни, а кои неколинеарни?
- Кои вектори се исто насочени, а кои се спротивно насочени?



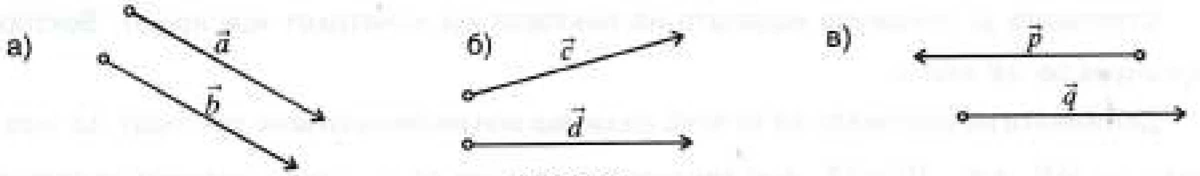
Цртеж 2

В Две отсечки се еднакви (складни) ако имаат еднакви должини, независно од нивната положба.

Запомни!

Два вектори се ***еднакви*** ако имаат: иста должина, ист правец и иста насока

Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ дадени на црт. 3 а) се еднакви и означуваме $\vec{a}=\vec{b}$.



Цртеж 3

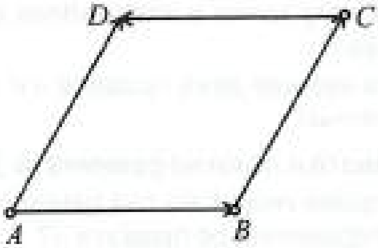
Векторите дадени на црт. 3 б) и в) не се еднакви. Зошто?

5 Кои вектори на цртежот 3 се истонасочени, а кои спротивно насочени?
Дали два неколинеарни вектори може да бидат еднакви?

6 Нацртај два колинеарни вектори што имаат еднакви должини и се со:
а) иста насока; б) спротивна насока.

7 На страните на ромбот $ABCD$, цртеж 4, означени се векторите: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD}$.

- Кои вектори се еднакви?
- Кои вектори се спротивно насочени?



Цртеж 4

Воочи!

Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имаат еднакви должини $\overline{AB}=\overline{CD}$, имаат ист правец $AB \parallel CD$, но сепак не се еднакви. Нивните насоки се спротивни.

Запомни!

Векторите што имаат еднакви должини, ист правец, а спротивна насока се викаат ***спротивни вектори***.

Спротивниот вектор на векторот $\vec{a}$ го означуваме со $-\vec{a}$, цртеж 5.

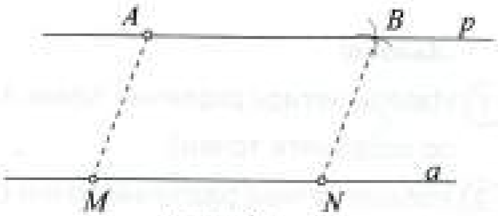
Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на цртеж 4 се спротивни, т.е. $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$.

Цртеж 5

8 Низ дадена точка A што не лежи на дадена права a, нацртај права p што е паралелна со правата a.

Согледај го решението:

На правата а избираме две произволни точки M и N. Точката B низ којашто минува бараната права p, ја определуваме како четврто теме на паралелограмот $AMNB$, цртеж 6.



Цртеж 6

Бараната права p е единствена, според аксиомата за паралелност, која гласи:

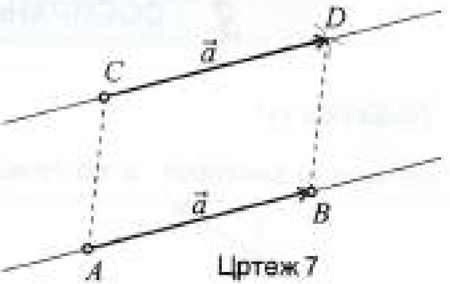
Аксиома 7. Низ дадена точка, која не лежи на дадена права, минува една и само една права што е паралелна со дадената права.

9 Даден е векторот $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и произволна точка C. Конструирај вектор $\overrightarrow{CD}$ што е еднаков на дадениот вектор.

а) Ако точката $C \notin AB$, тогаш решението е исто како решението на претходната задача, цртеж 7, т.е. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

б) Ако точката $C \in AB$, тогаш решението е на цртеж 8, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.

Конструкцијата на векторот $\overrightarrow{CD}=\vec{a}$ се нарекува пренесување на векторот $\vec{a}$ во точката C.



Цртеж 7

- Даден е векторот $\vec{a}$. Колку вектори може да се конструираат што се еднакви на дадениот вектор?

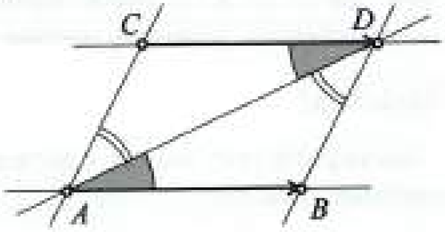
Цртеж 8

Решавајќи ја задачата 8, можеме да го искажеме следново тврдење:

Ако четириаголникот $AMNB$ е паралелограм, тогаш векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ се еднакви, т.е. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$.

Доказот на ова тврдење следува директно од дефиницијата за еднаквост на вектори.

10 Дали важи и обратното тврдење, т.е. ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се еднакви и не лежат на иста права, тогаш четириаголникот $ABDC$ е паралелограм.



Согледај го решението:
Од $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ следува: $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $AB \parallel CD$, т.е. $\measuredangle BAD = \measuredangle CDA$. Според признакот САС, $\Delta ABD \equiv \Delta ADC$. Од складноста на триаголниците следува $\measuredangle CAD = \measuredangle BDA$, а бидејќи тие се наизменични агли на трансферзалата AD, следува дека правите AC и BD се паралелни. Значи, четириаголникот $ABDC$ е паралелограм.

Со тоа е докажана:

Теорема 16. Два вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, што не лежат на иста права, се еднакви ако и само ако четириаголникот ABDC е паралелограм.

Задачи:

① Избери четири различни точки A, B, C и D. Колку вектори и колку отсечки се определени со избраните точки?

② Избери четири различни точки O, A, B и C. Пренеси ги векторите $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CA}$ со почеток во точката O.

③ Нека $ABCD$ е паралелограм и S пресек на неговите дијагонали. Провери кои од следниве парови вектори се еднакви, кои се колинеарни, а кои не се еднакви:
а) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CS}$.

8 СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА ВЕКТОРИ

Потсети се!

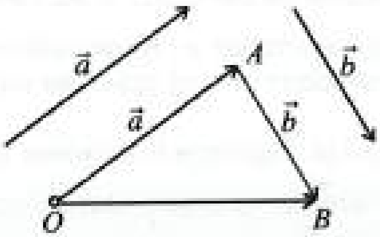
- Пренеси го векторот $\vec{a}$ во точката O.

- Дадени се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пренеси го векторот $\vec{b}$ во почетокот на векторот $\vec{a}$.

- Кои својства важат за собирањето на реалните броеви?

A 1 Во иста рамнина дадени се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и точка O. Конструирај ги векторите $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Согледај го решението:



Цртеж 1

Векторот $\overline{OB}$ се вика збир на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\overline{OB}=\vec{a}+\vec{b}$.

Збирот е добиен со надоврзување на векторите, т.е. на векторот $\vec{a}$ е надоврзан векторот $\vec{b}$.

Ова равенство се вика ***правило на три точки***, т.е. ако A, B и C се три точки во рамнината, тогаш важи равенството $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, цртеж 2.

Цртеж 2

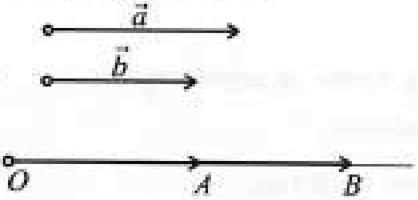
Запомни!

Збирот на два надоврзани вектори е векторот чиј почеток е во почетокот на едниот вектор, крајот е во крајот на другиот вектор.

2 Најди го збирот на два: а) истонасочени вектори; б) спротивно насочени вектори.

Согледај го решението:

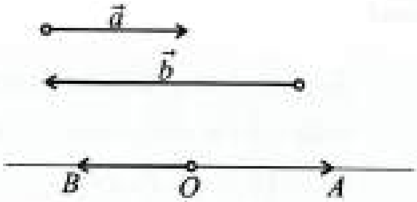
а)



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$.

б)



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$

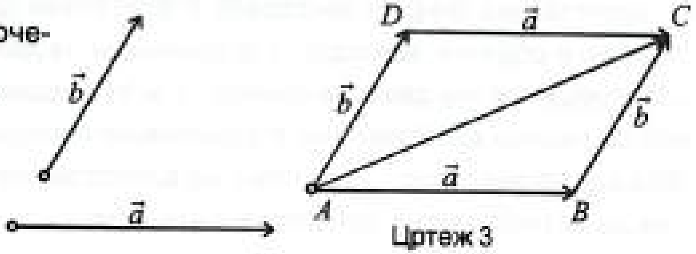
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$.

Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ се спротивни вектори, па според правилото на три точки имаме: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$. Векторот $\overrightarrow{AA}$ претставува една точка. Според дефиницијата за вектор, $\overrightarrow{AA}$ не е вектор. Но, се покажало како практично и корисно $\overrightarrow{AA}$ да се смета како ориентирана "***отсечка***" со должина нула. Според тоа, $\overrightarrow{AA}$ е вектор чиј почеток и крај се совпаѓаат и се вика ***нулти вектор*** или ***вектор нула***, а се означува $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. Интензитетот на нултиот вектор е нула, т.е. $\left|\overrightarrow{AA}\right|=0$. Значи, збирот на два спротивни вектори е нулти вектор, т.е. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Ако $\vec{a}$ е кој било вектор, тогаш важи равенството $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$. Нултиот вектор е колинеарен со кој било вектор.

3 Дадени се неколинеарните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Одреди го збирот $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{b}+\vec{a}$.

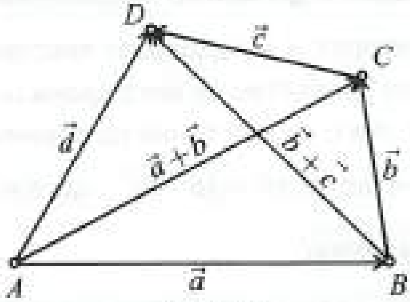
Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ги пренесуваме со ист почеток во точката A, така што $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Фигурата $ABCD$ е паралелограм (Т16), па $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$, т.е. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. Истото правило важи и за колинеарни вектори.



Цртеж 3

4 Даден е четириаголник $ABCD$, цртеж 4. Нека $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$; $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Покажи дека

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$$



Цртеж 4

Согледај го решението:

Според правилото на три точки имаме:

Од ΔACD следува: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$,

поради $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ добиваме

$\overrightarrow{AD}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$.

Од ΔABD следува $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, поради $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{c}$ добиваме $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$. Оттука следува $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Запомни!

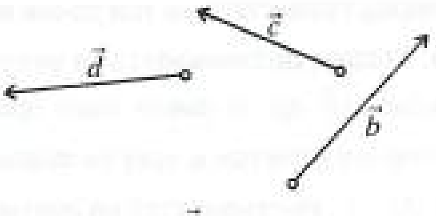
Ако $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се кои било вектори, тогаш точни се равенствата:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ .... комутативно својство;

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$................ асоцијативно својство.

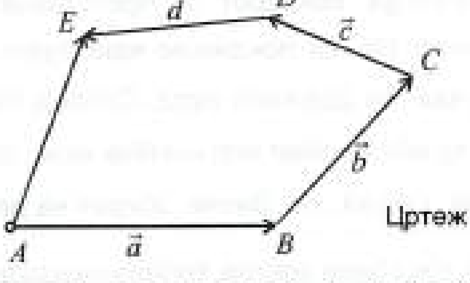
Асоцијативното својство овозможува да се најде збирот на повеќе вектори по пат на нивно надоврзување.

5 Најди го збирот на векторите дадени на цртеж 5.



Цртеж 5

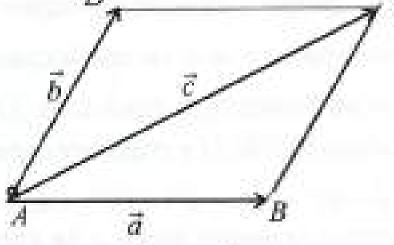
Согледај го решението:



Цртеж 6

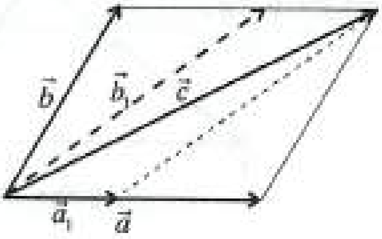
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

Според правилото на паралелограм (црт.7), векторот $\vec{c}$ претставува збир на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Може да се каже и обратно, векторот $\vec{c}$ е разложен на два собирoци, т.е. на две компоненти $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Паралелограмот со дадена дијагонала не е еднозначно определен, според тоа векоторот $\vec{c}$ не може на единствен начин да се разложи на две компоненти (црт. 8).

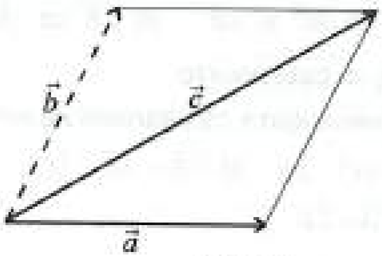


Цртеж 7

Ако е даден векторот $\vec{c}$ и една негова компонента $\vec{a}$, тогаш втората компонента $\vec{b}$ на единствен начин може да се определи, цртеж 9.



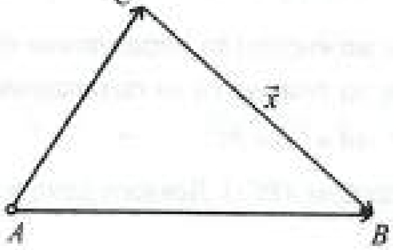
Цртеж 8



Цртеж 9

Ова сознание се користи во физиката при изучувањето на векторската величина сила.

5 Нека се дадени векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Одреди го векторот $\vec{x}$, така што $\overrightarrow{AC}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}$.



Според правилото на три точки, следува

$$\overrightarrow{AC}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}.$$

Разликата на два вектори се дефинира на ист начин како и разлика на два реални броја, т.е.

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{x}, \text{ ако } \overrightarrow{AB}=\vec{x}+\overrightarrow{AC}.$$

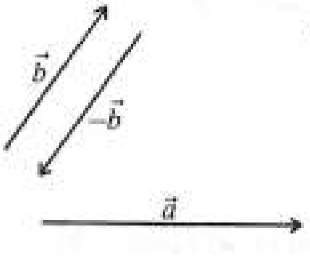
Запомни!

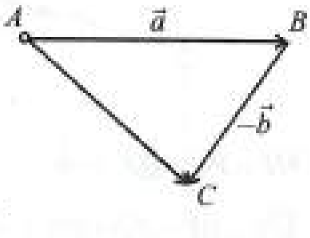
Разликата $\vec{a}-\vec{b}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ што имаат заеднички почеток е векторот $\vec{x}$, чиј почеток е во крајот на намалитетот, а крајот е во крајот на намаленикот, т.е. $\vec{x}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Познато е дека за реалните броеви a и b важи $a-b=a+(-b)$. Истото својство важи и за векторите, т.е. $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Значи, наместо да одземаме вектори, доволно е на векторот намаленик да му додадеме спротивен вектор на векторот намалител.

6 Најди ја разликата $\vec{a}-\vec{b}$, така што на векторот намаленик ќе му додадеш спротивен вектор на векторот намалител.

Согледај го решението:



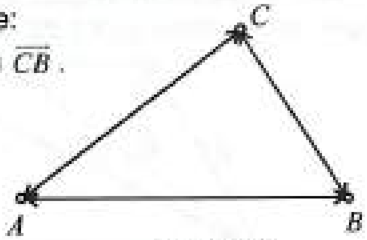


$\overrightarrow{AB}=\vec{a}; \overrightarrow{BC}=\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+(-\vec{b}),$

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}.$

7 Даден е триаголникот ABC, цртеж 10. Изрази ги векторите:
а) $\overrightarrow{AC}$ со $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CB}$ со $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{BA}$ со $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.



Цртеж 10

Согледај го решението:

Според дефиницијата за разлика на вектори имаме:

а) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$;

в) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

Задачи:

① Дадени се три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ со заедничка почетна точка O. Конструирај го нивниот збир.

② Дијагоналите на паралелограмот $ABCD$ се сечат во точката O. Упрости ги изразите:

а) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$; б) $\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OC}$; в) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}\right)+\overrightarrow{OA}$; г) $\overrightarrow{DO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

③ Даден е петаголник $ABCDE$. Најди барем четири можности за изразување на вектор $\overrightarrow{AB}$ како збир на ненулти вектори, со почеток и крај во темињата на петаголникот.

④ Дадени се три точки A, B и C. Најди го векторот $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

⑤ Точката O лежи во рамнината на даден паралелограм $ABCD$. Докажи дека е точно равенството $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

9 МНОЖЕЊЕ НА ВЕКТОР СО БРОЈ

Потсети се!

- Даден е векторот $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$;

Конструирај го векторот а) $\vec{a}+\vec{a}$;

б) $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$.

- Кои својства важат за множењето на реалните броеви?

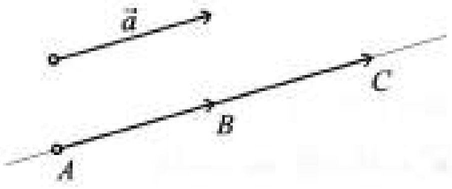
2 Даден е векторот $\vec{a}$. Конструирај го векторот:

а) $2\vec{a}$;

б) $-3\vec{a}$.

Согледај го решението:

а)



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\vec{a}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$.

б)

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QN}=-\vec{a}$;

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}=-\vec{a}+(-\vec{a})+(-\vec{a})=-3\vec{a}$.

Воочуваш дека векторите $2\vec{a}$ и $-3\vec{a}$ се колинеарни со дадениот вектор $\vec{a}$.

Векторот $2\vec{a}$ е исто насочен со векторот $\vec{a}$, а векторот $-3\vec{a}$ е спротивно насочен со векторот $\vec{a}$.

Запомни!

Ако $k \in \mathbb{R}$, тогаш $k \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot k$ е вектор со ист правец како векторот $\vec{a}$ и должина еднаква на $|k| \cdot |\vec{a}|$, т.е. $|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

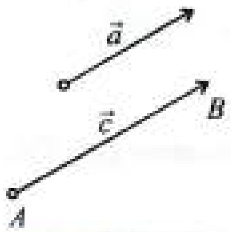
Векторот $k \cdot \vec{a}$ има иста насока со векторот $\vec{a}$, ако $k > 0$.

Векторот $k \cdot \vec{a}$ има спротивна насока со векторот $\vec{a}$, ако $k < 0$.

Воопшто, ако $k \in \mathbb{Z}$, тогаш $\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+...+\vec{a}}_{k} = k \cdot \vec{a}$.

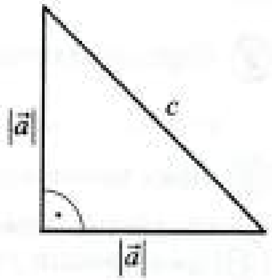
2 Избери произволен вектор $\vec{a}$ и конструирај ги векторите: $-2\vec{a}$; $\frac{3}{2}\vec{a}$; $-\frac{2}{3}\vec{a}$; $\sqrt{2}\vec{a}$.

Согледај го решението за конструкција на векторот $\sqrt{2}\vec{a}$:



Конструирај рамнокрак правоаголен триаголник со катета $|\vec{a}|$. Неговата хипотенуза е $c = \sqrt{2} \cdot |\vec{a}|$.

Бараниот вектор е $c = \overrightarrow{AB} = \sqrt{2}\vec{a}$.



Б Множењето на вектор со број има слични својства како множењето на број со број.

За секој вектор $\vec{a}$ точни се равенствата: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$; $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; $k \cdot \vec{0} = \vec{0}, k \in \mathbb{R}$. Точноста на овие тврдења следува непосредно од дефиницијата за множење на вектор со број.

Исто така, ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се кои било вектори, а k и m кои било реални броеви, тогаш точни се следниве равенства:

1. $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ .... асоцијативно својство;
2. $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ .... дистрибутивно својство на множење збир од броеви со вектор;
3. $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ .... дистрибутивно својство на множење збир од вектори со број.

Доказот на овие својства овде нема да го дадеме.

3 Даден е векторот $\vec{a}$. Конструирај ги векторите: а) $2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\vec{a}$; б) $-3 \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a}\right)$; в) $\left(\frac{1}{2}-2\right)\vec{a}$.

Упатство: Упрости го изразот, со примена на претходните равенства.

4 Дадени се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Конструирај го векторот $\vec{c}=2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

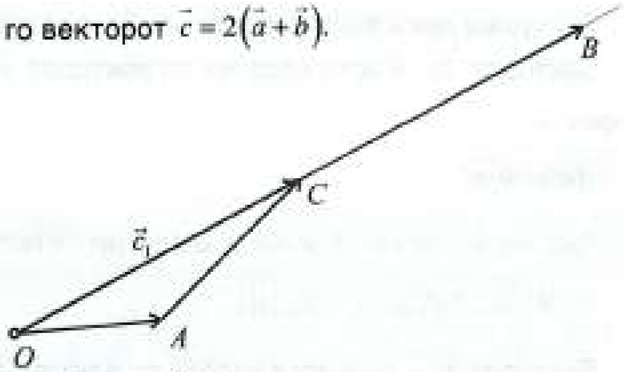
Согледај го решението:

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,

$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

$\vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b}$,

$\vec{c}=2\vec{c}_1=\overrightarrow{OB}$.



Конструирај го векторот $\vec{c}$, користејќи го својството 3.

5 Упрости ги изразите:

а) $2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+3\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$; б) $3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-4\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$; в) $3\left(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\right)+2\vec{b}-\left(\vec{a}+\vec{b}-6\vec{c}\right)$.

Задачи:

① Дадени се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Конструирај: а) $\vec{a}+2\vec{b}$; б) $\vec{a}-2\vec{b}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.

② Одреди го непознатиот вектор $\vec{x}$: а) $2\vec{x}-\vec{a}+\vec{b}=2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{x}$; б) $3\vec{a}-\vec{b}-2\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{x}$;

в) $\vec{a}-\vec{x}+3\vec{b}=2\vec{b}+\left(\vec{a}+\vec{x}\right)$.

③ Нека точките A, B, C и D се колинеарни, а нека M и N се средини на отсечките AB и CD, соодветно. Покажи дека $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

④ Нека точката S е пресек на дијагоналите на паралелограмот $ABCD$, а O е произволна точка. Докажи дека $4\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

⑤ Докажи дека средините на страните на кој било четириаголник се темиња на паралелограм.

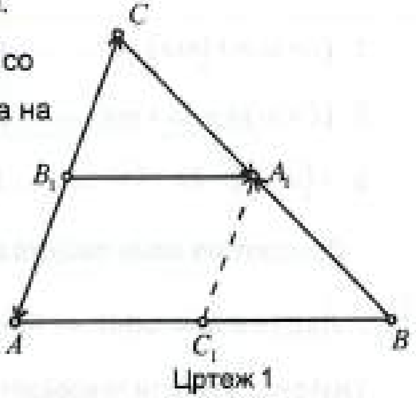
10 ПРИМЕНА НА ВЕКТОРИ

Некои математички тврдења може да се докажат на многу едноставен начин со помош на вектори. Тоа ќе го покажеме решавајќи ги следниве задачи.

1 Средната линија на триаголник е паралелна на страната со којашто нема заеднички точки, а нејзината должина е еднаква на половина од должината на таа страна.

Ова тврдење досега е докажувано со следните чекори:

- Низ A_1 повлекуваме права паралелна со страната AC.
- Докажуваме дека $\Delta C_1BA_1 \cong \Delta B_1A_1C$.
- Докажуваме дека $AB \parallel B_1A_1$, како прави на трансферзалата BC.



Цртеж 1

Обиди се да го изведеш доказот според наведените постапки.

Тврдењето ќе го докажеме со помош на вектори на следниот начин, цртеж 1.

Точките A_1 и B_1 се средини на страните AC и BC на триаголникот ABC.

Според правилото на три точки следува: $\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{CA_1}$. Со примена на правилото за надоврзување добиваме: $\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}$. Со собирање на овие равенства имаме:

$$2\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1};\quad 2\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{B_1A}\right)+\left(\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{BA_1}\right);$$

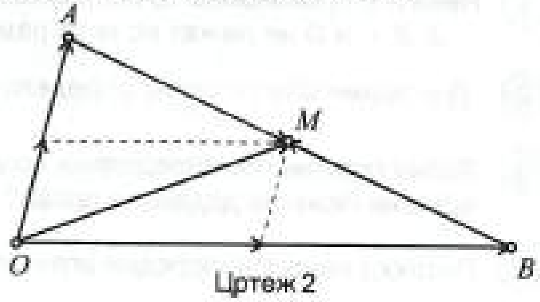
$$\overrightarrow{B_1A_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\vec{0}+\vec{0};\quad \overrightarrow{B_1A_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Од добиеното равенство следува $\left|\overrightarrow{B_1A_1}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$, а тоа значи дека векторите се колинеарни, т.е. $\overline{B_1A_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ и $B_1A_1 \parallel AB$, што требаше да се докаже.

Спореди ги двата начини на доказот и оцени кој од нив е поефикасен и порационален.

2 Докажи дека средната линија на трапез е еднаква на полузбирот од основите на трапезот и е паралелна со нив. Упатство: користи го решението на претходната задача.

3 Нека M е средна точка на осечката AB, а O е произволна точка. Докажи дека $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. Согледај го решението:



Цртеж 2

Според правилото на три точки имаме:

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$, цртеж 2.

$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)$,

$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\vec{0}$, $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}$ се спротивни вектори,

па $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

4 Нека A_1, B_1, C_1 се средини на страните на триаголникот ABC. Докажи дека:
$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.

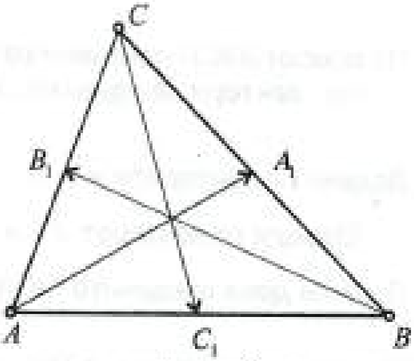
Согледај го решението.

Според решението на претходната задача имаме:

$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, па

$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)$, т.е.

$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\vec{0}+\frac{1}{2}\vec{0}+\frac{1}{2}\vec{0}=\vec{0}$.



Цртеж 3

Задачи:

① Нека T е тежиште на триаголникот ABC, а O произволна точка.

Докажи дека $\overline{OT}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$.

② Нека T е тежиште на триаголникот ABC. Докажи дека $\overline{TA}+\overline{TB}+\overline{TC}=\vec{0}$.

③ Ако S_1 и S_2 се средини на дијагоналите на трапезот $ABCD$, Докажи дека $\overline{S_1S_2}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}-\overline{CD}\right)$.

④ Во кружницата $k(O,r)$ е впишан четириаголник $ABCD$, чии дијагонали се заемно нормални и се сечат во точката S. Докажи дека е точно равенството: $\overline{OS}=\frac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}\right)$.

⑤ Во кружницата $k(O,r)$ е впишан е четириаголник $ABCD$, чии дијагонали се заемно нормални и за кој важи равенството $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=\vec{0}$.
Докажи дека тој четириаголник е квадрат.

Тематска контролна вежба

① Нека A е произволна точка. Покажи дека постојат точките B, C и D, така што точките A, B, C и D не лежат во иста рамнина.

② Две прави што се сечат определуваат само една рамнина. Докажи!

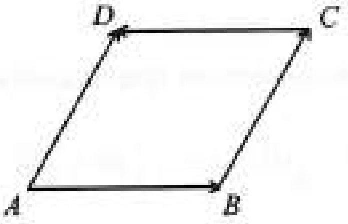
③ Колку рамнини се определени со една права и три неколинеарни точки, од кои ниту една не лежи на дадената права?

④ Разлика на два напоредни агли е прав агол. Одреди ги тие агли.

⑤ Одреди го бројот на дијагоналите во еден десетаголник.

⑥ Спротивните агли во тетивниот четириаголник се суплементни. Докажи!

⑦ На ромбот $ABCD$ означени се векторите.
Кои вектори се еднакви, а кои се спротивни?



⑧ Дадени се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Одреди го векторот $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$.

⑨ Докажи дека средините на страните на ромбот се темиња на правоаголник.

⑩ Нека T е тежиште на ΔABC. Докажи дека $\overline{TA}+\overline{TB}+\overline{TC}=\vec{0}$.

ТЕМА 5

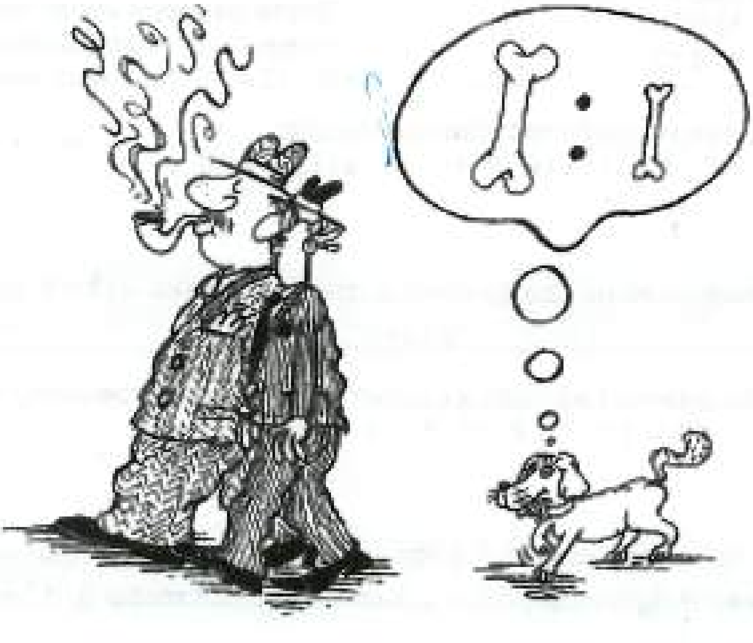
ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ НА ВЕЛИЧИНИТЕ

Суштината на математиката е во нејзината слобода.

Г. Кантор (1777-1855)

Во оваа тема ќе учиш за:

- право и обратнопропорционални величини;
- просто тројно правило;
- процентна и промилна сметка;
- делбена сметка и сметка на смеси;
- каматна сметка, проста каматна сметка.



I РАЗМЕР. ПРОПОРЦИЈА

Потсети се!

- На географската карта стои размерот 1:50000; 1:25000.
- Колкав е односот на броевите:

а) 9 и 45; б) $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$?

- Во кој однос тежиштето ја дели тежишната линија на триаголник?

А

1 Одреди ја вредноста на размерите:

а) $16:4$; б) $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ в) $2,5:0,5$.

- Вредноста на размерот се вика ***коефициент на пропорционалност*** и се означува со k.

2 Одреди го коефициентот на пропорционалност кај размерите:

а) $100:25$ б) $\frac{9}{4}:\frac{3}{2}$ в) $100m:25m$ г) $6kg:12kg$

- Воочуваш дека коефициентот на пропорционалност е неименуван број.

Запомни!

Размерот е количник од два неименувани броја или од мерните броеви на две еднородни величини, мерени во иста единица мерка.

3 Кои од следните количници не се размери:

а) $7:21$; б) $35:5$; в) $61:3\ cm$; г) $3\ kg:5\ km$; д) $25\ \ell:18\ \ell$; ѓ) $25\ \ell:18\ kg$?

Потсети се!

- Кои од следниве размери се еднакви?

а) $6:2$; б) $15:10$;
в) $4,5:3$; г) $5:2$.

Б

4 Која вредност имаат размерите: $18:12$ и $15:10$?

- Двата размери имаат иста вредност, па можеме да го запишеме равенството $18:12=15:10$, кое се вика ***пропорција***.

5 Од кои размери може да се состави пропорција:

а) $35:5$ и $42:6$; б) $15:3$ и $18:6$; в) $12:3$ и $20:5$

Запомни!

Пропорција е равенество на два еднакви размери, т.е., ако $a:b=k$ и $c:d=k$, тогаш

$$a:b=c:d.$$

6 Пресметај го производот на надворешените, односно внатрешните членови во пропорциите: а) $2:5=6:12$; б) $35:5=28:4$.

Запомни!

Производот на надворешните членови е еднаков со производот на внатрешните членови во пропорцијата, т.е. ако $a:b=c:d$, тогаш $a\cdot d=c\cdot b$.

7 Кое од дадените равенства е пропорција:

а) $25:35=10:14$; б) $17:12=7:2$; в) $2,6:1,2=1,5:0,5$; г) $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$?

8 Од равенствата: а) $5\cdot 6=15\cdot 2$; б) $3\cdot 4=6\cdot 2$ состави пропорција.

Согледај го решението: а) $5:2=15:6$ или $5:15=6:2$ или $6:2=15:5$.

Ако надворешните, односно внатрешните членови во пропорцијата ги заменат местата, равенството не се менува.

9 Одреди ја вредноста на непознатата x во пропорцијата $3:x=2:4$.

Согледај го решението: $3\cdot 4=2\cdot x$, или $x=6$.

Нека a,b и x се позитивни броеви, тогаш од пропорцијата $x:a=b:x$, следува $x=\sqrt{a\cdot b}$. Бројот x е ***геометриска средина*** од броевите a и b.

10 Пресметај ја геометриската средина на броевите: а) 9 и 16; б) 4 и 25.

Потсети се!

Дали дадено равенство ќе се промени, ако на левата и десната страна се додаде или одземе еден ист број?

Б **11** На левата и десната страна на равенството $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ додај, односно одземи 1.

Согледај го решението: Од $\frac{6}{4}+1=\frac{3}{2}+1$ добиваме $\frac{6+4}{4}=\frac{3+2}{2}$ или $(6+4):4=(3+2):2$.

Ако одземеме 1, имаме $(6-4):4=(3-2):2$.

Воопшто, со додавање, односно одземање на 1, на левата и десната страна на равенството $a:b=c:d$, добиваме нов вид пропорции,

$(a+b):b=(c+d):d$ или $(a-b):b=(c-d):d$, кои се викаат ***изведени пропорции***.

12 Одреди го непознатиот член во пропорциите: а) $(3-x):x=3:2$; б) $(2+x):x=5:3$.

Согледај го решението: б) $(2+x-x):x=(5-3):3$, односно $2:x=2:3$, т.е. $x=3$.

До решението можеш да дојдеш и од равенката $(2+x)\cdot 3=5x$.

Г **13** Одреди ја вредноста на размерите: $4:2$; $6:3$; $10:5$?

Трите размери имаат еднакви вредности, па оттука следува:

$$4:2=6:3=10:5=2 \text{ или}$$

$$4:6:10=2:3:5.$$

Воопшто, ако три или повеќе еднакви размери се поврзат со знакот "=", тогаш добиваме ново равенство кое се вика ***продолжена пропорција***, т.е.

од $a:a_1=b:b_1=c:c_1$, следува $a:b:c=a_1:b_1:c_1$.

Од продолжената пропорција $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k$, следува $a=a_1k$, $b=b_1k$ и $c=c_1k$.

14 Одреди ги x, y и z од пропорцијата $x:y:x=2:3:4$, ако нивниот збир е 27.

Согледај го решението: Од $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$ и условот $x+y+z=27$ добиваме $2k+3k+4k=27$,

од каде што $k=3$, па $x=6$, $y=9$ и $z=12$.

15 Сумата од 15000 денари подели ја на три дела, во однос $4:5:6$.

■ Во повеќе пропорции, ако првите и третите членови им се еднакви (или се доведат до еднакви), тогаш од нив може да се формира продолжена пропорција. Имено, од

$a:b=x:y$, $a:c=x:z$ и $a:d=x:t$, добиваме $a:b:c:d=x:y:z:t$.

16 Формирај продолжена пропорција од пропорциите:

$a:b=4:3$, $b:c=7:8$ и $c:d=6:9$.

Согледај го решението: Од $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$ и $\frac{b}{c}=\frac{7}{8}$ следува $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{8}$, т.е. $\frac{a}{c}=\frac{7}{6}$.

Од $\frac{a}{c}=\frac{7}{6}$ и $\frac{c}{d}=\frac{6}{9}$ следува $\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{d}=\frac{7}{6}\cdot\frac{6}{9}$, т.е. $\frac{a}{d}=\frac{7}{9}$.

Од $a:b=4:3$, $a:c=7:6$, $a:d=7:9$ следува $a:b=28:21$, $a:c=28:24$, $a:d=28:36$, т.е. $a:b:c:d=28:21:24:36$.

Задачи:

① Одреди го непознатиот член во пропорциите:

а) $3:2=x:4$; б) $x:3=15:9$; в) $4:x=2:3$ и г) $3:5=6:x$.

② Реши ги пропорциите:

а) $(3-x):x=1:5$; б) $(5-x):(5+x)=1:2$.

③ Сумата од 18000 денари да се раздели во однос $4:3:2$.

④ Формирај продолжена пропорција од пропорциите: $a:b=2:3$, $c:a=5:4$ и $d:b=7:3$.

⑤ Сумата од 65000 денари да се подели на четворица работници чии делови се a, b, c и d, та ка што за тие делови важи: $a:b=5:2$, $b:c=3:4$ и $c:d=2:9$.

2 ПРАВА И ОБРАТНА ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ. ПРОСТО ТРОЈНО ПРАВИЛО

A **1** Еден килограм јаболка чини 20 денари. Колку денари ќе чинат 2, 3, 4 килограми јаболка?

Еден трактор може да изора една нива за 8 дена. За колку дена истата нива ќе ја изораат 2, 4, 8 трактори?

Согледај го решението:

■ Зависноста на величините ќе ја дадеме табеларно:

а)

Количина	1	2	3	4
Денари	20	40	60	80

б)

Бр. тракт.	1	2	4	8
Денови	8	4	2	1

- Што воочуваш за нивната зависност?

За случајот а), воочуваме дека, колку пати се зголемува количината јаболка, толку пати се зголемува сумата денари.

Величините кои го задоволуваат ваквото својство се викаат ***право пропорционални*** величини.

За случајот б), воочуваш дека за колку пати се зголемува бројот на тракторите, за толку пати се намалува бројот на деновите.

Величините кои го задоволуваат ова својство се викаат ***обратно пропорционални*** величини.

2 Еден патник за 6 часа минал 24 km. Пресметај колку километри минал патникот за 1, 2, 3 часа?

3 Еден работник ја завршува некоја работа за 16 дена. За колку дена истата работа ќе ја завршат 2, 4, 8 работници?

4 Во каква зависност се:

а) страната и периметарот на квадрат;

б) радиусот и периметарот на круг;

в) времето и брзината кај рамномерното движење?

Б **5** Во едно училиште имало вкупно 600 ученици, распоредени во 15 паралелки со еднаков број ученици. Колку ученици има во 8 паралелки?

Согледај го решението.

↑ 15 паралелки	600 ученици ↑
8 паралелки	x ученици

Следува:

$$x:600=8:15$$
$$15x=8\cdot 600$$
$$x=320$$

Значи, во 8 паралелки има 320 ученици.

6 Една работа 8 работници ја завршуваат за 35 дена. За колку дена истата работа ќе ја завршат 10 работници?

Согледај го решението.

↑ 8 работници	35 дена ↓
10 работници	x дена

Следува:

$$x:35=8:10$$
$$10x=8\cdot 35$$
$$x=28$$

Значи, 10 работници ќе ја завршат работата за 28 дена.

Постапката за решавањето на ваков вид задачи е позната под името ***просто тројно правило*** и истата се состои во следното:

- Се согледува зависноста на величините, ако се право пропорционални, стрелките се исто насочени, а ако се обратно пропорционални, стрелките се спротивно насочени.
- Се формира пропорцијата и се пресметува непознатиот член.
- Се врши проценка на добиениот резултат.

7 Една работа можат да ја завршат 30 работници за 60 дена. Меѓутоа, на работа излегле 20 работници. По 10 дена на работа дошле уште 5 работници. За колку време ќе биде завршена целата работа?

Согледај го решението:

- Решението на задачата се состои во два дела. Прво определуваме за колку дена би ја завршиле работата 20 работници, па имаме:

↓	30 работници	60 дена	↑
↓	20 работници	x дена	↑

$$x:60=30:20,$$
$$x=90 \text{ дена.}$$

Значи, 20 работници целата работа би ја завршиле за уште $90-10=80$ дена.

- Во вториот дел одредуваме за колку дена ќе ја доршат работата 25 работници, па имаме:

↓	20 работници	80 дена	↑
↓	25 работници	x дена	↑

$$x:80=20:25,$$
$$x=64 \text{ дена.}$$

Целата работа ќе биде завршена за
$64+10=74$ дена.

Задачи:

① За 2000 денари купени се 50 kg јаболка. Колку килограми јаболка ќе се купат за 1400 денари?

② Ако 40 работници можат да ископаат 200 m^3 земја за определено време, тогаш колку работници за истото време и под исти услови за работа ќе ископаат 300 m^3 земја?

③ Една работа може да се заврши од 30 работници за 288 часа. Колку работници се потребни за истата работа да се заврши за 18 дена?

④ Осумдесет работници за одредено време прават пат со должина од 1600 m. Колку работници за истото време и под истите услови ќе направат пат од 10 km?

⑤ Според планот, 40 работници треба да завршат една работа за 27 дена. Работата ја започнале 18 работници и по 27 дена на работа дошле уште 32 работници. За колку време ќе биде завршена планираната работа?

3 ПРОЦЕНТНА И ПРОМИЛНА СМЕТКА

Потсети се!

- Стоти дел од целото претставува еден процент, т.е. $\frac{1}{100}=1\%$.
- 20 проценти е 20 стоти делови од целото.
- Краток запис за дропката $\frac{25}{100}$ е 25%.
- Познато ти е дека $0{,}36=\frac{36}{100}$.

  Воочуваш дека $0{,}36=36\%$.
- Општо, $p\%$ од A е $\frac{p}{100}A$.

А **1** Запиши ги во вид на процент:

а) $\frac{6}{100}$; $\frac{25}{100}$; $\frac{80}{100}$.

б) $0{,}15$; $0{,}6$; $0{,}02$.

в) 4; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$.

- Воочи ја постапката:

а) $\frac{8}{100}=\left(\frac{8}{100}\cdot 100\right)\%=8\%$;

б) $0{,}15=\frac{15}{100}=15\%$;

---

2 Во едно училиште има 600 ученици и од нив 450 се без слаби оценки. Колку се тие изразени во проценти?

3 Во една продавница има 850 пара чевли,од кои 18% се детски чевли. Колку пара детски чевли има во таа продавница?

Согледај го решението:

Од ↑ 100 пара 18 пара ↑
850 пара x пара

Со примена на просто правило тројно имаме:

$x:18=850:100$
$x=153$

Во продавницата има 153 пара детски чевли.

4 Некоја стока поскапела за 120 денари, што претставува 8% на старата цена. Одреди ја новата цена на стоката.

5 Од вкупно 450 ученици во едно училиште, 120 ученици учеле германски јазик. Колку проценти од учениците во тоа училиште учеле германски јазик?

Од претходните примери, согледа дека во задачите со проценти се застапени следните величини:

- ***константен број*** 100, значи целината претставува 100%;
- ***процент***, го означуваме со p $\left(p=\frac{p}{100}\right)$;
- ***основна*** или ***главна вредност***, а ја означуваме со S;
- ***процентен износ***, а го означуваме со i.

Врската меѓу овие величини најдобро ја добиваме од шемата:

Целина .... S ↑ одговара процент .... 100 ↑
Дел од целината .... i одговара процент .... p

. Оттука следува:

пропорцијата $p:100=i:S$, од каде што:

$$i=\frac{p\cdot S}{100},\quad S=\frac{100\cdot i}{p},\quad p=\frac{100\cdot i}{S}.$$

Постапката со која се пресметува која било од претходните величини се нарекува ***процентна сметка од сто.***

6 Пред шест години во едно село имало 4200 жители, а сега има 8% помалку. Колку жители има сега во тоа село? Согледај, дадени се $S=4200$ и $p=8$, а се бара i и $S-i$.

Имаме, $i=\frac{S\cdot p}{100}=\frac{4200\cdot 8}{100}=336$, а тоа значи во селото има $4200-336=3864$ жители.

7 Во едно претпријатие канцелариските трошоци од 3500 денари се зголемиле за 490 денари. Колку проценти изнесува зголемувањето? Воочи, дадени се $S=3500$ и $i=490$.

Следува, $p=\frac{100\cdot i}{S}=\frac{100\cdot 490}{3500}=14$. Значи, трошоците се зголемиле за 14%.

8 Нормата во една фабрика е натфрлена за 15%, односно за 810 парчиња. Колку парчиња изнесува нормата? Воочуваш дека $i=810$, $p=15$, а се бара S, па $S=\frac{100\cdot i}{p}=\frac{100\cdot 810}{15}=5400$.

Според тоа, нормата е 5400 парчиња.

Потсети се!

- Илјадити дел од целото е промил.
- 65 промили е 65 илјадити делови од целото.
- Краток запис на дропката $\frac{65}{1000}$ е 65‰ .

На пример, 1‰ од 3000 е $\frac{1}{1000}\cdot 3000=3$;

5‰ од 3000 е $\frac{5}{1000}\cdot 3000=15$, или општо

p‰ од A е $\frac{p}{1000}\cdot A$.

Б Зборот промил потекнува од латинскиот збор “pro mile”, што во превод значи “на илјада”.

Задачите во кои се работи со промили се задачи од ***промилна сметка***.

Во промилната сметка се застапени величините:

- константен број 1000, значи целината претставува 1000‰;
- промил, означен со p;
- основна вредност (главнина), како S;
- промилен износ, означен со i.

Слично на процентната сметка, имаме:

$$i=\frac{S\cdot p}{1000};\quad S=\frac{1000\cdot i}{p};\quad p=\frac{1000\cdot i}{S}.$$

9 При превозот на 5500 kg домати, 40‰ од нив се неупотребливи. Колку килограми домати се неупотребливи?

Воочи, $S=5500$, $p=40$‰, а се бара i, па $i=\frac{S\cdot p}{1000}=\frac{5500\cdot 40}{1000}=220$, т.е. 220 kg домати се неупотребливи.

10 Една агенција за добиената сума од 42000 евра дала 1260 евра провизија. Колку промили изнесува провизијата?

Бидејќи $S = 42000$ и $i = 1260$, $p = \frac{1000 \cdot i}{S} = \frac{1000 \cdot 1260}{42000} = 30$. Бараната провизија е $30‰$.

***Задачи*:**

① Во едно училиште има 850 ученици. Од нив 18% се одлични, 28% се многу добри, 24% се добри, 22% се доволни, а останатите го повторувале класот. Одреди го бројот на учениците според успехот и пресметај колку ученици повторувале.

② Цената на еден производ е намалена за 7,5%, односно за 6,75 денари. Најди ја цената на производот пред намалувањето.

③ Набавната цена на еден производ изнесува 3000 денари, а продажната 3450 денари. Колку проценти изнесува маржата?

④ Цената на еден производ е намалена за 15%, а потоа така добиената цена е зголемена за 5% и сегашната цена изнесува 1606,60 денари. Пресметај ја почетната цена на тој производ.

⑤ По одбивањето на провизија $3‰$, примени се 735786 денари. Колку денари изнесува провизијата?

⑥ Трошоците во едно претпријатие се намалени за $7,5‰$ и сега изнесуваат 4255 денари. Колкави трошоци имало претпријатието пред нивното намалување?

4 ДЕЛБЕНА СМЕТКА. СМЕТКА НА СМЕСИ

Потсети се!

$x : y : z = a : b : c = k$ или $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$,

$x = ak$, $y = bk$ и $z = ck$.

A За решавање на проблемот, една величина да се подели на повеќе еднакви делови при исти услови, се применува ***делбена сметка***. Начинот на таква поделба ќе го согледаме преку следните задачи.

1 За првите три награди освоени на еден натпревар одобрени се 35000 денари, кои треба да се поделат во однос $1 : 2 : 4$. Одреди ги висините на наградите.

Согледај го решението: Од $x : y : z = 1 : 2 : 4 = k$, следува $x = k$, $y = 2k$ и $z = 4k$.

Следствено, $x + y + z = 35000$, или $k + 2k + 4k = 35000$, односно $7k = 35000$, т.е. $k = 5000$.

Според тоа, доделени се наградите: 5000 ден., 10000 ден. и 20000 ден.

2 Еден трговец продал 8500 kg брашно, 12400 kg шеќер, 34600 kg ориз и 90500 kg компир и за тоа добил 18250 денари маржа. Колкава маржа добил трговецот за секој вид продадена стока, ако маржата за секоја стока е пропорционална со масата на секоја стока?

Согледај го решението: Ако со x, y, z и t ги означиме добиените маржи за брашното, шеќерот, оризот и компирот, соодветно, тогаш од условот на задачата имаме:

$$x : y : z : t = 8500 : 12400 : 34600 : 90500 = k, \text{ па } x + y + z + t = 18250,$$

односно $8500k + 12400k + 34600k + 90500k = 18250$, т.е. $k = 0,125$.

Според тоа, бараните маржи се: $x = 1062,50$; $y = 1550,00$; $z = 4325,00$ и $t = 11312,00$ денари.

3 Сумата од 3420 денари треба да се подели на четири лица, така што после првото лице секое наредно да добие 50 денари повеќе од претходното лице. По колку денари ќе добие секое лице?

Од условот на задачата следува: $x+(x+50)+(x+100)+(x+150)=3420$, од каде $x=780$.

Значи, поделбата по лица е: 780, 830, 880 и 930 денари.

Потсети се!

Колку литри вода треба да се додаде на $100\,\ell$ алкохол со јачина од 80%, за да се добие алкохол со јачина од 50%?

Б

Во практичниот живот, а особено во стопанските дејности, често се мешаат разни видови стоки или стоки од ист вид, а со цел да се добие производ (смеса) со одредена цена или квалитет.

Одредувањето на цената, квалитетот или односот на стоките што се мешаат се врши со таканаречената ***сметка на смеси***.

При решавањето на задачите со сметка на смеси, треба да се запази основниот принцип: ***вредноста на смесата треба да биде еднаква на збирот од вредностите на стоките што се составни делови на смесата***.

За определување на цената на смесата, треба да бидат познати цените и количествата на стоките што се мешаат.

Добиената цена на смесата се вика ***просечна цена*** или ***пондер цена***.

Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ се цените на n стоки што се мешаат, $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_n$ се нивните соодветни маси и c е цена на смесата. Тогаш, според споменатиот принцип имаме:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n=c(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)\text{, т.е.}$$

$$c=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}.$$

4 Во една продавница располагаат со три сорти вино, и тоа: $6\,\ell$ по цена од 125 ден., $4\,\ell$ по цена од 105 ден. и $10\,\ell$ по цена од 130 денари за $1\,\ell$. Наведените количини вино се помешани. Одреди ја цената на литар вино од добиената мешавина.

За решението имаме: Нека $a_1=125$, $a_2=105$, $a_3=130$, $b_1=6$, $b_2=4$ и $b_3=10$ тогаш за бараната цена добиваме: $c=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{b_1+b_2+b_3}=\dfrac{125\cdot 6+105\cdot 4+130\cdot 10}{6+4+10}=123{,}5$ денари.

	$6\,\ell$	по цена 125 ден. има вредност 750 ден.
Проверка:	$4\,\ell$	по цена 105 ден. има вредност 420 ден.
	$10\,\ell$	по цена 130 ден. има вредност 1300 ден.
	$20\,\ell$	по цена 123,5 ден. има вредност 2470 ден.

5 Производител на ракија има на располагање $40\ l$ од $80\ grad.$, $30\ l$ од $70\ grad.$ и $20\ l$ од $60\ grad.$ Колку литри вода треба производителот да стави во ракијата што ја има, за да добие ракија со јачина $50\ grad.$?

Согледај го решението:

$$40\cdot 80+30\cdot 70+20\cdot 60+x\cdot 0=(40+30+20+x)\cdot 50 \text{ или } (90+x)\cdot 50=6500 \text{, т.е. } x=40 .$$

Значи, ако се стават $40\ \ell$ вода, ќе се добие ракија со јачина $50\ grad.$

За да се направи смеса од два вида стоки со различен квалитет, по однапред одредена цена, треба да се знае односот од количините стоки што се мешаат. Според принципот за сметка на смеси, имаме:

$$a_1b_1+a_2b_2=c(b_1+b_2) \text{, или } b_1(c-a_1)=b_2(a_2-c) \text{, т.е. } b_1:b_2=(a_2-c):(c-a_1) .$$

Од добиената пропорција можеме да формираме шема, наречена ***сметка на ѕвезда***, т.е.

$$\begin{tikzcd}
b_1 & a_1 \arrow[dr, dash] & & (a_2-c) \\
& & c \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
b_2 \arrow[uu] & a_2 \arrow[ur, dash] & & (c-a_1) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

, од која се воочува дека вредностите b_1 и b_2 се пропорционални со вредностите (a_2-c) и $(c-a_1)$.

6 Во една продавница има стока со два различни квалитети, чии цени се 9 денари и $11,5$ денари по килограм. Во кој однос треба да се помешаат двете сорти стока, за да се добие мешавина со цена од 10 денари по килограм?

Согледај го решението: Познати се: $a_1=9$, $a_2=11,5$ и $c=10$, а се бара односот $b_1:b_2$. Ја составуваме сметката на ѕвезда, па имаме:

$$\begin{tikzcd}
b_1 \arrow[dd] & 9 \arrow[dr, dash] & & 1{,}5 \arrow[dd] \\
& & 10 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
b_2 & 11{,}5 \arrow[ur, dash] & & 1
\end{tikzcd}$$

, од која добиваме: $b_1:b_2=1,5:1$, т.е. $b_1:b_2=3:2$, а тоа значи дека двете сорти стока треба да се помешаат во однос $3:2$.

7 Една продавница располага со две сорти пченица. Од првата сорта земени се $6\ kg$ по цена од $12,63$ денари по килограм. Другата сорта пченица има цена $12,9$ денари по килограм. Колку килограми пченица треба да се земе од втората сорта, за да се добие смеса со цена од $12,75$ денари по килограм?

Согледај, $b_1=6$, $a_1=12,63$, $a_2=12,9$ и $c=12,75$.

$$\begin{tikzcd}
6 \arrow[dd] & 12{,}63 \arrow[dr, dash] & & 0{,}15 \arrow[dd] & 15 & 5 \\
& & 12{,}75 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
b_2 & 12{,}9 \arrow[ur, dash] & & 0{,}12 & 12 & 4
\end{tikzcd}$$

Од шемата добиваме $6:b_2=5:4$. Оттука следува $b_2=4,8$ килограми.

Треба да знаеш!

☐ Ако $x:y:z=a:b:c$ или $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$, тогаш $x=ak$, $y=bk$ и $z=ck$;

☐ Ако a_1, a_2, a_3,..... се цени на стоки, b_1, b_2, b_3,..... се соодветни маси, тогаш цената на добиената смеса е $c=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+...}{b_1+b_2+b_3+...}$..

☐ За определување на односот на две помешани стоки, ја користиме шемата:

$$\begin{tikzcd}
b_1 \arrow[dd] & a_1 \arrow[ddrr] & & (a_2-c) \arrow[dd] \\
& & c & \\
b_2 & a_2 \arrow[uurr] & & (c-a_1)
\end{tikzcd}$$

Од шемата следува пропорцијата

$$b_1:b_2=(a_2-c):(c-a_1)\ .$$

Задачи:

① Односот на вантрешните агли на триаголник е $2:3:4$. Одреди ги нивните големини.

② Во изградбата на еден пат учествувале четворица работника и притоа одработиле по 24; 30; 38 и 40 дена, соодветно. За извршената работа добиле вкупно 66000 денари и истите треба да ги поделат пропорционално со работните денови. По колку ќе добие секој работник?

③ За изградба на една хала инвеститорот дал 450000 денари. Во изградбата на халата учествувале три работни бригади, од кои едната работела 3, другата 5, а третата 7 дена. Одреди ја заработката на секоја бригада, пропорционално на работните денови.

④ Помешани се две сорти вино, така што од виното што има цена 36 денари по литар се земени 200 *l*, а од виното со цена 45 денари по литар се земени 100 *l*. Одреди ја цената на помешаното вино.

⑤ Трговец од фабриката за сокови бара 731 *l* сок по цена од 23 денари за литар. Фабриката располага со сокови по цена од 17; 21; 25 и 30 денари по литар. По колку литри од секој сок треба да се помешаат, за да се задоволи желбата на купувачот?

5 ПРОСТА КАМАТНА СМЕТКА

Потсети се!

За процентната сметка и нејзините величини важат формулите:

$i=\frac{S\cdot p}{100}$; $S=\frac{100\cdot i}{p}$; $p=\frac{100\cdot i}{S}$, каде што

p-процент; *i*-процентен износ; *S*-основна вредност.

А На вложените пари во банките, како и на земените кредити, се пресметува ***камата*** (одобрена или задолжена). Каматата претставува процентен износ на вложената или позајмената сума. Синоним на поимот камата се поимите ***интерес*** или ***лихва***.

Ако каматата се пресметува само на почетната сума (почетен капитал), тогаш таа се вика ***проста камата***, а делот од математиката што се занимава со пресметувањето на простата камата или другите величини што се во врска со неа, се вика ***проста каматна сметка***. Во таква сметка учествуваат величините:

- основна вредност или капитал K;
- каматна стапка (процент) p;
- време на вкаматување t;
- камата i.

Ако каматата се пресметува на почетокот на вложувањето, тогаш тоа се нарекува ***антиципативно*** вкаматување; ако, пак, тоа пресметување се врши на крајот на периодот, се нарекува ***декурзивно*** вкаматување.

За пресметување на годишната камата ќе ја користиме формулата $i=\frac{K\cdot p\cdot t}{100}$.

1 Колкава е каматата на вложената сума од 5000 денари за време од 6 години со каматна стапка од 8%?

Од условот на задачата имаме: k=5000, t=6 и p=8, а се бара i, па

$i=\frac{K\cdot p\cdot t}{100}=\frac{5000\cdot 8\cdot 6}{100}=2400$. Значи, камата изнесува 2400 денари.

2 Во банка е вложена сума од 6000 денари, за време од 5 години и каматна стапка 6%. Пресметај го износот на каматата.

Ако времето на вкаматувањето е дадено во месеци или денови, тогаш за пресметување на каматата ја користиме формулата: $i=\frac{K\cdot p\cdot t}{1200}$, односно $i=\frac{K\cdot p\cdot t}{36000}$.

3 Вложени се во банка 10000 денари со 6% каматна стапка и за време од 8 месеци. Колкава камата треба да исплати банката?

Бидејќи K=10000, p=6 и t=8, бараната камата е: $i=\frac{K\cdot p\cdot t}{1200}=\frac{10000\cdot 6\cdot 8}{1200}=400$.

Значи, банката треба да исплати 400 денари на име камата.

4 Вложена е во банка сума од 15000 денари со каматна стапка од 8%, за време од 6 месеци. Колкава камата ќе исплати банката?

5 Еден штедач вложил во банка 12000 денари за време од 8 месеци и 24 дена. Колкава камата ќе добие штедачот, ако каматната стапка е 6%?

Согледај го решението: Според дадените податоци имаме: $i=\frac{K\cdot p\cdot t}{36000}=\frac{12000\cdot 6\cdot 264}{36000}=528$,

а тоа значи дека банката ќе исплати камата 528 денари.

6 Колкава камата од банката ќе добие вложувачот на сумата од 18000 денари, за време од 6 месеци и 18 дена и со 8% каматна стапка?

7 На 10 февруари вложени се во банка 5000 денари, а на 8 јули е добиена камата од 150 денари. Со која каматна стапка е пресметана каматата? Согледај го решението:

Времето за кое ќе се пресмета каматата изнесува: $18+31+30+31+30+8=148$ дена, па за p имаме: $p=\frac{36000\cdot i}{K\cdot t}=\frac{36000\cdot 150}{5000\cdot 148}\approx 7,3$. Според тоа, каматната стапка изнесува 7,3%.

Задачи:

① Штедач вложил во банката извесна сума пари со 7,5% каматна стапка и за 7 месеци и 28 дена добил 3784 денари камата. Одреди го вложениот капитал.

② Вложената сума од 5600 денари за 12 години донела камата 4350 денари. Колкава е каматната стапка?

③ За кое време сумата од 50000 денари со 6% каматна стапка ќе донесе 1300 денари камата?

④ Некој човек позајмил 260 денари и се согласил после 9 месеци да ја врати позајмената сума заедно со каматата во вкупен износ од 275,6 денари. Колкава е каматната стапка?

6 РАБОТА СО ПОДАТОЦИ. СЕКТОРСКИ ДИЈАГРАМ

Потсети се!

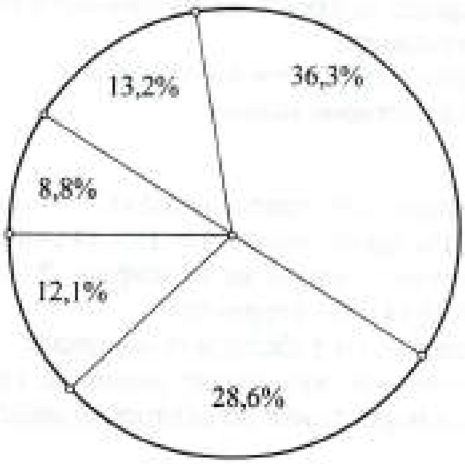
Податоците дадени во проценти или како дел од целото, најчесто се претставуваат со секторски дијаграм.

А 1 Податоците за тоа како 90 ученици одат во училиште се дадени во табелата што следува. Претстави ги нив со секторски дијаграм.

Начин на патување	Пеш	Велосипед	Автобус	Такси	Автомобил
Број на ученици	11	26	33	12	8

- Кругот има 360^0. Поделен со 90 (бројот на учениците) е 4^0. Овој агол (4^0.) е аголот што на секторскиот дијаграм одговара на 1 ученик, а тоа е 100:90=1,1%.
- Бидејќи 11 ученици одат пеш, тогаш $11\cdot4^0=44^0$ е аголот што одговара на секторот за одење на училиште пеш, а тоа е $11\cdot1{,}1=12{,}1\%$.
- На сличен начин се обработуваат и другите податоци.

Секторски дијаграм



2 Во табелата се дадени податоци за времето на станување на 500 лица од спиење.

- **Дадените податоци претстави ги со секторски дијаграм.**

Време на станување	Број на луѓе
меѓу 5 и 6 часот	135
меѓу 6 и 7 часот	180
меѓу 7 и 8 часот	85
меѓу 8 и 9 часот	100
Вкупно	500

3 Во една библиотека имало 700 книги. Тие биле групирани како: лектири, научни, учебници и сликовници. Податоците се претставени со секторскиот дијаграм.

- Одреди го бројот на прирачници, научни книги и сликовници.
- Колку степени има аголот на секторот што ги претставува лектирите?
- Колкав е бројот на лектирите во библиотеката?

4 Анкетирани се матурантите од скопските гимназии што ќе студираат. За архитектура и градежништво се определиле 210 ученици.

- Воочи го секторскиот дијаграм.
- Одреди го бројот на матурантите во гимназиите.
- Колку матуранти ќе студираат општествени науки?

Воочуваш, 15% претставуваат 210 ученици. Значи, 1% претставува 210 : 15 = 14 ученици. Општествени науки ќе студираат 31% или вкупно 31·14 =434 студенти.

Податоците во табелата покажуваат на кој начин се загадуваат океаните. Претстави ги податоците со секторски дијаграм.

Загадување од реките	54%
Загадување од воздухот	33%
Од рибарство	12%
Производство на нафта	1%

Тематска контролна вежба

1. Одреди ја вредноста на променливата x во пропорцијата $(x+2):x=5:3$.

2. Одреди ги x, y и z од пропорцијата $x:y:z=2:3:4$, ако $x+y+z=18$.

3. Една работа може 72 работници да ја завршат за 45 дена. За колку дена истата работа ќе ја завршат 60 работници?

4. Колку камата ќе донесе капиталот од 50000 денари, вложен во банка за време од 9 години со каматна стапка 8%?

5. Едно лице, заедно со 2,5‰ провизија, примило 600 денари. На која сума е пресметана провизијата?

6. Сумата од 770 денари да се подели на четири дела, обратно пропорционално на сумите: a=200, b=300, c=400 и d=500.

7. Колкава е просечната цена на смесата добиена со мешање на 200 l вино со цена 36 денари за литар и 100 l вино со цена 45 денари за литар?

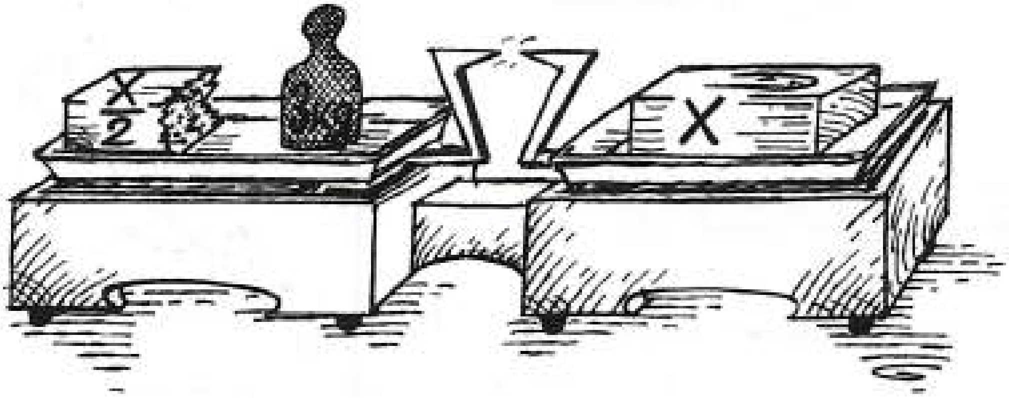
ТЕМА 6

ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА И НЕРАВЕНКА

> *Нашиот разум [illegible] од бесконечниот дух ги открива природните закони*
>
> Г. Б. Лајбниц (1646-1716)

Во оваа шема ќе учиш за:

- Декартов правоаголен систем;
- растојание меѓу две точки;
- плоштина на триаголник зададен со координати на темињата;
- линеарна функција, график и својства на линеарна функција;
- линеарни равенки, еквивалентност и одредување на решенија на равенките;
- дискусија на решенијата на линеарните равенки;
- решавање на практични проблеми со користење на линеарни равенки;
- линеарни неравенки и одредување на нивните решенија.

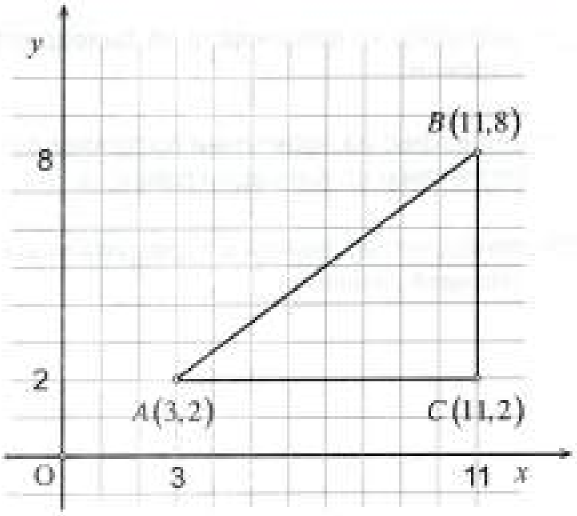


1

ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ, РАСТОЈАНИЕ МЕЃУ ДВЕ ТОЧКИ

Потсети се!

- Што е Декартов правоаголен координатен систем?
- Во правоаголен координатен систем xOy прикажи ги точките $A(0,2), B(-3,0), C(-2,4)$.
- Одреди го растојанието меѓу точките $A(3,0)$ и $B(7,0)$.



- Катетите на правоаголниот триаголник ABC се:

$\overline{AC} = \overline{A_1B_1} = x_2 - x_1; \overline{BC} = \overline{A_2B_2} = y_2 - y_1$.

За бараното растојание добиваме:

$$d = \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

3 Одреди го растојанието меѓу точките:

а) $A(2,3)$ и $B(6,0)$; б) $M(-3,-2)$ и $N(5,4)$.

Согледај го решението:

б) $= \sqrt{(5+3)^2 + (4+2)^2} = 10$

A **1** Во правоаголен координатен систем xOy претстави ги точките

$A(3,2)$ и $B(11,8)$.

Одреди го растојанието меѓу точките A и B.

- Согледај го цртежот:
- Низ точките A и B повлекуваме прави паралелни со координатните оски.
- Одреди ги координатите на добиената точка C.
- Од кој вид е триаголникот ABC?

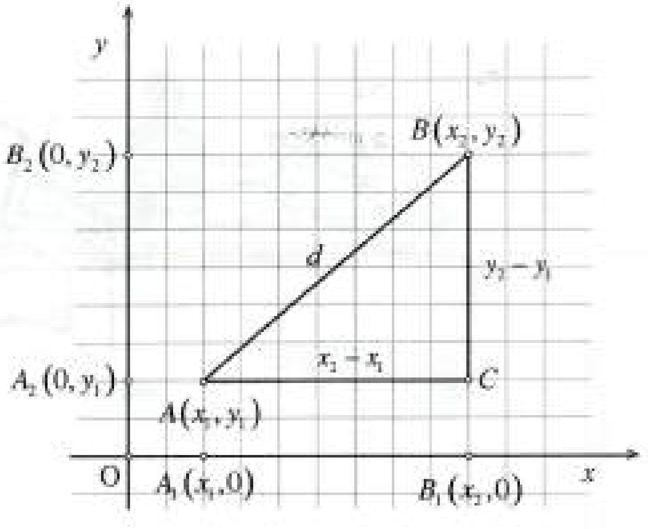
Одреди ги должините на отсечките AC и BC. Воочуваш дека:

- $\overline{AC} = 11 - 3 = 8,\ \ \overline{BC} = 8 - 2 = 6$.
- Според Питагоровата теорема, имаме:

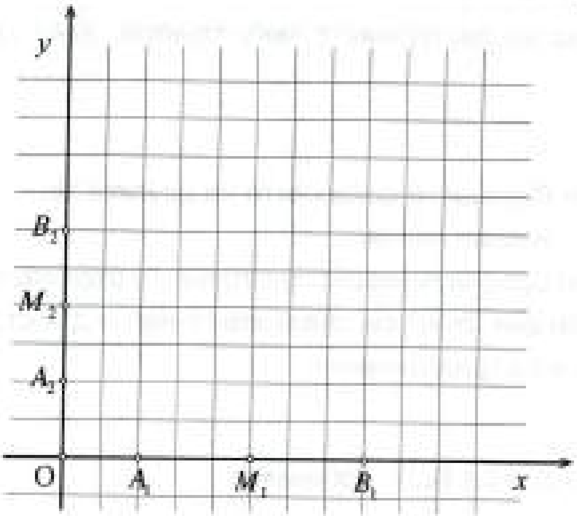
$$\overline{AB} = d = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\ .$$

2 Одреди го растојанието меѓу точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

Согледај го решението.



4 Дадени се точките $A_1(2,0); B_1(8,0); A_2(0,2); B_2(0,6)$. Одреди ги координатите на средната точка на отсечките A_1B_1 и A_2B_2. Решение. Нека M_1 и M_2 се средни точки на отсечките A_1B_1 и A_2B_2, соодветно.



Тогаш, $\overline{A_1M_1} = \overline{B_1M_1}$ и $\overline{A_2M_2} = \overline{B_2M_2}$.

Од $\overline{A_1M_1} = x-2$ и $\overline{B_1M_1} = 8-x$, добиваме $x-2 = 8-x$ или $2x = 8+2$,

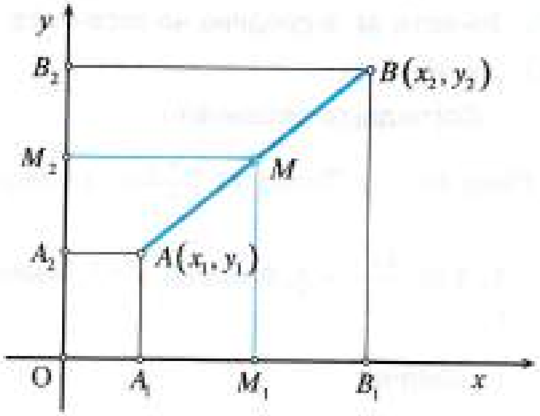
$$\text{т.е. } x = \frac{8+2}{2} = 5.$$

Од исти причини, $\overline{A_2M_2} = \overline{B_2M_2}$, односно

$$y-2 = 6-y, \text{ т.е. } y = \frac{6+2}{2} = 4.$$ Значи,

средните точки се $M_1(5,0)$ и $M_2(0,4)$.

5 Точката M е средина на отсечката AB. Одреди ги координатите на точката M, ако $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.



Нека точките $A_1, B_1, A_2, B_2, M_1, M_2$ се ортогонални проекции на точките A, B и M врз координатните оски. Очигледно, точката M_1 е средина на отсечката A_1B_1, па нејзината апсциса е $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Аналогно, M_2 е средна точка на отсечката A_2B_2 и нејзината ордината е $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Според тоа, координати на средната точка $M(x, y)$ на отсечката AB се:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ и } y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \text{ т.е. } M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

6 Одреди ги координатите на средната точка на отсечката AB, $A(-2,3)$ и $B(4,-2)$.

7 Даден е триаголникот ABC, $A(4,-3), B(2,3), C(0,1)$. Одреди:

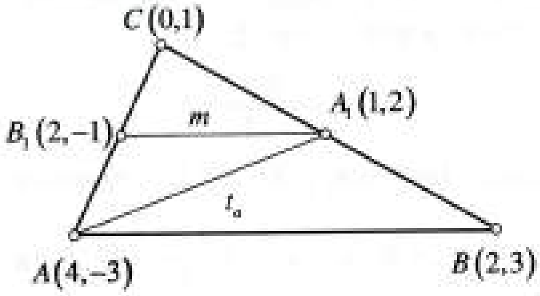
а) периметар на дадениот триаголник;

б) должина на тежишните линии на триаголникот;

в) должина на средните линии на триаголникот.

Согледај го решението:

■ б) Тежишната линија е отсечка чии крајни точки се теме на триаголникот и средната точка на спротивната страна. Во случајов, една тежишна линија на триаголникот ABC е отсечката AA_1, па нејзината должина е еднаква на растојанието меѓу точките $A(4,-3)$ и $A_1(1,2)$, односно $d=\overline{AA_1}=\sqrt{(1-4)^2+(2+3)^2}=\sqrt{34}$.



● Одреди ги должините на другите тежишни линии.

в) Средна линија на триаголник е отсечка чии крајни точки се средните точки на две страни на триаголникот.

За должината на средната линија B_1A_1, $B_1(2,-1)$, $A_1(1,2)$, добиваме:

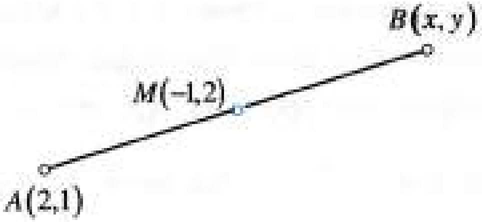
$$m=\overline{B_1A_1}=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}.$$

● Одреди ги должините на другите средни линии.

8 Точката M е средина на отсечката AB. Одреди ги координатите на точката B, ако $A(2,1)$ и $M(-1,2)$.

Согледај го решението:

■ Нека $B(x,y)$. Тогаш од $\frac{2+x}{2}=-1$ следува $x=-4$, а од $\frac{1+y}{2}=2$, следува $y=3$. Значи, $B(-4,3)$.



Задачи:

① Дадена е точката $M(-3,7)$. Одреди ги координатите на точката што е симетрична на дадената точка во однос на:

а) x – оската; б) y – оската; в) координатниот почеток.

② Точките $A(3,-7)$ и $B(-1,4)$ се две соседни темиња на квадратот $ABCD$. Пресметај периметар и плоштина на тој квадрат.

③ На x – оската определи точка што е на еднакво растојание од точките $A(-1,3)$ и $B(2,5)$.

④ На y – оската определи точка која од точката $M(4,-6)$ е на растојание 5 единици.

⑤ Дадена отсечка AB со точките $P(2,2)$ и $Q(1,5)$ е поделена на три еднакви дела. Одреди ги координатите на крајните точки на дадената отсечка.

⑥ Точките $A(3,-5)$; $B(5,3)$; $C(-1,3)$ се темиња на паралелограмот $ABCD$. Одреди ги координатите на четвртото теме.

⑦ Дадени се две соседни темиња $A(3,-5)$ и $B(5,-3)$ на паралелограмот $ABCD$ и пресечната точка $M(1,1)$ на дијагоналите. Одреди ги координатите на другите две темиња.

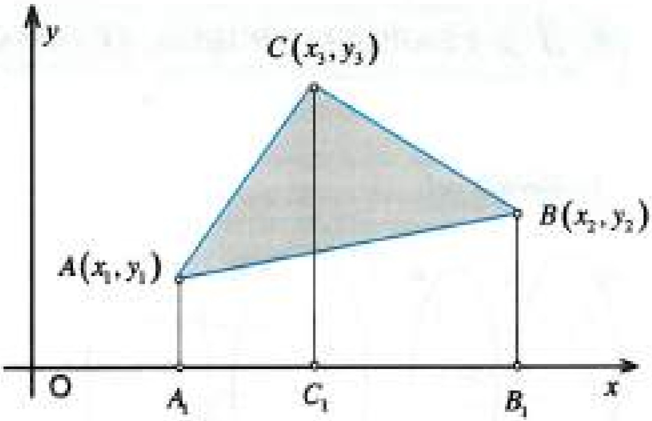
2 ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

Потсети се!

- Плоштината на трапез со основи a и b, а висина h е:

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

A **1** Пресметај ја плоштина на триаголникот $A(x_1,y_1)$; $B(x_2,y_2)$; $C(x_3,y_3)$.



- Воочуваш дека четириаголниците: $AA_1C_1C; CC_1B_1B; AA_1B_1B$ се трапези, при што A_1,B_1,C_1 се ортогонални проекции на темињата A, B и C врз x оската.

- Дали ги препознаваш основите и висините на тие трапези?

- Согледај го пресметувањето:

$$P_{AA_1C_1C}=\frac{y_1+y_3}{2}(x_3-x_1)=\frac{1}{2}(y_1+y_3)\cdot(x_3-x_1),$$

$$P_{CC_1B_1B}=\frac{1}{2}(y_3+y_2)(x_2-x_3),$$

$$P_{AA_1B_1B}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1).$$

За плоштината на триаголникот ABC имаме: $P_{ABC}=P_{AA_1C_1C}+P_{CC_1B_1B}-P_{AA_1B_1B}$, па со замена на претходните изрази добиваме:

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|.$$

Од причини што плоштината е ненегативен број, формулата е под знак на апсолутна вредност.

2 Одреди ја плоштината на триаголникот ABC, ако $A(-3,-1), B(2,1)$ и $C(-1,3)$.

Задачи:

① Одреди ја плоштината на триаголникот чии темиња се $A(1,2)$; $B(3,-1)$ и $C(-2,-5)$.

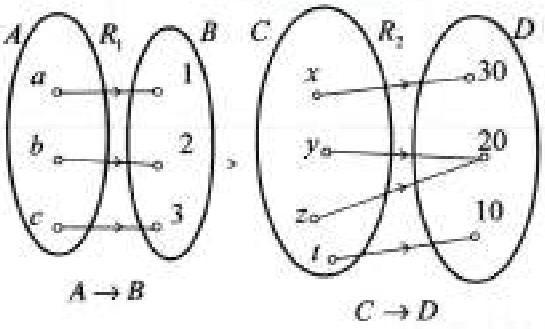
② Дадени се темињата на триаголник: $A(3,6)$; $B(-1,3)$ и $C(2,-1)$. Одреди ја должината на висината повлечена од темето C.

③ Две темиња на еден триаголник се точките $A(5,1)$ и $B(-2,2)$, третото теме лежи на x – оската. Одреди ги неговите координати, ако плоштината на триаголникот е 10 квадратни единици.

④ Плоштината на еден паралелограм изнесува 12 квадратни единици. Две негови соседни темиња се точките $A(-1,3)$ и $B(-2,4)$. Определи ги другите две темиња на тој паралелограм, ако пресечната точка на неговите дијагонали лежи на x – оската.

3 РЕАЛНА ФУНКЦИЈА. ГРАФИК НА ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Потсети се!



Релацијата од множеството A кон множеството B во којашто секој елемент од множеството A е во релација само со еден елемент од множеството B се вика ***пресликување*** или ***функција***.

𝒜 Поимот функција зазема едно од централните места во математиката. Функциите со реални променливи се само еден специјален случај од областа на пресликувањето. Нека A и B се две непразни множества и нека на секој елемент x од A му е придружен, по некој пропис f, еднозначно определен елемент y од B. На овој начин е определено пресликувањето f од A кон B и запишуваме $f:A\to B$. За y велиме дека е слика на x и означуваме:

$$f:x\to y \text{ или } y=f(x).$$

Множеството A се вика ***домен***, а множеството B се вика ***кодомен***.

Доменот најчесто го означуваме со D и притоа, ако доменот D е подмножество на множеството реални броеви $\mathbb{R}$ и ако f е пресликување од D во $\mathbb{R}$, тогаш велиме дека f е ***реална функција***. Доменот D или D_f го викаме ***дефиниционо множество*** на функцијата f, а множеството од сите слики на кодоменот се означува со V_f и се вика ***множество на вредности*** на фукцијата, односно:

$$V_f = \{y | y \in \mathbb{R}, y = f(x), x \in D_f\}.$$

Ако при задавањето на функцијата не е назначен доменот D_f, ќе сметаме дека доменот се сите реални броеви за кои таа функција има смисла.

На пример: функцијата $f(x) = 2x$ е дефинирана за секое $x \in \mathbb{R}$ и $D_f = \mathbb{R}$, а функцијата $f(x) = \frac{1}{x}$ е дефинирана за сите реални броеви освен за $x = 0$, или $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, т.е. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1 Нека е дадена функцијата $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$. Одреди: а) D_f; б) $f(1)$; $f(0)$; $f(-2)$.

Согледај го решението:

а) $x + 1 \neq 0$, $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ или $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

б) $f(-2) = \frac{2 \cdot (-2) + 3}{-2+1} = 1$.

Потсети се!

Каква зависност меѓу себе имаат:

а) патот и времето кај рамномерно движење, $S = V \cdot t$;

б) радиусот и периметарот на круг, $L = 2r\pi$;

в) страната и периметарот на квадрат, $L = 4a$?

Функцијата од видот $f(x) = ax + b$ или $y = ax + b$, каде $a, b \in \mathbb{R}$ се вика ***линеарна функција***. Притоа,

a - ***коефициент пред аргументот***, а

b - ***слободен член***.

За линеарната функција $y = ax + b$, имаме:

- a и b се константи (т.е. реални броеви);
- доменот е множеството на реални броеви;
- графикот на линеарната функција е множеството $G = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y = ax + b\}$.

Потсети се!

- Каде се претставува графикот на линеарната функција?
- Што е графикот на линераната функција?
- Што треба да знаеш за да го нацрташ графикот на линераната функција?

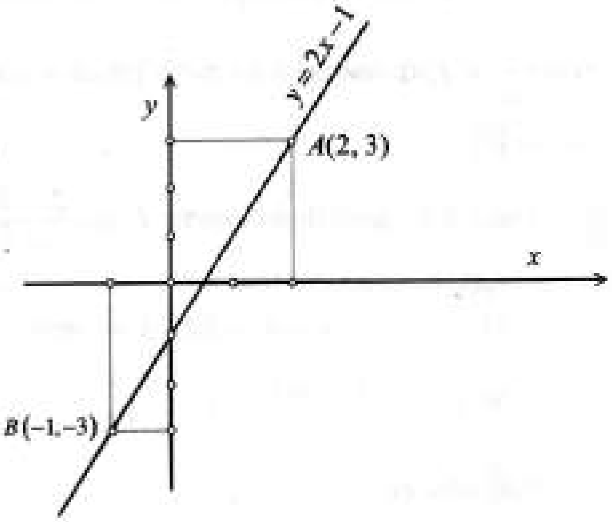
- Графикот на линеарната функција го претставуваме во Декартов координатен систем.
- Познато е дека графикот на линеарната функција е секогаш права. Според аксиомата за определеност на права, доволно е да знаеме две точки од тој график.

- На цртежот е претставен графикот на функцијата $y=2x-1$.

Точките $A(2,3)$ и $B(-1,-3)$ ја определуваат правата, бидејќи

$(-1,-3)\in G$ и $(2,3)\in G$.

Вообичаено се вели дека добиената права е “***график на функцијата*** $y=2x-1$”.



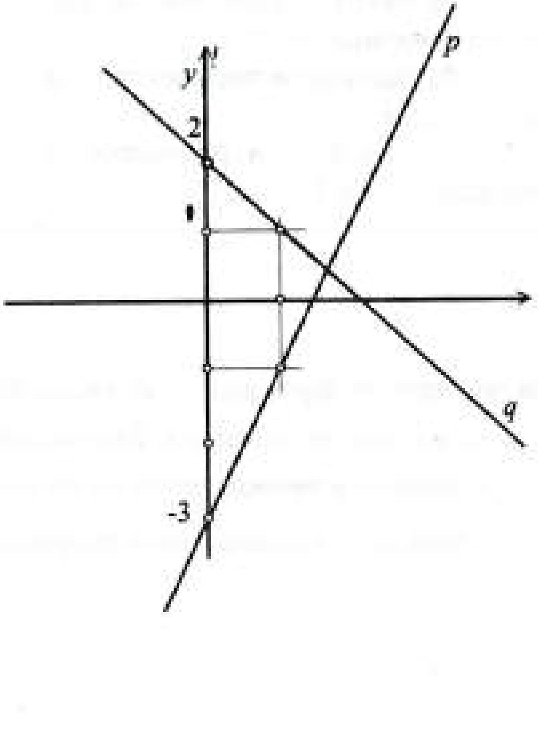
2 На ист координатен систем нацртај ги правите што ги претставуваат функциите $y=2x-3$ и $y=-x+2$.

- Дадените функции ги претставуваме табеларно:

p: $y=2x-3$ $\qquad$ q: $y=-x+2$

x	y
0	-3
1	-1
2	1

x	y
1	1
0	2
-1	3



3 Нацртај ги правите со кои графички се претставени функциите:

а) $y=x-3$; б) $y=-2x+1$; в) $y=\frac{1}{2}x-3$.

Задачи:

① Дадена е функцијата $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$. Одреди: а) D_f; б) $f(-1)$; в) $f(0)$; г) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

② Нацртај го графикот на функциите: а) $y=2x+3$; б) $y=-2x+3$; в) $y=\dfrac{1}{3}x-1$; г) $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

4 СВОЈСТВА НА ЛИНЕАРНАТА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Што е графикот на линеарната функција?
- Како се црта нејзиниот график?
- Провери која од точките $A(2,-1)$, $B(0,2)$ и $C(-1,-3)$ лежи на правата $y=3x+2$.

A 1 Во ист координатен систем нацртај го графикот на функциите:

а) $y=\dfrac{1}{2}x+2$; б) $y=\dfrac{1}{2}x$; в) $y=\dfrac{1}{2}x-3$.

- Што воочуваш?
- Што можеш да заклучиш?

Согледај го решението: Дадените функции ги претставуваме табеларно и графички:

а) $y=\dfrac{1}{2}x+2$

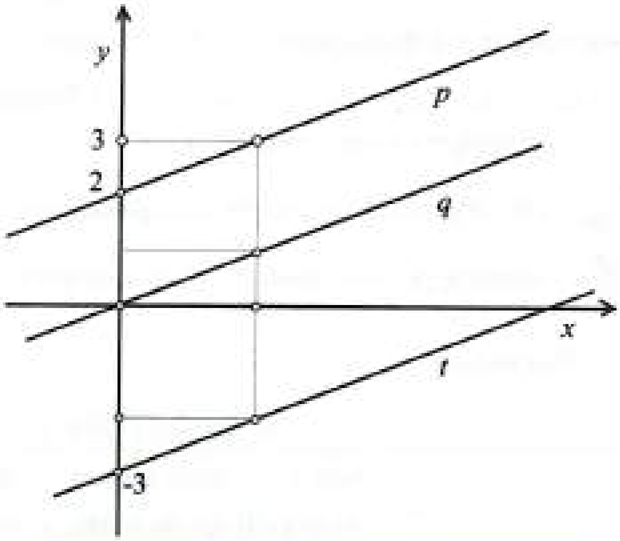
x	y
2	3
0	2
-2	0

б) $y=\dfrac{1}{2}x$

x	y
2	1
0	0
-2	-1

в) $y=\dfrac{1}{2}x-3$

x	y
2	-2
0	-3
-2	-4



Запомни!

Ако коефициентите пред аргументот на линеарните функции се еднакви, тогаш нивните графици се паралелни прави.

Графикот на линеарната функција $y=ax+b$ ја сече y - оската во точката со координати $(0,b)$.

Вредноста на аргументот за која функцијата е еднаква на нула, се вика ***нула*** на функцијата.

2 Дадени се функциите: $y=-\frac{1}{2}x+2$ и $y=-\frac{1}{2}x-1$.

а) Каква меѓусебна положба имаат нивните графици?

б) Определи ги пресечните точки на нивните графици со координатните оски.

3 Одреди го параметарот k во функциите $y=(k-1)x+3$ и $y=(2k+3)x$, така што нивните графици да се паралелни прави.

- Коефициентот a на функцијата $y=ax+b$ се вика ***коефициент на правец*** и од неговата вредност зависи ***менувањето*** на функцијата, т.е. дали функцијата ***расте*** или ***опаѓа***.
- Ако $a=0$, тогаш $y=0\cdot x+b$, т.е. $y=b$ и функцијата е константна, а нејзиниот график е права паралелна со x – оската.
- Ако графикот на линеарната функција е права паралелна со y – оската, тогаш таа е од видот $x=m$.

4 Во ист координатен систем претстави ги графиците на функциите $y=3$ и $x=2$.

За монотоноста на линеарната функција важи следното:

- Функцијата ***монотоно расте*** ако за кои било $x_1,x_2\in D_f$ и $x_2>x_1$, $f(x_2)>f(x_1)$, т.е.

$$f(x_2)-f(x_1)>0.$$

- Функцијата ***монотоно опаѓа*** ако за кои било $x_1,x_2\in D_f$ и $x_2>x_1$, $f(x_2)<f(x_1)$, т.е.

$$f(x_2)-f(x_1)<0.$$

На пример, за функцијата $y=2x+3$ имаме: $f(x_2)=2x_2+3$ и $f(x_1)=2x_1+3$, па

$f(x_2)-f(x_1)=2x_2+3-2x_1-3=2(x_2-x_1)$. Бидејќи $x_2>x_1$, т.е. $x_2-x_1>0$, следува $f(x_2)-f(x_1)>0$, т.е. функцијата монотоно расте.

5 Испитај ја монотоноста на функцијата $y=\frac{1}{2}x-1$.

6 Испитај ја монотоноста на функцијата $y=-2x+1$.

Запомни!

Ако $a>0$ функцијата $y=ax+b$ монотоно расте.

Ако $a<0$ функцијата $y=ax+b$ монотоно опаѓа.

Ако $a=0$ функцијата $y=ax+b$ е константна.

7 За која вредност на параметарот k, функцијата $y=(2k-1)x+3$ монотоно:

а) расте; б) опаѓа; в) е константна?

Согледај го решението:

- б) Функцијата $y=(2k-1)x+3$ монотоно опаѓа ако $2k-1<0$, т.е. ако $k<\frac{1}{2}$.

8 Одреди го слободниот член b во функцијата $y=2x+b$, ако нејзиниот график минува низ точката: а) $A(-1,2)$; б) $B(2,-3)$. Потоа за добиената вредност на b нацртај го графикот на функцијата.

Согледај го решението:

а) Од $2=2\cdot(-1)+b$ следува $b=4$, па функцијата е $y=2x+4$.

9 Одреди ја функцијата $y=ax+b$, ако нејзиниот график минува низ точките $A(-1,0)$ и $B(2,3)$.

Согледај го решението:

Координатите на точките A и B ја задоволуваат равенката $y=ax+b$ и оттука се добива системот равенки:

$$\begin{cases}-a+b=0\\ 2a+b=3\end{cases},$$ од каде што $a=1$ и $b-1$.

Според тоа, бараната функција е $y=x+1$.

10 Одреди ја функцијата $f(x)=ax+b$, чиј график минува низ точката $A(-1,3)$ и ја сече апсцисната оска во $x=4$.

11 Пресметај ја плоштината на триаголникот ограничен со координатните оски и графикот на функцијата $y=2x+4$.

Задачи:

① Претстави ги графички функциите: а) $y=x-2$; б) $y=2x+3$; в) $y=-2x+1$; г) $y=\frac{1}{2}x-1$; д) $y=-2$; ѓ) $x=3$.

② Одреди ги координатите на пресечните точки на графикот на функцијата: а) $y=x-1$; б) $y=2x-3$; в) $y=-3x+6$ со координатните оски.

③ Одреди ја линеарната функција која минува низ точките:

а) $A(2,-3)$ и $B(0,-1)$; б) $C(2,-4)$ и $D(-3,0)$;

④ За која вредност на параметарот k, графикот на функцијата $y=(k-1)x+1$ е паралелен со апсцисната оска?

⑤ За која вредност на параметарот m, графиците на функциите $y=mx+1$ и $y=(2m-3)x+1$ се паралелни прави?

⑥ За која вредност на параметарот k, графикот на функцијата $y=(k+1)x-2$ е паралелен со графикот на функцијата $y=2x+1$?

5 ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Потсети се!

Равенките од видот: $2x-1=3$; $3x-x+2+2x=0$; $\frac{x-2}{2}-\frac{x}{3}=1$ се линеарни равенки со една непозната.

Одреди ги решенијата на дадените равенки.

А **1** Ако M и N се два алгебарски изрази и ако барем еден од нив содржи непозната, тогаш равенството

$$M = N$$

се вика ***алгебарска равенка***.

На пример, за $M = x^2-2$ и $N=\frac{2x-1}{3}$, равенството $x^2-2=\frac{2x-1}{3}$ е алгебарска равенка.

Ако во дадена равенка $M = N$ непознатата се замени со одреден реален број a и притоа таа равенка премине во ***точно бројно равенство***, тогаш за бројот a велиме дека е *решение* или *корен* на дадената равенка.

Сите решенија на една равенка го сочинуваат ***множеството решенија*** на таа равенка.

Некои равенки имаат повеќе решенија, но има и равенки чие множество решенија е празно. На пример, равенката $x(x-1)(x+2)=0$ има три решенија, и тоа $x\in\{-2,1,0\}$, додека, пак, равенката $x^2+1=0$ во множеството $\mathbb{R}$ нема решенија. (Зошто?)

Одреди ги множествата решенија на равенките: $x+2=\frac{1}{3}+2x$ и $3x-6x=-5$.

Согледај го решението: $x-2x=\frac{1}{3}-2, x=1\frac{2}{3}$; $-3x=-5, x=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$.

Множествата решенија на дадените равенки се еднакви, $x\in\left\{1\frac{2}{3}\right\}$. Значи, тие равенки се еквивалентни.

Потсети се!

Две равенки во исто дефинициono множество се еквивалентни ако нивните множества решенија се еднакви.

Реши ги равенките $2x+2=5-x$ и $4x+5=10-x$.

Воочуваш дека тие равенки имаат еднакви множества решенија, што значи се еквивалентни.

Некои својства за еквивалентност на равенките.

1. Ако кон левата и десната страна на равенката $M = N$ додадеме еден ист број или израз p што е дефиниран во истото множество на непознатата, се добива равенка еквивалентна на дадената.

2 Реши ја равенката $2x-2=4+x$. Додај го на левата и десната страна изразот $(-x+2)$.

Последица 1. Секој член на равенката може да се пренесе од една на друга нејзина страна, но со спротивен знак.

Последица 2. Ако на различни страни во равенката има еднакви членови, тогаш тие можат да се изостават (да се поништат).

2. Ако двете страни на равенката $M = N$ се помножат или поделат со еден ист број $a \neq 0$, се добива равенка еквивалентна на дадената.

3 Реши ја равенката $5x = 2x + 9$.

Согледај го решението:

$$5x = 2x + 9$$
$$5x - 2x = 9$$
$$3x = 9$$
$$x = \frac{9}{3}$$
$$x = 3.$$

■ Ако по извршеното сведување на алгебарската равенка $M = N$ се добие равенка само со една непозната од прв степен, тогаш таа равенка се вика ***линеарна равенка со една непозната***.

■ Секоја линеарна равенка со една непозната може да се доведе во видот

$ax = b$, каде $a, b \in \mathbb{R}$.

Б

4 Реши ги равенките: а) $2x - 3 = x + 6$; б) $2x - 1 = 3 + 2x$; в) $x - 3 = 2x - 3 - x$.

Согледај го решението:

а) $2x - 3 = x + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - x = 6 + 3$,

т.е. $x = 9$

б) $2x - 1 = 3 + 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 2x = 3 + 1$

$\Leftrightarrow 0 \cdot x = 4$

в) $x - 3 = 2x - 3 - x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 2x + x = -3 + 3$

$\Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$

Сигурно воочи дека равенката $2x - 3 = x + 6$ има едно решение, равенката $2x - 1 = 3 + 2x$ нема решение, а равенката $x - 3 = 2x - 3 - x$ има бесконечно многу решенија.

■ Во зависност од вредноста на реалните броеви a и b во равенката $ax = b$, имаме:

1. Ако $a \neq 0$, тогаш равенката има едно решение $x = \dfrac{b}{a}$.
2. Ако $a = 0 \wedge b \neq 0$, тогаш равенката нема решение, т.е. е невозможна.
3. Ако $a = 0 \wedge b = 0$, тогаш равенката е од видот $0 \cdot x = 0$, па има бесконечно многу решенија.

5 Дискутирај го решението на равенката $2x + 2ax = b$.

Согледај го решението:

Дадената равенка е еквивалентна со равенката $2(1 + a)x = b$.

1. За $a + 1 \neq 0$, т.е. $a \neq -1$, равенката има едно решение $x = \dfrac{b}{2(a+1)}$.
2. За $a = -1 \wedge b \neq 0$, равенката е од видот $0 \cdot x = b$, што значи нема решение.
3. За $a = -1 \wedge b = 0,$, се добива равенката $0 \cdot x = 0$ која има бесконечно многу решенија.

Задачи:

① Провери дали равенките се еквивалентни:

а) $\frac{1+2x}{3}=\frac{4x-1}{5}$ и $10x-12x=-8$;   б) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5x}{6}+1$ и $6x-5x=6$.

② Реши ги равенките: а) $\frac{2x-1}{3}-\frac{1-x}{4}=\frac{x}{2}$;   б) $\frac{5x+1}{8}+\frac{3x-1}{4}-\frac{4x-3}{3}-1=0$;

в) $(x+1)^2-(x-1)^2=4$;   г) $(3x-1)^2+(4x+3)^2=(5x+4)^2$.

③ Дискутирај го решението на равенките:

а) $ax+a+1+x=0$;   б) $a(x+b)+b(x+a)=0$.

6 ЗАДАЧИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

Некои видови равенки, на пример дробно рационалните, можат со еквивалентни трансформации да се доведат во видот $ax=b$.

1 Реши ја равенката $\frac{x+2}{x}-\frac{x-2}{x+1}=\frac{9x}{x^2+x}$.

Согледај ја постапката:

Треба да се одреди дефиниционото множество на равенката. Во овој случај, за $x=0$ и $x=-1$ равенката нема смисла, т.е. равенката е дефинирана за $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$.

Потоа двете страни на равенката ги множиме со НЗС $\left(x,x+1,x^2+x\right)=x\cdot(x+1)$.

Добиваме: $(x+2)\cdot(x+1)-x\cdot(x-2)=9x$. Оттука следува $x=\frac{1}{2}$ е решение на равенката, бидејќи припаѓа во дефиниционото множество на равенката.

2 Реши ја равенката $\frac{2x-5}{x+3}+\frac{1+3x}{x^2+6x+9}=2$.

Согледај го решението:

Равенката има смисла за $x+3\neq0$, т.е. $x\neq-3$,

па равенката $\frac{2x-5}{x+3}+\frac{1+3x}{(x+3)^2}=2\,\Big|\cdot(x+3)^2,\ x\neq-3$ е еквивалентна со равенката

$$(2x-5)(x+3)+1+3x=2(x+3)^2.$$

Оттука следува $x=-4$ е решение на равенката.

3 Одреди го коренот (решението) на равенката: $\frac{a-5}{x-3}+\frac{2a+3}{x+3}=\frac{x-3a}{x^2-9}$.

Согледај го решението:

Равенката е дафинирана за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$. По множењето со НЗС $(x-3,x+3,x^2-9)=x^2-9$, добиваме: $(a-5)(x+3)+(2a+3)(x-3)=x-3a$, т.е. $(a-1)x=8$.

За $a\neq-1$ равенката има решение $x=\frac{8}{a-1}$.

За $a=1$, равенката е од видот $0\cdot x=8$, т.е. равенката нема решение.

4 Одреди го решението на равенката $\frac{8}{x^2-2x+1}+\frac{9x-37}{x^3-x^2-x+1}-\frac{7}{1-x^2}=0$.

Согледај ја постапката:

Да го одредиме НЗС треба секој именител да го разожиме на линеарни множители:

$$A=x^2-2x+1=(x-1)(x-1),$$

$$B=x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x^2-1)(x-1)=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1),$$

$$C=x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Оттука следува дека НЗС $(A,B,C)=(x-1)^2(x+1)$, па добиваме:

$$\frac{8}{(x-1)^2}+\frac{9x-37}{(x-1)^2(x+1)}+\frac{7}{(x-1)(x+1)}=0\,\Big|\cdot(x-1)^2(x+1),\ x\notin\{-1,1\},$$ или

$$8(x+1)+9x-37+7(x-1)=0,\text{ т.е. } x=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$$

Задачи:

Одреди ги решенијата на равенките:

① $\frac{1}{x+1}+\frac{5}{2x+2}=\frac{3}{2}$; ② $\frac{4}{12x+15}-\frac{5}{8x+10}+\frac{7}{6}=0$; ③ $\frac{9}{5x}-\frac{8}{10x-5}=\frac{4x-1}{4x^2-1}$;

④ $\frac{1}{2x-5}+\frac{4}{3x}-\frac{13}{6x^2-15x}=0$; ⑤ $\frac{4+a}{x-1}=3-a$.

7 ПРИМЕНА НА ЛИНЕАРНИТЕ РАВЕНКИ

Во овој дел ќе разгледаме некои примери чие решавање се сведува на составување и решавање на линеарна равенка со една непозната.

1 Бројот 48 да се подели на два дела, така што едниот дел да е три пати поголем од другиот.

Согледај го решението:

Нека помалиот дел е x, тогаш поголемиот дел ќе биде $3x$. Оттука следува равенката $x+3x=48 \Leftrightarrow x=12$. Значи, едниот дел е 12, а другиот 36.

2 Некој двоцифрен број е 6 пати поголем од цифрата на единиците, а збирот на неговите цифри е 6. Кој е тој број?

Согледај го решението:

Нека $\overline{xy}=10x+y$ е бараниот број, во кој x е цифра на десетки, а y цифра на единици. Тогаш, од условот на задачата следува дека цифрата на единици е $6-x$, равенката е $10x+(6-x)=6(6-x)$, од каде $x=2$. Значи, бараниот број е 24.

3 Таткото сега има 53 години, а синот 17 години.

а) После колку години таткото ќе биде три пати постар од синот?

б) Пред колку години таткото бил десет пати постар од синот?

Согледај го решението:

а) После x години таткото ќе биде три пати постар од синот. Од условот на задачата следува:

	сега	*после x години*
Татко	53	$53+x$
Син	17	$17+x$

, или

$53+x=3(17+x)$, т.е. $x=1$. Значи, после една година таткото ќе биде три пати постар од синот.

4 Една цевка може сама да наполни базен за 20 часа. Ако едновремено се отвори и втора цевка, тогаш двете цевки заедно ќе го наполнат базенот за 8 часа. За колку часа втората цевка сама ќе го наполни базенот?

Согледај го решението: Нека x е време за кое втората цевка сама ќе го наполни базенот.

За еден час првата цевка ќе наполни $\frac{1}{20}$, втората $\frac{1}{x}$, а заедно $\frac{1}{8}$ од базенот. Според тоа, имаме: $\frac{1}{20}+\frac{1}{x}=\frac{1}{8}\Big|\cdot 40x,\ x\neq 0$ или $2x+40=5x$, т.е. $x=\frac{40}{3}$.

Според тоа, втората цевка сама ќе го наполни базенот за 13 часа и 20 минути.

5 Еден патник тргнал на пат движејќи се со просечна брзина од 30 km на ден. После 6 дена по него тргнал друг патник и по 9 дена одење го стигнал првиот патник. Со која просечна брзина се движел вториот патник?

Решение. Бидејќи двајцата патници поминале ист пат, од условот на задачата добиваме: $S_1 = S_2$, или $30\cdot(6+9)=V\cdot 9$, т.е. $V=50$. Значи, вториот патник се движел со просечна брзина од 50 km на ден.

6 Еден работник сам би ја завршил една работа за 12 дена. Откако работел три дена, му помогнал друг работник што може целата работа сам да ја заврши за 15 дена. За колку дена ќе биде завршена работата?

Воочи го решението: Првиот работник за три дена завршил $\frac{3}{12}$ од работата, а двајцата работници за еден ден заедно ќе завршат $\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)$ од работата. Според тоа, имаме:

$\frac{3}{12}+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)\cdot t=1\Leftrightarrow\frac{3}{12}+\frac{9t}{60}=1\Big|\cdot 60\Leftrightarrow t=5$, а тоа значи дека работата ќе се заврши за 5+3 = 8 дена.

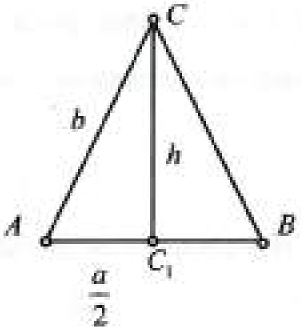
7 Кракот на рамнокрак триаголник е за 6 cm подолг од висината кон основата. Одреди ја должината на кракот, ако основата е долга 36 cm.

Според цртежот десно, имаме:

$$b^2=h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

$$b^2=(b-6)^2+18^2;$$

$$b=30.$$



Значи кракот е 30 cm.

Задачи:

① Бројот 60 да се подели на два дела, така што при делење на поголемиот дел со помалиот се добива количник 2 и остаток 3.

② Синот е за 20 години помлад од таткото, а пред 5 години бил 5 пати помлад од него. Колку години има секој од нив?

③ Помешани се 60 l алкохол од 72% и 70 l од 90%. Колку литри вода треба да се додаде, за да мешавината содржи 60% алкохол?

④ Односот на просечните брзини на двајца велосипедисти е 5:4, а првиот за 4 часа поминал 12 km повеќе од вториот. Одреди ги нивните просечни брзини.

8 ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Потсети се!

- Што е бројно неравенство?
- Што е интервал од броеви?
- Множеството $\{x|x\in\mathbb{R}\wedge -2<x<3\}$ запиши го како интервал.
- Што е решение на неравенката $x\geq 1$? Запиши го тоа решение со интервал и графички на бројна права.

А

1 Од кој вид се следните неравенки:

$3x-2<3-x$; $2x^2-4>0$; $\dfrac{(x-2)^2}{x+2}<0$?

Ако два алгебарски изрази M и N со една променлива се поврзат со некој од знаците $<$, $\leq$, $>$ или $\geq$, на пример $M<N$, се добива ***неравенка со една непозната***.

Множеството вредности на непознатата за кои неравенката $M<N$ преминува во точно бројно неравенство, се вика решение на неравенката.

На пример, множеството решенија на неравенката $x+2\geq 0$ е множеството на сите реални броеви поголеми или еднакви на (-2), односно $x\in[-2,\infty)$.

Решение на неравенката $x^2+2>0$ е множеството $\mathbb{R}$, т.е. $x\in(-\infty,\infty)$, додека, пак, неравенката $x^2+2<0$ нема решение.

2 Дали следниве неравенки имаат решение во множеството $\mathbb{R}$?

а) $2x^2+3<0$; б) $\dfrac{x^2+1}{x^2}\leq 0$; в) $(x-2)^2+3<0$.

3 Запиши го во вид на интервал множеството решенија на неравенките:

а) $x\geq 3$; б) $x\leq -2$; в) $2x>4$.

Б

За две неравенки велиме дека се еквивалентни ако имаат еднакви множества решенија.

4 Реши ги неравенките:

а) $3x-2>4+x$; б) $2x-1<3x-4$.

Воочуваш дека дадените неравенки имаат исто множество на решенија, што значи се еквивалентни.

***Својства за еквивалентност на неравенките*:**

1. Ако кон двете страни на неравенката $M < N$ додадеме еден ист број или рационален израз P од дефиниционото множество на непознатата, се добива неравенка еквивалентна со дадената.

5 Реши ја неравенката $4x-2<3x+3$.

Согледај го решението:

$4x-2+(-3x+2)<3x+3+(-3x+2)$, односно $x<5$, па решението е $x\in(3,\infty)$.

2. Ако двете страни на неравенката се помножат или поделат со еден ист број $a>0$, се добива неравенка еквивалентна со дадената.

6 Реши ја неравенката $5x>4x+2$.

3. Ако двете страни на неравенката се помножат или поделат со еден ист број $a<0$, тогаш насоката на неравенството се менува.

7 Реши ја неравенката $2x-1>x+2$.

***Последица 1*.** Секој член на неравенката може да се пренесе од една на друга страна, но со спротивен знак.

***Последица 2*.** Ако на различни страни на неравенката има еднакви членови, тогаш тие можат да се изоставaт.

8 Врз основа на претходните својства, провери ја еквивалентноста на неравенките

$\frac{x-5}{2}-\frac{5x-3}{6}>3$ и $-12-2x>18$.

В Секоја неравенка која може да се доведе во следниот вид

$$ax>b \text{ или } ax<b,$$

каде што $a,b\in\mathbb{R}$, се вика ***линеарна неравенка со една непозната***.

9 Реши ја неравенката $\frac{x-4}{3}-\frac{x+3}{2}+\frac{17}{6}<0$.

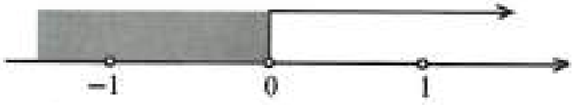
Согледај го решението:

Со примена на наведените својства имаме:

$$\frac{x-4}{3}-\frac{x+3}{2}+\frac{17}{6}<0\,\Big|\cdot 6 \Leftrightarrow 2(x-4)-3(x+3)+17<0.$$

По средувањето ја добиваме неравенката $-x<0$, т.е. $x>0$. Значи, решение на неравенката е секој $x\in(0,\infty)$.

На бројната оска се шрафира делот што не припаѓа на интервалот $(0,\infty)$.



Задачи:

① Реши ги неравенките:

а) $2x+1>8-5x$;

б) $\frac{8x}{3}-\frac{7x}{2}+\frac{5}{2}<4-\frac{3x+7}{4}$;

в) $x-\frac{3x+1}{2}-\frac{4x-1}{3}<0$;

г) $\frac{x}{6}-\frac{1-x}{4}-\frac{1+x}{3}-\frac{x-2}{24}>0$.

② Реши ја неравенката: $\frac{x+1}{3}-2\cdot(x+3)<\frac{1}{2}$ во множеството на целите негативни броеви.

③ Одреди ги сите реални броеви за коишто разликата на изразите $3x-1$ и $3x+2$ е помала од разликата на квадратите од дадените изрази.

Тематска контролна вежба

① Даден е триаголникот ABC, $A(2,3)$, $B(-2,4)$, $C(-4,4)$. Пресметај:

а) периметар,

б) плоштина на дадениот триаголник.

② Одреди го периметарот на четириаголникот чии темиња се средини на страните на четириаголникот $ABCD$. $A(2,0)$, $B(-2,4)$, $C(-4,0)$, $D(-2,-2)$.

③ Одреди ја дефиниционата област на функцијата: $y=\frac{2}{x^2+x}$;

④ Во ист координатен систем нацртај го графикот на функциите:

$y=2x-2$ и б) $y=-x+2$.

⑤ Реши ја равенката $\frac{x-7}{4}+1=\frac{3x-1}{5}-\frac{5x+1}{12}$.

⑥ Одреди го решението на неравенката $\frac{x-1}{2}-\frac{2-x}{3}>x-\frac{1}{2}$.

⑦ Збирот на цифрите на двоцифрен број е 9. Ако тој број се зголеми за 9, се добива број напишан со истите цифри, но во обратен ред. Кој е тој број?

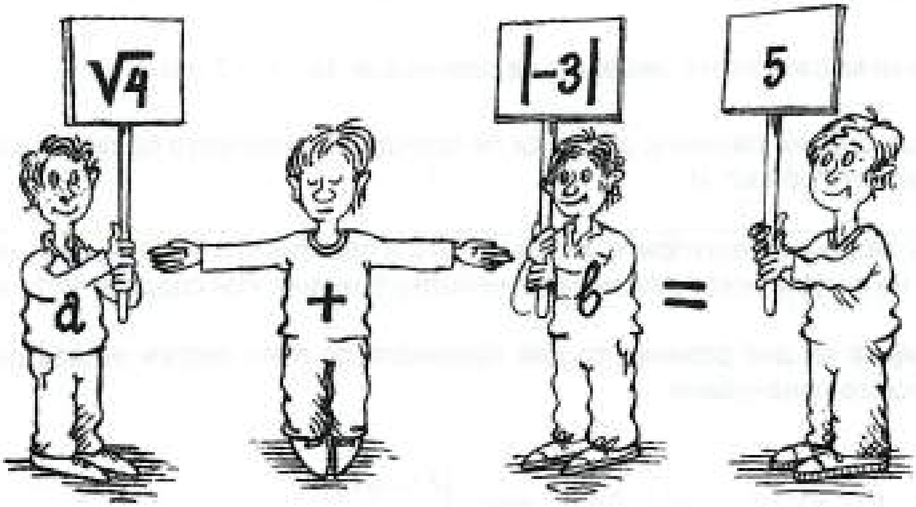
ТЕМА 7

СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

> *Нема решени проблеми, има само помалку или повеќе решени проблеми.*
>
> Х. Поенкаре (1854-1912)

Во оваа тема ќе учиш за:

- систем линеарни равенки со две непознати;
- решавање на систем линеарни равенки со метод на замена, спротивни коефициенти и со графички метод;
- детерминанти од втор ред и решавање систем равенки со крамерови формули;
- систем линеарни неравенки со една непозната;
- решавање на систем линеарни неравенки со една непозната;
- графичка интерпретација на решението на системот линеарни неравенки.



I

СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

- Равенката $2x+y=4$ во множеството на цели броеви има решение:

  $(1,2),(0,4)...$, одреди уште некое решение.
- Што воочуваш?

𝒜 Во линеарната равенка со две непознати $3x-4y=5$, 3 и -4 се коефициенти пред непознатите x и y (соодветно), додека 5 е слободен член.

Запомни!

Секоја равенка со две непознати x и y, која може да се трансформира во видот $ax+by=c$, каде што $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a\neq 0$ и $b\neq 0$ се вика линеарна равенка со две непознати.

Секој подреден пар реални броеви (x_0, y_0), за кој равенката $ax+by=c$, преминува во вистинит исказ $ax_0+by_0=c$, се вика решение на равенката.

1 Одреди го множеството решенија на равенката $2x+y=5$, во множеството на природни броеви.

Согледај го решението:

- Од равенката следува $y=5-2x$. Бидејќи $y>0$, тогаш изразот $(5-2x)$ треба да биде позитивен. Според тоа, паровите $(1,3)$ и $(2,1)$ се единствени решенија на равенката.

2 Одреди го множеството решенија на равенката $3x-y=2$, во $\mathbb{N}$.

- Да се реши дадена равенка, значи да се одреди множеството од сите нејзини решенија во дефиниционата област D.

ℬ Многу задачи од алгебрата, геометријата и практиката се сведуваат на одредувањето на заедничките решенија на неколку равенки кои содржат исти непознати.

Конјункцијата на две равенки со две непознати се вика систем на две равенки со две непознати, кое го означуваме:

$$F(x,y)=0 \ \wedge \ G(x,y)=0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$$

Дисјункцијата, пак, $F(x,y)=0 \vee G(x,y)=0$ се вика ***вкупност*** равенки и ја означуваме:

$$\left[\begin{array}{l}F(x,y)=0\\G(x,y)=0\end{array}\right.$$

3 Збирот на два броја е 5, а нивната разлика 1. Кои се тие броеви?

Согледај го решението:

Ако x и y се бараните броеви тогаш конјункцијата $x+y=5 \wedge x-y=1$ е задоволена со паровот $(3,2)$.

4 Реши ја равенката $(2x-1)(x+2)=0$.

За решението имаме: Изразот $(2x-1)(x+2)$ ќе биде нула, ако е задоволена дисјункцијата $2x-1=0 \vee x+2=0$, односно вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\x+2=0\end{array}\right., \text{ т.е. } x=\frac{1}{2} \vee x=-2.$$

Секој подреден пар реални броеви (x_0, y_0) за кој конјункцијата е точен исказ, односно за ко и двете равенки во системот преминуваат во точни искази, е ***решение на системот равенки.***

5 Провери кој од подредените парови $(-1,2);(-1,1);(2,-3)$ е решение на системот равенки

$$\left\{\begin{array}{l}2x-y^2=-3\\-x^2+2y=3\end{array}\right..$$

Согледај го решението:

Со проверка утврдуваме дека парот $(-1,1)$ е решение, односно со замена за $x=-1$ и $y=1$, имаме:

$$\left\{\begin{array}{l}2(-1)-1^2=-3\\-1(-1)^2+2\cdot 1=3\end{array}\right. \quad \text{т.е.} \quad \left\{\begin{array}{l}-3=-3\\3=3\end{array}\right..$$

6 Кој од подредените парови $(0,-1);(1,2);(-2,-1);(-1,-1)$ е решение на системот равенки

$$\left\{\begin{array}{l}x^2-2y=7\\2x+y=-7\end{array}\right. ?$$

Ако двете равенки во системот се линеарни равенки со две непознати, тогаш тој систем уште се нарекува ***систем од две линеарни равенки со две непознати.***

Секој систем од две линеарни равенки со две непознати може да се доведе во општ вид:

$$\left\{\begin{array}{l}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{array}\right.$$

каде што x и y се непознати, а $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ се кои било реални броеви или изрази кои не зависат од непознатите.

Броевите a_1, b_1, a_2, b_2 се викаат ***коефициенти*** пред непознатите, а c_1 и c_2 ***слободни членови*** во системот.

7 Системот $\begin{cases} 2x - \dfrac{x-y}{3} = 2 \\ \dfrac{x-1}{2} + 3y = 3 \end{cases}$ сведи го во општ вид.

Согледај го решението:

Ако секоја од равенките ја трансформираме во видот $ax + by = c$, односно првата ја множиме со 3, а втората со 2, ги добиваме равенките $6x - x + y = 6$ и $x - 1 + 6y = 6$, по чие средување го добиваме системот:

$$\begin{cases} x + 6y = 7 \\ 2x + y = 3\,. \end{cases}$$

8 Сведи ги во општ вид системите равенки:

а) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} + \dfrac{y-3}{3} = x - 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} - 2y = 1 \\ x - 2y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$.

Задачи:

① Одреди го множеството решенија на равенките а) $3x + y = 5$, б) $2x + y = 6$ во множеството природни броеви.

② Провери кој од подредените парови $(0,-1);(2,3);(1,-2)$ е решение на системот равенки:

$$\begin{cases} 3x - y^2 = -1 \\ -x^2 + 3y = -3\,. \end{cases}$$

③ Сведи ги во општ вид системите равенки:

а) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3} - 2x = \dfrac{x}{2} \\ 3(x-y) + 2x = -\dfrac{y}{2} \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{3} + \dfrac{3y+1}{4} = x + y \\ \dfrac{7x-2}{6} - \dfrac{8y+1}{9} = x - y \end{cases}$.

2 РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

- Провери дали системите

$$\begin{cases}\frac{x+1}{2}-2y=x-1\\ 2x+y=1\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x+4y=3\\ 2x+y=1\end{cases} \text{ се}$$

еквивалентни.

- Со средување на првата равенка во првиот систем го добиваме вториот систем. Што значи, двата системи се идентични, т.е. се еквивалентни.

А Два системи равенки се еквивалентни, во дадена област на дефинираност D, ако тие имаат еднакви множества решенија.

Трансформациите, што доведуваат до еквивалентни системи равенки, ги вршиме врз основа на следниве теореми за еквивалентност на системите равенки (ги прифаќаме без доказ):

Т.1 Ако која било од равенките на даден систем се замени со равенка еквивалентна на неа, се добива систем еквивалентен на дадениот.

Т.2 Системот равенки $\begin{cases}y=f(x)\\ g(x,y)=0\end{cases}$ е еквивалентен со системот $\begin{cases}y=f(x)\\ g(x,f(x))=0\end{cases}$

Решавање на систем равенки со две непознати со примена на Т 2 се вика ***метод на замена.*** Решавање на системот од равенки со метод на замена ќе го согледаме преку следниве задачи:

1 Реши го системот равенки $\begin{cases}3x-y=2\\ x-2y=-1\end{cases}$ со метод на замена.

Согледај го решението:

- Користејќи ги теоремите за еквивалентност, имаме:

$$\begin{cases}3x-y=2\\ x-2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-2\\ x-2y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-2\\ x-2(3x-2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-2\\ x-6x+4=-1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-2\\ -5x=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-2\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\cdot1-2\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$$

Според тоа, решението на системот е парот $(1,1)$.

2 Со метод на замена реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases}3x-y=-4\\ -2x+y=3\end{cases}$; б) $\begin{cases}\frac{x}{2}+2y=3\\ 3x-y=5\end{cases}$.

3 Реши го системот равенки $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{3}{y-1}=1\\ \dfrac{x}{2(x-2)}+\dfrac{2}{y+2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Согледај го решението:

■ Системот е дефиниран само за оние вредности на непознатите, за кои именителите се различни од нула, т.е. за $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$ и $y\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

По ослободувањето од именителите во двете равенки добиваме:

$$\begin{cases}(x+2)(y-1)-3x=x(y-1)\\ x(y+2)+4(x-2)=(x-2)(y+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2y=2\\ 2x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2y=2\\ y=2-2x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2(2-2x)=2\\ y=2-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{7}\\ y=2-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{7}\\ y=2-2\cdot\dfrac{2}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{7}\\ y=\dfrac{10}{7}\end{cases}$$

Значи решението на системот е парот $\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{10}{7}\right)$.

4 Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{y+1}{y}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{4}{3}\end{cases}.$$

Потсети се!

Реши го системот $\begin{cases}x+y=7\\ x-y=1\end{cases}$.

■ Воочуваш коефициентите пред непознатата y се спротивни броеви, па со собирање на соодветните страни на равенките добиваме: $2x=8$ или $x=4$, а $y=3$.

Б Ваквото решавање на на системот равенки ни го овозможува следната:

Т.3 Системот равенки $\begin{cases}f(x,y)=0\\ g(x,y)=0\end{cases}$ е еквивалентен со системот $\begin{cases}f(x,y)=0\\ g(x,y)+f(x,y)=0\end{cases}$

Примената на оваа теорема ни овозможува равенката $g(x,y)+f(x,y)=0$ да премине во равенка со една непозната. Тоа се постигнува со трасформирање на едната или двете равенки од систеомот, така што пред истата непозната коефициентите да бидат спротивни броеви.По собирањето на соодветните страни на равенките од системот таа непозната ќе се елеминира. Решавање на системот равеки на овој начин се вика ***метод на спротивни коефициенти.***

5 Реши го системот равенки $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ со метод на спротивни коефициенти.

Согледај го решението:

- Првата равенка ја множиме со -2, за коефициентите пред непозната y да бидат спротивни броеви.

$$\begin{cases} 3x-y=2/\cdot(-2) \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+2y=-4 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-6x+2y)+(x-2y)=-4-1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x=-5 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Значи, решението на системот равенки е парот $(1,1)$.

6 Реши го системот равенки $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ со метод на спротивни коефициенти.

7 Реши го системот равенки $\begin{cases} (x+1)^2-(y-2)^2=(x+2)^2-y^2 \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=1 \end{cases}$.

Согледај го решението:

- Системот го сведуваме во општ вид,

$$\begin{cases} (x+1)^2-(y-2)^2=(x+2)^2-y^2 \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=1/\cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+1-(y^2-4y+4)=x^2+4x+4-y^2 \\ 3(x-1)+2(x+2)=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4y=7 \\ 3x+2y=5/(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4y=7 \\ -6x-4y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4y=7 \\ (-6x-4y)+(-2x+4y)=-10+7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4y=7 \\ -8x=-3/:(-8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\cdot\dfrac{3}{8}+4y=7 \\ x=\dfrac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=\dfrac{31}{4} \\ x=\dfrac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{31}{16} \\ x=\dfrac{3}{8} \end{cases}.$$

Решението е парот $\left(\dfrac{3}{8},\dfrac{31}{16}\right)$

8 Реши го системот равенки $\begin{cases} (x-1)^2-(y+3)^2=(x+1)^2-y^2 \\ \dfrac{x+2}{2}-\dfrac{y-1}{4}=1 \end{cases}$.

Задачи:

① $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2,5x+0,4y=9,9 \\ 0,5x-0,5y=-1,5 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{2}-\dfrac{x+3y}{3}=\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{x+y+1}{3}+\dfrac{2x+3y}{2}=3 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} \dfrac{6}{x+2}-\dfrac{5}{y-1}=8 \\ \dfrac{5}{x+2}-\dfrac{6}{y-1}=\dfrac{17}{2} \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2=(x-2)^2+y^2 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

3 ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Познато ти е!

- Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите $y=-x+5$ и $y=3x-3$.
- Што воочуваш за нивната заемна положба?

Методот на графичко решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати

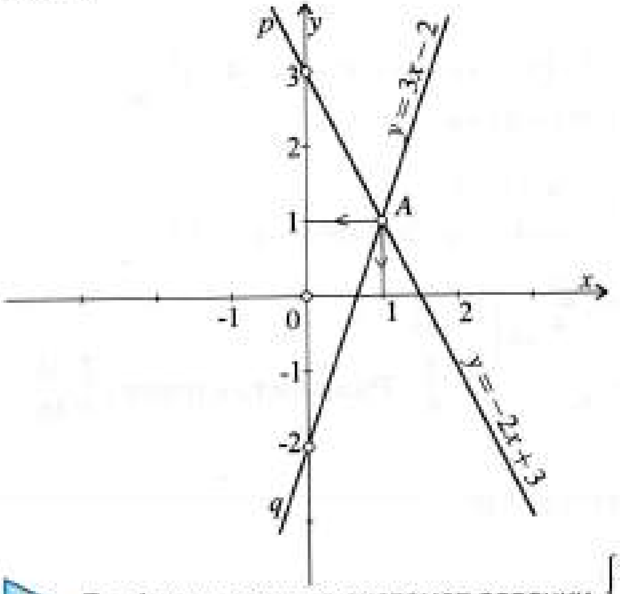
$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases},$$ се состои во:

1. Се цртаат во ист координатен систем xOy графиците на двете равенки;
2. Се одредуваат координатите на пресечната точка (ако постои).

1 Реши го графички системот равенки $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-y=2 \end{cases}$.

Согледај го решението:

- Ги цртаме графиците на линеарните функции $y=-2x+3, y=3x-2$ во ист координатен систем



x	y
0	3
1	1
-1	5

x	y
0	-2
1	1
-1	-5

Од цртежот воочуваме дека правите p и q, се сечат во точката $A(1,1)$.

Значи решение на дадениот систем равенки е парот $(1,1)$.

2 Графички реши го системот равенки $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

Потсети се!

- Каква заемна положба можат да имаат две прави во рамнина?
- Што е график на линеарна равенка со две непознати?

Б Од геометрија е познато дека две прави во рамнина можат да ги имаат следниве заемни положби:

а) да се сечат, т.е. да имаат само една заедничка точка;
б) да се паралелни, т.е. да немаат ниту една заедничка точка;
в) да се поклопуваат, т.е. да им се заеднички сите точки.

Соодветно, на претходните споменати заемни положби на две прави, системот линеарни равенки со две непознати може:

а) да има единствено решение;
б) да нема ниту едно решение;
в) да има бесконачен број на решенија.

Графички реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} x+y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 4x+2y=3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+2y=2 \\ 3x+6y=6 \end{cases}$.

Согледај го решението:

а) $y=-x+3,\ \ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$; б) $y=-2x-1,\ \ y=-2x+\frac{3}{2}$; в) $y=-\frac{1}{2}x+1$.

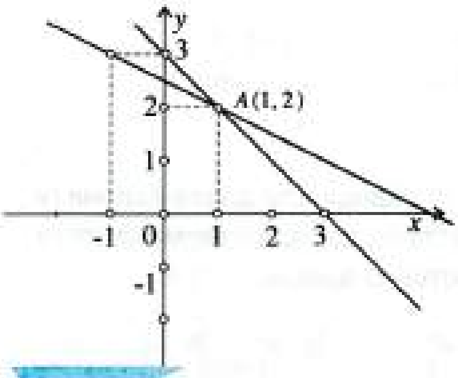
x	y
0	3
3	0
1	2

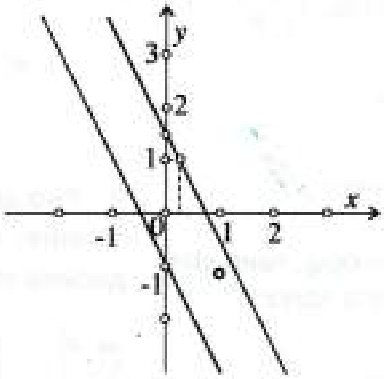
x	y
1	2
-1	3
3	1

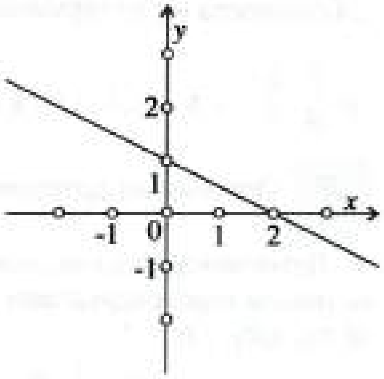
x	y
0	-1
1	-3
-1	1

x	y
0	1,5
$\frac{1}{4}$	1

x	y
0	1
2	0







Воочи!

а) Системот има едно решение (1,2);
б) системот нема решение (правите се паралелни)
в) системот има бесконечно многу решенија (правите се поклопуваат). Решение на системот, во овој случај, се кординатите на секоја точка од правата.

4 Графички реши ги следните системи:

а) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$.

Задачи:

① Графички реши го системот:

а) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-y=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$. г) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x-2y=-1 \end{cases}$;

4 ДЕТЕРМИНАНТА ОД ВТОР РЕД. КРАМЕРОВИ ПРАВИЛА

А Квадратна шема $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ се вика ***детерминанта од втор ред***, а изразот $ad-bc$ е нејзината вредност, т.е.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{def}{=} a\cdot d - b\cdot c\,,$$

каде што a,b,c,d се реални броеви или изрази.

Броевите a,b,c,d се викаат елементи на детерминантата; тие се распоредени во две редици, односно две колони.

Вредноста на детерминантата $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

е: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 4\cdot 2 = 15-8=7$.

1 Одреди ја вредноста на детерминантата:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Б Особини на детерминанта

1. Детерминанта се множи со број, така што се множи една редица или една колона со тој број, т.е.

$$k\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix}.$$

На пример: $3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ или $2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$

2. Ако двете редици или двете колони ги заменат местата, тогаш детерминантата добива спротивна вредност, т.е.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

На пример:

$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15+2=17$, $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-2-15) = -17$.

2 Одреди ја вредноста на детерминантите: а) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$.

Согледај го решението:

Воочуваш дека ако членовите на една колона (редица) се нули или ако членовите на двете колони (редици) се еднакви или пропорционални, тогаш вредноста на детерминантата е нула.

3 Да се реши системот: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

Согледај го решението:

Системот ќе го решиме со спротивни коефициенти:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \,\big|\cdot b_2 \\ a_2x+b_2y=c_2 \,\big|\cdot(-b_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2 \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=-c_2b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ (a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \end{cases}$$

Ако $x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ замениме во равенката $a_1x+b_1y=c_1$, по средувањето добиваме:

$$\begin{cases} (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \\ (a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \end{cases}$$

Воочуваш дека изразите во последниот систем се вредности на детерминанти од втор ред, што ќе ги означиме со:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};\ \Delta x=c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix};\ \Delta y=a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Детерминантата Δ се вика детерминанта на системот.

Системот има единствено решение, ако и само ако детерминантата на системот е различна од нула, т.е. $\Delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

Запомни!

Решението на системот $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ се определува со формулите

$x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}$ и $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}$, $\Delta\neq 0$, кои се викаат ***Крамерови правила.***

4 Реши го системот равенки $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases}$, со примена на Крамеровите правила.

Согледај го решението:

Детерминантите се: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-6=-7$; $\Delta x=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-4-10=-14$; $\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=5-12=-7$.

Решение на системот е : $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{-14}{-7}=2$ и $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{-7}{-7}=1$, т.е. парот $(2,1)$.

5 Со примена на Крамеровите правила, реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+y=16 \\ x+\frac{1}{4}y=14 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+\frac{3}{2}y=5 \\ 3x-y=4 \end{cases}$.

6 Одреди го решението на системот $\begin{cases} 4x-2y=3 \\ ax+y=1 \end{cases}$.

Дискутирај го решението на системот во зависност од параметарот a.

Согледај го решението:

Детерминантите на системот се:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ a & 1 \end{vmatrix}=4+2a \text{ , а } \quad \Delta x=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3+2=5, \quad \Delta y=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix}=4-3a.$$

Од условот $\Delta \neq 0$ следува за $a \neq -2$ решение на системот е $\left(\frac{5}{4+2a}, \frac{4-3a}{4+2a}\right)$.

За $a=-2$ системот нема решение, т.е. тој е од видот $\begin{cases} 0 \cdot x=5 \\ 0 \cdot y=10 \end{cases}$.

7 Реши го системот $\begin{cases} 6x-3y=2 \\ kx+y=1 \end{cases}$. Дискутирај го решението на системот во зависност од параметарот k.

Во зависност од тоа дали детерминантата на системот е еднаква или различна од нула, имаме:

1. Ако $\Delta \neq 0$, или $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ т.е. $a_1:a_2 \neq b_1:b_2$ системот има единствено решение.

2. Ако $\Delta=0$ и барем една од детерминантите Δx или Δy не е еднаква на нула, тогаш системот нема решение, т.е. е невозможен или апсурден.

Од $\Delta=a_1b_2-a_2b_1=0$ и нека на пример $\Delta x=c_1b_2-c_2b_1 \neq 0$ следува $a_1:a_2=b_1:b_2 \neq c_1:c_2$.

3. Ако трите детерминанти се еднакви на нула, т.е. $\Delta=\Delta x=\Delta y=0$, тогаш системот има бесконечно многу решенија. Во тој случај системот е неопределен, а коефициентите го задоволуваат условот $a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2$.

8 Не решавајќи го системот равенки (со споредување на коефициентите) испитај кој од предходните услови го задоволува системот од равенките:

а) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{y}{3}=1 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y=6 \\ x-\frac{y}{2}=3 \end{cases}$.

в) Воочи, коефициентите на системот се пропорционални, т.е. $2:1=-1:-\frac{1}{2}=6:3$.

Значи, системот има бесконечно многу решенија, т.е. системот е неопределен.

Задачи:

Со примена на Крамеровите формули, реши ги системите равенки:

① $\begin{cases}3x-y=9\\2x+y=1\end{cases}$; ② $\begin{cases}4(x-3y)=50-y\\5(x+2y)-3=x+5\end{cases}$; ③ $\begin{cases}\frac{2x}{3}-\frac{y}{4}=1\\\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=7\end{cases}$; ④ $\begin{cases}\frac{x+y}{3}-\frac{y-x}{4}=1\\\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{3}=8\end{cases}$;

⑤ Провери дали системот равенки а) $\begin{cases}x-3y=-1\\\frac{x}{3}+y=1\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x-y=6\\x-\frac{y}{3}=1\end{cases}$; в) $\begin{cases}x+3y=5\\2x+6y=10\end{cases}$

има решение, ако има одреди го.

⑥ За која вредност на параметарот a, системот равенки $\begin{cases}2ax-y=1\\4x+y=2\end{cases}$

а) има единствено решение;
б) нема решение?

⑦ Даден е системот равенки $\begin{cases}2ax-y=b\\4x+y=1\end{cases}$.

За кои вредности на параметрите a и b системот равенки:
а) има единствено решение;
б) нема решение;
в) има бесконечно решение?

5

ПРИМЕНА НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

- Збирот на два броја е 5, а нивната разлика е 1. Кои се тие броеви?

Оваа задача реши ја преку составување на една равенка со една непозната. Потоа реши ја и со составување на систем од две равенки со две непознати.

- Кој начин ти е поедноставен?

Во секојдневниот живот, науката и техниката, се бара да се определат вредностите на една или неколку непознати што означуваат број на предмети, работници, делови од некоја сума и др. Во такви задачи, зависноста меѓу познатите и непознатите величини се сведува на составување една равенка или систем равенки.

1 Збирот на два броја е 18. Ако кон првиот број помножен со 4 се додаде вториот помножен со 3 се добива 61. Кои се тие броеви?

Согледај го решението:

Нека x и y се бараните броеви. Од условот на задачата, имаме: $\begin{cases}x+y=18\\4x+3y=61\end{cases}$.

Со примена на една од методите за решавање систем равенки добиваме $x=7$ и $y=11$. Значи, бараните броеви се 7 и 11.

2 Разликата на два броја е 28. Ако од првиот помножен со 5 се одземе вториот помножен со 6 се добива 5. Кои се тие броеви?

3 Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 12. Ако цифрите си ги заменат местата, се добива број што е за 54 поголем од дадениот. Кој е тој број?

Согледај го решението:

Нека бараниот двоцифрен број е $10x + y$. Од условот на задачата имаме:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 10y + x = 10x + y + 54 \end{cases}.$$

Решението на овој систем е паротот $(3, 9)$, па бараниот број е 39.

4 Збирот на цифрите на двоцифрен број е 8. Ако цифрите ги заменат местата се добива број што е за 18 поголем од дадениот. Кој е тој број?

5 Мајката и ќерката имаат заедно 37 години. Пред две години мајката била 10 пати постара од ќерката. Колку години сега има мајката, а колку ќерката?

Согледај го решението:

Слично, како кај линеарните равенки ваков вид задачи ќе ги решаваме со шемата:

	сега	*пред*
Мајка:	x	x-2
Ќерка	y	y-2

Од условот на задачата имаме: $\begin{cases} x + y = 37 \\ x - 2 = 10(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ y = 5 \end{cases}$

Значи сега мајката има 32 години, а ќерката 5.

6 Маж и жена имаат заедно 73 години. Ако годините на мажот се зголемат два пати тогаш разликата помеѓу нив ќе биде 41 година. По колку години има секој од нив?

7 Од местото A кон местото B оддалечено 190 km тргнал камион, а по половина час од B кон A тргнал автобус. После два часа од тргнувањето на камионот, автобусот и камионот се сретнале и продолжиле да се движат. Еден час после сретнувањето тие биле оддалечени еден од друг 110 km. Со кои брзини се движеле автобусот и камионот?

Согледај го решението:

■ Задачата ќе ја решаваме парцијално, имено:

а) Брзините на камионот и автобусот ќе ги означиме со V_1 и V_2 соодветно.

б) Изминале пат $S = V \cdot t$. До сретнувањето камионот се движел 2 часа, и изминал пат $S_1 = 2V_1$ km, додека автобусот се движел 1,5 часа и изминал пат $S_2 = 1{,}5V_2$ km.

По разминувањето, камионот изминал $1 \cdot V_1$ km, а автобусот $1 \cdot V_2$ km за еден час, па $S_1 + S_2 = 1 \cdot V_1 + 1 \cdot V_2 = 110$ km.

в) Според тоа, системот равенки ќе изгледа вака: $\begin{cases} 2V_1 + 1{,}5V_2 = 190 \\ 1 \cdot V_1 + 1 \cdot V_2 = 110 \end{cases}$

г) Решението на системот е паротот $(50{,}60)$, односно камионот се движел со брзина од 50 km на час, а автобусот со 60 km на час.

8 Брод по течението на реката се движел со брзина од $25\ km$ на час, а спроти течението на реката со $20\ km$. Одреди ја брзината на бродот и реката.

9 На располагање имаме два вида алкохол, еден од 36%, а друг од 96% . По колку литри треба да се земе од секој раствор за да добиеме $120\ l$ од 80%?

Согледај го решението:

- Од условот на задачата имаме:

$$\begin{cases} x+y=120 \\ 36x+96y=120\cdot 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=120 \\ 3x+8y=800 \end{cases},$$ од каде $x=32$ и $y=88$..

Што значи, од растворот од 36% ќе земеме $32\ l$, додека од растворот од 96% ќе земеме $88l$.

10 Ако се измеша $8\ l$ топла вода со два литри ладна, температурата на измешаната вода е 66^0, ако, пак, се измеша $7\ l$ топла со $3\ l$ ладна, температурата на измешаната вода е 59^0. Колкава е температурата на топлата, а колкава на ладната вода?

Задачи:

1 Збирот на два броја е 19, а нивната разлика 5. Кои се тие броеви?

2 Збирот на два броја е 47, ако поголемиот го поделиме со помалиот се добива количник 4 и остаток 2. Кои се тие броеви?

3 Два автомобили на пат се оддалечени $360\ m$. Ако се движат еден наспроти друг ќе се сретнат после 10 секунди, ако, пак, се движат еден по друг, автомобилот со поголема брзина ќе го стигне другиот после 40 секунди. Колкава е брзината на автомобилите?

4 Збирот на годините на таткото и синот е 46. После 10 години таткото ќе биде два пати постар од синот. По колку години имаат сега?

5 Две цевки, еден базен го полнат за $9\frac{3}{8}$ часа. Двете цевки биле едновремено отворени 5 часа, потоа втората е затворена и првата го дополнила базенот за 7 часа. За колку часа секоја сама ќе го наполни базенот?

6 Во еден кафез имало зајаци и фазани. Вкупно имале 35 глави и 94 нозе. Колкав е бројот на фазаните и зајаците?

6 СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Потсети се!

- Одреди го множеството решенија на неравенката:

  а) $3x-2>2x-2$ и б) $x+1<4$.
- На иста бројна оска претстави ги графички нивните решенија.
- Што воочуваш?

Конјункцијата од множеството на две или повеќе линеарни неравенки со една непозната се вика ***систем линеарни неравенки со една непозната***.

Секој систем од две линеарни неравенки со една непозната може да се доведе во општ вид:

$$\begin{cases} ax>b \\ a_1x>b_1 \end{cases} \quad (a,b,a_1,b_1\in\mathbb{R}).$$

1 Системот $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x}{3}>2 \\ 3x-2>x+4 \end{cases}$ сведи го во општ вид.

Ако во даден систем неравенки која било неравенка се замени со неравенка што е еквивалентна на неа, се добива систем на неравенки што е еквивалентен на дадениот.

Според тоа имаме: $\begin{cases} 3(x-1)-2x>2\cdot 6 \\ 3x-x>4+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>15 \\ 2x>6. \end{cases}$

4 Покажи дека системите неравенки $\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}<2x+1 \\ x-\dfrac{1}{3}x-2>x-4 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-4x<3 \\ x>6 \end{cases}$ се еквивалентни.

Запомни!

Множеството од реални броеви што го задоволуваат еден систем неравенки се вика ***множество решенија.***

Да се реши еден систем неравенки, значи да се одреди неговото множество решенија. Имено, ако множеството решенија на неравенките во системот е $M_1, M_2, M_3,\ldots$ соодветно, тогаш множеството решенија на системот ќе биде $M=M_1\cap M_2\cap M_3\cap\ldots$

Два системи неравенки дефинирани во исто множество се еквивалентни, ако имаат еднакви множества решенија.

3 Реши ги системите неравенки:

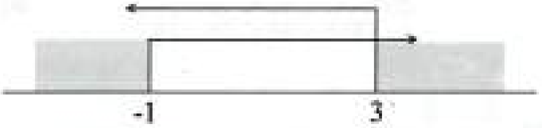
а) $\begin{cases} 4x-2>3x-3 \\ x+2<5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x+2>1+2x \\ 2x+1<x+4 \end{cases}$.

Согледај го решението:

а) $\begin{cases} 4x-2>3x-3 \\ x+2<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3x>2-3 \\ x<5-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<3 \end{cases}$;

Решението на првата неравенка е: $M_1=(-1,\infty)$, а на втората неравенка $M_2=(-\infty,3)$.

Решение на системот $M=M_1\cap M_2=(-1,3)$, што се гледа од графичкиот приказ.



$x\in(-1,3)$

Реши го системот б).

Воочи какво е множеството решенија на двата системи. Што заклучуваш?

4 Провери ја еквивалентноста на системот неравенки:

$$\begin{cases}2x+5>x+1\\x+3<3x-1\end{cases} \text{ и } \begin{cases}3x-1>2x-3\\2x+1>x+3\end{cases}$$

Ако пресекот на решенијата на двете неравенки е празно множество, тогаш системот ***нема решение***, т.е. системот е ***айсурден.***

На пример: Системот неравенки $\begin{cases}x-3>2x+1\\2x+2>x+3\end{cases}$ нема решение, бидејќи множеството решенија на првата неравенка е $M_1=(-\infty,-4)$, додека на втората $M_2=(1,+\infty)$, т.е.

$M_1\cap M_2=\varnothing$, или графички:

5 Реши ги системите на равенки: а) $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{2-x}{3}>1\\2x-2>x-5\end{cases}$; б) $\begin{cases}5+y>-2(y-1)\\\frac{y+1}{2}-\frac{y-1}{3}<1\end{cases}$.

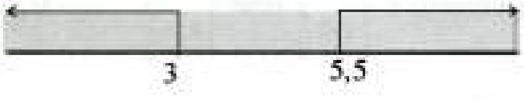
6 Реши го системот неравенки: $\begin{cases}3(x-2)-5>3+x\\2(x-1)-3<2\\4x>3(x-1)\end{cases}$

Согледај го решението:

Користејќи ги својствата за еквивалентност на системите, имаме:

$$\begin{cases}3(x-2)-5>3+x\\2(x-1)-3<2\\4x>3(x-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-6-5>3+x\\2x-2-3<2\\4x>3x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-x>11\\2x<7\\-x>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x>11\\2x<7\\x<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{11}{2}\\ \left.\begin{matrix}x<\frac{7}{2}\\x<3\end{matrix}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{11}{2}\\x<3\end{cases}$$

Оттука следува $M_1=\left(\frac{11}{2},\infty\right), M_2\left(-\infty,\frac{7}{2}\right), M_3=(-\infty,3), M_1\cap M_2\cap M_1=\varnothing$, значи системот нема решение, што се воочува и од геометриското претставување на решенијата.



7 Реши ги системите неравенки:

а) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} < \frac{3}{2}x - 1 \\ 4x - 5 > 2 - 5x \end{cases}$; б) $\begin{cases} 15x - \frac{1}{3} > 2(x+1) \\ 4(x-4) < 3x - 14 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \frac{x-3}{3} - \frac{2x+1}{2} < 1 \\ x - \frac{x-1}{5} > 3x + 2(x-1) \end{cases}$.

8 Реши ја неравенката $\frac{2x-2}{x+1} > 1$.

Согледај го решението:

$\frac{2x-2}{x+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{x+1} - 1 > 0$ или $\frac{x-3}{x+1} > 0$.

Потсети се!

Кога производот (количник) на два броја или изрази е позитивен, а кога е негативен?

Последната неравенка е еквивалентна на системот неравенки

$\begin{cases} x-3>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-3<0 \\ x+1<0 \end{cases}$, затоа што количникот е позитивен ако двата чинители се позитивни или двата негативни.

Според тоа: $M_1 = (3,\infty) \cap (-1,\infty) = (3,\infty)$, а $M_2 = (-\infty,3) \cap (-\infty,-1) = (-\infty,-1)$.

Решението на неравенката: $M = M_1 \cup M_2 = (-\infty,-1) \cup (3,\infty)$.

9 Реши ја неравенката: $\frac{(2x-1)\cdot(x+1)}{x^2+1} < 2$.

Согледај го решението:

$$\frac{2x^2+2x-x-1}{x^2+1} - 2 < 0; \quad \frac{2x^2+2x-x-1-2x^2-2}{x^2+1} < 0; \quad \frac{x-3}{x^2+1} < 0.$$

Количникот е негативен, ако двата чинители се со различни знаци.

Бидејќи именителот на дропкта е позитивен за секој реален број x, значи вредноста на дропката ќе зависи од знакот на броителот.

Според тоа неравенката $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$, е еквивалентна со неравенката $x-3<0$.

Решение на неравенката $x-3<0$ е $x<3$.

Значи решението на дадената неравенка е множе-ството $M = (-\infty,3)$.

10 Реши ја неравенката $2x^2 - 3x < 0$. Согледај го решението:

$2x^2 - 3x = x(2x-3) < 0$. Неравенката е еквивалентна на системот $\begin{cases} x>0 \\ 2x-3<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<0 \\ 2x-3>0 \end{cases}$.

Решението е $\begin{cases} x>0 \\ x<\frac{3}{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} x<0 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}$ $M_1 = \left(0,\frac{3}{2}\right)$; $M_2 = \varnothing$; $M = \left(0,\frac{3}{2}\right) \cup \varnothing = \left(0,\frac{3}{2}\right)$.

11 Реши ја неравенката $(x-5)(x+7)<0$.

Согледај го решението:

Неравенката можеш да ја решиш користејќи го својството "производот е негативен, ако множителите се со различни занци", (како што ја решивме задачата 10).

Истата задача може да се реши и со метод на интервали, кој се состои во следното:

- Се одредуваат интервалите во кои секој множител е позитивен или негативен за оние вредности на непознатата за кои што е дефинирана неравенката.

Одредувањето на знакот на секој множител ќе го прикажеме на следнава табела:

$x\in$	$-\infty$		-7		5		∞
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-5)\cdot(x+7)$		$+$		$-$		$+$	

Воочи во кој интервал множителите $x-5$ и $x+7$ се негативни односно позитивни.

Производот на множителите е негативен, ако $x\in(-7,5)$.

Значи решението на дадената неравенка е множеството $M=(-7,5)$.

Задачи:

Реши ги системните неравенки:

①

а) $\begin{cases}2x+3>5\\ x-3<2\end{cases}$; б) $\begin{cases}2(x+1)>-4\\ 2x-1>2-x\end{cases}$; в) $\begin{cases}1-\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+2}{3}>5x\\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+2}{3}<10\end{cases}$; г) $\begin{cases}2x-3>x+1\\ x-2\le 10-x\\ 3x+2>x+4\end{cases}$.

② Реши ги неравенките:

а) $\dfrac{3x-1}{2x+2}<1$; б) $\dfrac{x-1}{2x+1}>\dfrac{1}{2}$; в) $(x-2)(x+3)>0$; г) $5x-3x^2<0$.

③ Реши ги неравенките со метод на интервали:

а) $(x-2)(x+3)(x-1)>0$; б) $(x+1)(x-2)(x+4)(x+3)<0$.

Тематска контролна вежба

① Провери кој од подредените парови $(-1,0)$ и $(2,-1)$ е решение на системот равенки $\begin{cases} 3x-y^2=5 \\ x-y=3 \end{cases}$.

② Сведи ги во општ вид системите равенки: а) $\begin{cases} \frac{x}{2}-y=3 \\ 2x-\frac{1-y}{3}=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}-\frac{2-y}{2}=1 \\ 3x-\frac{y-1}{3}=\frac{1}{2} \end{cases}$.

③ Реши го системот равенки $\begin{cases} \frac{x}{2}-y=0 \\ 3x+y=7 \end{cases}$ со метод на замена.

④ Реши го системот равенки $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+y=1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ со метод на спротивни коефициенти.

⑤ Реши го системот равенки $\begin{cases} x-\frac{y-1}{2}=1 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ со примена на Крамеровите правила.

⑥ Графички реши го системот равенки $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=4 \end{cases}$.

⑦ Дискутирај го решението на системот равенки $\begin{cases} kx+2y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$.

⑧ Реши го системот линеарни неравенки $\begin{cases} (x+2)^2-3>x(x+2) \\ 2x(x-1)-x(2x-1)<4 \end{cases}$.

⑨ Реши ја неравенката $\frac{2x-1}{x-1}>1$.

⑩ Ако некој двоцифрен број чиј збир на цифрите е 9, се зголеми за 9, се добива број напишан со исти цифри, но во обратен ред. Кој е тој број?

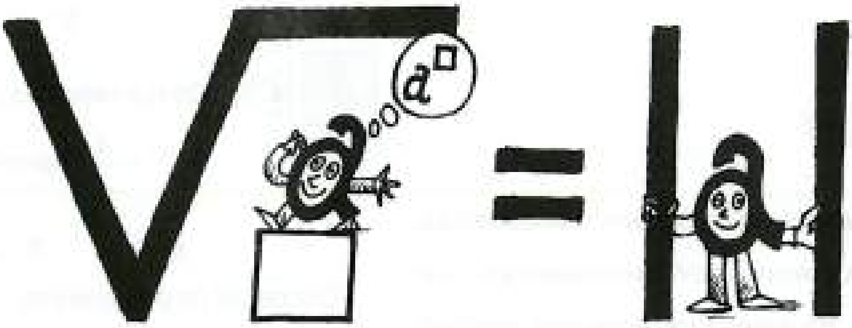
ТЕМА 8

СТЕПЕНИ И КОРЕНИ

> *Познавањето на математиката му дава живот на умот и го ослободува од предрасуди, лесноверност и суеверност.*
>
> Д. Ж. Арбтвот

Во оваа тема ќе учиш за:

- степен со показател нула и цел негативен број;
- поим за *n*-ти корен, својства на корен;
- трансформација на корени, коренување на производ и количник, нормален вид и слични корени;
- операции со корени, собирање, множење, делење, степенување и коренување на корен;
- степен со показател рационален број;
- рационализација на именителот на дропка;
- ирационални изрази.



1 СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ НУЛА И ЦЕЛ НЕГАТИВЕН БРОЈ

Потсети се!

- Пресметај:
- $a^2 \cdot a^3$; $x^2 : x^3$; $a^n : a^n$.

- Како се дефинира a^n, $a \in R$ и $n \in N$?

А

1 Примени го правилото за делење на степени со исти основи во примериве:

а) $a^5 : a^5$; б) $x^3 : x^7$.

- Решавајќи ја задачата ќе добиеш:

а) $a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0$; б) $x^3 : x^7 = x^{3-7} = x^{-4}$.

За степените a^0 и a^{-4} не можеме да ја примениме дефиницијата за степенот $a^n, n \in N$. За овие степени важи следнава дефиниција:

$$a^0 \overset{def}{=} 1 \text{ и } a^{-n} \overset{def}{=} \frac{1}{a^n},\quad a \neq 0;$$

2 Пресметај: а) 2^0; б) $\left(-\frac{1}{3}\right)^0$; в) $(a+2)^0$, $(a \neq -2)$; г) $\left(\sqrt{2}\right)^0$.

3 Пресметај: а) 3^{-2}; б) $(-5)^{-2}$; в) $(-2a)^{-3}$ $(a \neq 0)$.

Согледај го решението:

- а) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; б) $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$; в) $(-2a)^{-3} = \frac{1}{(-2a)^3} = \frac{1}{(-2)^3 a^3} = -\frac{1}{8a^3}$.

- Воочи: a^{-n} и a^n $(a \neq 0)$, се реципрочни броеви.

Потсети се!

- При проширување на бројните множества рековме дека во новото множество на броеви треба да важат сите важни законитости што важеле и пред тоа.

Б

4 Со примена на дефиницијата $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ пресметај:

а) $a^{-2} \cdot a^{-3}$; б) $\left(a^{-2}\right)^3$.

Согледај го решението:

- а) $a^{-2} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^{2+3}} = a^{-(2+3)} = a^{-2+(-3)}$.

- Што можеш да заклучиш?

Вака проширениот поим за степен е оправдан, ако за него важат истите законитости што важеле и за степенот со показател природен број, т.е. точни се следните тврдења:

$$1.\ a^m \cdot a^n = a^{m+n};\quad 2.\ a^m : a^n = a^{m-n};\quad 3.\ \left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n};$$

$$4.\ (a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m;\quad 5.\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\left(a \neq 0, b \neq 0; m, n \in \mathbb{Z}\right).$$

Ќе го докажеме тврдењето $(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m$:

За $m=0$ имаме $(a\cdot b)^0 = a^0\cdot b^0$ бидејќи $(a\cdot b)^0 = 1$ и $a^0 \cdot b^0 = 1\cdot 1 = 1$, следува $(a\cdot b)^0 = a^0\cdot b^0$.

За $m=-p\ \ (p>0)$ имаме: $(ab)^m = (ab)^{-p} = \dfrac{1}{(ab)^p} = \dfrac{1}{a^p\cdot b^p} = \dfrac{1}{a^p}\cdot\dfrac{1}{b^p} = a^{-p}\cdot b^{-p} = a^m b^m$.

За $n=-p\ \ (p>0)$, за тврдењето 1 имаме:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} = a^{m+(-p)} = a^{m+n}.$$

Останатите тврдења се докажуваат на ист начин.

5 Провери ја точноста на следниве равенства: а) $a^5 \cdot a^{-3} = a^2$; б) $a^3 : a^{-2} = a^5$; в) $\left(a^{-3}\right)^{-2} = a^6$.

Запомни!

Операциите со степени чиј показател е нула или цел негативен број се изведуваат според истите правила што важат и за степени со показател природен број.

6 Изврши ги назначените операции со степени:

а) $x^{-2}\cdot x^{-4} : x^{-6}$;   б) $x^{-3}y\cdot xy^{-2} : \left(x^2y^{-3}\right)$;   в) $\dfrac{\left(a^4\right)^{-2}\cdot a^3}{a^5}$.

Согледај го решението:

б) $x^{-3}y\cdot xy^{-2} : \left(x^2y^{-3}\right) = x^{-3+1}\cdot y^{1+(-2)} : \left(x^2\cdot y^{-3}\right) = x^{-2}y^{-1} : \left(x^2y^{-3}\right) = x^{-2-2}y^{-1-(-3)} = x^{-4}y^2$.

7 Пресметај ја вредноста на изразот: а) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$;   б) $2^{-4}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}$;   в) $1^{-1}+2^{-1}+3^{-1}$;

Согледај го решението: а) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{(-2)^2}{3^2}} = \dfrac{3^2}{(-2)^2} = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$.

Воочи!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\dfrac{a^n}{b^n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,\ \ (a \neq, b \neq 0).$$

8 Ослободи се од негативен показател во следниве изрази:

а) $3x^{-4}y$; б) $\frac{3a^{-2}b^{-1}}{4^{-1}a^{-3}bc^{-2}}$; в) $\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$.

Согледај го решението:

в) $$\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}}=\frac{xy(y-x)}{(y-x)(y+x)}=\frac{xy}{y+x},\quad \text{за } x\neq 0,\ \ y\neq 0.$$

Задачи:

① Ослободи се од негативен показател:

а) $x^{-2}y$; б) $-2^{-2}a^{-2}bc^{-4}$; в) $\frac{2x^{-2}y}{3^{-1}xy^{-2}}$.

② Пресметај ја вредноста на изразот: а) $2^{-2}-1^{-1}-4^{-1}+4^{-2}$; б) $\frac{3^{-2}+2\left(1-\frac{3}{2}\right)^{0}}{1^{-1}-4\cdot 2^{-1}}$.

③ Запиши ги дропките со броител 1: а) $\frac{x^2y^{-2}}{a^{-2}b^3}$; б) $\frac{5x^{-2}b^3}{c^{-2}}$; в) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$.

④ Дропките запиши ги со именител 1: а) $\frac{4^{-1}x^2}{3y^{-2}}$; б) $\frac{(2a-3)^0a^{-2}}{a^4b^{-1}}$; в) $\frac{3a^{-2}}{1-a^{-2}}$.

⑤ Следниве броеви запиши ги во вид $a\cdot 10^k$; $a,k\in\mathbb{Z}$.

а) $3{,}5$; б) $-0{,}006$; в) Дијаметарот на атомот на водородот е $0{,}0000000053cm$.

2 СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ РАЦИОНАЛЕН БРОЈ

Потсети се!

- Ако $r\in\mathbb{Q}$, тогаш $r=\frac{m}{n}=m\cdot\frac{1}{n}$, $(m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N})$
- $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$, $(m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N})$

А **1** Да разгледаме што претставуваат изразите: $4^{\frac{3}{2}}$; $27^{\frac{1}{3}}$.

- Какви броеви се показателите на дадените изрази?

Изразот $4^{\frac{3}{2}}$ и $27^{\frac{1}{3}}$ или воопшто $a^{\frac{m}{n}},(a>0,m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N})$ се вика степен со показател рационален број.

Нека $4^{\frac{3}{2}}=x$. Ако равенството го степенуваме со 2 а потоа го примениме правилото за степенување на степен со показател природен број, добиваме:

Од $4^{\frac{3}{2}}=x$ следува $\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2=x^2$;

$$\left(4^{3\cdot\frac{1}{2}}\right)^2=x^2;$$

$$4^{\left(3\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot2}=x^2;$$

$$4^{3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\right)}=x^2;$$

$$4^3=x^2.$$

Бидејќи $4^3=64=8^2$, значи вредноста на степенот $4^{\frac{3}{2}}$ е позитивен број x чија вредност е еднаква на 4^3, т.е. $4^{\frac{3}{2}}=8$.

$27^{\frac{1}{3}}=3$, бидејќи $27^1=3^3$

Запомни!

Вредноста на степенот $a^{\frac{m}{n}},(a>0,m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N})$ е позитивен број чиј n-ти степен е еднаков на a^m.

Од дефиницијата следува дека $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=\left(\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n=a^m$

2 Пресметај: а) $8^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$; в) $81^{-0,5}$.

Согледај го решението:

а) $8^{\frac{2}{3}}=\left(8^2\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\left(2^3\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}=2^2=4$; б) $81^{-0,5}=81^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{81^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\left(9^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{9}$.

Воочи дека: $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, $(a>0,\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N})$

3 Пресметај: а) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-0,5}$; б) $0,027^{-\frac{1}{3}}$.

На овој начин е извршено уште едно проширување на поимот за степен.
Вака проширениот поим за степен е оправдан ако за него важат следните тврдења:

1. $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$; 2. $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$; 3. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$;

4. $(a\cdot b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}$; 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}},(a,b\in\mathbb{R};m,p\in\mathbb{Z};,q\in\mathbb{N})$.

4 Провери ја точноста на тврдењето:

а) $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$; б) $16^{\frac{1}{2}} : 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$; в) $\left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$.

Согледај го решението:

а) $16^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$;

$(4^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2^4)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}}$;

$4 \cdot 2 = 2^3$; $8 = 8$.

б) $\left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$;

$\left((8^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = (2^6)^{\frac{1}{6}}$;

$8^{\frac{1}{3}} = 2^{6\cdot\frac{1}{6}}$; $(2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^1$; $2=2$.

Според тоа за операциите чиј показател е рационален број важат истите правила што важат и за степен со показател природен и цел број.

Понатаму кога станува збор за степен со показател рационален број, за основата ќе сметаме дека е секогаш позитивен број, иако тоа нема да го запишуваме.

2 Изврши ги назначените операции:

а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; б) $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}} : x^{-1,5}$; в) $\left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}$; г) $\left(x^{\frac{3}{4}} : x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Согледај го решението:

г) $\left(x^{\frac{3}{4}} : x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{1}{12}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{24}}$

Задачи:

① Одреди ја вредноста на степените: а) $9^{\frac{3}{2}}$; б) $4^{-\frac{1}{2}}$; в) $49^{\frac{1}{2}}$.

② Пресметај: а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2\frac{1}{4}\right)^{0,5} - \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ б) $36^{0,5} + 81^{0,25} - 16^{\frac{3}{4}} - 5,6^0$.

③ Пресметај: а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{1\frac{1}{3}}$; б) $b^{\frac{1}{2}} : \left(b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-1}\right)$; в) $\left(\left(x : x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} : x^{-\frac{4}{5}}$.

④ Изврши ги назначените операции:

а) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $\left(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{2}}\right)$; в) $\left(a^{\frac{2}{3}} + (ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$.

3 КОРЕН. ПРОШИРУВАЊЕ И СКРАТУВАЊЕ НА КОРЕН

Потсети се!

За $a=2, n\in\{-2,-1,0,1,2\}$ одреди ја вредноста на x, ако $x=a^n$.

Со која операција се одредува вредноста на x?

А

1 Плоштината на квадратот е $16cm^2$. Одреди ја должината на страната на квадратот.

2 Волуменот на коцката е $125cm^2$. Одреди ја должината на страната на коцката.

Да ја пресметаш страната на квадратот и коцката, всушност, треба да ја решиш равенката $a^2=16$ и $a^3=125$.

На пример, решение на равенката $x^2=4$ се броевите 2 и -2, бидејќи $2^2=4$ и $(-2)^2=4$.

Решение на равенката $x^3=8$ е 2 , а на равенката $x^3=-8$ е -2. Решенијата на равенките $x^2=4$, се викаат втори (квадратен) корен од 4, а на равенките $x^3=8$, $x^3=-8$ се викаат трети корен од 8, односно од -8.

Запомни!

Ако a е реален и n природен број, тогаш секое решение на равенката $x^n=a$ во множеството $\mathbb{R}$, ако постои, се вика n-ти корен од бројот a и се означува со $x=\sqrt[n]{a}$.

Бројот n се вика коренов показател ($n\geq 2$), бројот a е поткоренов израз, а $\sqrt{\ }$ е знак за корен. Постапката со која се определува $\sqrt[n]{a}$ се вика ***коренување***.

Ако n=2, тогаш показателот не се запишува, т.е. $\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$, $a\geq 0$, се чита квадратен корен од a.

Во претходната лекција дефиниравме степен со показател рационален број т.е. $27^{\frac{1}{3}}=3$, бидејќи $27^1=3^3$ и $\sqrt[3]{27}=3$ затоа што $3^3=27$. Ако ги споредиме резултатите имаме: $27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}$ и $4^{\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3}=\sqrt{64}$, или воопшто од $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^m$ следува $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Запомни!

Ако a е позитивен реален број, а m и n природни броеви, тогаш $a^{\frac{m}{n}}\overset{def}{=}\sqrt[n]{a^m}$.

На пример: $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}$; $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}$; $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$.

3 Запиши ги како корени следниве степени: а) $5^{\frac{2}{3}}$; б) $(ab)^{\frac{1}{5}}$; в) $(a+b)^{-\frac{1}{2}}$; г) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}$.

4 Запиши ги како степени корените: а) $\sqrt[3]{x}$; б) $\sqrt[4]{ab^3}$; в) $\sqrt{a^2+b^2}$; г) $\sqrt[3]{a^{-1}b^{-2}}$.

Согледај го решението:

в) $\sqrt{a^2+b^2}=\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Вредноста на степенот $a^{\frac{m}{n}}$ $(a>0)$ е позитивен број, значи и $\sqrt[n]{a^m}$ е позитивен број. Тоа ни го тврди следнава основна теорема за корени, што ја даваме без доказ.

Т. За секој реален број $(a>0)$ и секој природен број n постои единствен позитивен реален број x што е решение на равенката $x^n=a$.

Кои се решенијата на равенката?

а) $x^3=27$ и б) $x^3=-8$.

Ако n е непарен број, тогаш равенката $x^n=a$ има само едно решение во $\mathbb{R}$, т.е. секогаш постои n-ти корен од бројот a и тоа само еден, го означуваме $\sqrt[n]{a}$.

За вредноста на коренот $\sqrt[n]{a}=x(a>0)$ теоремата не ја исклучува можноста за постоење на релацијата $x^n=a$ во множеството на негативните броеви.

Кои броеви се решение на равенката?

а) $x^2=9$ и б) $x^4=16$.

Ако n е парен број и $(a>0)$, равенката $x^n=a$ има само две решенија во $\mathbb{R}$, кои се спротивни броеви. Значи, постојат два спротивни броја што се јавуваат како n-ти корен од бројот a.

Позитивниот го означуваме со $\sqrt[n]{a}$, а спротивниот на него, негативниот корен, го означуваме со - $\sqrt[n]{a}$. Ако a=0, тогаш $\sqrt[n]{0}=0$.

Ненегативната вредност на коренот се вика ***аритметички корен*** и понатаму ќе работиме само со аритметички корен.

Дали равенката а) $x^2=-4$; б) $x^4=-81$; има решение во множеството $\mathbb{R}$?

Бидејќи $x^2\geq 0$ и $x^4\geq 0$ за секој реален број, значи равенките немаат решение во $\mathbb{R}$, т.е. $\sqrt{-4}$ и $\sqrt[4]{-81}$ не се дефинирани во $\mathbb{R}$, велиме уште дека тие немаат смисла.

Запомни!

Коренувањето со парен коренов показател на негативните реални броеви не е дефинирано

5 Одреди кои од следниве изрази имаат смисла: а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[12]{0}$; в) $\sqrt[15]{-256}$; г) $\sqrt[4]{-16}$.

6 Колку е: а) $\sqrt[5]{2^5}$; б) $\sqrt[3]{2^3}$; в) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; г) $\sqrt{(-2)^2}$?

Согледај го решението:

- а) 2; б) 2; в) -2. Зошто? г) $\sqrt{(-2)^2}$ е позитивен број, значи $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

Бидејќи $(-2)^2 = 2^2$ следува $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$. Од исти причини и $\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{3^4} = 3$, $\sqrt{(-5)^2} = 5$ итн.

Според тоа : $\sqrt{(-2)^2} = |-2|$; $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3|$ и $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$.

Значи $\sqrt{a^2} = |a|$ или воопшто ако n е парен број тогаш $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

Запомни!

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, \text{ ако } n \text{ е непарен број} \\ |a|, \text{ ако } n \text{ е парен број} \end{cases}$$

7 Одреди ја вредноста на изразиве: а) $\sqrt[5]{(-7)^5}$; б) $\sqrt[3]{9^3}$; в) $\sqrt[4]{(-4)^4}$; г) $\sqrt[6]{3^6}$.

- Колку е: $\left(\sqrt{3}\right)^2$; $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$? Според дефиницијата вредноста на корените е 3, односно 5.

- Воопшто $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, под услов да $\sqrt[n]{a}$ има смисла.

На пример, $\left(\sqrt{-3}\right)^2 \neq -3$, бидејќи $\sqrt{-3}$ нема смисла.

Потсети се!

- $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}, k \neq 0$
- $\frac{m}{n} = \frac{m : k}{n : k}, k \neq 0$

Б 6 Спореди ги вредностите на корените $\sqrt[3]{8}$ и $\sqrt[6]{64}$.

- Корените имаат иста вредност. Точно е и равенството $\sqrt[3]{2^5} = \sqrt[9]{2^{15}}$.

- Како се добиени показателите на десната страна на равенството?

Воопшто, важи следното тврдење:

Ако $a > 0$ и m, n и $k \in \mathbb{N}$ тогаш $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$.

Ова својство се вика ***проширување на корени.***

Согледај го доказот: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$.

8 Искажи ја теоремата со зборови.

9 Корените: а) $\sqrt[3]{a^2}$; б) $\sqrt[4]{ab^3}$, прошири ги со 4.

10 Корените: $\sqrt[3]{2x^2}$ и $\sqrt[6]{ab}$ сведи ги на најмал заеднички содржател.

11 Корените: а) $\sqrt{a^3b}$; б) $\sqrt[3]{ab^2}$; в) $\sqrt[4]{ab}$, сведи ги на ист коренов показател:

Согледај го решението: ■ НЗС $(2,3,4)=12$;

$$\sqrt{a^3b}=\sqrt[12]{\left(a^3b\right)^6}=\sqrt[12]{a^{18}b^6}\ ;\ \ \sqrt[3]{ab^2}=\sqrt[12]{\left(ab^2\right)^4}=\sqrt[12]{a^4b^8}\ ;\ \ \sqrt[4]{ab}=\sqrt[12]{\left(ab\right)^3}=\sqrt[12]{a^3b^3};\quad (a>0,b>0).$$

В **12** Спореди ги вредностите на корените $\sqrt[9]{8^6}$ и $\sqrt[3]{8^2}$.

- ■ Корените имаат иста вредност.
- ● Како се добиени показателите на вториот корен?

Воопшто точно е следново тврдење:

Ако $a>0, m, n$ и $k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$$

Ова својство се вика ***скратување на корени.***

Согледај го доказот: ■ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mk}{nk}}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$

Задачи:

① Кои од следните искази се точни:

а) $\sqrt{3^2}=3$; б) $\sqrt{(-3)^2}=-3$; в) $\sqrt{(-3)^2}=3$?

② Пресметај:

а) $\sqrt[3]{-1}$; б) $\sqrt[5]{(-3)^5}$; в) $\sqrt{169}-\sqrt[3]{125}-\sqrt[4]{16}$.

③ Запиши ги како корени следниве степени:

а) $x^{\frac{1}{4}}$;   б) $2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$;   в) $3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$.

13 Искажи ја теоремата со зборови.

14 Скрати ја дропката:

а) $\sqrt[4]{16}$;   б) $\sqrt[6]{100}$;   в) $\sqrt[6]{\dfrac{a^4b^2}{c^2}}$.

Да се договориме:

Натаму ќе сметаме дека променливите во поткореновиот израз се позитивни, и поткореновиот израз во целина е позитивен, а коренот има аритметичка вредност.

④ Запиши ги како степени следниве корени:

а) $\sqrt[4]{a^3}$; б) $\sqrt[4]{2a^2b^3}$; в) $\sqrt[3]{b^2\sqrt{a}}$; г) $a^2+\sqrt[3]{a^2}$.

⑤ Сведи ги на ист коренов показател:

а) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}$;   б) $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a^2}$;

в) $\sqrt{abc}, \sqrt[4]{a^2b}, \sqrt[8]{abc^2}$.

⑥ Скрати ги корените:

а) $\sqrt[4]{36}$; б) $\sqrt[4]{25a^2}$; в) $\sqrt[8]{36a^4b^2}$.

4 ТРАНСФОРМАЦИЈА НА КОРЕНИ

Потсети се!

- Коренот $\sqrt[3]{a^2}$ запиши го во вид на степен со показател рационален број.
- Степенувај: а) $(a\cdot b)^2$; б) $(a:b)^3$; в) $(a\cdot b)^{\frac{2}{3}}$; г) $(a:b)^{\frac{3}{4}}$.

А **1** Провери ја точноста на равенствата:

а) $\sqrt{64\cdot 25}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{25}$.

б) $\sqrt{\dfrac{100}{25}}=\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}$.

Воочуваш дека квадратниот корен од производ или количник на позитивни броеви е еднаков на производ или количник од квадратните корени на тие броеви.

Истото правило важи за кој било корен.

Запомни!

$$\sqrt[n]{ab}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\,;\qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,,\ a\geq 0;b>0,n\in\mathbb{N}\,,$$

правила за коренување на производ и количник.

2 Пресметај: а) $\sqrt[3]{8\cdot 64}$; б) $\sqrt[3]{\frac{8}{64}}$.

3 Пресметај:

а) $\sqrt[3]{27\cdot(-64)\cdot 125}$; б) $\sqrt[5]{\frac{-32}{243}}$.

4 Упрости го изразот:

а) $\sqrt[3]{x^9y^6z^2}$; б) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b}{27x^6y^3}}$.

Согледај го решението:

а) $\sqrt[3]{x^9y^6z^3}=\sqrt[3]{x^9}\sqrt[3]{y^6}\sqrt[3]{z^3}=x^3y^2z$;

Запомни!

Корен од производ на два или повеќе позитивни множители е производ од корените на тие множители. Корен од позитивен количник е количник од коренот на деленикот и делителот.

5 За кои вредности на променливата x се точни равенствата?

а) $\sqrt[3]{x(x+2)}=\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+2}$; б) $\sqrt[4]{\frac{x}{x^2+1}}=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^2+1}}$.

Б **6** Упрости го изразот:

а) $\sqrt{16a^2b}$; б) $\sqrt[5]{\frac{x^5y^3}{32}}$.

Согледај го решението:

а) $\sqrt{16a^2b}=\sqrt{16}\sqrt{a^2}\sqrt{b}=4a\sqrt{b}$;

б) $\sqrt[5]{\frac{x^5y^3}{32}}=\frac{\sqrt[5]{x^5}\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{x}{2}\sqrt[5]{y^3}$.

Ваква трансформација на корени се вика ***извлекување множител пред знакот на коренот.***

Воочи!

$$\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{\alpha^n\beta}=\sqrt[n]{\alpha^n}\sqrt[n]{\beta}=\alpha\sqrt[n]{\beta}\,,(\alpha>0,\beta>0).$$

7 Извлечи множители пред знакот на коренот:

а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt[3]{192}$; в) $\sqrt[4]{a^{11}}$;

г) $\sqrt[3]{72a^7b^5}$; д) $\sqrt{4a^2+16}$.

Согледај го решението:

а) $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=\sqrt{2^2\cdot 2}=2\sqrt{2}$;

в) $\sqrt[4]{a^{11}}=\sqrt[4]{a^8\cdot a^3}=a^2\sqrt[4]{a^3}$;

д) $\sqrt{4a^2+16}=\sqrt{4(a^2+4)}=2\sqrt{a^2+4}$.

Внимавај!

Пред знакот на коренот се извлекуваат само множители на поткореновиот израз.

● Кои множители можат да се извлечат пред знакот на коренот?

Нека е даден $\sqrt[n]{a^m}$, ако $m > n$, тогаш $m = np + r$, па $a^m = a^{np+r} = a^{np} \cdot a^r$.

Оттука следува: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{np} \cdot a^r} = a^p \sqrt[n]{a^r}$.

8 Извлечи множители пред знакот на коренот: а) $\sqrt[4]{a^{35}}$; б) $\sqrt[5]{x^7 y^{14}}$.

Согледај го решението:

■ а) $\sqrt[4]{a^{35}} = a^8 \sqrt[4]{a^3}$; бидејќи $35 = 8 \cdot 4 + 3$.

В **9** Разгледај го равенството $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ оддесно налево.

Воочуваш:

■ $2\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$. Оваа трансформација на корени се вика ***внесување на множител под знакот на коренот***.

Воопшто: $\alpha\sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha^n \beta}$, $(\alpha > 0, \beta > 0)$

10 Внеси ги множителите под знакот на коренот: а) $x\sqrt[3]{x^2}$; б) $\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{b^2}{a}}$; в) $3a\sqrt[3]{\frac{1}{9a}}$; г) $\frac{2x^2}{3}\sqrt{\frac{27a}{4x}}$.

Согледај го решението: ■ г) $\frac{2x}{3}\sqrt{\frac{27a}{4x}} = \sqrt{\frac{4x^2}{9} \cdot \frac{27a}{4x}} = \sqrt{3ax}$.

Запомни!

Множителот се внесува под знакот на коренот, така штс тој се степенува со кореновиот показател и така добиениот степен се множи со поткореновиот израз.

Г **11** Согледај го решението на задачите: а) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; б) $\frac{2x}{3}\sqrt{\frac{27a}{4xx}} = \sqrt{3ax}$.

Со одредени трансформации корените можат да се упростат. Тој упростен вид на корени се вика ***нормален вид на корен.***

На пример, корените: $2\sqrt{2}$; $\sqrt{3ax}$; $\sqrt[3]{4a^2b}$; $\frac{2}{3}\sqrt[5]{a^4}$ се во нормален вид.

Запомни!

Коренот е во нормален вид ако поткореновиот израз:
1. Не содржи именител различен од 1.
2. Не содржи множители што можат да се извлечат пред знакот на корен.
3. Показателите на коренот и поткореновиот израз да немаат заеднички делители.

12 Зошто корените: $\sqrt{18}$; $3a\sqrt{\frac{1}{a}}$; $2a\sqrt[4]{a^2b^2}$ не се во нормален вид?

13 Корените: а) $\sqrt{48}$; б) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; в) $2x\sqrt{\frac{3}{x}}$ г) $\sqrt[3]{\frac{2ab^3}{3c^2d}}$, доведи ги во нормален вид.

Согледај го решението:

а) $\sqrt{48} = \sqrt{16\cdot 3} = 4\sqrt{3}$;

в) $2x\sqrt{\frac{3}{x}} = 2x\sqrt{\frac{3}{x}\cdot\frac{x}{x}} = 2x\sqrt{\frac{3x}{x^2}} = 2x\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}} = 2\sqrt{3x}$;

г) $\sqrt[3]{\frac{2ab^3}{3c^2d}} = \sqrt[3]{\frac{2ab^3}{3c^2d}\cdot\frac{3^2cd^2}{3^2cd^2}} =$

$= \sqrt[3]{\frac{b^3}{3^3c^3d^3}}\sqrt[3]{18acd^2} = \frac{b}{3cd}\sqrt[3]{18acd^2}$.

■ го множиме броителот и именителот со x.

за да примениме $\sqrt{x^2} = x$.

Задачи:

① Пресметај: а) $\sqrt{16\cdot 121}$;

б) $\sqrt[3]{8\cdot(-27)\cdot 64}$; в) $\sqrt{85^2 - 84^2}$; г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

② Пресметај:

а) $\sqrt{x^2y^4}$; б) $\sqrt[4]{81x^8y^{12}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{-32x^{15}}{y^{10}}}$.

③ Извлечи множители пред знакот на корен:

а) $\sqrt{108}$; б) $\sqrt[3]{54x^5y^4}$; в) $\sqrt{\frac{12a^3b^5}{c^4}}$.

④ Внеси ги множителите под знакот на корен:

а) $3\sqrt{2}$; б) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$; в) $a\sqrt{\frac{1}{a}}$; г) $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$.

⑤ Доведи ги корените во нормален вид:

а) $\sqrt{5\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[3]{54}$; в) $\sqrt{3a^2b^5}$; г) $ab\sqrt{\frac{12}{ab}}$;

д) $2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{7}}$; ѓ) $\sqrt{4a^3 - 8a^2}$ е) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}}$.

5 СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА КОРЕНИ

Потсети се!

- Кои мономи се слични?
- Што е коефициентот на мономот:

$2a^2b;\ -xy;\ 0,25y^2$?

- Како се собираат мономи?

A **1** Сведи ги корените:

а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; в) $\sqrt{50a^2}$ во нормален вид.

Согледај го резултатот:

■ а) $2\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; в) $5a\sqrt{2}$.

- Што можеш да заклучиш за добиените резултати?

■ Рационалниот множител пред знакот на коренот се вика ***коефициент на коренот***.

Запомни!

Два или повеќе корени во нормален вид се слични, ако имаат ист коренов показател и ист поткоренов израз.

2 Дали корените се слични: а) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{24}}$; б) $\frac{3}{a}\sqrt{a^3b}$ и $ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$?

Согледај го решението:

б) $\frac{3}{a}\sqrt{a^3b}=\frac{3}{a}a\sqrt{ab}=3\sqrt{ab}$ и $ab\sqrt{\frac{1}{ab}}=ab\sqrt{\frac{ab}{(ab)^2}}=ab\frac{1}{ab}\sqrt{ab}=\sqrt{ab}$. Значи, корените се слични.

3 Покажи дека корените се слични: а) $\sqrt[3]{16}$ и $\sqrt[3]{54}$; б) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$ и $\sqrt{\frac{8}{9}-\frac{1}{3}}$; в) $\sqrt{\frac{x}{y}}$ и $\sqrt{\frac{y}{x}}$.

Потсети се!

- Запиши го дистрибутивниот закон на множењето во однос на собирањето во $\mathbb{R}$.
- Сведи го полиномот

$$2ab-\frac{1}{2}ab+1\frac{1}{2}ab .$$

Б **4** Упрости го изразот:

$$2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+1\frac{1}{2}\sqrt{3} .$$

Согледај ја постапката:

$$2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+1\frac{1}{2}\sqrt{3}=\left(2-3+1\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}.$$

Запомни!

Се собираат и одземаат само слични корени.

5 Пресметај го збирот: а) $5\sqrt{5}+7\sqrt{20}-2\sqrt{45}$; б) $3\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{8a}-\sqrt[3]{27a}$.

Согледај ја постапката: б) $3\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{8a}-\sqrt[3]{27a}=$

Корените не се во нормален вид:

$=3\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{2^3a}-\sqrt[3]{3^3a}=3\sqrt[3]{a}+5\cdot2\sqrt[3]{a}-3\sqrt[3]{a}=$

Примени го дистрибутивниот закон: $=(3+10-3)\sqrt[3]{a}=10\sqrt[3]{a}$.

6 Упрости ги изразите: а) $\frac{3}{a}\sqrt{a^3}-\frac{4}{b}\sqrt{b^3}$; б) $3xy\sqrt{\frac{4}{xy}}-\frac{4}{x}\sqrt{x^3y}+3y\sqrt{\frac{x}{y}}$;

Согледај го решението: б) $3xy\sqrt{\frac{4}{xy}}-\frac{4}{x}\sqrt{x^3y}+3y\sqrt{\frac{x}{y}}=3xy\cdot\frac{2}{xy}\sqrt{xy}-\frac{4}{x}x\sqrt{xy}+3y\cdot\frac{1}{y}\sqrt{xy}=$

$$=6\sqrt{xy}-4\sqrt{xy}+3\sqrt{xy}=5\sqrt{xy} .$$

Задачи:

① Покажи дека корените се слични: а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$ б) $\sqrt{18}$; $\sqrt{50}$ и $\sqrt{98}$; в) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$; $\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}$ и $\sqrt[3]{x^{-2}y^{-2}}$.

② Пресметај го збирот: а) $8\sqrt{2}-6\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{18}$;б) $25\sqrt{0,2}+2\sqrt{1\frac{1}{4}}-3\sqrt{20}$; в) $4\sqrt[6]{4}-2\sqrt[6]{9}-3\sqrt[6]{8}$.

③ Пресметај го збирот:а) $2\sqrt{36a}-3\sqrt{25a}+2\sqrt{9a}$; б) $2a\sqrt[3]{a^4b}-3a\sqrt[3]{ab^4}-a^2\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}}+2b^3\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$.

6 МНОЖЕЊЕ. ДЕЛЕЊЕ. СТЕПЕНУВАЊЕ И КОРЕНУВАЊЕ НА КОРЕНИ

Во трансформација на корени покажуваме како се коренува производ и количник. Дали важи обратно?

А Провери ја точноста на равенството:

1 $\sqrt{64}\cdot\sqrt{25}=\sqrt{64\cdot25}$;   **2** $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}=\sqrt{\frac{100}{25}}$.

Сигурно воочи дека равенствата се точни. Истото својство е точно и за кој било корен,

т.е. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab}$; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Воопшто точни се следниве тврдења:

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$, $a\geq0,\ b\geq0,\ n\in\mathbb{N}$; $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $a\geq0,\ b>0,\ n\in\mathbb{N}$.

Искажи ги теоремите со зборови.

3 Пресметај: а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$; б) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x}$; в) $\sqrt[5]{x^3y^2}:\sqrt[5]{x^2y}$.

Согледај го решението:

в) $\sqrt[5]{x^3y^2}:\sqrt[5]{x^2y}=\sqrt[5]{x^3y^2:(x^2y)}=\sqrt[5]{xy}$.

Запомни!

Се множат и се делат само корени со ист коренов показател, така што производот, количникот од поткореновите изрази се коренува со истиот коренов показател.

4 Пресметај:

а) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$;   б) $2\sqrt[3]{25a^2}\cdot3\sqrt[3]{15a}$;   в) $\sqrt{48}:\sqrt{3}$;

г) $\sqrt[4]{27a^3}:\sqrt[4]{\frac{a^3}{3}}$;   д) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

5 Пресметај:

а) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}$;   б) $\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[4]{2x}\cdot\sqrt{2x}$;   в) $\sqrt{a}:\sqrt[3]{a^2}$;   г) $2a^3b\sqrt[3]{a^2b^2}:ab\sqrt{a^3b^2}$.

Согледај го решението:

Корените се со различен показател:

б) $\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[4]{2x}\cdot\sqrt{2x}=\sqrt[12]{(2x)^4}\cdot\sqrt[12]{(2x)^3}\cdot\sqrt[12]{(2x)^6}=\sqrt[12]{(2x)^{4+3+6}}=\sqrt[12]{(2x)^{13}}=2x\sqrt[12]{2x}$.

г) $2a^3b\sqrt[3]{a^2b^3} : \left(ab\sqrt{a^3b^2}\right) = 2a^3b : (ab)\sqrt[6]{\left(a^2b^3\right)^2 : \left(a^3b^2\right)^3} =$

$= 2a^2\sqrt[6]{\frac{a^4b^6}{a^9b^6}} = 2a^2\sqrt[6]{\frac{1}{a^5}} = 2a^2\sqrt[6]{\frac{a}{a^6}} = 2a^2\frac{1}{a}\sqrt[6]{a} = 2a\sqrt[6]{a}$.

- Како се множат и делат корени со различни коренови показатели?

6 Пресметај: а) $\frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{15}$; б) $9\cdot\sqrt{\frac{2}{45}} : \frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$; в) $a^2\sqrt{2x} : \frac{1}{a}\sqrt[3]{4x}$; г) $\sqrt[3]{4a^2} : \sqrt[6]{2a^3}$.

Б **7** Пресметај: а) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{a^2b}\right)^3$.

Согледај го решението:

а) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2\cdot 2} = \sqrt[3]{2^2}$; б) $\left(\sqrt{a^2b}\right)^3 = \left(\left(a^2b\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(a^2b\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(a^2b\right)^3} = \sqrt{a^6b^3} = a^3b\sqrt{b}$.

Воопшто : $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{1}{n}\cdot m} = \sqrt[n]{a^m}$.

Запомни!

Корен се степенува така што се степенува поткореновиот израз и добиениот степен се коренува со истиот коренов показател, т.е. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, $(a > 0; m, n \in \mathbb{N})$.

8 Пресметај: а) $\left(\sqrt{5}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[3]{3x^2}\right)^2$; в) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{ab}\right)^3$.

В **9** Провери ја точноста на равенството $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}$.

10 Пресметај: а) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; б) $\sqrt{\sqrt[4]{ab^3}}$.

Согледај го решението:

б) $\sqrt{\sqrt[4]{ab^3}} = \left(\sqrt[4]{ab^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(ab^3\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(ab^3\right)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{ab^3}$.

Воопшто: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m\cdot n}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$.

Запомни!

Корен се коренува така што поткореновиот израз се коренува со производот од кореновите показатели, т.е. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$, $(a > 0; m, n \in \mathbb{N})$.

11 Пресметај: а) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2x^3y^4}}$; в) $\sqrt{x\sqrt[3]{2x}}$.

Согледај го решението:

- в) $\sqrt{x\sqrt[3]{2x}}=\sqrt{\sqrt[3]{x^3 2x}}=\sqrt{\sqrt[3]{2x^4}}=\sqrt[6]{2x^4}$.

По извршените операции добиениот резултат, ако е корен, секогаш се запишува во нормален вид.

12 Упрости ги изразите:

а) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; б) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a}}$; г) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$.

Задачи:

① Изврши ги назначените операции:

а) $2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{21}$; б) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)$;

в) $\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}\sqrt{x^2-4}$; г) $3a^3\sqrt[3]{a^2b^{-1}}\cdot 2a^{-1}b\sqrt{a^{-5}b^4}$.

② Пресметај: а) $4{,}8\sqrt{xy}:0{,}6\sqrt{\frac{1}{xy}}$; б) $\left(2\sqrt{6}+\sqrt{18}-\sqrt{24}\right):\sqrt{2}$; в) $\sqrt[3]{2a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[6]{a^5}$.

③ Изврши ги назначените операции:

а) $\sqrt[8]{\left(a^2b^3\right)^7}$; б) $\left(\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\right)^4$; в) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{ab}\right)^3\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^5$; г) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$.

④ Пресметај: а) $\sqrt{\sqrt{3\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt{a\sqrt[4]{a}}$; в) $\sqrt{x\sqrt[3]{xy}}:\sqrt{y\sqrt{xy}}$

7 РАЦИОНАЛИЗИРАЊЕ НА ИМЕНИТЕЛОТ НА ДРОПКИ

Потсети се!

- $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot n}{n\cdot k},(k\neq 0)$
- $\sqrt{a}\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a,(a>0)$
- $\sqrt[n]{a^n}=a,(a>0)$

А **1** Пресметај ја вредноста на $\frac{10}{\sqrt{2}}$ и $5\cdot\sqrt{2}$ со точноста на четири децимали.

Со помош на калкулатор пресметај

- $10:1{,}41421=7{,}071085...$, а $5\cdot 1{,}41421=7{,}07105$.
- Со која операција полесно ќе дојдеш до резултатот ако работиш без калкулатор?

Воочуваш дека $\frac{10}{\sqrt{2}}=5\cdot\sqrt{2}$, т.е. со одредена трансформација од делење со ирационален број поминавме во множење, што секако е поедноставна операција.

Запомни!

Трансформацијата на изразите во кои именителот од ирационален израз го претвараме во рационален израз се вика ***рационализирање на именителот на дропката.***

2 Рационализирај го именителот на дропката: а) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{12}{\sqrt[3]{4}}$; в) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$.

Согледај го решението:

■ а) $\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$;

■ б) Бидејќи $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}$, за да го елиминираме коренот од именителот треба да го помножиме со $\sqrt[3]{2^3}$, па да го примениме $\sqrt[n]{a^n}=a$.

■ в) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}}=$

Затоа што: $\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}=\left(\sqrt{a+b}\right)^2$.

$=\frac{\left(a^2-b^2\right)\sqrt{a+b}}{\left(\sqrt{a+b}\right)^2}=(a-b)\left(\sqrt{a+b}\right)$, затоа што $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

3 Рационализирај го именителот на дропката: $\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}, (n>m), A$ е број или израз, а B е позитивен број или израз што добива само позитивни вредности.

Согледај го решението:

■ $$\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}=\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{m+n-m}}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{B}.$$

■ Ако $n<m$, тогаш коренот доведи го во нормален вид, а потоа примени ја постапката.

4 Рационализирај го именителот на дропката:

а) $\frac{5}{3\sqrt{2}}$; б) $\frac{5}{\sqrt[3]{49}}$; в) $\frac{4a^2-b^2}{\sqrt[3]{2a-b}}$; г) $\frac{4}{\sqrt[3]{16}}$.

Потсети се!

Пресметај ги производите:

● $(a-b)(a+b)$; ● $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)$; ● $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

5 Рационализирај го именителот на дропката: а) $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Согледај го решението:

■ а) $\frac{2}{3+\sqrt{2}}=\frac{2}{3+\sqrt{2}}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{2\left(3-\sqrt{2}\right)}{9-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}$;

б) $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{5\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}$.

6 Рационализирај го именителот на дропката:

а) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; б) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$.

Согледај го решението:

■ б) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}\cdot\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}=$

Броителот и именителот ги множиме со $4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$, затоа што,

$$\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)=\left(4\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2,$$

$$=\frac{8\sqrt{6}-6\sqrt{9}+4\sqrt{4}-3\sqrt{6}}{\left(4\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{6}-18+8}{4^2\left(\sqrt{2}\right)^2-3^2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\left(\sqrt{6}-2\right)}{32-27}=\sqrt{6}-2.$$

7 Рационализирај го именителот на дропката:

а) $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$; б) $\frac{11\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$; в) $\frac{a}{a-\sqrt{a}}$; г) $\frac{a^2-4b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}$

Задачи:

① Рационализирај го именителот на дропките:

а) $\frac{20}{3\sqrt{5}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{8}}$; в) $\frac{2b}{\sqrt[3]{b^2}}$; г) $\frac{1-b}{\sqrt{1-b}}$; д) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2-b^2}}$.

② Да се рационализира именителот на дропката:

а) $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$; б) $\frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; в) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; г) $\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

8 ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Потсети се!

- Кои изрази се викаат рационални алгебарски изрази?
- Кои операции се застапени во рационалните алгебарски изрази?
- Како се викаат броевите $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}$?

1 Дадени се изразите:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) x^2-4y; г) $2+\sqrt{a}$;

д) $\frac{3x-y}{xy}$; ѓ) $\frac{4}{\sqrt{5}}$; е) $5a^{-2}bc^{\frac{1}{3}}$.

Кои од изразите се рационални алгебарски изрази?

Запомни!

Изразите во кои покрај основните операции застапена е и операцијата коренување или степенување со показател рационален број се викаат ***ирационални изрази.***

Во задачата 1 ирационални изрази се: б); г); ѓ) и е.

Рационалните и ирационалните изрази се викаат ***алгебарски изрази.***

Ирационалните изрази со променливи ќе ги разгледуваме само за вредностите на променливите за коишто дадениот корен има смисла.

2 За која вредност на променливата, изразите имаат смисла:

а) $\sqrt{x^2}-\sqrt{x-2}$; б) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x}$; в) $\sqrt{x+1}-(x+1)^{\frac{1}{3}}$?

Согледај го решението:

- а) $\sqrt{x^2}$ има смисла за секој реален број, т.е. $x\in(-\infty,\infty)$, $\sqrt{x-2}$ има смисла за $x-2\geq 0, x\geq 2$ т.е. $x\in[2,\infty)$, според тоа $x\in(-\infty,\infty)\cap[2,\infty)=[2,\infty)$.
- в) $\sqrt{x+1}$ има смисла за $x+1\geq 0$; $x\geq -1$, а $(x+1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x+1}$ има смисла за секој реален број. Според тоа $x\in[-1,\infty)$.

3 Одреди ја допуштената вредност на променливата во ирационалните изрази.

а) $x-\sqrt{x}$; б) $\sqrt{3-x}-\sqrt[3]{x}$; в) $\frac{x-2}{\sqrt{x+3}}$.

(Внимавај: именителот не смее да биде нула.)

Во понатамошното разгледување, ако поинаку не е речено, ***ќе подразбереме дека корените секогаш имаат смисла.***

4 Одреди ја вредноста на: а) $\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[5]{32}$; в) $7\sqrt{4}$.

По извршувањето на операциите некои ирационални изрази се рационални: $\sqrt[5]{32}=2$; $7\sqrt{4}=14$. Изразите што содржат променливи исто така за некои вредности на променливите се рационални, а за некои ирационални.

5 Одреди неколку вредности на x и y за коишто ирационалниот израз $\sqrt{x+2y}$ е рационален.

Некои ирационални изрази со одредени трансформации можат да се доведат до рационален израз или истиот да се упрости. Тие трансформации се вршат врз основа на операциите со корени и правилата за изведување на операциите.

6 Да се упростат изразите:

а) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$;

в) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; г) $\left(\frac{1}{1-\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{1-a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+1\right)$.

Согледај го решението:

б) $$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2+\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}+1+\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}+1}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1}=\frac{12}{5-1}=3$$

г) $$\left(\frac{1}{1-\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{1-a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+1\right)=\left(\frac{1+\sqrt{a}}{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}-\frac{2\sqrt{a}}{1-a}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{a}-2\sqrt{a}}{1-a}\cdot\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}{(1-a)\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Задачи:

① Упрости го изразот:

а) $\frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}-\frac{2}{3-\sqrt{7}}+\frac{6}{4+\sqrt{10}}$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}-\sqrt{1+a}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}-1\right)$;

в) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; г) $\left(\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{2x}{x-1}\right):\frac{2\sqrt{x}}{x-1}$.

Тематска контролна вежба

① Одреди на што е еднакво:

а) $\sqrt[3]{(-4)^3}$; б) $\sqrt[4]{(-3)^4}$.

② Сведи ги на заеднички коренов показател:

а) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt[4]{a^2b^3}$ и $\sqrt[6]{x^4y^3}$.

③ Пресметај:

а) $\sqrt{81\cdot 169\cdot 144}$; б) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$.

④ Сведи ги корените во нормален вид:

а) $\sqrt[3]{8a^5b^8}$; б) $a\sqrt[4]{\frac{2x^5y}{a^3}}$.

⑤ Изврши го коренувањето:

$\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}$.

⑥ Претстави го во вид на корен $(3a-2b)^{-\frac{3}{4}}$.

⑦ Пресметај $64^{-\frac{1}{6}}$.

⑧ Изврши ги назначените операции:

$\sqrt[3]{2}-\sqrt{8}+\sqrt[3]{54}+\sqrt{200}$.

⑨ Изврши ги назначените операции:

а) $\sqrt[3]{xy^2}\cdot\sqrt[6]{x^2y^3}$; б) $\sqrt[4]{a^2b^2}:\sqrt{ab}$.

⑩ Изврши ги назначените операции:

а) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{2}$; б) $\left(\sqrt[3]{x^2y^4}-\sqrt[3]{x^4y^3}\right):\sqrt[3]{x^2y^2}$.

⑪ Рационализирај го именителот на дропката:

а) $\frac{26}{4-\sqrt{3}}$; б) $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

⑫ Одреди кои од следните изрази се ирационални:

а) $1-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{x}+\sqrt{y}-5=0$; в) x^2+3x+1; г) $\sqrt[3]{x^3}+5$.

ТЕМА 9

ОБРАБОТКА НА ПОДАТОЦИ

> ***Големата книга на природата е напишана со јазикот на математиката.***
>
> Галилео Галилеј (1564-1642)

Во оваа тема ќе учиш за:

- популација, статистичко обележје, статистички примерок;
- графичко претставување на податоци со табела, полигон и хистограм;
- фреквенција и кумулативна фреквенција;
- аритметичка средина;
- централни тенденции; мод и медијан.

1 ПРЕДМЕТ НА СТАТИСТИКА. ПОПУЛАЦИЈА И ПРИМЕРОК

А Статистиката во почетокот се занимавала со проучување на масовните појави во општеството, што биле од интерес на државата, како што се: даноците, имотните состојби, паричните односи и долгови, сточниот фонд, бројните состојби на населението, наталитетот, морталитетот, населеноста и слично.

Името *С Т А Т И С Т И К А* потекнува од латинскиот збор *STATUS*, што значи состојба, односно положба во општествена смисла.

Со развојот на општествените односи, производните сили и науката, се појавила потребата за проучување и на други масовни појави. Така, изучувањето на метеоролошките и сеизмолошките појави, испитувањето на јавното мислење на населението, производството на разни видови стоки, организацијата на јавниот превоз на патници во поголемите градови, не може да се замисли без примена на статистичките методи.

Статистиката претставува научен метод кој во основа опфаќа прибирање, средување и анализа на податоците добиени при разгледувањето на масовните појави.

Статистичките истражувања ги содржат следните фази:

1. ***Прибирање на податоците;***
2. ***Групирање и прикажување на податоците;***
3. ***Анализа на податоците;***
4. ***Статистичко заклучување.***

Статистиката може да се подели на ***дескриптивна*** и ***математичка*** статистика.

Дескриптивната статистика ги опфаќа статистичките методи кои се занимаваат со прибирање, средување и анализа на статистичките податоци. Дескриптивната статистика изучува: статистика на населението и општествените дејности, стопанска статистика и финансиска статистика.

Математичката статистика ги испитува општите законитости што важат при разгледувањето на масовните појави. Во процесот на проучувањето на овие појави се применуваат одредени методи. По однапред поставен план, се прибираат податоци за одредена појава, по пат на: попис, анкети, констатации, мерења, експериментирање и сл. Податоците се обработуваат и врз основа на добиените резултати се донесува заклучок за однесувањето на таа појава во иднина.

Математичката статистика е дел од ***применетата математика***, која непосредно се потпира врз теоријата на веројатност.

Таа опфаќа:

1. ***Теорија на статистичко оценување;***
2. ***Теорија на статистичко одлучување.***

Б Карактеристика на природните појави е нивната ***масовност***. Во секоја природна појава учествуваат неброено многу учесници, кои меѓусебно се поврзани со некое заедничко обележје. Заедничкото обележје се менува од еден до друг учесник во масовната појава.

Множеството од сите елементи на една масовна појава што е предмет на статистичко истражување се вика ***статистичко множество*** или ***статистичка маса*** или ***популација***.

1 Статистичкото множество или популација се: учениците од едно училиште; жителите на градот Скопје; јаболковите стебла во еден овоштарник; кокошките во некоја живинарска фарма и сл.

Елементите на статистичкото множество претставуваат ***статистичка единка.***

Воочуваш, статистичките единки не се идентични.

2 Определи ги статистичките единки во секоја популација во претходната задача.

Заедничкото обележје на статистичките единки од ист вид се вика ***статистичко обележје***.

Статистичките обележја се делат на ***квалитативни*** и ***квантитативни***.

Квалитативните обележја ги изучуваат квалитативните својства на статистичките елементи и тие се искажуваат описно.

Квалитативни обележја во задачата 1 се: полот на учениците (машки, женски), школската подготовка на жителите на Скопје (основна, средна, виша, висока), сортите на јаболковите стебла или на кокошките итн.

Квантитативните обележја се изразуваат со реалните броеви. Квантитативни обележја на учениците се: висина, маса; за жителите на градот Скопје може да се земе како квантитативно обележје нивната старосна структура. За јаболковите стебла квантитативно обележје е приносот во килограми јаболка по стебло, а кај кокошките, нивниот број, бројот на снесените јајца и сл.

Квантитативните обележја можат да бидат ***прекинати*** или ***дискретни*** и ***непрекинати***.

Статистичкото обележје е прекинато (дискретно), ако може да прими конечно многу вредности или преброиво многу вредности. Значи, вредностите на прекинатото обележје се разликуваат за некоја конечна вредност која обично се изразува со цели броеви.

Прекинатите обележја во задачата 1 се: бројот на учениците, бројот на стеблата, бројот на кокошките, бројот на јајцата снесени за еден месец итн.

Статистичкото обележје е непрекинато ако може да прими секоја реална вредност од еден конечен или бесконечен интервал.

Во задачата 1 непрекинато обележје е приносот на јаболка во килограми јаболка по стебло. Имено, приносот на една јаболкница може да биде $0kg$, на друга $20{,}6kg$; трета $0{,}2kg$; на некоја $50kg$ и сл.

Масата и висината на учениците во задачата 1 е, исто така, непрекинато обележје.

Статистичките обележја ќе ги означуваме со $X, Y, Z, \ldots$, а нивните вредности со $x, y, z, \ldots$

В

Испитувањето на популацијата која има голем број на елементи е невозможно од повеќе причини. Имено, такво испитување може да биде многу скапо, да трае долго, да нема пристап до секој член на популацијата итн. Од тие причини, најчесто се испитува само дел од популацијата, наречен ***примерок***, па врз основа на резултатите од примерокот се утврдува заклучок за целата популација.

Заклучокот за популацијата утврден врз основа на примерок ќе биде точен, ако примерокот е ***репрезентативен***. За еден примерок велиме дека е репрезентативен, ако тој по своите основни карактеристики е сличен на целата популација и е избран сосема случајно. Случаен избор значи дека секој член од популацијата има еднакви изгледи да биде избран.

На пример, случаен избор на 5 ученици од паралелката со 30 ученици може да се изведе на следниот начин: редните броеви на учениците ги запишуваме на ливчиња и ги мешаме во кутија, а потоа извлекуваме точно пет ливчиња. Учениците чии редни броеви се случајно извлечени сочинуваат примерок на паралелката.

Треба да знаеш!

Што е популација, а што примерок?
Да процениш дали примерокот е репрезентативен за популацијата.
Што е статистичко обележје и дали тоа е прекинато или непрекинато?

Задачи:

① Наведи неколку статистички множества.

② Од 1000 парчиња дневно производство на еден производ, заради проверка на нивната маса, земени се 50 производи.

а) Што е во овој пример популација, а што примерок?
б) Колку елементи има популацијата, а колку примерокот?
в) Дали примерокот е репрезентативен, ако за проверка се земат првите 50 производи?
г) Како треба да се изберат производите, па примерокот да биде репрезентативен?

③ Кои од следните обележја се квалитативни, а кои квантитативни: висина на учениците; маса на товениот добиток; боја на автомобилот; бројот на учениците во паралелката?

Кои од наведените обележја се прекинати, а кои непрекинати?

④ Човек се чувствува изнемоштен и оди кај лекар. Лекарот веднаш го упатува во лабораторија за да направи крвна слика.

Што е популација, а што примерок во ова истражување?
Кои статистички обележја ќе се истражуваат?

2 ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ПОДАТОЦИ СО ТАБЛИЦИ

Потсети се!

- Кои фази ги опфаќа статистичкото истражување?
- На кои начини може да се прибираат податоците?

Воочи!

Учениците од паралелката чинат една популација. Нивниот успех по математика е едно статистичко обележје X, а $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ се неговите вредности (оценките на учениците).

1 На крајот од учебната година, наставникот по математика ги запишал на табла оценките на учениците од една паралелка на следниот начин:

4	3	5	1	2	3	5	4	2	1
5	2	4	3	1	2	4	3	3	2
1	1	2	4	1	5	1	3	3	3

- Статистичкото обележје е дискретно, т.е. прекинато.
- Подреди го статистичкото обележје по големина, т.е. во низа што не опаѓа.

Согледај:

1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5

- Оваа низа се вика *статистичка низа*.
- Податоците од статистичката низа запиши ги во табела.

Бројот на статистичките единки што имаат еднакви вредности на обележјето е подмножество на популацијата и се вика *класа* (*група*) на обележјето. Воочуваш дека споменатото статистичко обележје има 5 класи (групи).

Вредности на обележјето X	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$	$x_5 = 5$	
Број на статистички единки што се повторуваат во класата	7	5	8	6	4	$\Sigma = 30$

Оваа табела се вика *статистичка табела*.

- Значи, 7 ученици имаат оценка 1, 5 ученици имаат оценка 2 итн., а вкупно 30 ученици се статистички единки што ја сочинуваат популацијата што ја набљудуваме.
- Разликата меѓу најголемата и најмалата вредност на обележјето се вика *опсег* или *ранг* на обележјето.
- Броевите $f_1 = 7; f_2 = 5; f_3 = 8; f_4 = 6; f_5 = 4$ означуваат број на статистички единки што се повторуваат во соодветната класа и се викаат *фреквенција* (*зачестеност*) на вредностите x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 на обележјето X.

Воочи: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 30$.

Запомни!

Позитивните броеви $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, ...f_n$ се викаат фреквенција (зачестеност) на вредностите $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...x_n$ на обележјето X, а $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + ...f_n = N$ е вкупниот број на статистички единки во популацијата што се набљудува.

2. Во 24 земјоделски семејства испитувана е работната способност на нивните членови. По испитувањето добиени се следниве податоци:

2	3	5	2	1	6	7	2
1	3	5	4	2	1	3	2
6	4	2	3	2	1	6	4

Изврши распределба на фреквенцијата и состави статистичка таблица.

Согледај го решението:

Статистичката низа е:

1	1	1	1	2	2	2	2
2	2	2	3	3	3	3	4
4	4	5	5	6	6	6	7

Во популацијата имаме 7 групи, а распределбата на фреквенциите е:

$$f_1 = 4; f_2 = 7; f_3 = 4; f_4 = 3; f_5 = 2; f_6 = 3; f_7 = 1.$$

Воочи: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 = 4+7+4+3+2+3+1 = 24$.

Статистичката таблица е:

Вредност на X	1	2	3	4	5	6	7	
Фреквенција f	4	7	4	3	2	3	1	$\sum = 24$

3 Во 25 семејства испитувана е месечната потрошувачка на масло за јадење, изразена во литри.

По испитувањето, добиени се следните податоци: 4, 2, 2, 3, 2, 5, 4, 6, 3, 3, 2, 4, 5, 4, 6, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 4, 1, 5, 3.

Изврши распределба на фреквенциите и формирај статистичка таблица.

Б Ако статистичкото обележје е непрекинато, тогаш групирањето на вредностите на обележјето се врши, исто така, на класи, кои се викаат ***групни интервали***. Во пракса, групните интервали се земаат со иста должина и со различна бројност. Бројот на групните интервали треба да е таков што од него може да се воочи карактерот на менувањето на обележјето. Искуствата покажале дека бројот на групните интервали треба да е помеѓу 5 и 20, во зависност од тоа какво обележје се разгледува и колкава е популацијата.

4 Во 20 семејства истражувана е годишната потрошувачка на конзервирано овошје изразена во килограми. Добиени се следните податоци: 10,3; 17,2; 18,3; 4,3; 16,5; 19,8; 22,5; 12,4; 13,4; 11,5; 14,1; 4,1; 20,6; 7,6; 9,2; 28,0; 23,4; 8,7; 15,7; 15,5.

Состави статистичка таблица во групни интервали со должина 4.

Согледај го решението:

Популацијата има 20 статистички единки (семејства). Статистичкото обележје (потрошувачката на конзервирано овошје) е непрекинато. Статистичката низа гласи:

4,1	4,3	7,6	8,2	9,2
10,3	11,5	12,4	13,4	14,1
15,5	15,7	16,5	17,2	18,3
19,8	20,6	22,5	23,4	28,0

Опсегот (ранг) е $x_{\max} - x_{\min} = 28,0 - 4,1 = 23,9$. Бидејќи должината на интервалот е 4, податоците ќе бидат групирани во $23,9 : 4 \approx 6$ групни интервали.

Првиот интервал е $(4,0-8,0]$, а последниот $(24,0-28,0]$. Интервалите се полузатворени оддесно. Распределбата на фреквенцијата се гледа на следната статистичка таблица.

Интервали на обележјето X, (годишна потр.)	4,0-8,0	8,0-12,0	12,0-16,0	16,0-20,0	20,0-24,0	24,0-28,0	
Фреквенција f (број семејства)	3	4	5	4	3	1	$\Sigma = 20$

До какви сознанија може да се дојде со едно статистичко истражување? Одговорот ќе го согледаме токму од решението на претходната задача.

Претпоставуваме дека една фабрика произведува конзервирано овошје и го пласира на подрачјето во кое има популација, на пример, 10000 семејства. Ако споменатите 20 семејства претставуваат репрезентативен примерок, тогаш фабриката може да го процени своето годишно производство на конзервирано овошје. Секако, ова истражување се однесува на видот на овошјето што најповеќе го користат семејствата. Врз основа на добиените податоци, фабриката оценува колку суровини се потребни за производство на утврдените количини овошје. Доколку оцени дека нема доволно суровини, а настојува успешно да работи, ќе мора да обезбеди дополнителни извори на суровини или да го прошири производството на суровини. Ако, пак, се добие сознание дека има многу повеќе производи од побарувањето на популацијата, тогаш фабриката ќе бара нови пазари и потрошувачи. Податоците од истражувањето можат да доведат и до други сознанија, за кои овде нема да зборуваме.

5 За висината на учениците од една паралелка добиени се следните податоци: 158, 184, 152, 164, 145, 169, 166, 178, 160, 156, 168, 172, 188, 146, 196, 183, 139, 185, 193, 167, 155, 160, 155, 181, 165, 162, 170, 176, 165, 148, во *cm*.

а) Одреди го бројот на единките во популацијата.

б) Состави статистичка таблица по групни интервали со должина 8 .

5 Распределбата на фреквенцијата на некое обележје е дадена во таблицата;

Обележје X	4	5	8	9	11	15	20	
f	3	4	3	8	4	6	2	

Одреди го бројот на единките на статистичкото множество чии вредности се:

а) помали или еднакви на 8; б) помали од 15.

Согледај го решението: а) Очигледно, бројот на статистичките единки чија вредност е помала или еднаква на 8 е $3+4+3=10$. Вака добиената вредност се вика ***кумулативна фреквенција.***

Кумулативната (натрупана) фреквенција на обележјето x_1 е f_1; на x_2 е f_1+f_2; на x_3 е $f_1+f_2+f_3$; на обележјето x_4 е $f_1+f_2+f_3+f_4$ итн.

Обележје X	4	5	8	9	11	15	20
f	3	4	3	8	4	6	2
Кумулативна f	3	+ ↓ → 7	+ ↓ → 10	+ ↓ → 18	+ ↓ → 22	+ ↓ → 28	+ ↓ → 30

б) Има 22 статистички единки чии обележја се помали од 15.

На сосема ист начин се определува кумулативната фреквенција ако статистичкото обележје е дадено со групни интервали.

7 Распределбата на фреквенциите на некое обележје X е дадена во таблицата:

Групни интервали на обележјето X	$(30-40]$	$(40-50]$	$(50-60]$	$(60-70]$	$(70-80]$	$(80-90]$	$(90-100]$
Фреквенција f	12	23	58	72	45	38	16

Определи ја таблицата на кумулативната фреквенција и одреди колку има елементи од популацијата чии вредности на обележјето се помали или еднакви на 80.

Треба да знаеш!

Како се прибираат податоци?
Како се формира статистичка таблица, ако обележјето е прекинато, а како, ако е непрекинато? Што е фреквенција, а што кумулативна фреквенција?

Задачи:

① Во 16 земјоделски семејства истражуван е бројот на јаболкниците во нивните овоштарници. Добиени се следните податоци: 10, 26, 12, 17, 12, 15, 26, 20, 10, 10, 15, 17, 12, 10, 26, 19. Состави статистичка таблица за тоа обележје.

② Во 24 земјоделски комбинати приносот на пченицата по хектар е: 40,3; 30,5; 31,6; 42,1; 43,4; 45,2; 35,1; 40,6; 45,7; 44,8; 33,2; 50,7; 55,0; 36,3; 48,6; 37,5; 44,5; 49,9; 46,3; 47,5; 44,3; 54,6; 38,5; 53,4, во *тс*.

Изврши распределба на фреквенцијата во групни интервали со должина 5.

③ Ученикот Климе во слободното време решил малку да си поигра. Земал 5 монети и почнал да ги фрла и при секое паѓање броел на колку монети се појавил грб. Фрлањето го повторил 1000 пати и забележал: ниту еден грб не се појавил во 38 фрлања; во 144 фрлања грб се појавил еднаш; во 432 фрлања грб се појавил три пати; четири грба се појавиле во 164 фрлања и пет грба се појавиле во 25 фрлања.

Формирај статистичка таблица на обележјето.

④ Дадена е распределба на фреквенцијата во следните таблици:

а)

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	13	6	9	18	4	11	2	10	7

б)

X	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
f	1	2	3	5	4	2

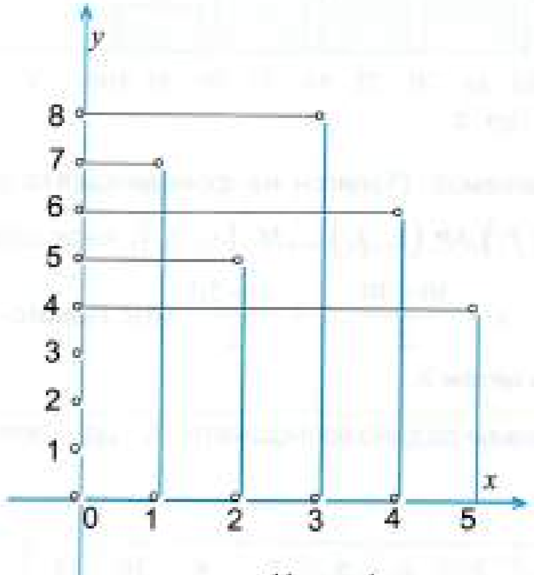
За секоја таблица формирај таблица на кумулативната фреквенција.

3 ГРАФИЧКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ПОДАТОЦИ

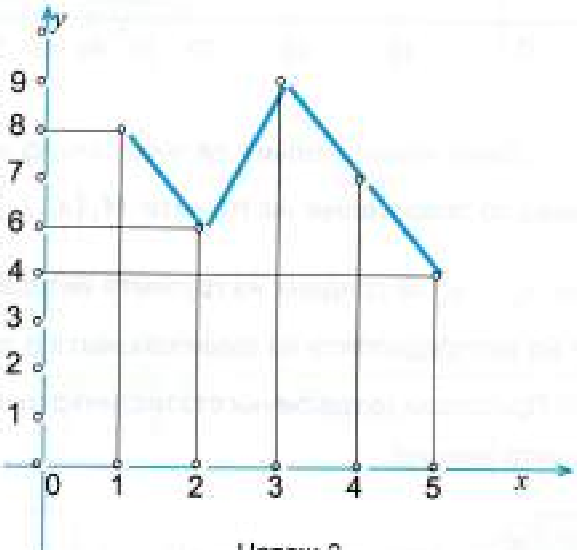
𝒜 1 Да ја разгледаме статистичката таблица.

Вредности на обележјето X	1	2	3	4	5
Фреквенција f: на распределбата	7	5	8	6	4

Воочуваш дека на секоја вредност на статистичкото обележје му е придружена соодветна фреквенција на распределба, па ги имаме подредените парови: $(1,7)$; $(2,5)$; $(3,8)$; $(4,6)$ и $(5,4)$. Ако на секој подреден пар му придружиме точка од координатната рамнина xOy, така што на x - оската ги нанесеме вредностите на обележјето, а на y - оската фреквенцијата, ќе добиеме ***дијаграм на фреквенцијата***, цртеж 1. Ако секои две соседни точки ги поврземе со отсечки, добиваме искршена линија која се вика ***полигон на фреквенцијата***, цртеж 2. Заради поголема прегледност, единичните отсечки на двете оски не мора да бидат еднакви.



Цртеж 1



Цртеж 2

2 Нацртај ги дијаграмот и полигонот на фреквенцијата на статистичкото истражување во задачата 3 од претходната лекција.

Б **3** На еден натпревар по математика учествувале 120 ученици. Постигнати се следните резултати:

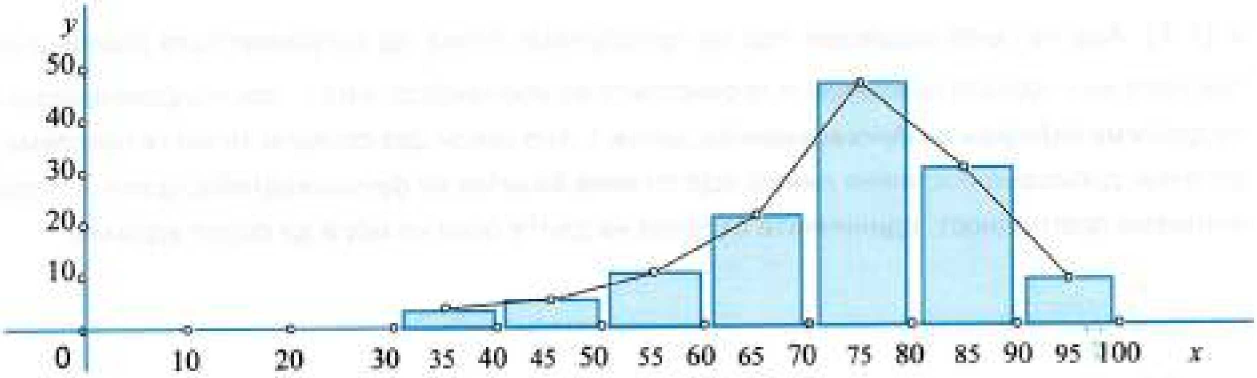
Интервали на бодови	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
Број на ученици	2	5	10	21	43	30	9

Да се претстави графички фреквенцијата на распределбата.

Согледај го решението:

Непрекинатото статистичко обележје што е дадено во групни интервали, графички се претставува со ***хистограм***.

Хистограм е правоаголник чија една страна лежи на x - оската и е еднаква на должината на интервалот на распределбата, а другата страна е еднаква на големината на фреквенцијата за соодветниот интервал, цртеж 3.



Црт. 3

Секој правоаголник се вика столб на хистограмот. Полигон на фреквенцијата се добива со поврзување на точките $M_1(x_1', f_1), M_2(x_2', f_2), M_3(x_3', f_3), \ldots, M_k(x_k', f_k)$, каде што $x_1', x_2', x_3', \ldots, x_k'$ се средини на групните интервали, т.е. $x_1' = \frac{30+40}{2}, x_2' = \frac{40+50}{2}$ итн. Полигонот на распределбата на фреквенцијата е даден на цртеж 3.

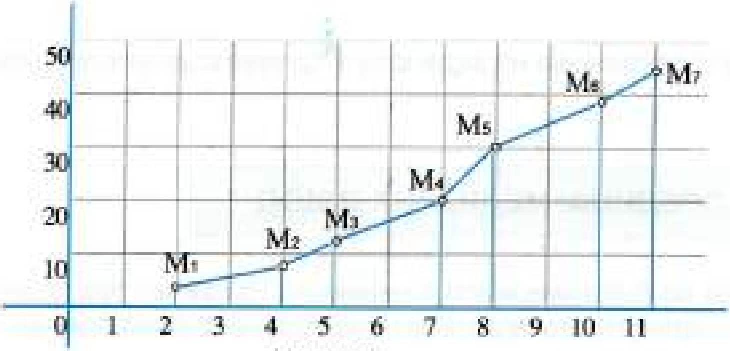
4 Претстави го графички статистичкото истражување дадено во задачата 5 од претходната лекција.

В **5** Нацртај полигон на кумулативната фреквенција на статистичкото обележје чии вредности се дадени во табелата:

X	2	4	5	7	8	10	11
f	3	5	4	8	10	9	7
Кумулативна f	3	8	12	20	30	39	46

Полигонот на кумулативна фреквенција на прекинато обележје е искршената линија чии темиња се точките:

$$M_1(x_1, f_1), M_2(x_2, f_1+f_2), M_3(x_3, f_1+f_2+f_3), \ldots, M_k(x_k, f_1+f_2+\ldots+f_k).$$



Цртеж 4

Во задачата тоа се точките: $M_1(2,3), M_2(4,8), M_3(5,12)$, $f_4(7,20), M_5(8,30), M_6(10,39)$ и $M_7(11,46)$, цртеж 4.

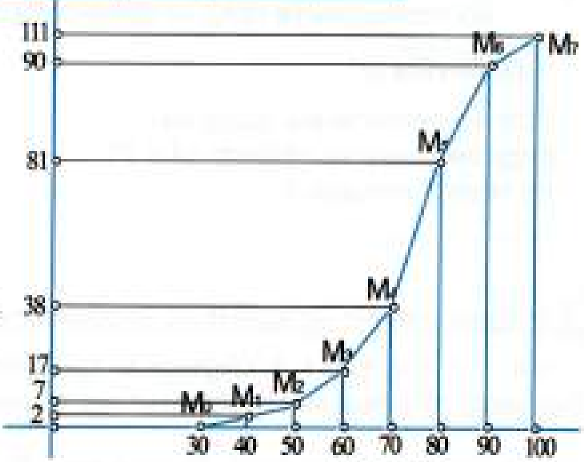
6 Нацртај го полигонот на кумулативната фреквенција на обележјето во задажата 2.

7 Нацртај го полигонот на кумулативната фреквенција според податоците во табелата:

Интервал на бодови	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
Фреквенција	2	5	10	21	43	30	9
Кумулативна f	2	7	17	38	81	111	120

Полигонот на кумулативната фреквенција на непрекинато обележје е искршена линија чии темиња се:, $M_3(a_3, f_1+f_2+f_3)$ итн., каде $a_0, a_1, a_2, \ldots$ се граници на групните интервали.

Овде тие точки се: $M_0(30,0), M_1(40,2), M_2(50,7)$, $M_3(60,17), M_4(70,38), M_5(80,81), M_6(90,111)$, $M_7(100,120)$, цртеж 5.



Цртеж 5

8 Нацртај полигон на кумулативна фреквенција на задача 4 .

Треба да знаеш!

Што е дијаграм? Што е хистограм? Што е полигон на фреквенцијата? Што е полигон на кумулативната фреквенција?

Задачи:

① Нацртај дијаграм и полигон на фреквенцијата на распределбата на задача а)1 и б) 3 од претходната лекција.

② Нацртај хистограм и полигон на фреквенцијата на распределбата на задачата 2 од претходната лекција.

③ Нацртај полигон на кумулативната фреквенција на задачата 4 од претходната лекција.

4 АРИТМЕТИЧКА СРЕДИНА. МЕДИЈАНА И МОД

Формирањето на распределбата на фреквенцијата и нејзиното графичко претставување се прв чекор во обработката и анализата на податоците на статистичкото обележје, кои даваат едно општо видување за тоа обележје.

Понатамошната анализа бара определување на други показатели или параметри кои попрецизно ќе ги конкретизираат главните карактеристики на обележјето, т.е. распределбата на фреквенцијата. Тие показатели или параметри можат да се поделат во две групи.

Едната група ја сочинуваат разни средни вредности, како мерка за централна тенденција на распределбата, т.е. вредност околу која се групираат вредностите на обележјето.

Во другата група спаѓаат бројните карактеристики што служат како мерка за растурање или варијабилност и покажуваат степен на отстапување на вредностите од средната вредност.

Средните вредности се делат на пресметани и позициони средни вредности. Пресметаните средни вредности претставуваат разни средини.

Во позиционите средни вредности спаѓаат ***медијана*** и ***мода***.

Потсети се!

- Што е аритметичка средина? Види решение на пример 14 и 15 во тема 7 лекција 2.

Најзначајна карактеристика на една статистичка низа е ***средната аритметичка вредност*** или просечната вредност на сите вредности на статистичкото обележје.

1 Еден ученик на крајот на учебната година ги има по предмети следните оценки: 3, 4, 4, 5, 4, 5, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5. Одреди го средниот успех на ученикот.

Согледај го решението: Успехот на ученикот е обележјето X, а оценките по предмети се вредности на обележјето. Според тоа, $\overline{X} = \dfrac{3+4+4+5+4+5+3+4+4+5+5+5+5}{13}$, т.е. $\overline{X} = \dfrac{56}{13} = 4{,}307$. Значи, средниот успех е 4,307, т.е. многу добар. До решението може да се дојде по пат на групирање, т.е. , од каде $\overline{X} = \dfrac{3\cdot 2+4\cdot 5+5\cdot 6}{2+5+6} = 4{,}307$.

X	3	4	5
f	2	5	6

Запомни!

Ако $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ се вредности на некое прекинато обележје X, а $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ се соодветни фреквенции, тогаш аритметичката средина е

$$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \dots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n}.$$

Бидејќи $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = N$ е број на статистичките единки во популацијата, тогаш

$$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \dots + x_n \cdot f_n}{N}.$$

Ако променливите $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ се јавуваат само по еднаш, т.е. $f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f_n = 1$,

тогаш $\overline{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{N}$.

2 На писмената работа по математика во една паралелка постигнат е следниот успех: оценка 5 добиле 4 ученици, оценка 4 добиле 7 ученици, оценка 3 добиле 7 ученици, оценка 2 добиле 8 ученици и оценка 1 добиле 6 ученици.

Одреди ја средната оценка на паралелката постигната на писмената работа.

3 Висината на учениците од една паралелка, мерена во cm, дадена е во табелата:

Обележје X	125-134	134-143	143-152	152-161	161-170	170-179
f	4	8	12	6	2	3
Средина на интервалот	129,5	138,5	147,5	156,5	165,5	174,5

Одреди ја просечната висина на учениците во таа паралелка.

Согледај го решението:

Обележјето е дадено со групни интервали, па

$$\overline{X} = \frac{x_1' f_1 + x_2' f_2 + \dots + x_n' f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}, \text{ каде што}$$

$x_1', x_2', x_3', \dots, x_n'$ се средини на групните интервали. Следствено,

$$\overline{X} = \frac{129{,}5 \cdot 4 + 138{,}5 \cdot 8 + 147{,}5 \cdot 12 + 156{,}5 \cdot 6 + 165{,}5 \cdot 2 + 174{,}5 \cdot 3}{4 + 8 + 12 + 6 + 2 + 3},$$

$$\overline{X} = \frac{518 + 1108 + 1770 + 939 + 331 + 523{,}5}{35} = 148,27cm.$$

4 Резултатите од мерењето на масата на учениците од прва година во една гимназија се дадени во следната табела:

Интервали на маса во kg	60 - 62	62 - 64	64 - 66	66 - 68	68 - 70
Број на ученици x	5	18	42	27	8

Пресметај ја просечната маса на тие ученици.

Некои особини на аритметичката средина:

1. Аритметичката средина е поголема од најмалата, а помала од најголемата вредност на обележјето, т.е. $x_1 < \overline{X} < x_n$.

Согледај го доказот:

Нека вредностите се подредени по големина, т.е. $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$. Ако вредностите $x_2, x_3, ... x_n$ ги замениме со x_1, имаме: $\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} > \frac{x_1 + x_1 + x_1 + ... + x_1}{n} = \frac{n \cdot x_1}{n} = x_1$;

ако, пак, вредностите $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}$ ги замениме со x_n, имаме:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} < \frac{x_n + x_n + x_n + ... + x_n}{n} = \frac{n \cdot x_n}{n} = x_n, \text{ т.е. } x_1 < \overline{X} < x_n.$$

2. Разликите $x_1 - \overline{X}, x_2 - \overline{X}, x_3 - \overline{X}, ..., x_n - \overline{X}$ се викаат отстапувања на вредностите на обележјето X од средната вредност. За нив важи равенството:

$$\left(x_1 - \overline{X}\right) f_1 + \left(x_2 - \overline{X}\right) f_2 + \left(x_3 - \overline{X}\right) f_3 + ... + \left(x_n - \overline{X}\right) f_n = 0.$$

Бидејќи $\overline{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_n f_n}{N}$ и $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n = N$, по средувањето добиваме:

$$\left(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + ... + x_n f_n\right) - \overline{X}\left(f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n\right) = \overline{X} \cdot N - \overline{X} \cdot N = 0.$$

3. Аритметичката средина може да биде мерка на некоја единка што ја нема во популацијата. Во тој случај велиме дека $\overline{X}$ е апстрактен претставител на множеството вредности $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. На пример, средната висина во задачата 3 е 148,27 cm, а ниту еден ученик ја нема таа висина.

4. Аритметичката средина може да биде нереална ако примерокот не е репрезентативен.

5 На 10 мерни места во Црно Море мерена е бројноста на мидиите. Резултатите од мерењето се дадени во табелата.

Мерно место	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Број на мидии	1	4	8	14	24	30	48	143	5291	57235

Едно мерно место е околу $1000m^2$, па за аритметичката средина добиваме:

$\overline{X}=\dfrac{1+4+8+14+24+30+48+143+5291+57235}{10}=6780$. Значи, на секое мерно место во просек има по 6780 мидии. Очигледно, резултатот е нереален, а причина за тоа е бројот на мидиите на 10 - то место. Се доаѓа до сознание дека во моментот на мерењето случајно на тоа место се затекнало едно големо јато мидии, а такви појави се многу ретки.

Б **6** Еден ученик на крајот на учебната година ги имал следните оценки: 3, 4, 4, 5, 4, 5, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5. Статистичката низа на успехот е: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5.

Запомни!

Вредноста на обележјето X што е точно на средината во статистичката низа се вика ***медијана*** и ја означуваме со $Me(x)$.

Вредноста на обележјето што најмногу се јавува во статистичка низа се вика ***мода***, а ја означуваме со $Mo(x)$.

Во задачата $Me(x)=4$, а $Mo(x)=5$. Во најголем број случаи, медијаната е различна од аритметичката средина. Ако низата има непарен број на членови, тогаш медијаната е еднаква со вредноста на средниот член во низата. Ако низата има парен број на членови, тогаш таа нема среден член, па медијаната е аритметичка средина на двата средни члена во низата.

Медијана и мода се позициони средни вредности, а нивната вредност зависи од позицијата што ја заземаат во статистичката низа.

7 Едно статистичко обележје има вредности: 2, 3, 4, 2, 3, 5, 2, 2, 1, 4, 5, 1, 3, 3, 4, 1, 1, 3, 2, 2. Одреди аритметичка средина, медијана и мода на обележјето.

Согледај го решението:

Статистичката низа е 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, а аритметичката средина е $\overline{X}=\dfrac{1\cdot4+2\cdot5+3\cdot5+4\cdot3+5\cdot2}{20}=\dfrac{51}{20}=2{,}55$. Низата има парен број на членови, па медијаната е $Me(x)=\dfrac{2+3}{2}=2{,}5$. За мода имаме $Mo(x)=2$. Може да се случи обележјето X да нема мода, а може да има и повеќе модални вредности. Така, на пример, обележјето со вредности 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 13, 15 има мода $Mo(x)=9$; обележјето со вредности 4, 5, 6, 7, 11, 12 нема мода, додека обележјето со вредности 1, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10 има два мода, $Mo(x)=4$ и $Mo(x)=8$.

8 Одреди ја медијаната на обележјето X чија распределба е дадена со таблицата.

Согледај го решението:

x	36	37	38	39	40	41	42	43
f	1	1	5	8	17	21	18	8

Низата има непарен број на членови $1+1+5+8+17+21+18+8=79$, па таа има среден член и тоа четириесеттиот член. Треба да ја најдеме групата во која се наоѓа средниот член. Бидејќи $1+1+5+8+17=23$, следната група што има вредност 41 се јавува 21 пати. Значи, средниот член се наоѓа во групата чии вредности се 41, па $Me(x)=41$.

Треба да знаеш!

Што е аритметичка средина и како таа се определува?
Што е медијана, а што мода и како тие се определуваат?

Задачи:

① На писмената работа по математика 15 ученици добиле оценка 3, 6 ученици оценка 2, 8 ученици оценка 1, 43 ученици оценка 4 и 5 ученици оценка 5. Најди ја просечната оценка постигната на писмената работа.

② За еден овоштарник добиени се следните податоци за принос во kg по една јаболкница:

Принос во kg	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100	100 - 110
Број на стебла f	30	25	10	12	8	25

Одреди го просечниот принос по една јаболкница.

③ Одреди ја медијаната на обележјето X, чија распределба на фреквенцијата е дадена со табелите:

а)

X	2	5	6	7	9	12	16	19	20	22
f	8	12	3	17	10	7	13	5	15	10

б)

X	3,5 - 4, 5	4,5 - 5, 5	5, 5 - 6, 5	6, 5 - 7, 5	7, 5 - 8, 5	8, 5 - 9, 5	9, 5 - 10, 5
f	3	5	6	10	8	6	2

Тематска контролна вежба

① Во 16 земјоделски семејства истражуван е бројот на јаболкниците во нивните овоштарници. Добиени се следните податоци: 10, 26, 12, 17, 12, 15, 26, 20, 10, 10, 15, 17, 12, 10, 26, 19.

а) Состави статистичка таблица. б) Одреди распределба на фреквенцијата.

в) Одреди ја кумулативната фреквенција. г) Нацртај го полигонот на фреквенцијата на распределбата и на кумулативната фреквенција.

② Распределбата на фреквенцијата на некое обележје X е дадена во таблицата:

Групни интервали на обележјето X	$(30-40]$	$(40-50]$	$(50-60]$	$(60-70]$	$(70-80]$	$(80-90]$	$(90-100]$
Фреквенција f	12	23	58	72	45	38	16

Нацртај хистограм, полигон на фреквенцијата на распределбата, полигон на кумулативната фреквенција и одреди аритметичка средина и медијана на обележјето X.

ТЕМА 1

МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА И МНОЖЕСТВА

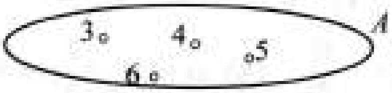
1 ① а) да; б) не; в) не. ② а) $9 \leq 3$; б) $3+5 \neq 7$; в) $4^3 \neq 30$; г) $6=9$.

2 ① а) $\tau\left(\frac{1}{2} > 2 \wedge 3 > 2\right) = \bot \wedge \top = \bot$; б) $\tau\left(\frac{1}{2} > 2 \wedge \frac{1}{3} < 2\right) = \bot \wedge \top = \bot$;
в) $\tau\left(\frac{1}{3} \geq 2 \wedge 3 \leq 2\right) = \bot \wedge \top = \bot$. ② а) $\tau(2 \geq 3 \vee -2 \geq -3) = \bot \vee \top = \top$; б) $\tau(2 \geq 3 \vee 2^3 \geq 3^2) = \bot \vee \bot = \bot$;
в) $\tau(-2 < -3 \vee 2^3 < 3^2) = \bot \vee \top = \top$. ③ а) $\tau(3|9 \wedge 3|25) = \top \wedge \bot = \bot$; б) $\tau(3|9 \vee 3|25) = \top \vee \bot = \top$;
в) $\tau(3 \nmid 9 \wedge 3|21) = \bot \wedge \top = \bot$.

3 ① а) $\tau\left(\frac{1}{5} < 5 \Rightarrow \frac{1}{4} > 4\right) = \top \Rightarrow \bot = \bot$; б) $\tau\left(\frac{1}{5} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < 3\right) = \bot \Leftrightarrow \top = \bot$; в) $\tau\left(\frac{1}{3} < 3 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq 4\right) = \top \Rightarrow \top = \top$.
② а) $\tau(3|7 \Leftrightarrow 3|9) = \bot \Leftrightarrow \top = \bot$; б) $\tau(3 \nmid 7 \Leftrightarrow 3 \nmid 1) = \top \Leftrightarrow \top = \top$; в) $\tau(3 \nmid 9 \Rightarrow 3|1) = \bot \Rightarrow \bot = \top$.

4 ① а) не е тавтологија; б) не е тавтологија. ② а) да; б) да.

7 ① а) $A = \{3,4,5,6\}$;



б) $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$; $A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 7\}$.
② $P_M = \{\varnothing, \{л\}, \{е\}, \{т\}, \{о\}, \{л,е\}, \{л,т\}, \{л,о\}, \{е,т\}, \{е,о\}, \{т,о\}, \{л,е,т\}, \{л,е,о\}, \{л,т,о\}, \{е,т,о\}, \{л,е,т,о\}\}$.

8 ① $A \cup B = \{-1,2,3,4,5,6,7,9\}$; б) $A \cap B = \{3,5,7\}$; в) $A \setminus B = \{2,4,6\}$. ② а) $A \cup B \cup C = \{-5,-4,\ldots,7,8\}$;
б) $A \subset B$; в) $A \cap B = \{3,4,5\}$. ③ а) $\{(c,b),(c,c),(d,b),(d,c),(e,b),(e,c)\}$;
б) $\{(c,a),(c,d),(c,e),(d,a),(d,d),(d,e),(e,a),(e,d),(e,e)\}$.

ТЕМА 2

ОСНОВНИ БРОЈНИ МНОЖЕСТВА

1 ① а) $A = \{1,2,3,\ldots,2001\}$; б) $B = \{25,26,27,\ldots,39\}$. ② а) $\top$; б) $\top$; в) $\bot$; г) $\top$.
③ а) $(43+17)+(32+18)=110$; г) $(125 \cdot 8) \cdot (25 \cdot 4) \cdot 7 = 700000$. ④ а) 400; б) 1480; в) 1000; г) 8.
⑤ а) 88; 888;...; 88888888; б) .11; 111;...; 11111111;

2 ① б); г). ② Од $c|(a+b) \Rightarrow a+b = m \cdot c$, од $c|b$ следува $b = nc$,
па $a+b = a+nc = mc \Rightarrow a = mc - nc \Rightarrow a = c(m-n) \Rightarrow c|a$. ③ а) со 2; б) 3; в) 4; г) 7.
④ Види решение на пример 2 во 2.2. ⑤ а) $n=2$; б) $n=1$.
⑥ а) По извршеното сведување изразот е од видот $4n$, а тој е сложен бидејќи има повеќе од два делители; б) $2(n^2+2n+2)$, сложен бидејќи е делив со 2.
⑦ а 12; б) 15; в) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$; г) 900. ⑧ Најди НЗД (48, 72, 120), 24 пакетчиња. Во секое има по 2 чоколади, 3 бајадери и 5 бонбони.

3 ① а) $1011 > 1010$; б) $1001 < 11010$; ② а) 21; б) 3001; в) 50203; г) 1011_2; д) 1001100_2; ѓ) 101000010_2. ③ а) 31; б) 17; в) 16; г) 42. ④ а) 1000_2; б) 11100_2; в) 1100100_2; 10000111_2.

4 ① а) 10001111_2; б) 1000111_2; г) 1111110_2 ② а) 111100_2; б) 11100_2; в) 110101110_2; г) 100010010_2.

5 ① а) 6; б) 20. ② а) -16; б) -6; в) -5. ③ а) -20; б) -16; в) 1; г) 0. ④ При докажување на вакви равенства најчесто се користи: $a+(-a)=(-a)+a=0$ и $a=a+0$.

а) $-(-x)=-(-x)+0=-(-x)+(-x)+x=(-(-x)+(-x)+x=0+x=x$;

б) $-(x+y)=-(x+y)+0=-(x+y)+x+(-x)+y+(-y)=\big(-(x+y)+(x+y)\big)+(-x)+(-y)=0+(-x)+(-y)$;

г) $(-x)(-y)=(-x)(-y)+0=(-x)(-y)+(-x)y+xy=(-x)((-y)+y)+xy=-x\cdot 0+xy=0+xy=xy$.

6 ① а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=-4$; г) $x=\pm 3$. ② а) $a=15$; б) $b=35$; в) $c=4$; г) $d=8$.

③ а) $\frac{9}{48}<\frac{24}{48}<\frac{28}{48}<\frac{30}{48}$, т.е. $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{7}{12}<\frac{5}{8}$; б) $-\frac{2}{3}<-\frac{7}{12}<\frac{9}{27}<\frac{4}{9}$; в) $5\frac{4}{5}>5\frac{8}{15}>4\frac{5}{6}$.

7 ① а) $\frac{9}{17}$; б) $\frac{4}{5}$; в) 30. ② а) $\frac{13}{45}$; б); $-\frac{31}{20}$. ③ а) 10; б) $4\frac{2}{3}$; в) $9\frac{1}{10}$.

④ а) $\frac{3}{14}$; б) 2; в) $1\frac{3}{10}$. ⑤ $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{bd}\cdot\frac{m}{n}=\frac{(ad+bc)m}{(bd)n}=\frac{(ad)m+(bc)m}{(bd)n}=$

$=\frac{adm}{bdn}+\frac{cbm}{bdn}=\frac{am}{bn}+\frac{cm}{dn}=\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}+\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}$.

8 ① 1,75; 2,125; -1,8; -1,28. ② $2\frac{3}{25}$; $\frac{1}{125}$; $6\frac{1}{8}$; $-5\frac{3}{4}$. ③ а) 2,2; б) 28,56; в) 1,402; г) -3,2.

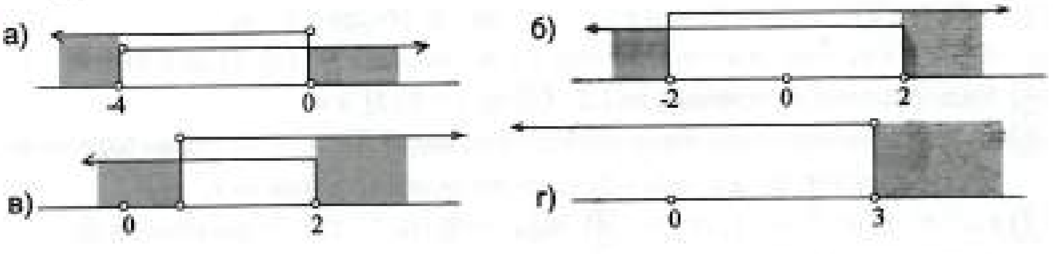
④ 1,(142857); 0,2(4); 1,08(3). ⑤ а) $\frac{2}{3}$; б) $2\frac{52}{165}$; в) $4\frac{57}{110}$; г) $2\frac{31}{90}$.

9 ① а) ⊤; б) ⊤; в) ⊥; г) ⊤. ② а) $\pi<\frac{22}{7}$; б) $\frac{306}{125}<\sqrt{6}$; г) $\frac{36}{25}>\sqrt{2}$.

③ а) Конструирај правоаголен триаголник со катети 2 и 1, $\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$;

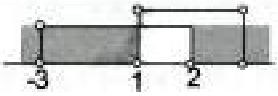
б) $\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1^2}$; в) $\sqrt{15}=\sqrt{4^2-1^2}$, конструирај правоаголен триаголник со хипотенуза 4 и една катета 1.

④



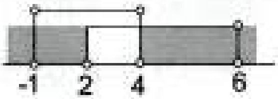
⑤ а) $x\in[-1,3)$; б) $x\in(0,10]$; в) $x\in[-1,\infty)$.

⑥ а)



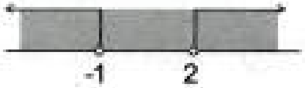
$x\in[1,2)$

б)



$x\in(2,4]$

в)



$x\in\varnothing$.

⑦ а) $(-5,4]\cup(-1,5)=(-5,5)$; б) $(0,5]\cup[-6,1)=[-6,5]$; в) $(-\infty,-3)\cup[-1,\infty)$.

ТЕМА 3

АЛГЕБАРСКИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1 ① Не, бидејќи не е производ од еднакви множители. ② Вистинити се а) и в).
③ а) $x=1$; или $x=-1$. б) $x=-1$; в) $x=-4$; г) $x=3$; д) $x=y$; ѓ) $x=y$. ④ а) 10^4; б) 10^6;
⑤ а) $7\cdot10^3$; б) $72\cdot10^6$; в) $347\cdot10^2$. ⑥ а) $3{,}974\cdot10^3$; б) $0{,}0005635\cdot10^3$; в) $0{,}035\cdot10^3$.
⑦ а) x^{13}; б) x^5; в) x^7. ⑧ а) a^{42}; б) a^{24}. ⑨ а) a^7; б) 1. ⑩ а) 8; б) 216. ⑪ а) $x=3$;
б) $x=6$; в) $x=5$; г) $x=2$.

2 ① а) $3x^3y^2$; б) $2x^4y^6$. ② а) 3; x^3y^4z; 8. б) $-\frac{2}{3}$;x^3y;4. в) $\frac{3}{5}$;1;0. ③ а) 20; б) 3.
④ а) да; б) не. ⑤ а) $-x^3+3x^2-5$; - полинимот е од трет степен.
б) $5x^2y-7xy^2-2xy$; - полиномот е од трет степен.

3 ① а) 60; б) 18. ② а) x^3+3x^2+x; б) x^3+x^2-x-2; в) $x^5+3x^4+3x^3+x^2-x-1$.
③ а) $a=6, b=-17, c=12$; б) Таков полином не постои.

4 ① а) $9a^2b^2-4ab^4+\frac{4}{9}b^6$; б) $8x^6y^3+36x^5y^5+54x^4y^7+27x^3y^9$;
в) $64x^6y^3-240x^5y^2+300x^4y-125x^3$.
② а) $a^5+5a^4+10a^3+10a^2+5a+1$; б) $a^{10}-5a^8+10a^6-10a^4+5a^2-1$.
③ $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. ④ а) $\frac{4}{9}x^2y^2-\frac{16}{25}x^4y^6$; б) $\frac{1}{8}x^3-\frac{8}{27}y^3$; в) $\frac{8}{27}x^6y^3+\frac{27}{64}x^3y^6$.
⑤ а) $x^3-4x^2+13x-9$; б) x^2+2x+3; в) $3-10a-9a^2$; г) a^2+2b^2-2bc.

5 ① а) $-\frac{2}{5}xy$; б) $-\frac{3}{2}x$; в) $5y^2$. ② а) $\frac{2}{7}xy^3-\frac{3}{7}x^2y^2-\frac{5}{7}$; б) $-6xy+3x^2y^2-12x^3y^3$.
③ а) x^3-2x^2+6x-7; б) количникот е $2x^3+3x^2+12x+32$, а остаток 91;
в) количникот е x^3-x, а остаокот x; г) $x^4+x^3+x^2+x+1$.

6 ① а) $2(x+y)$; б) $-5a(3x+4y)$; в) $2a^2(2a-3b)$; г) $4x^2y^2(xy-2)$.
② а) $5(x^2-4xy-y^2)$; б) $3a(b+3c-4d)$.
③ а) $(x+y)(a+7)$; б) $(p-2)(7q-2p)$; в) $(x-3)(2m+5n)$; г) $(a-b)(2a-3b)$.
④ а) $(x+y)(x+a)$; б) $(a-b)(a-3)$; в) $(x-2)(5ax-b-1)$; г) $(xy+z)(xy+3x^3y^4-1)$.

7 ① а) $(xy-4)(xy+4)$; б) $(a-b-1)(a-b+1)$; в) $y(2x-y)$. ② а) $(2-ab)(4+2ab+a^2b^2)$; б) $(abc+1)(a^2b^2c^2-abc+1)$. ③ а) $(a-b)(x-y)(x+y)$; б) $(a+b)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

8 ① а) $(2x+y)^2$; б) $(5x-y)^2$; в) $-(5x-2y)^2$. ② а) $7(a+b)^2$; б) $2xy(2x-y)^2$; в) $2a(5a+1)^2$.

③ а) $(x+y-z)(x+y+z)$; б) $(2-p+q)(2+p-q)$; в) $(4m-3x+2y)(4m+3x-2y)$.

9 ① а) $a^4x^2y^2$; б) $9(a-2b)$; в) $a+1$ ② а) $12a^5x^5y^7$; б) x^2-4y^2; в) $3(a-2b)^2(a^2+2ab+4b^2)$.

③ а) НЗД = $a-5$; НЗС = $a(a-5)^2(a+5)$; б) НЗД = $a-5$; НЗС = $-3(a-5)(a+5)$;

10 ① а) $x\neq-1$; б) $x\neq1, x\neq-4$; в) $y\neq0, x\neq3; x\neq-3$; г) $x\neq0, x\neq y$.

② а) $\frac{a}{(a-3b)(a+3b)}; \frac{a-3b}{(a-3b)(a+3b)}$; б) $\frac{x+1}{x(x-1)(x+1)}; \frac{-2x}{x(x-1)(x+1)}; \frac{x-1}{x(x-1)(x+1)}$.

③ а) $-(1+a), a\neq1$; б) $\frac{x-y}{y}, x\neq4$; в) $\frac{x-1}{x+1}, x\neq0, x\neq-1$.

11 ① а) $2,\ \ x\neq1$; б) $\frac{4x^2}{(x-5)^2(x+5)^2}$. ② а) $\frac{3a^2}{x-1}, a\neq0, x\neq-1$; б) $\frac{3}{2}, x\neq y, x\neq-y$;

в) $\frac{a+3x}{a^2}; a\neq3x; a\neq x$. г) $\frac{2(x+1)}{x-1}, x\neq-1$; ③ а) $2ab, a\neq0, b\neq0$; и $a+b+c\neq0; a+b-c\neq0$.

б) $\frac{1}{a-1}; a\neq0; a\neq1; a\neq-1$.

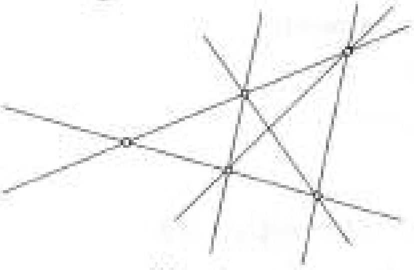
ТЕМА 4 ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ ВО РАМНИНА

1 ① Употребен е поимот полуправа и двете полуправи да имаат заеднички почеток.

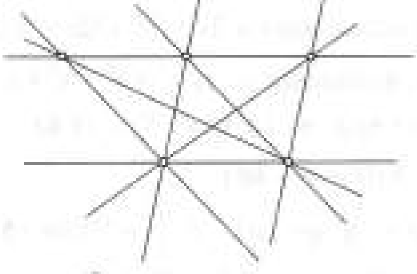
② Секој многуаголник со три страни се вика триаголник. Веригата од дефинирачките поимите е: многуаголник, проста затворена искршена линија, искршена линија, отсечка, две точки и релацијата меѓу. ③ Не, направи цртеж. ④ Точките се од иста страна.

2 ① Една права, ако сите точки се колинеарни; четири прави ако од четирите точки три се колинеарни; шест прави ако точките се темиња на четириаголник.

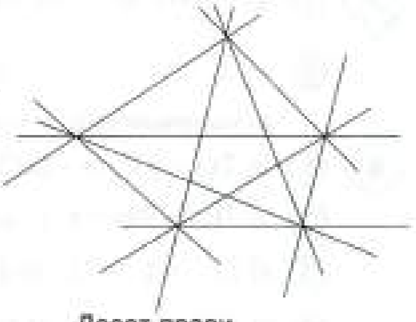
②



Шест прави



Осум прави



Десет прави

③ Ако A е произволна точка, постојат B и C, така што точките A, B, C не се колинеарни и определуваат рамнина. За рамнината $\sum$ постои точка D (A3), така што $D \notin \sum$. Точките A, B, C, D не лежат во иста рамнина.

④ Можно е или сите точки да лежат во една рамнина (определуваат една рамнина), или, пак, да не лежат во иста рамнина. Во тој случај определуваат четири рамнини: ABC, ABD, ACD, BCD.

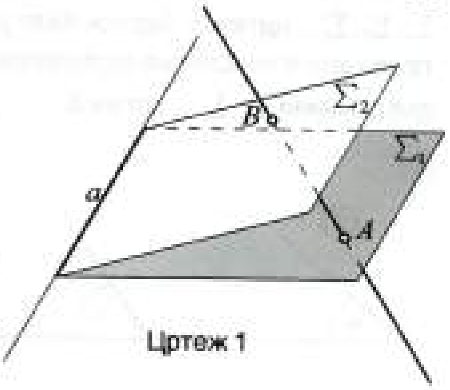
⑤ За точките можни се следниве случаи: а) сите пет точки да лежат во иста рамнина; б) четири точки да лежат во иста рамнина. ($ABCD$); $ABE, ACE, ADE, BCE, BDE, CDE$.; в) определуваат рамнини, ако кои било четири точки од нив не лежат во иста рамнина. Кои било три точки од дадените пет определуваат една рамнина. Рамнините се: $ABC, ABD, ABE, ACE, ACD, BCE, BCD, CDE, ADE, BDE$.

3 ① Според А3 во рамнината $\sum$ лежат барем три неколинеарни точки A, B, C. Правата $a = BC$ лежи во рамнината $\sum$ (А5) и притоа $A \notin a$.

② Според А3 постои точка $A \notin \sum$. Нека точката $B \in \sum$, тогаш правата AB ја прободува рамнината $\sum$.

③ Според А3 во рамнината $\sum$ постојат три точки A, B, C што не се колинеарни. На правата $a = BC$ има бесконечно точки (А1) што лежат во рамнината $\sum$, $A \notin a$. Секоја права што минува низ точката A и која било точка од правата a лежи во рамнината $\sum$.

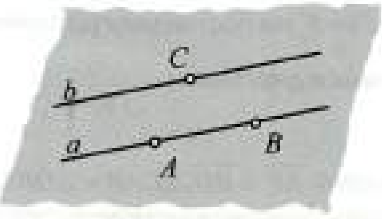
④ Од условот $\sum_1 \cap \sum_2 \neq \varnothing$ следува дека рамнините се сечат по некоја права a (црт. 1). Според А4 постојат точки $A \in \sum_1, B \in \sum_2$, што не лежат на правата a, $A \notin a, B \notin a$. Правата AB ги прободува рамнините $\sum_1$ и $\sum_2$.



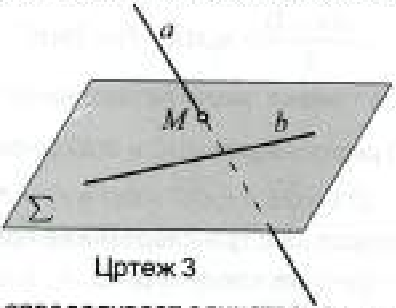
Цртеж 1

⑤ Не е можно. Затоа што рамнината $\sum$ содржи точки што не припаѓаат на правата a.

4 ① а) А4; б) Т6; в) Т10. ② Нека се правите a и b паралелни. Според А2 на правата a сигурно лежат точките A и B, така што $A \notin b, B \notin b$. На правата b сигурно лежи точката C, така што $C \notin a$. Точките A, B, C се неколинеарни, па според А4 тие определуваат единствена рамнина.



Цртеж 2

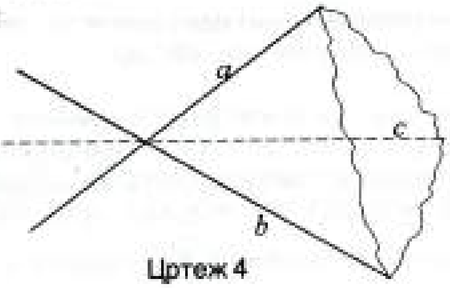


Цртеж 3

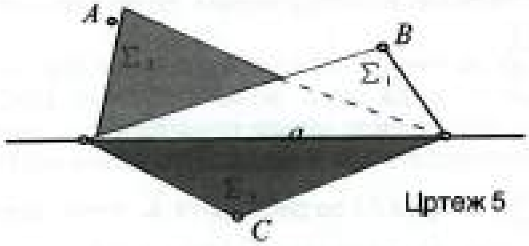
③ Правите a и b се разминувачки. Според условот правите a и b немаат заедничка точка, тие се или паралелни или се разминувачки. Правите не можат да бидат паралелни. Ако правите a и b се паралелни, тогаш тие ќе лежат во иста рамнина $\sum_1$ која минува низ точката M $(M \in a)$ што не е можно бидејќи $M \notin b$. Значи правите a и b се разминувачки, цртеж 3.

④ Има две можности: а) правите да лежат во иста рамнина; б) правите да не лежат во иста рамнина. Тогаш определени се три рамнини (a, b), (a, c) и (b, c), според Т10, цртеж 4.

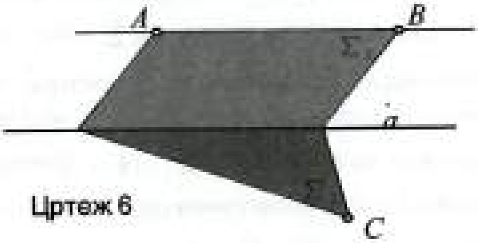
⑤ Според Т6 права и точка што не лежи на таа права опре делуваат единствена рамнина. Нека е дадена права a и точки A, B, C. Ако кои било две точки определуваат права што не е паралелна со правата a, тогаш определени се три рамнини $\sum_1, \sum_2, \sum_3$., цртеж 5. Ако кои било две точки определуваат права што е паралелна со правата а,тогаш се определени две рамнини $\sum_1, \sum_2$., цртеж 6.



Цртеж 4



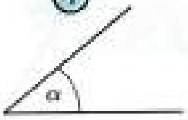
Цртеж 5

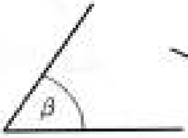


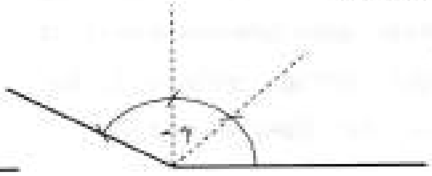
Цртеж 6

5

①







а) $\gamma = 2\alpha + \beta$

$\gamma = 3\alpha - 2\beta$

② Суплементниот агол е $180^0 - 75^0 = 105^0$, а комплементниот агол е $90^0 - 75^0 = 15^0$.

③ $135^0; 45^0$. ④ Не важи, провери го тоа на цртеж 10 во лекцијата со повлекување на права FG или HG. ⑤ Според А4, рамнината е определена со три неколинеарни точки.

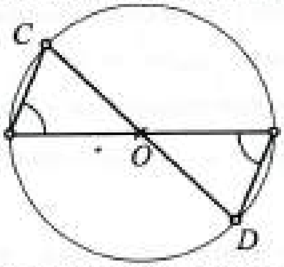
⑥ $D_n = n; \frac{n(n-3)}{2} = n; n(n-3) = 2n; n^2 - 5 = 0$ или $n = 0$, т.е. $n = 5$. Не постои многуаголник кој има нула темиња, значи петаголникот има ист број на страни и дијагонали.

6

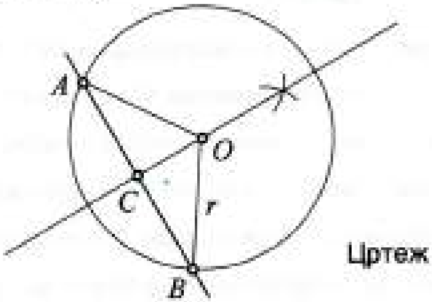
① Триаголниците AOC и BOD се складни.

$(\overline{OA} = \overline{OB} = r; \overline{OC} = \overline{OD} = r;\ \measuredangle AOC = \measuredangle BOD)$, следува $\overline{AC} = \overline{BD}, \measuredangle CAB = \measuredangle DBA$.

Дијаметарот AB е трансверзала на правите AC и BD. Бидејќи наизменичните агли CAB и DBA се еднакви, следува дека $AC \parallel BD$., црт. 7.



Цртеж 7



Цртеж 8

② Од својството на симетрала на отсечка следува дека на симетралата постојат точки кои од точките A и B се на исто растојанието. Една од тие точки е центарот на кружницата.

③ Од цртеж 8 следува дека триаголникот ACO е правоаголен, па $r^2=\left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2+\overline{OC}^2=8^2+15^2; r=17cm.$

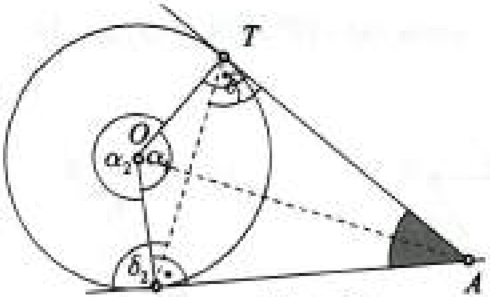
④ а) Триаголниците AOP и AOT се правоаголни и складни $\left(\measuredangle P=\measuredangle T=90^0; \overline{OA}=\overline{OA}; \overline{OP}=\overline{OT}=r\right).$

Оттука следува $\overline{AP}=\overline{AT}$. б) Според Т15 следува $\delta_1=\frac{1}{2}\alpha_1; \delta_2=\frac{1}{2}\alpha_2$. Бидејќи δ_2 е надворешен агол на триаголникот PAT, следува $\delta_2=\delta_1+\measuredangle PAT$, т.е. $\measuredangle PAT=\left|\delta_2-\delta_1\right|=\left|\frac{1}{2}\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_1\right|=\frac{1}{2}\left|\alpha_2-\alpha_1\right|$. (црт. 9)

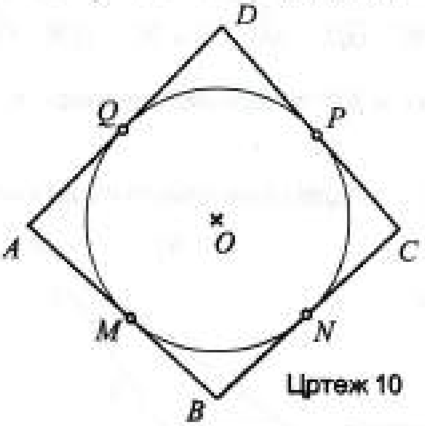
⑤ Слично на претходната задача:

$$\overline{AM}=\overline{AQ}; \overline{CN}=\overline{CP}; \quad \overline{BM}=\overline{BN}; \overline{DP}=\overline{DQ}; \quad \overline{AB}+\overline{CD}=\left(\overline{AM}+\overline{MB}\right)+\left(\overline{CP}+\overline{PD}\right)=$$

$$=\left(\overline{AQ}+\overline{BN}\right)+\left(\overline{CN}+\overline{DQ}\right)=\left(\overline{AQ}+\overline{DQ}\right)+\left(\overline{BN}+\overline{CN}\right)=\overline{AD}+\overline{BC}.$$ (црт. 10)



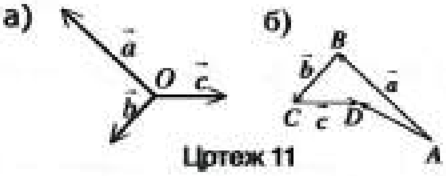
Цртеж 9



Цртеж 10

7 ① Може да се формираат 12 вектори и 6 отсечки. 3 Еднакви вектори се: б) и д). Колинеарни вектори се: а); б); в); д). Не се еднакви векторите: а); в); г).

8 ① Нека се дадени векторите $\vec{a}; \vec{b}$ и $\vec{c}$, како на цртежот 11.а. Нивниот збир е како на црт. 11.б:



Цртеж 11

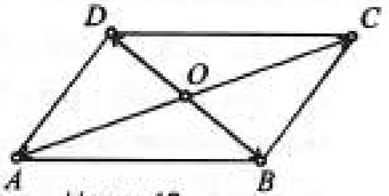
$$\overline{AB}=\vec{a}; \overline{BC}=\vec{b}; \overline{CD}=\vec{c}$$
$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

② а) $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right)+\left(\overline{OB}+\overline{OD}\right)=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0};$

б) $\left(\overline{BC}+\overline{OA}\right)+\overline{OC}=\overline{BC}+\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right)=\overline{BC}+\vec{0}=\overline{BC}.$

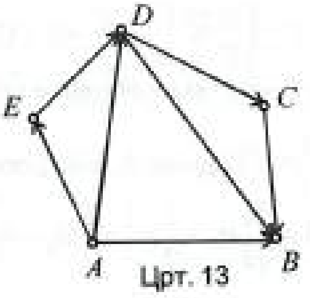
в) $\left(\overline{AB}+\overline{DO}\right)+\overline{OA}=\overline{AB}+\left(\overline{DO}+\overline{OA}\right)=\overline{AB}+\overline{DA}=\overline{DA}+\overline{AB}=\overline{DB}.$

г) $\overline{DO}+\left(\overline{OA}+\overline{BC}\right)=\left(\overline{DO}+\overline{OA}\right)+\overline{BC}=\overline{DA}+\overline{BC}=\vec{0}.$ (црт. 12)



Цртеж 12

③

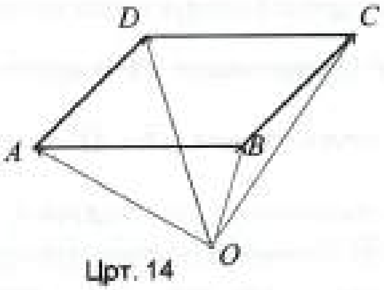


Црт. 13

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$,

итн., црт. 13.



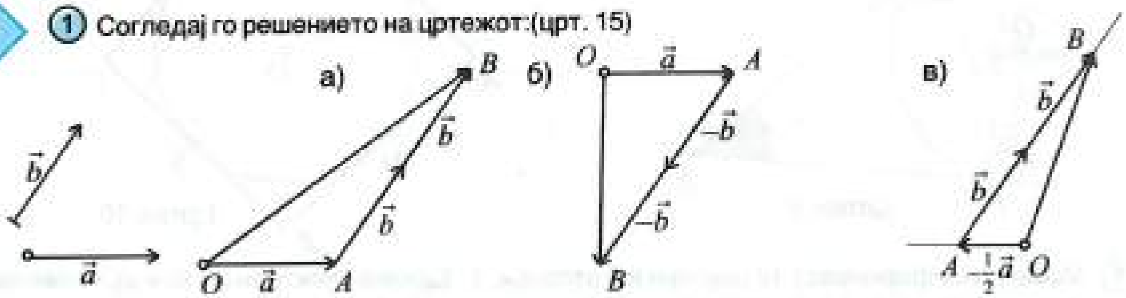
Црт. 14

④ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

⑤ Според правилото на три точки следува: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\right)$. Бидејќи $ABCD$ е паралелограм, следува дека $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$ се спротивни вектори, па $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. Значи, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, црт. 14.

9 ① Согледај го решението на цртежот:(црт. 15)



$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+2\vec{b}$ $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+(-2\vec{b})$ $\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$

црт. 15

② а) $2\vec{x}-\vec{x}=2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{a}-\vec{b};\vec{x}=3\vec{a}+\vec{b}$. б) $3\vec{x}-2\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{a}+\vec{b};\vec{x}=-\vec{a}+\vec{b}$. в) $\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{b}$.

③

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{BC}$; $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$; $2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

④ Со примена на правилото на три точки имаме;

$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB};\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BS}$

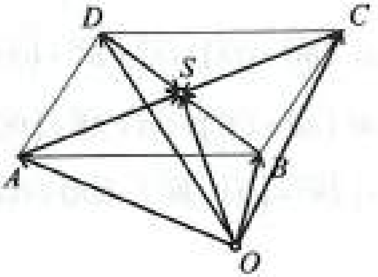
$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS};\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DS}$. ,црт. 15.

Ако ги собереме четирите равенства добиваме:

$4\overrightarrow{OS}=\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CS}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BS}\right)+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS}\right)+\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DS}\right)$,

$4\overrightarrow{OS}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{AS}\right)+\left(\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{DS}\right)$,

$4\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\vec{0}+\vec{0}$, т.е. $4\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.



Црт. 15

⑤ Од ΔMBN следува:

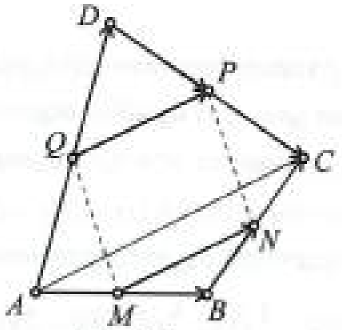
$$\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)=\frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Од ΔQDP следува:

$$\overline{QP}=\overline{QD}+\overline{DP}=\frac{1}{2}\overline{AD}+\frac{1}{2}\overline{DC}=\frac{1}{2}\left(\overline{AD}+\overline{DC}\right)=\frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Од $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ и $\overline{QP}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ следува дека $\overline{MN}=\overline{QP}$,

па според теоремата за паралелограм, следува дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм, црт. 16.



Црт. 16

10 ① Со примена на правилото на три точки следува:

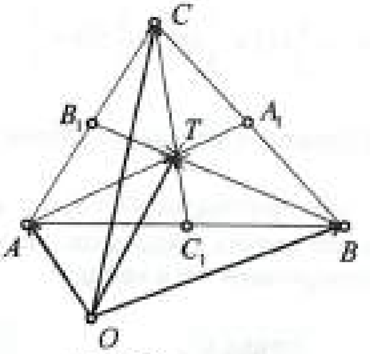
$$\overline{OT}=\overline{OB}+\overline{BT};\ \overline{OT}=\overline{OA}+\overline{AT};\overline{OT}=\overline{OC}+\overline{CT}.$$

По собирањето имаме:

$3\overline{OT}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{AT}+\overline{BT}+\overline{CT}$. Од својство на тежиштето на триаголникот следува, (црт. 17.)

$$\overline{AT}=\frac{2}{3}\overline{AA_1};\quad \overline{BT}=\frac{2}{3}\overline{BB_1};\quad \overline{CT}=\frac{2}{3}\overline{CC_1},$$

па $3\overline{OT}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\frac{2}{3}\left(\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}\right).$



Црт. 17

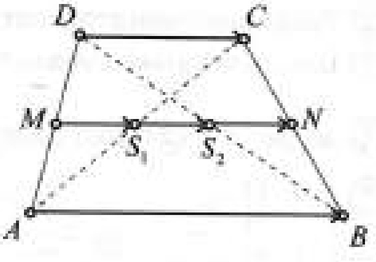
$\overline{OT}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$. Бидејќи според решението на задача 4 од лекцијата

$\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\overline{0}.$

② Упатство: $\overline{TA}=\frac{2}{3}\overline{A_1A}=-\frac{2}{3}\overline{AA_1}$, $\overline{TB}=\frac{2}{3}\overline{B_1B}=-\frac{2}{3}\overline{BB_1}$, $\overline{TC}=-\frac{2}{3}\overline{CC_1}$.

③ Од условот следува дека S_1 и S_2 лежат

на средната линија на трапезот.

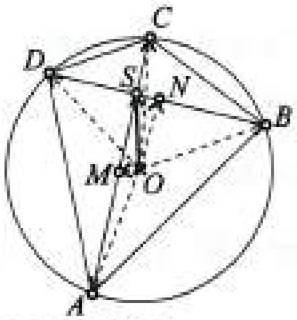


$\overline{S_1S_2}=\overline{MN}-\left(\overline{MS_1}+\overline{S_2N}\right)$. Според решението на

задача 1 и 2 од лекцијата следува:

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{DC}\right),\overline{MS_1}=\frac{1}{2}\overline{DC},\overline{S_2N}=\frac{1}{2}\overline{DC}$, па

$$\overline{S_1S_2}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{DC}\right)-\left(\frac{1}{2}\overline{DC}+\frac{1}{2}\overline{DC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}-\overline{DC}\right).$$



④ Да претпоставиме дека дијагоналите не минуваат низ центарот на кружницата. Нека M и N се средини на дијагоналите AC и BD. Според правилото на паралелограм следува $\overline{OS} = \overline{OM} + \overline{ON}$; а според решението на задачата 3 од лекцијата имаме:

$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OC}; \overline{ON} = \frac{1}{2}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OD}$. Со замена во првото равенство добиваме:

$$\overline{OS} = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OC} + \frac{1}{2}\overline{OB} + \frac{1}{2}\overline{OD} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right).$$

⑤ Според претходната задача имаме $\overline{OS} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right)$. Од условот на задачата $\overline{OS} = \vec{0}$, па следува $O \equiv S$, т.е. дијагоналите се еднакви и се преполовуваат во пресечната точка. Според тоа, четириаголникот е правоаголник, а бидејќи дијагоналите се заемно нормални, тој е квадрат.

ТЕМА 5 ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ НА ВЕЛИЧИНИТЕ

1 ① а) 6; б) 5; в) 6; г) 10 ② а) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{5}{3}$; ③ 8000, 6000, 4000. Упатство. $x = 4k, y = 3k, z = 2k$.

④ $a:b:c:d = 4:6:5:14$. Упатство. $a:b = 2:3, a:c = 4:5, a:d = 2:7$.

⑤ 1500, 600, 800, 3600. Упатство. $a:b:c:d = 15:6:8:36; k = 100$.

2 ① 35 kg ② 60 работници ③ 20 работници. Упатство. Деновите претвори ги во часови или обратно. ④ 500 работници. Упатство. Метрите претвори ги во километри или обратно.

⑤ 38,88 дена.

3 ① 53 одлични, 238 мн. добри, 204 добри, 187 доволни и 68 повторувале.

② Пред намалувањето цената била 90 ден. ③ 15% маржа.

④ Цената пред намалувањето била 1800 ден. ⑤ 2214. ⑥ 4600 ден.

4 ① $40^0; 60^0; 80^0$. ② 12000,15000,19000,2000. Упатство. $132k = 66000$. ③ 9000,15000,21000. ④ 49ден.

⑤


Ако k е размерен дел, тогаш $7k + 2k + 2k + 6k = 731$, $k = 43$.

Значи, од секоја сорта ќе се земе: $7 \cdot 43$; $2 \cdot 43$; $2 \cdot 43$; $6 \cdot 43$.

Решението е:

301, 86, 86, 258 литри.

5 ① $k = 76315,97$ ден. ② 6,47%. ③ 156 дена. ④ 6%.

ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА И НЕРАВЕНКА

1 ① а) ;$M_1(-3,-7)$; б) $M_2(3,7)$; в) $M_3(3,-7)$ ② $L=4\cdot\sqrt{137}$; $P=137$ кв.ед. ③ $M\left(\frac{19}{6},0\right)$.

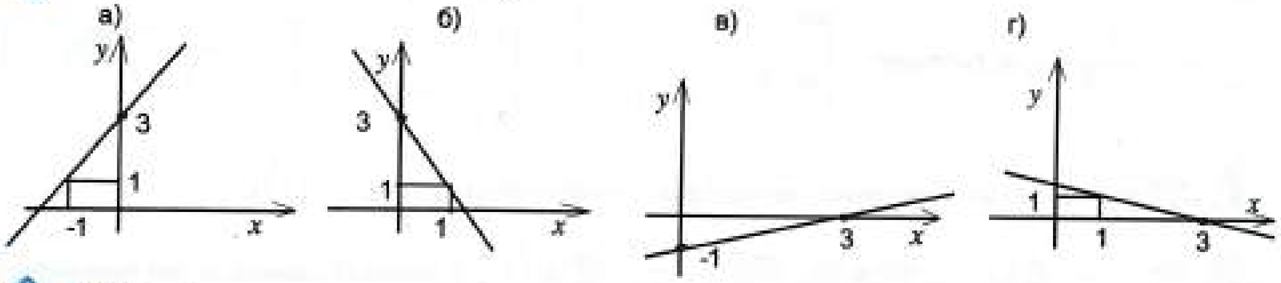
④ $M_1(0,-3)$ и $M_2(0,-9)$. ⑤ $A(3,-1)$ и $B(0,8)$. ⑥ $D(-3,-5)$. Упатство. Одреди ја средната точка S на отсечката AC (дијагонала на паралелограмот). Точката D е симетрична со B во однос на S (зошто?).

⑦ Користи го упатството на претходната задача. $C(-1,7), D(-3,5)$.

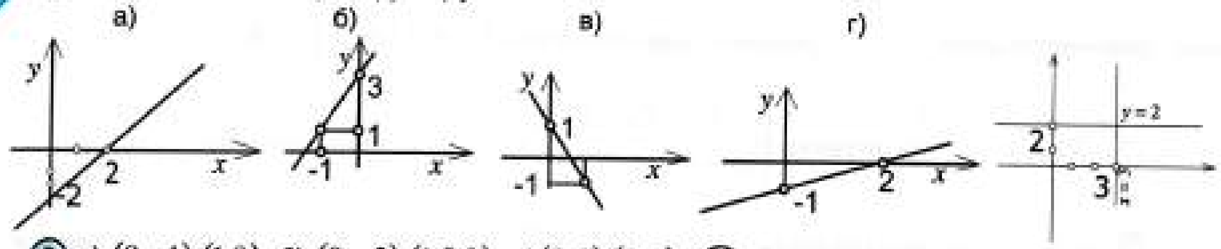
2 ① $P=11,5$. ② $h_c=5$. Упатство.Користи $h_c=\frac{2P}{c}$. ③ $C_1(32,0), C_2(-8,0)$.

④ $C_1(-7,-3), D_1(-8,0)$ или $C_2(17,-3), D_2(18,-4)$.

3 ① а) $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$;б) -4; в) $-\frac{1}{2}$; г) 0.



4 ① Својства на линеарна функција



② а) $(0,-1),(1,0)$; б) $(0,-3),(1,5;0)$; в) $(0,6),(2;0)$. ③ а) $x+y+1=0$; б) $4x+5y+12=0$.

④ $k=1$. ⑤ $m=3$. ⑥ $k=1$.

5 ① а) да; б) не. ② а) 7/5; б) 3; в) 1. г) -3/11. ③ За $a\neq-1$ решение е $x=-1$, а за $a=-1$ решение е секој реален број; б) за $a+b\neq0, x=\frac{-2ab}{a+b}$; ако $a+b=0$, тогаш за $a=-b$ равенката нема решение; ако $a+b=0$, за $a=b=0$, равенката е од видот $0\cdot x=0$, т.е. е неопределена.

6 ① $\frac{4}{3}$. ② -1. Упатство. НЗС $\left[3(4x+5),2(4x+5),6\right]=6(4x+5)$.

③ -3. Упатство. НЗС$(\ldots)=5x(2x-1)(2x+1)$. ④ 3.

⑤ За $a\neq3, x=\frac{7}{3-a}$, за $a=3$ равенката нема решение.

7 ① 41 и 19.Упатство. $x=2(60-x)+3$. ② 10 и 30. ③ 110 l. ④ 15 km/h и 12 km/h. Упатство $4x=4\cdot\frac{4}{5}x+12$.

8 ① а) $(1,\infty)$; б) $(3,\infty)$; в) $\left(-\frac{1}{11},\infty\right)$; г) $(12,\infty)$. ② $x\in\{-3,-2,-1\}$ ③ $x<0$.

ТЕМА 7

СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1 ① а) (1,2). Упатство $y=(5-3x)\in\mathbb{N}$
б) (1,4) и (2,2); ② (0,-1). ③ а) $\begin{cases}11x+2y=0\\2x-y=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}8x-3y=13\\3x+2y=8\end{cases}$.

2 ① (1,1); ② $\left(\frac{142}{17},\frac{2}{17}\right)$. ③ (3,6); ④ (0,0). Упатство: воведуваме нови променливи:

$\frac{1}{x+2}=u,\frac{1}{y-1}=v$, па системот е: $\begin{cases}6u-5v=8\\5u-6v=\frac{17}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{2}\\v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\\\frac{1}{y-1}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=2\\y-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ ⑤ $\left(-\frac{3}{2},-3\right)$

3 ① а) (1,2); б) нема решение; в) има бесконечно многу решенија; г) (1,1).

4 ① (2,-3). ② (7,-2). ③ (6,12). ④ $\left(\frac{6}{17},\frac{162}{17}\right)$. ⑤ а) $\left(1,\frac{2}{3}\right)$. б) нема решение; в) има бесконечно многу решенија бидејќи $y=\frac{5-x}{3}$, решението на системот е: $(x,y)=\left(x,\frac{5-x}{3}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

⑥ За $a\neq-2$ има решение $\left(\frac{3}{2a+4},\frac{2(a-1)}{a+2}\right)$; за $a=-2$ нема решение.

⑦ а) За $a\neq-2$ има решение $x=\frac{1+b}{2(a+2)}$, $y=\frac{a-2b}{a+2}$; б) за $a=-2$ и $b\neq-1$ нема решение;

в) за $a=-2$ и $b=-1$ има бесконечно решение.

5 ① 12 и 7. ② 38 и 9. ③ 35,5m/sek и 26,5m/sek. ④ 34 год.и 12 год. ⑤ 15 часа и 25 часа

⑥ 12 зајаци и 23 фазани.

6 ① а) $(1,5)$; б) $(1,\infty)$; в) $\left(-\frac{67}{4},-\frac{1}{35}\right]$; г) $(4,6)$. ② а) $(-1,3)$; б) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$; в) $(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$;

г) $(-\infty,0)\cup\left(\frac{5}{3},\infty\right)$. ③ а) $(-3,1)\cup(2,\infty)$; б) $(-4,-3)\cup(-1,2)$.

ТЕМА 8

СТЕПЕНИ И КОРЕНИ

1 ① а) $\frac{y}{x^2}$; б) $-\frac{b}{4a^2c^4}$; в) $\frac{6y^3}{x^2}$. ② а) $-\frac{15}{16}$; б) $-2\frac{1}{9}$. ③ а) $\frac{1}{a^{-2}b^3x^{-2}y^2}$; б) $\frac{1}{5^{-1}x^2c^{-2}b^{-3}}$;

в) $\frac{xy}{y-x}=\frac{1}{(xy)^{-1}(y-x)}$ Упатство: согледај го решението на задачата 8 од лекцијата.

④ а) $12^{-1}x^2y^2$; б) $a^{-6}b$; в) $3(a^2-1)^{-1}$. ⑤ а) $35\cdot10^{-4}$; б) $-6\cdot10^{-7}$; в) $53\cdot10^{-10}$.

2 ① а) 27; б) $\frac{1}{2}$; в) 7. ② а) $-\frac{1}{4}$; б) 0; ③ а) $a^{\frac{5}{3}}$; б) $b^{\frac{7}{6}}$; в) x.

④ а) $x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$ б) $a-4b$; в) $a-b$;

3 ① а) ⊤; б) ⊥; в) ⊤; ② а)-1; б)-3; в)6. ③ а) $\sqrt[4]{x}$; б) $2\sqrt{a}\sqrt[3]{b}$; в) $\frac{3\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}}$. ④ а) $a^{\frac{3}{4}}$;

б) $(2a^2b^3)^{\frac{1}{4}}$; в) $b^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$; г) $a^2+a^{\frac{2}{3}}$. ⑤ а) $\sqrt[12]{2^6}, \sqrt[12]{2^4}, \sqrt[12]{2^3}$; б) $\sqrt[6]{a^3}$ и $\sqrt[6]{a^4}$;

в) $\sqrt[24]{(abc)^{12}}$; $\sqrt[24]{a^8b^4}$; $\sqrt[24]{a^3b^3c^6}$. ⑥ а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{5a}$; в) $\sqrt[4]{6a^2b}$.

4 ① а) 44; б) -24; в)13, примени ја формулата $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; г) $1\frac{1}{2}$. ② а) xy^2;

б) $3x^2y^3$; в) $\frac{-2x^3}{y^2}$. ③ а) $6\sqrt{3}$; б) $3xy\sqrt[3]{2x^2y}$; в) $\frac{2ab^2}{c^2}\sqrt{3ab}$. ④ а) $\sqrt{18}$; б) $\sqrt[4]{\frac{8}{27}}$; в) $\sqrt{a}$; г) $\sqrt{x^2-y^2}$.

⑤ а) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; б) $3\sqrt[3]{2}$; в) $ab^2\sqrt{3b}$; г) $2\sqrt{3ab}$; д) $\frac{3}{7}\cdot\sqrt{14}$; ѓ) $2a\sqrt{a-2}$; е) $\frac{1}{b}\sqrt{a^2-b}$.

5 ① а)да; б)да; в) $\frac{1}{y}\sqrt[3]{xy}$; $\frac{1}{x}\sqrt[3]{xy}$; $\frac{1}{xy}\sqrt[3]{xy}$. ② а) $\sqrt{2}$; б)0; в) $\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}$. ③ а) $3\sqrt{a}$;

б) $2(a-b)^2\cdot\sqrt[3]{ab}$.

6 ① а) $42\sqrt{3}$; б) $6+14\sqrt{6}$; в) $|x^2-4|$; г) $6b^2\sqrt[3]{ab^4}$. ② а) $8xy$; б) 3; в) $\sqrt[12]{16a^7}$.

③ а) $ab^2\sqrt[3]{a^6b^5}$; б) $\frac{8}{27}$; в) a^2b; г) $5+2\sqrt{6}$. ④ а) $\sqrt[8]{27}$; б) $\sqrt[8]{a^5}$; в) $\frac{1}{y}\sqrt[12]{x^5y^5}$.

7 ① а) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$; б) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$; в) $2\sqrt[5]{b^3}$; г) $\sqrt{1-b}$; д) $\frac{\sqrt[3]{(a^2-b^2)^2}}{a+b}$. ② а) $2+\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

в) $5+2\sqrt{6}$; г) $\sqrt{xy}$.

8 ① а)1; б) $\sqrt{1+a}$; в) $\frac{4\sqrt{ab}}{b-a}$; г)4.

1 ① а) Сите ученици од една гимназија во Р. Македонија; б) бројот на децата во една градинка; в) производството на млеко во Р. Македонија.

② а) Дневното производство е популација, а примерок е 50 производи; б) 1000 и 50 елементи; в) не; г) на пример секој дваести производ.

③ Само бојата на автомобилот е квалитативно обележје. Само бројот на учениците во паралелката е прекинато обележје.

④ Популација е вкупната количина крв на човекот. Примерок е извадената крв од прстот или вената. Статистички обележја се: бројот на црвените и белите крвни зрнца, леукоцитите, еритроцитите, количината на шеќер во крвта и сл.

2 ① Статистичката низа е: 10, 10, 10, 10, 12, 12, 12, 15, 15, 17, 17, 19, 20, 26, 26, 26, а статистичката таблица е:

X	10	12	15	17	19	20	26
f	4	3	2	2	1	1	3

② Опсегот е $x_{max} - x_{min} = 55 - 30,5 = 24,5$. Бројот на интервали е $24,5 : 5 = 5$.

Таблицата е:

X	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55
f	3	4	7	7	3

③

X	0	1	2	3	4	5
f	38	144	342	287	164	25

④ а)

Обележје X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Фреквенција f	13	6	9	18	4	11	2	10	7
Кумулативна	13	19	28	46	50	61	63	73	80

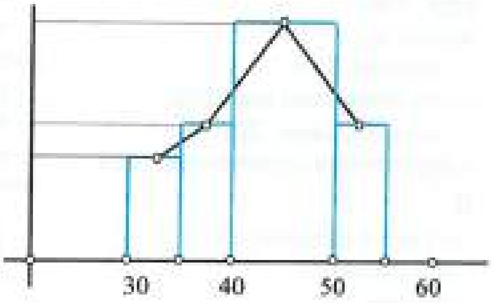
б)

Обележје X	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
Фреквенција f	1	2	3	5	4	2
Кумулативна f	1	3	6	11	15	17

3 ① а) Точките се со координати: $(10,4),(12,3),(15,2),(17,2),(19,1),(20,1),(26,3)$.

б) Точките имаат координати: $(0,38),(1,144),(2,342),(3,287),(4,164),(5,25)$.

②



③ а) Точките се со координати:

$$M_1(1,13), M_2(2,19), M_3(3,28), M_4(4,46), M_5(5,50), M_6(6,61), M_7(2,63), M_8(8,73), M_9(9,80).$$

б) Точките се со координати:

$$M_1(12,5;1), M_2(17,5;3), M_3(22,5;6), M_4(27,5;11), M_5(32,5;15), M_6(37,5;17).$$

4 ①

X	1	2	3	4	5
f	8	6	15	43	8

$$\overline{X}=\frac{1\cdot 8+2\cdot 6+3\cdot 15+4\cdot 43+5\cdot 8}{80}=\frac{281}{80}=3,51.$$

② Средните вредности на интервалите се: 55, 65, 75, 85, 95, 105, а

$$\overline{X}=\frac{55\cdot 30+65\cdot 25+75\cdot 10+85\cdot 12+95\cdot 8+105\cdot 25}{110}=\frac{11730}{110}=106,6kg.$$

③ а) Популацијата има парен број на членови, значи средниот член во низата не постои. Првите 50 члена од низата се во групи чии вредности не се поголеми од 12, а следните 50 члена се во групите чии вредности се од 16 до 22. Според тоа, медијаната е аритметичка средина помеѓу групите чии вредности се 12 и 16, т.е.

$$Me(x)=\frac{12+16}{2}=14.$$

б) Популацијата има парен број членови, па нема среден член. Медијаната е аритметичка средина на членовите што се наоѓаат во интервалот 6,5 до 7, 5. Според тоа, $Me(x)=\frac{6,5+7,5}{2}=7$.

ПРЕГЛЕД НА ПОИМИТЕ

СОДРЖИНА

Автори: Боривоје Миладиновиќ,
Трајче Ѓорѓијевски,
Никола Петрески

Рецензенти: **д-р Никола Пандевски** - редовен професор на ПМФ-Скопје
Катица Спасовска Бинчева - професор во ДСУ, гимназија "Р.Ј. Корчагин" -Скопје
Драган Ѓорѓиевски - професор во ДСУ, гимназија "Ј. Б. Тито"-Скопје

Уредник: **Билјана Ангелова**

Со Решение од Министерот на Министерството за образование и наука на Република Македонија бр. 10-1774/1 од 19.07.2002 година оваа книга е одобрена за употреба во средното гимназиско образование.

„АЛБИ“ ДОО Скопје, ул. Даме Груев бр.7–7/2 Скопје
Место и година на првото издание: Скопје 2002

CIP - Каталогизација во публикација на Народна и универзитетска
библиотека "Св. Климент Охридски" - Скопје
517 (075.3)=163.3

МИЛАДИНОВИЌ, Боривоје
Математика: I година: гимназија / Боривоје Миладиновиќ, 234
Трајче Ѓорѓијевски, Никола Петрески. - Скопје : Алби, 2002. - 240
стр.,илустр.: 26 cm

ISBN 9989 - 919 - 26 -7
1. Ѓорѓијевски, Трајче 2. Петрески, Никола

Издавач:
ДРУШТВО ЗА ИЗДАВАЧКА ДЕЈНОСТ, ПРОИЗВОДСТВО, ПРОМЕТ И УСЛУГИ
□АЛБИ□ДОО Скопје
ул. "Даме Груев" бр.7–7/2, Скопје

Управител: Александар Стефановски

Боривоје Миладиновиќ, Трајче Ѓорѓијевски, Никола Петрески
МАТЕМАТИКА
I година гимназиско образование

Лектура
Сузана Стојкоска

Компјутерска обработка
Милчо Аврамоски, Дејан Крстевски, Блаже Тофиловски

Коректура
Автори

XIX коригирано издание
Обем 240 страници, формат 21 x 26 cm
Тираж 134 примероци
Отпечатено во печатница:
Друштво за графичка, издавачка и трговска дејност "Печатница Наумовски" Д.О.О.Е.Л. Скопје
ул. Пекљане бр.71 Скопје

Скопје 2020 година